J.-A. SERRET.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS DEUTSCH BEARBEITET

VON

AXEL HARNACK.

ZWEITE, DURCHGESEHENE AUFLAGE

VON

G. BOHLMANN.

ERSTER BAND.

DIFFERENTIALRECHNUNG.

MIT 85 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Vorwort zur deutschen Ausgabe.

Unter den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, welche im Laufe des letzten Decenniums veröffentlicht worden sind, erscheint das Werk des Herrn Serret zu einem ersten, grundlegenden Studium besonders geeignet; denn es verbindet mit klarer Präcision eine grofse Vollständigkeit in den Anwendungen dieser Theorie. Je vollkommener die Einsicht in die Mannigfaltigkeit der reellen Funktionen, von denen die komplexen doch nur eine besondere Art bilden, geworden ist, um so mehr erhöhen sich die Anforderungen an eine exakte Begründung der Analysis. Dieselbe wird in dem vorliegenden Werke dadurch angestrebt und erreicht, dafs alle Lehrsätze zwar nicht immer in der vollen Allgemeinheit ihrer Gültigkeit dargelegt, jedoch stets mit genauer Angabe der Voraussetzungen bewiesen werden. Dies nur ist zunächst notwendig, ja für den Beginn des Studiums allein zweckmäfsig. Denn dieses soll vor allem dazu führen, dafs der Anfänger alsbald erkennt, wie vielseitig und vollkommen die Methode ist, mit welcher wir die stetigen Formen und Bewegungen der mefsbaren Gröfsen bis zu ihren Grenzen zu untersuchen vermögen. Der erste Teil, die Differentialrechnung, enthält daher eine umfassende Theorie der Kurven und Flächen, während in der Integralrechnung eine Theorie der Differentialgleichungen gegeben ist, wie sie in den deutschen Lehrbüchern, abgesehen von dem Werke des Herrn Dienger, das schon einer früheren Zeit angehört, eigentlich vollständig fehlt. Freilich ist gerade auf diesem Gebiete, besonders bei den linearen Gleichungen, die Art der Problemstellung in den letzten Jahren eine wesentlich neue geworden; doch bleiben die älteren Methoden eines Euler und Lagrange als Grundlage des Ganzen nach wie vor unentbehrlich, wenn auch das Bestreben, alle Probleme in dieselbe Form zu zwingen, sich als wertlos erwiesen hat. Für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist nur die Methode von Cauchy, für Gleichungen zweiter Ordnung die von Monge und Ampère angegeben, und ich habe dies auch in der vorliegenden Ausgabe nicht geändert, zumal da die Jacobischen Arbeiten jetzt zugänglicher als früher geworden sind.

In der Erkenntnis, dafs es nicht thunlich ist, dem Studierenden, der sich neue Begriffe zu eigen machen soll, ein Lehrbuch zu empfehlen, welches in einer fremden Sprache geschrieben ist, selbst wenn er dieselbe einigermafsen beherrscht, habe ich diese deutsche Bearbeitung unternommen, als ich im vorigen Herbst meine Lehrthätigkeit für längere Zeit unterbrechen mufste. Die Genehmigung dazu wurde mir in bereitwilligster Weise von dem Herrn Verfasser sowohl, wie von dem Verleger, Herrn Gauthier-Villars, erteilt, denen ich meinen verbindlichsten Dank hierfür ausspreche. Meiner Arbeit liegt die zweite Ausgabe des französischen Originales zu Grunde, deren Bände in den Jahren 1879 und 1880 erschienen sind. Es war nicht mein Bestreben, den Inhalt des Werkes zu erweitern, das sich schon in vielen Kapiteln durch ausgedehntere eigene Untersuchungen des Herrn Serret auszeichnet. Auch die allgemeinen Lehrsätze habe ich fast sämtlich in dem Umfange belassen, welche der Verfasser ihnen gegeben hat. Die Werke der Herren Dini, Pasch, du Bois-Reymond, sowie mein eigenes vor einigen Jahren erschienenes Buch können für Fragen dieser Art zur Ergänzung dienen; auch darf ich wohl auf meine beiden, soeben in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Abhandlungen: „die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen“ für weitere Studien verweisen. Gröfsere Änderungen oder Ausführungen, welche mir trotzdem wünschenswert erschienen, und die zumal in der Begründung der Integralrechnung an mehreren Stellen sich finden, habe ich durch kleineren Druck kenntlich machen lassen.

Der Druck des zweiten Teiles soll unmittelbar nach Vollendung des ersten beginnen, so dafs der Band im nächsten Frühjahr erscheinen wird.

Juni 1884.

Axel Harnack.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Einer Aufforderung des Herrn Verlegers folgend habe ich die Besorgung der zweiten Auflage des Serret-Harnack'schen Werkes übernommen. Bei meiner Arbeit leiteten mich folgende allgemeine Erwägungen:

Die in dem Vorwort von Harnack geschilderten Vorzüge des Serret'schen Werkes, welche es für Studierende besonders geeignet machen, sollten nicht verwischt werden. Es konnte aber das Werk nicht so bleiben, wie es war, wollte ich anders nicht ganz darauf verzichten, die neueren Errungenschaften auf dem Gebiete der Analysis zu berücksichtigen. Schon Harnack hat durch in den Text eingestreute Bemerkungen diejenigen Ergänzungen angebracht, welche er seiner Zeit für notwendig erachtete. Hätte ich nun diesen Modus beibehalten wollen, so hätte es sich für mich nur darum gehandelt, die Harnack'schen Noten passend zu vervollständigen. Ich sah aber bald ein, dafs dadurch das Buch einen so inhomogenen Charakter erhalten hätte, dafs es seinen ursprünglichen Vorzug grofser Lesbarkeit vollständig verloren hätte. So entschlofs ich mich denn die Harnack'schen Bemerkungen und diejenigen Änderungen und Zusätze, die ich selbst für notwendig erachtete, in den Text zu verweben. Ich mufste demnach einen Teil des Stoffes, der sich in allen neueren Lehrbüchern der Analysis findet, auch in den Serret hinübertragen. Nur mufste ich mir darüber klar werden: wo sollte ich da die Grenze ziehen? Hierüber will ich jetzt Rechenschaft ablegen.

Ich beginne mit den sachlichen Änderungen. Vollständig umgearbeitet wurden das erste und elfte Kapitel. Im ersten Kapitel wurde der Begriff der Zahl als etwas jedem Geläufiges und Evidentes angenommen; nur die Einteilung der Zahlen wurde gegeben, um die Analogie mit den Funktionen hervortreten zu lassen; eine um so ausführlichere Darlegung erfuhr der Begriff der Grenze. Das elfte Kapitel soll den Studierenden auf die moderne Funktionentheorie ein wenig vorbereiten, ohne jedoch gar zu sehr ins Einzelne zu gehen.

Gröfsere Änderungen findet man a) in dem Abschnitte über die Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher (Kapitel VI), wo einige Unrichtigkeiten beseitigt sind, b) bei den singulären Punkten einer ebenen Kurve; es handelt sich hauptsächlich um eine vereinfachende Darstellung, die allzu weitläufige Rechnungen, im Besonderen die trigonometrischen Funktionen vermeidet; c) möchte ich noch auf einen Punkt von prinzipieller Bedeutung hinweisen, er betrifft das Verhältnis des ersten Bandes dieses Werkes zum zweiten, der Integralrechnung. Ich bin der Meinung, dafs eine derartige Trennung von Differential- und Integralrechnung keineswegs notwendig und auch nicht in jeder Hinsicht wünschenswert ist. Ist aber einmal ein Werk ganz nach dem Gesichtspunkte einer solchen Trennung angelegt, wie es doch beim Serret der Fall ist, und wie es auch dem überwiegenden Brauche entspricht, so soll auch der Begriff des Integrales so vollständig wie möglich aus dem die Differentialrechnung lehrenden Teile verbannt werden; wenigstens gilt dies, solange es sich um die Definition des Integrales als Grenzwert einer Summe handelt. Demgemäfs entfernte ich alle die Betrachtungen, die mehr oder weniger versteckt ein Integral in dieser Weise einführten, da sie sich im zweiten Bande viel schärfer und kürzer erledigen lassen. Diese Bemerkung bezieht sich auf die Artikel: Nr. 192, Flächeninhalt einer ebenen Kurve; 193, Bogenlänge einer ebenen Kurve; 257, Bogenlänge einer Raumkurve. Im elften Kapitel über Funktionen einer komplexen Veränderlichen benutzte Serret — wenn auch versteckt — den Begriff des Integrales einer komplexen Veränderlichen, erstreckt über einen Weg in der komplexen Ebene. Auch dies ist bei meiner Umarbeitung im ersten Bande fortgelassen mit der Absicht, jenen Begriff in der Integralrechnung zu bringen.

Was nun im Übrigen die sachliche Bearbeitung des ersten Bandes betrifft, so ging mein Bestreben dahin, den Sätzen eine möglichst präcise Fassung zu geben und offenbare Unrichtigkeiten nach Kräften auszumerzen. In dieser Hinsicht hat mir das Werk von Genocchi Peano, das auch in den Bemerkungen öfter citiert ist, sehr gute Dienste geleistet. So ist nun ein Werk zustande gekommen, das einen Kompromisstandpunkt einnimmt zwischen denjenigen Büchern, die nur die allerersten Unterweisungen für Anfänger geben und denjenigen, welche nur den Gesichtspunkt einer wissenschaftlichen Entwicklung unbekümmert um paedagogische Absichten im Auge haben. Zum Schlufs habe ich noch einige Bemerkungen zusammengestellt, die dem Leser ermöglichen sollen auf Grund der Lektüre des Serretschen Buches sich in einigen Punkten weiter zu bilden, in welchen er eine genauere Orientierung erstrebt. Dabei war es keineswegs meine Absicht, immer direkt auf die Originalarbeiten zurückzugehen sondern nur solche Quellen anzugeben, welche zur Orientierung über den fraglichen Gegenstand mir .jedesmal am geeignetsten erschienen.

Zum Schlusse sind noch einige Änderungen von äufserlicher Natur zu verzeichnen. Die einzelnen Kapitel sind konsequent in bestimmte Paragraphen geteilt und die Nummern der einzelnen Artikel durchgängig mit Überschriften versehen worden; dadurch erfuhr auch das Inhaltsverzeichnis eine Vervollständigung. Am Ende des Werkes findet sich ein alphabetisches Sachregister.

Ich kann nicht hoffen, dafs die jetzige Ausgabe des Serret-Harnackschen Werkes allen Wünschen und Forderungen, die man an sie zu stellen hat, gerecht wird, und wenn ich auch vielfach mit Fachgenossen über die Anlage des Unternehmens und über Einzelheiten Rücksprache genommen und ihnen viele Ratschläge zu danken habe, so enthält eine derartige Aufgabe gar Vieles, das ganz vom subjektiven Ermessen des Einzelnen abhängt. Um so dankbarer werde ich Berichtigungen und Ratschläge aufnehmen, die mir aus dem Leserkreise zugehen, zumal, wenn sie sich für die beiden folgenden Bände benutzen lassen würden. Es erscheint hiermit der erste Band, die beiden anderen werden bald nachfolgen.

Der Verlagsbuchhandlung bin ich für die Bereitwilligkeit, mit der sie allen meinen Wünschen entgegengekommen ist, zu grofsem Danke verpflichtet.

Göttingen, im November 1896.

G. Bohlmann.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Einleitende Begriffe.

Zweites Kapitel.

Der erste Differentialquotient der Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

Drittes Kapitel.

Höhere Differentialquotienten von Funktionen einer Veränderlichen. Partielle Differentialquotienten von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Viertes Kapitel.

Totale Differentiale und partielle Differentialquotienten.

Fünftes Kapitel.

Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen.

Sechstes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

Siebentes Kapitel.

Theorie der ebenen Kurven.

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Theorie ebener Kurven.

Neuntes Kapitel.

Theorie der Raumkurven und Flächen.

Zehntes Kapitel.

Die Kurven auf Flächen und die Flächenfamilien.

Elftes Kapitel.

Über Funktionen einer komplexen Variabelen.

Zwölftes Kapitel.

Zerlegung der rationalen Funktionen in Partialbrüche.

Erstes Kapitel.

Einleitende Begriffe.

§ 1. Von den Zahlen.

1. Die Grundgesetze. Dasjenige, was die Zahlen charakterisiert, das sind die Gesetze, welchen sie gehorchen. Diese lassen sich auf einige wenige Grundformeln zurückführen, deren Gültigkeit zunächst für die ganzen positiven Zahlen festgestellt wird. Man kennt 4 elementare Rechnungsarten, die 4 Species genannt: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. Für sie sind die oben erwähnten Grundformeln diese:

I. Addition.

1) Associatives Gesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2) Kommutatives Gesetz:

$$a + b = b + a.$$

II. Multiplikation.

1) Associatives Gesetz:

$$(ab)c = a(bc).$$

2) Kommutatives Gesetz:

$$ab = ba.$$

3) Distributives Gesetz:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

2. Der Bereich der rationalen Zahlen. Die sogenannten indirekten Operationen, Subtraktion und Division, lassen sich im Bereiche der ganzen positiven Zahlen nicht mehr allgemein ausführen. Man definiert deshalb neue Gröfsen, die negativen ganzen Zahlen und die Quotienten von ganzen Zahlen oder Brüche; jene um die Subtraktion, diese um die Division allgemein möglich zu machen. So entsteht der Bereich aller rationalen Zahlen. Dabei zeigt sich, dafs für die rationalen Zahlen die oben genannten Rechnungsgesetze erhalten bleiben und eben aus diesem Umstande leitet man die Berechtigung her sie ebenfalls Zahlen zu nennen. Freilich eine sehr wichtige Thatsache ist hier anzumerken: Nicht möglich ist die Division durch Null. Vielmehr beachte man immer die Regel:

Man dividiere nie durch eine Zahl, bevor man sich überzeugt hat, was geschieht, wenn diese Zahl null ist.

3. Der Bereich der reellen Zahlen. Eine Gleichung wie:

$$x^2 - 2 = 0$$

hat im Gebiete der rationalen Zahlen keine Lösung. Man weifs aber, dafs:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$

sich mit beliebig grofser Annäherung durch rationale Zahlen darstellen läfst. Dieser Umstand hat zur Folge, dafs bei passender Interpretation auch für $\sqrt{2}$ die obigen Rechnungsgesetze erhalten bleiben. $\sqrt{2}$ ist also eine Zahl. Allgemein kann man zeigen:

„Jede Gröfse, welche sich mit beliebig grofser Annäherung durch rationale Zahlen darstellen läfst, befolgt die oben genannten Gesetze. Sie heifst deshalb eine Zahl.“

Nehmen wir alle so entstehenden Zahlen zu den rationalen Zahlen hinzu, so entsteht der Bereich aller *reellen* Zahlen überhaupt.

Jede nicht rationale Zahl heifst irrational. $\sqrt{2}$ ist irrational. Auch die Zahl, welche die Länge eines Halbkreisbogens mit dem Radius 1 mifst:

$$\pi = 3{,}14159\ \ldots$$

ist irrational. Man unterscheidet aber die irrationalen Zahlen noch weiter. Eine Zahl x, welche — wie $\sqrt{2}$ — einer algebraischen Gleichung:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $a_0 a_1 \ldots a_n$ genügt, heifst eine *algebraische* Zahl. Jede nichtalgebraische Zahl heifst *transcendent.* π ist transcendent.

Über den Bereich der reellen Zahlen hinausgegangen wird im elften Kapitel dieses Bandes. Bis dahin soll — wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist — unter Zahl schlechthin immer eine reelle Zahl verstanden werden.

Bildet man die Reihe von Begriffen:

$$\textit{Reelle, algebraische, rationale, ganze} \left\{ \begin{matrix} \textit{positive} \\ \textit{negative} \end{matrix} \right. \textit{Zahl,}$$

so ist in ihr jeder folgende Begriff als Spezialfall im vorhergehenden enthalten.

4. Der absolute Betrag. Die reellen Zahlen sind — abgesehen von der Null — positiv oder negativ. Unter dem „*absoluten Betrage*“ einer Zahl a versteht man a oder $-a$, jenachdem a positiv oder negativ ist. Der absolute Betrag von null ist selbst null. Den absoluten Betrag von a bezeichnet man nach *Weierstrass* durch $|a|$. Es ist also:

$$|7| = |-7| = 7 .$$

Es seien jetzt $a, b, \ldots n$ eine Reihe von Zahlen, und $\alpha, \beta, \ldots \nu$ ihre absoluten Beträge. Dann ist:

$$a = \pm \alpha, \quad b = \pm \beta, \quad \ldots n = \pm \nu .$$

Rechts gilt in jeder Gleichung das obere oder untere Zeichen, je nachdem die linke Seite positiv oder negativ ist.

Ist nun die Summe $a + b + \cdots + n$ nicht negativ, so ist:

$$|a + b + \cdots + n| = a + b + \cdots + n = \pm \alpha \pm \beta \pm \cdots \pm \nu .$$

Nimmt man in der letzten Summe alle Zeichen positiv, so wird diese nicht verkleinert; es ist also:

$$|a + b + \cdots n| \leqq \alpha + \beta + \cdots + \nu = |a| + |b| + \cdots + |n| .$$

Ist dagegen die Summe $a + b + \cdots + n$ negativ, so ist die Summe von $-a, -b, - \cdots - n$ positiv und daher nach dem eben Bewiesenen:

$$|-a - b - \cdots n| \leqq |-a| + |-b| + \cdots + |-n| .$$

Da aber immer $|-x| = |x|$ ist, so gilt auch in diesem Falle die Beziehung:

$$|a + b + \cdots + n| \leqq |a| + |b| + \cdots + |n| ,$$

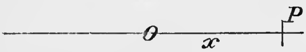
d. h.:

Der absolute Betrag einer Summe ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge. Der Fall der Gleich-

heit tritt nur ein, wenn alle von null verschiedenen Summanden das gleiche Vorzeichen haben.

5. Geometrische Repräsentation der Zahlen durch Punkte einer Geraden. Nehmen wir auf einer geraden Linie willkürlich einen festen Punkt O und eine Längeneinheit an, so können wir die Entfernung irgend eines Punktes P der Geraden von O mit Hülfe jener Längeneinheit messen. Der so gefundenen Zahl erteilen wir das positive oder negative Zeichen, je nachdem P rechts oder links von O liegt. Den Punkten P der Geraden entsprechen somit bestimmte Zahlen. Umgekehrt können wir einer Zahl einen bestimmten Punkt der Geraden zuordnen, indem wir von O aus eine Länge OP abtragen, welche durch den absoluten Betrag jener Zahl gemessen wird, und zwar wird man P rechts oder links von O annehmen, je nachdem das Vorzeichen der Zahl positiv oder negativ ist. Praktisch hat freilich die Genauigkeit einer solchen Messung ihre Grenzen. Wir wollen uns jedoch vorstellen, dafs wir die Genauigkeit der Messung so weit treiben könnten wie wir wollten. Alsdann kann man das folgende Axiom aussprechen:

Fig. 1.



Axiom. Die Gesamtheit aller reellen Zahlen x und die Gesamtheit aller Punkte P einer Geraden lassen sich durch unsere Messung eindeutig aufeinander beziehen; dergestalt, dafs jeder reellen Zahl ein und nur ein Punkt der Geraden entspricht und jedem Punkte der Geraden eine und nur eine reelle Zahl.

§ 2. Von den Funktionen.

6. Veränderliche. Funktionen. Die Gröfsen, welche den mathematischen Untersuchungen zu Grunde liegen, sind von zweierlei Art; die einen besitzen einen bestimmten festen Wert, die anderen können unendlich viele verschiedene Werte annehmen. Jene nennt man *konstante*, diese *veränderliche* oder *variabele* Gröfsen. Die Gesamtheit der Werte, welche eine Veränderliche annimmt, heifst ihr *Variabilitätsbereich.*

Hat man bei einer Aufgabe mehrere Variabele zu betrachten, so kann man einigen von ihnen willkürliche Werte beilegen, und alsdann erhalten die anderen Variabelen bestimmte Werte. Erstere heifsen die *unabhängigen Veränderlichen*, die anderen die *abhängigen Veränderlichen* oder die *Funktionen der unabhängigen*.

So führt z. B. die Untersuchung des Kreises auf drei Gröfsen: den Radius, die Peripherie und die Fläche. Erteilt man einer dieser Gröfsen willkürliche verschiedene Werte, so bekommen die anderen beiden bestimmte, entsprechende Werte; sie sind also Funktionen der ersten, welche selbst hierbei die unabhängige Variabele ist.

Bei einem geraden Kreiscylinder hat man vier Gröfsen zu betrachten: den Radius, die Höhe, die Oberfläche und das Volumen. Hier kann man zweien der Gröfsen willkürliche Werte beilegen, die anderen beiden bekommen alsdann bestimmte Werte, sie sind also Funktionen von zwei unabhängigen Variabelen.

Allgemein definiert man:

y ist eine Funktion der einen Veränderlichen x, wenn jedem Werte der Veränderlichen x ein bestimmter Wert y zugeordnet wird.

y ist eine Funktion der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$, wenn jedem Wertsysteme der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ ein bestimmter Wert y zugeordnet ist.

7. Einteilung der Funktionen. Die Funktionen, welche wir betrachten werden, werden meistens *analytisch definiert* sein durch eine Formel, welche die Veränderlichen x enthält und deren Werte die Funktionswerte y repräsentieren.

Man teilt die Funktionen in ähnlicher Weise ein, wie wir es für die Zahlen bereits kennen gelernt haben.

Unterwirft man die Veränderlichen und Konstanten einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, so entsteht ein *Polynom* oder eine *ganze rationale* Funktion. Die Gleichung:

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

definiert, wenn die a Konstanten sind, y allgemein als ganze rationale Funktion von x. Sind die a ganze rationale Funktionen einer zweiten Variabelen x_1, so ist y eine ganze rationale Funktion von x und x_1, sind die Koeffizienten a ganze ationale Funktionen von x_1 und x_2, so wird y eine ganzer rationale Funktion von x, x_1, x_2 u. s. w.

Der Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen:

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}$$

heifst eine *gebrochene rationale* Funktion. Die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen zusammen bilden den Bereich der *rationalen* Funktionen schlechthin.

Ist y Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ganze, rationale Funktionen sind, so heifst y eine *algebraische* Funktion. Die algebraischen Funktionen umfassen also als spezielle Fälle die rationalen. $y = |\sqrt{x}|$ ist demnach eine algebraische Funktion ebenso wie $y = -|\sqrt{x}|$; denn in beiden Fällen genügt y der algebraischen Gleichung:

$$y^2 - x = 0.$$

Eine nicht algebraische Funktion heifst eine *transcendente.* $\sin x$ ist eine transcendente Funktion von x.

Eine Funktion y heifst *explicite* gegeben, wenn die sie definierende Gleichung nach y aufgelöst ist; im entgegengesetzten Falle ist y *implicite* gegeben. $|\sqrt{x}|$ ist durch $y = |\sqrt{x}|$ explicite, durch $y^2 - x = 0$ implicite gegeben.

Der Variabilitätsbereich von x, für welchen die ganzen rationalen Funktionen von x definiert sind, besteht aus allen reellen Zahlen überhaupt; der für die gebrochenen rationalen Funktionen umfafst ebenfalls alle reellen Zahlen x, ausgenommen die etwaigen Nullstellen des Nenners; $|\sqrt{x}|$ endlich ist nur definiert für den Variabilitätsbereich aller *positiven* reellen x.

Um zu bezeichnen, dafs y eine Funktion von x oder eine solche von x_1, x_2, u. s. w. ist, schreibt man:

$$y = f(x) \quad \text{bezw.} \quad y = f(x_1, x_2), \quad \text{u. s. w.}$$

Der Buchstabe f zur Bezeichnung einer Funktion ist zwar die Regel, er kann aber auch durch jeden anderen ersetzt werden.

Geometrisch repräsentiert man gewöhnlich Funktionen *einer* Veränderlichen durch *Kurvenzüge*, Funktionen zweier

Veränderlichen durch *Flächen.* Wir wollen nun einige spezielle transcendente Funktionen betrachten.

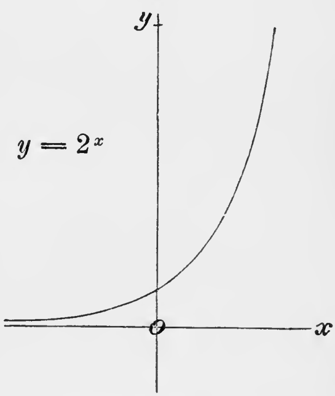
8. Die Exponentialfunktion a^x. Ist a eine positive Zahl, so ordnet der Ausdruck a^x jeder Zahl x eine positive Zahl a^x zu. Von denjenigen Werten von a^x, die nicht reell und positiv sind, sehen wir hier ab. Die so entstehende Zuordnung der Zahlen x und a^x macht a^x zu einer Funktion von x. Um uns über den Verlauf von ihr zu unterrichten, zeichnen wir die Kurve $y = a^x$. Je nach dem Werte von a sind da verschiedene Fälle zu unterscheiden:

$$\alpha)\quad a > 1. \qquad \beta)\quad a = 1. \qquad \gamma)\quad a < 1.$$

α) Ist zunächst $a > 1$, so hat die Kurve ungefähr die untenstehende Gestalt, die sich auf den Fall $a = 2$ bezieht. Die Figur lehrt uns Folgendes:

Wenn x, von sehr grofsen negativen Werten aus wachsend, bis 0 geht, wächst die Funktion a^x von sehr kleinen positiven Werten bis 1. Geht dann x von 0 bis zu sehr grofsen positiven Zahlen, so wächst a^x weiter und zwar immer stärker von 1 bis zu sehr grofsen positiven Zahlen. In arithmetischer Progression stehenden Abscissen entsprechen in geometrischer Progression stehende Ordinaten. a^x wächst also beständig und nimmt daher jeden positiven Wert, und jeden nur einmal an.

Fig. 2.



β) Ist $a = 1$, so ist a^x ebenfalls beständig gleich 1.

γ) Ist endlich $a < 1$, und geht x von sehr grofsen negativen Werten aus wachsend durch 0 und weiter zu sehr grofsen positiven Werten, so fällt umgekehrt a^x von sehr grofsen positiven Werten beständig bis $a^0 = 1$ und dann weiter bis zu immer kleineren positiven Werten. a^x nimmt wieder jeden positiven Wert und jeden nur einmal an.

9. Die goniometrischen Funktionen. Die goniometrischen Funktionen sind:

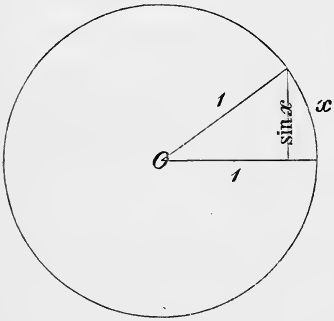
Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens.

Wir bezeichnen sie durch:

sin, cos, tg, ctg.

Die goniometrischen Funktionen sind im Unterschiede von den bisher betrachteten nicht numerisch, sondern geometrisch definiert. In der Trigonometrie aber wird schon gelehrt, wie man zu jedem Winkel eines Kreises den numerischen Wert der Funktionen sin, cos, etc. mit beliebiger Annäherung berechnen kann.

Fig. 3.



Die Zahl x, durch welche die Gröfse des Winkels gemessen wird, ist hierbei als absolute Zahl gedacht, sie giebt die Länge des zum Winkel gehörigen Bogens, gemessen auf einem Kreise mit dem Radius 1 (vergl. Fig. 3). Die volle Umdrehung, der Winkel von 360^0, erhält dabei den Zahlenwert 2π und jeder Winkel, dessen Gradzahl a ist, den numerischen Wert:

$$x = 2\pi \cdot \frac{a}{360} = \frac{a\pi}{180}.$$

Man nennt dieses Winkelmafs das *natürliche.*

Ein Winkel von $a = 1^0$ wird im natürlichen Winkelmafs durch die Zahl

$$x = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745$$

gemessen. Umgekehrt entspricht dem Winkel $x = 1$ im Gradmafs:

$$a = \frac{180}{\pi} = 57^0\,17'\,44{,}8''.$$

Zeichnet man unter Festhaltung des natürlichen Winkelmafses die Kurven

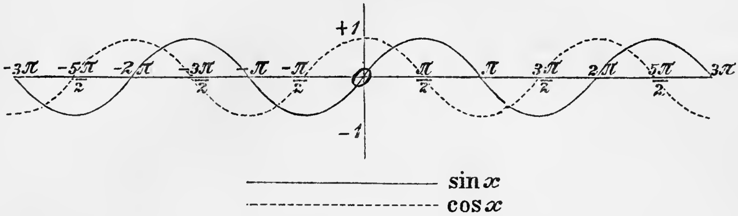
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

so zeigen diese das aus der Goniometrie bereits bekannte Verhalten. Folgendes möge dabei hervorgehoben werden.

1) Alle vier Funktionen sind *periodische* Funktionen von x, d. h. sie bleiben ungeändert, wenn man das Argument x um

eine gewisse Konstante, die *Periode* genannt, vermehrt. Die Periode von sin und cos ist 2π, die von tg und ctg bereits π.

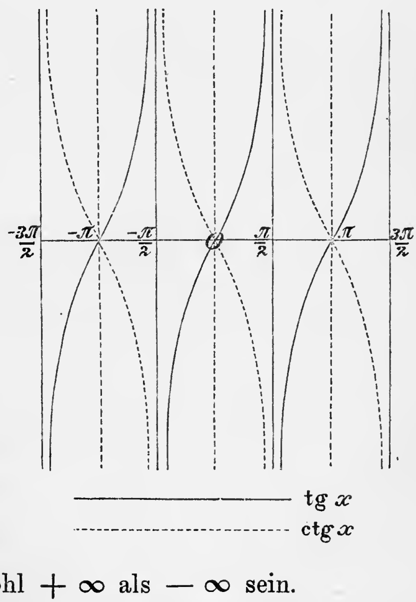
Fig. 4.



2) Sinus und Cosinus nehmen alle Werte zwischen -1 und $+1$ an, Tangens und Cotangens alle reellen Werte überhaupt.

3) Der Sinus nimmt in dem Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ alle Werte zwischen -1 und $+1$ und jeden nur einmal an; denn, wenn x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ geht, wächst $\sin x$ von -1 bis $+1$. Der Cosinus nimmt alle Werte zwischen -1 und $+1$ und jeden nur einmal in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ an. Beschränken wir bei Tangens und Cotangens das x auf dieselben Intervalle wie bezw. bei Sinus und Cosinus, so nehmen tg und ctg alle reellen Zahlenwerte und jeden nur einmal an. Ausnahmestellen sind $x = \frac{\pi}{2}$ für den Tangens, $x = 0$ und $x = \pi$ für den Cotangens, wo die fraglichen Funktionen keinen bestimmten endlichen Wert haben; vielmehr können sie dort sowohl $+\infty$ als $-\infty$ sein.

Fig. 5.



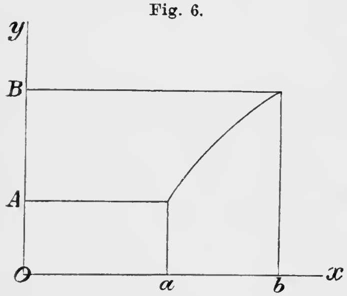
10. Die inverse Funktion. Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, für jedes x, welches dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$

angehört. Alsdann entspricht jedem Werte x dieses Intervalles ein bestimmter Wert y. Die Gesamtheit dieser Werte y möge dem Intervalle

$$A \leqq y \leqq B$$

angehören. Nimmt nun $f(x)$ in dem Intervalle jeden Wert zwischen A und B einmal und nur einmal an, so entspricht auch umgekehrt jedem Werte y des Intervalles A bis B ein und nur ein bestimmter Wert x, für welchen $y = f(x)$ wird. Es ist dann auch x eine Funktion von y, $x = \varphi(y)$ und zwar heifst $\varphi(y)$ *eine zu* $f(x)$ *inverse Funktion.* Die nebenstehende Figur sucht die Definition zu erläutern. Der Kurvenbogen giebt den Verlauf der Funktion $y = f(x)$, wenn x als Abscissenachse, y als Ordinatenachse gewählt ist. Die Projektion der Kurvenpunkte auf die x-Achse liefert alle Punkte des Variabilitätsbereiches $a \leqq x \leqq b$.

Fig. 6.



Die Lote oder Ordinaten in diesen Kurvenpunkten geben die zugehörigen Funktionswerte y. Projiziert man den Kurvenzug auf die y-Achse, so wird auf dieser gerade das Intervall von A bis B abgeschnitten. Da umgekehrt jedem Werte y dieses Intervalles ein und nur ein Wert x des Intervalles a bis b entsprechen soll, so wird bei der Projektion des Kurvenbogens auf die y-Achse der Abschnitt von A bis B *lückenlos* und *überall einfach* überdeckt. Betrachtet man jetzt y als unabhängige Veränderliche und sucht denjenigen Wert x in dem Intervalle von a bis b, für welchen $y = f(x)$ wird, so bildet man die Funktion $x = \varphi(y)$. Geometrisch wird diese erhalten, indem in den einzelnen Punkten y des Intervalles $A \leqq y \leqq B$ Parallelen zur x-Achse von der Länge und Richtung gezogen werden, die jedesmal durch $x = \varphi(y)$ bestimmt sind. *Dabei entsteht genau der alte Kurvenzug wieder. Nur, dafs dieses Mal die Abscissen- und Ordinatenachse ihre Rolle vertauscht haben.*

Betrachten wir beispielsweise die Funktion $y = x^2$ und weisen x alle positiven Zahlen als Variabilitätsbereich an. Dann nimmt y ebenfalls alle positiven Zahlenwerte an und jedem positiven Werte x entspricht ein und nur ein positiver Wert y und jedem positiven Werte y ein und nur ein positiver Wert x. Hier wird dann $x = |\sqrt{y}|$ die betreffende zu x^2 inverse Funktion. $-|\sqrt{y}|$ wäre die andere zu x^2 inverse Funktion.

11. Der Logarithmus. Betrachten wir die in 8. definierte Funktion $y = a^x$, so sahen wir, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, nimmt y alle positiven Werte und jeden nur einmal an. Natürlich ist dabei a als positiv und von Null und 1 verschieden vorausgesetzt. Es wird daher umgekehrt x eine Funktion von y werden. Die so entstehende Funktion heifst bekanntlich der Logarithmus von y:

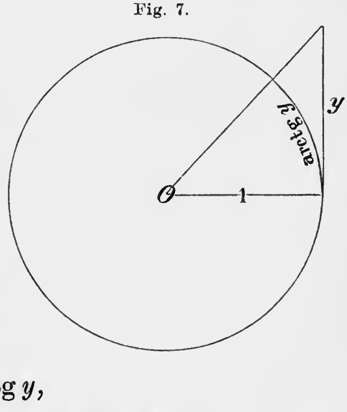
$$x = {}^a\log y.$$

Durchläuft y alle positiven Zahlen von 0 an, so nimmt der Logarithmus alle positiven und negativen Werte und jeden nur einmal an. Für negative Werte von y ist ${}^a\log y$ nicht definiert.

12. Die cyclometrischen Funktionen. Die inversen Funktionen der goniometrischen Funktionen heifsen die cyclometrischen.

a. Ist z. B. $y = \operatorname{tg} x$, so wird, wenn x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ läuft, y alle negativen und positiven Werte durchlaufen und jeden Wert nur einmal annehmen. Jedem Werte y entspricht daher ein und nur ein Wert x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. x wird so eine Funktion von y, welche, wenn y alle reellen Werte durchläuft, alle Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ annimmt. Die so definierte Funktion heifst der Arcus Tangens von y und man schreibt:

Fig. 7.



$$x = \operatorname{arctg} y,$$

weil x ein Bogen ist, dessen Tangens gleich y ist.

Die so entstehenden Werte x sind aber nicht die einzigen, welche die Gleichung $y = \operatorname{tg} x$ erfüllen. Da vielmehr der Tangens die Periode π besitzt, so ist auch $y = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, wo k irgend eine ganze Zahl ist, und daher erfüllt auch:

$$x = \operatorname{arc\,tg} y + k\pi$$

die Gleichung $y = \operatorname{tg} x$. Jede Funktion der Form $\operatorname{arc\,tg} y + k\pi$ ist daher eine zum Tangens inverse Funktion. Die Gleichung $x = \operatorname{arc\,tg} y + k\pi$ liefert aber *alle* Werte x, welche $y = \operatorname{tg} x$ genügen, wenn k alle ganzen Zahlen durchläuft.

b. Ist dagegen $y = \operatorname{ctg} x$ und durchläuft x alle Werte von 0 bis π, so durchläuft y alle reellen Werte und jeden nur einmal. Umgekehrt wird daher:

$$x = \operatorname{arc\,ctg} y$$

eine Funktion, welche alle Werte zwischen 0 und π und jeden nur einmal annimmt, wenn y alle reellen Werte durchläuft *Alle* Werte x, welche $y = \operatorname{ctg} x$ erfüllen, liefert die Gleichung

$$x = \operatorname{arc\,ctg} y + k\pi,$$

wenn k alle ganzzahligen Werte durchläuft.

c. Ist ferner $y = \sin x$ und durchläuft x alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so durchläuft y alle Werte von -1 bis $+1$ und setzt man umgekehrt:

$$x = \arcsin y,$$

so wird dies eine Funktion, welche nur für alle Werte y zwischen -1 und $+1$ definiert ist. Durchläuft y dieses Intervall, so nimmt x alle Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und jeden nur einmal an.

Da aber $\sin x = \sin(\pi - x)$ ist, so ist neben $x = \arcsin y$ auch

$$x = \pi - \arcsin y$$

eine Lösung der Gleichung $y = \sin x$. Da endlich $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ist, so stecken alle Lösungen der Gleichung $y = \sin x$ in den zwei Formeln:

$$x = \arcsin y + 2k\pi$$
$$x = -\arcsin y + (2k + 1)\pi,$$

in welchen k irgend eine ganze Zahl bedeutet.

d. Ist endlich $y = \cos x$ und durchläuft x alle Werte von 0 bis π, so durchläuft y alle Werte von -1 bis $+1$ und

$$x = \operatorname{arc} \cos y$$

wird eine Funktion, welche, wenn y alle Werte zwischen -1 und $+1$ durchläuft, alle Werte zwischen 0 und π und jeden nur einmal annimmt. Eine neue Lösung der Gleichung $y = \cos x$ ergiebt sich wegen $\cos x = \cos(2\pi - x)$, nämlich:

$$x = 2\pi - \operatorname{arc} \cos y$$

und alle Lösungen jener Gleichung stecken in den zwei Formeln:

$$x = \operatorname{arc} \cos y + 2k\pi$$
$$x = - \operatorname{arc} \cos y + 2k\pi,$$

in welchen k irgend eine ganze Zahl bedeutet.

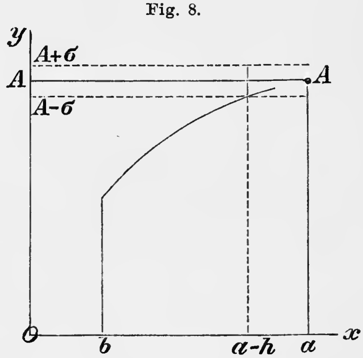
§ 3. Der Begriff der Grenze.

13. Grenzwert bei wachsendem x. Wir wollen der Veränderlichen x den Variabilitätsbereich aller reellen Zahlen von b bis a anweisen, b eingeschlossen, a ausgeschlossen:

$$b \leqq x < a$$

und in diesem Bereiche jedem Werte x einen bestimmten Wert y zuordnen, also y zu einer Funktion von x machen.

Fig. 8.



Der nebenstehende Kurvenzug stelle diese Funktion vor. Man wird versucht sein die Kurve auch bis a fortzusetzen, und so entstände eine Ordinate A. Diese Ordinate nennt man den Grenzwert, dem y oder $f(x)$ sich nähert, wenn x sich wachsend dem Werte a nähert. Dieser Grenzwert hat also mit dem Werte, der $f(x)$ selbst an der Stelle a vorgeschrieben ist, d. h. mit $f(a)$ gar nichts zu thun. An der Stelle $x = a$ ist ja die Funktion noch gar nicht definiert. Vielmehr wird A nur von den Werten $f(x)$ abhängen, welche die Funktion *vor* der Stelle $x = a$ annimmt. Die beiden folgenden Figuren beziehen sich auf andere Möglichkeiten, wie $f(x)$ sich mit gegen a wachsendem x dem Werte A nähern kann.

In Fig. 8 nähert sich $f(x)$ *wachsend*, in Fig. 9 *abnehmend*, in Fig. 10 *oscillierend* dem Grenzwerte A. Das eben geschilderte Fortsetzungsgefühl kommt daher, dafs in allen Fällen vor $x = a$ lauter Ordinaten liegen, die sämtlich nur noch sehr wenig von A abweichen.

Fig. 9.

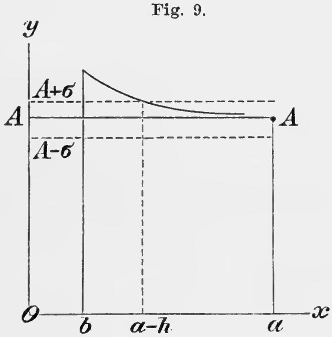
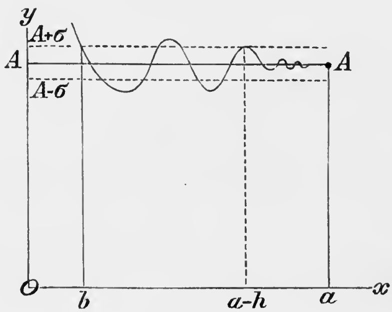


Fig. 10.



Versteht man also unter σ eine kleine positive Zahl und zieht zur x-Achse im Abstande $A - \sigma$ und $A + \sigma$ Parallelen und bildet so einen kleinen Streifen von der Breite 2σ, so werden von einer bestimmten Stelle an — in den Figuren für alle x hinter $a - h$ — die zugehörigen Kurvenpunkte in dem Streifen eingeschlossen sein. Ja sogar, wenn man beliebig klein die Zahl σ, also auch die Breite 2σ des Streifens, vorgiebt, so kann man immer eine Stelle vor a, $x = a - h$ finden, so dafs für alle auf $a - h$ folgenden Werte von x bis zur Stelle $x = a$ hin die Endpunkte der zugehörigen Ordinaten y in den vorgegebenen Streifen hineinfallen, der von den Parallelen zur x-Achse im Abstande $A + \sigma$ und $A - \sigma$ begrenzt wird. Diese Beobachtungen führen zur folgenden Definition des Grenzwertes:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ erhält den Grenzwert A, wenn x bis a wächst, so bedeutet dies:

Wird eine (beliebig kleine) positive Zahl σ willkürlich vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs:

$$|f(a - h') - A| < \sigma$$

wird für jedes positive h', das kleiner als h ist.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

Beispiel I. Wächst x von einer negativen Zahl bis 0, so erhält die Funktion $y = x^3$ an der Stelle $x = 0$ den Grenzwert null.

Die Richtigkeit der Behauptung wird bereits durch den Anblick der untenstehenden Figur plausibel gemacht. In der That, sei σ eine beliebig kleine, vorgegebene positive Zahl; etwa:

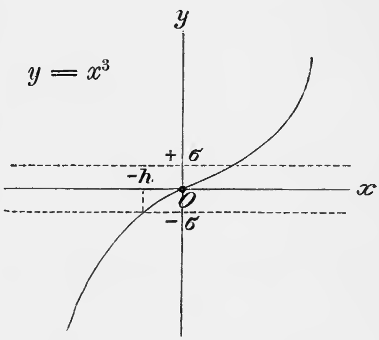
$$\sigma = 0{,}001;$$

alsdann wird nach der Behauptung $A = 0$ und $a = 0$; es ist also zu zeigen, dafs eine positive Zahl h gefunden werden kann, so dafs

$$|(-h')^3| < 0{,}001$$

wird für jedes $h' < h$. Diese Bedingung ist aber erfüllt, wenn $h = 0{,}1$ gesetzt wird.

Fig. 11.



Beispiel II. Die zahlentheoretische Funktion

$$y = [x],$$

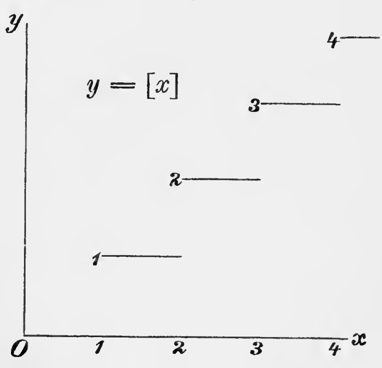
in welcher nach *Gaufs* $[x]$ die gröfste ganze in x enthaltene Zahl bedeutet, erhält, wenn x bis $a = 3$ wächst, den Grenzwert 2.

Das geometrische Bild der Funktion wird durch die nebenstehende Fig. 12 geliefert. Die Kurve verläuft so, dafs für alle x, die in den Intervallen

$$0 \leqq x < 1,$$
$$1 \leqq x < 2,$$
$$2 \leqq x < 3, \ldots$$

liegen, die Funktion y einen im ganzen Intervalle konstanten Wert behält, nämlich bezw. $0, 1, 2, \ldots.$ In dem Endpunkte jedes Intervalles springt sie plötzlich auf einen um 1 höheren Wert.

Fig. 12.



Gebe ich nun σ beliebig klein, etwa gleich $\frac{1}{10^7}$ vor, so wird die Differenz

$$|[3-h']-2|=0<\frac{1}{10^7}$$

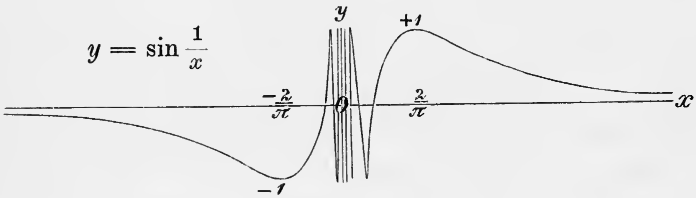
für jedes h', welches den Bedingungen

$$2 \leqq 3-h' < 3$$

genügt, also für jedes positive h', welches kleiner als 1 ist.

Beispiel III. Nähert sich x vom Negativen her der Null, so strebt die Funktion $y=\sin\frac{1}{x}$ überhaupt gar keinem Grenzwerte für $x=0$ zu.

Fig. 13.



Während nämlich x vom Negativen her bis $-\frac{2}{\pi}$ geht, nimmt y ununterbrochen ab von 0 bis -1, in den immer kleiner werdenden Intervallen von $x=-\frac{2}{\pi}$ bis $x=-\frac{2}{3\pi}$, von $x=-\frac{2}{3\pi}$ bis $x=-\frac{2}{5\pi}$, u. s. w. schwankt nun y beständig zwischen -1 und $+1$ hin und her, so dafs, wie klein man auch das Intervall von $x=-h$ bis $x=0$ nehmen mag, immer noch $y=\sin\frac{1}{x}$ in ihm den Wert -1 sowohl als $+1$ annehmen kann, so dafs die Oscillationen nicht gegen null konvergieren. Giebt man also z. B. $\sigma=\frac{1}{2}$ vor, so kann man *nie* eine Zahl h finden, so dafs für alle x zwischen $-h$ und 0 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\sigma$ bleibt.

14. Grenzwert bei abnehmendem x. Wir wollen jetzt x den Variabilitätsbereich erteilen:

$$a<x\leqq c,$$

also a ausschliefsen, c einschliefsen und nun wieder jedem

Werte x des Bereiches einen bestimmten Wert y zuordnen, so dafs y eine Funktion von x wird. Denkt man sich die Kurvenzüge der Figuren 8. 9. 10. an der Ordinate $y = A$ gespiegelt, so entstehen zu ihnen ganz symmetrische Kurvenzüge, deren Ordinaten in der Richtung von rechts nach links dem Werte A zustreben. Sie geben dann ein Bild dafür, wie eine Funktion $f(x)$ bei nach a abnehmendem x sich dem Grenzwerte A nähern kann.

Versteht man wieder unter σ eine beliebig klein vorgegebene positive Zahl und konstruiert wieder einen von den Parallelen $y = A - \sigma$ und $y = A + \sigma$ eingeschlossenen Streifen, so wird für jeden Wert x, der gröfser als a, aber kleiner als $a + h$ ist, der Endpunkt der zugehörigen Ordinate $y = f(x)$ in den Streifen hineinfallen. Wir definieren also:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ erhält den Grenzwert A, wenn x bis a abnimmt, so bedeutet dies:

Wird eine (beliebig kleine) positive Zahl σ willkürlich vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs

$$|f(a + h') - A| < \sigma$$

wird für jedes positive h', das kleiner als h ist.

Nehmen wir unsere früheren Beispiele, so sehen wir:

Beispiel I. Nimmt x von einer positiven Zahl bis 0 ab, so erhält die Funktion $y = x^3$ an der Stelle $x = 0$ den Grenzwert 0.

Die Richtigkeit der Behauptung lehrt wieder fast schon der blofse Anblick auf die rechte Hälfte der Figur 11. Ist σ wieder eine beliebig kleine, vorgegebene positive Zahl, etwa:

$$\sigma = 0{,}001,$$

so wird zu zeigen sein, dafs für ein passendes h:

$$|h'^3| < 0{,}001$$

wird für jedes positive h', das kleiner als h ist. Auch hier ist $h = 0{,}1$ das gesuchte h.

Beispiel II. Die Funktion $y = [x]$ erhält, wenn x bis $a = 3$ abnimmt, den Grenzwert 3. In der That wird

$$|[3 + h'] - 3| = 0 < \sigma$$

für beliebig kleines positives σ, wenn nur die positive Zahl h' kleiner als 1 ist.

Beispiel III. Die Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ erhält für $x = 0$ auch dann keinen bestimmten Grenzwert, wenn x vom Positiven her abnehmend sich der Null nähert; denn auch in jedem noch so kleinen Intervalle rechts vom Nullpunkte erreicht sie die Werte $+1$ und -1.

15. **Grenzwert überhaupt.** In unseren drei Beispielen hat also die Funktion $y = f(x)$ an der gerade betrachteten Stelle $x = a$ nur in dem ersten Falle einen bestimmten Grenzwert, der denselben Wert hat, von welcher Seite aus man auch sich x dem Werte a nähern läſst. Denn x^3 wird für $x = 0$ in beiden Fällen null. $[x]$ hat zwar bei beiden Richtungen der Annäherung einen bestimmten Grenzwert für $x = 3$, aber dieser ist 2, wenn x sich wachsend, er ist 3, wenn x sich abnehmend der Stelle $x = 3$ nähert. $\sin\frac{1}{x}$ endlich besitzt für $x = 0$ weder bei der einen noch bei der anderen Art der Annäherung an $x = 0$ dort einen bestimmten Grenzwert. Nur von Funktionen, welche wie x^3 an der betrachteten Stelle bei beiden Arten der Annäherung denselben Grenzwert hat, sagen wir, sie besitzen schlechthin an der Stelle $x = a$ einen bestimmten Grenzwert und wir sagen daher:

Definition. „*Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ hat den Grenzwert A an der Stelle $x = a$, so heiſst dies $f(x)$ hat sowohl bei nach a wachsendem, als nach a abnehmendem x den Grenzwert A.*“

Vergleicht man die für den Grenzwert bei abnehmendem und wachsendem x gegebenen Definitionen untereinander, so erkennt man, daſs sie sich nur durch das Vorzeichen der dort vorkommenden Gröſse h' unterscheiden; daher kann die letzte Definition auch durch diese ersetzt werden:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ hat den Grenzwert A an der Stelle $x = a$, so heiſst dies:

Wird eine (beliebig kleine) positive Zahl σ vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so daſs:

$$|f(a + h') - A| < \sigma$$

wird für jedes von null verschiedene h', dessen Betrag kleiner als h ist.

Betrachten wir wieder unser Beispiel x^3 an der Stelle 0 und wählen $\sigma = 0{,}001$, so wird

$$|h'^3| < 0{,}001$$

für jedes h', für welches $|h'| < 0{,}1$ ist.

Hat eine Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ den Grenzwert A, so nennt man diesen auch den Limes von $f(x)$ für $x = a$ und schreibt:

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Es ist also:

$$\lim_{x=0} x^3 = 0.$$

16. Funktionen mehrerer Veränderlichen. Die vorhergehenden Definitionen lassen sich mutatis mutandis auch auf Funktionen mehrerer Veränderlichen $x_1\, x_2 \ldots$ ausdehnen. Ist die Zahl dieser Veränderlichen 2, so kann man zur geometrischen Interpretation greifen, indem man die 2 Veränderlichen x_1, x_2 durch Punkte einer Ebene und den zu jedem Wertsysteme x_1, x_2 zugehörigen Funktionswert y durch ein Lot von der Länge y auf der Ebene $(x_1\, x_2)$ im Punkte $(x_1\, x_2)$ repräsentiert. Setzt man allgemein

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots,$$

so sagt man, man fixiert eine bestimmte *Stelle* für das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ Die Stelle oder das Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ ist null, wenn alle x einzeln null sind. Die Definition des Grenzwerts lautet hier so:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ hat den Grenzwert A an der Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots$, so heifs dies:

Wird eine (beliebig kleine) positive Zahl σ vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs

$$|f(a_1 + h_1', a_2 + h_2', \cdots) - A| < \sigma$$

wird für jedes von null verschiedene Wertsystem h', welches den Bedingungen:

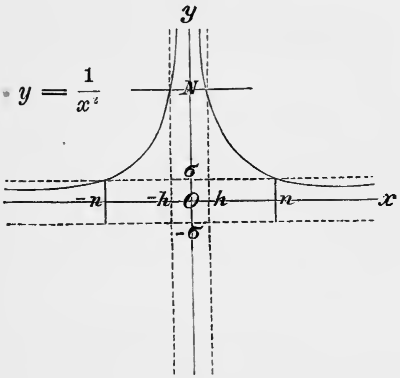
$$|h_1'| < h,\ |h_2'| < h, \ldots$$

genügt.

§ 4. Die Begriffe $+\infty$ und $-\infty$.

17. Endlicher Grenzwert bei unendlichem x. Zeichnet man sich die Kurve $y = \frac{1}{x^2}$, so erhält man zwei Aste in der in Figur 14 dargestellten Weise. Der den positiven Werten x entsprechende Ast nähert sich mehr und mehr der Abscissenachse, je gröfser x wird, ohne sie jemals zu erreichen. Man sagt daher, wenn x positiv unendlich grofs wird, hat $\frac{1}{x^2}$ zum Grenzwert null und schreibt

Fig. 14.



$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Nimmt x von einem negativen Werte aus immer mehr ab, so nähert sich der andere Ast ebenfalls immer mehr der x-Achse, ohne sie je zu erreichen. Man sagt entsprechend, $\frac{1}{x^2}$ hat den Grenzwert null, wenn x negativ unendlich grofs wird und schreibt:

$$\lim_{x=-\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Schliefst man den Grenzwert der Funktion y, also $y = 0$, wieder in einen Streifen ein, indem man im Abstande $+\sigma$ und $-\sigma$ Parallelen zur Abscissenachse zieht, so bleiben von einem bestimmten x an (in der Figur von $x = +n$, bezw. $-n$ an) die zugehörigen Kurvenpunkte *beständig* innerhalb dieses Streifens und dies gilt, wie klein man auch die Zahl σ wählen mag. Dementsprechend definiert man:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ hat den Grenzwert A, wenn x bis $\begin{cases} +\infty \text{ wächst} \\ -\infty \text{ abnimmt} \end{cases}$, *und:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x = \infty} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x = -\infty} f(x) = A \end{cases}$$

schreibt, so heifst dies:

Wird eine (beliebig kleine) positive Zahl σ *vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl* n *finden, so dafs*

$$|f(x) - A| < \sigma$$

wird für jedes $\begin{Bmatrix} \textit{positive} \\ \textit{negative} \end{Bmatrix}$ x, *dessen Betrag* n *übersteigt.*

In dem Beispiele $y = \frac{1}{x^2}$ sei $\sigma = 0{,}0001$ vorgeschrieben und zu zeigen, dafs $\lim\limits_{x = \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ist. Dann ist ein n zu finden, so dafs für jedes $x > n$

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| < 0{,}0001$$

wird. Das gesuchte n ist $n = 100$.

18. Unendlicher Grenzwert bei endlichem x. Betrachtet man hingegen $y = \frac{1}{x^2}$ in der Nähe von $x = 0$, so wird, wenn x sich (von irgend einer Seite her) der Null nähert, y immer gröfser und gröfser. Man sagt daher $\frac{1}{x^2}$ hat an der Stelle $x = 0$ den Grenzwert ∞. Würde man die Kurve an der x-Achse spiegeln, so entstände die Kurve $y = -\frac{1}{x^2}$, die Funktion $y = -\frac{1}{x^2}$ hätte für $x = 0$ den Grenzwert $-\infty$.

Schreibt man bei der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ eine beliebig grofse positive Zahl N vor, und zieht im Abstande N zur x Achse eine Parallele, so schneidet diese die Kurve in zwei Punkten, deren Abscissen die Länge h haben und jeder Abscisse, deren Länge kleiner als h ist, entspricht eine Ordinate y, die noch gröfser als die vorgegebene Ordinate n ist. Demnach definiert man:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ *hat an der Stelle* $x = a$ *den Grenzwert* $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} \infty$, *und schreibt:*

$$\lim_{x=a} f(x) = \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. \infty,$$

so heifst dies:

Wird eine (beliebig grofse) positive Zahl N vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs:

$$\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. f(a+h') > N$$

wird für jedes von Null verschiedene h', dessen Betrag kleiner als h ist.

19. Unendlicher Grenzwert bei unendlichem x. Die Funktion $y = x^3$, deren Kurvenbild in Figur 5 dargestellt ist, hat für $x = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$, für $x = -\infty$ den Grenzwert $-\infty$. Würde man die Kurve an der y-Achse spiegeln, so entstände das Bild der Funktion $-x^3$ und diese weist für $x = +\infty$ den Grenzwert $-\infty$, für $x = -\infty$ den Grenzwert $+\infty$ auf. Genau so wie in den vorhergehenden Fällen führt diese Beobachtung zu der Definition:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x)$ hat für $\left\{ \begin{matrix} x = +\infty \\ x = -\infty \end{matrix} \right.$ den Grenzwert $+\infty$ $(-\infty)$ und schreibt:

$$\lim_{\left\{ \begin{smallmatrix} x = \infty \\ x = -\infty \end{smallmatrix} \right.} f(x) = \infty, \ (-\infty),$$

so heifst dies:

Wird eine (beliebig grofse) positive Zahl N vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl n finden, so dafs:

$$+f(x) > N, \ (-f(x) > N)$$

wird für jedes $\left\{ \begin{matrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{matrix} \right.$ x, dessen Betrag n übersteigt.

Natürlich giebt es auch Funktionen, welche auch für $x = \infty$ keinen bestimmten (endlichen oder unendlichen) Grenzwert haben; $\sin x$ schwankt, wie grofs auch x werden mag, zwischen den Grenzen $+1$ und -1, die es immer wieder erreicht, hin und her; ein $\lim\limits_{x=\infty} \sin x$ existiert also nicht.

Man erkennt aus dem Vorhergehenden, dafs die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ manche Eigenschaften mit den Zahlen gemein haben. Da sie aber in anderen Punkten durchaus nicht ihren Gesetzen gehorchen, werden wir sie nicht als Zahlen bezeichnen dürfen. Wenn daher im Folgenden von Zahlen die Rede ist, oder Buchstaben $a \ldots$ eingeführt werden, sollen die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ stets ausgeschlossen sein.

§ 5. Stetigkeit.

20. Stetigkeit von Funktionen Einer Veränderlichen. Betrachten wir die bisher gezeichneten Kurven an denjenigen Stellen, an welchen wir sie untersucht haben der Reihe nach und beginnen mit $[x]$, so macht diese Funktion an der Stelle $x = 3$ (und ebenso für jeden anderen ganzzahligen Wert von x) einen Sprung (vgl. Fig. 12), sie wird dort *unstetig*, sie hat an der Stelle $x = 3$ nicht denselben Grenzwert, je nachdem x wachsend oder abnehmend in die Stelle $x = 3$ hineinrückt. Noch weniger hat $\sin\frac{1}{x}$ (Fig. 13) an der Stelle $x = 0$ einen bestimmten Grenzwert, auch diese Funktion wird man nicht als stetig in $x = 0$ bezeichnen wollen. Die Funktion $y = \frac{1}{x^2}$ besitzt für $x = 0$ zwar einen bestimmten Grenzwert (Fig. 14), aber dieser ist unendlich grofs und deshalb wird auch $y = \frac{1}{x^2}$ an der Stelle $x = 0$ nicht stetig genannt werden können. Damit also eine Funktion $f(x)$ allgemein an der Stelle $x = a$ stetig genannt werden darf, ist jedenfalls notwendig, dafs $f(x)$ an der Stelle $x = a$ einen bestimmten, endlichen Grenzwert besitzt:

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Diese Bedingung erfüllt z. B. die Funktion x^3 für $x = 0$ (vgl. Fig. 11). An dieser Stelle besitzt x^3 einen ganz bestimmten Grenzwert. Aber noch mehr, dieser Grenzwert ist genau gleich dem Zahlenwerte, welchen x^3 erhält, wenn man einfach $x = 0$ in den Ausdruck der Funktion x^3 einsetzt; denn der Grenzwert ist ebenso wie der Funktionswert für $x = 0$ gleich null. In der That verläuft auch die Kurve $y = x^3$ im Punkte $x = 0$, wie der blofse Anblick lehrt, ganz *stetig*. Wir werden deshalb als eine zweite Bedingung für die

Stetigkeit die einführen, dafs der Grenzwert von $f(x)$ für $x = a$ gleich $f(a)$ selbst ist. Also:

$$A = f(a).$$

Wie notwendig diese zweite Bedingung ist, lehrt ein sehr einfaches Beispiel, welches an unsere Funktion x^3 anknüpft. Wir definieren eine Funktion $y = \varphi(x)$, indem wir festsetzen $\varphi(x)$ soll für jedes von null verschiedene x denselben Wert wie x^3 haben, nur für $x = 0$ setzen wir $\varphi(x) = 7$. So willkürlich diese Mafsregel ist, das so konstruierte $\varphi(x)$ fällt unter den Begriff: „*Funktion* von x“. Das Kurvenbild von $y = \varphi(x)$ wird genau das der Figur 11 sein, nur für $x = 0$ springt die Ordinate auf den Wert $y = 7$. Für diese Funktion $\varphi(x)$ bleibt also

$$\lim_{x=0} \varphi(x) = 0$$

denn der Grenzwert von $\varphi(x)$ für $x = 0$ hängt ja nur von den Werten in der Nähe von $x = 0$ ab und diese stimmen sämtlich mit denen von x^3 überein. Aber es ist:

$$\varphi(0) = 7$$

denn das haben wir ja festgesetzt. Es ist also hier zwar $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ ein bestimmter Wert; dieser ist aber verschieden von $f(a)$ und dem entspricht, dafs das geometrische Bild der Kurve $y = \varphi(x)$ an der Stelle 0 eine Unstetigkeit aufweist. Also erst die Bedingungen

$$\lim_{x=a} f(x) = A = f(a)$$

charakterisieren mathematisch ausreichend die Forderung, dafs $f(x)$ an der Stelle a stetig ist und wir definieren daher jetzt ganz kurz:

Definition. Wenn wir sagen, die Funktion $f(x)$ ist stetig an der Stelle $x = a$, so heifst dies, sie hat für $x = a$ einen bestimmten endlichen Grenzwert und dieser Grenzwert ist $f(a)$.

Erinnert man sich der Bedeutung der Ausdrucksweise: eine Funktion besitzt an einer bestimmten Stelle einen gewissen endlichen Grenzwert, so kann man die Definition der Stetigkeit auch so fassen:

Definition. Wenn wir sagen, die Funktion $f(x)$ ist stetig an der Stelle $x = a$, so heifst dies:

Ist σ eine (beliebig klein) vorgegebene positive Zahl, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs:

$$|f(a+h') - f(a)| < \sigma$$

wird für jedes h', dessen Betrag kleiner als h ist.

21. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen. Analog definiert man die Stetigkeit der Funktionen mehrerer Veränderlichen so:

Definition. Wenn man sagt die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ ist stetig an der Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots$, so heifst dies, sie hat an dieser Stelle einen bestimmten endlichen Grenzwert und dieser Grenzwert ist

$$f(a_1, a_2, \ldots).$$

Hiermit deckt sich die:

Definition. Wenn man sagt, die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ ist stetig an der Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots$, so heifst dies:

Ist σ eine (beliebig klein) vorgegebene positive Zahl, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs:

$$|f(a_1 + h_1', a_2 + h_2', \ldots) - f(a_1\, a_2 \ldots)| < \sigma$$

wird für jedes Wertsystem $(h_1'\, h_2' \ldots)$, welches den Bedingungen:

$$|h_1'| < h, \ |h'_2| < h, \ldots$$

genügt.

22. Ein allgemeiner Satz. *Sind $f_1, f_2, \ldots f_n$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$, die an der Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots x_m = a_m$ stetig sind und dort die Werte $b_1, b_2, \ldots b_n$ annehmen und ist $g(y_1, y_2, \ldots y_n)$ an Stelle $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2, \ldots y_n = b_n$ stetig, so ist auch $g(f_1, f_2, \ldots f_n)$ eine Funktion von $x_1 \ldots x_m$, welche an der Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots x_m = a_m$ stetig ist.*

Ist σ eine vorgeschriebene positive Zahl, so läfst sich eine positive Zahl k finden, so dafs:

$$|g(y_1, \ldots y_n) - g(b_1 \ldots b_n)| < \sigma$$

wird für jedes Wertsystem y, welches den Bedingungen genügt:

$$|y_1 - b_1| < k, \ |y_2 - b_2| < k, \ \ldots \ |y_n - b_n| < k.$$

Denn $g(y_1 \ldots y_n)$ ist ja an der Stelle $y_1 = b_1, \ldots y_n = b_n$ stetig.

Aber jedes $y = f(x_1 \dots x_m)$ ist an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ stetig und nimmt dort einen der Werte b an. Also läſst sich eine positive Zahl h finden, so daſs für jedes f:

$$|f(x_1 \dots x_m) - f(a_1 \dots a_m)| < k$$

wird, sobald:

$$|x_1 - a_1| < h, \dots |x_m - a_m| < h$$

ist. Folglich läſst sich zu jeder vorgeschriebenen positiven Zahl σ eine Zahl h finden, sodaſs:

$$|g(f_1(x) \dots f_n(x)) - g(f_1(a) \dots f_n(a))| < \sigma$$

wird für jedes Wertsystem x, welches den Bedingungen

$$|x_1 - a_1| < h, \dots |x_m - a_m| < h$$

genügt. Hiermit ist der Satz bewiesen.

23. Beispiele von stetigen Funktionen. a. *Das Produkt von x und einer Konstanten C, also Cx ist für jeden Wert x eine stetige Funktion von x.*

Zeichnet man sich die Kurve $y = Cx$, so ist diese eine im Winkel arctg C gegen die positive Richtung der x-Achse geneigte gerade Linie, welche an keiner Stelle eine Unstetigkeit aufweist. Der exakte Beweis für den Satz liegt in der Thatsache, daſs $\lim\limits_{x=a} Cx = Ca$ ist. Um aber dies zu erkennen, braucht man nur eine positive Zahl h zu finden, so daſs $C \cdot (a + h') - Ca = Ch'$ absolut kleiner wird als irgend eine vorgegebene positive Zahl σ, wenn nur $|h'| < h$ ist. Die gesuchte Zahl h ist:

$$h = \frac{\sigma}{C}.$$

b. *Eine Konstante C ist für jeden Wert x eine stetige Funktion von x.*

Die Kurve $y = C$ ist eine im Abstande C zur x-Achse gezogene parallele Gerade und läſst die Richtigkeit der Behauptung bereits sehr wahrscheinlich erscheinen. Diese ist aber auch sofort erwiesen; denn für jede Zahl a ist

$$f(a) = C$$

und für jedes h' auch:

$$f(a + h') = C,$$

mithin ist immer:

$$|f(a+h')-f(a)|=0;$$

und dies ist gewiſs kleiner als irgend eine positive Zahl σ.

c. *$x_1 + x_2$ ist an jeder Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ eine stetige Funktion von x_1 und x_2.*

Geometrisch wird der Verlauf der Funktion $y = x_1 + x_2$ durch eine Ebene dargestellt, die durch den Koordinatenanfang hindurchgeht und gegen die Achsen in leicht zu bestimmender Weise geneigt ist. Die Anschauung läſst an keiner Stelle der Ebene eine Unstetigkeit erkennen.

Ist in der That σ eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl und setzt man $h = \frac{\sigma}{2}$, so wird für jedes Wertsystem (x_1, x_2), welches den Bedingungen $|x_1 - a_1| < h$, $|x_2 - a_2| < h$ genügt, auch:

$$|(x_1 + x_2) - (a_1 + a_2)| < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < 2h = \sigma.$$

d. *Sind $f_1(x_1 \dots x_m)$ und $f_2(x_1 \dots x_m)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ stetig, so gilt Gleiches von ihrer Summe: $f_1(x_1 \dots x_m) + f_2(x_1 \dots x_m)$.*

Setzt man:

$$y_1 = f_1(x_1 \dots x_m),\ y_2 = f_2(x_1 \dots x_m),$$
$$b_1 = f_1(a_1 \dots a_m),\ b_2 = f_2(a_1 \dots a_m)$$

und

$$g(y_1, y_2) = y_1 + y_2,$$

so sind laut Annahme f_1 und f_2 an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ stetig und nehmen dort die Werte b_1, b_2 an. $y_1 + y_2$ ist aber nach dem vorigen Satze gewiſs an der Stelle $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$ stetig. Also greifen die Voraussetzungen von 22 Platz und es folgt, daſs auch

$$g(f_1, f_2) = f_1 + f_2$$

an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ stetig ist.

e. *Sind $f_1, f_2, \dots f_n$ an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ stetig, so gilt Gleiches von ihrer Summe: $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.*

Ist der Satz bereits für $f_1, f_2 \dots f_{n-1}$ bewiesen, so weiſs man, daſs $f_1 + f_2 + \cdots f_{n-1}$ an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ stetig ist. Gleiches gilt von f_n, also nach d. auch von $f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + f_n$. Nun gilt der Satz für $n = 2$, also gilt er auch für $n = 3$, u. s. w.

f. *Das Produkt $x_1 x_2$ ist an jeder Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ eine stetige Funktion von x_1 und x_2.*

Die Richtigkeit der Behauptung läſst zunächst die geometrische Anschauung vermuten. Die Gleichung $y = x_1 x_2$ stellt ein hyperbolisches Paraboloid vor und das Modell eines solchen läſst keinerlei Unstetigkeiten erkennen.

Thatsächlich ist zunächst unmittelbar klar, daſs $x_1 x_2$ an der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stetig ist. Denn setzt man $h = |\sqrt{\sigma}|$, so wird $|x_1 x_2| < \sigma$ für jedes Wertepaar x_1, x_2, das den Bedingungen $|x_1| < h$, $|x_2| < h$ genügt. $x_1 x_2$ ist aber auch an jeder anderen Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ stetig. Denn $(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$ ist gewiſs an dieser Stelle stetig. Nach a. sind aber auch $a_1 x_2$ und $a_2 x_1$, nach b. auch $-a_1 a_2$ an derselben Stelle stetig. Also ist nach e. auch die Summe

$$x_1 x_2 = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + a_1 x_2 + a_2 x_1 - a_1 a_2$$

an derselben Stelle stetig, w. z. bw. w.

Mit Hülfe von No. 22 schlieſst man analog wie bei d.:

g. *Sind $f_1(x_1 \ldots x_m)$ und $f_2(x_1 \ldots x_m)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m$ stetig, so gilt Gleiches von ihrem Produkte $f_1(x) \cdot f_2(x)$.*

Und durch den Schluſs von n auf $n + 1$ ergiebt sich wie bei e.:

h. *Sind $f_1, f_2, \ldots f_n$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_m = a_m$ stetig, so gilt Gleiches von ihrem Produkte: $f_1 f_2 \ldots f_n$.*

Da eine Konstante C ebenso wie $x_1, x_2 \ldots x_m$ für alle Stellen $x_1 = a_1, \ldots x_2 = a_2$ stetig ist, so gilt Gleiches von einem Produkte von beliebig vielen dieser Funktionen:

$$C \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Addiert man irgend eine endliche Anzahl solcher Terme, so entsteht wieder eine stetige Funktion der x; daſs heiſst:

i. *Eine ganze rationale Funktion ist überall stetig.*

Ferner gilt der Satz:

k. *$\frac{1}{x}$ ist stetig an jeder Stelle $x = a$, die von null verschieden ist.*

Setzt man $x - a = h'$, so wird:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|h'|}{|a|\,|a+h'|}<\frac{|h'|}{|a|\,(|a|-|h'|)},$$

Setzt man nun

$$h=\frac{|a^2|\,\sigma}{1+|a|\,\sigma},$$

wo σ eine vorgeschriebene (beliebig kleine) Zahl ist, so wird für jedes h', dessen Betrag kleiner als h ist:

$$|h'|<\frac{|a^2|\,\sigma}{1+|a|\,\sigma}$$

d. i.

$$\frac{|h'|}{|a|\,(|a|-|h'|)}<\sigma.$$

Also wird dann für $|h'|<h$ auch:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{1}{a+h'}-\frac{1}{a}\right|<\sigma.$$

l. *Ist $f(x_1\,x_2\ldots x_m)$ an der Stelle $x_1=a_1,\ldots x_m=a_m$ stetig und von null verschieden, so gilt Gleiches von* $\dfrac{1}{f(x_1\,x_2\ldots x_m)}$.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge des vorigen und von 22.

Ist daher $f(x_1\ldots x_m)$ eine ganze rationale Funktion, so ist $\frac{1}{f}$ stetig an allen Stellen, an welchen f nicht null ist. Ist $g(x_1\ldots x_m)$ eine zweite ganze rationale Funktion, so ist diese überall stetig, also ist nach g. das Produkt $g\cdot\frac{1}{f}$ stetig an allen Stellen, an welchen f nicht verschwindet. Mithin gilt der Satz:

m. *Jede rationale Funktion ist stetig an allen Stellen, an welchen ihr Nenner nicht verschwindet.*

n. *Wenn die Funktion $f(x)$, während x alle Werte des Intervalles $a\leqq x\leqq b$ durchläuft, beständig wachsend alle Werte von A bis B annimmt, und immer einen bestimmten endlichen Wert behält, so ist sie stetig an jeder Stelle innerhalb des Intervalles von a bis b.*

Ist $x=x_0$ irgend eine Stelle im Inneren des Intervalles von a bis b, $x_1>x_0$ eine zweite solche Stelle, so bilde man die Differenz

$$f(x_1)-f(x_0)=\tau.$$

Dann ist τ positiv. Ist nun σ eine vorgeschriebene positive Zahl, so kann *erstens* sein

$$\tau \leqq \sigma$$

Alsdann setze man $x_1 = x_0 + h_1$. Alsdann ist bereits

$$0 < f(x_0 + h') - f(x_0) < \sigma$$

für jedes positive h', das kleiner als h_1 ist. Ist dagegen *zweitens* $\tau > \sigma$, so wird nach Voraussetzung, während x alle Werte zwischen x_0 und x_1 durchlief, $f(x) - f(x_0)$ beständig wachsend alle Zahlen von 0 bis τ passiert haben. Für eine bestimmte Stelle $x = x_0 + h_1$ zwischen x_0 und x_1 wird daher jene Differenz auch den Wert σ angenommen haben und für jedes positive h', das kleiner als h_1 ist, wird dann wieder:

$$0 < f(x_0 + h') - f(x_0) < \sigma.$$

Betrachtet man ebenso eine Stelle $x_2 < x_0$, so findet man eine positive Zahl h_2, so dafs

$$0 < f(x_0) - f(x_0 - h') < \sigma$$

wird für jedes positive h', das kleiner als h_2 ist. Nimmt man daher h gleich der kleineren der beiden Zahlen h_1 und h_2, so wird

$$| f(x_0 + h') - f(x_0) | < \sigma$$

für jedes h', dessen Betrag kleiner als h ist. $f(x)$ ist also stetig an der Stelle $x = x_0$.

Vertauscht man $f(x)$ mit $-f(x)$, so ergiebt sich sofort:

o. *Wenn die Funktion $f(x)$, während x alle Werte von a bis b durchläuft, beständig abnehmend alle Werte von A bis B annimmt, und dabei immer einen bestimmten endlichen Wert behält, so ist sie stetig an jeder Stelle innerhalb des Intervalles von a bis b.*

Aus den letzten beiden Sätzen ergiebt sich sofort:

p. *Die Funktion a^x ist stetig an jeder Stelle x, wenn a eine positive Zahl ist.*

Ist $a = 1$, so ist die Function konstant 1, wir kommen auf eine Trivialität und den bereits bewiesenen Satz b.

Ist $a > 1$, so gilt für jedes noch so grofse Intervall, in dem man x variieren läfst, der Satz n.; denn für $a > 1$ wächst a^x beständig; ist $a < 1$, so nimmt a^x beständig ab, und es gilt der Satz o.

q. *Die Funktion* $\sin x$ *ist stetig an jeder Stelle* x.

In dem Intervalle von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst der Sinus, es gilt Satz n., von $\frac{\pi}{2}$ bis π nimmt er ab, es gilt Satz o. $\sin x$ ist also gewifs an jeder Stelle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π stetig. Er ist aber auch an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ stetig, denn $\sin x$ nähert sich mit gegen $\frac{\pi}{2}$ wachsendem x sowohl als mit gegen $\frac{\pi}{2}$ abnehmendem x dem Grenzwerte 1 und gleichzeitig ist $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Analog erkennt man, dafs er auch in 0 und π stetig ist. Die Formeln

$$\sin(2\pi - x) = \sin x, \quad \sin x = \sin(x + 2k\pi)$$

lehren jetzt, dafs er auch für alle anderen aus dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ heraustretenden x stetig ist.

r. *Die Funktion* $\cos x$ *ist stetig an jeder Stelle* x.

Es ist $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

s. *Die Funktionen* $\operatorname{tg} x$ *und* $\operatorname{ctg} x$ *sind stetig an jeder Stelle, die von* $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ *bezw.* $k\pi$ *verschieden ist,* k *bedeutet eine ganze Zahl.*

Es ist:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Der Quotient zweier stetigen Funktionen ist stetig an jeder Stelle, an der der Nenner nicht null ist (l.) $\cos x$ wird aber null für $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ und $\sin x$ für $x = k\pi$.

t. *Die Funktion* ${}^a\log x$ *ist für jeden positiven Wert stetig.*

Ist, um die Ideen zu fixieren $a > 1$, so nimmt ${}^a\log x$ beständig wachsend alle reellen Zahlenwerte an, wenn x von 0 ausgehend wachsend alle positiven Zahlen durchläuft. Es findet also Satz n. Anwendung. Ist $a < 1$, so gilt Satz o.

u. *Die cyclometrischen Funktionen sind stetig für alle Werte* x, *für die sie definiert sind.*

Geht x von -1 bis $+1$, so durchläuft $\operatorname{arc}\sin x$ beständig wachsend alle Zahlen von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc}\cos x$ beständig abnehmend alle Zahlen von π bis 0. Beide sind also nach n. und o. stetig für alle Werte x zwischen -1 und $+1$.

Durchläuft x wachsend alle reellen Zahlen, so durchläuft $\operatorname{arctg} x$ beständig wachsend alle Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ beständig abnehmend alle Werte von π bis 0. Beide sind also nach n. und o. stetig an jeder Stelle x.

§ 6. Das Rechnen mit Grenzwerten.

24. Rechnungsregeln für den Limes.

Ist g eine Funktion von $y_1, y_2 \dots y_n$, welche an der Stelle $y_1 = b_1, \dots y_n = b_n$ stetig ist, so ist bekanntlich an der Stelle $y_1 = b_1, \dots y_n = b_n$:

$$\lim g(y_1, y_2 \dots y_n) = g(b_1, b_2, \dots b_n).$$

Sind nun die y noch Funktionen von $x_1 \dots x_m$:

$$y_1 = f_1(x_1 \dots x_m), \dots y_n = f_n(x_1 \dots x_m),$$

welche an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ die Grenzwerte $b_1, b_2 \dots b_n$ haben, so ist für alle f an der Stelle a:

$$\lim f(x_1 \dots x_m) = b$$

und daher:

$$\lim g(y_1, y_2 \dots y_n) = g(\lim f_1, \dots \lim f_n)$$

oder auch:

$$\lim g(f_1, f_2 \dots f_n) = g(\lim f_1, \dots \lim f_n)$$

Die Limites beziehen sich jetzt auf beiden Seiten darauf, daſs $(x_1 \dots x_m)$ in die Stelle $(a_1 \dots a_m)$ hineinrücken sollen. Es gilt also der Satz:

Wenn die Funktionen $f_1(x_1 \dots x_m) \dots f_n(x_1 \dots x_m)$ an der Stelle $x_1 = a_1 \dots x_m = a_m$ bestimmte endliche Grenzwerte $b_1 \dots b_n$ besitzen und $g(y_1 \dots y_n)$ als Funktion der y an der Stelle $y_1 = b_1 \dots y_n = b_n$ stetig ist, so ist an der Stelle $x_1 = a_1, \dots x_m = a_m$ $\lim g(f_1, f_2 \dots f_n) = g(\lim f_1, \dots \lim f_n)$.

Ist z. B. $g = y_1 + y_2$, so folgt:

$$\text{a)} \quad \lim (f_1 + f_2) = \lim f_1 + \lim f_2.$$

in Worten:

Wenn $f_1(x_1 \dots x_m)$ und $f_2(x_1 \dots x_m)$ an der Stelle $x_1 = a_1 \dots x_m = a_m$ bestimmte endliche Grenzwerte besitzen, *so ist der Limes der Summe von f_1 und f_2 gleich der Summe der Limites von f_1 und f_2.*

Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich:

b) $\lim c \cdot f \quad = c \cdot \lim f$, wo c eine Konstante bedeutet

c) $\lim (f_1 \cdot f_2) = \lim f_1 \cdot \lim f_2$ in Worten:

Der Limes eines Produktes ist gleich dem Produkte der Limites.

Und, wenn noch $\lim f_2 \neq 0$ ist:

d) $\lim \frac{f_1}{f_2} = \frac{\lim f_1}{\lim f_2}$ in Worten:

Der Limes eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Limites.

Überhaupt gilt nach 23 i.:

Wenn $f_1, f_2 \ldots f_m$ an der Stelle $x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m$ bestimmte endliche Grenzwerte besitzen und g eine ganze rationale Funktion bedeutet, so ist:

$$\lim g(f_1 \ldots f_n) = g(\lim f_1, \ \ldots \ \lim f_n).$$

25. Bestimmung des Grenzwerts durch Einengung.

Von Wichtigkeit ist der folgende Satz, den wir der Bequemlichkeit halber nur für Funktionen Einer Veränderlichen aussprechen, obwohl es evident ist, dafs er ebenso für beliebig viele Veränderliche gilt.

Ist $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x=a} g(x) = A$ und für alle Werte x in hinreichender Nähe rechts und links von a $f(x) \leqq \varphi(x) \leqq g(x)$, so ist auch $\lim\limits_{x=a} \varphi(x) = A$.

Nach Voraussetzung ist für irgend ein σ:

$$|f(a+h') - A| < \sigma, \ |g(a+h') - A| < \sigma$$

für alle h', deren Betrag kleiner als eine gewisse Gröfse h ist. Also wird:

$$-\sigma < f(a+h') - A < \sigma \quad -\sigma < g(a+h') - A < \sigma.$$

Nun folgt aber aus:

$$f(a+h') \leqq \varphi(a+h') \leqq g(a+h')$$

$$f(a+h') - A \leqq \varphi(a+h') - A \leqq g(a+h') - A$$

Also

$$-\sigma < \varphi(a+h') - A < \sigma;\ |\varphi(a+h') - A| < \sigma$$

d. i.

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = A.$$

26. Anwendung.

Es ist bekanntlich für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\sin x \leqq x \leqq \operatorname{tg} x$$

Also ist auch:

$$\cos x \sin x \leqq x \leqq \frac{\sin x}{\cos x}$$

und daher:

$$\cos x \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{1}{\cos x}.$$

Da aber $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$ und $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1$ ist, so ist auch:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

und also auch

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Zweites Kapitel.

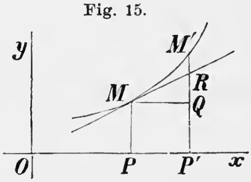
Der erste Differentialquotient der Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

---

§ 1. Die abgeleitete Funktion.

27. Definition der Ableitung. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, die für alle Zahlen x in einem bestimmten Intervalle definiert ist. Die nebenstehende Figur mag den Verlauf der Funktion geometrisch versinnlichen.

Fig. 15.



Ist x $(= OP)$ ein bestimmter Wert der unabhängigen Veränderlichen, so ist $f(x)$ $(= MP)$ der zugehörige Funktionswert. Lassen wir jetzt x um eine (positive oder negative) Zahl zunehmen, etwa um h $(= PP')$, so wird $f(x+h)$ $(= M'P')$ der zu $x+h$ $(= OP')$ gehörige Funktionswert sein. Der Zunahme h $(= MQ)$ der unabhängigen Veränderlichen x entspricht also die Zunahme $f(x+h) - f(x)$ $(= M'Q)$ der Funktionswerte. Der Quotient beider Zunahmen wird also:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x, h)$$

eine bestimmte Funktion der beiden Veränderlichen x und h. Sein geometrischer Ausdruck $\left(\frac{M'Q}{MQ}\right)$ ist der Tangens des Winkels, welchen die Sehne MM' mit der positiven Richtung MQ der Abscissenachse bildet. Besitzt nun $f'(x, h)$, als Funktion von h betrachtet, an der Stelle $h = 0$ einen bestimmten Grenzwert, so wird dieser eine Funktion von x allein:

$$\lim_{h=0} f'(x, h) = f'(x).$$

3*

Dieser Grenzwert heifst nach *Lagrange* die *Ableitung* der Funktion $f(x)$ und wird ebenfalls nach *Lagrange* einfach mit $f'(x)$ bezeichnet.

Geometrisch giebt er den Tangens des Winkels, welchen *die Tangente* MR im Punkte M an die Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Denn wenn h in die Null hineinrückt, rückt M' nach M und die Sehne $M'M$ dreht sich um M, bis sie in die Lage MR kommt.

Man definiert:

Definition. Hat für einen bestimmten Wert von x der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, wenn h null wird, den Grenzwert:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

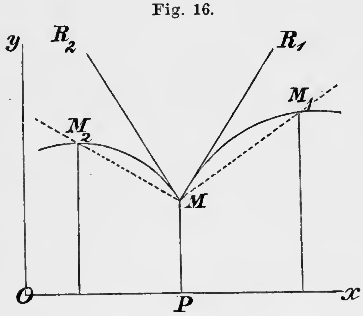
so heifst dieser die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x.

Nach dem, was in Nr. 15 über den Begriff des Grenzwertes gesagt ist, ist es selbstverständlich, dafs sowohl, wenn h von einem positiven Werte aus abnehmend nach 0 hineinrückt, als auch, wenn h von einem negativen Werte aus zunehmend nach 0 hineinrückt, der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ einen bestimmten und jedes Mal denselben Grenzwert haben mufs. Dies läuft darauf hinaus, dafs — unter h eine positive Zahl verstanden — die beiden Ausdrücke:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

für nach null abnehmendes h *denselben* Grenzwert erhalten müssen.

Fig. 16.



Haben wir z. B. eine Kurve, welche wie die in Fig. 16 im Punkte M eine Ecke hat, so haben wir in diesem Punkte nicht *eine* bestimmte Tangente, vielmehr wird hier eine Tangente zur Rechten MR_1 zu unterscheiden sein, welche aus der Sehne MM_1 entsteht, wenn M_1 nach M hineinrückt und eine Tangente zur Linken MR_2, welche aus der Sehne MM_2 hervorgeht, wenn M_2 nach M hineinrückt.

Im Folgenden jedoch werden, so lange nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist, immer nur solche Funktionen von x betrachtet werden, welche mindestens für ein Intervall $x_0 \leqq x \leqq X$ die folgende Forderung erfüllen.

Forderung $\mathfrak{A}$. *Die Funktion $f(x)$ besitzt an jeder Stelle x des Intervalles $x_0 \leqq x \leqq X$ nicht nur selbst einen bestimmten endlichen Wert, sondern auch eine bestimmte, endliche Ableitung.*

Wir werden sehen, dafs für die bekannten Funktionen wie x^m, $\sin x$, u. s. w. die Forderung $\mathfrak{A}$ immer erfüllt ist. Ferner mag noch die folgende Bemerkung angeknüpft werden:

Bemerkung. In dem Intervalle, in welchem eine Funktion $f(x)$ die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllt, ist sie auch stetig.

Denn hat $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ einen bestimmten endlichen Wert, so ist:

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

und mithin:

$$\lim_{h=0} \left\{f(a+h) - f(a)\right\} = \lim_{h=0} \left\{\frac{f(a+h)-(f(a)}{h} \cdot h\right\}$$

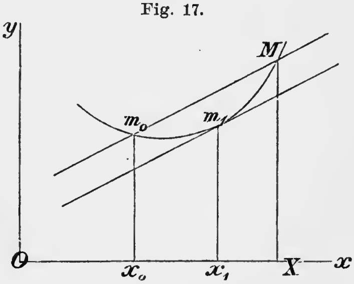
$$= \lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim h = f'(a) \cdot \lim h = 0.$$

Also ist:

$$\lim_{h=0} f(a+h) = f(a)$$

und da $f(a)$ auch endlich sein soll, so ist nach Nr. 20 $f(x)$ an der Stelle $x = a$ auch stetig. Dies gilt für jeden Wert a des Intervalles $x_0 \leqq a \leqq X$.

Fig. 17.



Hieraus ergiebt sich, dafs man an einer *Unstetigkeitsstelle* gewifs nicht auf einen bestimmten endlichen Wert der Funktion und der Ableitung rechnen darf.

28. Der Mittelwertsatz. Betrachtet man in nebenstehender Figur den Kurvenzug $m_0 M$ und zieht die Sehne $m_0 M$, so werden die Tangenten in den einzelnen Kurvenpunkten von der in m_0 vorhandenen Richtung schliefslich in diejenige Richtung übergehen, welche die Tangente in M hat. Inzwischen wird einmal eine Lage der Tangente, etwa in m_1, eintreten, welche der Sehne $m_0 M$ parallel ist. Ist x_1 die Abscisse dieses Punktes m_1 und sind x_0 und X die Abscissen der Punkte m_0 und M, und ist endlich $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve $m_0 M$, so wird die Richtung der Sehne $m_0 M$ durch den Quotienten:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

gegeben. Die Richtung der Tangente in m_1 hingegen ist durch $f'(x_1)$ bestimmt, den Wert der Ableitung von $f(x)$ im Punkte x_1. Mithin wird:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1); \quad x_0 < x_1 < X.$$

Diese Beobachtung führt zu dem sogenannten

Mittelwertsatz. Erfüllt $f(x)$ die Forderung $\mathfrak{A}$ für jedes x in dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$, so ist:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1) \quad \textit{und} \quad x_0 < x_1 < X.$$

Ein arithmetischer Beweis des Satzes ist der folgende:

Der Quotient

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

hat, der Voraussetzung nach, einen endlichen Wert. Nennt man diesen Wert A, so hat man

(1) $$[f(X) - AX] - [f(x_0) - Ax_0] = 0.$$

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ eine Funktion, welche durch die Gleichung

(2) $$\varphi(x) = [f(x) - Ax] - [f(x_0) - Ax_0]$$

definiert ist, so ist nicht nur $\varphi(x_0) = 0$, sondern infolge der Gleichung (1) auch $\varphi(X) = 0$. Die Funktion verschwindet also für diese beiden Werte von x. Wir nehmen $X > x_0$ an und lassen x von x_0 bis X wachsen. Die Funktion $\varphi(x)$ ist an der Anfangsstelle null. Nimmt man nun an, dafs sie nicht konstant 0 ist, so erhält sie im Intervalle entweder nur positive Werte, oder nur negative, oder sie besitzt sowohl positive, wie negative Werte. Wenn die Funktion positive Werte erhält, so giebt es, da sie an den Endpunkten verschwindet, einen größten Wert, der an einer oder an mehreren Stellen im Innern des Intervalles erreicht wird. Solch eine Stelle sei x_1 und der zugehörige Wert der Funktion $\varphi(x_1)$; alsdann sind, wie klein auch immer h gewählt wird,

$$\varphi(x_1 - h) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1 + h)$$

kleiner oder gleich $\varphi(x_1)$, jedenfalls nicht größer. Wenn dagegen $\varphi(x)$ im Intervalle von x_0 bis X negativ wird, so giebt es einen kleinsten Wert der Funktion, der an einer oder mehreren Stellen im Innern des Intervalles erreicht wird, und die Größen

$$\varphi(x_1 - h) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1 + h)$$

sind, wenn x_1 solch eine Stelle bezeichnet, größer oder gleich $\varphi(x_1)$, jedenfalls nicht kleiner. In beiden Fällen haben die Differenzen

$$\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1) \quad \text{und} \quad \varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)$$

dasselbe Vorzeichen, und folglich sind die Quotienten

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$$

von entgegengesetztem Vorzeichen.

Dabei ist zu bemerken, daß auch die Annahme nicht ausgeschlossen wird, daß einer dieser Quotienten bei kleinen Werten von h stets 0 bleibt, was dann eintritt, wenn die Funktion $\varphi(x)$ den nämlichen Wert innerhalb eines Intervalles von endlicher Länge behält. Ist insbesondere die Funktion $\varphi(x)$ konstant gleich 0, für alle Werte von x zwischen x_0 und X, so sind beide Quotienten gleich 0.

Die Quotienten (3) konvergieren nach der nämlichen Grenze, wenn h nach 0 konvergiert, denn wir haben angenommen, daß die Funktion $f(x)$ für jedes x eine bestimmte Ableitung besitzt, und folglich gilt dasselbe für die Funktion $\varphi(x)$. Andererseits sind diese Verhältnisse von entgegengesetztem Zeichen; folglich ist ihre Grenze gleich 0. Also hat man

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = 0$$

oder nach Gleichung (2):

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-A\right]=0,$$

d. h.

$$A=\lim_{h=0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=f'(x_1).$$

Demnach ist

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}=f'(x_1)$$

oder

$$f(X)-f(x_0)=(X-x_0)f'(x_1), \tag{4}$$

wie die Behauptung besagt.

Setzt man $X=x_0+h$, so kann die Gröfse x_1, welche zwischen x_0 und x_0+h liegt, durch $x_0+\theta h$ bezeichnet werden, wobei θ eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Man kann also schreiben

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h). \tag{5}$$

29. Die Ableitung einer Konstanten ist null. Eine unmittelbare Folge des Mittelwertsatzes ist der folgende:

Satz. Ist die Funktion $f(x)$ für alle Werte von x innerhalb eines gegebenen Intervalles konstant, so ist die Ableitung $f'(x)$ für dieselben Werte von x gleich 0. Und umgekehrt, wenn die Ableitung $f'(x)$, bei allen Werten von x, innerhalb eines gegebenen Intervalles gleich 0 ist, so hat die Funktion $f(x)$ in diesem Intervalle einen konstanten Wert.

1. Ist $f(x)$ konstant in einem Intervalle, und sind x_0 und x_0+h zwei Werte von x, die zu diesem Intervalle gehören, so ist

$$f(x_0+h)-f(x_0)=0, \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0,$$

und geht man zur Grenze für $h=0$ über, so ist auch

$$\lim\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=0.$$

2. Ist umgekehrt $f'(x)$ gleich 0 für alle Werte von x innerhalb gegebener Grenzen, und sind x_0 und x_0+h zwei beliebige Werte von x innerhalb dieser Grenzen, so hat man (28)

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist der Annahme nach null, und demnach ist

$$f(x_0 + h) = f(x_0),$$

d. h. $f(x)$ hat einen konstanten Wert.

Folgerung. Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ sich nur um eine Konstante unterscheiden für alle Werte von x innerhalb gegebener Grenzen, so sind bei den nämlichen Werten von x auch die Ableitungen dieser Funktionen einander gleich.

Und umgekehrt: *Wenn die Ableitungen $f'(x)$ und $F'(x)$ zweier Funktionen $f(x)$ und $F(x)$, einander gleich sind für alle Werte von x innerhalb gegebener Grenzen, so unterscheiden sich auch die Funktionen selbst bei diesen Werten von x nur um eine Konstante.*

Denn bezeichnet man die Differenz der Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ mit $\varphi(x)$, so ist

$$\varphi(x) = f(x) - F(x), \quad \varphi(x+h) = f(x+h) - F(x+h),$$

folglich

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Geht man zur Grenze für $h = 0$ über, so ist

$$\varphi'(x) = f'(x) - F'(x).$$

Ist $\varphi(x)$ konstant, so ist $\varphi'(x) = 0$; also sind die Ableitungen $f'(x)$ und $F'(x)$ einander gleich.

Umgekehrt: Sind $f'(x)$ und $F'(x)$ gleich, so ist $\varphi'(x)$ null, und also ist $\varphi(x)$ eine Konstante.

30. Das Wachsen und Abnehmen der Funktionswerte. Ebenfalls aus dem Mittelwertsatze fliefst der folgende:

Satz. In dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ erfülle die Funktion $f(x)$ die Forderung $\mathfrak{A}$. $f'(x)$ sei im ganzen Intervalle positiv (negativ). Dann nimmt $f(x)$ zu (ab) mit wachsendem x.

Ist x irgend eine Stelle des Intervalles $x_0 < x < X$ und $x + h > x$ eine zweite Stelle desselben; dann ist nach Nr. 28:

$$f(x+h) - f(x) = h\,f'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

und $x + \theta h$ gehört ebenfalls dem Intervalle an.

Ist $f'(x)$ positiv in dem Intervall, so wird daher

$$f(x+h) > f(x)$$

für irgend zwei Stellen x, $x + h$ des Intervalles, für welche $x + h > x$; das heifst h positiv ist. $f(x)$ wächst also mit wachsendem x.

Ist $f'(x)$ negativ, so ist $-f'(x)$ positiv. Nach dem eben Bewiesenen wächst daher $-f(x)$ in dem Intervall und $f(x)$ nimmt ab mit wachsendem x.

31. Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Eine allgemeinere Form des Mittelwertsatzes ist die folgende:

Satz. Die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ mögen in dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen und $F'(x)$ werde in demselben Intervalle nie null, dann ist:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} \text{ und } x_0 < x_1 < X.$$

Wir wenden dieselbe Überlegung an, welche zum Beweise des Satzes I diente. Setzt man

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = A,$$

so ist:

$$(1) \qquad [f(X) - f(x_0)] - A[F(X) - F(x_0)] = 0.$$

Hieraus folgt, dafs die Funktion

$$(2) \qquad \varphi(x) = [f(x) - AF(x)] - [f(x_0) - AF(x_0)],$$

welche für $x = x_0$ verschwindet, auch für $x = X$ gleich 0 ist. Ist also die Funktion $\varphi(x)$ nicht durchaus gleich 0, so giebt es mindestens eine Stelle x_1 im Innern des Intervalles, an welcher sie ihren Maximal- oder Minimalwert annimmt. Für diese Stelle sind

$$\frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} \text{ und } \frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h}$$

von entgegengesetzten Zeichen, also ist:

$$\lim \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = 0,$$

d. h. nach Gleichung (2)

$$\lim \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - A \lim \frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h} = 0,$$

oder

$$f'(x_1) - AF'(x_1) = 0.$$

Der Wert x_1 ist weder gleich x_0 noch gleich X; der Voraussetzung nach wird $F'(x)$ weder 0 noch unendlich für Werte von x zwischen x_0 und X; daher folgt

$$A = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}$$

und sonach ist

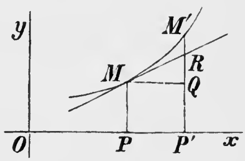
$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Setzt man $X = x_0 + h$, wobei h eine positive oder negative Gröfse sein kann, so ist $x_1 = x_0 + \theta h$, und θ ein Bruch zwischen 0 und 1; die Gleichung erhält die Form:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}.$$

32. Die Ableitung als Differentialquotient. Ist $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an einer bestimmten Stelle x und bezeichnet man mit dx eine willkürliche gewählte Zahl, um welche die Zahl x vermehrt wird, so kann man eine zweite Zahl dy bestimmen, sodafs:

Fig. 15.



$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

wird. Die beiden zusammengehörigen Werte dx und dy nennt man Differentiale und deshalb bezeichnet man nach *Leibnitz*, die Ableitung $f'(x)$ als den Quotienten der beiden Zahlen den *Differentialquotienten* der Funktion $f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Für denselben Begriff hat man also zwei verschiedene Namen: „Ableitung“ und „Differentialquotient“ und entsprechend zwei verschiedene Zeichen:

$$f'(x) \text{ und } \frac{df(x)}{dx}.$$

Betrachten wir wieder die Figur 15. Wählt man in ihr $dx = PP' = MQ$, so wird:

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx = MQ \operatorname{tg} \angle QMR = MQ \cdot \frac{RQ}{MQ} = RQ.$$

Wenn also die unabhängige Veränderliche x um die Zahl dx vermehrt wird, so giebt $df(x)$ nicht den Zuwachs der Funktion $f(x)$ an, sondern den Zuwachs, welchen die Ordinate der *Tangente* im Punkte (x, y) erfährt, wenn x um dx wächst. Ferner lehrt die Anschauung Folgendes:

Die Tangente giebt die Richtung an, welche die Kurve im Punkte M einzuschlagen bestrebt ist. Die Neigung dieser Tangente gegen die x-Achse giebt ein Maſs für die Stärke, mit welcher die Kurve im Punkte M zu steigen oder wachsen bestrebt ist. Würde die im Punkte (x, y) vorhandene Stärke des Wachsens der Funktion $f(x)$ wirklich konstant bleiben, so würde der Punkt M nicht die Kurve weiter entlang laufen; denn auf dieser ändert sich ja von Punkt zu Punkt die Richtung der Tangente, also auch die Stärke des Wachsens der Funktion $f(x)$, sondern M würde auf der Tangente weitergehen. Deshalb definiert man auch analog wie in der Mechanik die Geschwindigkeit (die in der That Newton zu seiner „Fluxionsrechnung“ führte) hier den Differentialquotienten so:

Würde die Funktion $f(x)$ an der Stelle x in demselben Maſse weiter wachsen, wie sie es an dieser Stelle thut, so würde einer Zunahme der Veränderlichen x um dx eine Zunahme der Funktion um $df(x)$ entsprechen. Der Quotient beider Zunahmen $\frac{df(x)}{dx}$ ist dann seiner Definition nach unabhängig von der willkürlich gewählten Zunahme dx und heiſst der *Differentialquotient* oder die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x.

In Wirklichkeit erfährt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x, wenn x um Δx vermehrt wird, die Zunahme: $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x, \Delta x)$. Bezeichnet man diese durch $\Delta f(x)$, so ist:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x, \Delta x)$$

der Differenzenquotient der Funktion $f(x)$. Er ist abhängig sowohl von der betrachteten Stelle x als der Zunahme Δx. Nach No. 27 bestimmt er die Neigung der *Sehne* MM' gegen die x-Achse. Δx ist hier dieselbe Zahl wie h in No. 27. Aber nach No. 27 ist sein Grenzwert für $\Delta x = 0$ der Differentialquotient an der Stelle x. Wir haben also:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten.

Eine lineare Funktion $f(x)$ wird geometrisch durch eine Gerade repräsentiert. Bei dieser fällt in jedem Punkte die Tangente mit der Geraden selbst zusammen, *der Differentialquotient fällt hier zusammen mit dem Differenzenquotienten.* In der That wird hier:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(x + \Delta x) = ax + b + a\,\Delta x$$
$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a\,\Delta x$$
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a.$$

Dieser Differenzenquotient ist unabhängig von der Wahl des Δx und daher auch für $\Delta x = 0$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a.$$

§ 2. Die Differentiation der expliciten algebraischen Funktionen.

Die Rechnung, durch welche man die Ableitung oder den Differentialquotienten einer Funktion bestimmt, heifst die *Differentiation.* Die Regeln zur Differentiation von Funktionen bilden die Grundlage der Differentialrechnung. Nach Ableitung eines allgemeinen Hülfssatzes werden wir zunächst die einfachen Fälle behandeln, bei denen die vorgelegte Funktion algebraisch zusammengesetzt ist aus einer oder aus mehreren Funktionen, deren Ableitungen bekannte Werte haben. Wir machen hier sofort die Annahme:

Die vorkommenden Funktionen besitzen an der gerade betrachteten Stelle endliche Werte und bestimmte endliche Ableitungen.

33. Die Funktion einer Funktion. Es sei y eine Funktion von u etwa $y = f(u)$ und u wieder eine Funktion von x, dann ist y wieder eine Funktion von x, indem y eine Funktion einer Funktion von x ist.

Dies festgesetzt, beweisen wir den folgenden Satz, den man als grundlegend zu betrachten hat.

Ist $\frac{du}{dx}$ *die Ableitung von* u *als Funktion von* x, *und* $f'(u)$ *die Ableitung von* $f(u)$ *als Funktion von* u, *so ist die Ableitung von* $f(u)$ *als Funktion von* x:

$$\frac{df(u)}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Denn erteilt man der unabhängigen Variabelen x den Zuwachs Δx, so erleidet u eine Änderung, die mit Δu, und dadurch y eine Änderung, die mit Δy bezeichnet werde. Es ist

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u) + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Für $\Delta x = 0$, wird

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \left(\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Nach Voraussetzung ist aber:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

und, da mit Δx auch $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ verschwindet, ist auch

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u).$$

Also wird:

$$\lim \frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

also:

$$\frac{df(u)}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

34. Differentiation einer Summe. Wir betrachten die Funktion

$$y = \pm u \pm u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_{m-1},$$

$u, u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$ sollen Funktionen der unabhängigen Variabelen x sein, deren Ableitungen als bekannt angenommen werden. Der Variabelen x erteilen wir den Zuwachs Δx, und es seien

$$\Delta y, \; \Delta u, \; \Delta u_1, \ldots \Delta u_{m-1}$$

die entsprechenden Änderungen der Variabelen

$$y, \; u, \; u_1, \ldots u_{m-1}.$$

Es ist einleuchtend, dafs die Gleichung besteht:

$$\Delta y = \pm \Delta u \pm \Delta u_1 \pm \cdots \Delta u_{m-1}$$

Also ist auch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta u_1}{\Delta x} \pm \cdots \pm \frac{\Delta u_{m-1}}{\Delta x}.$$

Geht man jetzt zu den Grenzen über, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{du}{dx} \pm \frac{du_1}{dx} \pm \cdots \pm \frac{du_{m-1}}{dx}$$

Daraus folgt:

Die Ableitung einer algebraischen Summe von Funktionen ist gleich der Summe aus den Ableitungen dieser Funktionen:

35. Differentiation eines Produktes. 1. Ist

$$y = au$$

und a eine Konstante, u eine Funktion von x, so wird, wenn man die Zuwüchse von u und y mit Δu und Δy bezeichnet, während x um Δx sich ändert,

$$\Delta y = a\Delta u, \text{ also } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Geht man zu den Grenzen über, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx}.$$

Also:

Die Ableitung des Produktes aus einer Funktion und einer Konstanten ist gleich dem Produkte aus der Ableitung dieser Funktion mit der Konstanten.

2. Betrachten wir das Produkt

$$y = u \cdot v,$$

wobei u und v Funktionen von x sind. Bezeichnen dann wiederum $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ die Änderungen dieser Variabelen, so ist

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\,\Delta v,$$

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

Sind nun $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$ die Ableitungen von u und v, so wird für $\Delta x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Die Ableitung eines Produktes zweier Funktionen ist gleich der Summe aus den Produkten, welche man erhält, indem man jede Funktion mit der Ableitung der anderen multipliziert.

Bezeichnet man die Ableitungen kurz durch Accente, so wird $y' = u'v + uv'$ oder auch, wenn man durch $y = uv$ dividiert:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Der Quotient der Ableitung einer Funktion und der Funktion selbst heifst ihre logarithmische Ableitung. Die Formel sagt also aus:

Die logarithmische Ableitung eines Produktes aus zwei Faktoren ist gleich der Summe der logarithmischen Ableitungen dieser Faktoren.

Diese Eigenschaft, welche analog ist einer Eigenschaft der Logarithmen, rechtfertigt den Namen logarithmische Ableitung.

3. Wir betrachten endlich das Produkt aus einer beliebigen Anzahl von Funktionen der unabhängigen Variabelen x, es heifse

$$y = u_1 u_2 \ldots u_m.$$

Nach der Regel für die logarithmische Differentiation eines Produktes hat man

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{u_1'}{u_1} + \frac{(u_2 u_3 \ldots u_m)'}{u_2 u_3 \ldots u_m} \\ &= \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{(u_3 \ldots u_m)'}{u_3 \ldots u_m} \\ &= \cdots = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_m'}{u_m}.\end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen, nämlich

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_m'}{u_m}$$

besagt, *dafs die logarithmische Ableitung eines Produktes gleich der Summe aus den logarithmischen Ableitungen seiner Faktoren ist.*

Um die Ableitung y' selbst zu erhalten, genügt es die letzte Gleichung mit y zu multiplizieren; es wird

$$y' = u_1' u_2 u_3 \ldots u_m + u_1 u_2' u_3 \ldots u_m + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{m-1} u_m'.$$

Der Beweifs ist aufserdem unter der Annahme geführt, dafs keine dieser Funktionen u für die betrachteten Werte von x verschwindet. Es ist aber leicht zu sehen, daſs die zuletzt gewonnene Gleichung von dieser letzteren Annahme unabhängig ist, da man dieselbe auch direkt aus der Gleichung $y = uv$, $y' = uv' + u'v$ gewinnen kann.

36. Differentiation eines Quotienten. Sind u und v zwei Funktionen von x und betrachtet man den Quotienten

$$y = \frac{u}{v},$$

so hat man

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

für jeden Wert von x, für welchen nicht gerade $v = 0$ ist. Also wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v + \Delta v} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

oder

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $y = \frac{u}{v}$, so folgt:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

also:

Die logarithmische Ableitung eines Quotienten ist gleich der logarithmischen Ableitung des Zählers, vermindert um die logarithmische Ableitung des Nenners.

37. Differentiation der Potenzen einer Funktion. Es sei u eine Funktion von x und man betrachte die Potenz

(1) $$y = u^m,$$

in welcher der Exponent m eine Konstante ist.

1. Ist m eine ganze positive Zahl, so ist y das Produkt von m gleichen Faktoren u, infolge dessen ist die Ableitung der Funktion y nach der dritten Regel der Nr. 35 zu bilden und es wird:

(2) $$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx} \text{ oder } y' = mu^{m-1}u' \text{ oder } \frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u}.$$

2. Ist m ein positiver Bruch, mit dem Nenner i, so ist

$$y^i = u^{mi}.$$

Setzt man $z = y^i$, also $z = u^{mi}$, so ist $z' = miu^{mi-1}u'$. Aus der Gleichung $z = y^i$ folgt aber

$$z' = iy^{i-1}y',$$

also ist:

$$iy^{i-1}y' = miu^{mi-1}u' \quad \text{oder} \quad y^{i-1}y' = mu^{mi-1}u'.$$

Dividiert man durch y^i, so folgt

$$\frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u} \quad \text{oder} \quad y' = mu^{m-1}u',$$

also die frühere Formel.

3. Ist m eine ganze oder gebrochene negative Zahl, so hat man nach der Formel (1) für alle Werte von x, für welche u nicht gleich 0 ist,

$$yu^{-m} = 1.$$

Da das Produkt yu^{-m} konstant ist, so ist seine Ableitung 0; die Differentiation der letzten Gleichung ergiebt also

$$y'u^{-m} - mu^{-m-1}yu' = 0,$$

oder

$$y' = mu^{m-1}u', \quad \frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u}.$$

Also ist die Formel

$$\frac{du^m}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad (u^m)' = mu^{m-1}u'$$

allgemein gültig für jeden positiven oder negativen rationalen Exponenten. (Dafs sie auch für irrationale Exponenten gilt, wird in Nr. 47 gezeigt werden.)

Reduziert sich die Funktion u auf die Variabele x, ist also $u = x$ und

$$y = x^m,$$

so wird

$$(x^m)' = mx^{m-1} \quad \text{oder} \quad \frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}.$$

Die Regel lautet:

Die Ableitung der m^{ten} Potenz von x ist gleich dem m-fachen der $m-1^{ten}$ Potenz von x.

Für den Fall $m = \frac{1}{2}$ ergiebt sich

$$y = \sqrt{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}.$$

§ 3. Anwendungen.

38. Formelbeispiele. Eine explicite algebraische Funktion wird erhalten, indem man mit der Variabelen x und mit Konstanten algebraische Rechnungsoperationen in endlicher Anzahl ausführt. Die Ableitung solch einer Funktion kann man daher immer vermittelst der bisherigen Regeln berechnen. Wir wollen hier einige Beispiele geben:

1. Ist

$$y = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \cdots Lx^r,$$

wobei $A, B, C \ldots$ bestimmte Konstante, und m, n, p rationale, ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, so erhält man unmittelbar durch Anwendung der Regeln für Summe, Produkt und Potenzen:

$$y' = mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + pCx^{p-1} + \cdots rLx^{r-1}.$$

2. Ist im Besonderen

$$y = a + b\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{e}{x},$$

wobei a, b, c, e Konstante sind, so kann man schreiben:

$$y = a + bx^{+\frac{1}{2}} + cx^{-\frac{1}{2}} + ex^{-1}$$

und man hat

$$y' = \left[\frac{1}{2} bx^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} cx^{-\frac{3}{2}} - ex^{-2}\right],$$

oder

$$y' = \left(\frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{c}{x\sqrt{x}} - \frac{e}{x^2}\right).$$

3. Ist

$$y = x^2(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$$

und a eine Konstante, so ist

$$y = (a^2x^2 + x^4)\sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich:

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{d(a^2x^2 + x^4)}{dx} + (a^2x^2 + x^4)\frac{d\sqrt{a^2 - x^2}}{dx}$$
$$= \sqrt{a^2 - x^2}\,(2a^2x + 4x^3) + (a^2x^2 + x^4)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\frac{d(a^2 - x^2)}{dx}$$
$$= \sqrt{a^2 - x^2}\,(2a^2x + 4x^3) - (a^2x^2 + x^4)\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder

$$y' = \frac{(2a^4 + a^2x^2 - 5x^4)x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

4. Ist

$$y = (ax^m + b)^n$$

und sind a, b, m, n konstante Zahlen, so wird

$$y' = n(ax^m + b)^{n-1}\frac{d(ax^m + b)}{dx},$$

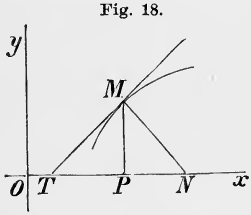
also:

$$y' = mnax^{m-1}(ax^m + b)^{n-1}.$$

39. Geometrische Anwendungen. Die bisherigen Regeln reichen zur Lösung mehrerer Aufgaben bereits aus; es wird nützlich sein, hiervon einige Beispiele zu geben. Wir entnehmen dieselben der Geometrie und müssen zunächst einige in der Kurventheorie gebräuchliche Benennungen einführen. Ist eine Kurve auf zwei geradlinige Koordinatenachsen bezogen, und konstruiert man in einem Punkte die Tangente und die Normale, so heifsen die Strecken auf diesen Geraden, welche zwischen dem Kurvenpunkte und der Abscissenaxe liegen, die *Länge der Tangente* und die *Länge der Normale*, während die Projektionen dieser Strecken auf die Abscissenaxe die Namen *Subtangente* und *Subnormale* haben.

Aufgabe I. Es soll die Kurve bestimmt werden, für welche im rechtwinkligen Koordinatensysteme die Subnormale gleich einer gegebenen Konstanten p ist.

Fig. 18.



Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes M der gesuchten Kurve, so ist y als Funktion von x zu betrachten, und diese Funktion ist zu bestimmen. Es werde die Ordinate MP des Punktes M und die Normale MN konstruiert, dann ist die Subnormale PN gleich der Ordinate $MP = y$, multipliziert mit Tangente des Winkels

PMN. Dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel MTx, welchen die Tangente des Punktes M mit der Abscissenachse bildet; also ist sein Tangens gleich $\frac{dy}{dx}$. Die Bedingung der Aufgabe ist also ausgedrückt durch die Gleichung

$$y\frac{dy}{dx} = p,$$

oder

$$2yy' = 2p.$$

Das erste Glied derselben ist die Ableitung von y^2 (nach Nr. 37); das zweite Glied ist die Ableitung von $2px$. Wir haben also zwei Funktionen von x, nämlich y^2 und $2px$, welche gleiche Ableitungen haben. Diese Funktionen können sich also nur (29) um eine Konstante unterscheiden, und man hat:

$$y^2 = 2px + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist. Die Parabeln mit dem Parameter p, deren Axe mit der Geraden zusammenfällt, auf welcher man die Subnormale konstruiert, sind also die einzigen Kurven, welche der gestellten Aufgabe entsprechen.

Aufgabe II. Es soll die Kurve bestimmt werden, deren Normale gleich einer gegebenen Konstante a ist.

Man sieht aus der vorigen Figur, dafs das Quadrat der Normalen gleich ist dem Quadrate der Subnormalen $y\frac{dy}{dx}$, vermehrt um das Quadrat der Ordinate; man hat also die Bedingung:

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man $y = \pm a$ setzt; denn hieraus folgt $\frac{dy}{dx} = 0$. Die beiden Geraden, welche parallel zur Abscissenaxe in der Entfernung a von dieser Axe laufen, bilden also eine Lösung des Problemes. Abgesehen von dieser Lösung, folgt aus der obigen Gleichung:

$$1 = \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel sowohl positiv, wie negativ sein kann. Die rechte Seite dieser Gleichung ist die

Ableitung von $-\sqrt{a^2-y^2}$, folglich drückt diese Gleichung aus, dafs die Funktionen

$$x \text{ und } -\sqrt{a^2-y^2}$$

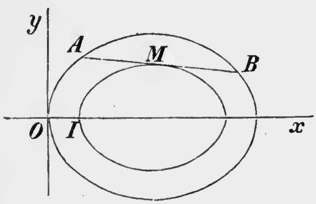
dieselbe Ableitung haben. Demnach können sich diese Funktionen nur um eine Konstante α unterscheiden, und man hat

$$x-\alpha=-\sqrt{a^2-y^2},$$
$$(x-\alpha)^2+y^2=a^2.$$

Die Kreise mit dem Radius a, deren Mittelpunkte auf der Abscissenaxe liegen, sind die Lösungen der Aufgabe.

Aufgabe III. Es ist ein Kegelschnitt OAB gegeben. Man soll eine Kurve IM so bestimmen, dass jede Sehne AB des Kegelschnittes, welche zugleich die Kurve IM berührt, durch den Berührungspunkt M in zwei gleiche Teile geteilt wird.

Fig. 19.



Sei $Y^2=2pX+qX^2$ die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes, und

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte M (x, y) der unbekannten Kurve. Eliminiert man Y zwischen diesen beiden Gleichungen, so wird:

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-q\right]X^2+2\left[y\frac{dy}{dx}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-p\right]X+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Die halbe Summe der beiden Wurzeln X dieser Gleichung ist:

$$\frac{p-y\dfrac{dy}{dx}+x\left(\dfrac{dy}{dy}\right)^2}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-q}.$$

Nach der Bedingung dieser Aufgabe soll diese halbe Summe gleich der Abscisse x des Berührungspunktes M sein. Man hat also

$$p+qx-y\frac{dy}{dx}=0,$$

oder:

$$2yy'=2p+2qx.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $2px+qx^2$, die linke die Ableitung von y^2. Diese beiden

Funktionen unterscheiden sich also nur um eine Konstante, d. h. es ist

$$y^2 = 2px + qx^2 + C$$

die allgemeine Gleichung der gesuchten Kurve. Diese Kurven sind Kegelschnitte, welche zu dem gegebenen ähnlich und ähnlich liegend sind.

§ 4. Satz für die Differentiation von Funktionen, welche aus mehreren Funktionen einer unabhängigen Variabelen zusammengesetzt sind.

40. Der Satz für zwei Terme. Die Resultate, welche wir oben gefunden haben, sind in einem allgemeinen Satze enthalten, der sich auf die Differentiation einer Funktion bezieht, die aus mehreren zusammengesetzt ist.

Wenn u und v zwei Funktionen der unabhängigen Variabelen x sind, und

$$y = f(u, v)$$

eine Funktion von u und v bedeutet, so sagt man, y ist eine Funktion, welche aus den beiden Funktionen u und v zusammengesetzt ist.

Bilden wir nun

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)\\ &= [f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)] + [f(u, v+\Delta v) - f(u, v]\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = &\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &+ \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert, welchen der Quotient

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$$

erhält, wenn man Δu null werden läfst, während man Δv ungeändert läfst, wird als die Ableitung der Funktion in Bezug auf die Variabele u zu bezeichnen sein. Diese Ableitung wird eine Funktion von u sein und aufserdem von dem Werte $v + \Delta v$ abhängen. Wir bezeichnen sie mit $\varphi(u, v + \Delta v)$, und nehmen erstlich an, dafs die Funktion $f(u, v + \Delta v)$ als Funktion von u

die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllt für alle Werte u in dem Intervalle von u bis $u + \Delta u$. Alsdann ist aber nach dem Satze der Nr. 28

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v).$$

Ebenso wird die Grenze des Quotienten

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$$

als Ableitung der Funktion $f(u, v)$ nach v zu bezeichnen sein; wir nennen sie $\psi(u, v)$. Aus der Gleichung

$$(1)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

folgt nun durch Übergang zur Grenze für $\Delta x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v) \cdot \frac{du}{dx} + \psi(u, v) \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Bei unserem Beweisgange bedingt dieser Grenzübergang folgende Voraussetzungen:

1. Die Funktionen u und v von x besitzen an der gerade betrachteten Stelle x bestimmte, endliche Ableitungen, so dafs wir setzen dürfen:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}.$$

Hieraus folgt dann, dafs u und v an der Stelle x stetig sind und daher mit $\Delta x = 0$ auch gleichzeitig $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ wird.

2. Die Gleichung (1) mufs für das ursprünglich gewählte Δx und alle absolut kleineren Zahlen Δx gelten. Dies ist der Fall, wenn die Funktion $f(u, v)$ für alle Wertepaare u, v bis $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ als Funktion von u die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllt.

3. Es mufs $\lim\limits_{\Delta u = 0,\, \Delta v = 0} \varphi(u + \vartheta \Delta u, v + \Delta v) = \varphi(u, v)$ sein. Dies ist der Fall, wenn $\varphi(u, v)$ an der Stelle u, v stetig ist als Funktion der zwei Variabeln u, v.

4. Es mufs $\lim\limits_{\Delta v = 0} \dfrac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$ einen bestimmten endlichen Wert haben.

Wenn eine Funktion y von den beiden willkürlichen Variabelen u und v abhängt, so bezeichnet man mit den Symbolen

$\partial_u y$ und $\partial_v y$ die Differentiale dieser Funktion, welche man erhält, indem man nur eine der Gröſsen u oder v variiert; die Ableitungen $\varphi(u,v)$ und $\psi(u,v)$ sind also bezüglich gleich den beiden Quotienten $\frac{\partial_u y}{\partial u}$ und $\frac{\partial_v y}{\partial v}$. Man läſst gewöhnlich die Indices in den beiden Zählern fort; jedoch darf man dabei nicht auſser Acht lassen, daſs die Zähler ∂y in beiden Quotienten etwas verschiedenes bedeuten, was übrigens durch die Nenner ohne irgend welche Unbestimmtheit ausgedrückt ist. Die Ableitung der Funktion y, als Funktion von x betrachtet, ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Man bezeichnet die beiden Ableitungen auch mit $f'_u(u,v)$, $f'_v(u,v)$; also ist

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u,v)\frac{du}{dx} + f'_v(u,v)\frac{dv}{dx}.$$

Um unseren Satz kurz aussprechen zu können, wollen wir die folgende Redeweise einführen, deren wir uns später noch oft bedienen werden:

Wir sagen eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots)$ hat eine bestimmte Eigenschaft *in der Umgebung einer Stelle* $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots$, wenn sich eine positive Zahl h angeben läſst, so daſs f jene Eigenschaft für alle Stellen x_1, x_2, ... besitzt, welche die Bedingung $|x_1 - a_1| < h$, $|x_2 - a_2| < h$, ... erfüllen.

Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise können wir unseren Satz so aussprechen:

Es seien u und v zwei Funktionen von x, welche in der Umgebung einer bestimmten Stelle x bestimmte endliche Ableitungen $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ besitzen. Ferner sei $f(u,v)$ in der Umgebung der entsprechenden Stelle u, v nebst den beiden Ableitungen nach u und v stetig als Funktion der beiden Variabelen u und v. Alsdann ist:

$$\frac{df(u,v)}{dx} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

41. Der Satz für beliebig viele Terme. Das erhaltene Resultat kann leicht verallgemeinert werden. Seien $u, v, w, s \ldots$ Funktionen der unabhängigen Variabelen x, und

$$y = f(u, v, w, s \ldots)$$

eine aus ihnen zusammengesetzte Funktion. Ersetzen wir dieselben mit Ausnahme der ersten durch ihre Werte in x, so hat man y ausgedrückt in u und x. Man kann also die Formel des vorigen Paragraphen anwenden und erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{d'y}{dx},$$

wobei $\frac{d'y}{dx}$ die Ableitung von y bedeutet, gebildet indem u als Konstante betrachtet wird. Man hat dann ebenso

$$\frac{d'y}{dx} = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{d''y}{dx},$$

wobei $\frac{d''y}{dx}$ die Ableitung von y ist, wenn u und v als konstant angesehen werden. Ferner ist

$$\frac{d''y}{dx} = \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \frac{d'''y}{dx};$$

$\frac{d'''y}{dx}$ ist die Ableitung von y, wenn u, v und w als Konstante gelten. Es ist leicht zu sehen, dafs man, indem man die erhaltenen Gleichungen verbindet, die Gleichung gewinnt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \cdots$$

und man kann den Satz aussprechen:

Die Ableitung einer Funktion, welche aus mehreren Funktionen zusammengesetzt ist, ist gleich der Summe aus der, welche man erhält, indem man nach einander jede der zusammensetzenden Funktionen als die einzige Variabele ansieht.

Der Satz gilt jedenfalls unter den folgenden Bedingungen:

Die u, v, w, $\ldots s$ sind Funktionen von x, welche in der Umgebung der gerade fixierten Stelle x bestimmte endliche Ableitungen besitzen und selbst bestimmte endliche Werte besitzen. Sodann ist $f(u, v, w \ldots s)$, als Funktion der unabhängigen Veränderlichen u, v, $\ldots s$, in der Umgebung der entsprechenden Stelle $(u, v, \ldots s)$ nebst $\frac{\partial f}{\partial u} \cdots \frac{\partial f}{\partial s}$ stetig.

42. Anwendungen:

1. Ist $y = Au + Bv + Cw \ldots$ und sind $A, B, C \ldots$ Konstante, so werden die Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \cdots$ bezüglich gleich $A, B, C \ldots$; es ist also

$$y' = Au' + Bv' + Cw' + \cdots$$

2. Ist $y = uvws \ldots$, so sind die Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}$ bezüglich gleich

$$vws \ldots, uws \ldots, uvs \ldots,$$

man hat also:

$$y' = (vws \ldots) u' + (uws \ldots) v' + (uvs \ldots) w' + \cdots,$$

wie schon in Nr. 35 gefunden wurde. Diese Formel führt, wie in Nr. 37 gezeigt ist, zur Regel für die Differentiation von Potenzen.

3. Ist

$$y = \frac{u}{v} = uv^{-1},$$

so hat man (wenn v nicht gleich 0 ist),

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -uv^{-2},$$

also:

$$y' = v^{-1} u' - uv^{-2} v' \quad \text{oder} \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

wie in Nr. 36 gefunden wurde.

43. Folgerung aus dem vorigen Satze. Jede explicite Funktion y der Variabelen x wird erhalten, indem man mit dieser Variabelen bestimmte Rechnungsoperationen in bestimmter Reihenfolge ausführt. Die Zahl dieser Operationen wird als begrenzt vorausgesetzt; ist sie gröſser als 1, so ist die letzte Operation an einer oder an mehreren Funktionen $u, v, w \ldots$ auszuführen, welche vorher gebildet sind. So erhält man:

$$y = f(u, v, w \ldots).$$

Der vorige Lehrsatz nun führt die Differentiation von y auf die Differentiation der einfacheren Funktionen $u, v, w \ldots$ und auf die durch das Symbol f dargestellten Funktionen von u, von v, von $w \ldots$ u. s. w. zurück. Werden die Funktionen $u, v, w \ldots$ nicht durch eine einzige Operation aus x berechnet, so kann man auf sie dasselbe anwenden, was von y gesagt wurde, und so fort. Demnach reduziert sich die Differentiation von y immer auf die Bestimmung von Ableitungen *elementarer Funktionen*, welche man nicht auf einfachere zurückführen kann. Die elementaren Funktionen, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben, sind:

1. Die Funktionen, welche aus einer einzigen algebraischen Operation hervorgehen: nämlich $a \pm x$, ax, x^m.

2. Die Exponentialfunktion a^x und die Funktion Logarithmus: $\log x$.

3. Die goniometrischen und die cyclometrischen Funktionen.

In Bezug auf die algebraischen Funktionen ist hier dem zu Beginn von § 2 bereits Gesagten nichts hinzuzufügen, und wir werden nun die verschiedenen elementaren transscendenten Funktionen betrachten.

§ 5. Differentiation der Logarithmen und der Exponentialfunktion.

44. Die inversen Funktionen. Allgemein, wenn man die Ableitung einer Funktion kennt, so kann man hieraus auch die Ableitung der inversen Funktion berechnen. In der That, nehmen wir an, dafs die beiden Variabelen x und y unter einander durch eine Gleichung verbunden sind, welche sowohl die Form

$$y = f(x) \text{ als auch die Form } x = F(y)$$

annehmen kann, so folgt aus der ersten Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ und aus der zweiten: } 1 = F'(y)\frac{dy}{dx}, \quad (33),$$

also ist

$$1 = F'(y) f'(x) \quad \text{oder:} \quad F'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

In der *Leibnitz*schen Bezeichnungsweise schreibt sich dies:

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}.$$

Besitzt also y als Funktion von x an der Stelle x eine endliche und von null verschiedene Ableitung $f'(x)$, so besitzt auch x als Funktion von y an der entsprechenden Stelle y eine endliche und von null verschiedene Ableitung $F'(y)$ und die Ableitung der inversen Funktion ist der reciproke Wert der Ableitung der ursprünglichen Funktion.

45. Bestimmung von $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für ganze positive m.

Die Bestimmung dieser Grenze ist unerläſslich für die Aufgaben, die wir uns gestellt haben. Wir nehmen zunächst an, daſs die Zahl m nach einem positiven unendlich groſsen Werte konvergiert, indem sie nur die Werte der ganzen Zahlen durchläuft. Alsdann hat man nach der Binomialformel in Bezug auf einen ganzzahligen positiven Exponenten:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{m^2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3}+\cdots+\left(\frac{1}{m}\right)^m.$$

Ist nun n irgend eine ganze Zahl kleiner als m, und bezeichnet man mit R_n die Summe aller Glieder, welche auf das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied folgen, so kann man schreiben:

$$(1)\begin{cases}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\\[1ex] \qquad +\cdots\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+R_n,\end{cases}$$

wobei der Wert von R_n gleich wird:

$$R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdots n}$$
$$\times\left[\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)}+\cdots\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)\cdots m}\right].$$

In der zwischen der Klammer enthaltenen Summe ist die Zahl der Glieder gleich $m-n$, und diese Glieder sind kleiner als die entsprechenden der unbegrenzten geometrischen Progression

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$$

Die Summe dieser Reihe, d. h. die Grenze, welcher sich die Summe beliebig nähert, je mehr Glieder man summiert, ist $\frac{1}{n}$; folglich kann der Faktor zwischen den Klammern mit $\frac{\theta}{n}$ bezeichnet werden, wenn θ einen Bruch zwischen 0 und 1 bedeutet. Man hat also, wie grofs auch immer m gewählt sein mag:

$$(2) \qquad R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{\theta}{n}.$$

Die Zahl n kann als unveränderlich angesehen werden; lassen wir nun m beliebig wachsen und bezeichnen mit $\mathfrak{R}_n$ die Grenze von R_n, mit ϑ die Grenze von θ, so erhalten wir:

$$(3) \quad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\mathfrak{R}_n,$$

und nach Formel (2) ist

$$(4) \qquad \mathfrak{R}_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\vartheta}{n}.$$

ϑ ist eine Gröfse, von der nur bekannt ist, dafs sie nicht gröfser als 1 und nicht kleiner als 0 ist.

Die Zahl n kann willkürlich gewählt werden, und wenn man annimmt, dafs sie ins Unendliche wächst, so konvergiert $\mathfrak{R}_n$ nach 0. Es folgt hieraus, dafs, je mehr Glieder der Summe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\cdots$$

addiert werden, um so genauer eine bestimmte Grenze erreicht wird. Denn durch Addition beliebig vieler Glieder erhält man Werte, die immer mehr wachsen, und die doch kleiner sind als der Wert

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,\frac{1}{n}.$$

Diese bestimmte Grenze bezeichnet man mit dem Buchstaben e; es ist also

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

wenn man

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

setzt. Bricht man die Reihe mit dem Gliede ab, welches n im Nenner enthält, so ist der Fehler, d. h. die Abweichung vom vollständigen Werte, gleich der Gröfse $\mathfrak{R}_n$, die man den *Rest der Reihe* nennt. Dieser Rest ist kleiner als der n^{te} Teil des $n+1^{\text{ten}}$ Gliedes, mit dem man die Summation abgebrochen hat. Dies gestattet den numerischen Wert der Zahl e mit einer beliebig grofsen Annäherung zu berechnen. Man findet:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ \ldots$$

46. Bestimmung von $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ **für beliebiges** m.

Nehmen wir ferner an, m wird positiv unendlich, indem es alle Zahlenwerte durchläuft, und bezeichnen wir mit μ die ganze Zahl, welche dem Werte m jedesmal am nächsten liegt und kleiner ist als m. Man hat alsdann:

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^\mu < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1},$$

oder

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} : \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu \left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

Wenn nun m ins Unendliche wächst, so wird auch die ganze Zahl μ unendlich. Nun wird

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu = \lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} = e,$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) = \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right) = 1.$$

Mithin ist die Gröfse $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ zwischen zwei Variabelen eingeschlossen, welche beide die Grenze e haben; man hat folglich (25)

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Nimmt man endlich an, dafs m negativ unendlich wird und setzt man $m = -\mu$, so hat man:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^\mu = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^\mu,$$

also

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1} \cdot \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right).$$

Konvergiert m nach $-\infty$, so konvergiert $\mu - 1$ nach $+\infty$ und man hat

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1} = e, \quad \lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right) = 1;$$

also ist auch in diesem Falle

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

47. Die Ableitung von $\log x$. Die Basis der Logarithmen sei hier irgend eine feste positive Zahl a; die Variabele x kann alle positiven Werte annehmen. Erteilt man der Variabelen x den Zuwachs Δx, so wird

$$\Delta \log x = \log (x + \Delta x) - \log x = \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

also

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Setzt man $\frac{x}{\Delta x} = m$ oder $\Delta x = \frac{x}{m}$, so folgt:

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{m}{x} \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Wenn nun Δx null wird, so wird m unendlich, für jeden von null verschiedenen Wert von x; der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ hat die Grenze e, und also ist

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \log e.$$

Sind die Logarithmen in Bezug auf die Basis e gebildet, so hat man das sogenannte Neper'sche oder natürliche System. Hier ist $\log e = 1$, also

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Ersetzt man x durch eine Funktion u von x, so wird nach Nr. 33

$$\frac{d \log u}{dx} = \frac{d \log u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Hierdurch rechtfertigt sich der Name „logarithmische Ableitung“, welcher in Nr. 35 eingeführt wurde. Diese ist in der That die Ableitung des Logarithmus der betreffenden Funktion.

Eine Anwendung dieser Formel machen wir auf den Fall der Potenx $y = x^\mu$ mit beliebigem irrationalem Exponenten. Bildet man für positive Werte von x, $\log y = \mu \log x$, so folgt nach Nr. 33: $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{x}$, also $\frac{dy}{dx} = \mu x^{\mu - 1}$, demnach gilt auch für irrationale Exponenten die frühere Regel.

48. Die Ableitung von a^x. Die Basis a ist als eine positive Konstante zu denken. Es wird

$$\Delta a^x = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

also:

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Setzt man $a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m}$, oder $a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m}$, so erhält man, indem man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$\Delta x \log a = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) \text{ oder } \Delta x = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\log a},$$

folglich:

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{\log a}{m \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = a^x \frac{\log a}{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}.$$

Läfst man Δx nach 0 konvergieren, so wird m unendlich; $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ wird gleich e und demnach

$$\frac{d a^x}{d x} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

Die Basis der Logarithmen ist willkürlich. Wählt man das natürliche System, so ist $\log e = 1$ und demnach

$$\frac{d a^x}{d x} = a^x \log a.$$

Für den Fall $a = e$ gehen die Formeln über in:

$$\frac{d e^x}{d x} = e^x.$$

Die Funktion e^x hat also die Eigenschaft, dafs die Ableitung mit der Funktion identisch ist.

Es ist kaum nötig hinzuzufügen, dafs diese Resultate auch dann noch bestehen, wenn x nicht mehr die unabhängige Variabele ist.

49. Eine Verifikation. Wir haben die Bestimmung der Ableitungen von $\log x$ und a^x direkt ausgeführt. Sobald aber die Ableitung von einer dieser Funktionen bekannt ist, so kann man, wie wir schon sagten, unmittelbar hieraus die Ableitung der anderen berechnen. Denn setzen wir

$$y = a^x,$$

so haben wir, indem wir die Logarithmen mit der Basis a von beiden Seiten nehmen:

$$\log y = x.$$

Wenn man nun als bekannt voraussetzt, dafs die Ableitung von $\log y$ gleich ist $\frac{\log e}{y}$, so hat man

$$\frac{\log e}{y} = 1$$

oder

$$\frac{d a^x}{dx} = \frac{a^x}{\log e}.$$

Da $\log a = 1$, so kann man auch schreiben

$$\frac{d a^x}{dx} = \frac{\log a}{\log e}\, a^x$$

und nun kann man auch die Basis des Logarithmensystems willkürlich wählen, da der Wert des Quotienten sich dabei nicht ändert. Wählt man im Besonderen e zur Basis, so hat man $\frac{d a^x}{dx} = a^x \log a$, wie schon auf direktem Wege gefunden wurde.

50. Anwendungen.

1. Es sei

$$y = \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Die Basis des Logarithmus sei die Zahl e; solche Logarithmen pflegt man mit dem Zeichen log nat oder kurz mit l zu schreiben. Man kann setzen

$$y = \frac{1}{2}\, l(1-x) - \frac{1}{2}\, l(1+x),$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{(1-x)'}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{(1+x)'}{1+x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{2},$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2-1}.$$

2. Ist

$$y = l(x + \sqrt{x^2 + a})$$

und a eine Konstante, so hat man

$$y' = \frac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}},$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

3. Ist

$$y = u^v$$

und sind u und v gegebene Funktionen von x, so wird

$$ly = vlu,$$

also:

$$\frac{dly}{dx} = \frac{vdlu}{dx} + lu\frac{dv}{dx},$$

oder:

$$\frac{y'}{y} = v\frac{u'}{u} + v'lu,$$

also:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' lu.$$

Man hätte dasselbe Resultat auch so gewinnen können, dafs man die Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen anwendet, in Verbindung mit der Regel für die Ableitung der Funktionen a^x.

Setzt man $u = x$, $v = \frac{1}{x}$, so giebt die obige Formel

$$\frac{dx^{\frac{1}{x}}}{dx} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-lx).$$

Man erkennt, dafs die Funktion $x^{\frac{1}{x}}$ wächst, solange x kleiner ist als e, denn die Ableitung ist dann positiv, und dafs sie abnimmt, solange x gröfser ist als e. Folglich erlangt diese Funktion ihr Maximum für $x = e$, und dieser Maximalwert ist $e^{\frac{1}{e}}$. Für negative Werte von x ist die Funktion überhaupt nicht definiert.

4. *In welchen Logarithmensystemen giebt es Zahlen, welche gleich ihren Logarithmen sind?*

Es handelt sich darum zu bestimmen, bei welchen Werten von a Gröfsen x sich bestimmen lassen, so dafs die Funktion

$$y = a^x - x$$

den Wert 0 annimmt. Bezeichnet man mit l einen natürlichen Logarithmus, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = a^x la - 1.$$

Ist a kleiner als 1, so ist die Funktion y eine durchaus abnehmende, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, da die Ableitung durchaus negativ ist. Andererseits hat sie für $x = -\infty$ den Wert $+\infty$, für $x = 0$, den Wert 1, für $x = +\infty$ den Wert $-\infty$. Sie wird also für einen positiven Wert von x gleich 0.

Ist a gröfser als 1, so ist y eine abnehmende Funktion, solange

$$a^x la - 1 < 0,$$

solange also x kleiner ist als der Wert x_1, für welchen

$$a^{x_1} la = 1 \quad \text{oder} \quad x_1 la + lla = 0,$$

d. h.

$$x_1 = -\frac{lla}{la}.$$

Für gröfsere Werte von x ist die Funktion eine wachsende. Die Funktion hat also ein Minimum, welches zum Werte x_1 gehört, und dieser Minimalwert ist gleich

$$\frac{1}{la} + \frac{lla}{la}.$$

Ist dieses Minimum negativ, so wird die Funktion zweimal 0, ist es positiv, so wird die Funktion nicht 0; es mufs also, damit y gleich 0 werden könne,

$$\frac{1}{la} + \frac{lla}{la} \leqq 0 \quad \text{d. h.} \quad 1 + lla \leqq 0 \quad \text{sein.}$$

Dies ergiebt:

$$lla \leqq -1 \quad \text{oder} \quad la \leqq e^{-1}, \quad a \leqq e^{\frac{1}{e}}.$$

Ist $a = e^{\frac{1}{e}}$, so ist $x_1 = e$ und die Funktion wird für diesen einen Wert gleich 0.

§ 6. Differentiation der Kreisfunktionen.

51. Die goniometrischen Funktionen. Diese sind:

$$\sin x, \ \operatorname{tang} x,$$
$$\cos x, \ \operatorname{cotg} x.$$

1. Wir betrachten zuerst die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Erteilt man der Variabelen x den Zuwachs Δx, so hat man

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

oder:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Das Verhältnis $\sin \frac{\Delta x}{2} : \frac{\Delta x}{2}$ konvergiert nach dem Werte 1, wenn Δx null wird.

Geht man also zu den Grenzen über, so wird

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

2. Da die Funktionen tang und cotg gleich den Quotienten

$$\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \frac{\cos x}{\sin x}$$

sind, so kann man ihre Ableitungen vermittelst der Regel für die Differentiation eines Quotienten aus den Ableitungen von sin und cos ableiten. Es wird:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = \frac{\sin x \frac{d \cos x}{dx} - \cos x \frac{d \sin x}{dx}}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Die erhaltenen Formeln zusammengestellt ergeben:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Diese vier Formeln bleiben auch bestehen, wenn x nicht die unabhängige Variabele ist; und man kann bemerken, daſs die zwei in zweiter Kolonne stehenden Formeln erhalten werden, indem man die zwei ersten mit der Variabelen $\frac{\pi}{2} - x$ bildet. Denn es wird:

$$\frac{d \sin}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{d \cos x}{dx} = - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = - \sin x,$$

$$\frac{d \operatorname{tang}}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

52. Anwendungen. Verbindet man die vorstehenden Regeln mit der Regel für Differentiation der Logarithmen, so erhält man unmittelbar die Ableitungen der Funktionen

$$\log \sin x, \ \log \cos x, \ \log \operatorname{tang} x.$$

Es wird:

$$\frac{dl \sin x}{dx} = \frac{1}{\sin x} \frac{d \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x,$$

$$\frac{dl \cos x}{dx} = \frac{1}{\cos x} \frac{d \cos x}{dx} = - \frac{\sin x}{\cos x} = - \operatorname{tang} x,$$

$$\frac{dl \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tang} x} \frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tang} x \cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Wenn man in der letzten Formel x durch $\frac{x}{2}$, sodann durch $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ ersetzt, so erhält man:

$$\frac{dl \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{dx} = \frac{1}{\sin x},$$

$$\frac{dl \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} x + \frac{\pi}{4}\right)}{dx} = \frac{1}{\cos x}.$$

53. Die cyclometrischen Funktionen. Die unabhängige Variabele werde wiederum mit x bezeichnet; die cyclometrischen Funktionen sind:

$$\operatorname{arc} \sin x, \ \operatorname{arc} \operatorname{tang} x,$$

$$\operatorname{arc} \cos x, \ \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x.$$

Die Differentiation der cyclometrischen Funktionen läfst sich unmittelbar auf die der direkten goniometrischen zurückführen (Nr. 44).

1. Ist

$$y = \operatorname{arc} \sin x \quad \text{oder} \quad \sin y = x,$$

so hat man

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

mit Ausnahme des Wertes y, für welchen $\cos y = 0$ ist, d. h. der Werte $x = \pm 1$.

Es ist

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel bestimmt sich durch das Zeichen von $\cos y$; nach Nr. 12 ist es immer positiv.

2. Ist

$$y = \operatorname{arc} \cos x \quad \text{oder} \quad \cos y = x,$$

so wird:

$$-\sin y \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist immer positiv.

3. Ist

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang} y = x,$$

so wird:

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Besondere Werte sind hier nur diejenigen, für welche $x = \pm \infty$.

4. Ist

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x \quad \text{oder} \quad x = \operatorname{cotg} y,$$

so wird

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

So hat man zusammengefafst:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Die Vorzeichen der Quadratwurzel sind, wie wir eben zeigten, bestimmte. Es ist zu bemerken, dafs die Ableitungen der cyklometrischen Funktionen algebraisch sind, ebenso wie Ableitungen von $\log x$.

Die Summe der Funktionen $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ ist gleich einer Konstante, daher sind auch ihre Ableitungen gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen. Gleiches gilt von den Funktionen $\arcsin x$ und $\arccos x$; die Quadratwurzeln in den vorigen Formeln sind immer mit dem positiven Zeichen zu nehmen.

§ 7. Differentiation der impliciten Funktionen.

54. Die Funktion ist implicite durch 1 Gleichung gegeben. Wir betrachten zuerst den Fall, dafs *eine* Funktion y mit der Variabelen x durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

verbunden ist, deren linke Seite eine gegebene Funktion von x und y ist. Wir greifen ein bestimmtes Wertepaar (x, y) heraus, welches f zu null macht und nehmen an, dafs in seiner Umgebung f und seine beiden Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

stetig sind. Endlich nehmen wir an, dafs man von der gerade fixierten Stelle (x, y) stetig zu unendlich vielen anderen gelangen kann, die ebenfalls die Gleichung $f = 0$ erfüllen. Geometrisch besagt die letzte Voraussetzung, dafs die Fläche $z = f(x, y)$ von der Ebene $z = 0$ wirklich in einer Kurve geschnitten wird. Man kann alsdann $f(x, y)$ als eine mit den Variabelen x, y zusammengesetzte Funktion ansehen, und diese Funktion ist der Annahme nach konstant gleich 0. Also ist auch ihr Differentialquotient konstant gleich 0, und es besteht die Gleichung (Nr. 40)

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus kann man, für alle Wertsysteme von x und y, für welche nicht gerade $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist, den gesuchten Differentialquotienten bestimmen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Die Ableitung einer Funktion y, welche mit x durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden ist, wird erhalten, indem man den negativen Wert der Ableitung nach x durch die Ableitung nach y dividiert.

55. Beispiele.

1. Ist

$$f(x, y) = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0,$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2 y,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Im vorliegenden Falle kann die gegebene Gleichung nach y aufgelöst werden und man findet

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die Quadratwurzel kann sowohl mit dem Plus-, wie mit dem Minuszeichen berechnet werden. Substituiert man diesen Wert von y in die obige Formel, so wird sie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dieses Resultat erhält man auch unmittelbar, wenn man den obigen Wert von y differentiiert.

2. Hat man die Gleichung

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

welche die *Lemniskate von Bernoulli* darstellt, wenn man x und y als rechtwinklige Koordinaten betrachtet, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2 x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2 y,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

Nur für den Wert $x = 0$, $y = 0$, welcher die Gleichung $f(x, y) = 0$ befriedigt, ergiebt diese Formel keine Bestimmung des Differentialquotienten.

56. Die Funktion ist implicite durch 2 Gleichungen gegeben. Betrachtet man den Fall, dafs zwei Gleichungen gegeben sind:

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

zwischen der unabhängigen Variabelen x und den zwei Funktionen y, z dieser Variabelen; da y und z Funktionen von x sind, so sind $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ zusammengesetzte Funktionen, andererseits sind die Differentiale dieser Funktionen null, da diese selbst 0 sind; also hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Hieraus erhält man die Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Die Voraussetzungen, unter welchen dieser Satz bewiesen ist, sind aus Nr. 41 zu entnehmen.

57. Beispiel. Aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = p,$$

wo r, α, β, γ, p Konstante bezeichnen, folgt:

$$x dx + y dy + z dz = 0, \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

oder:

$$\frac{dx}{\gamma y - \beta z} = \frac{dy}{\alpha z - \gamma x} = \frac{dz}{\beta x - \alpha y},$$

eine Formel, welche die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ der beiden Funktionen y und z bestimmt.

58. Der allgemeine Fall. In derselben Weise hat man in dem allgemeinen Falle zu verfahren, wo man n Gleichungen hat:

$$f(x, y, z, u \ldots) = 0,$$

$$F(x, y, z, u \ldots) = 0,$$

$$\varphi(x, y, z, u \ldots) = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x und n Funktionen $y, z, u \ldots$ dieser Variabelen. Die Funktionen $f, F, \varphi \ldots$ sind wie in den vorigen Fällen, zusammengesetzte Funktionen, deren Werte durchaus 0 sind, und deren Differentiale daher ebenfalls verschwinden. Man hat also:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{du} du + \cdots = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesen n Gleichungen sind also Differentialquotienten der n Funktionen $y, z, u \ldots$ zu berechnen.

§ 8. Die Elimination willkürlicher Konstanten.

59. Elimination 1er Konstanten aus 1er Gleichung. Es sei eine Gleichung gegeben

$$f(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

zwischen den Variabelen x, y und einer willkürlichen Konstante C. Die Differentiation dieser Gleichung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

und wenn man die Konstante C zwischen den Gleichungen (1) und (2) eliminiert, so ergiebt sich eine Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{3}$$

zwischen der unabhängigen Variabelen x, der Funktion y und ihrer Ableitung $\frac{dy}{dx}$.

Diese Gleichung, welche ganz unabhängig ist von den besonderen Werten, welche man der Konstanten C beilegen mag, heifst eine *Differentialgleichung*. In Bezug auf dieselbe heifst die Gleichung (1), welche eine willkürliche Konstante enthält, die *ursprüngliche oder primitive Gleichung*.

Interpretiert man x und y als geradlinige Koordinaten, und legt man der Konstanten C nach einander unendlich viele Werte bei, so stellt die Gleichung (1) ein Kurvensystem dar. Die Gleichung (3) drückt dann eine Eigenschaft der Tangente aus, die allen Kurven dieses Systems gemeinsam ist.

60. Beispiele.

1. Die Gleichung $y^2 = 2px + C$ giebt durch Differentiation

$$y\frac{dy}{dx} = p.$$

Hier ist die Konstante C bereits herausgefallen und diese Gleichung ist daher die Differentialgleichung, welche aus der gegebenen hervorgeht. Sie drückt (Nr. 39) aus, dafs die Subnormale bei allen Kurven, welche durch die Gleichung $y^2 = 2px + C$ dargestellt werden, konstant ist.

2. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = 1,$$

in welcher b eine fest gegebene Konstante ist, ϱ alle möglichen Werte annehmen kann, stellt ein System von *konfokalen Kegelschnitten* dar, wenn x und y rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Die Differentiation ergiebt:

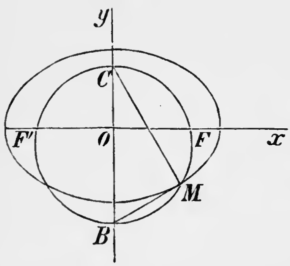
$$\frac{x\,dx}{\varrho^2} + \frac{y\,dy}{\varrho^2 - b^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{x\,dx}{\varrho^2} = \frac{y\,dy}{b^2 - \varrho^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{b^2}.$$

Durch die Elimination von ϱ^2 erhält man indem man y' für $\frac{dy}{dx}$ schreibt:

Fig. 20.



$$(xy' - y)\left(\frac{x}{y'} + y\right) = b^2$$

und dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Legt man die Tangente MB und die Normale MC an eine Kurve des konfokalen Systemes, und sind B und C die Punkte, in denen diese Geraden die Axe Oy schneiden, so sind die Gleichungen für MB und MC

$$Y - y = y'(X - x),$$

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

wenn X und Y die laufenden Koordinaten bedeuten. Folglich hat man

$$OB = y - xy', \quad OC = y + x\frac{1}{y'},$$

also

$$OB \cdot OC = -b^2.$$

Das Produkt hat einen negativen Wert, weil OB und OC in entgegengesetztem Sinne auf der Ordinatenaxe liegen. Hieraus folgt, dafs, wenn man dem Dreieck BMC einen Kreis umschreibt, dieser Kreis die Abscissenaxe in zwei Punkten F und F' schneidet, für welche die absoluten Werte

$$OF = OF' = b$$

sind. Also sind F und F' die Brennpunkte unserer Kurve. Diese Eigenschaft wird durch die Differentialgleichung für alle Kurven des Systemes ausgedrückt.

61. Der allgemeine Fall. Betrachtet man allgemein ein System von n Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y, z, u, \ldots a, b, c, \ldots) = 0 \end{cases}$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x, n Funktionen $y, z, u, \ldots$ dieser Variabelen, und n willkürlichen Konstanten $a, b, c, \ldots$, so ergiebt die Differentiation dieser Gleichungen die n folgenden Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \cdots = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_n}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial f_n}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \cdots = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man nun die n willkürlichen Konstanten $a, b, c, \ldots$ zwischen den $2n$ Gleichungen (1) und (2), so erhält man im allgemeinen n Gleichungen:

$$F_1\left(x, y, z, u, \cdots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \cdots\right) = 0,$$

$$F_2\left(x, y, z, u, \cdots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \cdots\right) = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_n\left(x, y, z, u, \cdots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \cdots\right) = 0.$$

Dieselben bilden ein *System von simultanen Differentialgleichungen.*

Drittes Kapitel.

Höhere Differentialquotienten von Funktionen Einer Veränderlichen. Partielle Differentialquotienten von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

---

§ 1. Höhere Differentialquotienten von Funktionen Einer Veränderlichen.

62. Definition der n^{ten} Ableitung. Ist $f(x)$ eine Funktion der Variabelen x und $f'(x)$ ihre Ableitung, so bezeichnen wir mit $f''(x)$ die Ableitung von $f'(x)$, mit $f'''(x)$ die Ableitung von $f''(x)$ u. s. f. Auf diese Weise bilden wir eine Reihe von Funktionen:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots f^{(n)}(x)\ldots,$$

die nur dann ein Ende erreicht, wenn man einmal auf eine Funktion stöfst, die keine bestimmte Ableitung mehr besitzt. Bei den meisten Funktionen tritt dieser Fall nicht ein.

Die Funktion $f^{(n)}(x)$, welche in der vorstehenden Folge die n^{te} Stelle einnimmt, wird die *Ableitung* n^{ter} *Ordnung* oder einfacher *die* n^{te} *Ableitung* von $f(x)$ genannt.

63. Die n^{te} Ableitung, aufgefafst als n^{ter} Differentialquotient. Es sei wiederum

(1) $$y = f(x)$$

die gegebene Funktion der unabhängigen Variabelen x. Wir bezeichnen mit d^{h_1} das Differential dieser Funktion bei einem willkürlichen endlichen Zuwachs h_1 der Variabelen x; so hat man nach Nr. 32

(2) $$d^{h_1}y = f'(x)h_1.$$

Dieses Differential, welches, so lange h_1 eine endliche Gröfse bezeichnet, selbst im allgemeinen eine endliche Gröfse ist, ist zugleich eine Funktion von x. Sein Differential, gebildet für einen willkürlichen Zuwachs h_2 der Variabelen x, ist das Differential zweiter Ordnung der Funktion y, und wir bezeichnen es mit $d^{h_2}d^{h_1}y$. Man hat dann:

$$d^{h_2}d^{h_1}y = d^{h_2}f'(x)h_1 = h_1 \cdot d^{h_2}f'(x) = f''(x)h_1h_2.$$

Desgleichen wird das Differential dieses Differentiales zweiter Ordnung bei einem willkürlichen Zuwachs h_3 der Variabelen x:

$$d^{h_3}d^{h_2}d^{h_1}y = f'''(x)h_1h_2h_3.$$

Fährt man so fort, so erhält man eine Folge von Werten:

$$d^{h_1}y, \quad d^{h_2}d^{h_1}y, \quad d^{h_3}d^{h_2}d^{h_1}y, \ldots$$

in welcher jedes Glied das Differential des vorhergehenden ist, in Bezug auf einen bestimmten Zuwachs, den man der Variabelen x erteilt. Das n^{te} Glied ist das Differential n^{ter} Ordnung der Funktion y, und man hat:

$$d^{h_n}d^{h_{n-1}}\ldots d^{h_2}d^{h_1}y = f^{(n)}(x)h_1h_2\ldots h_{n-1}h_n. \tag{3}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs sich das Differential n^{ter} Ordnung nicht ändert, wenn man die Reihenfolge der Charakteristiken d vertauscht.

Gewöhnlich nimmt man alle Gröfsen $h_1, h_2 \ldots h_n$ als unter einander gleich an. Ist $h = dx$ ihr gemeinsamer Wert, so kann man die Differentiale der verschiedenen Ordnungen mit den Zeichen

$$dy,\ d^2y, \ldots d^ny, \ldots$$

bezeichnen und man hat

$$d^ny = f^{(n)}(y)h^n = f^{(n)}(y)dx^n, \tag{4}$$

oder

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x). \tag{5}$$

Diese Gleichung, durch welche dieselbe Gröfse nur verschiedenartig definiert wird, besagt:

Die Ableitung n^{ter} Ordnung einer Funktion ist gleich dem Differentiale n^{ter} Ordnung dieser Funktion, dividiert durch die n^{te} Potenz des Differentiales der unabhängigen Variabelen.

Diese Bezeichnung wird am häufigsten angewandt für die Ableitungen, und die Formel (3) läfst sich daher auch schreiben

$$d^n y = \frac{d^n y}{dx^n} dx^n.$$

Es leuchtet ein, dafs man die Differentiale der verschiedenen Ordnungen vermittelst successiver Anwendung der Regeln erhält, die wir im vorigen Kapitel aufgestellt haben.

64. Anwendungen.

1. Ist

$$y = x^m,$$

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \cdots,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

2. Ist

$$y = lx,$$

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 1 \cdot 2x^{-3},$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)x^{-n}.$$

3. Ist

$$y = a^x$$

und a eine positive Konstante, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = a^x la, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^x[la]^2 \quad \cdots \frac{d^n y}{dx^n} = a^x[la]^n.$$

In dem Falle $a = e$ ist $y = e^x$, und $\frac{d^n y}{dx^n} = e^x = y$.

4. Ist

$$y = \sin(x + \alpha)$$

und α eine Konstante, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + \alpha) = \sin\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

so dafs die Ableitung von $\sin(x + \alpha)$ erhalten wird, indem man die Konstante $\frac{\pi}{2}$ der Gröfse α hinzufügt. Hieraus schliefst man, dafs für jedes n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

65. Differenzen höherer Ordnung. Für eine Funktion $y = f(x)$ der Variabelen x wird der Zuwachs

$$f(x + h_1) - f(x)$$

die *Differenz erster Ordnung* oder *die erste Differenz* der Funktion y bei dem willkürlichen Zuwachs h_1 der Gröfse x genannt und mit $\Delta^{h_1} y$ bezeichnet. Diese Differenz ist selbst eine Funktion von x, und ihre Differenz bei dem Zuwachs h_2 der Variabelen x ist die *Differenz zweiter Ordnung* oder *die zweite Differenz* der Funktion y; sie sei mit $\Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y$ bezeichnet. Fährt man so fort, so entsteht die Aufeinanderfolge

$$\Delta^{h_1} y, \quad \Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y, \quad \Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y, \ \ldots$$

und jedes Glied ist die Differenz des vorhergehenden bei einem bestimmten Wachstum der Variabelen x; das n^{te} Glied ist die *Differenz von der Ordnung* n, oder die n^{te} *Differenz von* y.

Aus der Gleichung für die erste Differenz

$$\Delta^{h_1} y = f(x + h_1) - f(x)$$

folgt:

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1} y = f(x + h_2 + h_1) - f(x + h_2) - f(x + h_1) + f(x).$$

Diese Differenz ändert sich nicht, wenn man die Gröfsen h_1 und h_2, also die Ordnung der beiden Charakteristiken Δ vertauscht. Wenn man nun die Differenz von der Ordnung n betrachtet, so kann man, wie hieraus folgt, ohne ihren Wert zu ändern, die Ordnung zweier aufeinander folgender Charakteristiken vertauschen, und demnach die Charakteristiken überhaupt in jede beliebige Ordnung bringen.

66. Eine neue Verallgemeinerung des Mittelwertssatzes. Zwischen einer Differenz und der Ableitung gleicher Ordnung besteht eine wichtige Beziehung, die wir nun erkennen wollen.

Ist $f(x)$ eine Funktion, welche in dem Intervalle von x bis $x + h_1$ den Bedingungen $\mathfrak{A}$ genügt, so ist nach dem Mittelwertssatze (28):

(1) $\Delta^{h_1} y = f(x + h_1) - f(x) = f'(x + \theta_1 h_1) h_1, \quad 0 < \theta_1 < 1.$

Auch $f'(x)$ und alle höheren Ableitungen mögen den Bedingungen $\mathfrak{A}$ in dem jedesmal gewählten Intervalle genügen. Dann wird:

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x) = \Delta^{h_2}[f(x+h_1) - f(x)] = \Delta^{h_2}\Pi(x),$$

wenn man $\Pi(x) = f(x+h_1) - f(x)$ setzt. Nach Gleichung (1) ist aber

$$\Delta^{h_2}\Pi(x) = \Pi'(x+\theta_2 h_2)h_2,$$

und aus der Definition der Funktion $\Pi(x)$ folgt:

$$\Pi'(x) = f'(x+h_1) - f'(x),$$

also ist:

$$\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x) = [f'(x+\theta_2 h_2 + h_1) - f'(x+\theta_2 h_2)]h_2.$$

Wendet man wieder den Mittelwertssatz an, so ist

$$(2)\qquad \Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x) = f''(x+\theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)h_1 h_2;$$

θ_1 und θ_2 sind positive Zahlen kleiner als 1.

Für die dritte Differenz $\Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)$ erhält man:

$$[f''(x+h_3 + \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1) - f''(x+\theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)]h_1 h_2,$$

und hieraus folgt wieder:

$$(3)\quad \Delta^{h_3}\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x) = f'''(x+\theta_3 h_3 + \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)h_1 h_2 h_3.$$

Fährt man so fort, so ist leicht zu sehen, daſs man die n^{te} Differenz der Funktion y durch die folgende, von Ossian Bonnet gegebene Formel ausdrücken kann:

$$(4)\quad \Delta^{h_n}\Delta^{h_{n-1}}\cdots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)$$
$$= f^{(n)}(x+\theta_n h_n + \theta_{n-1}h_{n-1} + \cdots \theta_2 h_2 + \theta_1 h_1)h_1 h_2 \cdots h_n.$$

$\theta_1\ \theta_2, \cdots \theta_n$ sind positive Zahlen kleiner als 1.

Den Quotienten

$$\frac{\Delta^{h_n}\Delta^{h_{n-1}}\cdots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)}{h_1 h_2 \cdots h_n}$$

nennt man den n^{ten} Differenzenquotienten der Funktion $f(x)$. Dieser ist also gleich:

$$f^{(n)}(x+\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \cdots + \theta_n h_n)$$

und es gilt also die

Verallgemeinerung des Mittelwertssatzes. Genügt $f(x)$ nebst seinen $n-1$ ersten Ableitungen in dem Intervalle von x bis $x+h_1+h_2+\cdots h_n$ den Bedingungen $\mathfrak{A}$, so ist:

$$\frac{\Delta^{h_n}\Delta^{h_{n-1}}\cdots\Delta^{h_2}\Delta^{h_1}f(x)}{h_1h_2\cdots h_n} = f^{(n)}(x+\theta_1h_1+\cdots+\theta_nh_n),$$
$$0<\theta_1<1,\ \cdots\ 0<\theta_n<1$$

für jedes x, das in dem Intervalle von x bis $x+h_1$ liegt.

Setzt man im besonderen alle h einander gleich:

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h = \Delta x$$

und bezeichnet den entstehenden Differenzenquotienten mit:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

so wird:

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x+n\theta\Delta x),\quad 0<\theta<1.$$

Ist daher $f^{(n)}(x)$ an der Stelle x stetig, so wird für $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Der n^{te} Differentialquotient ist also der Grenzwert, welchen der n^{te} Differenzenquotient für $\Delta x = 0$ annimmt.

§ 2. Partielle Differentialquotienten einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen.

67. Die partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung bei einer Funktion von 3 Variabelen. Wir betrachten eine Funktion ω von mehreren unabhängigen Variabelen x, y, z, und wollen, um die Begriffe zu fixieren, die Zahl dieser Variabelen gleich 3 annehmen:

(1) $$\omega = f(x, y, z).$$

Man kann die Ableitung von ω nach jeder der drei Variabelen bilden, indem man dabei jedesmal die beiden anderen als konstant betrachtet. Diese Ableitungen heifsen die *partiellen Ableitungen erster Ordnung* der gegebenen Funktion und man bezeichnet sie mit

$$f_x'(x, y, z),\quad f_y'(x, y, z),\quad f_z'(x, y, z).$$

Die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen erster Ordnung sind die *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung;* man bezeichnet sie mit

$$f_{xx}''(x, y, z),\quad f_{xy}''(x, y, z),\quad f_{xz}''(x, y, z),\quad f_{yx}''(x, y, z)\ldots$$

Die partiellen Ableitungen dieser sind die *partiellen Ableitungen dritter Ordnung* u. s. w. Allgemein wird eine partielle Ableitung n^{ter} Ordnung durch die Charakteristik f mit zwei Indices zu bezeichnen sein. Der obere Index ist die Zahl n, welche die Ordnung der partiellen Ableitung angiebt, der untere Index wird durch die Aufeinanderfolge von n Buchstaben x, y, z angegeben, welche von rechts nach links gelesen die Differentiationen anzeigen, welche man nacheinander zur Bildung der n^{ten} Ableitung angewandt hat.

68. Lehrsatz. *Der Wert einer partiellen Ableitung einer Funktion von mehreren Variabelen ist unabhängig von der Ordnung, in welcher man die Aufeinanderfolge der Differentiationen vollzogen hat, wenn nur die Zahl der Differentiationen, welche zu jeder Variabelen gehören, die nämliche bleibt.*

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, den einer Funktion zweier Variabelen. Mit Δ_x^h und Δ_y^k wollen wir die Differenzen einer Funktion der beiden Variabelen x und y bezeichnen, wenn man diesen Variabelen den Zuwachs h und k bezüglich erteilt. Man erhält alsdann:

$$\Delta_x^h f(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y),$$

und

$$(1)\quad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y).$$

Das zweite Glied ändert sich nicht, wenn man die Differenzen in umgekehrter Reihenfolge bildet; man schliefst hieraus, dafs

$$(2)\qquad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y)$$

ist. Stellt man nun diese beiden Differenzen nach der Methode von Ossian Bonnet dar (Nr. 65), so wird

$$\Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = \Delta_y^k [f(x + h, y) - f(x, y)] = \Delta_y^k \Pi(x, y),$$

wenn man $\Pi(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y)$ setzt. Die Anwendung des Mittelwertssatzes auf die Funktion $\Pi(x, y)$, in welcher y variiert wird, ergiebt

$$\Delta_y^k \Pi(x, y) = \Pi_y'(x, y + \theta k)k,$$

und es ist nach der Definition von $\Pi(x, y)$:

$$\Pi_y'(x, y + \theta k) = f_y'(x + h, y + \theta k) - f_y'(x, y + \theta k).$$

Wendet man nun dieselbe Formel auf die Funktion $f'_y(x, y + \theta k)$ an, indem man x um h wachsen läſst, so wird

$$f'_y(x+h, y+\theta k) - f'_y(x, y+\theta k) = f''_{xy}(x+\theta' h, y+\theta k)h,$$

also ist

$$(3)\quad \Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y) = \Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y) = f''_{xy}(x+\theta' h, y+\theta k)\cdot hk,$$

oder

$$\frac{\Delta_x^h \Delta_y^k f(x, y)}{hk} = f''_{xy}(x+\theta' h, y+\theta k),$$

$$\frac{\Delta_y^k \Delta_x^h f(x, y)}{hk} = f''_{xy}(x+\theta' h, y+\theta k).$$

Läſst man in der ersten Formel zuerst k nach 0 konvergieren und sodann h, so geht die linke Seite in den Wert $f''_{xy}(x, y)$ über; und da auch die rechte Seite in den Wert $f''_{xy}(x, y)$ übergeht, sobald die Funktion f'' eine stetige Funktion der beiden Variabelen ist, so hat man die identische Gleichung

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

Die zweite Gleichung aber erhält auf der linken Seite, wenn man zuerst h nach 0 konvergieren läſst, und alsdann k, die Grenze $f''_{yx}(x, y)$; und da auch bei diesem Prozesse die rechte Seite den Wert $f''_{xy}(x, y)$ annimmt, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung

$$(4)\quad f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

Die Bedingungen, unter welchen dieser Satz gilt, sind aus dem Beweisgange zu entnehmen. Benutzen wir den in Nr. 40 erklärten Ausdruck: „Umgebung einer Stelle“, so können wir sagen:

Ein spezieller Fall des Lehrsatzes dieser Nummer ist der Satz, daſs:

$$(4)\quad f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$$

ist. Diese Gleichung gilt jedenfalls dann, wenn in der Umgebung der gerade fixierten Stelle (x, y) f, f'_x, f'_y, f''_{xy} *und* f''_{yx} *stetig sind.*

69. Allgemeiner Beweis des Lehrsatzes. Die Gleichung (4) hat unter analogen Voraussetzungen auch dann noch Geltung, wenn die Funktion von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabelen abhängt. Betrachtet man eine partielle Ableitung n^{ter} Ordnung von einer Funktion mit m unabhängigen Variabelen, so kann man, ohne dafs sich das schliefsliche Resultat ändert, die Ordnung zweier aufeinander folgender Differentiationen vertauschen, und also die aufeinanderfolgenden Differentiationen in beliebiger Reihenfolge ausführen. Hinsichtlich der Gültigkeitsbedingung können wir sagen:

Allgemein gilt der Lehrsatz der vorigen Nummer für eine n^{te} *Ableitung einer Funktion von* m *Variabelen jedenfalls dann, wenn die Funktion nebst ihren sämtlichen Ableitungen bis zur* $n-1^{\text{ten}}$ *Ordnung einschliefslich stetig ist in der Umgebung der gerade fixierten Stelle und wenn in dieser Umgebung auch die fraglichen Ableitungen* n^{ter} *Ordnung stetig sind.*

Die Zahl der verschiedenen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bei einer Funktion von m Variabelen ist gleich $\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$, und allgemein ist die Zahl der partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung gleich der Zahl von Gliedern in einem homogenen Polynome vom Grade n gebildet mit m Variabelen, nämlich

$$\frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Der bewiesene Satz gestattet die Bezeichnungsweise bei partiellen Ableitungen zu vereinfachen. Im Falle einer Funktion von drei Variabelen wird eine Ableitung n^{ter} Ordnung, wenn sie durch α-malige Differentiation nach x, β-malige Differentiation nach y und γ-malige Differentiation nach z bestimmt ist, mit

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)$$

zu bezeichnen sein; die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ ist gleich n.

70. Die partiellen Ableitungen, aufgefafst als partielle Differentialquotienten. Das Produkt jeder partiellen Ableitung erster Ordnung mit dem willkürlichen Zuwachs der entsprechenden Variabelen heifst ein *partielles Differential erster Ordnung.* Indem wir uns wieder auf den Fall einer Funktion ω von drei Variabelen x, y, z beschränken, werden wir diese partiellen Differentiale mit

$$\partial_x^{h_1}\omega, \quad \partial_y^{k_1}\omega, \quad \partial_z^{l_1}\omega$$

bezeichnen, wobei h_1, k_1, l_1 die Zuwüchse dieser Variabelen sind. Die partiellen Differentiale von diesen partiellen Differentialen, gebildet mit neuen willkürlichen Werten der Zuwüchse, welche man den Variabelen erteilt, sind die *partiellen Differentiale zweiter Ordnung* u. s. w. Ein partielles Differential n^{ter} Ordnung, gebildet, indem man in bestimmter Reihenfolge α-mal nach x, β-mal nach y, γ-mal nach z differentiiert, wird bezeichnet dadurch, dafs man die Charakteristiken

$$\partial_x^{h_1}, \partial_x^{h_2}, \ldots \partial_x^{h_\alpha}, \quad \partial_y^{k_1}, \partial_y^{k_2}, \ldots \partial_y^{k_\beta}, \quad \partial_z^{l_1}, \partial_z^{l_2}, \ldots \partial_z^{l_\gamma}$$

in der Reihenfolge mit einander verbindet, in der die Operationen ausgeführt worden sind. Dieses partielle Differential ist gleich

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z) h_1 h_2 \ldots h_\alpha k_1 k_2 \ldots k_\beta l_1 l_2 \ldots l_\gamma,$$

es ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge der Charakteristiken ∂ verändert.

Gewöhnlich nimmt man die Zuwüchse, welche zu derselben Veränderlichen gehören, als unter einander gleich an. In diesem Falle kann man das obige Differential mit $\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega$ bezeichnen und man hat die Gleichung

$$\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega = f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma. \tag{5}$$

Aus dieser Formel folgt

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \frac{\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma},$$

oder einfacher

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z) = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}.$$

Die Bedeutung des Zählers $\partial^n\omega$ ist aus dem Nenner unzweideutig zu erkennen. Diese letzte Bezeichnungsweise für partielle Ableitungen ist die üblichste. Die Formel (5) wird also

$$\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}\,\omega = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\,\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma. \tag{6}$$

Die partiellen Differentialquotienten lassen sich natürlich wieder als Grenzwerte partieller Differenzenquotienten definieren.

Wir nennen *partielle Differenzen* erster Ordnung der Funktion ω die Zuwüchse dieser Funktion bei einer bestimmten Änderung der Variabelen um die Gröfsen h_1, k_1, $l_1 \ldots$ Diese Differenzen wollen wir mit

$$\Delta_x^{h_1}\omega, \quad \Delta_y^{k_1}\omega, \quad \Delta_z^{l_1}\omega$$

bezeichnen. Die partiellen Differenzen gebildet von den partiellen Differenzen erster Ordnung sind von der zweiten Ordnung u. s. f. Eine partielle Differenz von der Ordnung n, gebildet, indem man in bestimmter Reihenfolge α-mal die Operation mit x, β-mal mit y, γ-mal mit z vollzieht, wird bezeichnet dadurch, dafs man die Charakteristiken

$$\Delta_x^{h_1}, \Delta_x^{h_2}, \ldots \Delta_x^{h_\alpha}, \Delta_y^{k_1}, \Delta_y^{k_2}, \ldots \Delta_y^{k_\beta}, \Delta_z^{l_1}, \Delta_z^{l_2}, \ldots \Delta_z^{l_\gamma}$$

in der Reihenfolge mit einander verbindet, in welcher die Operationen ausgeführt worden sind. Nach den in den No. 65 und 68 gemachten Bemerkungen über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge zweier Charakteristiken bei einer Funktion mit einer oder mit zwei Variabelen kann man die Reihenfolge aller Charakteristiken Δ beliebig vertauschen. Indem man eine Reihe von Transformationen ausführt, welche den in Nr. 66 und 68 benutzten analog sind, kann man die Differenz n^{ter} Ordnung, wie leicht ersichtlich, durch die Formel ausdrücken:

$$\Delta_z^{l_\gamma} \ldots \Delta_z^{l_1} \Delta_y^{k_\beta} \ldots \Delta_y^{k_1} \Delta_x^{h_\alpha} \ldots \Delta_x^{h_1} \omega$$

$$(7) \quad = f(x + \theta_1 h_1 + \cdots \theta_\alpha h_\alpha, y + \theta'_1 k_1 + \cdots \theta'_\beta k_\beta, z + \theta''_1 l_1 + \\ + \cdots \theta''_\gamma l_\gamma)\, h_1 \cdots h_\alpha k_1 \cdots k_\beta l_1 \cdots l_\gamma.$$

Hierbei ist f dieselbe Funktion die oben mit $f^{(n)}_{x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma}$ bezeichnet wurde.

Dividiert man diese Differenz durch die entsprechenden Zunahmen der unabhängigen Veränderlichen

$$h_1 \ldots h_\alpha\, k_1 \ldots k_\beta\, l_1 \ldots l_\gamma,$$

so entsteht *der partielle Differenzenquotient:*

$$\frac{\Delta_z^{l_\gamma} \ldots \Delta_z^{l_1} \Delta_y^{k_\beta} \ldots \Delta_y^{k_1} \Delta_x^{h_\alpha} \ldots \Delta_x^{h_1} \omega}{l_\gamma \ldots l_1\, k_\beta \ldots k_1\, h_\alpha \ldots h_1}.$$

Setzt man im besonderen

$$h_1 = h_2 = \cdots h_\alpha = h = \Delta x$$
$$k_1 = k_2 = \cdots k_\beta = k = \Delta y$$
$$l_1 = l_2 = \cdots l_\gamma = l = \Delta z$$

so entsteht ein Differenzenquotient, der passend durch

$$\frac{\Delta^n \omega}{\Delta x^\alpha\, \Delta y^\beta\, \Delta z^\gamma}$$

zu bezeichnen ist. Läfst man Δx, Δy, Δz null werden, so wird, wenn $f^{(n)}_{x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma}$ an der Stelle $x\, y\, z$ stetig ist

$$\lim \frac{\Delta^n \omega}{\Delta x^\alpha \,\Delta y^\beta \,\Delta z^\gamma} = f^{(n)}_{x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma} = \frac{\partial^n \omega}{\partial x^\alpha \,\partial y^\beta \,\partial z^\gamma}.$$

Der Differentialquotient ist also auch hier der Grenzwert, welchen der entsprechende Differenzenquotient für $\Delta x = 0$ $\Delta y = 0$ $\Delta z = 0$ *annimmt.*

§ 3. Differentiation der Funktionen von Funktionen.

71. Berechnung von $d^2 f(u, v, w \ldots)$. Es sei

$$y = f(u, v, w \ldots)$$

eine Funktion, von den m Funktionen $u, v, w \ldots$ der einen unabhängigen Variabelen x. Man hat zunächst (Nr. 41)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots \tag{1}$$

Da jedes Glied der rechten Seite ein Produkt von zwei Faktoren ist, so erhält man durch eine neue Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)\frac{dw}{dx} + \cdots$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots.$$

Wendet man aber auf die Funktionen $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w} \cdots$ den Satz an, der in der Gleichung (1) enthalten ist, so hat man

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots,$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots,$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}\frac{dw}{dx} + \cdots.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Der Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird also

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = \Bigg(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 &+ 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} \\ &+ \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}\cdots\Bigg), \\ + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial y}{d v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2} + \cdots\right)&. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Dabei ist vorausgesetzt, daſs $u, v, w \cdots$ nebst den vorkommenden Ableitungen an der gerade betrachteten Stelle x

bestimmte endliche Werte haben und dafs f als Funktion der Variabelen $u, v, \cdots$ in der Umgebung der entsprechenden Stelle $(u, v, \cdots)$ nebst den vorkommenden Ableitungen stetig ist. Auf dieselbe Weise erhält man $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ etc.

72. Die $u, v, w, \cdots$ sind lineare Funktionen von x. Wenn alle Funktionen $u, v, w \cdots$ von der Form $ax + b$ sind, wobei a und b Konstante bedeuten, so hat man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \; \frac{d^2v}{dx^2} = 0, \; \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \cdots$$

und die Gleichung (2) reduziert sich auf

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial w}\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} + \cdots$$
$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \cdots$$

Dieser Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ kann symbolisch durch die Formel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

dargestellt werden, die so zu verstehen ist, dafs man, nachdem die Quadrierung ausgeführt ist,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \; \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right), \cdots$$

bezüglich durch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \; \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} \cdots$$

ersetzt. Dieses Resultat läfst sich verallgemeinern, so dafs man für jedes ganzzahlige, positive n schreiben kann

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots\right)^n = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

wobei man nach Ausführung der n^{ten} Potenz jedes Glied von der Form

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^\gamma$$

durch die entsprechende Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} y}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}$$

zu ersetzen hat.

Denn da unsere symbolische Formel den wahren Wert von $\frac{dy}{dx}$ ergiebt, wenn $n = 1$ ist, so genügt es für ihren Beweis zu zeigen, daſs sie, falls sie für einen Wert von n gilt, jedenfalls auch für den nächstfolgenden $n+1$ richtig bleibt. Nehmen wir also die Gültigkeit der Formel für den Index n an, und sei

$$C\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^\gamma \cdots \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta \left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \cdots$$

ein Glied dieser Entwickelung. Der wahre Wert des entsprechenden Gliedes von $\frac{d^n y}{dx^n}$ ist alsdann

$$C\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma\cdots} y}{\partial u^\alpha\, \partial v^\beta\, \partial w^\gamma \cdots} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta \left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \cdots$$

Um nun $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$ zu erhalten, muſs man $\frac{d^n y}{dx^n}$ differentiieren, und das angeschriebene Glied giebt

$$C\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma\cdots+1} y}{\partial u^{\alpha+1} \partial v^\beta \partial w^\gamma \cdots} \frac{du}{dx} + \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots 1} y}{\partial u^\alpha \partial v^{\beta+1} \partial w^\gamma \cdots} \frac{dv}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots 1} y}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^{\gamma+1} \cdots} \frac{dw}{dx} + \cdots\right) \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta \left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \cdots,$$

da $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx} \cdots$ konstant sind. Nach unserer Übereinkunft läſst sich aber dieser Ausdruck symbolisch in der Form

$$C\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^\beta \left(\frac{\partial y}{dw}\right)^\gamma \cdots \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta \left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \cdots \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} \cdots\right)$$

schreiben. Hieraus folgt, daſs die symbolische Darstellung von $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+1}$ wird, womit die Behauptung bewiesen ist.

73. Differentiation eines Produktes von zwei Faktoren. Die allgemeine Formel für die Bildung höherer Ableitungen eines Produktes von mehreren Funktionen ist wichtig.

Wir betrachten zunächst das Produkt uv von zwei Funktionen. Man hat hier

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

oder, kürzer geschrieben:

(1) $$(uv)' = u'v + uv'.$$

Ferner wird:

$$(2)\qquad (uv)'' = (u'v)' + (uv')' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

eine neue Differentiation ergiebt:

$$(3)\qquad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

In den Formeln (1), (2), (3) vermindert sich die Ordnung der Ableitung von u um eine Einheit, und die Ordnung der Ableitung von v wächst um eine Einheit, wenn man von einem Gliede zum folgenden weiter geht. Dabei sind die numerischen Koeffizienten dieselben wie bei der Entwickelung der ersten, zweiten und dritten Potenz eines Binomes. Man kann also begründetermafsen annehmen, dafs man allgemein erhalten wird

$$(4)\qquad \begin{cases} (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' \\ \qquad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}. \end{cases}$$

Nachdem diese Formel für $n = 1, 2, 3$ verifiziert ist, wird ihre Allgemeingültigkeit bewiesen, wenn man unter Annahme derselben für die Ordnung n nachweist, dafs die Formel für die Ordnung $n + 1$ bestehen bleibt. Differentiiren wir also die Formel (4) und schreiben auf eine Zeile die Glieder, welche aus der Differentiation des zweiten Faktors in jedem Gliede hervorgehen, auf eine zweite Zeile diejenigen, die aus der Differentiation jedes ersten Faktors folgen, so wird

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v &+ \frac{n}{1}u^{(n)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-1)}v'' + \cdots + u'v^{(n)} \\ &+ u^{(n)}v' + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v'' + \cdots + \frac{n}{1}u'v^{(n)} + uv^{(n)}. \end{aligned}$$

Zieht man die gleichartigen untereinander stehenden Glieder zusammen, so erhält man eine Formel, die aus der Gleichung (4) durch Vertauschung von n mit $n + 1$ hervorgeht; folglich ist diese Gleichung allgemein gültig.

Die Gleichung läfst sich *symbolisch* folgendermafsen schreiben:

$$(uv)^{(n)} = (u + v)^n$$

d. h. man hat nach Ausführung des Binomes die Potenzen u^k, v^k jedesmal durch $u^{(k)}$ und $v^{(k)}$ zu ersetzen, und wenn $k = 0$ ist, durch u und v.

74. Differentiation eines Produktes von m Faktoren. Für ein Produkt von m Faktoren $u_1 \ldots u_m$, wobei jedes u eine Funktion von x bedeutet, besteht ebenfalls die *symbolische* Formel

$$(u_1 u_2 \ldots u_m)^{(n)} = (u_1 + u_2 + \cdots u_{m-1} + u_m)^n,$$

d. h. nach Ausführung der n^{ten} Potenz der Summe

$$(u_1 + u_2 + \cdots u_m)$$

vermittelst der Polynomialformel sind die Potenzen

$$u_1{}^k, \; u_2{}^k, \; \cdots u_{m-1}{}^k, \; u_m{}^k$$

durch die Differentialquotienten k^{ter} Ordnung

$$u_1^{(k)}, \; u_2^{(k)}, \ldots u_{m-1}^{(k)}, \; u_m^{(k)}$$

zu ersetzen, und wenn $k = 0$ ist, durch die Funktionen

$$u_1, \; u_2, \ldots u_{m-1}, \; u_m.$$

Dieser Satz ist für zwei Faktoren bereits bewiesen. Es genügt daher nachzuweisen, dafs er, wenn er für $m - 1$ Faktoren besteht, auch für m gültig bleibt. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit y das Produkt von $m - 1$ Faktoren u_1, $u_2 \ldots u_{m-1}$. Alsdann ist symbolisch:

$$(u_1 u_2 \ldots u_{m-1} u_m)^{(n)} = (y u_m)^{(n)} = (y + u_m)^n.$$

Ein beliebiges Glied dieser Entwickelung, wie

$$C_k \, y^k \, u_m{}^{n-k}$$

giebt für $(u_1 u_2 \ldots u_m)^{(n)}$ das entsprechende Glied

$$C_k \, y^{(k)} \, u_m{}^{(n-k)}.$$

Der Annahme nach ist nun symbolisch

$$y^{(k)} = (u_1 + u_2 + \cdots u_{m-1})^k,$$

also ist der obige Term symbolisch gleich

$$C_k (u_1 + u_2 + \cdots u_{m-1})^k \, u_m{}^{n-k},$$

und bildet man die Summe aller Glieder, so wird symbolisch

$$(u_1 u_2 \ldots u_m)^{(n)} = (u_1 + u_2 + \cdots u_{m-1} + u_m)^n.$$

75. Die Differentialquotienten einer Funktion, welche implicite durch 1 Gleichung definiert ist. Ist eine Funktion y der Variabelen x durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

definiert, so ist $f(x, y)$ eine zusammengesetzte Funktion, die einen konstanten Wert, nämlich 0 hat. Folglich sind auch die Differentiale beliebiger Ordnungen gleich 0. Man erhält demnach, wenn man diese verschiedenen Differentiale 0 setzt, und dabei beachtet, dafs dx eine Konstante ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2\right) + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3\right)$$
$$+ 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) d^2 y + \frac{\partial f}{\partial y} d^3 y = 0.$$

. . . .

Diese Formeln lassen nach einander die Differentiale dy, d^2y, d^3y ..., und hieraus die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ berechnen, wenn die Gröfse $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht gerade gleich 0 wird, für zusammengehörige Werte von x, y, für welche $f(x, y) = 0$ ist. Auch ist hierbei vorausgesetzt, dafs die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ für die betrachteten Werte den Stetigkeitsbedingungen genügen.

76. Die Differentialquotienten von m Funktionen, welche implicite durch m Gleichungen definiert sind. Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall eines Systemes von m Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0, \\ f_2(x, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_m(x, y_1, y_2 \ldots y_m) = 0, \end{cases}$$

zwischen einer unabhängigen Variabelen x und m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ derselben. Es sind, weil $y_1 \ldots y_m$ Funktionen von x sind, $f_1, f_2, \ldots f_m$ zusammengesetzte Funktionen mit dem konstanten Werte 0. Die Differentiale beliebiger Ordnung dieser Funktionen sind demnach insgesamt 0. Durch einmalige Differentiation des Systemes (1) erhält man

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2 + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial y_m}dy_m = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}dy_2 + \cdots \frac{\partial f_2}{\partial y_m}dy_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}dx + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_m}{\partial y_2}dy_2 + \cdots \frac{\partial f_m}{\partial y_m}dy_m = 0, \end{cases}$$

woraus sich, wie schon in Nr. 58 gezeigt wurde, die Differentialquotienten erster Ordnung

$$dy_1,\ dy_2,\ \cdots dy_m$$

berechnen lassen. Die Differentiation des Systemes (2) ergiebt das neue System:

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\,\partial y_1}dx\,dy_1 + \cdots\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}d^2y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}d^2y_2 + \cdots\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\,\partial y_1}dx\,dy_1 + \cdots\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}d^2y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}d^2y_2 + \cdots\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_m}{\partial x\,\partial y_1}dx\,dy_1 + \cdots\right) + \left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial y_1}d^2y_1 + \frac{\partial^2 f_m}{\partial y_2}d^2y_2 + \cdots\right) = 0, \end{cases}$$

welches die Differentialquotienten zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y_1}{dx^2},\ \frac{d^2y_2}{dx^2},\ \cdots \frac{d^2y_m}{dx^2}$$

bestimmt. Durch Differentiation des Systemes (3) erhält man Gleichungen für die Differentialquotienten dritter Ordnung u. s. w.

77. Die Elimination willkürlicher Konstanten. Wenn die Gleichung

$$(1)\qquad f(x,\ y,\ a,\ b,\ c\cdots)\ 0,$$

welche eine Funktion y mit ihrer unabhängigen Variabelen x verbindet, eine endliche Anzahl willkürlicher Konstanten $a, b, c \cdots$ enthält, so kann man diese willkürlichen Gröſsen durch Anwendung der Differentiation eliminieren.

Differentiirt man nämlich die Gleichung (1) n-mal, so erhält man n neue Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy = 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Man kann nun immer n so grofs wählen — höchstens ist n dann gleich der Anzahl Konstanten $a, b, c, \cdots$ —, dafs sich die $a, b, c, \cdots$ aus den $n + 1$ Gleichungen (1) und (2) eliminieren lassen und schliefslich nur eine Gleichung

$$(3)\qquad f\left(x, y\, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

zwischen x, y und den n ersten Ableitungen von y übrig bleibt. Diese heifst eine *Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.*

Die Aufgabe, welche hier gestellt ist, bildet einen besonderen Fall derjenigen, die in Nr. 61 behandelt wurde, und dort zur Kenntnis eines Systemes von simultanen Differentialgleichungen führte.

Denn setzt man

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = y', \ \frac{dy'}{dx} = y'', \cdots \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)},$$

und verbindet mit der Gleichung (1) die $n - 1$ ersten Gleichungen des Systems (2), indem man hier die Gröfsen $y', y'', \cdots y^{(n-1)}$ einführt, so erhält man ein System von n Gleichungen zwischen der Variabelen x und den n Funktionen $y, y', y'', \cdots y^{(n-1)}$ und n willkürlichen Gröfsen. Andererseits ist einleuchtend, dafs die n Gleichungen, die man erhält, indem man dieses System differentiiert, ersetzt werden können durch die Gleichungen (4) zusammen mit der letzten Gleichung des Systems (2), und dafs die Elimination der willkürlichen Konstanten zwischen den $2n$ Gleichungen (1), (2) und (4) ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung liefert, dafs sich aus den $n - 1$ Gleichungen (4) und der Gleichung (3) zusammensetzt, die durch Einführung der Variabelen $y', y'', \cdots y^{(n-1)}$ die Form

$$f\left(x, y, y', y'' \cdots y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\right) = 0$$

annimmt, also zu einer Differentialgleichung erster Ordnung wird.

78. Die Änderung der unabhängigen Variabelen. Die Gleichung einer Kurve kann in der Form gegeben sein, daſs die Ordinate als Funktion der Abscisse dargestellt ist:

$$y = f(x)$$

oder allgemeiner können Abscisse und Ordinate als Funktionen einer nämlichen Veränderlichen t gegeben sein:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

In der Mechanik z. B. ist häufig die Zeit t die unabhängige Veränderliche und die Gleichungen (2) erlauben dann anzugeben, an welcher Stelle der Ebene sich der Punkt, dessen Bewegung durch die Gleichungen (2) beschrieben wird, zu irgend einer bestimmten Zeit t befindet. Es ist nun häufig von Wichtigkeit von den Gleichungen (2) auf die Form (1) übergehen zu können und dann entsteht das folgende Problem:

Gegeben sind die Ableitungen von x und y als Funktionen von t:

$$(1') \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \cdots; \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y'', \cdots$$

Gesucht sind die Differentialquotienten:

$$(2') \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$$

Nach dem Satze der Nr. 33 und 44 ergiebt sich unmittelbar:

$$(3') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

$$(4') \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt} \cdot \frac{1}{x'} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3},$$

$$(5') \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - x'''y') - 3x'' \cdot (x'y'' - x''y')}{x'^5}$$

u. s. w.

Man wird bemerken, daſs die Darstellung der Kurve in der Gestalt (1) nur ein Spezialfall von (2) ist, der sich durch die Substitution $x = t$ aus (2) ergiebt. In der That geben dann (3), (4), (5) für $x = t$, da dann $x' = 1$, $x'' = x''' = \cdots = 0$ ist, $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$, $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$, $\cdots$

Man kann aber auch statt y als Funktion von x zu betrachten, auch umgekehrt x als Funktion von y auffassen

d. h. die Gleichung (1) nach x auflösen wollen. Auch diese Auffassung ist in den Gleichungen (2) als Spezialfall enthalten. Man braucht nur $y = t$, $x = \varphi(t)$ zu setzen, um zu erhalten:

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \quad y'' = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad y''' = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

Man wird in der Folge erkennen, dafs es oftmals in Hinsicht auf die Symmetrie und Eleganz der Formeln vorteilhaft ist, die unabhängige Variabele t nicht zu spezialisieren.

Dieselben Vorteile wie die Hülfsveränderliche t gewährt das Rechnen mit Differentialen statt mit Differentialquotienten.

Wir bezeichnen mit $y', y'', y''' \cdots$ die Ableitungen von y, gebildet unter der Annahme, dafs x die unabhängige Variabele ist. Man hat dann:

$$(1) \qquad dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \quad dy'' = y'''dx, \cdots$$

und nach dem Satze der Nr. 33 gelten diese Formeln, wie auch immer die unabhängige Variabele gewählt sein mag. Die erste Gleichung ergiebt

$$(2) \qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

ein bekanntes Resultat, demzufolge y' der Quotient von dy und dx ist. Wendet man nun auf diese Gleichung die Regel der Differentiation eines Quotienten an, so folgt, was auch die unabhängige Variabele sein mag:

$$dy' = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2};$$

aber nach der zweiten Gleichung der Formel (1) ist $dy' = y''dx$, und demnach hat man

$$(3) \qquad y'' = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}.$$

Dieselbe Regel, aufs neue angewandt, liefert:

$$dy'' = \frac{dx(dx d^3y - dy d^3x) - 3 d^2x(dx d^2y - dy d^2x)}{dx^4},$$

und, da nach der dritten Gleichung der Formel (1) $dy'' = y'''dx$ ist, so wird

$$(4) \qquad y''' = \frac{dx(dx d^3y - dy d^3x) - 3 d^2x(dx d^2y - dy d^2x)}{dx^5}.$$

Auf demselben Wege erhält man nacheinander y^{IV}, y^{V} u. s. w., und man erkennt, dafs sich $y^{(n)}$ vermittelst der Differentiale von x und y ausdrücken läfst bis zu denjenigen der n^{ten} Ordnung.

Wenn man in den Formeln (2), (3), (4) $\cdots dx$ konstant annimmt, so findet man wieder die bekannten Gleichungen

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \cdots$$

79. Die Änderung aller Variabelen. Wir wollen nun die folgende Aufgabe lösen:

Wenn $x, y, z \cdots$ Variabele sind, die von einander abhängen, und unter ihnen x als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, so sollen in einem Ausdrucke V, welcher eine Funktion von

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots z, \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} \cdots$$

ist, die Variabelen $x, y, z \cdots$ durch andere Variabelen $\xi, \eta, \zeta \cdots$ ersetzt und unter diesen eine, z. B. ξ, als unabhängige Variabele betrachtet werden. Wie ist der Wert von V als Funktion von ξ, η, ζ und den Ableitungen $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \cdots$ zu bilden?

Um diese Frage zu lösen, hat man zuerst die Funktion V vermittelst der Formeln des vorigen Paragraphen so auszudrücken, dafs dabei die unabhängige Variabele willkürlich bleibt. Alsdann ist V eine Funktion von $x, y, z \cdots$ und ihren Differentialen. Nachdem dieses geschehen, lassen sich aus den Gleichungen, welche die Variabelen $x, y, z \cdots$ als Funktionen der neuen Variabelen definieren, nämlich

$$x = f(\xi, \eta, \zeta \cdots), \quad y = F(\xi, \eta, \zeta \cdots), \quad z = \varphi(\xi, \eta, \zeta \cdots),$$

durch Differentiation die Differentiale

$$dx, d^2x, \cdots dy, d^2y, \cdots dz, d^2z \cdots$$

berechnen, und hierbei ist $d\xi$ als konstant anzunehmen. Alle diese Werte sind in V zu substituieren, und damit ist die Aufgabe gelöst.

80. Eine Anwendung. *Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer gegebenen Kurve, wobei x als unabhängige Variabele betrachtet ist. Man soll bestimmen, wie sich der Ausdruck*

$$V = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

transformiert, wenn man an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten ϱ, ω einführt, und ω als unabhängige Variabele ansieht.

Nach Nr. 78 wird der Ausdruck V gleich

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Die unabhängige Variabele bleibt dabei beliebig.

Nun hat man

$$x = \varrho \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\omega,$$

also durch Differentiation

$$dx = d\varrho \cos\omega - \varrho \sin\omega\, d\omega,$$

$$dy = d\varrho \sin\omega + \varrho \cos\omega\, d\omega.$$

Differentiiert man von neuem und setzt $d\omega = konst$, so findet man

$$d^2x = d^2\varrho \cos\omega - 2 \sin\omega\, d\varrho\, d\omega - \varrho \cos\omega\, d\omega^2,$$

$$d^2y = d^2\varrho \sin\omega + 2 \cos\omega\, d\varrho\, d\omega - \varrho \sin\omega\, d\omega^2.$$

Hieraus entnimmt man:

$$dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2,$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -\varrho d^2\varrho\, d\omega + 2 d\varrho^2 d\omega + \varrho^2 d\omega^3.$$

Also ist

$$V = \frac{(d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\varrho d^2\varrho\, d\omega + 2 d\varrho^2 d\omega + \varrho^2 d\omega^3},$$

oder

$$V = \frac{\left(\varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\frac{d\varrho^2}{d\omega^2} - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}.$$

81. Eine neue Anwendung. Bei Fragen in betreff der Änderung von Variabelen kann es auch eintreten, daſs die ursprünglichen Variabelen nicht unmittelbar als Funktionen der neuen gegeben sind, sondern daſs sie mit diesen durch gegebene Differentialgleichungen verknüpft sind. Dabei kann es vorkommen, daſs die gegebenen Gleichungen zusammen mit denjenigen, die man durch Differentiation aus ihnen gewinnt, hinreichen, um die ursprünglichen Variabelen zu eliminieren und auf diese Weise den vorgelegten Ausdruck zu transformieren. Auch hiervon wollen wir ein Beispiel geben und denselben Ausdruck wie oben, nämlich

$$V = \frac{\left(1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{1}$$

behandeln. Es soll die Form bestimmt werden, welche er annimmt, wenn man an Stelle von x und y zwei andere Variabelen ϱ und s einführt, welche mit diesen durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = \varrho^2, \tag{2}$$

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \tag{3}$$

verbunden sind, wobei ds als konstantes Differential gelten soll. Zunächst transformieren wir wiederum V in

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \tag{4}$$

Die Differentiation von (2) und (3) ergiebt

$$xdx + ydy = \varrho d\varrho, \tag{5}$$

$$dxd^2x + dyd^2y = 0. \tag{6}$$

Durch Differentiation der Gleichung (5) erhält man

$$xd^2x + yd^2y + (dx^2 + dy^2) = d\varrho^2 + \varrho\, d^2\varrho,$$

oder nach Gleichung (3)

$$xd^2x + yd^2y = \varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2. \tag{7}$$

Die Gleichungen (3), (5), (6), (7) lassen dx, dy, d^2x, d^2y berechnen; und zwar wird aus den Gleichungen (6) und (7) erhalten:

$$(ydx - xdy)d^2x = -(\varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)dy,$$

$$(ydx - xdy)d^2y = +(\varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)dx,$$

also

$$dxd^2y - dyd^2x = \frac{(\varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)ds^2}{ydx - xdy}.$$

Nun ist

$$y\,dx - x\,dy = \sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)-(x\,dx+y\,dy)^2} = \varrho\sqrt{ds^2-d\varrho^2},$$

also

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{(\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)\,ds^2}{\varrho\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}. \tag{8}$$

Vermittelst der Formeln (3) und (8) wird

$$V = \frac{\varrho\,ds\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}{\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2},$$

oder

$$V = \frac{\varrho\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds^2}}}{\varrho\frac{d^2\varrho}{ds^2}+\frac{d\varrho^2}{ds^2}-1}.$$

Viertes Kapitel.

Totale Differentiale und partielle Differentialquotienten.

In diesem Kapitel werden eine Reihe von formalen Betrachtungen angestellt unter der Annahme, daſs jede vorkommende Funktion an der gerade betrachteten Stelle die folgende Forderung erfüllt:

Forderung 𝔅. *Die Funktion und alle Ableitungen von ihr, die vorkommen, sind in der Umgebung der betrachteten Stelle stetig.*

§ 1. Totale Differentiale.

82. Das totale Differential erster Ordnung. *Totales Differential* einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen heiſst die Summe aus den partiellen Differentialen der Funktion in Bezug auf die verschiedenen Variabelen. Man bezeichnet dieses Differential mit der Charakteristik d; demnach hat man

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \cdots \frac{\partial u}{\partial t}\,dt.$$

Aus dieser Definition ergeben sich die Folgerungen:

1. *Wenn eine Funktion u der unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots t$ für alle Werte der Variabelen, welche innerhalb gegebener Grenzen liegen, konstant ist, so ist ihr totales Differential du in diesem Wertgebiete null.* Und umgekehrt: *Wenn das totale Differential der Funktion u innerhalb eines Wertgebietes der Variabelen konstant gleich 0 ist, so ist auch die Funktion u selbst eine Konstante.*

Denn erstlich werden, wenn u konstant ist, die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots \frac{\partial u}{\partial t}$ sämtlich 0 (Nr. 29), also ist auch das Differential $du = 0$.

Wenn zweitens $du = 0$ ist, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0.$$

Da $dx, dy, \ldots dt$ willkürliche Gröfsen sind, so kann man hieraus schliefsen, dafs

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \cdots \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Die erste Gleichung zeigt, dafs u unabhängig ist von x (Nr. 29), die zweite, dafs u unabhängig von y ist, endlich die letzte, dafs u unabhängig von t ist. Also ist $u = \mathit{konst.}$

Ist u eine Funktion von nur zwei Veränderlichen x und y, so hat das Differential du eine einfache geometrische Bedeutung.

Im neunten Kapitel (No. 253) wird gezeigt, wenn $u = f(x, y)$ die Gleichung einer Fläche ist, dafs dann

$$\zeta - u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\xi - x) + \frac{du}{\partial y} \cdot (\eta - y)$$

die Tangentialebene im Punkte (x, y) an die Fläche ist; dabei bedeuten ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten der Tangentialebene. Setzt man daher $\xi = x + dx$, $\eta = y + dy$, so wird

$$\zeta - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

die Zunahme, welche die Ordinate der Tangentialebene erfährt, wenn x um dx, y um dy vermehrt wird. Die rechte Seite ist aber gerade der Ausdruck, durch welchen du definiert wurde. Wir sehen also:

Das totale Differential einer Funktion $u = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

giebt uns an, um wieviel die Ordinate der Tangentialebene der Fläche $u = f(x, y)$ im Punkte (x, y) wächst, wenn x um die willkürliche Zahl dx, y um die willkürliche Zahl dy vermehrt wird.

2. *Wenn zwei Funktionen v und w für alle Werte der unabhängigen Variabelen $x, y, \ldots t$ innerhalb gegebener Grenzen nur um eine Konstante differieren, so sind ihre Differentiale gleich;* und umgekehrt: *Sind die Differentiale zweier Funktionen v und w für alle Werte der Variabelen innerhalb gegebener Grenzen einander gleich, so differieren diese Funktionen nur um eine Konstante.*

Dieser Satz ist in dem vorigen enthalten, wenn man die Differenz $v - w = u$ setzt.

83. Differentiation einer zusammengesetzten Funktion.
Lehrsatz. *Bezeichnet u eine Funktion von mehreren Variabelen $x, y, z, \ldots t$, welche selbst Funktionen gewisser unabhängiger Variabelen sind, so ist*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

also genau ebenso, wie wenn $x, y, z, \ldots t$ die unabhängigen Variabelen wären.

Denn sind $\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$ die unabhängigen Variabelen, und ersetzt man $x, y, z, \ldots t$ durch ihre Werte als Funktionen derselben, so erhält man u ausgedrückt als Funktion der Variabelen $\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$. Der Definition nach ist nun

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots \frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega.$$

Nun ist aber $\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi$ das partielle Differential von u in Bezug auf ξ, und ξ ist als unabhängige Variabele in $x, y, z, \ldots t$ enthalten. Nach der Regel (41) für die Differentiation einer Funktion, welche aus mehreren Funktionen einer unabhängigen Variabelen zusammengesetzt ist, hat man demnach

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \cdots \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi},$$

und ebenso:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \cdots \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \omega} + \cdots \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \omega}.$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
du = & \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \cdots \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right) \\
& + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \cdots \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega\right) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta + \cdots \frac{\partial t}{\partial \omega} d\omega\right).
\end{aligned}
$$

Die in den Klammern enthaltenen Summen sind aber nichts anderes als die Differentiale $dx, dy, \ldots dt$; man hat also:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Folgerung. Die Regeln für die Differentiation von Summen, Produkten, Quotienten und Potenzen von Funktionen einer einzigen Variabelen sind auf Funktionen mehrerer unabhängiger Variabelen übertragbar; man mufs dann nur statt mit Differentialquotienten mit Differentialen rechnen.

84. Die totalen Differentiale höherer Ordnungen. Ist du dafs totale Differential der Funktion du, so bezeichnen wir mit d^2u das totale Differential von du, gebildet, indem man den Variabelen Zuwüchse erteilt, welche denen gleich sind, die in dem Ausdruck du vorkommen, mit d^3u das totale Differential von d^2u und so fort, so dafs in der Aufeinanderfolge:

$$du,\ d^2u,\ d^3u, \ldots d^nu \tag{1}$$

jedes Glied das totale Differential des vorhergehenden ausdrückt. Die Funktionen (1) heifsen das *totale Differential der ersten, der zweiten, der dritten Ordnung* u. s. w.

Aus dem totalen Differentiale erster Ordnung

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt \tag{2}$$

folgt, dafs man das totale Differential der n^{ten} Ordnung symbolisch durch die Formel

$$d^nu = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t} dt\right)^n \tag{3}$$

darstellen kann, wenn man, nachdem die Entwickelung der rechten Seite ausgeführt ist, in jedem Gliede einen Faktor von der Form

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^\beta \cdots \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^\omega$$

durch die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots\omega} u}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta \ldots \partial t^\omega}$$

ersetzt.

Um diese Behauptung zu beweisen, genügt es, wörtlich die Überlegungen zu wiederholen, die wir in Nr. 71 ausführten bei der Differentiation einer Funktion, welche aus linearen Funktionen einer Variabelen zusammengesetzt ist. Die beiden Fragen sind, wie leicht zu sehen, die nämlichen, weil die Differentiale der Variabelen in beiden Fällen konstant sind, und auch die aufeinander folgenden Differentiationen dasselbe Gesetz befolgen.

85. Mehrfache Differentiation einer zusammengesetzten Funktion. Die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen gilt auch dann noch (Nr. 71), wenn $x, y, z, \ldots t$ nicht mehr die unabhängigen Variabelen bedeuten. Aber für die Formel (3) gilt das, sobald $n > 1$ ist, nicht mehr, aufser wenn $x, y, \ldots t$ lineare Funktionen der unabhängigen Variabelen sind. Im allgemeinen Falle sind $dx, dy, \ldots dt$ nicht mehr konstant, und um d^2u zu erhalten, mufs man die Formel (2) so differentiieren, dafs dabei jedes Glied als ein Produkt von zwei variabelen Faktoren behandelt wird. Da die Regel für Differentiation von Produkten auf totale Differentiale anwendbar ist, so erhält man

$$d^2u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \cdots \frac{\partial u}{\partial t}dt\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y + \cdots \frac{\partial u}{\partial t}d^2t\right),$$

wobei der erste Teil der rechten Seite, welcher von den Differentialen höherer Ordnung unabhängig ist, symbolisch geschrieben und demgemäfs zu deuten ist. Auf demselben Wege sind die totalen Differentiale $d^3u, d^4u, \ldots$ zu bestimmen.

Meistens aber ist es zweckmäfsiger, die verschiedenen partiellen Differentiale, aus denen das totale schliefslich zusammenzusetzen ist, gesondert zu bestimmen, wodurch die Aufgabe sich immer nur auf die Betrachtung von Funktionen reduziert, die von einer einzigen Variabelen abhängen. Denn wenn $\xi, \eta, \ldots \omega$ die unabhängigen Variabelen bezeichnen und man will

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi^\alpha \, \partial \eta^\beta \ldots}$$

berechnen, so wird man die Gleichung für u,

$$u = f(x, y, z, \ldots t),$$

erst α-mal nach ξ differentiiren, wodurch $\frac{\partial^\alpha u}{\partial \xi^\alpha}$ erhalten wird; alsdann wird dieser Ausdruck β-mal nach η differentiiert, was $\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial \xi^\alpha \, \partial \eta^\beta}$ ergiebt u. s. w.

86. Differentiation von impliciten Funktionen. Der allgemeinste Fall impliciter Funktionen ist der, bei welchem m Gleichungen zwischen n unabhängigen Variabelen und m Funktionen von ihnen gegeben sind. Werden die rechten Seiten dieser Gleichungen auf 0 gebracht, so sind die linken zusammengesetzten Funktionen der n Variabelen, welche durchaus den Wert 0 haben. Folglich sind die totalen Differentiale dieser Funktionen insgesamt gleich 0. Man kann also durch successive Differentiation aus den gegebenen Gleichungen neue ableiten, aus denen sich die totalen Differentiale erster Ordnung berechnen lassen; ferner sind aus diesen die totalen Differentiale zweiter Ordnung zu bestimmen, und so fort.

Anstatt aber direkt die totalen Differentiale zu bestimmen, kann man auch getrennt zuerst die verschiedenen partiellen Ableitungen berechnen, welche in den Ausdrücken für jene auftreten, und die Berechnung der partiellen Ableitungen erfolgt nach der Regel für implicite Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

Betrachten wir z. B. eine Funktion z der Variabelen x, y, welche mit diesen durch eine gegebene Gleichung

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

verbunden ist. Sind p und q die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, so hat man

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

ebenso hat man, wenn man mit r, s, t die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bezeichnet $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Dabei ist zu bemerken, daſs für die totalen Differentiale von p und q, nämlich dp und dq die Gleichungen bestehen:

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

Um nun p und q zu ermitteln, differentiiere man die gegebene Gleichung, indem man zuerst x, sodann y als die einzige Variabele ansieht; man erhält auf diese Weise nach Nr. 54:

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

wenn $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht gerade gleich 0 ist. Hieraus folgt:

$$(3) \qquad p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Um r, s, t zu finden, genügt es die Gleichungen (2) oder (3) zu differentiieren. Durch Differentiation der Gleichungen (2) zuerst nach x, sodann nach y, ergeben sich die Gleichungen:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + r\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + pq\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + s\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2q\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + q^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + t\frac{\partial f}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Die Differentiation der ersten Gleichung (2) nach y ergiebt dasselbe Resultat wie die Differentiation der zweiten Gleichung (2) nach x, nämlich die mittlere der Gleichungen (4).

Die Differentiation der Gleichungen (4) liefert die partiellen Ableitungen dritter Ordnung u. s. w.

87. Beispiel: Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

folgt:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

und man findet nacheinander

$$x + pz = 0, \quad y + qz = 0,$$

sodann

$$1 + p^2 + rz = 0, \quad pq + sz = 0, \quad 1 + q^2 + tz = 0.$$

Hiernach ist

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \quad r = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad s = -\frac{xy}{z^3}, \quad t = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}.$$

§ 2. Bildung partieller Differentialgleichungen durch Elimination willkürlicher Funktionen.

In der Theorie der Funktionen einer einzigen Variabelen wurde gezeigt, wie man durch Differentiation und Elimination willkürlicher Konstanten *Differentialgleichungen* oder Systeme von *simultanen Differentialgleichungen* bilden kann. Eine analoge Frage entsteht bei der Untersuchung von Funktionen mehrerer Variabelen. Aber hier sind die willkürlichen Gröfsen, welche man eliminieren kann, nicht blofs Konstante, sondern auch Funktionen. Die Differentialgleichungen, welche man auf diesem Wege erhält, werden *partielle Differentialgleichungen* genannt. Im folgenden wollen wir uns auf die Elimination einer einzigen willkürlichen Funktion beschränken. Die partielle Differentialgleichung wird dann von der *ersten Ordnung* werden.

88. Lineare Gleichung erster Ordnung in 3 Veränderlichen. Wir betrachten zunächst drei Variabele x, y, z, von denen die beiden ersten unabhängige sind. Während u und v *bestimmt gegebene* Funktionen dieser Variabelen sein sollen, bezeichne $\Phi(u, v)$ eine *willkürliche* Funktion von u und v. Wir nehmen an, dafs die Variabele z mit x und y durch die Gleichung

$$\Phi(u, v) = 0 \tag{1}$$

verbunden ist und stellen nun die Aufgabe, zwischen x, y, z und den partiellen Ableitungen von z eine Gleichung zu ermitteln, die ganz unabhängig ist von der besonderen Art der Funktion Φ.

Man kann, wenn man will, annehmen, dafs die Gleichung (1) aufgelöst ist nach v; so hat man

$$v = \varphi(u),$$

und da die Funktion Φ willkürlich ist, so ist es auch die Funktion φ. Übrigens hat man keinen Grund, diese letzte Formel der ersten vorzuziehen.

Die Ableitungen der Funktionen u und v nach x sind, nach der Regel der Nr. 40:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z},$$

ebenso sind die Ableitungen nach y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z},$$

indem man, wie in Nr. 86

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

setzt. Die Gleichung (1) werde nun nach x und y differentiiert; dann hat man

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + p\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + p\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + q\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + q\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen, homogen in Bezug auf $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, lassen sich diese Gröfsen eliminieren und es folgt:

$$(3)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Führt man die Multiplikationen hier aus und setzt

$$P = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$V = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

so wird die Gleichung (3)

$$(4)\qquad Pp + Qq = V.$$

Sind also u und v gegebene Funktionen von x, y, z, so genügt die Gesamtheit aller Funktionen z, die durch eine Gleichung $\Phi(u, v) = 0$ definiert werden, welches auch die Funktion Φ sein mag, einer und derselben linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

(4) $$Pp + Qq = V,$$

in welcher $P\ Q\ V$ bestimmte, von der Wahl des Φ unabhängige Funktionen von $x\ y\ z$ sind.

89. Lineare Gleichung erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen. Das Resultat läſst sich auf eine beliebige Zahl von unabhängigen Variabelen ausdehnen. Bezeichnen

$$z, x_1, x_2, \ldots x_n$$

$n+1$ Veränderliche, von denen die n letzten unabhängige sind, und setzt man

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots p_n dx_n,$$

so ergiebt, wenn

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

n bestimmt gegebene Funktionen der Variabelen $z, x_1, \ldots x_n$ sind, die Gleichung

(1) $$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0$$

durch Differentiation und Elimination der willkürlichen Funktion Φ, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf die Ableitungen $p_1, p_2, \ldots p_n$ linear ist. Denn man erhält, indem man nacheinander in Bezug auf jede der unabhängigen Variabelen differentiiert,

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \cdots \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \cdots \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \cdots \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_n}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit D die Determinante n^{ter} Ordnung:

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, & \cdots \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial u_n}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, & \cdots \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial u_n}{\partial z} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, & \cdots \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial u_n}{\partial z} \end{vmatrix},$$

so wird die Gleichung, welche man durch Elimination der Gröſsen $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$ aus dem Systeme (2) erhält:

$$D = 0.$$

Es sei Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und Δ_m die Determinante, die aus Δ hervorgeht, wenn man die Elemente der m^{ten} Horizontalzeile, nämlich

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_m} \; \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial x_m}$$

durch die Elemente

(3) $$\frac{\partial u_1}{\partial z} \; \frac{\partial u_2}{\partial z} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial z}$$

ersetzt. Es leuchtet ein, daſs, wenn man die erste Horizontalzeile von Δ durch die erste Zeile von D ersetzt, eine neue Determinante $\Delta^{(1)}$ erhalten wird, für welche die Gleichung besteht:

$$\Delta^{(1)} = \Delta + p_1 \Delta_1 .$$

Ersetzen wir in $\Delta^{(1)}$ die zweite Horizontalzeile durch die zweite Zeile von D, so wird eine neue Determinante $\Delta^{(2)}$ gewonnen. Durch diese Änderung wird aber Δ verwandelt in $\Delta + p_2 \Delta_2$, während $p_1 \Delta_1$ sich nicht ändert, denn die Gröſse, um welche es sich ändern müſste, ist eine Determinante, in welcher zwei Horizontalzeilen zusammengesetzt sind aus Elementen, die den Gröſsen (3) proportional sind, und die folglich den Wert 0 hat. So erhält man

$$\Delta^{(2)} = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 .$$

Ersetzt man nun in $\Delta^{(2)}$ die dritte Horizontalzeile durch die dritte Zeile von D, so bekommt man eine Determinante $\Delta^{(3)}$, deren Wert gleich ist

$$\Delta^{(3)} = \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + p_3 \Delta_3 ,$$

und fährt man so fort, so erhält die Determinante $\Delta^{(n)}$ den Wert D und es ist

$$(4) \qquad D = \Delta + p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + \cdots p_n\Delta_n = 0$$

die gesuchte partielle Differentialgleichung.

90. Lehrsatz über homogene Funktionen. Eine Funktion mehrerer Variabelen heifst *homogen* oder *eine Form*, wenn die Multiplikation aller Variabelen mit einem Faktor t bewirkt, dafs die Funktion sich bis auf einen Faktor t^m reproduziert. Der Exponent m kann eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, auch gleich 0 sein; er heifst der *Grad der Form.* Demnach hat man, wenn $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Form ist, für jeden Wert von t, d. h. identisch

$$t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1 t, x_2 t, \ldots x_n t).$$

Setzt man insbesondere $t = \frac{1}{x_n}$, so ist

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_n^m f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right).$$

Es kann also jede homogene Funktion z von n Variabelen in der Form dargestellt werden:

$$z = x_n^m F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Vermittelst der partiellen Ableitungen kann man die nämliche Eigenschaft homogener Funktionen ausdrücken, und zu diesem Zwecke hat man nur nach der Methode des vorigen Paragraphen die willkürliche Funktion F zu eliminieren. Setzt man also

$$u_n = \frac{z}{x_n^m}, \quad u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \quad \cdots u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

so ist auf die Gleichung

$$u_n = F(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$$

die vorige Regel zu übertragen. Es wird durch partielle Differentiation nach den n unabhängigen Variabelen

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \cdots \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n},$$

also

$$\frac{p_1}{x_n^m} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{1}{x_n}, \cdots \frac{p_{n-1}}{x_n^m} = \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \frac{1}{x_n},$$

$$\frac{p_n}{x_n^m} - m \frac{z}{x_n^{m+1}} = -\left[\frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{x_1}{x_n^2} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{x_2}{x_n^2} \cdots \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_n^2}\right].$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man die $n-1$ ersten bezüglich mit $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ multipliziert hat, so folgt:

$$mz = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots p_n x_n,$$

oder

$$mF(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Multipliziert man die partiellen Ableitungen einer Form m^{ten} Grades mit den entsprechenden Variabelen und bildet die Summe mit diesen Produkten, so ist diese gleich dem m-fachen der Form.

Folgerung. Die partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion m^{ten} Grades sind selbst homogene Funktionen vom Grade $m-1$.

Dies folgt unmittelbar aus den Formeln

$$p_1 = x_n^{m-1} \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdots,$$

denn $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ ist eine Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.

91. Allgemeine Gleichung erster Ordnung in 3 Veränderlichen. Die Elimination, mit welcher wir uns bisher beschäftigt haben, führt auf partielle Differentialgleichungen, die in Bezug auf die Variabelen linear sind. Wir wollen nun noch den allgemeinen Prozefs aufdecken, durch welchen, wie in der Theorie der Differentialgleichungen gezeigt werden wird, alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ableitbar sind.

Zunächst untersuchen wir den Fall dreier Variabelen x, y, z, von denen die beiden ersten die unabhängigen sind, und setzen wieder

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Es sei α ein veränderlicher Parameter, $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Funktion dieses Parameters und

$$V = f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)]$$

eine bestimmt gegebene Funktion dieser fünf Gröfsen: $x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)$.

Wir betrachten das System der beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0.$$

Wenn die willkürliche Funktion $\varphi(\alpha)$ fixiert ist und man die Elimination von α zwischen den beiden Gleichungen (1) ausführen kann, so erhält man eine Gleichung zwischen den drei Variabelen x, y, z. Aber selbst wenn die Funktion φ ganz willkürlich bleibt, so kann man doch z als eine Funktion von x und y betrachten, welche durch das System der Gleichungen (1) bestimmt ist. Nun stellen wir uns die Aufgabe, die Funktion φ vermittelst Differentiation aus den Gleichungen (1) zu eliminieren. Dabei kann man so zu Werke gehen, wie wenn die Elimination von α ausgeführt wäre, d. h. man hat in der Gleichung $V = 0$ α als eine Funktion der Variabelen x, y, z zu betrachten, die durch die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$ bestimmt ist. Bildet man dann noch das totale Differential der ersten Gleichung, so wird

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Das letzte Glied dieser Summe verschwindet aber zufolge der zweiten Gleichung (1), und wenn man dz durch seinen Wert $p\,dx + q\,dy$ ersetzt, so hat man die Koeffizienten der beiden willkürlichen Differentiale dx und dy einzeln gleich 0 zu setzen. Es wird also

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Jetzt kann man α und $\varphi(\alpha)$ zwischen den beiden Gleichungen (2) und der ersten Gleichung (1) eliminieren. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung

$$(3) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

welche die partiellen Ableitungen erster Ordnung enthält und im übrigen von ganz allgemeiner Form ist. Es wird später gezeigt werden, dafs, wenn x, y, z geradlinige Koordinaten bedeuten, die Gleichung (3) solch eine Eigenschaft der Tangentialebene ausdrückt, welche allen Flächen gemeinsam ist, die durch die Gleichungen (1) dargestellt werden.

92. Beispiel. Ist

$$V = (x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2,$$

und R eine Konstante, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2(x - \alpha), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2[y - \varphi(\alpha)], \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2z.$$

Die Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen sind also

$$x - \alpha + pz = 0, \quad y - \varphi(\alpha) + qz = 0.$$

Entnimmt man hieraus die Werte $x - \alpha = -pz$, $y - \varphi(\alpha) = -qz$, um sie in die gegebene Gleichung zu substituieren, so folgt

$$(1 + p^2 + q^2)z^2 = R^2,$$

oder

$$z = \frac{R}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

welches die partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, um die es sich handelt.

93. Allgemeine Gleichung erster Ordnung in $n + 1$ Veränderlichen. Gehen wir nun zum allgemeinen Fall über. Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die unabhängigen Variabelen, z die abhängige, und es sei

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots p_n dx_n.$$

Andererseits seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, $n - 1$ veränderliche Parameter und $\alpha = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$ eine willkürliche Funktion derselben, endlich sei mit

$$V = f(z, x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$$

eine bestimmt gegebene Funktion der $n + 1$ Variabelen und der $n - 1$ Parameter, sowie der Funktion α bezeichnet.

Wir betrachten die n Gleichungen

$$(1) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = 0,$$

welche $z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmen; und es handelt sich darum, eine partielle Differentialgleichung zu bilden, welche unabhängig ist von der willkürlichen Funktion α.

Der Weg, welcher einzuschlagen ist, bleibt derselbe wie in Nr. 91. Das totale Differential von V mufs 0 sein, und man hat

$$\frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} d\alpha_{n-1} = 0.$$

Dabei sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}}$ so zu bilden, dafs dabei α als Funktion von $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ anzusehen ist. Da die Koeffizienten von $d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$ gleich 0 sind zufolge der Gleichungen (1), so ist

$$\frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung dz durch

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots p_n dx_n,$$

so müssen, da die Differentiale $dx_1 \ldots dx_n$ ganz willkürlich bleiben, ihre Koeffizienten einzeln gleich 0 sein, und man erhält:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man jetzt $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ zwischen den n Gleichungen (2) und der ersten Gleichung (1), so resultiert eine Gleichung

$$(3) \qquad F(z, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0,$$

welche die gesuchte partielle Differentialgleichung ist.

§ 3. Transformation von Differentialausdrücken.

94. Die Änderung der unabhängigen Variabelen. Wir stellen folgendes Problem:

In eine Funktion u der m Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$ werden diese als Funktionen von m neuen Variabelen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ eingeführt; dadurch wird u eine Funktion dieser neuen Variabelen. Es sollen nun die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdots$$

als Funktionen der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}, \cdots$$

ausgedrückt werden.

Die ursprünglichen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$ seien als Funktionen der neuen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ gegeben, und umgekehrt seien auch die letzteren als bekannte Funktionen von $x_1 \ldots x_m$ gegeben. Betrachtet man nun u als eine Funktion von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ und diese als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$, so wird die Lösung der gestellten Aufgabe direkt nach der Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen gewonnen. Man hat

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots \frac{\partial u}{\partial \xi_m} d\xi_m, \tag{1}$$

ferner:

$$\left\{\begin{aligned} d\xi_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} dx_m, \\ d\xi_2 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \xi_2}{\partial x_m} dx_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\xi_m &= \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} dx_m. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Da $\xi_1 \ldots \xi_m$ als Funktionen von $x_1 \ldots x_m$ gegeben sind, so sind auch die Ableitungen $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \cdots$ bekannte Funktionen von $x_1 \ldots x_m$, man mufs dieselben aber ausdrücken in $\xi_1 \ldots \xi_m$. Substituiert man nun diese Werte in die Gleichung (1), so werden die Koeffizienten von $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$ die gesuchten Ausdrücke für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \cdots \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

als Funktionen der Variabelen $\xi_1 \ldots \xi_m$, und der Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \quad \cdots \frac{\partial u}{\partial \xi_m}.$$

Ebenso hat man bei den Ableitungen höherer Ordnung vorzugehen. So findet man

$$d\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

und nachdem man auf der rechten Seite für $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ den vorhin erhaltenen Wert, und für $d\xi_1 \ldots d\xi_m$ ihre Werte aus den Gleichungen (2) substituiert hat, werden die gesuchten Werte für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m}$$

gewonnen. Führt man die nämliche Substitution in der Formel

$$d\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_2}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_2}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_2}}{\partial \xi_m} d\xi_m$$

aus, so erhält man die Gleichungen für

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m},$$

von denen die erste schon berechnet ist, u. s. w.

Dieselbe Methode ist für Ableitungen jedweder Ordnung anwendbar.

95. Anwendungen. Die Punkte im Raume können sowohl durch drei rechtwinklige Koordinaten x, y, z, als auch durch drei Polarkoordinaten r, θ, ψ dargestellt werden; diese sind mit den ersteren durch die Gleichungen verbunden:

(1) $$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

oder

(2) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$$

Wenn nun eine Gröfse u zunächst als eine Funktion von x, y, z gegeben ist, so sollen die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u, nämlich die neun Gröfsen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

als Funktionen der neuen Variabelen r, θ, ψ und der zu diesen gehörigen partiellen Ableitungen ausgedrückt werden.

Man folgert aus den Gleichungen (2):

$$dr = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin\theta \, d\theta = \frac{z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{\cos\psi^2}\, d\psi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

oder, vermittelst der Gleichungen (1):

$$(3) \quad \begin{cases} dr = \sin\theta\cos\psi\,dx + \sin\theta\sin\psi\,dy + \cos\theta\,dz, \\ d\theta = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\psi\,dx + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\psi\,dy - \frac{1}{r}\sin\theta\,dz, \\ d\psi = -\frac{1}{r}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,dx + \frac{1}{r}\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,dy. \end{cases}$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}\,dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial u}{\partial \psi}\,d\psi,$$

so erhält man:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}. \end{cases}$$

Man mufs jetzt die totalen Differentiale von

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}$$

bilden, oder was auf dasselbe hinauskommt, die partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach r, θ, ψ. Man findet:

$$(5) \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta}$$
$$- \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{r^2\sin\theta},$$

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta}\\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r\sin^2\theta},\\
\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial\psi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta}\\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\sin\psi - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta}\\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r^2\sin\theta},\\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta}\\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta\sin\psi - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin^2\theta},\\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\psi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta}\\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(7)\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r^2},\\
\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r},\\
\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial\psi} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\theta}{r}.
\end{aligned}\right.
$$

Addiert man die Gleichungen (5), nachdem man sie zuvor mit den entsprechenden Gleichungen (3) multipliziert hat, so erhält man das totale Differential von $\frac{\partial u}{\partial x}$, und die Koeffizienten von dx, dy, dz werden die gesuchten Werte von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}.$$

Ebenso erhält man die weiteren partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, wenn man die Gleichungen (6) oder (7) mit (3) multipliziert und jedesmal addiert. Man findet so:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r} \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta} \\ & + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\sin^2\psi - 2\sin^2\theta\cos^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} + 2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r} \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta} \\ & - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(1 + 2\sin^2\theta)\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r\sin\theta} \\ & - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r^2} \\ & - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r} \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta} \\ & + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - 2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r\sin\theta} \\ & - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r^2} \\ & - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} \\ & + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.\end{aligned}$$

96. Der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Man kann die bei der Änderung von Variabelen notwendigen Rechnungen oftmals abkürzen, indem man sich gewisser, den Problemen angemessener

Kunstgriffe bedient. Wir halten es für nützlich, von solchen Vereinfachungen klaren Begriff zu geben, indem wir eine Aufgabe behandeln, die in verschiedenen mathematischen Theorien vorkommt. Es soll der Ausdruck

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

transformiert werden, indem an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z die Polarkoordinaten r, θ, ψ eingeführt werden. Man kann diese Aufgabe direkt dadurch lösen, dafs man die Formeln des vorigen Paragraphen benutzt. Aber wir wollen sie ausführen, ohne auf diese Formeln zurückzugehen.

Zu dem Zwecke führen wir an Stelle von x, y zunächst zwei Variabele ϱ und ψ ein, derart dafs

$$x = \varrho \cos\psi, \quad y = \varrho \sin\psi,$$

oder

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}.$$

Hieraus folgert man:

$$d\varrho = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\psi\,dx + \sin\psi\,dy,$$

$$d\psi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \cos^2\psi = -\frac{\sin\psi}{\varrho}\,dx + \frac{\cos\psi}{\varrho}\,dy.$$

Diese Gleichungen bestimmen $\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \frac{\partial\varrho}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ und man findet:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial\psi}\,\frac{\sin\psi}{\varrho}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial\varrho}\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial\psi}\,\frac{\cos\psi}{\varrho}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Summiert man diese Gleichungen, nachdem man die zweite mit $\sqrt{-1}$ multipliziert hat, so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial\varrho} + \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial\psi}\right). \tag{3}$$

Bezeichnet man mit v den Wert jeder Seite dieser Gleichung, so folgt, da diese Formel für jede Funktion u und unabhängig von dem Vorzeichen von $\sqrt{-1}$ Geltung hat, wenn man u durch v ersetzt, und statt $\sqrt{-1}$ die Formel $-\sqrt{-1}$ schreibt:

$$(4)\quad \frac{\partial v}{\partial x} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial v}{\partial y} = (\cos\psi - \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \psi}\right).$$

Aus der Gleichung

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ferner ergiebt die Gleichung:

$$v = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \psi}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varrho} = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial \psi} - \frac{\sqrt{-1}}{\varrho^2}\frac{\partial u}{\partial \psi}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = (\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial \psi} + \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}\right)$$

$$- (\sin\psi - \sqrt{-1}\cos\psi)\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \psi}\right),$$

folglich ist

$$(\cos\psi - \sqrt{-1}\sin\psi)\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{\sqrt{-1}}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \psi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho},$$

und man hat

$$(5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho},$$

also

$$(6)\quad S = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}.$$

Um die Lösung zu vervollständigen, sind nun noch an Stelle der Variabelen ϱ und z die neuen Variabelen r und θ vermittelst der Gleichungen

$$z = r\cos\theta, \quad \varrho = r\sin\theta$$

einzuführen. Da nun z und ϱ von r und θ ebenso abhängen, wie x und y von ϱ und ψ, so folgt gemäfs der Gleichung (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

und ebenso schliefst man aus der zweiten der Gleichungen (2)

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Man erhält demnach, indem man die Ausdrücke in die Gleichung (6) substituiert und ϱ durch $r \sin\theta$ ersetzt:

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$$
$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right),$$
$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Die ersten beiden Glieder dieses Ausdruckes stellen mit r multipliziert die Ableitung $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$ dar; die beiden letzten Terme sind mit $r^2 \sin\theta$ multipliziert die Ableitung

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}.$$

Man hat also

$$r^2 S = r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}.$$

Es ist bei Anwendungen dieser Formel häufig zweckmäfsig

$$\cos\theta = \mu$$

als Variabele an Stelle von θ einzuführen. Dann hat man

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \mu} \quad \text{oder} \quad \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = -(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}.$$

Demnach:

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} = -\sin\theta\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \mu} = \sin\theta\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu}$$

und man erhält schliefslich den Ausdruck für S als Funktion der unabhängigen Variabelen r, μ, ψ:

$$r^2 S = r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu}.$$

97. Die Änderung aller Variabelen. Wenn man die abhängige oder Hauptvariabele gleichzeitig mit den unabhängigen verändern will, so ist das nämliche Verfahren einzuschlagen. Nehmen wir an, dafs in einer Rechnung eine Variabele z als Funktion von m unabhängigen Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$ eingeht, und dafs man an ihre Stelle eine andere Variabele ζ, welche von m neuen unabhängigen Variabelen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$

abhängt, einführen will; dann handelt es sich darum, die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}, \quad \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \ldots$$

als Funktionen der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \ldots$$

auszudrücken.

Hierbei sind die $m+1$ Variabelen des einen Systemes gegeben als Funktion der $m+1$ Variabelen des anderen. Also $\zeta, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ sind gegebene Funktionen von $z, x_1, x_2, \ldots x_m$, und die totalen Differentiale sind also von der Form:

$$\begin{aligned}
d\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial \zeta}{\partial x_m} dx_m, \\
d\xi_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m} dx_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d\xi_m &= \frac{\partial \xi_m}{\partial z} dz + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} dx_m.
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen sind bekannte Funktionen der Variabelen $z, x_1 \ldots x_m$. Da aber z eine Funktion von $x_1, x_2 \ldots x_m$ ist, so hat man

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m} dx_m,$$

und folglich ist:

$$(1)\begin{cases}
d\zeta = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_m}\right) dx_m, \\
d\xi_1 = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\right) dx_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d\xi_m = \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\right) dx_m.
\end{cases}$$

Setzt man jetzt diese Werte in die Gleichung

$$(2) \qquad d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} d\xi_m,$$

so erhält man eine Gleichung, welche bei allen Werten von

$dx_1 \cdots dx_m$ bestehen mufs, und welche sich daher in m Gleichungen zerlegt, nämlich:

$$(3)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}+\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2}\\
&\qquad+\cdots\left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial \xi_m}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m},\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}+\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2}\\
&\qquad+\cdots\left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial \xi_m}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m}+\frac{\partial \zeta}{\partial x_m}=\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m}+\frac{\partial \xi_1}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}+\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m}+\frac{\partial \xi_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_2}\\
&\qquad+\cdots\left(\frac{\partial \xi_m}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_m}+\frac{\partial \xi_m}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}.
\end{aligned}\right.$$

Man kann $\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial \xi_1}{\partial z}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdots$ als Funktion der Variabelen $\zeta, \xi_1 \cdots \xi_m$ ausdrücken, und diese Gleichungen ergeben alsdann die Werte der Funktionen $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ in der gesuchten Form.

Um zu den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung überzugehen, genügt es die Gleichungen (3) zu differentiieren. Betrachten wir z. B. die erste Gleichung in diesem Systeme; wir differentiieren dieselbe total und ersetzen $d\frac{\partial z}{\partial x_1}$ durch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_2+\cdots\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_m}dx_m.$$

Sodann ersetzen wir

$$d\zeta,\ d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1},\quad \cdots d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}$$

durch ihre Werte:

$$\begin{aligned}
d\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1}d\xi_1+\cdots\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m}d\xi_m,\\
d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1^2}d\xi_1+\cdots\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1\,\partial \xi_m}d\xi_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_m} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_1\,\partial \xi_m}d\xi_1+\cdots\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi_m^2}d\xi_m
\end{aligned}$$

und führen endlich für $d\xi_1 \cdots d\xi_m$ ihre Werte aus den Gleichungen (1) ein. Die Gleichung, die auf diese Weise gewonnen wird, gilt für beliebige Werte der Differentiale $dx_1 \cdots dx_m$. Sie zerfällt also in m Gleichungen, aus denen die m partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \cdots \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_m}$$

zu berechnen sind. Ebenso bestimmt man die anderen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} \cdots$$

Die Ableitungen höherer Ordnung werden dann auf demselben Wege gewonnen.

Schliefslich ist es auch leicht einzusehen, dafs die im vorstehenden entwickelte Methode auf den Fall einer beliebigen Anzahl von abhängigen Variabelen anwendbar ist; wie grofs auch immer die Zahl der unabhängigen Variabelen sein mag.

98. Legendres Transformation. *Legendre* hat bei gewissen Fragen eine Transformation angewandt, die oftmals von Vorteil ist und welche wir hier mitteilen wollen, indem wir uns auf den Fall zweier unabhängiger Variabelen beschränken.

Es sei z eine Funktion der unabhängigen Variabelen x, y, wir bezeichnen mit

$$(1) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

das Differential von z, und mit

$$(2) \qquad \begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned}$$

die Differentiale von p und q.

Setzt man

$$(3) \qquad u = px + qy - z,$$

so hat man

$$du = (p\,dx + q\,dy - dz) + x\,dp + y\,dq,$$

also zufolge der Gleichung (1)

$$(4) \qquad du = x\,dp + y\,dq.$$

Löst man andererseits die Gleichungen (2) nach dx und dy auf, so wird:

$$(5)\qquad \begin{aligned} dx &= \frac{t}{rt-s^2}\,dp + \frac{-s}{rt-s^2}\,dq, \\ dy &= \frac{-s}{rt-s^2}\,dp + \frac{r}{rt-s^2}\,dq. \end{aligned}$$

Die Transformation von *Legendre* besteht darin, daſs p, q, u als Variabele an Stelle von x, y, z eingeführt, und daſs dabei p und q als unabhängige Variabele betrachtet werden. Nun zeigt die Gleichung (4), daſs x und y die partiellen Ableitungen von u nach p und q sind, so daſs also

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = y$$

ist; ferner zeigen die Gleichungen (5), daſs $\frac{t}{rt-s^2}$, $\frac{-s}{rt-s^2}$, $\frac{r}{rt-s^2}$ bezüglich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q}$$

sind. Man hat also

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{t}{rt-s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = -\frac{s}{rt-s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{r}{rt-s^2},$$

und hieraus schlieſst man

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2 = \frac{1}{rt-s^2}.$$

Die Gleichungen (7) und (8) liefern die Ableitungen r, s, t als Funktionen der Ableitungen von u nach p und q.

Will man x und p zu unabhängigen Variabelen nehmen, so sind die totalen Differentiale von y und q gemäſs den Gleichungen (2):

$$dy = \frac{1}{s}\,dp - \frac{r}{s}\,dx,$$

$$dq = \frac{t}{s}\,dp - \frac{rt-s^2}{s}\,dx.$$

Die Gleichungen (1) und (4) lassen dann weiter die totalen Differentiale dz und du bestimmen:

$$dz = p\,dx + q\,dy = \left(p - \frac{qr}{s}\right)dx + \frac{q}{s}\,dp,$$

$$du = x\,dp + y\,dq = \left(x + \frac{yt}{s}\right)dp - \frac{rt-s^2}{s}\,y\,dx.$$

Aus den Formeln folgt im Besonderen

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{rt - s^2}{s},$$

wenn p und x die unabhängigen Variabelen sind. Ist also die Differenz $rt - s^2$ identisch, d. h. bei allen Werten von x und y gleich 0, so hat man

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Daraus folgt, dafs dann q nicht von x abhängt, und dafs also diese Gröfse nur eine Funktion von p ist. In diesem Falle können die Gröfsen p und q nicht als unabhängige Variabele gewählt werden; auch werden in der That die Transformationsformeln von *Legendre* alsdann illusorisch.

Fünftes Kapitel.

Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen.

§ 1. Einleitende Bemerkungen über unendliche Reihen.

99. Konvergenz und Divergenz. *Unendliche Reihe* nennt man eine unbegrenzte Folge von Zahlen, die nach irgend welchem Gesetze auf einander folgen. Wir werden uns hier nur mit solchen Reihen beschäftigen, in denen alle Glieder reelle Zahlen sind.

Die Summe einer Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$$

oder auch kürzer die Reihe selbst heifst konvergent, wenn die Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_{n-1}$$

der n ersten Glieder einer bestimmten endlichen Grenze S zustrebt, während die Zahl n unbegrenzt wächst.

S_n ist eine Funktion der Variabelen n, die jedoch im allgemeinen nur für ganzzahlige Werte von n definiert ist. Der Variabilitätsbereich für n ist mit anderen Worten der aller ganzen positiven Zahlen. Wenn man nun sagt, die Reihe der u ist konvergent, so meint man der eben gegebenen Erklärung zufolge damit weiter nichts als dafs, wenn n alle ganzen Zahlen durchläuft, $\lim_{n=\infty} S_n$ einen bestimmten endlichen Wert S hat. Eine Reihe, die nicht konvergiert, heifst divergent. Für eine divergente Reihe ist also entweder kein $\lim_{n=\infty} S_n$ vorhanden, oder, wenn $\lim_{n=\infty} S_n$ einen bestimmten Wert hat, so ist dieser unendlich grofs.

Die Grenze S heifst die *Summe* der Reihe; die Differenz

$S - S_n$ heifst der *Rest* der Reihe von der n^{ten} Stelle ab. Bezeichnet man diesen Rest mit R_n, so ist

$$S = S_n + R_n.$$

Die geometrische Progression

$$a, ax, ax^2, ax^3, \cdots$$

ist eine konvergente Reihe, wenn der Betrag von x kleiner als 1 ist, denn es ist

$$S_n = a(1 + x + x^2 + \cdots x^{n-1}) = \frac{a}{1-x} - \frac{a}{1-x} x^n.$$

Ist nun $|x| < 1$, so ist $\lim\limits_{n=\infty} x^n = 0$ und daher

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = \frac{a}{1-x}.$$

Dieselbe Reihe ist aber eine divergente, wenn der absolute Wert von x gröfser als 1 ist; denn in diesem Falle wächst S_n über jeden Betrag. Sie ist auch aus dem gleichen Grunde divergent für $x = +1$, und in dem Falle $x = -1$ besitzt

$$S_n = a[1 - 1 + 1 - 1 + \cdots (-1)^{n-1}] = \begin{matrix} 1 \text{ wenn } n \text{ ungerade} \\ 0 \text{ wenn } n \text{ gerade} \end{matrix}$$

keine bestimmte Grenze; die Reihe kann daher nicht als konvergent betrachtet werden. Wir sehen also:

Die geometrische Reihe

$$a + ax + ax^2 + \cdots$$

ist konvergent, wenn $|x| < 1$ *ist und divergiert in jedem anderen Falle.*

100. Multiplikation einer unendlichen Reihe mit einer Zahl. — Addition zweier unendlicher Reihen.

Die in Nr. 24 aufgestellten Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten führen sofort zu einigen Sätzen über das Rechnen mit konvergenten Reihen. Wir erwähnen hier zwei Sätze:

I. Multipliziert man die Glieder einer konvergenten Reihe sämtlich mit der nämlichen Zahl c, so entsteht wieder eine konvergente Reihe. Die Summe von dieser ist gleich dem Produkte aus c und der Summe der ursprünglichen Reihe. Es ist also:

$$cu_0 + cu_1 + cu_2 + \cdots = c \cdot (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)$$

In der That, ist:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1},$$

so hat $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ nach Voraussetzung einen bestimmten endlichen Wert S. Nach der Regel b. in Nr. 24 ist aber:

$$\lim c \cdot S_n = c \cdot \lim S_n.$$

Also folgt:

$$\lim (cu_0 + cu_1 + \cdots + cu_{n-1}) = c \lim (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})$$

oder

$$cu_0 + cu_1 + \cdots = c \cdot (u_0 + u_1 + \cdots) \cdot$$

Der zweite Satz lautet:

II. Zwei konvergente Reihen ergeben, gliedweise addiert, wieder eine konvergente Reihe. Die Summe von dieser ist gleich der Summe der Summen der beiden ursprünglichen Reihen. Es ist also:

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) + (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) = (u_0 + v_0) \\ + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots$$

In der That; es sei:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \quad S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}.$$

Dann haben

$$\lim_{n=\infty} S_n = S, \quad \lim_{n=\infty} S'_n = S'$$

nach Voraussetzung bestimmte endliche Werte. Nach der Regel a. der Nr. 24 wird aber:

$$\lim (S_n + S'_n) = \lim S_n + \lim S'_n.$$

Also folgt:

$$\lim ((u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_{n-1} + v_{n-1})) \\ = \lim (u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1}) + \lim (v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1})$$

oder:

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots = (u_0 + u_1 + \cdots) + (v_0 + v_1 + \cdots)$$

101. Eine für die Konvergenz notwendige Bedingung. *Ist die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_{n-1} + \cdots$$

konvergent, so hat die Summe

$$u_n + u_{n+1} + \cdots u_{n+p-1}$$

die Grenze 0, *bei jedem Werte von* p, *wenn* n *unbegrenzt wächst.*

Denn bezeichnet S die Grenze, nach welcher die Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1}$$

konvergiert, so ist:

$$\lim_{n=\infty} (S - S_n) = 0,$$

Ebenso ist auch

$$\lim_{n=\infty} (S - S_{n+p}) = 0;$$

also folgt durch Subtraktion

$$\lim_{n=\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0.$$

Da aber

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}$$

ist, so ist unser Satz erwiesen.

Hieraus erkennt man:

Erstens: Die einzelnen Glieder einer konvergenten Reihe werden schliefslich kleiner als jede gegebene Zahl; es ist $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$.

Zweitens: Die Summe beliebig vieler Glieder, gebildet vom n^{ten} *Gliede ab, konvergiert nach* 0, *wenn n unbegrenzt zunimmt.*

102. Die vorige Bedingung ist auch hinreichend. Umgekehrt:

Wenn die Summe

$$u_n + u_{n+1} + \cdots u_{n+p-1}$$

für jedweden Wert von p bei beliebig wachsendem Werte von n die Grenze 0 *hat, so ist die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_{n-1} + \cdots$$

konvergent.

Dieser Satz, der unmittelbar aus der Definition eines bestimmten Grenzwertes (Nr. 15) hervorgeht, soll hier nochmals erörtert werden. Bezeichnen wir mit σ eine positive beliebig kleine Gröfse, so kann man, da die Differenz

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \cdots u_{n+p-1}$$

für jedweden Wert von p mit beliebig wachsendem Werte von n nach 0 konvergiert, der Zahl n einen bestimmten hinreichend grofsen Wert beilegen, derart, dafs diese Differenz zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ gelegen ist, wie grofs auch p sein mag. Man hat also

$$S_n - \sigma < S_{n+p} < S_n + \sigma.$$

Wird die Zahl n nicht geändert, wächst aber p über alle Grenzen, so bleibt die Summe S_{n+p} immer zwischen den zwei bestimmten Gröfsen $S_n - \sigma$ und $S_n + \sigma$ eingeschlossen, deren Unterschied 2σ dabei von vornherein so klein als man nur will gemacht werden kann. Mithin stellt S_{n+p}, wenn p, also auch $n+p$ unbegrenzt wachsen, eine bestimmte Gröfse dar, von deren Grenze wir auch sagen, dafs sie eine bestimmte ist, weil sie sich von einer bestimmten angebbaren Gröfse beliebig wenig unterscheidet.

Man kann diese Überlegung zu deutlicher Anschauung bringen, wenn man ihr eine geometrische Form giebt. Es sei O ein bestimmter Punkt auf einer Axe Ox. Wir tragen auf dieser Axe vom Punkte O aus eine Strecke $ON = S_n$ ab; alsdann machen wir $AN = NA' = \sigma$. Wir nehmen sodann $OP = S_{n+p}$, so wird der Punkt P zwischen A und A' fallen.

Fig. 21.

Also wird die Summe S_{n+p} der $n+p$ ersten Glieder unserer Reihe durch eine Strecke dargestellt, deren Endpunkt P immer zwischen zwei gegebene Punkte A und A' fällt. Sie ist also endlich; aber noch mehr, sie ist auch bestimmt, denn die Entfernung AA' kann durch Vergröfserung von n kleiner gemacht werden, als jede gegebene Länge.

Folgerung I. Eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ ist konvergent, sobald die absoluten Beträge ihrer Glieder eine konvergente Reihe bilden.

Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe der absoluten Beträge der u, also ist für jedes p:

$$\lim_{n=\infty} \{ |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p-1}| \} = 0.$$

Nach Nr. 4 ist aber:

$$0 \leqq |u_n + \cdots + u_{n+p-1}| \leqq |u_n| + \cdots + |u_{n+p-1}|$$

und mithin ist nach Nr. 25 auch

$$\lim_{n-\infty} |u_n + \cdots + u_{n+p-1}| = 0.$$

Mithin ist nach Nr. 102 auch die Reihe der u konvergent.

Wir werden später sehen, dafs es sehr wohl Reihen giebt, die konvergieren, ohne dafs die Reihe der absoluten Beträge konvergiert. Die konvergenten Reihe zerfallen daher in zwei Klassen:

Solche, bei denen die Reihe der absoluten Beträge konvergiert; diese heifsen *unbedingt konvergent.*

Solche, bei denen die Reihe der absoluten Beträge divergiert; diese heifsen *bedingt konvergent.*

Folgerung II. Wenn von einer bestimmten Stelle ab die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, und die Beträge der Glieder abnehmen und nach 0 *konvergieren, so ist die Reihe konvergent.*

Die Konvergenz der Reihenglieder nach 0 ist, wie gezeigt wurde, ein notwendiges Erfordernis für die Konvergenz jeder Reihe. Dasselbe reicht aber im allgemeinen für die Konvergenz nicht aus, auch dann nicht, wenn dabei die Reihenglieder von einer Stelle ab durchaus abnehmen, sodafs jedes dem Betrage nach kleiner ist als das vorhergehende. In dem Falle, den wir jetzt untersuchen, sind die ausgesprochenen Bedingungen hinreichend.

Denn wenn von dem n^{ten} Gliede an die Reihenglieder abwechselnd positiv und negativ sind, so hat man:

$$\pm(u_n + u_{n+1} + \cdots u_{n+p-1}) = |u_n| - |u_{n+1}| + |u_{n+2}| - \cdots \pm |u_{n+p-1}|.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann auf zweierlei Weise folgendermafsen angeordnet werden:

$$(|u_n| - |u_{n+1}|) + (|u_{n+2}| - |u_{n+3}|) + \cdots$$

oder:

$$|u_n| - (|u_{n+1}| - |u_{n+2}|) - (|u_{n+3}| - |u_{n+4}|) - \cdots$$

Die erste Summe ist, wie auch p gewählt sein mag, positiv, also gröfser als 0; die zweite ist jedenfalls kleiner als $|u_n|$. Also ist

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < |u_n|$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty}(u_n + \cdots + u_{n+p-1}) = 0.$$

103. Ein neues Konvergenzkriterium. Es giebt kein allgemeines Kriterium, nach welchem man bei jedweder gegebenen Reihe entscheiden kann, ob sie konvergent oder divergent ist.

Man mufs vielmehr in jedem einzelnen Falle die zu betrachtende Reihe mit anderen Reihen zu vergleichen suchen, deren Konvergenz oder Divergenz feststeht, und in dieser Hinsicht läfst sich ein Satz beweisen, aus welchem wir mehrere wichtige Folgerungen ziehen werden, und der sich auf unbedingt konvergente Reihen bezieht.

Lehrsatz III. Wenn in der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *von einer bestimmten Stelle an immer* $|u_k| < v_k$ *ist, und die Reihe* $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ *konvergiert, so ist die Reihe der* u *unbedingt konvergent.*

Wenn dagegen die Reihe der v *divergiert und von einer bestimmten Stelle an* $|u_k| > v_k$ *ist, so ist auch die Reihe der* $|u|$ *divergent.*

Im ersten Falle konvergiert die Summe

$$v_n + v_{n+1} + \cdots v_{n+p-1}$$

nach 0, bei jedem Werte von p, wenn n unbegrenzt wächst. Also hat auch die Summe

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \cdots |u_{n+p-1}|,$$

welche aus kleineren Summanden besteht, ebenfalls die 0 zur Grenze, und mithin konvergiert die Reihe der absoluten Beträge der u. Die ursprüngliche Reihe der u konvergiert also unbedingt.

Im zweiten Falle kann die Reihe $|u_0| + |u_1| + \cdots$ nicht konvergent sein, denn sonst müfste nach dem eben Bewiesenen auch die Reihe der v konvergieren, was der Annahme zuwiderläuft.

Folgerung I. Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *ist unbedingt konvergent, wenn für alle Werte von* n, *die gröfser sind als eine bestimmte Zahl, der Quotient* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *kleiner bleibt als eine Zahl* k, *die selbst eine positive Gröfse kleiner als* 1 *ist.*

Denn für hinreichend grofse Werte von n wird der Voraussetzung nach

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k, \quad \left|\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\right| < k, \quad \cdots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < k,$$

also, wie durch Multiplikation hervorgeht,

$$\left|\frac{u_{n+p}}{u_n}\right| < k^p \text{ oder } |u_{n+p}| < |u_n|\, k^p.$$

Hieraus folgt, daſs die Glieder der vorgelegten Reihe von einer bestimmten Stelle ab, nämlich

$$|u_n|, |u_{n+1}|, \ldots |u_{n+p}|, \ldots$$

kleiner sind als die Glieder der Reihe

$$|u_n|, |u_n k|, \ldots |u_n k^p|, \ldots$$

Diese letztere aber ist eine konvergente geometrische Progression; also ist auch die Reihe der $|u|$ konvergent, mithin die der u unbedingt konvergent.

Folgerung II. Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, *ist unbedingt konvergent, wenn das Verhältnis* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *bei beliebig wachsendem Werte von* n *einer bestimmten Grenze* α *zustrebt, deren Betrag kleiner ist als* 1.

Denn wenn das Verhältnis $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ eine Grenze α besitzt, so wird die Differenz $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha\right|$ schlieſslich kleiner als jede gegebene Gröſse, für alle Werte von n, die gröſser sind, als eine bestimmte Zahl. Man kann also eine positive Gröſse k zwischen α und 1 bezeichnen, derart, daſs von einem bestimmten Werte von n ab das Verhältnis

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k$$

bleibt. Dies aber ist die Bedingung des vorigen Satzes, und folglich ist die vorgelegte Reihe konvergent.

Bemerkung. Hat das Verhältnis $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ eine Grenze gröſser als 1, so ist die Reihe der u stets divergent, weil ihre Glieder von einer bestimmten Stelle an beständig wachsen und also nicht, wie nach Nr. 101 erforderlich, nach 0 konvergieren. Wenn aber $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$ wird, so kann die Reihe konvergent sein; der letzte Satz sagt über diesen Fall nichts aus.

Folgerung III. Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *ist unbedingt konvergent, wenn für die Werte von* n, *welche gröſser* *sind als eine bestimmte Zahl,* $\sqrt[n]{|u_n|} < k$ *bleibt, wobei* k *eine positive Gröſse kleiner als* 1 *ist.*

Denn hat man von einer bestimmten Stelle ab

$$|u_n| < k^n,$$

so sind von dieser Stelle an die $|u|$ kleiner als die entsprechenden Glieder der geometrischen Progression

$$k^n,\ k^{n+1},\ k^{n+2}, \ldots$$

Folgerung IV. Die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, *ist unbedingt konvergent, wenn* $\sqrt[n]{|u_n|}$ *einer bestimmten Grenze zustrebt, die kleiner ist als* 1.

Denn man kann in diesem Falle eine Gröſse k zwischen α und 1 bestimmen, so daſs

$$\sqrt[n]{|u_n|} < k$$

bleibt, für alle Werte von n, die gröſser als eine bestimmte Zahl sind.

104. Die Reihe $\frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \cdots$. Wir betrachten die Reihe

$$\frac{1}{1^{1+\varrho}} + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \cdots \frac{1}{n^{1+\varrho}} + \cdots,$$

wobei ϱ eine gegebene Zahl bedeutet. Das Verhältnis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\varrho}$$

hat den Wert 1 zur Grenze, und also reicht der zweite Folgesatz des vorigen Paragraphen für diesen Fall nicht aus. Auch der vierte Satz giebt keinen Aufschluſs. Denn es ist

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{1+\varrho}{n}},\ \log \sqrt[n]{u_n} = -(1+\varrho)\frac{\log n}{n}.$$

Der Quotient $\frac{\log n}{n}$ konvergiert nach 0, wie man vermittelst einer Regel, die später bewiesen werden wird, finden kann, und folglich hat $\sqrt[n]{u_n}$ die Grenze 1. Eine geschickte Anwendung des Lehrsatzes der No. 103 läſst uns dagegen bestimmen, in welchen Fällen die vorgelegte Reihe konvergiert.

Setzt man:

$$(1)\quad\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{1^{1+\varrho}}, \\ u_1 = \dfrac{1}{2^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{3^{1+\varrho}}, \\ u_2 = \dfrac{1}{4^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{5^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{6^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{7^{1+\varrho}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = \dfrac{1}{(2^m)^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{(2^m+1)^{1+\varrho}} \cdots \dfrac{1}{(2^{m+1}-1)^{1+\varrho}}, \end{cases}$$

so hat man, wie leicht zu sehen, die Beziehungen:

$$u_1 < 2 \cdot \frac{1}{2^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{2^\varrho},$$

$$u_2 < 4 \cdot \frac{1}{4^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{4^\varrho} = \frac{1}{(2^\varrho)^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_m < 2^m \cdot \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{(2^\varrho)^m},$$

folglich sind in der Reihe

$$u_0, u_1, u_2 \dots u_m \dots$$

die Glieder kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1, \frac{1}{2^\varrho}, \frac{1}{(2^\varrho)^2}, \cdots \frac{1}{(2^\varrho)^m}.$$

Diese letztere aber ist konvergent, wenn ϱ gröfser als 0 ist. Folglich konvergiert auch die vorgelegte Reihe bei jedem positiven Werte von ϱ.

Bildet man an Stelle der Formeln (1):

$$u_0 = \frac{1}{1^{1+\varrho}},$$

$$u_1 = \frac{1}{2^{1+\varrho}},$$

$$u_2 = \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{4^{1+\varrho}},$$

$$u_3 = \frac{1}{5^{1+\varrho}} + \frac{1}{6^{1+\varrho}} + \frac{1}{7^{1+\varrho}} + \frac{1}{8^{1+\varrho}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_m = \frac{1}{(2^{m-1}+1)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(2^{m-1}+2)^{1+\varrho}} \cdots \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

so hat man:

$$u_2 > 2 \cdot \frac{1}{4^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\varrho)^2},$$

$$u_3 > 4 \cdot \frac{1}{8^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\varrho)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_m > 2^{m-1} \cdot \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}}, \quad \text{oder} \quad > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\varrho)^m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

also sind die Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_m + \cdots$$

größer als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\varrho} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^3 + \cdots$$

Diese aber ist divergent, wenn ϱ gleich 0 oder auch negativ ist, also ist auch bei diesen Werten von ϱ die vorgelegte Reihe divergent.

105. Die Reihe $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ und verwandte Reihen. *Die Reihen:*

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots,$$

$$1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + - \cdots$$

$$x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdots 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} + - \cdots$$

sind unbedingt konvergent für jeden Wert von x.

Denn das Verhältnis der Beträge zweier aufeinander folgender Glieder hat in diesen Reihen den Wert

$$\frac{|x|}{n}, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{n(n+1)},$$

und diese Größen konvergieren bei jedem endlichen Werte von x nach 0, wenn n unendlich wächst.

106. Die Reihe $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ *Die Reihe*

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

konvergiert unbedingt für alle x des Intervalles $-1 < x \leqq 1$.

Für $x = 1$ konvergiert sie bedingt; für jedes andere x ist sie divergent.

Denn hier ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{x}{1 + \frac{1}{n}}$$

und die Grenze für $n = \infty$ ist $-x$. Dafs die Reihe konvergiert oder divergiert, je nachdem der Betrag von x gröfser oder kleiner als 1 wird, lehrt Nr. 103. Für $x = +1$ konvergiert die Reihe, weil ihre Glieder mit wechselndem Zeichen abnehmen und nach 0 konvergieren (Nr. 102, Folgerung II), für $x = -1$ dagegen divergiert sie (Nr. 104).

107. Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. Wir werden jetzt an einem Beispiele zeigen, dafs bei bedingt konvergenten Reihen die Summe sich bei anderer Anordnung der Summanden ändern kann.

In der That; betrachten wir die Reihe

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

welche konvergiert (Nr. 102); sie ist aber bedingt konvergent (Nr. 102); denn sie wird divergent, wenn man allen Gliedern das positive Zeichen giebt (Nr. 104). Wir bilden eine zweite Reihe mit denselben Gliedern, indem wir die negativen derart verschieben, dafs einem jeden derselben zwei positive vorangehen und nachfolgen. Diese zweite Reihe wird also

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Sie ist konvergent, hat aber nicht denselben Summenwert wie die erste.

Vereinigt man nämlich drei aufeinander folgende Glieder

$$\frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{2n},$$

so ist ihre Summe

$$\frac{8n-3}{32n^3 - 32n^2 + 6n},$$

also kleiner als $\frac{1}{n^2}$, weil n gleich oder gröfser ist als 1. Schreibt man also die obige Reihe in dieser Weise, so bleiben ihre Glieder stets kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

und da diese nach Nr. 104 konvergent ist, so ist auch die Reihe (2) konvergent.

Brechen wir nun die Reihe (1) mit dem Gliede $-\frac{1}{4n}$ und die Reihe (2) mit dem Gliede $-\frac{1}{2n}$ ab und bezeichnen wir mit S_n und S'_n die Summen bis zu diesen Gliedern, so ist

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n},$$

$$S'_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right).$$

Da man S_n auch unter der Form

$$S_n = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m}\right)$$

betrachten kann, so wird

$$S'_n - S_n = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m} - \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right).$$

Läſst man nun n beliebig wachsen, so wird, wenn man die Grenze von S_n mit S bezeichnet, auch

$$\lim_{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = S.$$

Mithin ist

$$\lim S'_n - S = \frac{1}{2} S, \text{ oder } \lim S'_n = \frac{3}{2} S.$$

108. Die Reihe $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots.$

Es kann auch eintreten, daſs von zwei Reihen, welche mit den nämlichen Gliedern und mit den nämlichen Vorzeichen gebildet sind, die eine konvergent, die andere divergent ist. Die beiden Reihen:

(1) $$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - + \cdots;$$

(2) $$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

bieten hierfür ein Beispiel. Hier sind die absoluten Werte der einzelnen Glieder die Quadratwurzeln aus den absoluten Werten der entsprechenden Glieder in den Reihen (1) und (2) des vorigen Paragraphen, und die Vorzeichen sind dabei dieselben wie dort.

Die Reihe (1) ist konvergent nach Nr. 102, Folgerung II. Die zweite Reihe aber ist divergent. Denn sind S_n und S'_n die Summen, welche man erhält, indem man die Reihen mit dem Gliede $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$ abbricht, so ist

$$S'_n - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{4n-1}}.$$

Das letzte Glied der n Summanden auf der rechten Seite ist kleiner als die vorhergehenden; folglich ist

$$S'_n - S_n > \frac{n}{\sqrt{4n-1}}, \text{ oder } > \sqrt{n}\sqrt{\frac{n}{4n-1}} = \sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{4-\frac{1}{n}}}.$$

Der Faktor $\sqrt{\frac{1}{4-\frac{1}{n}}}$ hat die Grenze $\frac{1}{2}$ und der Faktor $\sqrt{n}$ wird unendlich für $n = \infty$. Folglich wächst die Differenz $S'_n - S_n$ über jede Grenze, und dasselbe gilt daher auch für S'_n.

Bei einer bedingt konvergenten Reihe bilden die Glieder mit positivem Zeichen, und ebenso die Glieder mit negativem Zeichen für sich gesondert betrachtet divergente Reihen. Denn bezeichnet man in einer solchen Reihe die positiven Glieder in der gegebenen Aufeinanderfolge mit

$$v_1, v_2, v_3 \ldots$$

die negativen durch

$$-w_1, -w_2, -w_3 \ldots,$$

so mufs sowohl die Grenze von $S_n = v_1 + v_2 + \cdots v_n$ als auch die Grenze von $S'_n = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots w_n$ unendlich sein. Wären nämlich beide endlich, so würde auch die ursprüngliche Reihe nach Gleichmachung der Zeichen konvergieren, denn es würde alsdann

$$|u_1| + |u_2| + \cdots |u_n| = S_{n_1} + S'_{n_2}$$

sein, wobei n_1 und n_2 die Anzahl der positiven und die der negativen Glieder in der Reihe u_1 bis u_n bedeuten. Also wäre

$$\lim \{|u_1| + \cdots |u_n|\} = \lim S_{n_1} + \lim S'_{n_2}.$$

Wäre aber der eine Grenzwert endlich, der andere unendlich, so wäre

$$\lim \{u_1 + u_2 + \cdots u_n\} = \lim S_{n_1} - \lim S'_{n_2},$$

d. h. die ursprüngliche Reihe könnte auch nicht bedingt konvergieren. Man kann leicht beweisen, dafs sich bei jeder bedingt konvergenten Reihe die Glieder so anordnen lassen, dafs der Summenwert der neu gebildeten unendlichen Reihe eine beliebig gewählte Gröfse ist.

109. Die Summe einer unbedingt konvergenten Reihe. Die Einzelheiten, auf welche wir zuletzt eingegangen sind, waren notwendig, um die Bedeutung des folgenden Theoremes richtig zu schätzen, welches sich auf unbedingt konvergente Reihen bezieht.

Lehrsatz IV. Wenn eine unendliche Reihe unbedingt konvergiert, so kann man die Reihenfolge der Glieder beliebig ändern, ohne dafs die Konvergenz oder der Summenwert der Reihe irgend eine Änderung erleidet.

Sind

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$$

die Glieder der unbedingt konvergenten Reihe, so ist die Behauptung, dafs die Reihe

$$(2) \qquad u_\alpha, u_\beta, u_\gamma \ldots u_\omega \ldots,$$

in welcher die Indices $\alpha, \beta, \ldots \omega$ nach irgend einem anderen Gesetze, als dem der natürlichen Zahlenreihe, aufeinanderfolgen, konvergent ist und die nämliche Summe hat wie die Reihe (1). Wählen wir in der Reihe (2) die Anzahl der Glieder so grofs, dafs die n ersten Glieder der Reihe (1) darin enthalten sind, so ist

$$(3) \qquad u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots u_\omega = u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1} + R,$$

wenn man mit R die Summe aller der Glieder auf der linken Seite versteht, deren Index gröfser ist als $n - 1$. Diese Glieder seien mit $u_p, u_q, u_r \ldots u_s$ bezeichnet, so dafs

10*

$$R = u_p + u_q + u_r \cdots + u_s$$

ist. Der Betrag von R ist nicht gröfser als die Summe

$$|u_p| + |u_q| + \cdots + |u_s|.$$

Bezeichnet man nun mit R_n die Summe:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots,$$

so hat diese einen endlichen Wert und ihr Limes für $n = \infty$ ist null. Da nun sämtliche Indices $p, q \ldots s$ gröfser sind, als $n - 1$, so ist auch

$$|R| < R_n \quad \text{oder} \quad |R| = \theta \cdot R_n,$$

wobei θ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bedeutet. Wenn also S_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe (1) darstellt, so wird die Gleichung (3):

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots u_\omega = S_n \pm \theta R_n.$$

Wächst n unbegrenzt, so wird R_n gleich 0, weil die Reihe (2) der Voraussetzung nach konvergiert; $\lim S_n$ ist aber gleich S dem Summenwert der Reihe (1). Folglich konvergiert auch die Summe

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots u_\omega$$

nach dem Werte S, wenn man die Anzahl der Glieder unbegrenzt vermehrt.

110. Multiplikation zweier Reihen. *Sind*

$$(1) \qquad u_0, u_1, u_2 \ldots u_{n-1} \ldots,$$

$$(2) \qquad v_0, v_1, v_2 \ldots v_{n-1} \ldots$$

zwei unbedingt konvergente Reihen, mit den Summenwerten S und S', so ist auch die Reihe

$$(3) \qquad w_0, w_1, w_2 \ldots w_{n-1} \cdots$$

deren allgemeines Glied w_m den Wert hat:

$$w_m = u_0 v_m + u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} + \cdots u_{m-1} v_1 + u_m v_0$$

konvergent, und ihre Summe ist gleich dem Produkte SS', gebildet aus den Summen der beiden ersten Reihen.

Wir bezeichnen mit S_n, S'_n, S''_n die folgenden Werte:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_{n-1},$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots v_{n-1},$$

$$S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots w_{n-1},$$

also

$$S''_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots$$
$$+ \cdots (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \cdots u_{n-1} v_0),$$

und nehmen zunächst an, dafs alle Glieder der Reihen (1) und (2) positiv sind. Das Produkt $S_n S'_n$ wird alle Glieder von S''_n enthalten, aufserdem aber noch andere positive Terme. Mithin ist

$$S_n S'_n > S''_n.$$

Bezeichnet man weiter mit m die gröfste ganze Zahl, welche in $\frac{n}{2}$ enthalten ist, also $\frac{n}{2}$, oder $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade, so bilden, wie leicht einzusehen ist, die Glieder des Produktes $S_m S'_m$ einen Teil der Glieder, aus denen S''_n besteht; demnach ist

$$S_m S'_m < S''_n.$$

Läfst man jetzt n unendlich werden, so wird auch m unendlich. Die Gröfsen S_n und S_m konvergieren nach der Grenze S, die Gröfsen S'_n und S'_m nach der Grenze S'. Also ist S''_n zwischen zwei Gröfsen eingeschlossen, deren Grenze das Produkt SS' ist; mithin hat (Nr. 25) auch S''_n die Grenze SS' und es ist:

$$\lim_{n=\infty} S''_n = SS'.$$

Wir nehmen jetzt weiter an, dafs die Reihen (1) und (2) positive sowohl wie negative Glieder enthalten, dafs sie aber konvergent bleiben, auch wenn man jedes negative Glied durch seinen absoluten Wert ersetzt.

Dann wird

$$S_n S'_n - S''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \cdots$$
$$+ \cdots (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \cdots u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1})$$

und wir haben eben gesehen, dafs diese Gröfse nach 0 konvergiert, bei beliebig wachsendem Werte von n, in dem Falle, wo die Gröfsen u und v sämtlich positiv sind. Unserer Annahme nach bleiben aber die Reihen (1) und (2) konvergent, wenn man die Vorzeichen der negativen Glieder ändert; also konvergiert die vorstehende Summe mit $\frac{1}{n}$ nach 0, wenn man hier jedes Glied u oder v durch seinen absoluten Wert ersetzt. Solch eine Änderung kann aber den Betrag der betrachteten Summe nicht verkleinern, und folglich ist auch

$$\lim_{n=\infty} (S_n S'_n - S''_n) = 0.$$

Also hat auch jetzt S''_n eine bestimmte Grenze, und es ist

$$\lim_{n=\infty} S''_n = SS'.$$

Bemerkung. Der bewiesene Satz braucht nicht mehr zu gelten, wenn die absoluten Werte der Reihen (1) und (2) keine konvergenten Reihen bilden. Man überzeugt sich hiervon, indem man als Reihen (1) und (2) die folgende wählt:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

Die Reihe (3) wird hier:

$$1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{1}{3}\right] + \cdots$$

und diese Reihe ist divergent, weil ihre Glieder nicht nach 0 konvergieren; denn ein allgemeines Glied mit positivem Zeichen wird:

$$\frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \frac{2}{\sqrt{n-1 \cdot n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n-2 \cdot n+2}} + \cdots$$
$$+ \cdots \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 2n-2}} + \frac{2}{\sqrt{1 \cdot 2n-1}} > \frac{2n-1}{\sqrt{n \cdot n}} = 2 - \frac{1}{n}.$$

§ 2. Der Taylorsche Satz für Funktionen Einer Veränderlichen.

111. Der Taylorsche Satz für einen Spezialfall. Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen von x, welche für alle Werte von x zwischen x_0 und $x_0 + h$ die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllen; d. h. die nebst ihren ersten Ableitungen in dem ganzen Intervall bestimmte endliche Werte haben. Wird die Ableitung $F'(x)$ im Innern des Intervalles x_0 bis $x_0 + h$ weder null noch unendlich, so ist nach Nr. 31:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{F(x_0+h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}.$$

Dabei bedeutet h_1 eine zwischen 0 und h gelegene Gröfse. Ist nun

$$f(x_0) = 0 \text{ und } F(x_0) = 0,$$

so reduziert sich diese Gleichung auf die Form

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)}.$$

Besitzen nun auch $f''(x)$ und $F''(x)$ in dem ganzen Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ bestimmte endliche Werte, so läfst sich unser voriger Satz von Neuem anwenden, wenn wir annehmen, dafs auch

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad F'(x_0) = 0$$

ist. Es wird also:

$$\frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + h_2)}{F''(x_0 + h_2)},$$

wobei h_2 eine Gröfse zwischen 0 und h_1 bezeichnet.

Wir nehmen nun allgemein an, dafs die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ und ebenso alle ihre Ableitungen bis einschliefslich derjenigen n^{ter} Ordnung für alle Werte von x zwischen x_0 und $x_0 + h$ (einschliefslich dieser Grenzen) bestimmte endliche Werte haben.

Ist dann

$$f(x_0) = 0, \; f'(x_0) = 0 \cdots, \; f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$F(x_0) = 0, \; F'(x_0) = 0 \cdots, \; F^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

so ergiebt sich auf Grund der Gleichung (1):

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + h_2)}{F''(x_0 + h_2)} \cdots = \frac{f^{(n)}(x_0 + h_n)}{F^{(n)}(x_0 + h_n)}.$$

$h, h_1, h_2, \ldots h_n$ bezeichnen Gröfsen von einerlei Vorzeichen, deren absolute Werte eine abnehmende Reihe bilden. Bedeutet θ eine Gröfse zwischen 0 und $+1$, so kann man

$$h_n = \theta h$$

schreiben, und es wird

$$\text{(2)} \qquad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}.$$

Setzen wir jetzt im Besonderen

$$F(x) = (x - x_0)^n,$$

also

$$F^{(m)}(x) = n(n-1)\cdots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}$$

und

$$F^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!,$$

so sind alle Bedingungen, die für $F(x)$ aufgestellt wurden, erfüllt, und die Gleichung (2) ergiebt

$$(3) \qquad f(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h).$$

Diese Gleichung ist es, die wir bilden wollten. Sie liefert uns den Satz, der ein Spezialfall des Taylorschen Satzes ist:

Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis x_0+h nebst ihren Ableitungen bis einschliefslich zur n^{ten} Ordnung bestimmte endliche Werte hat, und wenn an der Stelle $x=x_0$ die Funktion und ihre $n-1$ ersten Ableitungen verschwinden, so ist:

$$f(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

wo θ eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet.

112. Der allgemeine Taylorsche Satz. Es sei $F(x)$ eine Funktion der Variabelen x, welche nebst ihren n ersten Ableitungen für alle Werte von x von x_0 bis x_0+h bestimmte endliche Werte hat. Bezeichnet man $\varphi(x)$ das Polynom $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) = F(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0) \\ + \cdots \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0), \end{aligned}$$

so ist die Ableitung m^{ter} Ordnung dieses Polynomes:

$$\varphi^{(m)}(x) = F^{(m)}(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F^{(m+1)}(x_0) + \cdots \frac{(x-x_0)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} F^{(n-1)}(x_0)$$

und setzt man $x = x_0$ in diesen beiden Gleichungen, so ist

$$\varphi(x_0) = F(x_0), \quad \varphi^{(m)}(x_0) = F^{(m)}(x_0).$$

Hieraus folgt, dafs die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen auf die Funktion

$$f(x) = F(x) - \varphi(x)$$

anwendbar ist; denn diese Funktion erfüllt alle Bedingungen des vorigen Satzes. Es ist also, weil $\varphi^{(n)}(x) = 0$ wird:

$$F(x_0+h) - \varphi(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x_0+\theta h), \quad (0<\theta<1).$$

Der Wert von $\varphi(x_0 + h)$ ist durch die Gleichung (1) bestimmt, und es wird

$$(2)\quad \begin{aligned} F(x_0+h) = F(x_0) + \frac{h}{1} F'(x_0) + \frac{h^2}{2!} F''(x_0) \\ + \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x_0 + \theta h). \end{aligned}$$

Wir wollen x_0 durch x ersetzen und schreiben:

$$(3)\quad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x) + R_n.$$

Dabei ist:

$$(4)\quad R_n = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \theta h).$$

Die Form dieses Restes heifst die *Lagrange*'sche.

Die Gleichungen (3) und (4) sind offenbar nur Verallgemeinerungen unseres Mittelwertssatzes in Nr. 28. Dieser entsteht, wenn wir $n = 1$ setzen. Indem wir die Voraussetzungen rekapitulieren, erhalten wir:

Verallgemeinerter Mittelwertssatz. Hat die Funktion $F(x)$ in dem Intervalle von x bis $x + h$ nebst ihren n ersten Ableitungen bestimmte endliche Werte, so existiert immer ein positiver echter Bruch θ, so dafs

$$F(x+h) = F(x) + F'(x) \cdot \frac{h}{1!} + F''(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots + \\ + F^{(n-1)}(x) \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + F^{(n)}(x + \theta h) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

ist.

Bleiben nun die Voraussetzungen, die soeben ausgesprochen wurden, erhalten, wie grofs auch n werden mag und ist aufserdem für alle x des Intervalles

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

so ist:

$$(5)\quad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} \cdot F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots$$

Diese Gleichung heifst die *Taylor*sche. Sie führt zu dem Satze:

Taylorscher Satz. Besitzt $F(x)$ in dem ganzen Intervalle von x bis $x + h$ nebst seinen sämtlichen Ableitungen be-

stimmte endliche Werte und ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) = 0$, *so läfst sich* $F(x+h)$ *in eine konvergente nach ganzen positiven Potenzen von* h *fortschreitende Reihe entwickeln:*

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots$$

113. Cauchysche Form des Restes. Dem Reste R_n kann man noch eine andere Form geben, welche oft von Nutzen ist. Um sie zu erhalten, ersetze man h in der Gleichung (3) durch $z - x$. Der Rest R_n wird eine Funktion von x und z, aber wir bezeichnen ihn einfach mit $f(x)$. Man hat alsdann

$$(6)\quad \begin{aligned} F(z) = F(x) &+ \frac{z-x}{1} F'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!} F''(x) \\ &+ \cdots \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x) + f(x). \end{aligned}$$

Bildet man nun die Ableitungen auf beiden Seiten in Bezug auf x, indem man z als konstant ansieht, so erhält man, wenn alle Reduktionen ausgeführt sind, die Gleichung

$$(7)\quad f'(x) = -\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(x).$$

Die Funktion $f(x)$, welche durch die Gleichung (6) definiert ist, erfüllt nach unserer Voraussetzung die Forderung $\mathfrak{A}$ für alle Werte x von x bis $x + h = z$; man hat also nach Nr. 28, wenn man mit θ eine Gröfse zwischen 0 und 1 bezeichnet:

$$f(z) - f(x) = (z-x) f'[x + \theta(z-x)].$$

Gemäfs der Gleichung (6) verschwindet aber $f(x)$ für $x = z$. Also ist

$$(8)\quad f(x) = -(z-x) f'[x + \theta(z-x)].$$

Die Gleichung (7) ergiebt aber, wenn man x durch $x + \theta(z-x)$ ersetzt, die Relation:

$$f'[x+\theta(z-x)] = -\frac{(z-x)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}[x+\theta(z-x)]$$

und folglich ist nach Gleichung (8):

$$(9)\quad f(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(z-x)^n}{(n-1)!} F^{(n)}[x+\theta(z-x)].$$

Führt man wiederum an Stelle von z den Wert $x+h$ ein, so folgt:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} F^{(n)}(x+\theta h). \tag{10}$$

Die Gröfse, welche hier mit θ bezeichnet ist, ist nicht dieselbe wie in der Gleichung (4); aber wie diese liegt sie zwischen 0 und 1.

114. Die Differenz ausgedrückt durch Differentiale. Setzt man

$$y = F(x)$$

und

$$\Delta y = F(x+h) - F(x),$$

so sind die Gröfsen

$$hF'(x),\ h^2 F''(x),\ h^3 F'''(x) \ldots$$

genau die auf einander folgenden Differentiale:

$$dy,\ d^2y,\ d^3y \ldots$$

der Funktion y, sobald $dx = h$ gesetzt wird. Bezeichnet man ferner mit

$$d'^n y$$

die Gröfse $h^n F^{(n)}(x+\theta h)$, welche das n^{te} Differential von y ist, nur gebildet für einen Wert der Variabelen zwischen x und $x+h$, so erhält die Gleichung (3) der Nr. 112 die Form:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \cdots \frac{d^{n-1} y}{(n-1)!} + \frac{d'^n y}{n!}.$$

Nur eine andere Schreibweise des *Taylor*schen Satzes ist dann diese:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \cdots$$

Wir werden später sehen, dafs diese Gleichung auch dann richtig bleibt, wenn y eine Funktion von mehreren Veränderlichen ist.

115. Diskussion der Gültigkeitsbedingungen des Taylorschen Satzes.

1. Die Gleichung (3) der Nr. 112 kann bis zu einem bestimmten Werte von n richtig sein, für gröfsere Werte aber ungiltig werden. Es sei z. B.

$$F(x) = (x - x_0)^\mu,$$

wobei μ eine positive gebrochene Zahl bedeutet. Ist m die gröfste ganze in μ enthaltene Zahl, so gilt die Gleichung (3) für $x = x_0$ nur, solange n nicht gröfser ist als m; denn die $m + 1^{\text{te}}$ Ableitung von $F(x)$ wird für $x = x_0$ unendlich.

2. Um die Giltigkeit der Taylorschen Formel behaupten zu können, genügt es nicht, dafs die rechte Seite eine konvergente Reihe ist. Wenn man z. B.

$$F(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

setzt, so hat man für jeden Wert von n

$$F^{(n)}(x_0) = 0,$$

weil die Funktion $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ ebenso wie alle ihre Ableitungen für $x = x_0$ verschwindet, was in Nr. 131, 7 bewiesen werden wird. Also konvergiert hier die rechte Seite der Gleichung (5) in 112 nach der Grenze 0, und nicht nach $F(x_0 + h) = e^{-\frac{1}{h^2}}$. Für die Giltigkeit der allgemeinen Gleichung mufs eben der Nachweis erbracht sein, dafs der Rest R_n nach der Grenze 0 konvergiert.

3. Bricht man die Taylorsche Reihe bei irgend einem Gliede

$$u_n = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x)$$

ab, welches nicht null ist, so kann man h so klein wählen, dafs dieses Glied seinem absoluten Werte nach den Rest R_n übertrifft. Denn es ist: $R_{n-1} = u_n + R_n$ oder:

$$\frac{R_n}{u_n} = \frac{R_{n-1} - u_n}{u_n} = \frac{F^{(n-1)}(x + \theta h) - F^{(n-1)}(x)}{F^{(n-1)}(x)}.$$

Dieser Quotient wird mit h null, weil $F^{(n-1)}(x)$ nach Nr. 27 stetig ist. Er wird also kleiner als irgend eine gegebene Gröfse, wenn man h einen hinreichend kleinen Wert beilegt.

4. Wenn die n^{te} Ableitung der Funktion $F(x)$ für alle n und für alle x des Intervalles von x bis $x + h$ absolut kleiner

bleibt als eine feste Zahl, so gilt auch die Taylorsche Entwickelung. Denn der Restausdruck kann in der Form

$$R_n = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n} F^{(n)}(x + \theta h)$$

dargestellt werden. Wie grofs auch der gegebene Wert von h sein mag, die Anzahl i derjenigen Quotienten

$$\frac{h}{1}, \quad \frac{h}{2}, \quad \frac{h}{3} \cdots,$$

welche gröfser sind als eine gegebene Zahl α, ist eine begrenzte. Bezeichnen wir also mit P_n das Produkt dieser i Quotienten, multipliziert mit der Gröfse $F^{(n)}(x + \theta h)$, deren Betrag, wie grofs auch n werden mag, zufolge unserer Annahme stets kleiner bleibt als eine feste Zahl, so ist leicht zu ersehen, dafs der Betrag des Restes R_n kleiner ist als der Betrag des Produktes $P_n \alpha^{n-i}$. Man kann nun für α eine beliebige Gröfse kleiner als 1 wählen; dann konvergiert α^{n-i} nach 0, während n unbegrenzt wächst, und P_n behält einen endlichen Wert. Also hat R_n die Grenze 0.

116. Die Mac-Laurinsche Reihe. Setzt man in der Gleichung (3) von 112 $x = 0$ und schreibt man x an Stelle von h, so folgt

$$(1) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \cdots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + R_n,$$

zugleich ergeben die Formeln (4) und (10) von Nr. 112 und 113:

$$(2) \qquad R_n = \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(\theta x)$$

und

$$(3) \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} x^n F^{(n)}(\theta x).$$

θ bezeichnet in beiden Formeln eine Gröfse zwischen 0 und 1. Die Gleichung (1) ist unter der Bedingung erwiesen, dafs $F(x)$ und seine n ersten Ableitungen in dem Intervalle von 0 bis x bestimmte endliche Werte haben.

Genügen *alle* Ableitungen der Funktion $F(x)$ dieser Bedingung, und hat der Rest R_n bei unbegrenzt wachsenden Werten von n die Grenze 0, so giebt die Gleichung (1) eine Entwickelung der Funktion $F(x)$ in eine konvergente, nach ganzen positiven Potenzen von x geordnete Reihe, nämlich

$$(4)\qquad F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F'''(0) + \cdots$$

Dies ist die von *Mac-Laurin* gebildete Reihe; die Gleichungen (2) oder (3) lassen die Grenzen des Fehlers bestimmen, welchen man begeht, indem man die Reihe mit irgend einem Gliede abbricht.

Bemerkung. Die *Mac-Laurin*sche Reihe folgt unmittelbar aus der *Taylor*schen; aber auch das Umgekehrte findet statt. Man erhält die *Taylor*sche Reihe, wenn man die *Mac-Laurin*sche Entwickelung auf die Funktion

$$f(x) = F(x + h)$$

anwendet, und schliefslich in der Formel h mit x vertauscht.

Die Mac-Laurinsche Reihe gilt ebenso wie die Taylorsche sicherlich dann, wenn $F^{(n)}(x)$ für alle n und alle x des Intervalles von 0 bis x absolut kleiner bleibt als eine feste Zahl.

§ 3. Anwendung des Taylorschen Satzes auf die Reihenentwickelungen spezieller Funktionen.

117. Die Exponentialfunktion. Die Entwickelung einer Funktion in eine Potenzreihe hat den Zweck, die Funktion durch einen Ausdruck zu definieren, der zugleich eine einfache Berechnung derselben für die verschiedenen Werte der unabhängigen Variabelen ermöglicht. Mit der Definition, welche wir für e^x, $\log x$, und ebenso $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. aufgestellt haben, ist noch keine zweckmäfsige Methode zur wirklichen Berechnung gegeben.

Die aufeinander folgenden Ableitungen der Funktion e^x sind (Nr. 48) mit der Funktion identisch, und bleiben also endlich, welchen bestimmten Wert man auch der Variabelen x beilegen mag. Hieraus geht hervor (116), dafs die Funktion e^x in eine Potenzreihe, der *Mac-Laurin*schen Formel gemäfs, entwickelbar sein mufs, welche für alle reellen Werte von x konvergiert. Für $x = 0$ reduzieren sich die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen auf 1, und man hat

$$(1)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

Die Konvergenz dieser Reihe wurde schon in Nr. 105

nachgewiesen; soeben haben wir aber auch erkannt, dafs ihre Summe e^x ist.

Der Rest der Reihe vom n^{ten} Gliede ab ist

(2) $$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

Ist a irgend eine positive Zahl, und ersetzt man x durch $x \log a$, wobei der Logarithmus die Basis e hat, so folgt aus der Gleichung $e^{x \log a} = a^x$:

(3) $$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots$$

und

(4) $$R_n = \frac{x^n (\log a)^n}{n!} a^{\theta x}.$$

118. Die Zahl e. Man kann leicht beweisen, dafs die Zahl e nicht nur irrational ist, sondern dafs sie auch, wie *Liouville* zuerst bemerkt hat, nicht Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann. Denn wäre e Wurzel einer solchen Gleichung, so hätte man die Relation

$$\alpha e \pm \frac{\beta}{e} = \pm \gamma,$$

worin α, β, γ positive ganze Zahlen sind. Nun ist aber nach den Formeln (1) und (2):

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta}}{n!} \qquad (0 < \theta < 1),$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-\eta}}{n!} \qquad (0 < \eta < 1).$$

Die Substitution dieser Werte ergiebt also:

$$\alpha \left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta}}{n!}\right]$$

$$\pm \beta \left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-\eta}}{n!}\right] = \pm \gamma.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $(n-1)!$, so folgt

$$\frac{\alpha e^{\theta} \pm \beta (-1)^n e^{-\eta}}{n} = \mu,$$

und hier ist μ eine ganze Zahl. Da man für n eine gerade oder ungerade Zahl wählen kann, so kann man das Vorzeichen von $\pm(-1)^n$ willkürlich fixieren. Wählt man das positive Zeichen, so hat man

$$\frac{\alpha e^{\theta} + \beta e^{-\eta}}{n} = \mu.$$

Diese Gleichung kann nicht bestehen; denn die rechte Seite ist eine ganze Zahl (allenfalls 0), die linke Seite aber ist, da n beliebig grofs gewählt werden kann, ein echter positiver Bruch. Also ist die Behauptung bewiesen.

119. Die Reihen für Sinus und Cosinus. Die Ableitungen n^{ter} Ordnung der Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind (51)

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{bezw.} \quad \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

π ist die Längenzahl der halben Peripherie eines Kreises mit dem Radius 1. Die Ableitungen bleiben also endlich für jeden beliebigen endlichen Wert von x, und hieraus folgt (116), dafs sich die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ nach der *Mac-Laurin*schen Formel für jeden Wert von x entwickeln lassen.

Für $x = 0$ bilden die Werte der Funktion $\cos x$ und ihrer Ableitungen eine periodische Reihe, deren Periode

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0$$

ist; ebenso bilden die Werte der Funktion $\sin x$ und ihrer Ableitungen eine periodische Reihe mit der Periode:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1.$$

Also hat man bei allen reellen Werten von x:

$$(1) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)\,!} + \cdots$$

$$(2) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)\,!} + \cdots$$

Um den Rest der Reihe (1) zu erhalten, wenn man sie mit dem Gliede vom Grade $2m$ abbricht, hat man in der *Lagrange*schen Form für R_n statt n den Wert $2m+2$ zu setzen; dann wird

$$(3) \qquad R_{2m+2} = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)\,!} \cos\left[\theta x + (m+1)\pi\right].$$

Ebenso wird, wenn die zweite Reihe mit dem Gliede vom Grade $2m+1$ geschlossen wird:

$$(4)\quad \begin{aligned} R_{2m+3} &= \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!}\sin\left[\theta x + \frac{2m+3}{2}\pi\right] \\ &= \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!}\cos\left[\theta x + (m+1)\pi\right]. \end{aligned}$$

Ist die Zahl x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten, und giebt man m nach einander die Werte 0, 1, 2, 3 $\cdots$, so wird der Wert von R_{2m+2} oder R_{2m+3} abwechselnd negativ und positiv. Hieraus folgt, dafs man, wenn man die Reihe (1) oder (2) mit dem ersten, mit dem zweiten Gliede u. s. w. abbricht, eine Reihe von Werten erhält, welche abwechselnd gröfser und kleiner sind, als die Werte $\cos x$ und $\sin x$. So ist im Besonderen

$$\cos x < 1, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\sin x < x, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

120. Die Reihe für den Logarithmus. Bezeichnet man mit lx den natürlichen Logarithmus, so ist

$$\frac{dl(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

und allgemein:

$$\frac{d^n l(1+x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Für $x = 0$ reduzieren sich diese Werte bezüglich auf 1 und $(-1)^{n-1}(n-1)!$, $l(1+x)$ wird 0, es ist also

$$(1)\quad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

und nach *Lagrange*:

$$(2)\qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\theta x)^n},$$

oder nach *Cauchy*:

$$(3)\qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}.$$

Wenn also der Rest R_n für unbegrenzt wachsende Werte von n die Grenze 0 hat, so hat man nach der *Mac-Laurin*schen Formel

$$(4)\qquad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert nicht, wenn der Betrag von x gröſser als 1 ist (106). Also kann die Gleichung (4) nicht bestehen, auſser für Werte von x zwischen -1 und $+1$.

Um nun zu entscheiden, ob der Rest die Grenze 0 hat, wollen wir die beiden Fälle, daſs x positiv und daſs es negativ ist, unterscheiden.

1. Ist $x > 0$, so wenden wir die Form (2) des Restes an, nämlich

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Ist nun $x < 1$, so konvergieren beide Faktoren $\frac{1}{n}$ und $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ mit beliebig wachsenden Werten von n nach 0; für $x = 1$ kann es zwar eintreten, daſs der zweite Faktor nicht 0 wird, aber er wird doch nie gröſser als 1. Also wird der Rest R_n schlieſslich 0 und die Gleichung (4) ist gültig.

2. Wenn $x < 0$ ist, so benutzen wir die Form (3) des Restes, und indem wir $x = -z$ setzen, wird

$$R_n = \frac{-z}{1-\theta z} \left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Ist nun $z < 1$, so ist der Betrag des ersten Faktor immer eine endliche Gröſse kleiner als $\frac{z}{1-z}$; der zweite Faktor ist kleiner als z^{n-1} und konvergiert also bei beliebig wachsenden Werten von n nach 0. Also gilt die Formel (4) auch für die Werte zwischen $x = 0$ und $x = -1$. Für den Wert $x = -1$ werden die beiden Seiten dieser Gleichung unendlich (104).

Die Gleichung:

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

gilt also für jedes x in dem Intervalle $-1 < x \leqq +1$.

Bemerkung. Ist x positiv, so hat der Rest das Zeichen $(-1)^{n-1}$, und sein absoluter Wert ist kleiner als $\frac{1}{n} x^n$. Dieser Rest kann also auch in der Form

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\theta x^n}{n} \qquad (0 < \theta < 1)$$

dargestellt werden.

Ist x negativ und gleich $-z$, so ist, für $z < 1$, $-R_n$ gleich dem Produkt von zwei positiven Faktoren, welche bezüglich kleiner sind als

$$\frac{z}{1-z} \quad \text{und} \quad z^{n-1}.$$

Demnach kann man setzen:

$$R_n = -\frac{\theta z^n}{(1-z)}, \quad \text{oder} \quad R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\theta x^n}{(1+x)} \quad (0 < \theta < 1).$$

Für $n = 2$ hat man also, wenn man mit x eine Gröfse zwischen 0 und 1, und ebenso mit θ und θ' Gröfsen zwischen 0 und 1 bezeichnet:

$$l(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

$$l(1-x) = -x - \frac{\theta' x^2}{(1+x)}.$$

121. Numerische Berechnung der natürlichen Logarithmen. Ist die Gröfse x zwischen 0 und 1 enthalten, so hat man die beiden Gleichungen:

(1) $$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

(2) $$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots,$$

und zieht man die zweite von der ersten ab, so folgt:

(3) $$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Setzt man in der Gleichung (1) $x = \frac{h}{N}$, so wird $l(1+x) = l\left(1 + \frac{h}{N}\right) = l(N+h) - lN$ und

(4) $$l(N+h) - lN = \frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} - \cdots;$$

setzt man ferner in der Gleichung (3)

$$x = \frac{h}{2N+h} \quad \text{oder} \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N},$$

so folgt:

(5) $$l(N+h) - lN = 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \cdots\right].$$

Die Gleichungen (4) und (5) werden angewandt, um den natürlichen Logarithmus einer Zahl $N + h$ zu bestimmen, wenn der Logarithmus der Zahl N bekannt ist. Die in diesen Gleichungen enthaltenen Reihen sind rasch konvergent, sobald nur N einigermaſsen gröſser ist als h. Im Besonderen wird für $h = 1$:

$$(6)\qquad l(N+1) - lN = \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots,$$

$$(7)\qquad l(N+1) - lN = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} - \cdots\right].$$

122. Modul der gewöhnlichen Logarithmen. Es ist

$$e^{lx} = 10^{\log \text{vulg}\, x} = x.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so folgt

$$lx = \log \text{vulg}\, x \cdot l10,$$

und setzt man $M = \frac{1}{l10}$, so ist

$$(8)\qquad \log \text{vulg}\, x = M \cdot lx.$$

Demnach erhält man die Logarithmen in Bezug auf die Basis 10, indem man die natürlichen Logarithmen mit der Konstante M multipliziert, welche der *Modul* der gewöhnlichen Logarithmen genannt wird.

Die Formeln des vorigen Paragraphen liefern die Berechnung von M; zunächst ergiebt die Formel (7) für $N = 1$:

$$(9)\qquad l2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \cdots\right).$$

Die Formel (5) giebt sodann, indem man $N = 8$ und $h = 2$ setzt:

$$(10)\qquad l10 = 3l2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right),$$

und man hat folglich

$$(11)\quad \frac{1}{M} = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right).$$

Diese Reihen sind genügend rasch konvergente; aber man kann auch unendlich viele andere bilden, in denen die Glieder noch rascher abnehmen. Wenn man z. B. in der Gleichung (5) $N = 4096 = 2^{12}$, $h = 4$, also $N + h = 4100$ setzt, und in der Formel (7) $N = 40 = 2^2 \cdot 10$, so folgt:

$$l41 + 2l10 = 12l2 + 2\left[\frac{1}{2049} + \frac{1}{3 \cdot 2049^3} + \frac{1}{5 \cdot 2049^5} + \cdots\right],$$

$$l41 = l10 + 2\,l2 + 2\left[\frac{1}{81} + \frac{1}{3 \cdot 81^3} + \frac{1}{5 \cdot 81^5} + \cdots\right],$$

und eliminiert man $l41$ und $l2$ zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung (10), so wird:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{M} = 20\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right) \\ \quad + \ 6\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{3 \cdot 81^3} + \frac{1}{5 \cdot 81^5} + \cdots\right) \\ \quad - \ 6\left(\frac{1}{2049} + \frac{1}{3 \cdot 2049^3} + \cdots\right). \end{cases}$$

Berechnet man jedes Glied der Gleichung (11) oder (12) auf 28 Dezimalstellen, um für die Werte von $\frac{1}{M}$ und M 25 Dezimalen zu erhalten, so findet man:

$$(13) \qquad \frac{1}{M} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ \ldots,$$

$$(14) \qquad M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ \ldots$$

123. Berechnung der gewöhnlichen Logarithmen. Die Formeln (4) und (5) dienen zur Berechnung der gewöhnlichen Logarithmen, wenn man ihre rechten Seiten mit dem Modul M multipliziert. Man hat also:

$$(15) \quad \begin{cases} \log(N+h) - \log N = M\left[\frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} - \cdots\right], \\ \log(N+h) - \log N = 2M\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \cdots\right], \end{cases}$$

und setzt man $h = 1$:

$$(16) \quad \begin{cases} \log(N+1) - \log N = M\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots\right], \\ \log(N+1) - \log N = 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots\right]. \end{cases}$$

Da der Modul M bekannt ist, so kann man mittelst dieser Gleichungen die Berechnung ausführen.

124. Das Interpolieren in den Logarithmentafeln. Bei der Benutzung der Logarithmentafeln nimmt man an, daſs kleine Änderungen des Numerus proportional sind den entsprechenden Änderungen des Logarithmus. Wir wollen zeigen, daſs diese Annahme für diejenige Annäherung, welche man zu erreichen wünscht, zulässig ist. Zu dem Zwecke nehmen wir die Gleichung

$$l(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

welche in Nr. 120 abgeleitet wurde, und in welcher x eine gegebene, zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bedeutet, ebenso θ eine positive Gröſse kleiner als 1. Multiplizieren wir die rechte Seite mit dem Modul M, um zu den gewöhnlichen Logarithmen überzugehen, und ersetzen wir x durch $\frac{h}{N}$, so wird

$$\log(N+h) - \log N = M\left(\frac{h}{N} - \frac{\theta h^2}{2N^2}\right), \tag{17}$$

auch hat man, indem man $h = 1$ setzt und θ' an Stelle von θ schreibt:

$$\log(N+1) - \log N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\theta'}{2N^2}\right). \tag{18}$$

Setzen wir

$$\log(N+h) - \log N = \Delta, \quad \log(N+1) - \log N = D,$$

ferner:

$$\Delta = hD + \varepsilon, \quad h = \frac{\Delta}{D} + \eta, \tag{19}$$

so ist ε der Fehler, welcher bei der Berechnung des Logarithmus von $N + h$ begangen wird, wenn man bei Benutzung der Logarithmentafel den Proportionalteiler

$$\Delta = \frac{h}{1} D \tag{20}$$

addiert. Desgleichen ist η der Fehler, welchen man bei der Bestimmung des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus begeht, wenn man die nämliche Proportion anwendet.

Ersetzt man nun in den Formeln (19) Δ und D durch ihre Werte aus den Formeln (17) und (18), so wird:

$$\varepsilon = \frac{M(\theta' h - \theta h^2)}{2N^2}, \quad \eta = \frac{\theta h^2 - \theta' h}{2N - \theta'};$$

h, θ, θ' sind aber enthalten zwischen 0 und 1, und M ist kleiner als $\frac{1}{2}$; also ist

$$|\varepsilon| < \frac{1}{4N^2}, \quad \left|\frac{\eta}{N}\right| < \frac{1}{N(2N-1)}.$$

Man sieht hieraus, daſs, wenn N gröſser ist als 10000, der Betrag von ε kleiner ist als der vierte Teil der achten Dezimalstelle; ebenso übersteigt der relative Fehler $\frac{\eta}{N}$ kaum die Hälfte der achten Dezimalstelle. Also ist die Anwendung der Proportion (20) zulässig, wenn man sich auf sieben Stellen beschränkt, sei es, dafs man den Logarithmus zu einer gegebenen Zahl, oder umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl berechnen will.

125. Die Binomialreihe. Der Ausdruck $(a+b)^m$, in welchem m eine beliebige reelle Zahl bedeuten soll, kann mehrere Werte annehmen, ausgenommen, wenn m eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Ist aber $a+b$ positiv, so ist immer einer dieser Werte reell und positiv. Dieser eine Wert ist es, den wir betrachten. Setzt man $\frac{b}{a}=x$, so wird der obige Ausdruck gleich dem Produkte von a^m mit $(1+x)^m$. Mit dieser letzteren Funktion haben wir uns zu beschäftigen, indem wir uns die Aufgabe stellen, sie in eine Reihe, fortschreitend nach ganzen positiven Potenzen von x, zu entwickeln.

Man hat

$$\frac{d^n(1+x)^m}{dx^n}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

und für $x=0$ reduziert sich die Ableitung auf den Wert:

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).$$

Folglich hat man:

$$(1)\quad (1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2\,!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3\,!}x^3$$
$$+\cdots\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)\,!}x^{n-1}+R_n,$$

und

$$(2)\qquad R_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n\,!}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

oder

$$(3)\quad R_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)\,!}x^n(1-\theta')^{n-1}(1+\theta' x)^{m-n}.$$

θ bezeichnet ebenso wie θ' eine Gröfse zwischen 0 und 1. Wenn nun schliefslich R_n mit unbegrenzt wachsenden Werten von n nach 0 konvergiert, so wird:

$$(4)\ (1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3\,!}x^3+\cdots$$

und dies ist die Binomialformel für einen beliebigen Exponenten m. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, dafs diese

Reihe von selbst abbricht, wenn m eine positive ganze Zahl ist; von diesem Falle sehen wir im folgenden ab.

Das Verhältnis des $n+1^{\text{ten}}$ Gliedes zum n^{ten} ist:

$$\frac{m-n+1}{n}x \quad \text{oder} \quad -\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x,$$

eine Gröfse, die für beliebig wachsende Werte von n nach $-x$ konvergiert. Hieraus folgt, dafs die Gleichung (4) nicht besteht, aufser wenn x zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, denn anderen Falles wachsen die absoluten Werte der Reihenglieder von einer bestimmten Stelle ab beständig.

Wir nehmen zuerst an, dafs x zwischen 0 und 1 liegt; dann hat man, nach der Formel (2) des Restes:

$$R_n = \left[\frac{mx}{1}\cdot\frac{(m-1)x}{2}\cdot\frac{(m-2)x}{3}\cdots\frac{(m-n+1)x}{n}\right]\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}.$$

Die Gröfse zwischen den eckigen Klammern konvergiert bei beliebig wachsenden Werten von n nach 0. Denn wenn n um die Einheit vergröfsert wird, erhält dieses Produkt den Faktor $-x\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)$, der nach der Grenze $-x$ konvergiert, wenn n ins Unendliche wächst. Hieraus folgt, dafs in diesem Produkte die Anzahl derjenigen Faktoren, deren Betrag gröfser ist als 1, eine begrenzte ist, während die Anzahl der Faktoren, deren Betrag kleiner wird als 1, ja selbst kleiner wird als irgend ein zwischen x und 1 enthaltener Wert, gröfser wird als jede angegebene Zahl. Der andere Faktor $\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}$ kann die Einheit zur Grenze haben, wenn die Grenze von θ null ist; aber er überschreitet keinesfalls die Eins. Demnach konvergiert R_n nach 0, wenn x positiv und kleiner als 1 ist, und folglich besteht in diesem Falle die Gleichung (4).

Nehmen wir nun an, dafs x zwischen 0 und -1 enthalten ist; wir setzen hierbei $x=-z$ und wenden die Form (3) für den Rest an. Er ist

$$R_n = (-1)^n\left[\frac{(m-1)z}{1}\cdots\frac{(m-n+1)z}{n-1}\right]mz(1-\theta' z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' z}\right)^{n-1}.$$

Wenn n ins Unendliche wächst, so konvergiert der zwischen den eckigen Klammern enthaltene Faktor nach 0, wie eben gezeigt wurde. Der Faktor $mz(1-\theta' z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta' z}\right)^{n-1}$ konvergiert ebenfalls nach 0, aufser wenn die Grenze von θ' null ist. Dann aber ist sein Wert endlich und höchstens gleich mz. Hieraus folgt, dafs R_n nach 0 konvergiert, und dafs also die Gleichung (4) auch für die Werte von x zwischen 0 und -1 besteht. Zusammenfassend können wir sagen:

Die Gleichung

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots \tag{4}$$

gilt für alle x, deren Betrag kleiner als 1 *ist.*

126. Weitere Untersuchung der Binomialreihe. Die Gleichung (4) wird auch für die Grenzen -1 und $+1$ gelten, wenn die Reihe auf der rechten Seite für diese Werte konvergiert. In welchen Fällen dies stattfindet, ist leicht zu bestimmen. Ist $x = \pm 1$, so wird das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes der Reihe (4) zum n^{ten} gleich

$$\mp\left(1 - \frac{m+1}{n}\right).$$

Ist also $m+1 < 0$, so wachsen die Beträge der Reihenglieder beständig und die Reihe ist divergent. Wir müssen also $m+1$ positiv annehmen.

Ist u_n der Betrag des n^{ten} Gliedes der Reihe (4) unter der Voraussetzung, dafs $x = \pm 1$ ist, und bezeichnen wir mit v_n das n^{te} Glied der Reihe

$$\frac{1}{1^{m+1}},\quad \frac{1}{2^{m+1}},\quad \frac{1}{3^{m+1}},\quad \frac{1}{4^{m+1}},$$

so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{m+1}{n},\quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}.$$

Die Binomialformel ist anwendbar auf die Funktion $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}$; und beschränkt man die Entwickelung auf zwei Glieder, so hat man

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)(m+2)}{2n^2}\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{-m-3}.$$

Da nun $m+1$ positiv ist, so ist

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{oder} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}.$$

Ist für einen bestimmten Wert von n

$$\frac{u_n}{v_n} = k \quad \text{oder} \quad u_n = kv_n,$$

so wird

$$u_{n+1} < kv_{n+1}, \quad u_{n+2} < kv_{n+2}, \quad u_{n+3} < kv_{n+3} \ldots$$

Nun ist aber die Reihe

(5) $$kv_0, kv_1, kv_2 \ldots$$

konvergent, wenn $m > 0$ ist (Nr. 104); also konvergiert auch die Reihe

$$u_0, u_1, u_2 \ldots$$

Wir sehen also:

Bei positivem m gilt die Gleichung (4) *auch für $x = \pm 1$, und man hat*

(6) $$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \cdots$$

(7) $$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \cdots$$

Ist m negativ, so wird die linke Seite der Gleichung (4) *unendlich für $x = -1$, und die Reihe auf der rechten Seite kann also nicht konvergieren. Dagegen konvergiert die Reihe für $x = +1$, wenn m zwischen 0 und -1 gelegen ist, und folglich gilt dann auch die Gleichung* (6) *für diese Werte von m.*

In der That, die Glieder der Reihe (6) sind abwechselnd positiv und negativ, und ihre Beträge nehmen durchaus ab und konvergieren nach 0, denn sie sind von einer bestimmten Stelle an kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe (5).

§ 4. Entwickelung der Funktion $f(x+h)$ nach Potenzen von h, wenn die Taylorsche Reihe nicht gilt.

127. Allgemeine Regeln. Wird die Funktion $f(x)$ oder eine ihrer Ableitungen unstetig, wenn die Variabele x den besonderen Wert x_0 annimmt, so kann die Funktion $f(x_0 + h)$ nicht nach der Taylorschen Gleichung in eine Reihe entwickelt werden, welche nach ganzen positiven Potenzen von h fortschreitet. Läfst man aber negative oder gebrochene Potenzen von h zu, so kann es vorkommen, dafs $f(x_0 + h)$ in eine konvergente Reihe entwickelbar ist; in diesem Falle hat man die aufeinander folgenden Reihenglieder folgendermafsen zu berechnen.

Wenn die Funktion $f(x)$ einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert A für $x = x_0$ besitzt, und stetig ist für alle Werte von $x = x_0$ bis $x_0 + h$, so hat man

(1) $$f(x_0 + h) = A + \varepsilon$$

und ε wird mit h null.

Ist aber die Funktion $f(x)$ stetig von $x = x_0$ bis $x_0 + h$ und verschwindet sie für den Wert $x = x_0$, so wollen wir annehmen, dafs man eine ganze oder gebrochene Zahl n ausfindig machen kann, so dafs

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h)}{h^n} = A$$

endlich und von null verschieden ist. Man nennt alsdann n die *Ordnung des Nullwerdens* von $f(x)$ an der Stelle x_0. In diesem Falle kann man setzen:

(2) $$f(x_0 + h) = h^n(A + \varepsilon),$$

wobei ε wiederum mit h null wird.

Wird endlich die Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ unendlich, und kann man eine positive Zahl m bestimmen, welche die *Ordnung des Unendlichwerdens* von $f(x_0 + h)$ im Vergleich zu $\frac{1}{h}$ ausdrückt, derart, dafs

$$\lim_{h=0} h^m f(x_0 + h) = A$$

eine endliche von 0 verschiedene bestimmte Zahl wird, so hat man

(3) $$f(x_0 + h) = \frac{1}{h^m}(A + \varepsilon).$$

Die Formel (2) schliefst die Formel (3) in sich, wenn man für n den negativen Wert $-m$ einsetzt; sie umfafst auch die Formel (1), wenn man für n den Wert 0 zuläfst. So hat man also in den drei betrachteten Fällen, indem man x statt $x_0 + h$ schreibt:

(4) $$f(x) = (x - x_0)^n f_1(x).$$

Hierbei ist n eine positive oder negative Zahl, die auch 0 sein kann, $f_1(x)$ eine Funktion, welche für $x = x_0$ einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert A annimmt. Ist n positiv, so giebt es die Ordnung des Nullwerdens von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ an, ist es negativ, so giebt $-n$ die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ an. Da die Funktion

$$f_1(x) - A$$

für $x = x_0$ verschwindet, so erhält man, wenn man eine positive Zahl $n_1 - n$ ausfindig machen kann, welche die Ordnung des Verschwindens von $f_1(x) - A$ angiebt, ebenso

$$f_1(x) - A = (x - x_0)^{n_1 - n} f_2(x);$$

$f_2(x)$ ist dann eine Funktion, welche für $x = x_0$ einen endlichen von 0 verschiedenen Wert A_1 annimmt. Also wird die Gleichung (4):

$$(5) \qquad f(x) = A(x - x_0)^n + (x - x_0)^{n_1} f_2(x).$$

Die Funktion

$$f_2(x) - A_1$$

wird für $x = x_0$ gleich 0, und kann man eine endliche positive Zahl $n_2 - n_1$ ausfindig machen, welche die Ordnung des Verschwindens angiebt, so ist

$$f_2(x) - A_1 = (x - x_0)^{n_2 - n_1} f_3(x);$$

$f_3(x)$ erhält für $x = x_0$ einen endlichen von 0 verschiedenen Wert A_2. Die Gleichung (5) wird also:

$$(6) \quad f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + (x - x_0)^{n_2} f_3(x).$$

Fährt man so fort, so gewinnt man den folgenden Ausdruck:

$$(7) \quad f(x) = A(x - x_0)^n + A_1(x - x_0)^{n_1} + A_2(x - x_0)^{n_2} + \cdots A_{i-1}(x - x_0)^{n_{i-1}} + R_i,$$

und es ist

$$(8) \quad R_i = (x - x_0)^{n_i} f_{i+1}(x) = (x - x_0)^{n_{i-1}} [f_i(x) - A_{i-1}].$$

Diese Gleichung setzt aber voraus, dafs man die wachsenden Zahlen

$$n, n_1, n_2, \ldots, n_i$$

so bestimmen kann, dafs für jeden Wert von k von 1 bis i der Quotient

$$\frac{f_k(x) - A_{k-1}}{(x - x_0)^{n_k - n_{k-1}}}$$

nach einer bestimmten, von 0 verschiedenen, endlichen Grenze A_k konvergiert, wenn x gleich x_0 wird.

Sind diese Bedingungen stets erfüllt, wie grofs auch i wird, und konvergiert der Rest R_i bei beliebig wachsenden Werten von i nach 0, so folgt aus der Gleichung (7) die Entwickelung:

$$(9)\quad f(x) = A(x-x_0)^n + A_1(x-x_0)^{n_1} + A_2(x-x_0)^{n_2} + \cdots$$

oder, wenn man $x - x_0 = h$ setzt:

$$(10)\qquad f(x_0+h) = Ah^n + A_1h^{n_1} + A_2h^{n_2} + \cdots,$$

wo die n eine wachsende Reihe bilden.

Dies ist die Entwickelung von $f(x_0+h)$ in eine Reihe, welche nach wachsenden positiven oder negativen Potenzen von h geordnet ist.

128. Beispiel. Betrachten wir z. B. die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \sin x_0},$$

deren Ableitung $f'(x)$ für $x = x_0$ unendlich wird, die also die Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe nicht zuläfst. Die Funktion $\sin x - \sin x_0$ ist entwickelbar nach der *Taylor*schen Reihe, und es ist:

$$(1)\qquad f(x) = \sqrt{(x-x_0)\cos x_0 - \frac{(x-x_0)^2}{2!}\sin x_0 - \cdots}$$

Hieraus folgt, dafs die Funktion

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x-x_0}}$$

für $x = x_0$ die Grenze $\sqrt{\cos x_0}$ hat. Demnach hat man in den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen zunächst

$$n = \frac{1}{2},\quad A = \sqrt{\cos x_0},\quad f_1(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x-x_0}},$$

ferner:

$$(x-x_0)^{n_1-\frac{1}{2}} f_2(x) = \sqrt{\cos x_0 - \frac{x-x_0}{1\cdot 2}\sin x_0 - \cdots} - \sqrt{\cos x_0}$$

$$= \frac{-\frac{x-x_0}{1\cdot 2}\sin x_0 - \cdots}{\sqrt{\cos x_0 - \frac{x-x_0}{1\cdot 2}\sin x_0 - \cdots} + \sqrt{\cos x_0}}.$$

Dieser Ausdruck wird für $x = x_0$ null von der ersten Ordnung, und es ist

$$n_1 = \frac{3}{2}, \quad A_1 = -\frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}},$$

$$f_2(x) = -\frac{\frac{1}{2}\sin x_0 + \frac{x - x_0}{3!}\cos x_0 - \cdots}{\sqrt{\cos x_0 - \frac{x - x_0}{1\cdot 2}\sin x_0 - \cdots} + \sqrt{\cos x_0}}.$$

Will man die Entwickelung auf zwei Glieder beschränken, so erhält man

$$\sqrt{\sin x - \sin x_0} = \sqrt{\cos x_0}\,(x - x_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}(x - x_0)^{\frac{3}{2}} + R_2,$$

und der Rest R_2 hat den Wert:

$$R_2 = (x - x_0)^{\frac{3}{2}}\left[f_2(x) + \frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}\right].$$

Er verschwindet an der Stelle $x = x_0$ von höherer Ordnung als der $\frac{3}{2}^{\text{ten}}$.

Schneller kommt man natürlich in diesem Beispiele zum Ziel, wenn man in Gleichung (1)

$$x - x_0 = z^2$$

setzt, dann wird

$$f(x) = z\sqrt{\cos x_0 - \sin x_0 \cdot \frac{z^2}{2!} + \cdots}$$

nach ganzen positiven Potenzen von z entwickelbar:

$$f(z) = a_1 z + a_3 z^3 + \cdots + a_{2n-1} z^{2n-1} + R_{2n+1}.$$

Die Koeffizienten berechnen sich nach dem *Mac-Laurin*schen Satze. Setzt man für z wieder $\sqrt{x - x_0}$, so erkennt man, dafs eine Entwickelung der Form existiert

$$\sqrt{\sin x - \sin x_0}$$
$$= \sqrt{x - x_0}\,\{a_1 + a_3(x - x_0) + a_5(x - x_0)^2 + \cdots + a_{2n-1}(x - x_0)^{n-1}\} + R_{2n+1}.$$

§ 5. Anwendung des Taylorschen Satzes auf die Bestimmung von Grenzwerten.

129. Grenzwert eines Bruches an einer Stelle, wo Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden. Wenn eine Funktion sich in der gebrochenen Form $\frac{f(x)}{F(x)}$ darstellt, so kann es eintreten, dafs Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden oder unendlich werden für einen speziellen Wert $x = x_0$. Es handelt sich dann darum, den eigentlichen Wert der Funktion an dieser Stelle zu ermitteln, d. h. den Wert, nach welchem der Quotient konvergiert, wenn die Variabele x sich dem Werte x_0 beliebig nähert. In vielen Fällen gelangt man dazu vermittelst des folgenden Satzes:

Lehrsatz I. Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ in der Umgebung von x_0 die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllen, und wenn beide nach dem Werte null konvergieren, falls x der Grenze x_0 beliebig sich nähert, so ist:

$$\lim_{x = x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x = x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

sobald der Limes auf der rechten Seite existiert.

Wir wählen den absoluten Betrag von h so klein, dafs $x_0 + h$ in der Umgebung von x_0 liegt; dann gilt nach Nr. 31:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)},$$

wo h_1 zwischen 0 und h liegt und also mit h verschwindet. Demnach ist:

$$\lim_{x = x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x = x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

in allen Fällen, in denen die rechte Seite an der Stelle x_0 einen bestimmten Grenzwert besitzt. Vorausgesetzt, dafs $f'(x)$ und $F'(x)$ selbst an der Stelle $x = x_0$ einen bestimmten Grenzwert besitzen, wird dies im Besonderen in folgenden Fällen stattfinden:

1. Wenn $\lim\limits_{x = x_0} F'(x)$ von null verschieden ist. Der Limes ist dann endlich.

2. Wenn $\lim\limits_{x = x_0} F'(x)$ zwar null ist, aber $\lim\limits_{x = x_0} \frac{1}{F'(x)}$ einen bestimmten Wert hat, also mit einem bestimmten Vorzeichen unendlich grofs wird und wenn gleichzeitig $\lim\limits_{x = x_0} f'(x)$ von null verschieden ist. Der Limes ist dann entweder gleich $+\infty$ oder gleich $-\infty$.

Sind hingegen $\lim f'(x)$ und $\lim F'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ wieder beide null, so kann man die vorige Regel von neuem anwenden, sobald auch $f''(x)$ und $F''(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ bestimmte endliche Werte haben. Sind $\lim\limits_{x=x_0} f''(x)$ und $\lim\limits_{x=x_0} F''(x)$ wieder beide null und haben auch $f'''(x)$ und $F'''(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ bestimmte endliche Werte, so wenden wir unseren Satz zum dritten Male an, u. s. w. Auf diese Weise gelangen wir zu einem allgemeinen Theoreme, das wir so aussprechen wollen:

Lehrsatz II. Die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ nebst ihren n ersten Ableitungen seien in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetig; ferner mögen $f(x)$ und $F(x)$ nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen an der Stelle $x = x_0$ gleich null sein, während $F^{(n)}(x_0)$ von null verschieden ist; dann ist:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

Wir haben, um unseren Satz einfach aussprechen zu können, engere Voraussetzungen zu Grunde gelegt, als beim Lehrsatz I, von dem er eine Verallgemeinerung bildet. Von der Richtigkeit des Satzes II überzeugt man sich sehr schnell. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist es jedenfalls gestattet den Lehrsatz I n-mal hinter einander anzuwenden. Dies giebt zunächst:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)} = \frac{\lim f^{(n)}(x)}{\lim F^{(n)}(x)}.$$

An der Stelle $x = x_0$ sind aber $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$ stetig, und $F^{(n)}(x)$ nicht null, also ist auch:

$$\frac{\lim f^{(n)}(x)}{\lim F^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

Die eben bewiesenen Lehrsätze bleiben bestehen, wenn $x_0 = +\infty$ oder $x_0 = -\infty$ ist. Um dies zu erkennen, genügt es zu zeigen, dafs Lehrsatz I auch für $x_0 = \infty$ erhalten bleibt.

Setzt man $x = \frac{1}{z}$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Wird nun x unendlich, so konvergiert z nach 0, und man hat die Gleichung

$$\frac{f\left(\frac{1}{h}\right)}{F\left(\frac{1}{h}\right)} = -\frac{\frac{1}{h_1^2} f'\left(\frac{1}{h_1}\right)}{\frac{1}{h_1^2} F'\left(\frac{1}{h_1}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{h_1}\right)}{F'\left(\frac{1}{h_1}\right)},$$

sobald für die Funktionen $f'\left(\frac{1}{z}\right)$ und $F'\left(\frac{1}{z}\right)$ die vorigen Bedingungen erfüllt sind. Also ist auch hier

$$\lim \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} \text{ für } z = 0,$$

oder

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ für } x = \infty.$$

130. Grenzwert eines Bruches an einer Stelle, wo Zähler und Nenner gleichzeitig unendlich werden.

Dieselbe Regel, welche den Grenzwert

$$\lim_{x = x_0} \frac{f(x)}{F(x)}$$

bestimmen liefs, wenn Zähler und Nenner des Bruches an der Stelle $x = x_0$ verschwinden, bleibt erhalten, wenn Zähler und Nenner des Bruches an der Stelle $x = x_0$ unendlich werden. Es gilt der Satz:

Lehrsatz III. Ist $\lim\limits_{x = x_0} f(x) = \infty$ *und ebenso* $\lim\limits_{x = x_0} F(x) = \infty$; *genügen ferner für jede von* x_0 *verschiedene Stelle* x, *die in der Umgebung von* x_0 *liegt,* $f(x)$ *und* $F(x)$ *der Forderung* $\mathfrak{A}$, *und ist endlich in dieser Umgebung* $F'(x)$ *niemals null, so gilt:*

$$\lim_{x = x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x = x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

sobald der Limes auf der rechten Seite existiert.

Der Satz gilt auch in dem Falle, wenn $x_0 = \infty$ *ist.*

1. Wir wollen diesen Fall zuerst ins Auge fassen. Unter „Umgebung von $x_0 = \infty$“ ist dann die Gesamtheit aller Zahlen x zu verstehen, die gröfser sind als eine gewisse Zahl n. Sind x_1 und x zwei solche Zahlen und $x > x_1$, so erfüllen in dem Intervalle von x bis x_1 die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ die Voraussetzungen des Satzes Nr. 31, mithin existiert eine Zahl x_2 zwischen x_1 und x, so dafs:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{F(x)-F(x_1)}=\frac{f'(x_2)}{F'(x_2)}$$

wird. Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\dfrac{F(x_1)}{F(x)}}=\frac{f'(x_2)}{F'(x_2)};\quad x_1<x_2<x.$$

a. Es sei nun zunächst

$$(2)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$$

endlich. Dann kann man eine (beliebig kleine) positive Zahl σ vorschreiben und zu ihr eine Zahl x_1 finden, so dafs nicht nur:

$$\left|\frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}-A\right|<\sigma$$

wird, sondern dafs diese Relation für jedes noch gröfsere x_1 erhalten bleibt. Es wird dann, da $x_2>x_1$ ist, auch:

$$A-\sigma<\frac{f'(x_2)}{F'(x_2)}<A+\sigma$$

sein. Die Gleichung (1) geht daher über in diese:

$$A-\sigma<\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\dfrac{F(x_1)}{F(x)}}<A+\sigma.$$

Setzen wir jetzt $x=\infty$, während x_1 fest bleibt, so ergiebt sich:

$$A-\sigma<\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\lim_{x=\infty}\frac{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\dfrac{F(x_1)}{F(x)}}<A+\sigma.$$

Der zweite Limes ist 1, also folgt:

$$A-\sigma<\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{F(x)}<A+\sigma.$$

Da σ aber beliebig klein ist, so heifst dies:

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=A$$

oder wegen Gleichung (2):

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

wie behauptet war.

b. Ist nun andrerseits:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \infty,$$

so kann man x_2 so grofs wählen, dafs

$$\frac{f'(x_2)}{F'(x_2)} > N$$

wird, wo N eine beliebig grofs vorgeschriebene Zahl ist. Alsdann liefert die Gleichung (1)

$$\frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{F(x_1)}{F(x)}} > N$$

und durch Übergang zur Grenze für $x = \infty$:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} > N;$$

d. h.

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \infty = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Es gilt also wieder der Lehrsatz III.

2. Ist die Stelle x_0 im Endlichen gelegen, so setze man $x = x_0 + \frac{1}{z}$. Dann wird für $z = \infty$ wieder $x = x_0$ und daher nach dem eben Bewiesenen:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)}{F\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-f'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}}{-F'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}}$$

$$= \lim_{z=\infty} \frac{f'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)}{F'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Also gilt auch in diesem Falle der Lehrsatz III.

3. Im Vorhergehenden ist nur die Stelle $+\infty$ betrachtet worden, natürlich kann für sie überall auch die Stelle $-\infty$ gesetzt werden, ohne dafs die Gültigkeit des Lehrsatzes III oder seines Beweises verloren ginge.

131. Beispiele. 1. In den beiden Quotienten

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tang} x}{x}$$

werden Zähler und Nenner für $x = 0$ gleichzeitig null. In Anwendung der Regel von Nr. 129 erhält man

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

2. In dem Quotienten

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

werden Zähler und Nenner, wie auch die ersten beiden Ableitungen für $x = 0$ ebenfalls null. Die Ableitungen dritter Ordnung sind bezüglich

$$e^x + e^{-x} \text{ und } \cos x$$

und reduzieren sich für $x = 0$ auf die Werte 2 und 1. Folglich konvergiert der Quotient für diesen Wert von x nach 2.

3. In dem Quotienten

$$\frac{x^x - x}{x - 1 - lx}$$

verschwinden Zähler und Nenner für $x = 1$; desgleichen die Ableitungen erster Ordnung:

$$x^x[1 + lx] - 1 \text{ und } 1 - \frac{1}{x}\cdot$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$x^x[1 + lx]^2 + x^{x-1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2},$$

sie werden für $x = 1$ bezüglich gleich 2 und 1. Folglich konvergiert der gegebene Quotient nach der Grenze 2, wenn x gleich 1 wird.

4. In dem Quotienten $\frac{a^x}{x^n}$ bedeute a eine positive Konstante gröfser als 1, und n eine ganze positive Zahl. Zähler und Nenner werden unendlich für $x = \infty$; es ist nach Nr. 130:

$$\lim_{x=\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{a^x\, l\, a}{n x^{n-1}}\cdot$$

Auch in dem Quotienten der rechten Seite werden Zähler und Nenner gleichzeitig unendlich. Wendet man auf ihn dieselbe Regel an, so erhält man, indem man bis zur n^{ten} Ableitung vorgeht:

$$\lim_{x=\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{a^x \cdot [la]^n}{n!} = \infty.$$

Der Quotient $a^x : x^n$ wird also für $x = \infty$ ebenfalls unendlich, wie grofs auch n werden mag; d. h.:

Die Exponentialfunktion a^x wird für $a > 1$ und $x = \infty$ von höherer Ordnung unendlich als jede Potenz.

Ebenso ist, wenn $a > 1$, $\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$ für $x = 0$ gleich $\frac{0}{0}$ oder gleich $\frac{z^n}{a^z}$ für $z = \infty$, wenn man $\frac{1}{x} = z$ setzt. Es ist aber:

$$\lim_{z=\infty} \frac{z^n}{a^z} = \lim_{z=\infty} \frac{n!}{a^z [la]^n} = 0.$$

5. Die Funktion $\frac{lx}{x^\alpha}$ wird für $x = \infty$ von der Form $\frac{\infty}{\infty}$, wenn α irgend eine positive Zahl bedeutet; es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{lx}{x^\alpha} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0, \text{ d. h.:}$$

Der Logarithmus wird für $x = \infty$ von niederer Ordnung unendlich als jede Potenz.

Desgleichen ist $\frac{lx}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$ für $x = 0$ von der Form $\frac{\infty}{\infty}$, wenn $\alpha > 0$,

und

$$\lim_{x=0} \frac{lx}{x^{-\alpha}} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x=0} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0, \text{ d. h.:}$$

lx wird für $x = 0$ unendlich von niederer Ordnung als jede Potenz.

6. Die Ordnung des Unendlichwerdens der Funktion $x^n l(x)$ für $x = \infty$, in welcher n eine bestimmte positive Zahl bedeutet, läfst sich durch keine rationale oder irrationale Zahl ausreichend bestimmen, und ist doch nicht gleich oder kleiner als n, und nicht gröfser als irgend eine Zahl gröfser als n. Denn dividiert man die Funktion durch x^r, so ist

$$\frac{x^n\, lx}{x^r}$$

gleich 0, solange $r > n$ ist, dagegen unendlich, wenn r gleich oder kleiner als n ist.

7. Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ wird für $x = x_0$ null, denn der Exponent wächst mit negativem Zeichen über jeden Betrag. Man erhält für die Ableitung

$$f'(x) = +\frac{2}{(x-x_0)^3}\, e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

und dieser Wert ist für $x = x_0$ nach Beispiel 4 gleich 0.

Aus der weiteren Differentiation der Gleichung

$$f'(x)(x-x_0)^3 = 2e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

folgt

$$f''(x)(x-x_0)^3 + 3f'(x)(x-x_0)^2 = \frac{2\cdot 2}{(x-x_0)^3}\, e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

und hieraus ebenso, dafs auch $f''(x_0) = 0$ wird; ebenso erkennt man, dafs alle höheren Ableitungen für $x = x_0$ verschwinden.

132. Bestimmung des Grenzwertes eines Quotienten durch Reihenentwickelung. Die Sätze der Nr. 129 führen die Untersuchung des Wertes, den der Quotient $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = x_0$ annimmt, auf die Bestimmung des Wertes zurück, welchen die neue Funktion $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ im gleichen Falle annimmt. Dabei kann es indessen eintreten, dafs diese Reduktion keinen Gewinn bringt, und dafs die zweite Funktion dieselben Schwierigkeiten wie die erste bietet.

Die Lösung der Frage, um die es sich handelt, ergiebt sich leicht, sobald die Funktionen $f(x_0+h)$ und $F(x_0+h)$ in Reihen entwickelbar sind, welche nach steigenden, positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Potenzen von h geordnet sind. In diesem Falle genügt es, das erste Glied Ah^n der einen Funktion, und ebenso das erste Glied Bh^m der anderen zu bestimmen, denn alsdann erhält man

$$f(x_0+h) = h^n(A+\varepsilon), \qquad F(x_0+h) = h^m(B+\eta),$$

wobei ε und η mit h verschwinden, also:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = h^{n-m}\frac{A+\varepsilon}{B+\eta}.$$

Ist $n = m$, so hat man

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{B},$$

während der Quotient nach 0 oder unendlich konvergiert, je nachdem $n > m$, oder $n < m$ ist.

133. Beispiele. *Beispiel I.* In dem Quotienten

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0} + \sqrt{x - x_0}}{\sqrt{x^2 - x_0{}^2}}$$

werden Zähler und Nenner 0, wenn x abnehmend nach dem positiven Wert x_0 konvergiert und die Wurzeln mit positivem Zeichen berechnet werden; man erkennt leicht, dafs alle Ableitungen für $x = x_0$ unendlich werden. Setzt man $x = x_0 + h$, so wird $\sqrt{x - x_0} = \sqrt{h}$ mit h null von der Ordnung $\frac{1}{2}$; dagegen wird $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x_0}\left[\sqrt{1 + \frac{h}{x_0}} - 1\right]$ mit h null von erster Ordnung, wie man aus der Entwickelung des Binoms ersieht. Man hat also

$$f(x_0 + h) = \sqrt{h}(1 + \varepsilon).$$

Der Nenner $F(x)$ ist gleich

$$\sqrt{x - x_0}\,\sqrt{x + x_0} = \sqrt{h}\,\sqrt{2x_0 + h},$$

und man hat also:

$$F(x_0 + h) = \sqrt{h}\ (\sqrt{2x_0} + \eta).$$

Folglich ist

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2x_0} + \eta}, \quad \lim_{x = x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}.$$

Beispiel II. Der Quotient

$$\frac{x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\operatorname{tang} x}{x^5}$$

sei zu berechnen für $x = 0$. Multipliziert man Zähler und Nenner mit $3\cos x$, so folgt:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x\cos x - \sin x - \sin 2x}{3x^5 \cos x}.$$

Entwickelt man $\cos x$, $\sin x$ und $\sin 2x$ in ihre Potenzreihen, so erhält man

$$f(x) = 3x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\cdots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cdots\right) - \left(2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!}\cdots\right),$$

$$F(x) = 3x^5\left(1 - \frac{x^2}{2!}\cdots\right),$$

oder

$$f(x) = x^5\left(-\frac{3}{20} + \varepsilon\right), \quad F(x) = x^5(3 + \eta).$$

Hieraus schliefst man:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{1}{20}.$$

134. Grenzwert eines Produktes an einer Stelle, wo der eine Faktor null, der andere unendlich wird. Unsere Untersuchung umfafst auch den Fall einer Funktion, welche gleich dem Produkte aus zwei Faktoren $f(x) \cdot F(x)$ ist, von denen der eine für $x = x_0$ verschwindet, der andere unendlich wird. Denn setzt man

$$f(x) \cdot F(x) = \frac{f(x)}{[F(x)]^{-1}}, \quad \text{oder} \quad f(x) \cdot F(x) = \frac{F(x)}{[f(x)]^{-1}},$$

so hat man die Form eines Quotienten, dessen Glieder für $x = x_0$ entweder beide 0, oder beide unendlich werden.

Endlich kann man auch leicht auf diesen Fall die Untersuchung einer Funktion von der Form

$$y = u^v$$

zurückführen, wenn u und v für $x = x_0$ entweder auf

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0,$$

oder

$$u = \infty \quad \text{und} \quad v = 0,$$

oder

$$u = 1 \quad \text{und} \quad v = \infty$$

sich reduzieren. Denn nimmt man von beiden Seiten der obigen Gleichung die Logarithmen, so wird

$$ly = vlu.$$

Die Funktion ly ist demnach das Produkt zweier Faktoren, von denen der eine für $x = x_0$ verschwindet, der andere unendlich wird.

135. Beispiel. Ist der Wert von x^x zu bestimmen für $x = 0$, so setze man

$$lx^x = xlx = \frac{lx}{x^{-1}}.$$

Mithin ist

$$\lim_{x=0} l\,x^x = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x=0} x = 0.$$

Der Logarithmus von x^x konvergiert also nach 0, folglich die Funktion x^x nach 1.

136. Bestimmung von $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. Ist x eine bestimmte Gröfse und m eine variable, so kann man nach den vorigen Regeln die Grenze bestimmen, nach welcher der Ausdruck

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

für $m=\infty$ konvergiert. Man erhält

$$l\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = m\,l\left(1+\frac{x}{m}\right) = \frac{l\left(1+\frac{x}{m}\right)}{\frac{1}{m}}.$$

Die Grenze dieses Quotienten, in welchem Zähler und Nenner für $m=\infty$ verschwinden, berechnet sich aus der Gleichung

$$\lim_{m=\infty} l\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim_{m=\infty} \frac{-\frac{x}{m^2}}{\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(-\frac{1}{m^2}\right)} = \lim_{m=\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{m}} = x,$$

also ist

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Die transscendente Funktion e^x ist also die Grenze eines Ausdruckes, der eine algebraische, ja sogar eine ganze Funktion ist, wenn man m unbegrenzt derart wachsen läfst, dafs es nur ganzzahlige Werte annimmt. Man kann auch schreiben

$$(1)\qquad e^x = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m + \varepsilon,$$

wobei ε eine Gröfse bezeichnet, welche mit $\frac{1}{m}$ verschwindet. Hieraus folgt

$$x = m\left(\sqrt[m]{e^x-\varepsilon} - 1\right).$$

Es ist aber

$$\sqrt[m]{e^x-\varepsilon} = \sqrt[m]{e^x}\left(1-\frac{\varepsilon}{e^x}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{e^x}\left(1-\frac{\varepsilon}{m}e^{-x}+\cdots\right),$$

oder:

$$m\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = m\sqrt[m]{e^x} + \eta,$$

wobei η für $m = \infty$ null wird; mithin ist

$$x = m(\sqrt[m]{e^x} - 1) + \eta,$$

und schreibt man x an Stelle von e^x, und lx an Stelle von x, so folgt:

(2) $$lx = m(\sqrt[m]{x} - 1) + \eta,$$

oder:

$$lx = \lim_{m=\infty} m(\sqrt[m]{x} - 1).$$

Sonach ist auch die transscendente Funktion lx die Grenze einer algebraischen Funktion von x.

§ 6. Der Taylorsche Satz für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

137. Ableitung des verallgemeinerten Taylorschen Satzes.

Ist

$$u = F(x, y, z \ldots)$$

eine Funktion von m Variabelen, so entsteht die Aufgabe, die Funktion

$$u + \Delta u = F(x + h,\ y + k,\ z + l \ldots)$$

in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Potenzen der Gröfsen $h, k, l \ldots$ fortschreitet. Die Gröfse $u + \Delta u$ ist der Wert, den die Funktion

$$U = F(x + ht,\ y + kt,\ z + lt \ldots)$$

für $t = 1$ annimmt. Um die gestellte Aufgabe zu lösen, wird es ausreichen, U nach der *Mac-Laurin*schen Formel in eine Reihe, geordnet nach Potenzen von t, zu entwickeln und schliefslich $t = 1$ zu setzen. Substituiert man

$$x + ht = \xi,\ y + kt = \eta,\ z + lt = \zeta \ldots,$$

so hat man

$$U = F(\xi, \eta, \zeta \ldots),$$

oder

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots$$

(Nr. 40 und 41), und ferner, da $\xi, \eta, \zeta \ldots$ lineare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind, *symbolisch* für jedes n (Nr. 72):

$$d^n U = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots\right)^n.$$

Dabei setzen wir voraus, dafs alle partiellen Ableitungen stetige Funktionen der Variabelen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ sind; dann sind sie auch stetige Funktionen von t. Man hat

$$d\xi = h\,dt,\ d\eta = k\,dt,\ d\zeta = l\,dt \ldots,$$

also

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} h + \frac{\partial U}{\partial \eta} k + \frac{\partial U}{\partial \zeta} l \cdots\right)^n,$$

und auf Grund der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \text{ u. s. w.}$$

kann man schreiben:

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial U}{\partial y} + l \frac{\partial U}{\partial z} \cdots\right)^n.$$

Für $t = 0$ erhält man $U = u$, und die Formel reduziert sich auf:

$$\left[\frac{d^n U}{dt^n}\right]_{t=0} = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \cdots\right)^n.$$

Demnach ergiebt die *Mac-Laurin*sche Formel für die Funktion U:

$$U = u + \frac{t}{1}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right) + \frac{t^2}{2!}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right)^2$$
$$+ \cdots \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right)^{n-1} + R_n.$$

Der Rest ist gleich dem Produkte von $\frac{t^n}{n!}$ mit einem Werte, den $\frac{d^n U}{dt^n}$ annimmt, wenn man t durch θt ersetzt, wobei θ eine zwischen 0 und 1 gelegene Gröfse bezeichnet. Man hat also

$$R_n = \frac{t^n}{n!}\left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} \cdots\right)^n_{x+h\theta t,\ y+k\theta t,\ z+l\theta t \ldots}$$

Die Indices $x + h\theta t \ldots$ sollen anzeigen, dafs man in den partiellen Ableitungen der Funktion $u, x, y, z, \ldots$ durch $x + h\theta t,$

$y + k\theta t \ldots$ zu ersetzen hat. Setzt man nun schließlich $t = 1$, so hat man

$$(1)\quad \begin{cases} u + \Delta u = u + \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^2 \\ \qquad + \cdots \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^{n-1} + R_n, \end{cases}$$

$$(2)\qquad R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots\right)^n_{x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l\ldots}$$

So erhält man z. B. in dem Falle einer Funktion $F(x, y)$ von zwei Variabelen:

$$F(x+h, y+k) = F(x,y) + \left(h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$

$$+ \cdots \frac{1}{(n-1)!}\left(h^{n-1}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x^{n-1}} + (n-1)h^{n-2}k\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x^{n-2}\partial y} + \cdots k^{n-1}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial y^{n-1}}\right) + R_n,$$

und der Restausdruck wird:

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + nh^{n-1}k\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\right.$$

$$\left. + \cdots k^n\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right)_{x+\theta h,\ y+\theta k.}$$

Wenn nun der Rest R_n nach 0 konvergiert, während n unbegrenzt wächst, so ergiebt die Gleichung (1) die *Taylor*sche Reihe für eine Funktion von mehreren Variabelen, nämlich:

$$(3)\quad \Delta u = \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^2 + \cdots$$

Sind $x, y, z \ldots$ unabhängige Variabele, so sind die Differentiale der Funktion u

$$du = \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)$$

und *symbolisch:*

$$d^n u = \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\cdots\right)^n,$$

also wird die Formel (3):

$$\Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{2!} + \frac{d^3 u}{3!} + \cdots$$

und hat die nämliche Form (Nr. 114), wie bei einer Funktion einer Variabelen.

Geht man auf die Bedingungen zurück, denen die *Mac-Laurin*sche Formel in dem Falle Einer Variabelen unterworfen war, und die bei der Bestimmung der totalen Differentiale einer Funktion von mehreren Veränderlichen eingeführt wurden (Nr. 40), so erkennt man:

Die Gleichung (1) *ist nur ein verallgemeinerter Mittelwertssatz. Sie besteht, wenn* u *und alle seine Ableitungen bis zur* n^{ten} *Ordnung einschliefslich stetig sind für alle Werte* $x, y, z \ldots$ *zwischen* $(x, y, z \ldots)$ *und* $(x + h, y + k, z + l, \ldots)$. *Gilt dies für alle* n *und ist* $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$, *so gilt auch die Gleichung* (3), *die eine Verallgemeinerung des Taylorschen Satzes ist.*

138. Der verallgemeinerte Mac-Laurinsche Satz. Um schliefslich die *Mac-Laurin*sche Formel für eine Funktion von mehreren Variabelen zu bilden, setzen wir in den Gleichungen (1) und (2) für $x, y, z \ldots$ den Wert 0, und schreiben an Stelle von $h, k, l \ldots$ die Gröfsen $x, y, z \ldots$ Drücken wir endlich durch den Index 0 aus, dafs die Gröfsen $x, y, z \ldots$ in einer Funktion den Wert 0 erhalten sollen, und durch den Index $\theta x, \theta y, \theta z \ldots$, dafs sie *diese* Werte annehmen, so erhalten wir *symbolisch:*

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} u = u_0 &+ \left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \cdots\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \cdots\right]^2 \\ &+ \cdots \frac{1}{(n-1)!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_0 + \cdots\right]^{n-1} + R_n \end{aligned} \right.$$

und

$$(6) \qquad R_n = \frac{1}{n!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \cdots\right]^n_{\theta x,\ \theta y,\ \theta z.}$$

139. Der Eulersche Satz über Formen. Dieser Satz wurde schon in Nr. 90 bewiesen; da er jedoch von grofser Bedeutung ist, so wird es nicht überflüssig sein, hier noch einen andern Beweis zu geben. Es sei

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

eine homogene Funktion vom Grade n der m Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$. Multipliziert man alle Variabelen mit dem Faktor $(1 + \alpha)$, so erhält dadurch die Funktion den Faktor $(1 + \alpha)^n$; man hat also

$$f(x_1 + \alpha x_1, x_2 + \alpha x_2, \ldots x_m + \alpha x_m) = (1 + \alpha)^n f(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung in eine nach Potenzen von α geordnete Reihe, so ergiebt die linke Seite:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \alpha\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2!}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots x_m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots\right) + \cdots,$$

die rechte Seite:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m)\left[1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 + \cdots\right].$$

Diese Reihe, welche auch eine unendliche sein kann, wenn n nicht eine ganze positive Zahl ist, ist konvergent, wenn $\alpha < 1$ genommen wird. Die beiden nach Potenzen von α fortschreitenden Reihen müssen identisch sein; vergleicht man also die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von α, so ist

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = nf(x_1, x_2, \cdots x_m)$$
$$\left(x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots x_m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} + 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots\right) = n(n-1) f(x_1, x_2 \ldots x_m)$$

. . . .

Die erste dieser Gleichungen drückt die wesentliche Eigenschaft homogener Funktionen aus, welche wir ableiten wollten; sie umfafst alle folgenden Gleichungen, wie man leicht einsehen kann; denn auch die partiellen Ableitungen sind homogene Funktionen. Allgemein hat man *symbolisch:*

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) f(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

und ist n eine ganze positive Zahl und $k > n$, so wird

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots x_m \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^k = 0.$$

Sechstes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

§ 1. Funktionen einer einzigen Veränderlichen.

140. Definition der Extremwerte. Es sei $f(x)$ eine Funktion der Veränderlichen x, und x_0 irgend ein besonderer Wert von x. Kann man eine positive Zahl σ bestimmen, so dafs

$$f(x_0 + h) < f(x_0)$$

wird bei allen Werten von h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$, so sagt man, dafs die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ein Maximum hat. In diesem Falle ist $f(x_0)$ gröfser als alle Funktionswerte in der Umgebung von x_0 und $f(x_0)$ ein *Maximalwert* von $f(x)$.

Kann man dagegen eine positive Zahl σ bestimmen, so dafs

$$f(x_0 + h) > f(x_0)$$

ist bei allen Werten von h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$, so hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ein *Minimum* und $f(x_0)$ ist ein *Minimalwert* der Funktion.

Hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ein Maximum, so wächst sie, bevor x die Stelle x_0 erreicht, und nimmt ab, nachdem x die Stelle x_0 überschritten hat. Das Umgekehrte gilt für das Minimum. Die Funktion $f(x)$ wächst aber oder nimmt ab, je nachdem die Ableitung $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt, dafs bei Funktionen mit bestimmter Ableitung eine Änderung vom Wachsen zur Abnahme, oder von der Abnahme zum Wachsen dadurch angezeigt ist, dafs $f'(x)$ sein Zeichen wechselt. Diese Änderung erfordert, wenn die Ableitung nicht unstetig ist, dafs sie null wird. Also sind die Werte von x, welche zu einem Maximum oder Minimum der Funktion $f(x)$ gehören, unter denjenigen enthalten, für welche die Ableitung $f'(x)$ null wird, oder auch unter denjenigen, für welche sie unstetig wird. Auch sieht man ein, dafs eine Funktion mehrere Maxima und mehrere Minima haben kann, welche dann abwechselnd auf einander folgen, wenigstens solange $f(x)$ endlich und stetig bleibt.

141. Beispiele. 1. Betrachten wir zuerst die Funktion

$$f(x) = x(a - x);$$

man hat hier

$$f'(x) = a - 2x,$$

die Ableitung wird also null für $x = \frac{a}{2}$, und sie geht von einem positiven zu einem negativen Wert über, wenn x von $\frac{a}{2} - \sigma$ bis zu $\frac{a}{2} + \sigma$ wächst. Mithin ändert sich die Funktion zuerst wachsend und sodann abnehmend. Folglich geht sie durch ein Maximum, wenn $x = \frac{a}{2}$ wird; und ihr Maximalwert ist $\frac{a^2}{4}$.

2. Betrachten wir zweitens die Funktion

$$f(x) = (x - a)^{\frac{2}{3}} + b;$$

hier ist

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x - a)^{-\frac{1}{3}},$$

die Ableitung $f'(x)$ wird nur null für $x = \infty$. Aber sie wird unstetig, nämlich unendlich für $x = a$; dabei verwandelt sich das Vorzeichen vom negativen in das positive, wenn x wächst. Zu dem Werte a gehört also ein Minimum der Funktion $f(x)$ und dieser Minimalwert ist b.

142. Kriterium für die Existenz eines Extremwertes. Die vorstehenden Betrachtungen vervollständigt der *Taylor*sche Satz. Wir setzen voraus, dafs die Ableitungen, welche wir betrachten werden, stetig sind in der Umgebung der Stellen x, die den Maximis und Minimis entsprechen. Der

Fall der Unstetigkeit der Ableitungen mufs bei jedem einzelnen Probleme besonders untersucht werden.

Wir bezeichnen mit R_n, wie in dem vorigen Kapitel, den Rest der *Taylor*schen Reihe, welcher mit dem Gliede von der Ordnung n korrespondiert, und wiederholen hier, dafs man stets den Zuwachs h der Variabelen x seinem Betrage nach so klein voraussetzen kann, dafs der Betrag des Restes kleiner wird als der des letzten Gliedes, falls dieses sich nicht auf 0 reduziert (Nr. 115; 3).

Dies festgesetzt, hat man, wenn $f(x)$ die gegebene Funktion bezeichnet:

(1) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + R_2.$$

Wenn also $f'(x_0)$ nicht null ist, so ändert die Differenz

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

ihr Vorzeichen je nach dem Vorzeichen von h, und der Wert $f(x_0)$ ist weder ein Maximum noch ein Minimum. Nehmen wir also

$$f'(x_0) = 0$$

an; alsdann hat man nach der *Taylor*schen Formel

(2) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + R_3,$$

und die linke Seite hat dasselbe Vorzeichen wie $f''(x_0)$ für alle Werte von h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$, wenn σ hinreichend klein gewählt wird. Also ist $f(x_0)$ ein Maximal- oder ein Minimalwert, je nachdem

$$f''(x_0) < 0, \quad \text{oder} \quad f''(x_0) > 0.$$

Ist aber $f''(x_0) = 0$, so sagt die Formel (2) noch nichts Bestimmtes aus. Nehmen wir allgemein an, dafs

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0,\ \ldots\ f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ist und dafs die n^{te} Ableitung für $x = x_0$ nicht verschwindet; alsdann ergiebt die *Taylor*sche Gleichung:

(3) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}.$$

Diese Formel lehrt, dafs, wenn n ungerade ist, die Differenz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ihr Zeichen mit h wechselt, und folglich weder ein Maximum noch ein Minimum für $x = x_0$ besitzt.

Wenn dagegen n gerade ist, so behält diese Differenz das Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$, auch wenn h vom negativen zum positiven Wert übergeht; und in diesem Falle ist also $f(x_0)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem

$$f^{(n)}(x_0) < 0, \quad \text{oder} \quad f^{(n)}(x_0) > 0$$

ist. Man kann also den folgenden Satz aussprechen:

Satz. Die Funktion $f(x)$ erfülle in der Umgebung der Stelle x_0 die Forderung $\mathfrak{B}$. Alsdann hat sie an der Stelle $x = x_0$ dann und nur dann einen Extremwert, wenn die erste für $x = x_0$ nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung ist. $f(x_0)$ ist dann ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem jene Ableitung für $x = x_0$ negativ oder positiv ist.

§ 2. Anwendungen.

143. Die Funktion x^x. Diese Funktion ist ausreichend definiert nur für positive Werte von x. Rückt x vom Positiven her in die Stelle $x = 0$, so nimmt x^x den Grenzwert 1 an, rückt x in die Stelle $+\infty$, so wird x^x ebenfalls $+\infty$. Setzt man

$$y = x^x, \quad \text{oder} \quad ly = xlx,$$

so folgt durch Differentiation:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = lx + 1,$$

und indem man nochmals differentiiert:

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

Die gemeinsame Bedingung für ein Maximum oder Minimum ist $\frac{dy}{dx} = 0$, oder

$$lx + 1 = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{e},$$

und für diesen Wert von x ist

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = e.$$

Da also $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, so entspricht dem Werte $\frac{1}{e}$ ein Minimum. Ein Maximum ist hier innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = +\infty$ nicht vorhanden. Der Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ zeigt, dafs diese Ableitung, indem sie für $x = \frac{1}{e}$ null wird, von einem negativen zu einem positiven Wert übergeht. Es wäre daher nicht nötig gewesen, den Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu bilden, um die Existenz eines Minimums zu erschliefsen.

144. Die Funktion $x^m(a-x)^n$. Unter a verstehen wir eine positive, unter m und n ganze positive Konstante.

Es ist

$$y = x^m(a-x)^n \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x].$$

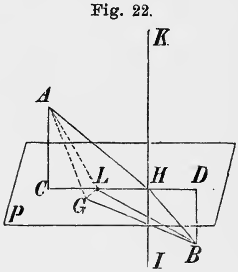
Wächst x, so wird die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ gleich 0 für $x = \frac{ma}{m+n}$, und geht dabei von einem positiven zu einem negativen Wert über. Die Funktion y wird also ein Maximum für

$$x = \frac{ma}{m+n}, \quad a - x = \frac{na}{m+n}, \quad \text{oder} \quad \frac{x}{m} = \frac{a-x}{n}.$$

Die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ wird auch 0 für $x = 0$, wenn $m > 1$, und für $x = a$, wenn $n > 1$. Aber sie ändert, indem sie null wird, nur dann ihr Zeichen, wenn der Exponent m oder n gerade ist. Alsdann geht sie von einem negativen zu einem positiven Werte über. Die Funktion y besitzt also ein Minimum für $x = 0$, wenn m gerade ist, und für $x = a$, wenn n gerade ist.

145. Problem von Fermat. *Zwei Räume sind durch eine Ebene P getrennt. Es soll der Weg bestimmt werden, den ein beweglicher Punkt zurücklegen mufs, um in der kürzesten Zeit von einem bestimmten Punkte A des ersten Raumes in einen bestimmten Punkt B des zweiten zu gelangen, wenn sich der Punkt im ersten Raume mit der konstanten Geschwindigkeit u, im zweiten mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt.*

Fig. 22.



Der gesuchte Weg setzt sich aus zwei Geraden zusammen, weil in jedem der beiden Räume der von dem Punkte zurückgelegte Weg proportional der verbrauchten Zeit ist; wenn also die Zeiten die kürzesten sein sollen, so müssen auch die Wege die kürzesten sein. Ferner befindet sich der Weg in der Ebene $ACDB$, welche senkrecht zur Ebene P durch die Punkte A und B gelegt ist und diese Ebene längs der Geraden CD schneidet. Denn betrachten wir die gebrochene Linie AGB, welche aufserhalb der Ebene $ACDB$ liegt, und fällen wir vom Punkte G, in welchem sie die Ebene P schneidet, GL senkrecht auf CD, so werden die Geraden AL und LB bezüglich kleiner als AG und GB; folglich wird auch die Zeit, welche der Punkt auf dem Wege ALB verbraucht, kleiner als die Zeit, welche für den Weg AGB erforderlich ist.

Dies festgestellt, bezeichnen wir mit a und b die Senkrechten AC und BD, welche von den Punkten A und B auf die Ebene P gefällt sind, mit c die Entfernung CD, und mit x die Entfernung eines beliebigen Punktes H auf CD vom Punkte C. Es ist

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BH = \sqrt{(c - x)^2 + b^2}.$$

Demnach wird die Zeit t, welche der bewegliche Punkt verbraucht, um von A nach B zu gelangen:

$$(1) \qquad t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v}.$$

Dies ist die Funktion von x, deren Minimum gesucht wird. Ein Maximum läfst die Aufgabe nicht zu. Die Vorzeichen der Wurzel sind positiv. x kann alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. In den beiden extremen Fällen ist t positiv unendlich grofs. Setzt man die Ableitung der Funktion t gleich 0, so folgt:

$$(2) \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{x}{u\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0,$$

und beseitigt man die Wurzelzeichen, so wird

$$x^2 v^2 (c - x)^2 + x^2 v^2 b^2 - (c - x)^2 u^2 x^2 - (c - x)^2 u^2 a^2 = 0.$$

Die Unbekannte x hängt also von einer Gleichung 4^{ten} Grades ab. Indessen kann man, ohne diese Gleichung zu lösen, welche auch durch Quadrierung der Wurzeln eingeführte, der ursprünglichen Aufgabe fremde Lösungen mit sich führt, die geometrische Eigenschaft feststellen, welche die gesuchte gebrochene Linie charakterisiert. Konstruieren wir KI senkrecht zur Ebene P im Punkte H, und bezeichnen wir mit i den Winkel AHK, mit r den Winkel IHB, so wird:

$$\sin r = \frac{DH}{BH} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

$$\sin i = \frac{CH}{AH} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

und folglich ergiebt die Gleichung (2), welche die Bedingung des Minimums ausdrückt,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v}. \tag{3}$$

Der Sinus des *Einfallswinkels* steht also zum Sinus des *Refraktionswinkels* in dem Verhältnis der Geschwindigkeiten, mit denen sich der Punkt im ersten und zweiten Raume bewegt. Daſs die gefundene Lösung wirklich ein Minimum liefert, lehrt das Verhalten von $\frac{dt}{dx}$. Es ist für jedes x, d. h. für jede Lage des Punktes H der Geraden CD:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{u\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{c-x}{v\sqrt{(c-x)^2+b^2}}.$$

Bezeichnen wir mit i' und r' die Winkel AHK und IHB, welche einer allgemeinen Lage des Punktes H entsprechen, so wird demnach:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin i'}{u} - \frac{\sin r'}{v}.$$

Nach Gleichung (3) läſst sich dies in die Form setzen:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin r'}{u}\left\{\frac{\sin i'}{\sin r'} - \frac{\sin i}{\sin r}\right\}.$$

Durchläuft nun der Punkt H die Gerade CD in der Richtung von C nach D, so wächst der Winkel i' beständig, während r' beständig abnimmt, also wird bei dieser Bewegung der Quotient $\frac{\sin i'}{\sin r'}$ beständig wachsen, und folglich ist die rechte Seite der letzten Gleichung negativ, wenn der Punkt H links von der Minimalstelle liegt, und er ist positiv, wenn der Punkt H rechts von der Minimalstelle liegt. Wächst also x von 0 bis $x = CD$, so wird $\frac{dt}{dx}$ vom Negativen zum Positiven durch die Null hindurchgehen. Wir haben also ein Minimum, wie proleptisch das Problem fordert.

146. Gröſster und kleinster Abstand eines Punktes von einer Kurve. Es seien a und b die Koordinaten des gegebenen

Punktes M_0 in Bezug auf zwei rechtwinklige Axen; x und y die Koordinaten der Punkte M auf der gegebenen Kurve. Die Ordinate y ist eine bestimmte gegebene Funktion von x, und das Quadrat der Entfernung des Punktes $M_0(a, b)$ von einem Punkte $M(x, y)$ ist

$$(1) \qquad v = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Es handelt sich darum, die Maximal- und Minimalwerte dieser Funktion von x zu bestimmen.

Man hat

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{dx} = (x - a) + (y - b)\dfrac{dy}{dx}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] + (y - b)\dfrac{d^2y}{dx^2}. \end{cases}$$

Die Bedingung $\frac{dv}{dx} = 0$ des Maximum oder Minimum ist hier

$$(3) \qquad (x - a) + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder

$$\frac{y - b}{x - a} \cdot \frac{dy}{dx} = -1.$$

$\frac{y - b}{x - a}$ ist der Richtungskoeffizient der Verbindungsgeraden des gegebenen Punktes M_0 mit dem gesuchten Kurvenpunkte M, $\frac{dy}{dx}$ der Richtungskoeffizient der Tangente im Punkte M. Die Gleichung drückt also aus, dafs die Verbindungsgerade eine *Normale* der gegebenen Kurve sein mufs.

Ist ein Punkt M durch die Gleichung (3) bestimmt, so gehört er zu einem Maximum oder einem Minimum der Entfernung, je nachdem $\frac{d^2v}{dx^2}$ positiv oder negativ wird. Wenn aber $\frac{d^2v}{dx^2}$ null wird, so mufs man zu den höheren Ableitungen übergehen, um zu entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden stattfindet. Dieser letzte Fall tritt im Besonderen dann ein, wenn $\frac{d^2v}{dx^2}$ null wird und $\frac{d^3v}{dx^3}$ von 0 verschieden ist; von Unstetigkeiten sehen wir hier ab.

Ist nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ an der fraglichen Stelle gerade null, so haben wir nach (2) ein Minimum; ist aber $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$, so denken wir uns die Gerade M_0M konstruiert, und lassen nun den Punkt M_0

alle möglichen Lagen auf ihr einnehmen; dann wird es eine Lage M' geben, für welche $\frac{d^2v}{dx^2}$ null wird. Nennt man $x'y'$ die Koordinaten dieses Punktes M', so hat man

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

und die zweite der Gleichungen (2) kann also in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{b-y'}{y-y'}.$$

Hieraus folgt, dafs der Wert M_0M ein Minimum oder ein Maximum sein wird, je nachdem $b-y'$ und $y-y'$ gleiche oder verschiedene Zeichen haben. Mit anderen Worten: es findet ein Minimum statt, wenn der Punkt M_0 zwischen M und M' sich befindet, im anderen Falle ein Maximum. Der Punkt M' ist, wie wir später (Nr. 198) sehen werden, nichts anderes als der *Krümmungsmittelpunkt*, welcher zum Punkte M der gegebenen Kurve gehört.

147. Die Kurve der vorigen Nummer ist ein Kreis. Nehmen wir an, dafs die gegebene Kurve ein Kreis ist mit der Gleichung

$$x^2+y^2=R^2;$$

indem man diese Gleichung differentiiert, wird

$$x+y\frac{dy}{dx}=0,\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Die Gleichung (3) der vorigen Nummer wird also

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0;$$

sie stellt die Gerade dar, welche den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, und diese schneidet die Peripherie in zwei Punkten, von denen der eine zu einem Minimum, der andere zu einem Maximum gehört. Der mit M' bezeichnete Punkt ist nämlich hier der Mittelpunkt des Kreises; denn seine Koordinaten $x'y'$ genügen den Gleichungen

$$\frac{y'}{b}-\frac{x'}{a}=0 \text{ und } 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0, \text{ also } -y'\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

also ist $x'=0$ und $y'=0$; und man erhält

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{R^2}{y^2}\frac{b}{y}.$$

Daraus folgt, dafs $\frac{d^2v}{dx^2}$ positiv oder negativ wird, je nachdem b und y von gleichem oder verschiedenem Zeichen sind.

148. Die Kurve der Nummer 146 ist eine Raumkurve. Ist die gegebene Kurve eine doppelt gekrümmte, oder liegt, falls sie eben ist, der gegebene Punkt nicht in ihrer Ebene, so hat man die drei rechtwinkligen Koordinaten im Raume anzuwenden. Das Quadrat der Entfernung des Punktes $M_0(a, b, c)$ von einem Kurvenpunkte $M(x, y, z)$ wird

$$v = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

und y und z sind gegebene Funktionen von x; ferner hat man

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = (x - a) + (y - b)\frac{dy}{dx} + (z - c)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - c)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Die Punkte mit den Koordinaten x, y, z, welche zu einem Maximum oder Minimum gehören können, sind durch die Gleichung $\frac{dv}{dx} = 0$ gegeben, oder

$$(x - a) + (y - b)\frac{dy}{dx} + (z - c)\frac{dz}{dx} = 0,$$

mit der man die beiden Gleichungen der gegebenen Kurve zu verbinden hat. Betrachtet man a, b, c als variabele Koordinaten, x, y, z als feste Gröfsen, so ist dieses die Gleichung einer Ebene, welche, wie später gezeigt wird, *normal* zur gegebenen Kurve ist, d. h. senkrecht steht zur Tangente des Kurvenpunktes M in diesem Punkte. Um nun das Maximum und Minimum zu unterscheiden, bemerken wir vor allem, dafs ein Minimum immer dann stattfinden wird, wenn $(y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - c)\frac{d^2z}{dx^2}$ verschwindet, d. h. wie wir später sehen werden, wenn M_0 auf der durch M gehenden Binormalen liegt (Nr. 264). Ist aber jener Ausdruck nicht null, so bezeichnen wir mit $x'\, y'\, z'$ die Koordinaten des Punktes M', welcher auf der Geraden MM' liegt und welcher den Ausdruck $\frac{d^2v}{dx^2}$ zu null macht, wenn in ihm (a, b, c) durch (x', y', z') ersetzt werden. Dieser ist durch die Gleichungen:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} + (z - z')\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{x-a}{x-x'} = \frac{y-b}{y-y'} = \frac{z-c}{z-z'}$$

bestimmt. Mit Hülfe der hieraus berechneten Werte der (x', y', z') kann man für den gegebenen Punkt (a, b, c) dem $\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}$ die Form geben:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]\frac{a-x'}{x-x'}.$$

Folglich wird

$$\frac{d^2v}{dx^2} > 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2v}{dx^2} < 0,$$

je nachdem $a - x'$ und $x - x'$ von gleichem oder ungleichem Zeichen sind; hieraus folgt, dafs ein Minimum stattfindet, wenn die Punkte M_0 und M auf derselben Seite der von den Punkten M' in der Normalebene gebildeten Geraden liegen, dagegen im andern Falle ein Maximum. Die von den Punkten M' gebildete Gerade, welche auch als Schnitt zweier benachbarten Normalebenen definiert werden kann, heifst die zum Kurvenpunkte M gehörige *Krümmungsaxe* (Nr. 263).

Liegt der Punkt M_0 auf der Krümmungsaxe, ist also

$$(x - a) + (y - b)\frac{dy}{dx} + (z - c)\frac{dz}{dx} = 0$$

und

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - c)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

so mufs man die dritte Ableitung bilden. Diese wird

$$\frac{1}{2}\frac{d^3v}{dx^3} = 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + 3\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dz}{dx} + (y - b)\frac{d^3y}{dx^3} + (z - c)\frac{d^3z}{dx^3}.$$

Nur wenn für die Koordinaten b und c auch dieser Ausdruck 0 wird, kann die Entfernung M_0M ein Maximum oder ein Minimum sein. Dieser besondere Punkt auf der Krümmungsaxe ist der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel des Punktes M (Nr. 276). Für jeden andern Punkt auf der Axe findet weder ein Minimum noch ein Maximum statt.

149. Nebenbedingungen in Gestalt von Ungleichheiten. Bisweilen handelt es sich um die Bestimmung des gröfsten und des kleinsten Wertes, welchen eine Funktion $f(x)$ der Variabelen x annimmt, während x nur zwischen gegebenen

Grenzen a und b variiert. Solch ein Maximum oder Minimum heifst ein *relatives*. Um die Frage zu lösen, hat man die Änderungen der Funktion $f(x)$ mit Zuhilfenahme ihrer Ableitung zu untersuchen. Bleibt, während x von a bis b variiert, die Ableitung endlich und stets von gleichem Vorzeichen, so sind die relativen Maxima und Minima die extremen Werte $f(a)$ und $f(b)$. Hat die Funktion mehrere Maxima und Minima innerhalb der betrachteten Grenzen, so wird der gröfste unter den Maximalwerten das *Maximum Maximorum* und der kleinste unter den Minimalwerten das *Minimum Minimorum* genannt. In diesem Falle genügt das Maximum Maximorum den früheren Bedingungen, wenn es die extremen Werte $f(a)$ und $f(b)$ übertrifft, desgleichen das Minimum Minimorum, wenn es kleiner ist als diese extremen Werte.

Handelt es sich bei einer Aufgabe um die Bestimmung eines Maximums oder Minimums, und trifft man dabei solch eine Wahl der Variabelen, dafs die unabhängige innerhalb bestimmter Grenzen bleibt, so kann es eintreten, dafs für die Funktion, deren Maximum oder Minimum gesucht wird, nur ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum vorhanden ist.

Nehmen wir z. B. die Aufgabe der Nr. 147, bei der es sich um die kürzeste oder längste Entfernung eines Punktes von einem Kreise handelt. Wenn wir die Abscissenaxe durch den gegebenen Punkt legen, so ist das Maximum oder Minimum des Ausdruckes

$$V = (x - a)^2 + y^2$$

zu bestimmen. Gemäfs der Gleichung des Kreises ist aber $y^2 = R^2 - x^2$, und man hat also

$$V = (x - a)^2 + R^2 - x^2,$$

oder

$$V = R^2 + a^2 - 2ax.$$

Es ist ersichtlich, dafs diese Funktion V, welche in x linear ist, weder ein Maximum noch ein Minimum hat, wenn x unbeschränkt ist. Für unsere Aufgabe erfordert indessen die Gleichung des Kreises $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, dafs die unabhängige Veränderliche x zwischen $-R$ und $+R$ bleibt. Nehmen wir

a positiv an, so wird das relative Minimum und das relative Maximum von V

$$(a - R)^2 \quad \text{und} \quad (a + R)^2,$$

die extremen Werte $x = -R$ und $x = +R$ geben also die Lösung der Aufgabe.

150. Die Funktion ist implicite durch eine Gleichung gegeben. Ist eine Funktion y mit der Variabelen x durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

verbunden, so folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums verlangt, dafs $\frac{dy}{dx}$ null wird; man hat also:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0. \tag{3}$$

Bestimmt man die gemeinsamen Lösungen $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots$ der Gleichungen (1) und (3), so sind die Werte von x, welche zu Maximal- und Minimalwerten von y gehören, in der Reihe $x_0, x_1 \ldots$ enthalten. Wir sehen hierbei von den Maximis und Minimis ab, welche zu Werten von x gehören können, für die $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr stetig bleibt.

Es kann auch eintreten, dafs die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

gemeinsame Lösungen besitzen, welche zugleich auch der Gleichung (1) genügen. Für solche Werte von x, denen ein Wert y entspricht, der zugleich die Gleichungen (1) und (4) erfüllt, kann der Wert von $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr aus der Gleichung (2) berechnet werden. Wir beschränken uns hier auf diese Bemerkung, die späterhin gelegentlich der Untersuchung singulärer Punkte einer Kurve (Nr. 181 ff.) weiter ausgeführt werden wird.

Um nun zu entscheiden, ob eine Lösung der Gleichungen (1) und (3) wirklich zu einem Maximum oder Minimum gehört, mufs man zu den höheren Ableitungen von y übergehen. Die Differentiation der Gleichung (2) ergiebt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

und da $\frac{dy}{dx}$ null ist, so hat man, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ endlich bleiben und $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes, in welchem man das gefundene Wertsystem $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots$ zu substituieren hat, entscheidet über das Maximum oder Minimum. Wird aber $\frac{d^2 y}{dx^2}$ gleich null, so hat man die Untersuchung nach der Theorie der Nr. 142 weiter zu führen.

151. Beispiel. *Das Maximum der Funktion y zu bestimmen, welche durch die Gleichung*

$$f(x, y) = y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

definiert ist, wo a eine positive Konstante bedeutet.

Es ist

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = -ay + x^2, \quad \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax,$$

und die Elimination von y zwischen den Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

giebt:

$$x^6 - 2a^3 x^3 = 0,$$

oder

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Die entsprechenden Werte von y sind:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Das erste System $x = 0, y = 0$ macht auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ zu null und gehört zu einem singulären Punkte; das zweite System $(x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4})$ liefert ein Maximum; denn es ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-2x}{y^2 - ax} = \frac{-2}{a}$$

152. Die Funktion ist implicite durch mehrere Gleichungen gegeben. Wir wollen noch den allgemeinen Fall betrachten, bei welchem $m+1$ Variabele $x, x_1, x_2, \ldots x_m$ durch m Gleichungen mit einander verbunden sind:

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_m(x, x_1, x_2, \ldots x_m) = 0, \end{cases}$$

und nehmen an, dafs die Maximal- und Minimalwerte von einer dieser Variabelen, z. B. x_1, zu bestimmen sind. Eine unter den Variabelen, z. B. x, läfst sich zur unabhängigen wählen. Dabei lassen wir die Werte von x, für welche die Ableitung $\frac{dx_1}{dx}$ etwa unstetig wird, bei Seite. Die Bedingung des Maximums und Minimums wird nun

$$\frac{dx_1}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad dx_1 = 0.$$

Die Differentiation der Gleichungen (1) ergiebt:

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} dx_m = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m} dx_m = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} dx + \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} dx_m = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit X_1 die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}, \end{vmatrix}$$

und durch X die Determinante, welche aus ihr hervorgeht, wenn man die Elemente der ersten Kolonne bezüglich durch

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \ldots \frac{\partial f_m}{\partial x}$$

ersetzt, so ist das Resultat der Elimination der Differentiale $dx_2 \ldots dx_m$ aus den Gleichungen (2)

(3) $$X dx + X_1 dx_1 = 0.$$

Man hat also für ein Maximum und Minimum

(4) $$\frac{X}{X_1} = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den m Gleichungen (1), so erhält man ein System $m + 1$ simultanen Gleichungen, deren gemeinsame Lösungen zu bestimmen sind.

Dabei kann es eintreten, dafs die Gleichungen (1) für gewisse Werte der Variabelen zusammen mit den Gleichungen

$$X = 0, \quad X_1 = 0$$

erfüllt sind; dieser Fall ist ebenso wie der, dafs $X_1 = 0$ ist jedesmal besonders zu untersuchen.

Um nun die Scheidung zwischen den Maximis und Minimis zu treffen, hat man den Ausdruck für $\frac{d^2 x_1}{dx^2}$ zu bilden, und zu diesem Zwecke wird man die Gleichungen (3) differentiieren. Man erhält aus

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{X}{X_1},$$

$$\frac{d^2 x_1}{dx^2} = -\frac{X_1 \frac{dX}{dx} - X \frac{dX_1}{dx}}{X_1^2}.$$

Hier treten rechts die Ableitungen $\frac{dx_1}{dx}, \ldots \frac{dx_m}{dx}$ auf. Ihre Werte sind aus den Gleichungen (2) zu substituieren. Man kann auch die Gleichungen (2) total nach x differentiieren und durch Elimination der Differentiale $d^2x_2, \ldots d^2x_m$ die Gleichung für d^2x_1 bilden. In welcher Weise man weiter zu gehen hat, falls die Ableitungen höherer Ordnung zu betrachten sind, ist leicht zu sehen.

153. Nebenbedingungen in Gestalt von Gleichungen. Die vorstehende Untersuchung ist allgemein und umfafst auch den Fall, in welchem die Maxima und Minima einer expliciten Funktion

$$F(x, x_1, \ldots x_{m-1})$$

von m Variabelen zu bestimmen sind, welche durch $m - 1$ Gleichungen

$$f_1(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0,$$
$$f_2(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0 \ldots f_{m-1}(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0$$

mit einander verbunden sind. Denn fügt man diesen Gleichungen noch die folgende hinzu:

$$u - F(x, x_1, \ldots x_{m-1}) = 0,$$

so hat man ein System von m Gleichungen, mit $m + 1$ Veränderlichen, und es handelt sich um die Bestimmung der Maxima und Minima von einer dieser Variabelen, nämlich u, was die in der vorigen Nummer gelöste Aufgabe ist.

§ 3. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

154. Definition der Extremwerte. Es sei $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion von mehreren unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$ Man sagt, dafs diese Funktion ein Maximum hat an der Stelle $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots$, wenn eine positive Zahl σ gefunden werden kann, so dafs die Differenz

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

negativ ist für alle $h, k, l, \ldots$ zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$. $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ ist dann der gröfste Funktionswert unter allen in der Umgebung der Stelle $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots$ Ist dagegen $f(x_0, y_0, z_0)$ unter allen Funktionswerten in der Umgebung der Stelle $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots$ der kleinste, so hat f dort ein Minimum.

Es sei $x = x_0, y = y_0, \ldots$ eine Stelle, an der $f(x, y, z, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum besitzt, und es erfülle f nebst seinen ersten Ableitungen in der Umgebung jener Stelle die Forderung $\mathfrak{B}$. Wir erteilen jetzt $y, z, \ldots$ die besonderen Werte $y = y_0, z = z_0, \ldots$ Die Funktion $f(x, y_0, z_0, \ldots)$ hängt alsdann nur von der Variabelen x ab, und da sie ein Maximum oder Minimum wird für $x = x_0$, so wird die Ableitung

$$\frac{\partial f(x, y_0, z_0 \ldots)}{\partial x}$$

null für $x = x_0$. Also mufs bei unseren Annahmen die partielle Ableitung der gegebenen Funktion nach x, nämlich

$$\frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial x}$$

null sein oder unstetig werden für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Dieselbe Überlegung bezieht sich auch auf die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial z} \ldots,$$

und folglich gehören die Werte von $x, y, z \ldots$, denen ein Maximum oder ein Minimum der Funktion f entspricht, zu denjenigen, für welche das totale Differential df dieser Funktion null wird, oder eine Unstetigkeit erleidet.

155. Notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremwertes. Wie bei den Funktionen Einer Veränderlichen, so bietet auch bei den Funktionen mehrerer Veränderlichen der *Taylor*sche Satz ein Mittel, die Untersuchung der Extremwerte von Funktionen noch mehr ins Einzelne durchzuführen. Freilich ist dabei von vorne herein zu bemerken, dafs die Resultate hier weit weniger befriedigend ausfallen als bei den Funktionen Einer Veränderlichen.

Die Funktion $f(x, y, \ldots)$ besitze an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ einen Extremwert; etwa ein Minimum, um die Ideen zu fixieren. Sie erfülle ferner in der Umgebung jener Stelle die Forderung $\mathfrak{B}$. Alsdann ist für alle Werte $h, k, l, \ldots$ in der Umgebung der Stelle $h = 0$, $k = 0, \ldots$:

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) > 0.$$

Ist umgekehrt diese Differenz für alle $h, k, l, \ldots$ in der Umgebung der Stelle $h = 0$, $k = 0, \ldots$ positiv, so besitzt $f(x, y, \ldots)$ ein Minimum an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ Entwickelt man aber $f(x_0 + h,\ y_0 + k, \ldots)$ nach Potenzen von $h, k, \ldots$, so wird:

$$(1)\ f(x_0+h, y_0+k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \cdots\right)_{x_0, y_0, \ldots} + R_2.$$

Die Indices in der Klammer rechter Hand deuten an, dafs man in $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$ für $x, y, \ldots$ die Werte $x_0, y_0, \ldots$ einsetzen soll. R_2 hatten wir in der symbolischen Form dargestellt:

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \cdots\right)^2_{x_0+\vartheta h,\ y_0+\vartheta k, \ldots}.$$

Hierin mufs nach erfolgter Quadrierung $(\partial f)^2$ durch $\partial^2 f$ ersetzt und dann in die so entstehenden Ableitungen 2ter Ordnung für $x, y, \ldots, x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k, \ldots$ eingesetzt werden.

Nun verschwinden aber nach den Entwickelungen der vorigen Nummer die partiellen Ableitungen erster Ordnung sämtlich an der Stelle $x = x_0,\ y = y_0, \ldots$; es ist dort:

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ldots$$

Also wird die Gleichung (1) einfach:

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) = R_2.$$

Besitzt daher f an der Stelle $x = x_0,\ y = y_0, \ldots$ ein Minimum, so mufs R_2 positiv sein für alle Stellen $h, k, l, \ldots$ in der Umgebung der Stelle $h = 0,\ k = 0, \ldots$ Umgekehrt, hat R_2 diese Eigenschaft, so besitzt f an der fraglichen Stelle ein Minimum. Besitzt hingegen R_2 für alle Stellen $h, k, l, \ldots$ in der Umgebung der Stelle $h = 0,\ k = 0, \ldots$ nur negative Werte, so wird f an der Stelle $x = x_0,\ y = y_0, \ldots$ ein Maximum und umgekehrt. Kann aber R_2 in der Umgebung der Stelle $h = 0$, $k = 0, \ldots$ sowohl positive als negative Werte annehmen, so existiert an der Stelle $(x_0, y_0, \ldots)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Es gilt somit der

Satz. Die Funktion $f(x, y, \ldots)$ erfülle in der Umgebung der Stelle $x = x_0,\ y = y_0, \ldots$ die Forderung $\mathfrak{B}$. Damit die Funktion f an jener Stelle einen Extremwert besitze, sind zwei Bedingungen notwendig und hinreichend:

Einmal müssen an jener Stelle alle ersten Ableitungen verschwinden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ldots$$

Zweitens mufs der Ausdruck:

$$R_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \cdots\right)^2_{x_0 + \vartheta h,\ y_0 + \vartheta k, \ldots},$$

welcher in der Entwickelung von f nach Potenzen der $h, k, \ldots$ auftritt, für alle $h, k, \ldots$ in der Umgebung der Stelle $h = 0$, $k = 0, \ldots$ sein Zeichen behalten.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so entspricht dem negativen Vorzeichen von R_2 ein Maximum, dem positiven ein Minimum.

156. Notwendiges Kriterium für die Existenz eines Extremwertes. Das im vorigen Paragraphen aufgestellte Kriterium ist praktisch häufig unbrauchbar. Denn ganz abgesehen von den Schwierigkeiten, die es hat im einzelnen Falle zu entscheiden, ob der Ausdruck R_2 sein Zeichen behält, so stört auch der Umstand, dafs die Gröfse ϑ ihrem Werte nach unbekannt ist und dafs man nur weifs, dafs sie zwischen 0 und 1 liegt.

Man wird daher um die Extremwerte einer Funktion, die die Forderung $\mathfrak{B}$ erfüllt, zu finden, sich meist mit der Auflösung der Gleichungen begnügen müssen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ldots,$$

deren Zahl mit der der Unbekannten $x, y, \ldots$ übereinstimmt. Die Entscheidung, ob einem Lösungssysteme $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ ein Extremwert entspricht und, wenn das der Fall ist, ob er ein Maximum oder Minimum ist, kann dann häufig im einzelnen Falle aus der Natur der Aufgabe gefolgert werden.

Immerhin möge ein neuer Weg hier zur Bestimmung von Extremwerten eingeschlagen werden, welcher uns verhältnismäfsig einfache notwendige Kriterien für das Maximum und Minimum liefert.

Zu dem Zwecke setzen wir in f ein:

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \ldots$$

Dadurch wird f eine Funktion von t:

$$f(x, y, \ldots) = f(x_0 + ht,\ y_0 + kt, \ldots) = F(t).$$

Besitzt nun f als Funktion von $x, y, \ldots$ an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ ein Maximum (Minimum), so besitzt auch F als Funktion von t an der Stelle $t = 0$ ein Maximum (Minimum), und zwar gilt dies, welches auch die Werte $h, k, \ldots$ sein mögen, wenn sie nur in der Umgebung der Stelle $h = 0$, $k = 0, \ldots$ liegen. Besitzt nun $F(t)$ an der Stelle $t = 0$ einen Extremwert, so ist, wenn wir wieder von den Fällen der Unstetigkeit absehen:

$$F'(0) = 0$$

und für ein Maximum ist $F''(0)$ nicht positiv, für ein Minimum $F''(0)$ nicht negativ.

Nun ist aber symbolisch:

$$F'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \cdots\right)_{x_0, y_0, \ldots}$$

$$F''(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \cdots\right)^2_{x_0, y_0, \ldots}.$$

Also mufs für alle $h, k, \ldots$ an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ sein:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \cdots = 0.$$

Dies führt auf die alten Gleichungen (2) der vorigen Nummer.

Aufserdem mufs aber noch sein:

$$(2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \cdots\right)^2 \leqq 0 \text{ für das Max. u.} \geqq 0 \text{ für das Min.}$$

Um diese Bedingungen einfacher schreiben zu können, setzen wir $h = dx$, $k = dy, \ldots$; dann wird der Ausdruck (1) dieser Nummer das totale Differential erster Ordnung df und der Ausdruck (2) dieser Nummer das totale Differential zweiter Ordnung $d^2 f$. Also gilt der

Satz. $f(x, y, \ldots)$ erfülle in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ die Forderung $\mathfrak{B}$. Soll f an jener Stelle ein Maximum (Minimum) sein, so mufs dort das totale Differential erster Ordnung für beliebige Werte der $dx, dy, \ldots$ verschwinden:

$$df = 0,$$

und das totale Differential zweiter Ordnung darf an jener Stelle ebenfalls für willkürliche Variabele $dx, dy, \ldots$ nie positiv (nie negativ) sein. Es mufs also sein

$$\textit{Für das Max.: } d^2 f \leqq 0, \qquad \textit{für das Min.: } d^2 f \geqq 0.$$

157. Kriterium für einen Spezialfall. Sucht man die Extremwerte einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen, so kommt man meist mit dem folgenden Satze aus:

Satz. Die Funktion $f(x, y)$ erfülle in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ die Forderung $\mathfrak{B}$. Ihre drei Ableitungen zweiter Ordnung seien an jener Stelle nicht alle null. Dann besitzt $f(x, y)$ an jener Stelle einen Extremwert, wenn einmal die partiellen Ableitungen erster Ordnung dort verschwinden:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

und wenn sodann der Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \tag{2}$$

an jener Stelle positiv ist. Und zwar hat man ein Maximum oder Minimum, je nachdem für $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \textit{oder} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

ist.

Hat hingegen der Ausdruck (2) *an der Stelle* $x = x_0$, $y = y_0$ *ein negatives Zeichen, so existiert kein Extremwert, ist er null, so bleibt die Existenz eines Maximums oder Minimums unentschieden.*

Um diesen Satz zu erweisen, nehmen wir zunächst an, der Ausdruck (2) ist positiv.

An der Stelle (x_0, y_0) wird:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\{f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2\}_{x_0+\vartheta h,\, y_0+\vartheta k}.$$

Da (2) positiv angenommen ist, so ist f''_{xx} an der Stelle (x_0, y_0) nicht null. Da f''_{xx} stetig sein soll in der Umgebung von (x_0, y_0), so hat es für $x = x_0 + \vartheta h$, $y = y_0 + \vartheta k$ dasselbe Vorzeichen wie an der Stelle (x_0, y_0), sobald nur $|h|$ und $|k|$ hinreichend klein gewählt sind. Wir können also setzen:

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= \left\{\frac{1}{2f''_{xx}}\left[(f''_{xx}h + f''_{xy}k)^2 + (f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy})k^2\right]\right\}_{x_0+\vartheta h,\, y_0+\vartheta k}. \end{aligned}$$

Da für $x = x_0$, $y = y_0$ der Ausdruck (2) positiv ist, so gilt Gleiches für $x = x_0 + \vartheta h$, $y = y_0 + \vartheta k$, sobald nur $|h|$ und $|k|$ hinreichend klein gewählt sind. Also ist [ ] für alle h, k in der Umgebung von $h = 0$, $k = 0$ positiv und die rechte Seite hat immer ein festes Zeichen, nämlich das von f''_{xx} an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$. Also existiert ein Extremwert. Die rechte Seite ist aber negativ, wenn f''_{xx} an der Stelle (x_0, y_0) negativ ist, im entgegengesetzten Falle positiv. Also haben wir im ersten Falle ein Maximum, im zweiten ein Minimum, wie behauptet.

Der Beweis verliert seine Kraft, wenn $f''_{xx}f''_{yy} - f''^2_{xy}$ an der Stelle (x_0, y_0) verschwindet, denn dann kann man nicht schliefsen, dafs in der Umgebung jener Stelle der Ausdruck f''_{xx} positiv ist.

Ist endlich $f''_{xx} f''_{yy} - f''^{2}_{xy}$ in der Stelle (x_0, y_0) negativ, so erhält die Klammer [ ], je nachdem wie man über das Verhältnis $\frac{h}{k}$ verfügt, positive oder negative Werte, wie klein auch $|h|$, $|k|$ gewählt sein mögen. Folglich existiert in diesem Falle kein Extremwert.

158. Bedingung dafür, dafs d^2f beständig positiv bleibt. In dem Falle eines Minimums oder Maximums mufs beständig

$$d^2f \geqq 0 \quad \text{oder} \quad d^2f \leqq 0$$

für alle Werte von $h, k, l, \ldots$ in der Umgebung der Stelle $h = 0$, $k = 0, \ldots$ sein. Wir wollen nun die Bedingungen dafür untersuchen, dafs die eine oder die andere dieser Ungleichungen erfüllt ist, und betrachten nur den Fall

$$d^2f > 0,$$

welche einem Minimum entspricht; der Fall $d^2f < 0$ ist hierauf zurückführbar, wenn man f in $-f$ verwandelt; den Fall $d^2f = 0$ diskutieren wir hier nicht weiter.

Es ist

$$(1)\quad d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} hk + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} hl + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} kl + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} l^2 + \cdots$$

Setzt man

$$h = \frac{\varepsilon}{E}\xi, \quad k = \frac{\varepsilon}{E}\eta, \quad l = \frac{\varepsilon}{E}\zeta \ldots,$$

wobei E einen positiven beliebig grofsen Wert bezeichnet so ist

$$(2)\quad \frac{E^2}{\varepsilon^2} d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\xi\eta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}\xi\zeta \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\eta\zeta + \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \cdots$$

Wenn nun die Gröfsen $h, k, l, \ldots$ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ variieren, so variieren $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zwischen $-E$ und $+E$; andererseits ist E beliebig grofs. Also verlangt die Ungleichung $d^2f > 0$, dafs die rechte Seite der Gleichung (2) für alle Werte der Variabelen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ positiv bleibt.

Mithin erfordert die gestellte Aufgabe die Ermittelung der Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit eine quadratische Form von m Variabelen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durchaus positiv bleibt. Die rechte Seite der Gleichung (2) bezeichnen wir mit V und setzen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\eta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\zeta + \cdots = P, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\eta\zeta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \cdots = Q, \end{cases}$$

so ist

$$(4) \qquad V = A\xi^2 + 2P\xi + Q.$$

Da die Funktion V sich auf $A\xi^2$ reduziert, wenn $\eta, \zeta, \ldots$ gleich null gesetzt werden, so mufs man zunächst haben

$$A > 0.$$

Indem man sodann

$$(5) \qquad V_1 = AQ - P^2$$

setzt, folgt:

$$(6) \qquad AV = (A\xi + P)^2 + V_1.$$

Der erste Teil dieses Wertes von AV verschwindet für $\xi = -\dfrac{P}{A}$, welche Werte auch $\eta, \zeta, \ldots$ haben mögen. Also mufs die Gröfse V_1 beständig positiv sein.

Also sind die gesuchten Bedingungen dafür, dafs V beständig positiv ist: *erstlich*, dafs $A > 0$ ist, *zweitens*, dafs V_1 beständig positiv ist. V_1 ist aber, ebenso wie V eine quadratische Form, enthält jedoch nur noch $m - 1$ Variabele. Mithin kann man für V_1 dieselben Betrachtungen wie bei V anstellen, und findet als Bedingung dafür, dafs V_1 beständig positiv ist: *erstens*, dafs eine bestimmte Gröfse $A_1 > 0$ ist, *zweitens*, dafs eine gewisse homogene Funktion zweiter Ordnung von $m - 2$ Variabelen beständig positiv bleibt. Nun ist leicht zu sehen, dafs man, indem man so fortfährt, höchstens m Bedingungen erhält:

$$A > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0 \ldots, \quad A_{m-1} > 0,$$

welche notwendig und hinreichend sind, damit V beständig positiv bleibt.

Im Besonderen erhält man für den Fall, dafs f nur von zwei Variabelen x und y abhängt, wieder die Bedingungen der Nr. 157.

§ 4. Anwendungen.

159. Maximum der Funktion

$$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\lambda (a - x - y - z \cdots - u)^\mu,$$

a soll eine positive Konstante, und die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ sollen positive ganze Zahlen bedeuten.

Es ist:

$$\frac{df}{f} = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} + \gamma \frac{dz}{z} + \cdots \lambda \frac{du}{u} - \mu \frac{dx + dy + dz \cdots + du}{a - x - y - z \cdots - u},$$

$$\frac{d^2 f}{f} - \left(\frac{df}{f}\right)^2 = -\alpha \left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \cdots - \lambda \left(\frac{du}{u}\right)^2 - \mu \frac{(dx + dy + dz \cdots + du)^2}{(a - x - y - z \cdots - u)^2}.$$

Die Gleichung $df = 0$ kann durch die Werte null der Variabelen $x, y, z \ldots u$ erfüllt werden, und es ist leicht zu erkennen, in welchen Fällen diesen Werten ein Maximum oder Minimum entspricht. Wir sehen davon hier ab. Dann ergiebt die Bedingung $df = 0$:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{z} \cdots = \frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{a - x - y - z \cdots - u},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \cdots = \frac{u}{\lambda} = \frac{a - x - y - z \cdots - u}{\mu} = \frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots \lambda + \mu}$$

und

$$f = \left(\frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots \mu}\right)^{\alpha + \beta + \cdots \lambda + \mu} \cdot \alpha^\alpha \beta^\beta \ldots \lambda^\lambda \mu^\mu.$$

Endlich findet man aus der Gleichung für $d^2 f$, weil $df = 0$ ist:

$$d^2 f = f\left[-\alpha \left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \cdots - \lambda \left(\frac{du}{u}\right)^2 - \mu \frac{(dx + dy + \cdots du)^2}{(a - x - y - \cdots - u)^2}\right],$$

und dieser Wert ist immer negativ. Gleiches gilt von $R_2 = d'^2 f$; also ist der obige Wert von f ein Maximum.

160. Maxima und Minima der Entfernung zweier Punkte, welche auf zwei gegebenen Kurven liegen.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes M auf der ersten Kurve seien x, y, z, die Koordinaten eines Punktes M'

auf der zweiten Kurve seien x', y', z', so ist das Quadrat der Entfernung MM':

$$(1)\qquad V = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Hier sind zwei Variabele unabhängig; als solche kann man x und x' wählen, y und z werden gegebene Funktionen von x, y' und z' gegebene Funktionen von x'. Es ist nun

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} = (x - x') + (y - y')\frac{dy}{dx} + (z - z')\frac{dz}{dx}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x'} = -(x - x') - (y - y')\frac{dy'}{dx'} - (z - z')\frac{dz'}{dx'}; \end{cases}$$

ferner:

$$(3)\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y - y')\frac{d^2 y}{dx^2} + (z - z')\frac{d^2 z}{dx^2}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'} = -\left(1 + \frac{dy'}{dx'}\frac{dy}{dx} + \frac{dz'}{dx'}\frac{dz}{dx}\right), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} = 1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 - (y - y')\frac{d^2 y'}{dx'^2} - (z - z')\frac{d^2 z'}{dx'^2}. \end{cases}$$

Die gemeinsamen Bedingungen für ein Maximum oder Minimum sind also:

$$(4)\qquad \begin{cases} (x - x') + (y - y')\frac{dy}{dx} + (z - z')\frac{dz}{dx} = 0, \\ (x - x') + (y - y')\frac{dy'}{dx'} + (z - z')\frac{dz'}{dx'} = 0. \end{cases}$$

Die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dy'}{dx'}, \frac{dz'}{dx'}$ sind ebenso wie die Werte von y, z, y', z' durch die Gleichungen der beiden Kurven gegeben, man erhält so ein System von zwei Gleichungen zur Bestimmung von x und x'. Wird für ein Wertepaar (x, x'), welches aus diesen Gleichungen bestimmt ist, der Ausdruck:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'}\right)^2 > 0,$$

so existiert ein Maximum oder Minimum; das Erstere, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$, das letztere, wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$. Ist (5) dagegen negativ, so entspricht dem gefundenen Wertepaare (x, x') weder ein Maximum noch ein Minimum. Ist (5) null, so bleibt die Frage unentschieden.

Die Gleichung (4) besagt, wie später gezeigt wird, daſs die durch die Punkte x, y, z und x', y', z' gelegte Gerade normal zu den gegebenen Kurven ist. Dies folgt auch schon aus dem in Nr. 146 Gesagten.

161. Die Kurven des vorigen Beispieles 160 sind zwei Gerade. Sind die beiden Kurven zwei nicht parallele gerade Linien mit den Gleichungen:

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

und

$$x' = a'z' + \alpha', \quad y' = b'z' + \beta',$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{dz'}{dx'} = \frac{1}{a'},$$

und die zweiten Ableitungen $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2y'}{dx'^2}, \frac{d^2z'}{dx'^2}$ werden 0. Hieraus folgert man unmittelbar, daſs die Bedingungen für ein Minimum erfüllt sind. Die Gleichungen (4) von Nr. 160 sind hier:

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0,$$
$$a'(x - x') + b'(y - y') + (z - z') = 0,$$

und man kann sie durch zwei der folgenden drei ersetzen:

$$(a' - a)(x - x') + (b' - b)(y - y') = 0,$$
$$(ba' - b'a)(x - x') - (b' - b)(z - z') = 0,$$
$$(ba' - b'a)(y - y') + (a' - a)(z - z') = 0.$$

Aus den Gleichungen der Geraden aber folgt:

$$(b' - b)(x - x') - (a' - a)(y - y') + (ba' - ab')(z - z')$$
$$= (a' - a)(\beta' - \beta) - (b' - b)(\alpha' - \alpha).$$

Erhebt man diese vier Gleichungen ins Quadrat und summiert sie, so wird:

$$[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2][(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (ab'-a'b)^2]$$
$$= [(a'-a)(\beta'-\beta) - (b'-b)(\alpha'-\alpha)]^2.$$

Hieraus folgt der bekannte Ausdruck für den kürzesten Abstand zweier Geraden, nämlich:

$$\sqrt{V} = \frac{(a' - a)(\beta' - \beta) - (b' - b)(\alpha' - \alpha)}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (ab' - a'b)^2}}.$$

Daſs dieser Wert wirklich ein Minimum ist, ist einmal geometrisch klar. Man findet aber auch durch Rechnung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'}\right)^2=4\,\frac{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}{a^2a'^2}>0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{a^2+b^2+1}{a^2}>0.$$

162. Maxima und Minima der Entfernung eines Punktes von einer Fläche.

Es seien a, b, c die rechtwinkligen Koordinaten des gegebenen Punktes M_0 und x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Fläche. Das Quadrat der Entfernung dieser beiden Punkte ist

$$V=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2.$$

z ist eine gegebene Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y, und wir wollen setzen:

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$dp=r\,dx+s\,dy,$$
$$dq=s\,dx+t\,dy.$$

Darnach erhält man:

$$(1)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial x}=(x-a)+p(z-c),\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial y}=(y-b)+q(z-c),\end{cases}$$

ferner:

$$(2)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=1+p^2+r(z-c),\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=pq+s(z-c),\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=1+q^2+t(z-c);\end{cases}$$

endlich, wenn man der Abkürzung halber setzt,

$$(3)\qquad \begin{cases}A=rt-s^2,\\ B=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t,\\ C=1+p^2+q^2,\end{cases}$$

so wird

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]=A(z-c)^2+B(z-c)+C.$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums ergiebt:

$$(4)\qquad \begin{aligned}(x-a)+p\,(z-c)&=0,\\ (y-b)+q\,(z-c)&=0.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen, verbunden mit der Gleichung der Fläche, sind die Koordinaten x, y, z zu bestimmen. Man wird später sehen, dafs dies genau die Gleichungen der Flächennormale im Punkte x, y, z sind, wenn man a, b, c als variabele Koordinaten, x, y, z als feste betrachtet.

Damit aber ein Punkt $M\,(x, y, z)$, der auf diese Weise bestimmt ist, wirklich zu einem Maximum oder Minimum gehört, mufs

$$A(z-c)^2 + B(z-c) + C \geqq 0 \tag{5}$$

sein. Wir bestimmen eine Gröfse Z derart, dafs

$$A(z-Z)^2 + B(z-Z) + C = 0 \tag{6}$$

wird. Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind immer reell, denn es ist die Discriminante dieser Gleichung positiv, nämlich

$$\begin{aligned} B^2-4AC &= [(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2) \\ &= (1+p^2)(1+q^2)p^2q^2\left[\frac{2s}{pq}-\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right]^2 \\ &\quad+(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Sind z' und z'' die Wurzeln Z der Gleichung (6), so wird die linke Seite dieser Gleichung identisch gleich

$$A(z'-Z)(z''-Z),$$

und folglich wird, wenn man für A seinen Wert einsetzt, unsere Bedingung (5):

$$(rt-s^2)(z'-c)(z''-c) \geqq 0. \tag{7}$$

Bezeichnen wir mit K' und K'' diejenigen beiden Punkte der Normalen M_0M, für welche die Koordinate z die Werte z' und z'' hat; die Bedingung (7) drückt dann aus, dafs, wenn

$$rt - s^2 > 0$$

ist, für ein Maximum oder Minimum der Punkt M_0 nicht zwischen den Punkten K' und K'' gelegen sein darf. Dagegen mufs, wenn

$$rt - s^2 < 0$$

ist, für ein Maximum oder Minimum der Punkt M_0 zwischen K' und K'' sich befinden. Fällt in einem dieser Fälle M_0

mit K' oder K'' zusammen, so bleibt es zweifelhaft, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

Es ist noch die Unterscheidung des Maximums und des Minimums zu machen. Ist die Bedingung (5) erfüllt und der Fall der Gleichheit ausgeschlossen, so kann die Gröſse

$$q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

nicht null werden, welche reelle Werte auch p und q haben mögen, und hat folglich dasselbe Vorzeichen wie die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Also hat auch noch die Summe dieser drei Gröſsen dasselbe Zeichen, und der Ausdruck

$$(1 + q^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

ist demnach negativ im Falle des Maximums, positiv im Falle des Minimums. Man erkennt also, auf Grund der Gleichungen (2) und (3), daſs

(8) $$B(z - c) + 2C < 0$$

ist für das Maximum und

(9) $$B(z - c) + 2C > 0$$

ist für das Minimum. Die Gleichung (6) aber, welche die Wurzeln z' und z'' hat, giebt

$$\frac{B}{C} = - \frac{1}{z - z'} - \frac{1}{z - z''},$$

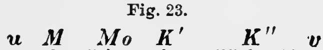
also ist die Gröſse

$$\frac{c - z'}{z - z'} + \frac{c - z''}{z - z''}$$

negativ im Falle des Maximums, positiv im Falle des Minimums.

Nehmen wir zunächst $rt - s^2 > 0$ an; dann sind die beiden Werte $z - z'$ und $z - z''$ von $z - Z$, welche aus der Gleichung (6) gewonnen werden, von gleichem Zeichen. Folglich sind die beiden Punkte K' und K'' der Geraden M_0M auf der nämlichen Seite des Punktes M gelegen. Die Differenzen $c - z'$ und $c - z''$ sind auch von gleichem Zeichen, wie vorhin gezeigt wurde, d. h. die Punkte K' und K''

Fig. 23.



liegen auch auf der nämlichen Seite des Punktes M_0. Daraus erkennt man, dafs die Entfernung $M_0 M$ ein Minimum oder Maximum wird, je nachdem die Punkte M_0 und M auf der nämlichen Seite oder auf verschiedenen Seiten sowohl von K' als auch von K'' liegen; liegt M_0 zwischen K' und K'', so ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Nehmen wir zweitens $rt - s^2 < 0$ an; gemäfs der Gleichung (6) sind die Differenzen $z - z'$ und $z - z''$ von entgegengesetztem Zeichen, und der Punkt M liegt also auf der Geraden $M_0 M$ zwischen K' und K''.

Fig. 24.

Die Bedingung (7) aber erfordert, dafs $c - z'$ und $c - z''$ immer von ungleichem Zeichen sind, d. h. dafs M_0 ebenso wie M zwischen K' und K'' sich befindet. In diesem Falle ist die Entfernung $M_0 M$ stets ein Minimum; in jedem anderen Falle weder ein Maximum noch ein Minimum.

Wir haben noch den Fall $rt - s^2 = 0$ zu untersuchen. Die Bedingung (5) reduziert sich hier, wenn wir wieder von dem Fall der Gleichheit absehen, auf

$$B(z - c) + C > 0,$$

und wenn sie erfüllt ist, so besteht auch die Ungleichung (9). Daraus folgt, dafs dann nur ein Minimum vorhanden ist. Es giebt hier nur einen (endlichen) Punkt K' der Geraden $M_0 M$, dessen Koordinate z' der Gleichung

$$B(z - z') + C = 0$$

genügt. Führt man die Gröfse z' statt B ein, so wird die obige Ungleichung

$$\frac{c - z'}{z - z'} > 0.$$

Damit also das Minimum wirklich stattfindet, mufs der Punkt M_0 auf der nämlichen Seite des Punktes K' wie M liegen; in jedem anderen Falle ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Fig. 25.

Ist endlich für die Koordinaten des Punktes M

$$A = 0, \quad B = 0,$$

so wird die Bedingung (5)

$$C > 0$$

und ist immer erfüllt. Bei dieser Annahme aber hat man:

$$rt - s^2 = 0, (1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0,$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit r und subtrahiert von ihr das $(1 + p^2)$fache der ersten, so kommt:

$$r^2 + s^2 + (rq - sp)^2 = 0,$$

folglich

$$r = 0, \; s = 0, \; t = 0.$$

Die Gleichungen (2) zeigen, dafs nun ein Minimum stattfindet.

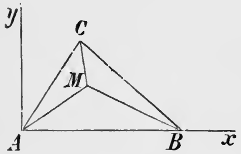
Die Punkte K' und K'' haben in der Flächentheorie eine wichtige Bedeutung, wie später gezeigt werden wird.

163. Ein Beispiel von Bertrand. Wir sagten, dafs die Werte der Variabelen, welche dem Maximum oder Minimum einer Funktion entsprechen, ihre partiellen Ableitungen annullieren müssen, falls diese nicht unstetig werden. Wir müssen noch hinzufügen, nach einer wichtigen von Herrn *Bertrand* gemachten Bemerkung, dafs die partiellen Ableitungen einer Funktion auch ganz unbestimmt werden können für gewisse Werte der Variabelen, und dafs gerade diese Werte dem Maximum oder Minimum der Funktion angehören können. Wir wollen dafür das Beispiel geben, welches auch Herr *Bertrand* zum Beleg seiner Behauptung gewählt hat.

Aufgabe. Es soll in der Ebene eines gegebenen Dreiecks der Punkt bestimmt werden, für welchen die Summe der Entfernungen von den Eckpunkten des Dreiecks ein Minimum wird.

Die Seite AB des Dreieckes ABC wählen wir zur x-Axe, und die dazu Senkrechte Ay zur y-Axe. Die Länge der Seite AB bezeichnen wir mit c, die Koordinaten des Punktes C mit x_0, y_0, und endlich die Koordinaten des gesuchten Punktes M mit x, y. Die Funktion, deren Minimum gesucht wird, ist also

Fig. 26.



$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

und es ist von vornherein evident, dafs jedenfalls ein Minimum existieren mufs. Setzt man die partiellen Ableitungen dieser Summe gleich null, so hat man die zwei Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

$$(2)\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

welche zwei Kurven darstellen, deren Schnittpunkt den gesuchten Punkt M liefern. An Stelle dieser Kurven kann man aber zwei andere einfachere setzen. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtungen AM, BM, CM mit der Richtung Ax der Abscissenaxe bilden. Jeder dieser Winkel ist zu betrachten als erzeugt durch eine Gerade, die zunächst parallel zu Ax in dem Punkte A oder B oder C gelegt ist, und welche sich stets in dem nämlichen Sinne nach der positiven Ordinatenaxe hin dreht. Darnach hat man:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}},\qquad \sin\beta=\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},\qquad \sin\gamma=\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind dabei, ebenso wie in den Gleichungen (1) und (2) positiv. Wenn also ein reeller Punkt x, y existiert, welcher die Gleichungen (1) und (2) befriedigt, so bestehen für ihn die Gleichungen:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0,$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0,$$

oder

$$\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma,\quad \sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma.$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert sie, so folgt:

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=1,$$

oder

$$1+2\cos(\beta-\alpha)=0 \text{ und } \cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}.$$

Der Winkel $\beta-\alpha$, welcher nichts anderes ist als AMB, hat also zum Cosinus den Wert $-\frac{1}{2}$, und folglich ist dieser

Winkel $AMB = 120^0$. Da dasselbe für jede Dreieckseite gelten mufs, so schliefst man hieraus, dafs der Punkt M der Durchschnitt von drei Kreissegmenten ist, von denen jedes über einer Dreieckseite, einen Winkel von 120^0 fassend, beschrieben ist. Die Kreise, welche zu zweien dieser Segmente gehören, können also an Stelle der durch die Gleichungen (1) und (2) dargestellten Kurven treten.

Damit aber diese drei Kreise sich wirklich in einem Punkte schneiden, ist notwendig und hinreichend, dafs alle Winkel des Dreieckes kleiner als 120^0 sind. Ist in dem Dreiecke ein Winkel gröfser als 120^0, so liefern die Gleichungen (1) und (2), auf welche die Theorie führt, keine Bestimmung des Minimums, wiewohl ein solches sicherlich vorhanden ist. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber nicht mehr bestimmt, wenn man x und y durch die Koordinaten einer Dreiecksecke ersetzt, folglich kann der gesuchte Punkt nur einer dieser Eckpunkte sein. Dies wollen wir jetzt auch analytisch beweisen, indem wir andere Koördinaten einführen.

164. Fortsetzung des Bertrandschen Beispieles. Wir bezeichnen mit α immer den Winkel MAB, nennen ferner ϱ die Entfernung AM, b die Seite AC und A den Winkel CAB. Die Summe S der Entfernungen AM, BM, CM wird

$$S = \varrho + \sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + \varrho^2 - 2b\varrho\cos(A-\alpha)}.$$

Nach der Binomialformel aber hat man, wenn ϱ hinreichend klein ist:

$$\sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\alpha} = c\left[1 - 2\left(\frac{\varrho}{c}\cos\alpha - \frac{\varrho^2}{2c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= c\left[1 - \left(\frac{\varrho}{c}\cos\alpha - \frac{\varrho^2}{2c^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{c}\cos\alpha - \frac{\varrho^2}{2c^2}\right)^2 - \cdots\right],$$

oder geordnet nach ϱ, wenn ε eine Gröfse bezeichnet, die mit ϱ verschwindet:

$$\sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\alpha} = c - \varrho\cos\alpha + \varrho^2\frac{\sin^2\alpha}{2c} + \varepsilon\varrho^2.$$

Ersetzt man in dieser Formel c und α durch b und $A - \alpha$, ferner ε durch η, so folgt:

$$\sqrt{b^2 + \varrho^2 - 2b\varrho\cos(A-\alpha)} = b - \varrho\cos(A-\alpha) + \varrho^2\frac{\sin^2(A-\alpha)}{2b} + \eta\varrho^2.$$

Der Ausdruck für S wird also:

$$S = (b + c) + \varrho\,[1 - \cos\alpha - \cos(A - \alpha)] \\ + \frac{\varrho^2}{2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{c} + \frac{\sin^2(A-\alpha)}{b}\right] + (\varepsilon + \eta)\,\varrho^2.$$

Er reduziert sich auf:

$$S_0 = b + c$$

für $\varrho = 0$. Ist ϱ hinreichend klein, so hat die Differenz $S - S_0$ dasselbe Zeichen wie

$$1 - \cos\alpha - \cos(A - \alpha) = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{1}{2}A - \alpha\right).$$

Ist nun $A < 120^0$, so ist $2\cos\frac{A}{2}$ gröfser als 1, und der Winkel α kann so bestimmt werden, dafs

$$\cos\left(\frac{1}{2}A - \alpha\right) < \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}, \text{ oder auch dafs } \cos\left(\frac{1}{2}A - \alpha\right) > \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}$$

wird. Die Differenz $S - S_0$ ändert also ihr Zeichen. Daraus folgt, dafs dann $S_0 = b + c$ weder ein Maximal- noch ein Minimalwert von S ist. Wenn aber $A \geqq 120^0$ ist, so kann die Differenz $S - S_0$ nicht negativ werden; ist $\alpha = 120^0$, so wird sie zwar null für $\alpha = \frac{1}{2}A$; da aber der Koeffizient von ϱ^2 positiv ist, so hat man stets

$$S > S_0,$$

und folglich ist S_0 ein Minimum.

Hat also das Dreieck ABC einen Winkel, der gleich oder gröfser ist als 120^0, so ist der Scheitel des stumpfen Winkels der gesuchte Punkt.

165. Die Funktion ist implicite gegeben. Im allgemeinen Falle, wo man n Gleichungen zwischen $m + n$ Variabelen hat:

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots x_m, \quad z_1, z_2 \ldots z_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_m, \quad z_1, z_2 \ldots z_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2 \ldots x_m, \quad z_1, z_2 \ldots z_n) = 0, \end{cases}$$

kann man m Variabele, z. B. $x_1, x_2 \ldots x_m$ als unabhängige, die anderen $z_1, z_2 \ldots z_n$ als Funktionen von ihnen betrachten. Es ist die Aufgabe, die Maxima und Minima von einer dieser

Funktionen z zu bestimmen. Die Differentiation der Gleichungen (1) ergiebt:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} dz_n = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} dz_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_n}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial z_n} dz_n = 0. \end{cases}$$

Ist z_1 diejenige unter den Variabelen, deren Maxima und Minima zu bestimmen sind, so hat man zwischen den n Gleichungen die $n - 1$ Differentiale $dz_2 \ldots dz_n$ zu eliminieren; man gewinnt eine Gleichung von der Form:

$$(3)\qquad X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots X_m\, dx_m + Z_1\, dz_1 = 0.$$

Wir nehmen an, dafs $Z_1 \neq 0$ ist. Die Bedingung des Maximums oder Minimums verlangt, dafs $dz_1 = 0$ ist, und da die Differentiale in der Gleichung (3) willkürlich sind, so erhält man m Gleichungen:

$$(4)\qquad \frac{X_1}{Z_1} = 0, \quad \frac{X_2}{Z_1} = 0 \cdots \frac{X_m}{Z_1} = 0.$$

Die Systeme (1) und (4) enthalten $m + n$ Gleichungen zur Bestimmung der $m + n$ Variabelen.

166. Nebenbedingungen in Gestalt von Gleichungen. Der vorige Fall umfafst auch die Aufgabe, die Maxima und Minima einer expliciten Funktion von $m + n$ Veränderlichen

$$F(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1} \ldots x_{m+n})$$

zu bestimmen, welche durch n Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots x_{m+n}) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_{m+n}) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

mit einander verbunden sind. Denn bezeichnet man mit u den Wert der Funktion $F(x_1 \ldots x_{m+n})$, und fügt den n Gleichungen (1) noch die folgende hinzu:

$$u - F(x_1 \ldots x_{m+n}) = 0,$$

so hat man $n+1$ Gleichungen zwischen $m+n+1$ Variabelen. Nach der Untersuchung der Nr. 165 hat man diese Gleichung, sowie die Gleichungen (1) zu differentiieren, und weil du für den Fall des Maximums oder Minimums null wird, so hat man

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial F}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0,$$

ferner

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0. \end{cases}$$

Darnach müssen wir aus den Gleichungen (2) und (3) n der Differentiale $dx_1 \ldots dx_{m+n}$ eliminieren, und die Koeffizienten der übrigbleibenden Differentiale gleich null setzen. Um diese Elimination zu vollziehen, addieren wir nach *Lagrange* die Gleichungen (3) zu der Gleichung (2), nachdem wir sie zuerst mit den noch unbestimmten Faktoren

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

multipliziert haben. Diese Faktoren können nun aber so bestimmt werden, daſs die Koeffizienten von n Differentialen verschwinden; und da alsdann in der nachbleibenden Gleichung die Koeffizienten der noch übrigen Differentiale einzeln gleich null gesetzt werden müssen, so erkennt man, daſs überhaupt die Koeffizienten der Differentiale $dx_1, dx_2 \ldots dx_{m+n}$ in der Summenformel null sein müssen. Man erhält also die $m+n$ Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{m+n}} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}} + \cdots \lambda_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}} = 0. \end{cases}$$

Hieraus sind die n Unbekannten $\lambda_1 \dots \lambda_n$ zu eliminieren, und man erhält m Gleichungen, die mit den gegebenen n zusammen zur Bestimmung der $m+n$ Unbekannten $x_1 \dots x_{m+n}$ dienen.

167. Lagranges Regel zur Bestimmung der Extreme mit Nebenbedingungen. Die Anwendung der Faktoren λ hat uns bisher nur dazu gedient, eine Elimination durch eine andere zu ersetzen, was kein besonderes Interesse bietet; doch läſst uns die Betrachtung dieser Faktoren einen wichtigen Satz aussprechen. Würden die Variabelen $x_1 \dots x_{m+n}$ alle unabhängig sein, so würde die Bedingung des Maximums oder Minimums der Funktion F die Gleichungen ergeben:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \cdots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_{m+n}} = 0.$$

In unserem Falle handelt es sich aber um ein relatives Maximum oder Minimum, indem die Variabelen $x_1 \dots x_{m+n}$ durch die Gleichungen (1) verbunden sind. Die Gleichungen (4) lehren nun:

Um die Funktion $F(x_1 \dots x_m, x_{m+1} \dots x_n)$ unter den Nebenbedingungen

(1) $$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \dots \; f_n = 0$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, bilde man die Funktion:

$$\psi = F + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$$

und differentiiere sie, indem man die λ als konstant betrachtet. Alsdann liefern die $m+n$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \; \cdots \; \frac{\partial \psi}{\partial x_{m+n}} = 0$$

zusammen mit den n Gleichungen (1) *$m+n$ Gleichungen zur Bestimmung von $x_1, x_2, \dots x_{m+n}$.*

Wir fügen noch zum Schluſse hinzu, daſs es in vielen Fällen auch zweckmäſsiger ist, die Funktion $F(x_1, x_2 \dots x_{m+n})$ von vornherein als eine explicite Funktion von m Variabelen zu behandeln, was gestattet ist, indem man sich die n übrigen als Funktionen dieser m auf Grund der gegebenen n Gleichungen dargestellt denkt. So sind wir bei einigen der oben behandelten Beispiele vorgegangen.

Siebentes Kapitel.

Theorie der ebenen Kurven.

---

168. Gleichungen einer Kurve. Eine und dieselbe ebene Kurve kann auf die verschiedensten Weisen analytisch durch eine oder mehrere Gleichungen dargestellt sein. Die häufigsten Darstellungsformen sind:

a) *bei rechtwinkligen Koordinaten* (x, y).

1. Die Kurvenordinate y ist als Funktion der Abscisse x gegeben:

$$y = f(x).$$

2. Abscisse und Ordinate x und y sind durch eine Gleichung verknüpft:

$$F(x, y) = 0.$$

Diese Darstellungsform läſst sich geometrisch dadurch deuten, daſs man die Fläche

$$z = F(x, y)$$

durch die Ebene

$$z = 0$$

schneidet.

3. Abscisse x und Ordinate y sind als Funktion eines Parameters t gegeben:

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Man vergleiche hierzu die Bemerkung in Nr. 78. Besonders empfiehlt sich häufig der analytischen Eleganz halber die Bogenlänge s einer Kurve als Parameter t zu wählen.

b) *bei Polarkoordinaten* (ϱ, ω):

4. Der Radiusvektor ϱ ist als Funktion des Winkels ω gegeben:

$$\varrho = f(\omega).$$

Von einer der Formen 1. bis 3. geht man zur Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten über durch die Transformation:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varrho\cos\omega,\quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\omega \\ y = \varrho\ \sin\omega,\quad \varrho = \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| \end{array}\right\},\quad 0 \leqq \omega < 2\pi.$$

Vorausgesetzt ist dabei, dafs der Anfangspunkt des Polarkoordinatensystems zusammenfällt mit dem Anfangspunkte des rechtwinkligen Koordinatensystems, und dafs die Anfangsrichtung des Radiusvektor zusammenfällt mit der positiven Richtung der x-Axe.

Setzt man in 1. oder 2. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ aus 3. ein, so werden die entstehenden Gleichungen identisch für jeden Wert von t erfüllt.

In der Differentialrechnung betrachtet man Kurven meist nicht ihrer ganzen Ausdehnung nach, sondern nur in einem Intervalle, innerhalb dessen die gerade benutzten Funktionen stetig sind. Diese Voraussetzung schicken wir hier ein für alle Mal diesem Kapitel und den folgenden drei Kapiteln voraus. Sie soll immer dann erfüllt sein, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird. Häufig werden wir dagegen noch mehrere Voraussetzungen aufserdem hinzufügen, die in jedem einzelnen Falle besonders werden hervorgehoben werden.

§ 1. Tangenten und Normalen.

169. Gleichung der Tangente und Normale.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der gegebenen Kurve und hat die Funktion f nebst ihrer ersten Ableitung f' an der gerade fixierten Stelle x einen bestimmten endlichen Wert, so war, wie wir in Nr. 27 gesehen haben,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$$

der Tangens des Winkels, welchen die Tangente im Punkte (x, y) mit der positiven Richtung der x-Axe bildet. Die Tangente ist also diejenige Gerade, welche durch den Punkt (x, y) geht und mit der positiven Richtung der x-Axe den Winkel $\operatorname{arctg} f'(x)$ bildet. Sind also ξ und η ihre laufenden Koordinaten, so ist ihre Gleichung:

$$\textit{Tangente:}\quad \eta - y = y' \cdot (\xi - x).$$

Zieht man durch den Punkt (x, y) senkrecht zur Tangente eine Gerade, so erhält man die Normale der Kurve im Punkte (x, y). Ihre Gleichung ist:

$$\textit{Normale:}\quad \eta - y = -\frac{1}{y'} \cdot (\xi - x).$$

2. Ist $F(x, y) = 0$ die Kurvengleichung, so wird (Nr. 75):

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = 0.$$

Also wird der Richtungskoeffizient der Tangente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

indem wir die Annahmen der Nr. 75 als erfüllt ansehen. Also wird bei dieser Form der Kurvengleichung die Gleichung der

$$\textit{Tangente:}\quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

$$\textit{Normale:}\quad \frac{\xi - x}{F_x'} = \frac{\eta - y}{F_y'}.$$

Setzen wir bereits die ersten Nummern des neunten Kapitels als bekannt voraus, so können wir das letzte Resultat auch geometrisch einsehen. Nach Nr. 253 ist die Tangentialebene an die Fläche $z = F(x, y)$ im Punkte (x, y, z):

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot (\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (\eta - y) = \zeta - z.$$

Also ist die Tangentialebene im Punkte $(x, y, 0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (\eta - y) = \zeta.$$

Schneiden wir diese Ebene aber durch die Ebene unserer Kurve $F(x, y) = 0$, d. h. durch die Ebene:

$$\zeta = 0,$$

so ist die Schnittgerade die Tangente an die Kurve $F(x, y) = 0$ und also ihre Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

wie oben.

3. Sind endlich die Kurvengleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

sobald φ und ψ nebst ihren Ableitungen an der gerade fixierten Stelle t bestimmte endliche Werte haben. Also erhalten wir:

$$\textit{Tangente:}\ \frac{\xi - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{dt}},$$

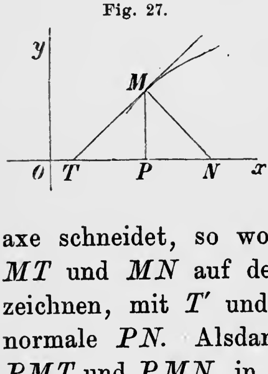
$$\textit{Normale:}\ \frac{dx}{dt}\cdot(\xi - x) + \frac{dy}{dt}\cdot(\eta - y) = 0.$$

Zu den früheren Voraussetzungen ist noch hinzuzufügen:

Die Gleichungen in Nr. 2 verlieren ihre Bedeutung, wenn F_x' und F_y' beide verschwinden, die in Nr. 3 verlieren ihren Sinn, wenn $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ beide verschwinden.

170. Subtangente und Subnormale. Wir hatten schon Gelegenheit (Nr. 39) die Strecken zu definieren, welche man die *Länge der Tangente* oder die *Länge der Normalen* nennt, und wir haben auch die Definitionen der *Subtangente* und der *Subnormale* erwähnt. Sind die Axen rechtwinklig, ist ferner M der Berührungspunkt, MP seine Ordinate, T und N die Punkte, in denen die Tangente MT und die Normale MN die Abscissenaxe schneidet, so wollen wir kurz mit T und N die Längen MT und MN auf der Tangente und auf der Normalen bezeichnen, mit T' und N' die Subtangente TP und die Subnormale PN. Alsdann ergeben die rechtwinkligen Dreiecke PMT und PMN, in denen die Winkel MTP und PMN zur trigonometrischen Tangente den Wert $\frac{dy}{dx}$ haben:

Fig. 27.



$$T' = y\frac{dx}{dy},\quad N' = y\frac{dy}{dx},$$

und dieselben Dreiecke ergeben auch:

$$T = \sqrt{y^2 + T'^2},\quad N = \sqrt{y^2 + N'^2},$$

folglich:

$$T = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy},\quad N = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Es mufs bemerkt werden, dafs die Ausdrücke für T' und

N' positiv oder negativ sind, je nachdem die Richtungen TP und PN mit der positiven Richtung der Abscissenaxe oder mit der entgegengesetzten zusammenfallen.

171. Asymptoten. Wir definieren:

Definition. Eine Gerade heifst eine Asymptote eines Kurvenzweiges, welcher sich ins Unendliche erstreckt, wenn die Entfernung eines Kurvenpunktes M von der Geraden nach dem Grenzwerte null konvergiert, während der Punkt, indem er stets auf der Kurve bleibt, unbegrenzt hinausrückt.

Es ist leicht zu sehen, dafs die Asymptote im allgemeinen die Grenzlage wird, welcher sich die Tangente im Punkte M immer mehr nähert, wenn M ins Unendliche rückt, nämlich stets dann, wenn solch eine Grenzlage überhaupt vorhanden ist.

Denn nehmen wir an, dafs die Kurve einen Zweig hat, der sich ins Unendliche erstreckt, und dabei eine Asymptote besitzt, welche nicht parallel zur y-Axe ist, vielmehr die Gleichung

$$\eta = g\xi + h \tag{1}$$

hat. Die Entfernung des Punktes x, y der Kurve von dieser Asymptote ist

$$\frac{y - gx - h}{\sqrt{1 + g^2}}.$$

Nach unserer Annahme ist nun:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y - gx - h}{\sqrt{1+g^2}} = 0,$$

also auch:

$$\lim_{x=\infty} (y - gx - h) = 0.$$

Dividiert man durch x, so folgt:

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{y}{x} - g\right) - \lim_{x=\infty} \frac{h}{x} = 0 \quad \text{oder:} \quad \lim_{x=\infty} \left(\frac{y}{x} - g\right) = 0;$$

das heifst:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = g. \tag{2}$$

Sodann folgt:

$$\lim_{x=\infty} (y - gx) = h. \tag{3}$$

Es gilt also der

Satz. Damit eine Kurve $y = f(x)$ eine Asymptote besitzt, die nicht der y-Axe parallel ist, ist notwendig und hinreichend, dafs *der Quotient* $\frac{y}{x}$ *für* $x = \infty$ *einen bestimmten endlichen Grenzwert* g *hat, und dafs dann* $y - gx$ *ebenfalls für* $x = \infty$ *einen bestimmten endlichen Grenzwert* h *hat. Ist beides der Fall, so ist*

$$y = gx + h$$

die Gleichung der Asymptote.

Betrachten wir nun die Gleichung der Tangente an die Kurve, nämlich

$$\eta = \frac{dy}{dx}\xi + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right). \tag{4}$$

$\frac{y}{x}$ ist ein Quotient, dessen Zähler und Nenner im allgemeinen beide gleichzeitig unendlich werden. Sollte für $x = \infty$ etwa $y = f(x)$ einen endlichen Grenzwert A haben, so drehe man das Koordinatensystem um den Winkel α. Sind dann x_1 und y_1 die Koordinaten des Punktes M in Bezug auf das neue Koordinatensystem, so wird:

$$x_1 = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$

$$y_1 = -x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

und daher wird mit x auch x_1 unendlich und

$$\lim_{x_1 = \infty} y_1 = \lim(-x \sin\alpha + y \cos\alpha) = \infty$$

ebenfalls unendlich. Wir können also immer annehmen, dafs für $x = \infty$ auch $y = \infty$ wird. Nach Nr. 130 ist aber dann stets

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{dy}{dx}}{1},$$

sobald $\lim \frac{dy}{dx} = \lim f'(x)$ überhaupt einen bestimmten Grenzwert hat, folglich ist

$$\lim \frac{dy}{dx} = g.$$

Ferner hat man

$$\lim(y - gx) = \lim \frac{g - \frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}.$$

Zähler und Nenner dieses Quotienten verschwinden für $x = \infty$. Indem man also die Regel der Nr. 130 anwendet, wird

$$\lim (y - gx) = \lim \frac{\dfrac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right),$$

also ist

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = h.$$

Wir sehen also:

Besitzen $\lim\limits_{x=\infty} \frac{dy}{dx}$ *und* $\lim\limits_{x=\infty}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$ *bestimmte endliche Werte g und h, so ist die Asymptote*

$$y = gx + h$$

die Grenzlage, welche die Tangente für $x = \infty$ annimmt.

Wenn indessen die Tangente für $x = \infty$ keine bestimmte Grenzlage besitzt, so ist, selbst wenn es eine Asymptote giebt, diese nicht mehr als Grenze der Tangente anzusehen.

Ein Beispiel für diesen letzteren Fall liefert die Gleichung $y = \frac{\sin x}{x}$. Die x-Axe ist hier eine Asymptote der Kurve; $\frac{dy}{dx}$ konvergiert nach 0, wenn x unendlich wird, aber $y - x\frac{dy}{dx}$ ist unbestimmt für $x = \infty$.

172. Art und Ordnung der Berührung von Kurve und Tangente. Wir betrachten die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung einer festen Stelle x und setzen voraus, daſs die Funktion $f(x)$ nebst den Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung in der Umgebung der Stelle x bestimmte endliche Werte hat. Dann gilt der verallgemeinerte Mittelwertssatz der Nr. 112:

$$(1)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

R_n ist proportional h^n, nämlich:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h).$$

Wir betrachten nun die Fig. 28 auf der folg. Seite, welche unsere Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung der Stelle (x, y) darstellen möge. Es ist wieder $x = OP$, $y = PM$ und $PP' = h$ gesetzt. Die Abscisse des Punktes M' der Kurve sei:

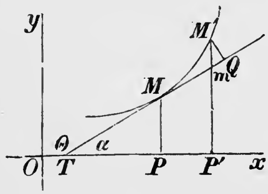
$$x_1 = x + h$$

und die Ordinate des Punktes M':

$$y_1 = f(x + h) = M'P'.$$

Die Gerade $M'P'$ schneide die Tangente in M im Punkte m. Wir nennen η_1 die Ordinate der Tangente, welche der Abscisse $\xi = x_1$ entspricht. Dann ist:

Fig. 28.



$$\eta_1 = mP'.$$

Es kommt uns nun hier an auf die Differenz von Kurven- und Tangentenordinate, also auf die Gröſse:

$$y_1 - \eta_1 = mM'.$$

Setzen wir in die Gleichung der Tangente

$$\eta - y = f'(x) \cdot (\xi - x)$$

$\xi = x_1 = x + h$, $\eta = \eta_1$ ein, so erhalten wir als Wert von η_1:

(2) $$\eta_1 = f(x) + f'(x) \cdot h.$$

Der Wert von $y_1 = f(x + h)$ wird aber durch (1) gegeben, subtrahiert man also (2) von (1), so erhält man den gesuchten Ausdruck:

$$mM' = y_1 - \eta_1 = f''(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Die Differenz mM' ist also eine Funktion von h, welche an der Stelle $h = 0$ verschwindet. Dies ist auch geometrisch evident. Unsere Formel lehrt uns aber noch mehr. Die niedrigste Potenz von h, die rechter Hand auftritt, ist die zweite. Ja, wenn $f''(x)$ null ist, kann sich diese Zahl noch erhöhen. Es möge die erste an der Stelle x nicht verschwindende Ableitung die $\mu + 1^{\text{te}}$ sein, und es sei $\mu + 1 < n$. Dann wird:

(3) $$mM' = y_1 - \eta_1 = h^{\mu+1} \cdot \frac{f^{(\mu+1)}(x)}{(\mu+1)!} + \cdots + h^{n-1} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + R_n,$$

und μ ist eine ganze positive Zahl, nicht kleiner als 1. Aus der letzten Gleichung folgern wir, daſs

$$\lim_{h=0} \frac{y_1 - \eta_1}{h^{\mu+1}} = \frac{f^{(\mu+1)}(x)}{(\mu+1)!}$$

eine endliche von null verschiedene Zahl ist. Folglich wird (122) die Differenz $y_1 - \eta_1 = mM'$ mit h null von der Ordnung $\mu + 1 \geqq 2$.

An Stelle der Strecke mM' kann man auch den Abstand

$M'Q$ des Kurvenpunktes von der Tangente einführen. Es ist, wenn der Winkel PTQ zwischen Tangente und Abscissenaxe mit α bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'.$$

Aber auch $\llcorner\, m M'Q$ ist gleich α. Mithin wird:

$$M'Q = M'm \cdot \cos \alpha = \frac{M'm}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Mithin wird auch

$$\lim_{h=0} \frac{M'Q}{h^{\mu+1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \lim_{h=0} \frac{M'm}{h^{\mu+1}}$$

endlich und von null verschieden; d. h. auch $M'Q$ wird von der Ordnung $\mu + 1 \geqq 2$ null mit h. Wir haben also zunächst den

Satz. Ist die Funktion $f(x)$ nebst ihren Ableitungen in der Umgebung der Stelle x stetig, und zieht man an den Punkt (x, y) der Kurve $y = f(x)$ die Tangente, so wird der Abstand des Kurvenpunktes, dessen Abscisse $x + h$ ist, von der Tangente mit h null von mindestens der zweiten Ordnung.

Man nennt nun die Zahl μ *die Ordnung der Berührung* von Kurve und Tangente im Punkte (x, y). Im allgemeinen also, wenn $f''(x) \neq 0$ ist, ist die Ordnung der Berührung 1, ist aber $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so ist sie 2, und sie ist allgemein μ, wenn:

$$f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0 \ldots f^{(\mu)}(x) = 0; \quad f^{(\mu+1)}(x) \neq 0.$$

Es besteht nun ein wichtiger Unterschied, je nachdem μ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist μ ungerade, wie in dem gewöhnlichsten Fall $\mu = 1$, so ist $\mu + 1$ gerade. Setzen wir daher in (3) $n = \mu + 2$, so wird:

$$(4) \qquad m M' = y_1 - \eta_1 = h^{\mu+1} \cdot \frac{f^{(\mu+1)}(x)}{(\mu+1)!} + R_{\mu+2}.$$

Da nun (114) für hinreichend kleines h das Vorzeichen der rechten Seite mit dem des ersten Summanden übereinstimmt, so wechselt für ungerades μ die Differenz $y_1 - \eta_1$ ihr Zeichen nicht mit h. Der Punkt M' wird also auf derselben Seite der Tangente bleiben, mag man nun P' rechts oder links von P annehmen. Wir sehen:

Bei einer gewöhnlichen Berührung (d. h. bei einer solchen erster Ordnung) bleibt die Kurve in der Umgebung des Be-

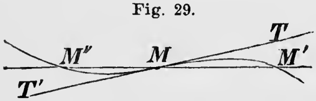
rührungspunktes auf derselben Seite der Tangente. Das Gleiche gilt für jede Berührung ungerader Ordnung.

Ist dagegen μ gerade, so wird $\mu + 1$ ungerade, und die Differenz $y_1 - \eta_1$ wechselt nach (4) ihr Zeichen mit h, folglich wird der Punkt M' von der einen Seite der Tangente auf die andere übergehen, wenn der Punkt P' von der linken zur rechten Seite von P hinüberwandert:

Bei einer Berührung gerader Ordnung geht die Kurve von der einen Seite der Tangente nach der anderen herüber.

Man nennt einen Punkt M dieser Art einen *Inflexionspunkt* oder *Wendepunkt* der Kurve. Man vergl. die Fig. 29.

Fig. 29.



Dreht man die Tangente um M, so sieht man, dafs die entstehende Sekante die Kurve in noch zwei Punkten M' und M'' schneidet. Damit ein Wendepunkt auftritt mufs mindestens $\mu = 2$ sein. Ein Wendepunkt tritt also auf, wenn:

$$f''(x) = 0, \quad f'''(x) \neq 0.$$

Er tritt aber auch auf, wenn:

$$f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = 0, \quad f^{\mathrm{V}}(x) \neq 0.$$

Aber nicht, wenn etwa $f'' = f''' = 0$ aber $f^{\mathrm{IV}} \neq 0$ ist.

Wir erkennen:

Sieht man von den Fällen, in denen Ableitungen unstetig werden, ab, so werden die Wendepunkte der Kurve $y = f(x)$ gefunden, indem man die Wurzeln der Gleichung:

$$f''(x) = 0$$

aufsucht. Ist x eine solche Wurzel und die erste der folgenden Ableitungen, die für diesen Wert von x nicht verschwindet, von ungerader Ordnung, so haben wir einen Wendepunkt an der Stelle x, ist jene Ableitung von gerader Ordnung, so befindet sich an der Stelle x kein Wendepunkt.

173. Konkav und konvex. Man sagt, dafs eine Kurve in einem ihrer Punkte M in Bezug auf eine gegebene Gerade *konkav* ist, oder dafs sie ihre *konkave Seite* der Geraden zuwendet, wenn sie in der Umgebung von M ganz innerhalb des spitzen Winkels gelegen ist, welchen die Tangente in M

mit der gegebenen Geraden bildet. Dagegen ist sie *konvex* im Punkte M, oder sie kehrt ihre *konvexe Seite* nach der Geraden, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes ganz innerhalb des stumpfen Winkels zwischen der Tangente in M und der Geraden sich befindet.

Die in Nr. 172 erhaltenen Resultate geben uns ein Mittel, um zu entscheiden, ob eine Kurve in einem gegebenen Punkte ihre konvexe oder konkave Seite der x-Axe zuwendet. Nehmen wir zunächst an, daſs die Axen rechtwinklig sind. Man ersieht aus der Figur 28, daſs die Konkavität oder Konxexität vorliegt, je nachdem die Ordinate $M'P' = y_1$ kleiner oder gröſser ist als die Ordinate $mP' = \eta_1$ der Tangente. Der Unterschied zwischen beiden ist $mM' = y_1 - \eta_1$. Nach Nr. 172, Gleichung (3) ist aber:

$$mM' = y_1 - \eta_1 = h^{\mu+1} \cdot \frac{f^{(\mu+1)}(x)}{(\mu+1)!} + R_{\mu+2}.$$

Im Falle, daſs die Kurve konkav ist gegen die x-Axe, ist also auch der Ausdruck

$$h^{\mu+1} \cdot \frac{f^{(\mu+1)}(x)}{(\mu+1)!} \tag{1}$$

negativ, im entgegengesetzten Falle positiv. Dabei ist jedoch immer vorausgesetzt, daſs y positiv ist, und es ist leicht einzusehen, daſs bei negativem y genau das Gegenteil stattfindet. Bezeichnen wir aber die Richtung der abnehmenden y als eine Richtung *nach unten*, so ist der Ausdruck (1) in jedem Falle positiv, wenn die Kurve nach unten konvex ist; negativ, wenn sie nach unten konkav ist. Ist also $\mu = 1$, also $f''(x) \neq 0$, so sehen wir, da h^2 immer positiv ist:

Dem positiven Vorzeichen von $f''(x)$ entspricht, daſs die Kurve $y = f(x)$ zu beiden Seiten von M nach unten konvex ist, dem negativen das Gegenteil.

Die konvexe Seite bleibt zu beiden Seiten von M dieselbe, wenn $f''(x)$ zwar null, aber die Ordnung μ der Berührung von Kurve und Tangente ungerade ist. Ist dagegen $f''(x)$ null und μ gerade, so ändert der obige Ausdruck (1) sein Zeichen mit h. Also geht in einem solchen Punkte die Konkavität in Konvexität über und umgekehrt. Ein solcher Punkt ist aber ein Wendepunkt, also erkennen wir:

In einem Wendepunkte geht die Konkavität in Konvexität über.

174. Beispiele.

1. Für die Kurve, deren Gleichung in Bezug auf rechtwinklige Koordinaten

$$y = \sin x$$

ist, wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = -1.$$

Die Kurve ist also beständig konkav nach der x-Axe gerichtet, und die Punkte, in denen sie diese Axe schneidet, sind Wendepunkte. Man vergleiche Figur 4 pag. 9.

2. Für die Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = \operatorname{tang} x$$

ist, wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x}, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

Die Kurve kehrt also beständig ihre konvexe Seite der Abscissenaxe zu, und ihre Schnittpunkte mit dieser Axe sind Wendepunkte. Man vergleiche Figur 5 pag. 9.

3. Die Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = \frac{x^3 - x}{3x^2 + 1}$$

ist, hat die Ableitungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 1}{(3x^2+1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24(x - x^3)}{(3x^2+1)^3},$$

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{24}{(3x^2+1)^2}.$$

Die Kurve kehrt beständig ihre konkave Seite nach der x-Axe. Sie hat drei Wendepunkte, welche auf der x-Axe gelegen sind, mit den Abscissenwerten $x = -1, 0, +1$; die zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ sind $\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$.

§ 2. Homogene Koordinaten.

175. Formale Definition. Anstatt die geradlinigen Koordinaten eines Punktes der Ebene, wie früher, durch die Buchstaben x, y zu bezeichnen, nennen wir sie jetzt $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$.

Eine der drei Variabelen bleibt nach Fixierung des Punktes noch immer unbestimmt, z. B. x_3. Würden wir über dieses z. B. so verfügen, daſs wir es gleich 1 setzten, so erhielten wir unsere bisherige Bezeichnungsweise. x_1, x_2, x_3 heiſsen die homogenen Koordinaten eines Punktes der Ebene; denn es wird jede Kurvengleichung durch diese Darstellung der Punktkoordinaten zu einer homogenen, was häufig von groſsem Werte ist. Sind die Koordinaten mit $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ bezeichnet, so erhält die Gleichung irgend einer Kurve die Gestalt

$$(1)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wobei nun f eine *Form* — d. h. homogene Funktion — der drei Variabelen x_1, x_2, x_3 bezeichnet, die man, wenn die ursprüngliche Gleichung eine ganze rationale Funktion in x_1 und x_2 war, durch Multiplikation mit einer Potenz von x_3 auch in eine ganze rationale Form von x_1, x_2, x_3 verwandeln kann. Jedem Punkte der Ebene entspricht ein und nur ein Wertsystem $(x_1 : x_2 : x_3)$, welches von $(0:0:0)$ verschieden ist, und umgekehrt jedem von $(0:0:0)$ verschiedenen Wertsysteme $(x_1 : x_2 : x_3)$ ein und nur ein Punkt der Ebene. Man sagt, daſs auch das Wertsystem $(x_1 : x_2 : 0)$ einen bestimmten Punkt der Ebene, nämlich einen *unendlich fernen* Punkt vorstellt. Geht man von einem Punkte der Kurve zu einem andern Punkte, so kann man willkürlich x_3 als konstant, oder auch als veränderlich annehmen; denn es sind immer nur die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ vermittelst der Gleichung für jeden Punkt bestimmt.

Wird die Gleichung (1) differentiiert, ohne daſs eine Annahme über x_3 gemacht wird, so erhält man

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = 0.$$

Die Identitäten

$$x_1 = x x_3, \quad x_2 = y x_3,$$

in welchen x_3 von null verschieden angenommen ist, ergeben:

$$dx_1 = x_3 dx + x dx_3, \quad dx_2 = x_3 dy + y dx_3,$$

und folglich wird die Gleichung (2):

$$x_3\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} dx + \frac{\partial f}{\partial x_2} dy\right] + \frac{dx_3}{x_3}\left[x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right] = 0.$$

Es ist aber, wenn n den Grad der homogenen Funktion angiebt (84 und 139):

$$(3) \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = n f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx + \frac{\partial f}{\partial x_2} dy = 0.$$

Setzen wir noch $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_3}$, so wird bei den üblichen Bezeichnungen die Gleichung der Tangente:

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} - \frac{x_2}{x_3} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\xi_1}{\xi_3} - \frac{x_1}{x_3}\right),$$

oder gemäfs der Gleichung (4):

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_3} - \frac{x_1}{x_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(\frac{\xi_2}{\xi_3} - \frac{x_2}{x_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$ nach Gleichung (3), so wird die Gleichung der Tangente einfach:

$$(5) \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

176. Eine geometrische Deutung. Die vorstehende Entwickelung ist einer geometrischen Interpretation im Raume fähig, zu deren Verständnis jedoch die vorherige Lektüre der Artikel 251—253 erforderlich ist.

Die Punkte des Raumes R seien durch gewöhnliche Parallelkoordinaten (x_1, x_2, x_3) bestimmt und O der Koordinatenanfang $(0, 0, 0)$ des Koordinatensystems. Parallel zur $x_1 x_2$-Ebene legen wir durch den Punkt $x_3 = 1$ der x_3-Axe eine Ebene E:

$$x_3 = 1,$$

und in dieser bilden wir uns ein System von Parallelkoordinaten (x, y), dessen Anfangspunkt im Schnittpunkte der Ebene und der x_3-Axe liegt und dessen x- und y-Axe bezw. der x_1- und x_2-Axe des räumlichen Koordinatensystems parallel sind. Für die Punkte im Endlichen der Ebene E ist also $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$. Es sei jetzt P irgend ein Punkt der Ebene E. Wir verbinden ihn mit O durch die Gerade g, deren Gleichungen in Raumkoordinaten

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

sind. Diese Gleichungen sind aber gerade die Substitutionsgleichungen, welche von den gewöhnlichen Parallelkoordinaten (x, y) der Ebene E zu den homogenen Koordinaten $(x_1 : x_2 : x_3)$ der Ebene E führen.

Durch unsere Interpretation erscheinen also die homogenen Koordinaten der Ebene E als die rechtwinkligen Koordinaten des Raumes R.

Dabei wird jedem Punkte P der Ebene E eine und nur eine durch O gehende Gerade g des Raumes R zugeordnet — nämlich die Verbindungslinie von O und P — und umgekehrt jeder durch O gehenden Geraden g des Raumes R ein und nur ein Punkt P der Ebene E, nämlich der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene $x_3 = 1$. Im Besonderen wird jedem durch O gehenden Strahle der $x_1 x_2$-Ebene

$$\frac{x_1}{x_2} = C, \quad x_3 = 0$$

ein bestimmter, unendlich ferner Punkt P der Ebene E entsprechen, welcher durch den Quotienten $\frac{x}{y} = C$ festgelegt ist.

Ist nun $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer Kurve C in der Ebene E, so verbinden wir ihre sämtlichen Punkte mit dem Punkte O durch die Geraden g; die Gesamtheit dieser Geraden bildet einen Kegel K:

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0,$$

welcher auch

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

geschrieben werden kann, wenn $f(x_1, x_2, x_3)$ eine Form bedeutet, welche mit $f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ gleichzeitig verschwindet. Die Gleichung

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

giebt für Parallelkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ die Gleichung derjenigen Ebene (vergl. Nr. 253), welche den Kegel K in der Geraden g

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

berührt. Diese Ebene schneidet die Ebene E in der Tangente, welche im Punkte (x, y) an die Kurve C geht, und daher giebt die obige Gleichung die Gleichung der Tangente an die Kurve C, wenn man $x_1 : x_2 : x_3$ als homogene Koordinaten der Ebene E interpretiert. Dasselbe Resultat wurde in Nr. 175 durch Rechnung gefunden.

177. Beispiel. Betrachten wir den Fall der Kurven zweiten Grades. Hier ist

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0,$$

ferner:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{31}x_3,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte x_1, x_2, x_3 wird also:

$$\xi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{31}x_3) + \xi_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \xi_3(a_{31}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Will man zur gewöhnlichen Bezeichnung der Koordinaten zurückkehren, so kann man $x_3 = 1$, $\xi_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$ setzen.

178. Zwei Lehrsätze. Das in 175 gewonnene Resultat führt ohne weiteres zu dem folgenden Satze:

Lehrsatz I. Konstruiert man an eine ebene algebraische Kurve von der Ordnung n aus einem beliebigen Punkt der Ebene die Tangenten, so liegen ihre Berührungspunkte auf einer zweiten algebraischen Kurve von der Ordnung $n - 1$.

Denn ist die gegebene Kurve durch die Gleichung (1) der Nr. 175 bestimmt, so genügen die Berührungspunkte (x_1, x_2, x_3) aller Tangenten, welche man von einem bestimmten Punkte $(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ konstruieren kann, der Gleichung (5), und es ist ersichtlich, dafs diese Gleichung eine algebraische Kurve von der Ordnung $n - 1$ darstellt.

Nimmt man an, dafs der gegebene Punkt nach einander alle Lagen auf einer gegebenen Geraden annimmt, so gilt der vorstehende Satz für jede dieser Lagen, selbst wenn der gegebene Punkt ins Unendliche rückt. Ist die Gleichung der Geraden

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

so werden die Grenzwerte der Koordinaten $\xi_3 = 0$, $\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, und die Gleichung (5) erhält die Form

$$\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Man hat also den anderen Satz:

Lehrsatz II. Konstruiert man an eine algebraische Kurve alle Tangenten, welche einer gegebenen Richtung parallel sind, so sind ihre Berührungspunkte auf einer Kurve von der Ordnung $n - 1$ gelegen.

Bemerkung. Die beiden soeben bewiesenen Lehrsätze bleiben nicht ohne Weiteres auch für nicht homogene Variabele gültig. Der zweite Satz läfst sich, wenn er erhalten bleibt, auch für rechtwinklige Koordinaten sehr einfach beweisen.

179. Wendepunkte. Wir bezeichnen mit $\frac{x_1}{x_3} = x$ und $\frac{x_2}{x_3} = y$ die rechtwinkligen Koordinaten, mit u eine Form von x_1, x_2, x_3 und betrachten die Kurve, welche durch die Gleichung

$$u = 0 \tag{1}$$

definiert ist. Zur Abkürzung setzen wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = u_3,$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{11}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = u_{12} = u_{21},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{22}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = u_{23} = u_{32},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = u_{33}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = u_{31} = u_{13}.$$

Differentiiert man die Gleichung (1), so erhält man, wenn x_1 und x_2 endlich, und x_3 von 0 verschieden angenommen wird, wie bereits gefunden wurde:

$$u_1 dx + u_2 dy = 0. \tag{2}$$

Ist n der Grad der Form u, so sind u_1 und u_2 Formen vom Grade $n - 1$, und man erhält:

$$du_1 = x_3(u_{11}\,dx + u_{12}dy) + (n-1)\,u_1\,\frac{dx_3}{x_3},$$

$$du_2 = x_3(u_{12}\,dx + u_{22}\,dy) + (n-1)\,u_2\,\frac{dx_3}{x_3}.$$

Differentiiert man also die Gleichung (2), indem man x als unabhängige Variabele ansieht, und reduziert man das Resultat vermittelst derselben Gleichung (2), so folgt:

$$du_1\,dx + du_2\,dy + u_2\,d^2y = 0,$$

oder:

(3) $$x_3[u_{11}(dx)^2 + 2u_{12}dx\,dy + u_{22}(dy)^2] + u_2 d^2y = 0.$$

Die Bedingung für die Wendepunkte ist jetzt

(4) $$d^2y = 0,$$

und die Gleichung (3) reduziert sich auf

(5) $$u_{11}(dx)^2 + 2u_{12}dx\,dy + u_{22}(dy)^2 = 0.$$

Dabei ist indessen zu bemerken, dafs die Gleichung (5) nicht die Gleichung (4) zur Folge hat, wenn $u_2 = 0$ ist. Die Bedingung $u_2 = 0$ sagt zunächst aus, dafs die Tangente in diesen Kurvenpunkten der Ordinatenaxe parallel ist, und wir können, sobald $u_1 \neq 0$ ist, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dafs für solche Punkte nicht auch die Gleichung (5) erfüllt ist. Anders aber ist es, wenn $u_2 = 0$ und gleichzeitig $u_1 = 0$ ist, wie wir später sehen werden.

Eliminieren wir zunächst zwischen den Gleichungen (2) und (5) die Differentiale dx und dy, so folgt:

(6) $$u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2 = 0,$$

und diese Gleichung kann noch vereinfacht werden. Denn wenn man zwischen den vier identischen Gleichungen

(7) $$nu = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$$

und

(8) $$\begin{cases} (n-1)\,u_1 = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3, \\ (n-1)\,u_2 = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3, \\ (n-1)\,u_3 = u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 \end{cases}$$

x_1, x_2 und x_3 eliminiert, so findet man:

(9) $(n-1)^2[u_{11}u_2^{\,2}-2u_{12}u_1u_2+u_{22}u_1^{\,2}]=n(n-1)u(u_{11}u_{22}-u_{12}^{\,2})-x_3H(u)$,

wobei

(10) $$\begin{cases} H(u)=u_{11}(u_{22}u_{33}-u_{23}^{\,2})+u_{12}(u_{23}u_{31}-u_{12}u_{33})+u_{13}(u_{21}u_{32}-u_{22}u_{31}) \\ \quad =u_{11}u_{22}u_{33}+2u_{12}u_{23}u_{31}-u_{11}u_{23}^{\,2}-u_{12}^{\,2}u_{33}-u_{22}u_{13}^{\,2}. \end{cases}$$

Was auch immer die Gestalt der Form u sein mag, der Fall $n=1$ kann stets vermieden werden, indem man u mit einer Potenz von x_3 multipliziert. Also reduziert sich vermittelst der Identität (9) und der Gleichung $u=0$ die Gleichung (6) auf

(11) $$H(u)=0.$$

Die Kurve $H(u)=0$ schneidet auf der Kurve $u=0$ die Wendepunkte aus. Die Funktion $H(u)$ ist die Determinante der neun partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, nämlich:

$$H(u)=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}.$$

Hesse hat sie die *Determinante* der Funktion u genannt; nach ihm heifst sie jetzt allgemein die *Hesse*sche Determinante. Sie ist der gemeinsame Nenner in den Ausdrücken, welche man erhält, wenn man die Gleichungen (8) nach x_1, x_2, x_3 auflöst. Daraus folgt, dafs die Gleichung (11) auch immer erfüllt ist durch diejenigen Werte von $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, für welche die Gleichungen

(12) $$u_1=0,\quad u_2=0,\quad u_3=0$$

gleichzeitig bestehen.

Dies ist der Fall, den wir noch zu besprechen haben. Wenn es auf der Kurve $u=0$ Punkte giebt, für welche $u_2=0$ und gleichzeitig $u_1=0$ ist, so ist für solch einen Punkt vermöge der Gleichung

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=nu$$

auch $u_3=0$. Diese besonderen Punkte, für welche d^2y im allgemeinen nicht null zu sein braucht, werden ebenfalls von der Kurve $H(u)=0$ ausgeschnitten.

180. Ein Satz von Hesse. Nehmen wir an, dafs die gegebene Kurve algebraisch und u eine ganze rationale Form der Ordnung n ist; die Gleichung (6) wird vom Grade $3n-4$, während die Gleichung (11) nur vom Grade $3(n-2)=3n-6$ ist. Wenn man die imaginären Lösungen, welche zwei Gleichungen besitzen können, als Darstellung für einen imaginären Schnittpunkt der beiden durch diese Gleichungen gegebenen Kurven betrachtet, so kann man folgenden, zuerst von *Hesse* gegebenen Satz aussprechen:

Lehrsatz I. Die Wendepunkte einer algebraischen Kurve von der Ordnung n werden durch eine zweite algebraische Kurve von der Ordnung $3(n-2)$ ausgeschnitten.

Wenn nun die Koeffizienten in der Gleichung der Kurve $u=0$ ganz allgemein bleiben, derart, dafs zwischen ihnen keinerlei Relationen existieren, so können auch die Gleichungen (12) des vorigen Paragraphen keine gemeinsame Lösung besitzen. Folglich werden sämtliche Schnittpunkte der Kurven (1) und (11) Wendepunkte der Kurve u. Andererseits weifs man, dafs nach dem *Bezout*schen Satze die Elimination einer der Variabelen zwischen den Gleichungen (1) und (11) auf eine Endgleichung führt, deren Ordnung gleich dem Produkte aus den Ordnungen der beiden Gleichungen ist; man hat also den

Lehrsatz II. Eine algebraische Kurve von der Ordnung n mit allgemeinen Koeffizienten hat $3n(n-2)$ Wendepunkte.

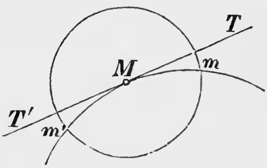
Im Besonderen erkennt man, dafs die Kurven zweiter Ordnung keine Wendepunkte haben, was bekannt ist, und dafs eine Kurve dritten Grades im allgemeinen neun reelle oder imaginäre Wendepunkte besitzt.

Die Identität (9), in welcher $u_{11}u_2^2-2u_{12}u_1u_2+u_{22}u_1^2$ vom Grade $3n-4$ und $H(u)$ vom Grade $3n-6$ ist, lehrt, dafs die Kurve $u_{11}u_2^2-2u_{12}u_1u_2+u_{22}u_1^2=0$ auf $u=0$ nicht nur die $3n-6$ Wendepunkte ausschneidet, sondern auch diejenigen $2n$ Punkte, in denen $x_3^2=0$ die Kurve schneidet. Dies sind die n unendlich fernen Punkte der Kurve, ein jeder doppelt gezählt.

§ 3. Singuläre Punkte.

181. Definition eines singulären Punktes. Betrachten wir (Fig. 30) eine Kurve in einem Punkte M. Im Allgemeinen wird durch den Punkt M nur ein bestimmter, stetiger Kurvenzug $m'Mm$ hindurchgehen, und auch die Tangenet TT' wird ihre Richtung stetig ändern, wenn ihr Berührungspunkt M den Bogen $m'Mm$ durchläuft. Ein solches Kurvenbild bietet keinerlei Besonderheiten und von diesem geometrischen Standpunkte aus definieren wir daher:

Fig. 30.



Definition. Wir sagen der Kurvenpunkt M hat eine allgemeine Lage, wenn 1) durch ihn ein und nur ein bestimmter Kurvenzug $m'Mm$ hindurchgeht, welcher in der Umgebung von M stetig ist, und wenn 2) auch die Tangente im Punkte M und seiner Umgebung ihre Richtung stetig ändert.

Einen Punkt M, der nicht eine allgemeine Lage hat, nennen wir einen singulären Punkt. Wir definieren also weiter:

Wenn dagegen der Kurvenpunkt M auch nur eine der beiden eben gestellten Forderungen nicht erfüllt, so heifst er ein singulärer Punkt der Kurve.

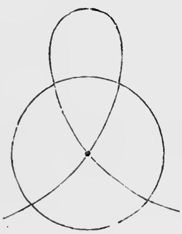
Man kann immer annehmen, dafs die Tangente, wenn M den Bogen $m'Mm$ durchläuft, nicht einmal der Ordinatenaxe parallel wird, sobald der Punkt M eine allgemeine Lage hat. Ist daher die Gleichung der Kurve in der Form $y = f(x)$ gegeben und sind die Koordinatenaxen nicht unglücklich gewählt, so ist ein Punkt, dessen Abscisse $x = a$ ist, von allgemeiner Lage dann und nur dann, wenn die Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ nebst ihrer ersten Ableitung stetig ist.

Beschreiben wir zur weiteren Veranschaulichung um den Kurvenpunkt M als Mittelpunkt einen Kreis, der in die Umgebung des Punktes M hineinfällt, so ist M von allgemeiner Lage, wenn 1) der Kreis die Kurve in zwei und nur zwei Punkten m und m' schneidet, und wenn 2) der Winkel $\angle m'Mm$, den die Radien nach den beiden Schnittpunkten mit einander bilden, der Grenze π zustrebt, wenn der Radius des Kreises null wird. Ist nur eine dieser zwei Bedingungen nicht erfüllt, so ist M ein singulärer Punkt.

Wir wollen jetzt einige Arten von singulären Punkten beschreiben, die auftreten können.

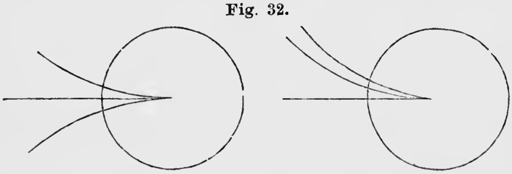
182. Aufzählung einiger singulärer Punkte. 1. *Vielfache Punkte.* (Fig. 31). Man nennt einen Punkt einen *vielfachen*, wenn mehrere Zweige der Kurve durch ihn hindurchgehen, mögen sich diese unter einander berühren oder nicht. Der Kreis, welcher aus einem vielfachen Punkte als Mittelpunkt beschrieben ist, schneidet die Kurve in mehr als zwei Punkten.

Fig. 31.



2. *Rückkehrpunkte oder Spitzen.* (Fig. 32). Rückkehrpunkte (oder Spitzen) heifsen diejenigen Punkte einer Kurve, in welchen zwei Zweige der Kurven endigen und dabei eine gemeinsame Tangente haben. Der Kreis, welcher aus einem Rückkehrpunkt als Zentrum beschrieben wird, schneidet die Kurve nur in zwei Punkten; aber die Radien, welche zu diesen beiden Punkten führen, bilden mit einander einen Winkel, der mit dem Radius des Kreises null wird.

Fig. 32.

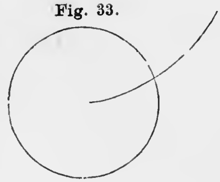


Man unterscheidet Rückkehrpunkte von zweierlei Art. Der Rückkehrpunkt heifst von der *ersten Art* oder *eine gewöhnliche Spitze*, wenn die beiden Kurvenzweige auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente sich befinden, dagegen von der *zweiten Art* oder eine *Schnabelspitze*, wenn sie auf der nämlichen Seite der Tangente liegen.

3. *Isolierte Punkte.* Isolierte Punkte heifsen diejenigen, in deren Umgebung kein anderer Punkt der Kurve liegt. Der aus einem isolierten Punkt als Zentrum beschriebene Kreis schneidet bei hinlänglicher Kleinheit des Radius die Kurve in keinem Punkte.

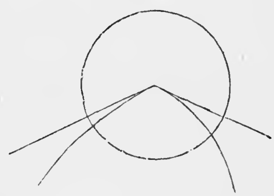
4. *Endpunkt.* (Fig. 33). Ein Endpunkt ist ein Punkt, in welchem ein einziger Zweig der Kurve plötzlich abbricht. Der Kreis, welcher mit einem hinlänglich kleinen Radius aus solch einem Endpunkte als Zentrum beschrieben ist, schneidet die Kurve nur in einem Punkt.

Fig. 33.



5. *Eckpunkt.* (Fig. 34). In einem Eckpunkte endigen zwei Zweige der Kurve, welche in diesem Punkte verschiedene Tangenten haben. Der Kreis, beschrieben aus solch einem Eckpunkte als Zentrum, schneidet die Kurve in zwei Punkten; aber die Radien, welche durch diese Punkte gehen, bilden einen Winkel, der sich von zwei rechten oder von null um eine endliche Gröfse unterscheidet.

Fig. 34.



Die vorstehende Aufzählung erschöpft keineswegs alle möglichen Arten von Singularitäten. Die genannten Fälle sind vielmehr solche, welche sich besonders häufig darbieten, übrigens auch zum Teil gleichzeitig eintreten können. Wir geben jetzt für jede der genannten fünf Arten von singulären Punkten ein Beispiel.

183. Beispiel eines Doppelpunktes und eines isolierten Punktes.

Wir betrachten die Kurve:

$$y = (x - a)\sqrt{x - b}.$$

In dieser Gleichung haben wir auf der rechten Seite zwei Vorzeichen zu unterscheiden; streng genommen wird demnach unsere Kurve erst durch die zwei Gleichungen dargestellt:

$$y = (x - a)\left|\sqrt{x - b}\right| \quad \text{und} \quad y = -(x - a)\left|\sqrt{x - b}\right|,$$

deren jede einen Zweig unserer Kurve liefern. Die beiden Zweige, die übrigens symmetrisch zur x-Axe verlaufen, machen zusammengenommen das aus, was wir schlechthin die Kurve $y = (x - a)\sqrt{x - b}$ nennen. An der Stelle $x = a$ wird $y = 0$ für beide Kurvenzweige. Im Punkte $(a, 0)$ vereinigen sich also die beiden Kurvenzweige. Die Tangentenrichtung bestimmt sich aus:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-b} + \frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}.$$

Im Besonderen wird für $x = a$:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a-b}.$$

Ist daher 1) $a > b$, so haben wir den zwei Vorzeichen von $\sqrt{a-b}$ entsprechend an der Stelle $x = a$ zwar nur einen Kurvenpunkt $(a, 0)$, aber zwei verschiedene Tangenten.

Betrachten wir nun unsere Kurve auch in der Umgebung des Punktes $M = (a, 0)$. Damit y einen Wert hat, mufs $x \geqq b$ sein. Setzen wir $x = b$, so wird $y = 0$ für beide Kurvenzweige und $\frac{dy}{dx}$ gleich $+\infty$ für den oberen, gleich $-\infty$ für den unteren Kurvenzug. Der obere Kurvenzweig geht also von dem Punkte $(b, 0)$ unter einem Winkel von 90^0 nach oben, der untere Kurvenzweig unter einem Winkel von 90^0 nach unten. Beide Kurvenäste gehen also im Punkte $(b, 0)$ samt ihren Tangenten stetig in einander über. Verfolgen wir den oberen Kurvenzweig weiter, der dem negativen Vorzeichen der Quadratwurzel entspricht, solange $b < x < a$ ist, so wächst y zunächst, während die Tangentenneigung immer mehr abnimmt bis y sein Maximum an der Stelle $x = \frac{a + 2b}{3}$ erreicht, wo die Tangente horizontal wird. Wächst jetzt x weiter bis a, so nimmt y wieder ab, $\frac{dy}{dx}$ nimmt weiter ab und wird negativ, bis in der Stelle $x = a$, die wir hier studieren, $y = 0$ wird und $\frac{dy}{dx}$ einen negativen Wert hat. Wollen wir unseren Kurvenzweig weiter verfolgen, so müssen wir der Quadratwurzel das negative Zeichen belassen und x über a hinaus wachsen lassen. Dann bleibt y beständig negativ, während seine absoluten Werte immer mehr wachsen. Gleiches gilt von $\frac{dy}{dx}$. Der Kurvenzweig wird also nach Passieren des Punktes M der untere und fällt beständig noch weiter. Genau das Spiegelbild von dem Kurvenzug, der dem negativen Zeichen der

Wurzel entspricht, ist derjenige, welcher dem positiven Vorzeichen entspricht. Wir sehen also deutlich, wie die beiden Zweige zusammengenommen die Kurve $y = (x - a)\sqrt{x - b}$ ausmachen, und wie diese im Punkte $(a, 0)$ einen Doppelpunkt hat.

Ist dagegen 2) $a < b$, so ist $\sqrt{a - b}$ imaginär und also auch $\sqrt{x - b}$, solange x kleiner als b bleibt. Hier beginnt die Kurve also erst für $x > b$ einen stetigen Kurvenzug zu bilden. Dieser besteht wieder aus zwei Ästen, die symmetrisch oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe verlaufen und sich nach rechts bis ins Unendliche erstrecken. Ganz isoliert von diesem Kurvenzug ist der Punkt $x = a$, $y = 0$, der ebenfalls der Kurve angehört.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so sehen wir:

Die Kurve $y = (x - a)\sqrt{x - b}$ hat im Punkte $x = a$, $y = 0$ einen Doppelpunkt, wenn $a > b$ ist, dagegen einen isolierten Punkt, wenn $a < b$ ist.

184. Beispiel einer gewöhnlichen Spitze und einer Schnabelspitze. Betrachten wir als weiteres Beispiel erstlich die Kurve

$$y = \sqrt{x^3}$$

an der Stelle $x = 0$. Dort wird auch $y = 0$. Die Kurve geht also durch den Koordinatenanfang. Sie existiert aber nur rechts von der y-Axe; denn nur für positive Werte x hat $\sqrt{x^3}$ einen Wert. Sie besteht aus zwei Zweigen, die wieder symmetrisch oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe verlaufen und sich im Koordinatenanfange vereinen. Die Tangente bestimmt sich durch:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Sie fällt also im Koordinatenanfang für beide Zweige mit der Abscissenaxe zusammen; denn für $x = 0$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, welches Vorzeichen man auch der Quadratwurzel erteilen mag. Wir sehen mithin:

Die Kurve $y = \sqrt{x^3}$ hat im Koordinatenanfang eine gewöhnliche Spitze.

Würden wir übrigens $x - a$ für x schreiben, so erhielten wir die Kurve

$$y = \sqrt{(x-a)^3},$$

welche im Punkte $(a, 0)$ eine gewöhnliche Spitze hat. Auf diesen Fall wären wir auch gekommen, wenn wir in dem Beispiel der vorigen Nummer auch die Möglichkeit $a = b$ in Betracht gezogen hätten.

Um nun auch ein Beispiel für die Schnabelspitze zu haben, nehmen wir die Kurve

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}$$

und fassen wieder den Koordinatenanfang ins Auge, durch den sie ja hindurchgeht. Sie besteht wieder aus zwei Zweigen, die nur rechts von der y-Axe existieren und sich dort ins Unendliche erstrecken. Im Koordinatenanfang vereinen sich beide Zweige und gehen nach links nicht weiter. Die Tangentenrichtung

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

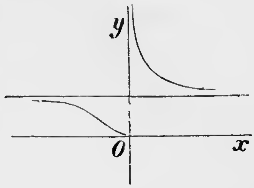
ist im Koordinatenanfang wieder die nämliche für beide Zweige, nämlich die der x-Axe; bisher ist also alles wie im vorigen Beispiel, und der Koordinatenanfang ist eine Spitze unserer Kurve. Nur liegen jetzt die beiden Kurvenäste anders als vorher zu ihrer gemeinsamen Tangente, der x-Axe. Dem positiven Zeichen der Wurzel entspricht zwar wie vorher ein oberer Zweig, der von Anfang an beständig wachsend oberhalb der x-Axe verläuft. Aber der dem negativen Zeichen der Wurzel entsprechende Zweig verläuft ebenfalls oberhalb der x-Axe, solange $x < 1$ ist; denn solange ist $x^2 > x^{\frac{5}{2}}$ und also auch $x^2 - \sqrt{x^5}$ positiv. Diesmal liegen also in der Nähe der Spitze beide Kurvenzweige auf der nämlichen Seite der Tangente, wir haben eine Schnabelspitze.

185. Beispiel eines Endpunktes. (Fig. 35). Die Kurve

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

bietet das Beispiel eines Endpunktes im Punkte $x = 0$. Läfst man x von 0 bis $+\infty$ wachsen, so nimmt die Ordinate y von $+\infty$ bis $+1$ ab, und man hat einen Zweig der Kurve

Fig. 35.



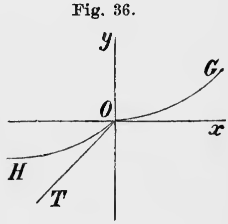
innerhalb des positiven Quadranten der Koordinatenaxen. Dieser Zweig hat die y-Axe zur Asymptote, desgleichen eine Parallele zur x-Axe mit der Ordinate $y = 1$. Läſst man x von $-\infty$ bis 0 gehen, so geht y von $+1$ bis 0, und man erhält demnach einen zweiten Zweig der Kurve, welcher im Koordinatenanfangspunkt plötzlich endet.

Auch ist zu bemerken, daſs die Funktion y unstetig ist an der Stelle $x = 0$. Nähert sich x wachsend der Null, so wird $y = 0$, nähert sich x abnehmend der Null, so wird $y = \infty$.

186. Beispiel eines Eckpunktes. (Fig. 36). Die Kurve

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Fig. 36.



bietet ein Beispiel für einen Eckpunkt im Koordinatenanfangspunkte. Um die Tangente im Anfangspunkte zu erhalten, genügt es (Nr. 129), die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

für $x = 0$ zu bestimmen. Wenn aber x nach 0 konvergiert, so konvergiert $e^{\frac{1}{x}}$ nach ∞ oder nach 0, je nachdem x von der positiven oder negativen Seite in die Null hineinrückt. Man hat also im Anfangspunkte zwei Tangenten, deren Richtungskoeffizienten bezüglich 0 und 1 sind. Die Kurve setzt sich demnach aus zwei Zweigen zusammen; der eine, OG, liegt innerhalb des positiven Quadranten, und berührt im Anfangspunkte die Abscissenaxe, der andere, OH, liegt im Quadranten mit negativen Koordinaten und hat im Anfangspunkte die Winkelhalbierende OT zur Tangente. Dieser Punkt ist also ein Eckpunkt der Kurve.

Werfen wir einen Rückblick auf die in den Nummern 183 bis 186 behandelten Beispiele, so bemerken wir sofort einen wichtigen Unterschied zwischen den Kurven 183 und

184 einerseits, sowie denen in 185 und 186 andrerseits. Jene sind lauter algebraische Kurven, d. h. y ist eine algebraische Funktion von x, diese sind dagegen transscendente Kurven, y ist eine transscendente Funktion von x. In der That läfst sich das Beispiel 183 schreiben:

$$y^2 - (x - a)^2 (x - b) = 0,$$

und die Beispiele der Nummer 184 waren:

$$y^2 - x^3 = 0 \quad \text{und} \quad (y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Alle haben also die Gestalt:

$$F(x, y) = 0,$$

wo F eine ganze rationale Funktion bedeutet. Indem wir jetzt die nur durch transscendente Kurven darstellbaren Singularitäten bei Seite lassen, führen uns unsere Beobachtungen dazu, die Singularitäten einer Kurve zu studieren:

$$F(x, y) = 0,$$

bei der F eine ganze rationale Funktion ist. Wir können sogar, ohne dadurch etwas neues zu erhalten, uns auf die Annahme beschränken, dafs F in der Umgebung der gerade betrachteten Stelle sich nach dem Taylorschen Satze entwickeln läfst. Ehe wir aber auf die geometrische Natur der Singularitäten eingehen, ist es erforderlich, dafs wir dem arithmetischen Begriffe „implicite Funktion“ etwas mehr Aufmerksamkeit schenken als wir bisher gethan haben.

187. Existenz einer impliciten Funktion. Wir haben bereits in den früheren Kapiteln von dem Begriffe einer Funktion y von x, welche implicite durch eine Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

definiert wird, sehr häufig Gebrauch gemacht. War die Gleichung $F = 0$ durch das Wertepaar $x = a$, $y = b$ erfüllt, so nahmen wir an, dafs dann auch eine Funktion y von x existiert, welche für $x = a$ den Wert b annimmt und der Gleichung $F(x, y)$ genügt. Ist z. B.

$$x^2 - y^2 = 0,$$

so erfüllt das Wertepaar $x = 1$, $y = 1$ die Gleichung und wir haben in $y = x$ eine Funktion, welche immer der gegebenen Gleichung genügt und für $x=1$ auch den Wert 1 annimmt. Die Funktion $y=x$ ist die einzige, welche die genannten Forderungen erfüllt.

Aber auch das Wertepaar $x=0$, $y=0$ erfüllt unsere Gleichung und, wenn wir jetzt verlangen eine Funktion zu finden, welche der gegebenen Gleichung genügt und für $x=0$ den Wert 0 annimmt, so finden wir deren zwei:

$$y=+x \quad \text{und} \quad y=-x.$$

Es kann also unter Umständen durch unsere Forderungen die implicite Funktion noch gar nicht festgelegt sein.

Nehmen wir endlich die Gleichung

$$x^2+y^2=0;$$

sie wird wieder durch $x=0$, $y=0$ erfüllt, aber durch kein anderes Wertepaar. Es existiert also hier gar keine Funktion y von x, welche der gegebenen Gleichung genügt. Wir sehen also, dafs es nötig ist, zu prüfen, unter welchen Umständen wir die Existenz einer impliciten Funktion behaupten und diese selbst eindeutig festlegen können. Wir werden sehen, dafs diese Frage mit dem Gegenstande, mit welchem wir uns hier beschäftigen, den singulären Punkten, aufs Engste zusammenhängt. Gleichzeitig gewinnen wir dadurch eine nachträgliche Rechtfertigung unserer früheren Sätze über implicite Funktionen; denn unter den dort gemachten Voraussetzungen läfst sich thatsächlich die Existenz der impliciten Funktionen erweisen. Das Mittel, welches wir beim Beweise verwenden, ist hauptsächlich das der Entwickelung der Funktionen in Potenzreihen. Diese ist ja bereits im fünften Kapitel ausführlich behandelt worden, sie wird im elften Kapitel, in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, erst befriedigend begründet werden können und noch in den folgenden Partien dieses Werkes, besonders in der Theorie der Differentialgleichungen, eine hervorragende Rolle spielen. Wir werden daher jetzt gezwungen sein, einige Sätze zu benutzen, die erst in noch folgenden Kapiteln streng begründet werden können. Besonders mögen hier folgende Bemerkungen Platz finden.

Haben wir eine Funktion $f(x)$, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nach dem *Mac-Laurin*schen Satze entwickeln läfst:

$$f(x) = a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

so wird diese in einer bestimmten Umgebung der Stelle $x = 0$, etwa für $|x| < r$, konvergieren. Die Koeffizienten berechnen sich, wie wir in Nr. 116 gelernt haben:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = f''(0), \ldots$$

Man wird nun gern glauben und im elften Kapitel (Nr. 368 und 369) bewiesen finden, dafs eine solche Reihe in der Umgebung von $x = 0$ eine stetige Funktion von x ist, dafs Gleiches von ihren sämtlichen Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, u. s. w. gilt und dafs deren Werte erhalten werden, indem man die Potenzreihe gliedweise differentiiert. Es wird also:

$$f'(x) = 1 \,.\, a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$
$$f''(x) = 2 \,.\, 1 a_2 + 3 \,.\, 2 a_3 x + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Analoges gilt von der Entwickelung einer Funktion mehrerer Veränderlichen $x, y, \ldots$ nach Potenzen von $x, y, \ldots$ nach dem verallgemeinerten *Mac-Laurin*schen Satze der Nr. 138.

Dies vorausgeschickt gilt nun der folgende Satz, welcher als die Grundlage unserer Untersuchungen über singuläre Punkte von Kurven anzusehen ist und die Existenz der impliciten Funktion begründet:

Satz. *Die Funktion $F(x, y)$ sei nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickelbar und verschwinde an der Stelle $x = 0$, $y = 0$; $F_y'(x, y)$ aber sei an dieser Stelle nicht null. Alsdann giebt es eine und nur eine Funktion y von x, welche für $x = 0$ den Wert null annimmt und in der Umgebung der Stelle $x = 0$ ebenfalls nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickelbar ist.*

Um unseren Satz zu erweisen, suchen wir nach einer Rechenvorschrift, welche uns zu jedem Werte x, der der Umgebung der Stelle $x = 0$ angehört, den zugehörigen Funktionswert zu berechnen gestattet. Existiert die fragliche Reihe, so hat sie die Gestalt:

(1) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = f(x),$$

und es ist

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots$$

Die Reihe (1) selbst giebt uns die verlangte Rechenvorschrift, sobald nur ihre Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bekannt sind. Da für $x = 0$ auch $y = 0$ sein soll, finden wir zunächst:

$$a_0 = 0.$$

Die übrigen Koeffizienten sind aus der Bedingung zu bestimmen, dafs $F(x, y)$ identisch null sein soll, wenn wir für y seinen Wert aus (1) in $F(x, y)$ einsetzen. Dadurch wird $F(x, y)$ eine Funktion von x allein, die wir nach dem *MacLaurin*schen Satze nach Potenzen von x entwickeln. Dann mufs (Nr. 371) der Koeffizient einer jeden Potenz von x null sein, da der Ausdruck ja für jeden Wert von x null ist. Es werde vermöge (1):

$$F(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

Dann wird:

$$b_0 = F(0, 0),$$

$$b_1 = \left(\frac{dF(x, y)}{dx}\right)_0,$$

$$b_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 F(x, y)}{dx^2}\right)_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Bei den Differentiationen ist y als Funktion von x anzusehen.

Da zunächst $F(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ verschwindet, so ist:

$$b_0 = F(0, 0) = 0.$$

Weiter finden wir:

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} b_1 = \left(F'_x + F'_y \cdot \dfrac{dy}{dx}\right)_0, \\ b_2 = \left(F''_{xx} + 2F''_{xy} \cdot \dfrac{dy}{dx} + F''_{yy} \cdot \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + F'_y \cdot \dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Indem wir nun die linken Seiten, d. h. sämtliche b gleich null setzen, erhalten wir eine unendliche Reihe von Gleichungen. Rechts ist immer $x = 0$, $y = 0$ zu setzen. Dadurch werden die Koeffizienten in diesen Gleichungen die partiellen Ableitungen der Funktion F an der Stelle $x = 0$, $y = 0$. Diese sind aber sämtlich bekannt; denn jene partiellen Ableitungen sind die Koeffizienten in der *Mac-Laurin*schen Entwickelung der Funktion $F(x, y)$ nach Potenzen von x und y, die als bekannt vorausgesetzt ist. Die Unbekannten in den Gleichungen (2) sind aber die Werte der Differentialquotienten:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f'(0), \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = f''(0), \ldots$$

d. h. gerade die Gröfsen, welche wir kennen müssen, um die Reihenentwickelung (1) hinschreiben zu können. Die erste der Gleichungen (2) ist aber linear in $f'(0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ und der Koeffizient $F_y'(0, 0)$ ist nach Voraussetzung nicht null. Also finden wir aus ihr $f'(0)$. Setzen wir den gefundenen Wert in die zweite der Gleichungen (2) für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ein, so bleibt als einzige Unbekannte $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = f''(0)$. In dieser ist die Gleichung wieder linear und der Koeffizient von $f''(0)$ wieder die von null verschiedene Zahl $F_y'(0, 0)$. Aus ihr kann man daher $f''(0)$ berechnen. Ebenso findet man aus der dritten Gleichung (2) $f'''(0)$ u. s. w., und man ist so imstande die Koeffizienten a der Gleichung (1) zu berechnen. Somit haben wir eine und nur eine Reihe für y gewonnen:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

welche der Gleichung $F(x, y) = 0$ formal genügt und für $x = 0$ den Wert null annimmt. Aber dann und nur dann definiert diese Reihe eine Funktion von x, wenn sie für gewisse x, etwa für $|x| < r$ konvergiert. Dieser Konvergenzbezirk macht dann die Umgebung der Stelle $x = 0$ aus. Dafs aber die so erhaltene Reihe thatsächlich in einem endlichen Bezirk um $x = 0$ konvergiert, wird bei den Existenztheoremen in der Theorie der Differentialgleichungen im dritten Bande dieses Werkes gezeigt werden, und indem wir auf den dortigen Beweis verweisen, haben wir unseren hier ausgesprochenen Satz erwiesen.

188. Fall, dafs der Gleichung $F(x, y) = 0$ zwei Funktionen y genügen, die an der Stelle $x = 0$ verschwinden. Wir wollen jetzt, um für das Studium der singulären Punkte hinreichend vorbereitet zu sein, weiterhin den Fall ins Auge fassen, dafs an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ F und seine beiden ersten Ableitungen verschwinden, aber F''_{yy} nicht. Eine besondere Rolle spielt hier der Ausdruck:

$$F''^2_{xy} - F''_{xx} F''_{yy},$$

den wir bereits in der Theorie der Maxima und Minima Nr. 157 kennen gelernt haben. Wir setzen voraus, dafs er positiv ist und beweisen den Satz:

Satz. *An der Stelle $x = 0$, $y = 0$ seien $F(x, y)$, F'_x, F'_y null, aber nicht F''_{yy} und $F''^2_{xy} - F''_{xx} F''_{yy}$. Letzterer Ausdruck sei dort vielmehr positiv. In der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ sei F nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickelbar. Dann giebt es zwei und nur zwei Funktionen von x, welche in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickelbar sind, für $x = 0$ beide verschwinden und, an Stelle von y in die Gleichung:*

$$F(x, y) = 0$$

eingesetzt, diese identisch für alle Werte x in der Umgebung der Stelle $x = 0$ befriedigen.

Zum Beweise verfahren wir genau wie in der vorigen Nummer. Wir setzen für y die Entwickelung (1) an und setzen sie in die Gleichung (2) ein, um die Koeffizienten a zu bestimmen. Hierdurch entstehen die Ausdrücke b, die sämtlich gleich null zu setzen sind. Da F'_x und F'_y an der Stelle $(0, 0)$ verschwinden sollen, so ist die Gleichung $b_1 = 0$ von selbst erfüllt. Die folgende Gleichung wird:

$$0 = b_2 = \left\{F''_{xx} + 2 F''_{xy} \frac{dy}{dx} + F''_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}_0$$

und die übrigen Gleichungen gehen aus dieser durch Differentiation hervor, wenn wir nur jedesmal nach geschehener Differentiation $x = 0$, $y = 0$ setzen. Die obige Gleichung liefert aber:

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-F''_{xy} \pm \sqrt{F''^2_{xy} - F''_{xx} F''_{yy}}}{F''_{yy}}.$$

Auf der rechten Seite ist F''_{yy} nicht null an der Stelle $(0, 0)$ und $F''^2_{xy} - F''_{xx} F''_{yy}$ dort positiv, also hat $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ zwei bestimmte endliche Werte, die von einander verschieden sind. Wir erhalten also *zwei* Werte für:

$$a_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f'(0).$$

Durch wiederholte Differentiation (3) erhalten wir $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ Dabei treten in den Nenner nur Potenzen von F''_{yy} und $\sqrt{F''^2_{xy} - F''_{xx}F''_{yy}}$, zwei Gröfsen, die für $x = 0$, $y = 0$ nicht verschwinden. Also erhalten wir auch bestimmte Werte für:

$$f''(0) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \quad f'''(0) = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0, \ldots$$

und also auch für $a_2, a_3, \ldots$

Im Allgemeinen werden, den zwei Vorzeichen der Wurzel entsprechend, sich für ein a auch zwei verschiedene Werte ergeben. Gewifs ist dies für a_1. Wir bekommen, sagen wir:

$$\begin{matrix} a_1 = a_1', & a_2 = a_2', & a_3 = a_3', \ldots \\ a_1 = a_1'', & a_2 = a_2'', & a_3 = a_3'', \ldots \end{matrix} \qquad a_1' \neq a_1''.$$

Setzen wir die so gefundenen Zahlen in (1) ein, so erhalten wir zwei Entwickelungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} y = a_1'x + a_2'x^2 + \cdots \\ y = a_1''x + a_2''x^2 + \cdots \end{cases}, \quad a_1' \neq a_1''.$$

Diese liefern zwei verschiedene Funktionen; denn a_1' ist nicht gleich a_1'', beide werden aber für $x = 0$ auch null und beide genügen der Gleichung $F = 0$. Der in voriger Nummer citierte Satz im 3ten Teile dieses Werkes lehrt aber auch, dafs die eben erhaltenen Entwickelungen in einer Umgebung von $x = 0$ konvergieren und daher thatsächlich Funktionen von x vorstellen.

189. Kriterium für den Punkt allgemeiner Lage. Wir können jetzt das Studium der singulären Punkte einer Kurve beginnen und gleich die Sätze der beiden vorigen Nummern geometrisch deuten. Der Satz der Nummer 187 nimmt die Gestalt an:

Satz. Die Funktion $F(x, y)$ sei nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickelbar und verschwinde an der Stelle $x = 0$, $y = 0$. Dagegen seien dort F_x' und F_y' nicht gleichzeitig null. Alsdann ist die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

die einer Kurve, welche durch den Koordinatenanfang hindurchgeht und für welche der Koordinatenanfang ein Punkt allgemeiner Lage ist.

Zunächst möge man beachten, dafs es keine Beschränkung unserer Untersuchung ist, wenn wir statt eines Punktes $x = a$, $y = b$, gerade den Koordinatenanfang betrachten. Man kann ja immer den Koordinatenanfang in den Punkt legen, welchen man gerade untersuchen will. Ferner, wenn F_x' und F_y' nicht beide im Koordinatenanfange null sind, so kann man die Benennung der Axen so einrichten, dafs gerade F_y' dort von null verschieden ist. Hierdurch ist den Voraussetzungen der Nr. 189 genügt, und es existiert daher eine und nur eine Funktion

$$y = f(x),$$

welche für $x = 0$ verschwindet und welche, da sie durch die Potenzreihe (1) der Nr. 187 dargestellt wird, nebst ihrer Ableitung in der Umgebung von $x = 0$ auch stetig ist. Also ändern sich Kurvenordinate und Tangente stetig in der Umgebung des Koordinatenanfanges. Dieser ist also nach Nr. 181 ein Punkt allgemeiner Lage.

190. Kriterium für den Doppelpunkt und den isolierten Punkt.

Auch der Satz der Nr. 188 läfst sich sofort geometrisch aussprechen; er lautet dann:

Satz. An der Stelle $x = 0$, $y = 0$ seien F, F_x' und F_y' null, aber nicht alle Ableitungen zweiter Ordnung; $F_{xy}''^2 - F_{xx}''F_{yy}''$ sei dort positiv. Endlich sei F in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ nach dem Mac-Laurinschen Satze entwickelbar. Ist nun 1) $F_{xy}''^2 - F_{xx}''F_{yy}''$ im Koordinatenanfange positiv, so ist $F = 0$ die Gleichung einer Kurve, welche im Koordinatenanfange einen Doppelpunkt hat. Ist dagegen 2) im Koordinatenanfange $F_{xy}''^2 - F_{xx}''F_{yy}''$ negativ, so ist dieser ein isolierter Punkt der Kurve $F = 0$.

Ist zunächst $F_{xy}''^2 - F_{xx}''F_{yy}''$ positiv, so hat die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach Nr. 188 Formel (4) zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} y &= a_1' x + a_2' x^2 + \cdots, \\ y &= a_1'' x + a_2'' x^2 + \cdots, \end{aligned} \qquad a_1' \neq a_1''$$

welche für $x = 0$ verschwinden. Es gehen also zwei Kurvenzweige durch den Koordinatenanfang, die sowohl links als rechts von der y-Axe stetig sind. Die Tangenten an sie werden

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a_1' \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a_1''$$

von einander verschieden. Wir haben also einen Doppelpunkt.

Ist dagegen $F''^2_{xy} - F''_{xx} F''_{yy}$ negativ, so werden die Rechnungen der Nummer 188 nicht geändert. Nur wird $\sqrt{F''^2_{xy} - F''_{xx} F''_{yy}}$ imaginär. Also werden (vergl. Nr. 188) die Werte von a_1' und a_1'' und im Allgemeinen auch die der folgenden Koeffizienten imaginär, also auch die beiden Entwicklungen für y und die Werte von $\frac{dy}{dx}$ an der Stelle $x = 0$. Die Kurve existiert also nicht in der Umgebung von $x = 0$. Wir haben einen isolierten Punkt.

Es ist noch hervorzuheben, dafs wir nur angenommen haben, dafs an der Stelle $x = 0, y = 0$ nicht alle Ableitungen zweiter Ordnung verschwinden, während die Nr. 188 fordert, dafs an jener Stelle gerade F''_{yy} nicht null ist. Dies ist aber durch geeignete Wahl des Koordinatensystems zu erreichen. Sollte F''_{yy} im Koordinatenanfange verschwinden, so sehe man zuerst nach, ob dort auch F''_{xx} null ist. Ist dies nicht der Fall, so vertausche man einfach die x- und y-Axe mit einander in der Benennung, dann ist F''_{yy} nicht mehr null im Koordinatenanfange. Sind aber F''_{xx} und F''_{yy} dort beide null, so ist dort F''_{xy} gewifs von null verschieden, und F hat nach dem *Mac-Laurin*schen Satze die Entwickelung:

$$F(x, y) = 2Axy + (A_{30}x^3 + 3A_{21}x^2y + 3A_{12}xy^2 + A_{03}y^3) + \cdots,$$

und zwar ist $A = F''_{xy}(0,0)$ von null verschieden.

Führt man also die neue Variable ein:

$$x = x_1 + y,$$

so wird die Kurvengleichung:

$$\begin{aligned} G(x_1, y) = {} & 2Ax_1y + 2Ay^2 \\ & + (B_{30}x_1^3 + 3B_{21}x_1^2y + 3B_{12}x_1y^2 + B_{03}y^3) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Die B berechnen sich in leicht anzugebender Weise aus den A, und die Kurve geht durch den neuen Koordinatenanfang

$x_1 = 0,\ y = 0$. Gleichzeitig ist dort $\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0$ und $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$; denn die ersten Potenzen von x_1 und y treten auch in der letzten Gleichung nicht auf, und endlich ist der Ausdruck:

$$(G''^{\,2}_{x_1 y} - G''_{x_1 x_1} G''_{yy})_0 = 4A^2 = (F''^{\,2}_{xy} - F''_{xx} F''_{yy})_0$$

geblieben. Dagegen ist jetzt $G''_{yy} = 2A$ nicht mehr null, wie zu erreichen sein sollte. Sind also nicht alle Ableitungen zweiter Ordnung null, so kann man annehmen, dafs F''_{yy} von null verschieden ist.

191. Kriterium für die gewöhnliche Spitze und die Schnabelspitze.

Eine ganze Reihe von Fallunterscheidungen sind in dem Falle zu machen, dafs der Ausdruck

$$F''^{\,2}_{xy} - F''_{xx} F''_{yy} = 0$$

ist für $x = 0,\ y = 0$. Hiermit haben wir uns jetzt zu beschäftigen. Wir können wieder annehmen, dafs an der Stelle $(0,0)$ $F''_{yy} \neq 0$ ist. Unsere Kurvengleichung hat die Gestalt:

$$F = (A_{20}x^2 + 2A_{11}xy + A_{02}y^2) + \\ + (A_{30}x^3 + 3A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{03}y^3) + \cdots,$$

und nach dem *Mac-Laurin*schen Satze ist:

$$A_{20} = \tfrac{1}{2} F''_{xx}(0,0),\ A_{11} = \tfrac{1}{2} F''_{xy}(0,0),\ A_{02} = \tfrac{1}{2} F''_{yy}(0,0), \ldots$$

und also A_{02} nicht null. Hingegen ist:

$$A_{11}^2 - A_{02} A_{20} = 0.$$

Die Glieder zweiter Ordnung können wir daher schreiben:

$$A_{20}x^2 + 2A_{11}xy + A_{02}y^2 = \frac{1}{A_{02}} \left\{ (A_{11}x + A_{02}y)^2 - (A^2_{11} - A_{02}A_{20})x^2 \right\}$$
$$= \frac{1}{A_{02}} (A_{11}x + A_{02}y)^2.$$

Die Tangentenrichtung wird durch die Gleichung (3) der Nr. 188 gegeben. Setzt man dort $x = 0, y = 0$ ein, so verschwindet die Quadratwurzel, und wir bekommen im Punkte $(0,0)$ dieses Mal nur eine Tangente, deren Richtung durch:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{A_{11}}{A_{02}}$$

gegeben wird. Also ist

$$A_{11}x + A_{02}y = 0$$

die Gleichung dieser Tangente im Punkte (0, 0). Sehen wir nun, wie sich die Kurve in der Umgebung vom Koordinatenanfange verhält. Ihre Gleichung wird:

$$F = \frac{(A_{11}x + A_{02}y)^2}{A_{02}} + (A_{30}x^3 + 3A_{21}x^2y + 3A_{12}xy^2 + A_{03}y^3) + \cdots = 0.$$

Wir wollen an Stelle der y-Axe eine neue einführen, indem wir setzen:

$$(1) \qquad A_{11}x + A_{02}y = y_1; \; y = \frac{1}{A_{02}} y_1 - \frac{A_{11}}{A_{02}} x.$$

Dann wird unsere Kurvengleichung:

$$(2) \quad F = By_1^2 + (B_{30}x^3 + 3B_{21}x^2y_1 + 3B_{12}xy_1^2 + B_{03}y_1^3) + \cdots = 0.$$

Die B setzen sich in leicht zu übersehender Weise aus den A zusammen; wir heben nur hervor, dafs

$$B = \frac{1}{A_{02}} \neq 0$$

ist. Dann ist

$$y_1 = 0$$

jetzt unsere Tangente.

Wir nehmen nun zunächst den Fall:

a. $$B_{30} \neq 0.$$

Um unsere früheren Resultate anwenden zu können, substituieren wir:

$$(3) \qquad x = \varepsilon x_2^2, \; y_1 = \varepsilon x_2^2 y_2.$$

Dabei soll ε die positive oder negative Einheit bedeuten; die Verfügung über das Vorzeichen behalten wir uns vor. Die Gleichung (2) wird jetzt, wenn wir gleich durch $\varepsilon^2 x_2^4$ dividieren:

$$(By_2^2 + \varepsilon B_{30} x_2^2) + 3B_{21}\varepsilon x_2^2 y_2 + \cdots = 0.$$

Bezeichnen wir die auf der linken Seite stehende Funktion mit $G(x_2, y_2)$, so erfüllt diese die Bedingungen des ersten Teiles von Satz Nr. 190, sobald

$$\frac{1}{4}\left(G''^{\,2}_{x_2 y_2} - G''_{x_2 x_2} G''_{y_2 y_2}\right)_0 = -\varepsilon B_{30} B > 0$$

ist; dagegen die des zweiten Teiles von Satz Nr. 190, wenn

$$-\varepsilon B_{30} B < 0$$

ist. Haben daher α) B und B_{30} gleiches Zeichen, so wird es, wenn wir $\varepsilon = -1$ wählen, in der Umgebung von $x_2 = 0$ zwei Entwicklungen geben:

$$(4) \qquad \begin{aligned} y_2 &= a_1' x_2 + a_2' x_2^2 + \cdots, \\ y_2 &= a_1'' x_2 + a_2'' x_2^2 + \cdots, \end{aligned}$$

und zwar wird:

$$(5) \qquad a_1' = \left| \sqrt{\frac{B_{30}}{B}} \right|, \; a_1'' = - \left| \sqrt{\frac{B_{30}}{B}} \right|.$$

Aus der ersten Gleichung (3) ersehen wir, dafs, da $\varepsilon = -1$ ist, nur negativen Werten x, Werte x_2, also nach (4) auch Werte y_2, und nach der zweiten Gleichung (3) auch Werte y_1, endlich nach Gleichung (1) Werte y entsprechen. *Die Kurve existiert also nur links von der y-Axe.* Einem negativen Werte x, der in der Nähe der Stelle $x = 0$ liegt, entsprechen nun nach (3) zwei Werte von x_2:

$$x_2 = \sqrt{-x}$$

entsprechend den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel. Hat man aber sich für eines der Vorzeichen entschieden, so ist dadurch auch das der Wurzel in den Gleichungen (5), also der Zweig von y_2 bestimmt. Einem negativen Werte x in der Nähe von $x = 0$ entsprechen also zwei Werte y_2, also nach (3) auch zwei Werte y_1 und endlich nach (1) auch zwei Werte y. Die Kurve besteht also links von der y-Axe aus zwei Zweigen, die sich im Koordinatenanfange vereinen und dort die gemeinsame Tangente $y_1 = 0$ haben; dann hört sie auf.

Im Koordinatenanfang hat also die Kurve eine Spitze. Einem negativen Werte von x aber in der Nähe von $x = 0$ entsprechen — wie eben gezeigt — zwei Werte von y_2, die durch die Entwickelungen (4) gegeben sind. Für hinreichend kleine $|x|$ haben diese Entwickelungen das Vorzeichen des ersten Gliedes; folglich ist nach (5) das eine y_2 positiv, das andere negativ, und gleiches gilt nach (3) auch von y_1. Den zwei Zweigen entsprechen also verschiedene Vorzeichen von y_1. Da aber $y_1 = 0$ die gemeinsame Tangente ist, so folgt, dafs die Kurvenzweige zu verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente liegen. *Die Spitze ist also eine gewöhnliche Spitze.*

Ein ganz ähnliches Schlufsverfahren gilt, wenn β) B und B_{30} ungleiches Zeichen haben. Nur mufs man dann $\varepsilon = +1$

wählen. Die Kurve existiert daher nur für positive x, d. h. rechts von der y-Axe. Im Übrigen ist alles dasselbe; *die Spitze ist wieder eine gewöhnliche Spitze.*

Wir kommen jetzt zu dem zweiten Unterfall:

b. $$B_{30} = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{y_1}{x} = y_2, \; y_1 = xy_2 \tag{6}$$

in Gleichung (2) ein und dividieren gleich durch den gemeinsamen Faktor x^2, so erhalten wir:

$$(By_2^2 + 3B_{21}xy_2 + B_{40}x^2) + (3B_{12}xy_2^2 + 4B_{31}x^2y_2 + \cdots) + \cdots = 0,$$

eine Form, die ganz der in Nr. 190 entspricht. Ist daher

$$9B_{21}^2 - 4BB_{40} > 0,$$

so haben wir y_2 als zweiwertige Funktion von x, also werden nach (6) und (1) auch y_1 und y zweiwertige Funktionen von x, und dies gilt sowol für positive als für negative x in der Umgebung von $x = 0$. *Der Punkt* (0,0) *wird also ein Doppelpunkt.* Aber freilich immer existiert nur eine Tangente, nämlich $y_1 = 0$ im Koordinatenanfang. *Also berühren sich die beiden im Doppelpunkte sich vereinenden Zweige in einer gemeinsamen Tangente; wir haben einen Selbstberührungspunkt.*

Ist dagegen

$$9B_{21}^2 - 4BB_{40} < 0,$$

so erkennen wir nach Nr. 190, dafs der Punkt (0,0) ein *isolierter Punkt* ist.

Endlich könnte man den Fall

$$9B_{21}^2 - 4BB_{40} = 0$$

ganz analog weiter behandeln. Ebenso die Fälle, in denen im Punkte (0,0) auch alle Ableitungen zweiter Ordnung verschwinden. Hierauf gehen wir jedoch nicht näher ein.

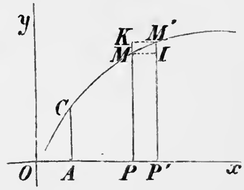
§ 4. Der Differentialquotient des Flächeninhalts und der Bogenlänge.

192. Der Flächeninhalt. (Fig. 37.) Wir betrachten eine ebene Kurve:

$$y = f(x);$$

die x- und y-Axe mögen mit einander den Winkel θ bilden und $f(x)$ möge in dem Intervalle, das wir betrachten, stetig und positiv sein. Ziehen wir zwei Ordinaten AC und PM, so schliefsen diese ein trapezförmiges Flächenstück $AP\widehat{MC}$ ein, das oben durch den Kurvenbogen $\widehat{MC}$, unten durch den Abscissenabschnitt $\overline{AP}$ begrenzt ist. Haben wir die Längeneinheit irgendwie festgesetzt, so ist damit auch die Einheit des Flächeninhaltes gegeben, und wir können den Flächeninhalt des Flächenstückes $AP\widehat{MC}$ auf irgend eine Weise messen, etwa durch den Planimeter oder dadurch, dafs wir das Stück aus dem Papier ausschneiden und wiegen. Denken wir uns nun die Ordinate AC fest, indem wir etwa $OA = x_0$ wählen, lassen wir dagegen den Punkt P auf der Abscissenaxe wandern und bestimmen die Lage des Punktes P wie immer durch seinen Abstand $x = OP$ vom Koordinatenanfange O, so gehört zu jedem Werte von x eine bestimmte Zahl u, welche uns den Inhalt der zugehörigen Fläche $AP\widehat{MC}$ mifst:

Fig. 37.



$$u = AP\widehat{MC}.$$

Auf diese Weise wird der Inhalt u des fraglichen Flächenstückes eine Funktion von x, deren Existenz in der Integralrechnung noch genauer festgestellt werden wird. Wir fragen nach dem Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$.

Lassen wir x um die Strecke $\Delta x = PP'$ wachsen, so erfährt der Flächeninhalt die Zunahme $\Delta u = PP'\widehat{M'M}$. Ziehen wir durch den Endpunkt M der Ordinate $y = PM$ und durch den Endpunkt M' der Ordinate $y + \Delta y = P'M'$ Parallele zur x-Axe, so wird, wenn die Kurve von M bis M' immer steigt:

$$PP'JM < PP'\widehat{M'M} < PP'M'K$$

oder:

$$y \cdot \Delta x \sin\theta < \Delta u < (y + \Delta y) \cdot \Delta x \sin\theta.$$

Also wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ zwischen den Grenzen enthalten sein:

$$y \sin\theta < \frac{\Delta u}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin\theta.$$

Lassen wir jetzt Δx null werden, so wird auch Δy gleich null; denn y soll ja eine stetige Funktion von x sein; $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ geht aber über in den Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$; mithin erhalten wir:

$$\frac{du}{dx} = y \sin\theta.$$

Diese Gleichung ist unter der Voraussetzung bewiesen, dafs die Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung der Stelle immer wächst, so dafs die Endordinaten PM und $P'M'$ die kleinsten und gröfsten unter den Ordinaten von P bis P' sind. Diese Voraussetzung ist aber nebensächlich, denn die obige Beweismethode bleibt auch dann bestehen, wenn die kleinste und gröfste Ordinate irgendwo in dem Intervalle von x bis $x + \Delta x$ liegen. In der That sind g und G die kleinsten und gröfsten Werte, die y in dem Intervalle von x bis $x + \Delta x$ annimmt, so wird wieder:

$$g \Delta x \sin\theta < \Delta u < G \Delta x \sin\theta, \quad \text{also:}$$

$$g \sin\theta < \frac{\Delta u}{\Delta x} < [g + (G - g)] \sin\theta;$$

dabei ist:

$$g < y < G.$$

Wird nun Δx null, so wird auch $G - g$ gleich null, und wir erhalten für $\Delta x = 0$:

$$\lim(G - g) = 0, \quad \lim G = \lim g = y.$$

Also wird wieder:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = y \sin\theta.$$

Ist im Besonderen $\theta = \frac{\pi}{2}$, also das Koordinatensystem, wie gewöhnlich, rechtwinklig, so wird:

$$\frac{du}{dx} = y.$$

Diese Gleichung drückt folgenden Satz aus:

Satz. Die Funktion $f(x)$ sei stetig und positiv in dem Intervalle von x_0 bis x; ferner sei u der Flächeninhalt desjenigen Flächenstückes der auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Kurve:

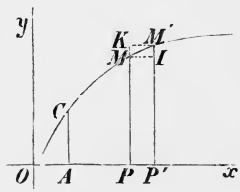
$$y = f(x),$$

das von den Ordinaten $f(x_0)$ und $f(x)$ einerseits, von Kurvenbogen und Abscissenaxe andrerseits begrenzt ist. x_0 sei fest, x variabel. Alsdann ist u eine Funktion von x, deren Ableitung gleich der Ordinate $f(x)$ ist:

$$\frac{du}{dx} = f(x).$$

193. Die Bogenlänge. (Fig. 37.) Wir legen von dem Punkte C unserer Kurve bis zum Punkte M einen Faden an unsere Kurve an. Spannen wir ihn hierauf gerade und messen die Länge der erhaltenen Strecke an einem Lineal, so bekommen wir eine Zahl, welche die Länge des Bogens $\widehat{CM}$ mifst. Wir bezeichnen sie mit s. Halten wir — unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnung — x_0, also auch den Punkt C fest, während wir x und mit ihm M variieren, so wird s eine Funktion von x:

Fig. 37.



$$s = \widehat{CM},$$

die ebenfalls in der Integralrechnung genauer definiert werden wird. Wir fragen wieder nach der Ableitung von s nach x.

Lassen wir x um $\Delta x = PP'$ wachsen, so wächst s um den Bogen $\widehat{MM'} = \Delta s$ und es wird:

$$(1) \qquad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\widehat{MM'}}{MJ} = \frac{\widehat{MM'}}{MM'} \cdot \frac{MM'}{MJ}.$$

Dabei bedeutet $\widehat{MM'}$ den Bogen, MM' die Sehne von M nach M'. Es wird:

$$MM' = \sqrt{MJ^2 + M'J^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

wo die Wurzel MM' positiv genommen werde. Es folgt:

$$\frac{MM'}{MJ} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

und daher wird (1):

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\widehat{MM'}}{MM'} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

In der Integralrechnung wird nun gezeigt, dafs das Verhältnis des Bogens zur Sehne den Grenzwert 1 erhält, wenn die zugehörige Abscisse null wird, d. h. dafs:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\widehat{MM'}}{MM'} = 1$$

ist. Benutzen wir hier diesen Satz, so erhalten wir:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

oder:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Der aus der Integralrechnung benutzte Satz wird dort unter der Voraussetzung bewiesen werden, dafs $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ in dem betrachteten Intervalle stetig sind und $f'(x)$ sein Zeichen nicht ändert. Also können wir den Satz aussprechen:

Satz. Es seien $f(x)$ und $f'(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis x stetig und $f'(x)$ ändere in ihm nicht sein Zeichen; x_0 sei fest, x variabel. Alsdann ist die Länge s des Bogens der Kurve $y = f(x)$, der von den Ordinaten $f(x_0)$ und $f(x)$ begrenzt wird, eine Funktion von x, deren Ableitung durch die Formel

$$\frac{ds}{dx} = \left| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right|$$

gegeben wird.

194. Die Richtung der Tangente. Die Einführung der Bogenlänge s, die wir in der vorigen Nummer kennen gelernt haben, gestaltet häufig die Formeln besonders elegant, zumal wenn s als unabhängige Veränderliche benutzt wird. Wir wollen zunächst in die Formeln für die Tangentenrichtung die Gröfse s einführen und zugleich die Gelegenheit benutzen diese Richtung genauer zu definieren. Nennen wir wie früher α den Winkel, den die Tangente mit der positiven Richtung der x-Axe bildet, so ist bekanntlich:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Diese Gleichung bestimmt aber α nur bis auf Vielfache von π; denn der Tangens hat die Periode π. Auch die Richtung der Tangente ist wie die jeder Geraden zweideutig. Setzen wir aber fest, dafs wir immer die Tangente in der Richtung der wachsenden Abscissen durchlaufen, so giebt es immer nur einen Winkel α, der der Gleichung (1) genügt. Zweifelhaft könnte man nur für $y' = \infty$ sein. Wir wählen dann $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wenn $y' = +\infty$, und $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, wenn $y' = -\infty$ ist. Im Übrigen aber haben wir, wenn y' positiv ist, immer den spitzen Winkel zu nehmen, der (1) genügt, und den Winkel im vierten Quadranten, wenn y' negativ ist. Wir setzen so mit anderen Worten einfach:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'$$

entsprechend der Definition in Nr. 12. Aus (1) folgt aber nach bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

und die Wurzel ist immer positiv zu nehmen. Da aber

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

ist, so können wir mit Einführung von s als unabhängiger Variabelen schreiben:

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

Dabei sind dx und ds immer positiv und dy mit dem Vorzeichen von y' zu nehmen.

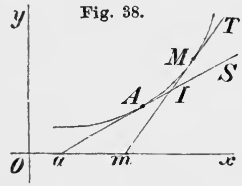
§ 5. Krümmung der Kurven.

Wir schicken diesem Paragraphen die Voraussetzung voraus, daſs in dem betrachteten Intervalle der zweite Differentialquotient y'' nicht null wird.

195. Definition der Krümmung. Ist AM (Fig. 38) ein begrenztes Bogenstück einer ebenen Kurve, so miſst man seine *absolute Krümmung* durch den Winkel SJT, welchen die beiden Tangenten AS und MT, die zu den Endpunkten des Bogens gehören, mit einander bilden. Dieser Winkel ist dabei derjenige, welcher durch eine bewegliche Gerade erzeugt wird, die durch einen festen Punkt geht, und deren aufeinander folgende Lagen den Tangenten parallel werden, die durch die verschiedenen konsekutiven Punkte von AM gehen.

Wird der Endpunkt A des Bogens $AM = s$ festgehalten und das andere Ende M variiert, so ist auch die Krümmung σ variabel und wächst mit s, solange dieser Bogen keine Wendungen macht. σ wird eine Funktion von x, die im Allgemeinen auch eine bestimmte Ableitung $\frac{d\sigma}{dx}$ besitzt und die wir sogleich berechnen werden. Einem bestimmten Werte von dx entspricht ein bestimmter Wert des Differentiales $d\sigma$:

Fig. 38.



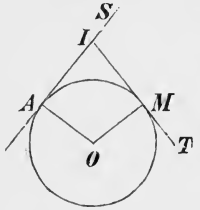
$$d\sigma = \frac{d\sigma}{dx} \cdot dx.$$

Das Differential $d\sigma$ der Krümmung des Bogens AM heifst der *Kontingenzwinkel* im Punkte M.

Mittlere oder *durchschnittliche* Krümmung des Bogens AM nennt man das Verhältnis $\frac{\sigma}{s}$ der absoluten Krümmung zur Bogenlänge.

Endlich heifst *Krümmungsmafs der Kurve in einem Punkte M*, oder auch schlechtweg *Krümmung der Kurve in diesem Punkte* die Grenze, nach welcher die mittlere Krümmung eines Bogens konvergiert, der null wird und seinen einen Endpunkt in M hat. Ist also σ die Krümmung des Bogens AM, so ist die Grenze von $\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$ für $\Delta s = 0$ die Gröfse, welche wir die Krümmung der Kurve im Punkte M zu nennen haben. Welches daher auch die als unabhängig betrachtete Variabele sein mag, die Grenze, um die es sich handelt, ist gleich $\frac{d\sigma}{ds}$; die Krümmung einer Kurve in einem Punkte ist also das *Verhältnis des Kontingenzwinkels zum Bogendifferentiale*.

Fig. 39.



In einem Kreise ist die Krümmung eines Bogens gleich dem Centriwinkel, der zum Bogen gehört, und die mittlere Krümmung oder das Verhältnis des Centriwinkels zum Bogen ist gleich dem reciproken Werte des Radius. Sie ist also unabhängig von der Länge des Bogens AM und behält daher, auch wenn AM null wird, denselben Wert. Also ist die Krümmung in den verschiedenen Punkten eines Kreises konstant und gleich dem reciproken Werte des Radius.

196. Der Krümmungsradius. *Krümmungsradius* in einem Punkte der Kurve heifst der Radius des Kreises, dessen Krümmung gleich ist derjenigen, welche die Kurve in dem betrachteten Punkte besitzt. Bezeichnet man also mit R die Länge des Krümmungsradius, so ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} \quad \text{oder} \quad R = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Die Werte des Kontingenzwinkels und des Krümmungsradius lassen sich leicht als Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten ausdrücken. Sind α_0 und α die Winkel, welche die Richtungen AS und MT der Tangenten mit der positiven Abscissenaxe bilden, so ist

$$\sigma = \alpha - \alpha_0 \quad \text{und} \quad d\sigma = d\alpha.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

und hieraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2},$$

oder:

(1)
$$d\sigma = d\alpha = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2};$$

andererseits ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Man erhält also:

(2)
$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

In den Gleichungen (1) und (2) ist die unabhängige Variabele nicht näher bestimmt; wenn man aber x dazu wählt, so wird

(3)
$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Wählt man dagegen s zur unabhängigen Veränderlichen, so wird die Krümmung:

(4)
$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Die Quadratwurzel in den Formeln (1) bis (3) ist immer positiv zu nehmen; dadurch erhält R ein Vorzeichen und zwar dasselbe wie die Krümmung. Die Formel (3) lehrt, daſs es positiv ist, wenn $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$; d. h. die Kurve konvex nach unten ist, und negativ im entgegengesetzten Fall. Im Wendepunkt ist $R = \infty$.

197. Nur der Kreis besitzt konstante Krümmung.

Es ist leicht zu beweisen, daſs der Kreis die einzige Kurve mit konstantem Krümmungsradius ist. Denn für solch eine Kurve hat man

$$ds = a d\alpha,$$

wobei a eine Konstante ist. Folglich ergeben die Gleichungen

$$dx = ds \cos\alpha, \qquad dy = ds \sin\alpha,$$

$$dx = a d\alpha \cos\alpha, \quad dy = a d\alpha \sin\alpha,$$

oder

$$dx = d(a \sin\alpha), \quad dy = -d(a\cos\alpha).$$

Bezeichnet man also mit x_0 und y_0 zwei Konstante, so hat man nach dem zweiten Satze in Nr. 29:

$$x - x_0 = a \sin\alpha, \quad y - y_0 = -a\cos\alpha,$$

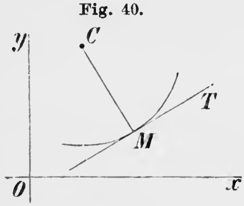
oder

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises mit dem Radius a ist.

198. Der Krümmungsmittelpunkt. Wird die Tangente MT in einem Punkte M der Kurve konstruiert und der Krümmungskreis derart bestimmt, daſs er durch den Punkt M hindurchgeht, dabei die Tangente MT berührt, und zwar auf der nämlichen Seite wie die Kurve, so liegt der Mittelpunkt C dieses Kreises auf der Normalen des Punktes M; er heiſst der *Krümmungsmittelpunkt* in Bezug auf diesen Punkt.

Fig. 40.



L e h r s a t z. *Der Krümmungsmittelpunkt einer Kurve in einem gegebenen Punkt ist die Grenze des Schnittes der durch diesen Punkt gelegten Normalen mit einer benachbarten Normalen.*

Es seien x, y die Koordinaten von M in Bezug auf ein rechtwinkliges System. Die Gleichung der Normalen wird

$$(1) \qquad (\xi - x) + (\eta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

und wir bezeichnen sie kurz mit $V = 0$. Um die Gleichung der Normalen in einem anderen Punkte M' $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ zu erhalten, mufs man in dieser Gleichung x, y, $\frac{dy}{dx}$ durch $x + \Delta x, y + \Delta y, \frac{dy}{dx} + \Delta \frac{dy}{dx}$ ersetzen. Die so gebildete Gleichung stellen wir durch $V + \Delta V = 0$ dar. Der Schnittpunkt dieser beiden Normalen ist dann gegeben durch

$$V = 0,\ V + \Delta V = 0,$$

oder

$$V = 0,\ \Delta V = 0,$$

oder endlich

$$V = 0,\ \frac{\Delta V}{\Delta x} = 0.$$

Nehmen wir nun an, dafs der Punkt M' in den Punkt M hineinrückt, so wird der Schnittpunkt der beiden Normalen sich ändern und nach einer bestimmten Grenzlage C konvergieren, deren Koordinaten durch die beiden Gleichungen

$$V = 0,\ \frac{dV}{dx} = 0$$

bestimmt sind. Die erste von ihnen ist die Gleichung (1), die andere ergiebt sich aus ihr durch Differentiation, indem man ξ und η als Konstanten ansieht. Man erhält auf diese Weise

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx} = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + (\eta - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, wenn man die Koordinaten des Punktes C mit x_1, y_1 bezeichnet:

$$(3) \quad x_1 - x = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_1 - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Verbindet man die Gleichungen (3), nachdem man sie ins Quadrat erhoben hat, so erhält man

$$(4) \qquad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = R^2,$$

d. h. die Länge MC ist gleich dem Krümmungsradius R. Da aber C auch auf der Normalen liegt, so haben wir, um seine Identität mit dem Krümmungsmittelpunkte zu erkennen, nur noch zu zeigen, daſs er auch auf der nämlichen Seite der Kurve liegt, wie dieser. Es muſs also gezeigt werden, daſs C auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Kurve. Zu dem Zwecke verlegen wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Punkt (x, y), die Abscissenaxe in die Tangente im Punkte (x, y). Dann wird:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0;$$

während

$$y'' = y_0''$$

nicht null wird, da der betrachtete Punkt kein Wendepunkt sein soll. Die Koordinaten des Punktes C (x_1, y_1) werden jetzt nach (3) einfach:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{y_0''},$$

die Gleichung der Tangente wird:

$$y = 0,$$

und die Zunahme Δy der Kurvenordinate, die einem Zuwachse Δx der Abscisse entspricht, wird nach dem Taylorschen Satze:

$$\Delta y = y_0'' \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots$$

Für hinlänglich kleine $|\Delta x|$ ist also das Vorzeichen von Δy das von y_0''. Da dieses aber auch mit dem von $y_1 = \frac{1}{y_0''}$ übereinstimmt, so haben in der Umgebung des betrachteten Punktes der Abstand y_1 des Punktes C von der Tangente und der Abstand Δy eines Kurvenpunktes von der Tangente das nämliche Zeichen. Also ist C der Krümmungsmittelpunkt.

199. Richtung der Normale. Nachdem wir die Richtung der Tangente durch eindeutige Festlegung des Winkels α in Nr. 194 bestimmt haben, wollen wir Gleiches mit der Richtung der Normale thun. Als Richtung der Normale im Punkte M definieren wir einfach die des Krümmungsradius MC, d. h. diejenige Richtung, welche ein beweglicher Punkt einschlagen mufs, um auf der Normale vom Kurvenpunkte M zum Krümmungsmittelpunkte C zu gelangen. Bezeichnen wir alsdann mit ξ den Winkel, welchen die Richtung der Normale mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bildet, so ist

$$\xi - \alpha = + \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \xi - \alpha = - \frac{\pi}{2},$$

je nachdem die Kurve in M konvex oder konkav nach unten, d. h. je nachdem dort y'' positiv oder negativ ist. Dagegen bestehen die aus Nr. 198 Formel (3) folgenden Gleichungen

$$(1) \qquad x_1 - x = - R \sin \alpha, \quad y_1 - y = R \cos \alpha$$

in allen Fällen, wenn man die in Nr. 194 gegebene Bestimmung von α und die in Nr. 196 über das Vorzeichen von R gemachten Bemerkungen beachtet. Nach Nr. 196 ist übrigens $d\sigma = d\alpha$ und also auch:

$$(2) \qquad R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Mithin lassen sich die Gleichungen (1) auch schreiben:

$$(3) \qquad x_1 - x = - \frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha, \quad y_1 - y = \frac{ds}{d\alpha} \cos \alpha.$$

200. Definition der Evolute und der Evolvente. Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte zu den verschiedenen Punkten einer ebenen Kurve bildet eine andere Kurve, welche die *Evolute* der ersten heifst. Umgekehrt heifst die Kurve, deren Evolute eine gegebene Kurve ist, deren *Evolvente.*

Die Gleichungen (3) der Nr. 198 bestimmen die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes bei rechtwinkligem Koordinatensysteme, wenn x zur unabhängigen Variabelen gewählt ist; von letzterer Annahme werden sie befreit, wenn man $\dfrac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}$ an Stelle von $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ schreibt. Es wird dann:

$$x_1 - x = - \frac{(dx^2 + dy^2)dy}{dx d^2y - dy d^2x},$$

$$y_1 - y = + \frac{(dx^2 + dy^2)dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Sind x und y gegebene Funktionen derselben unabhängigen Variabelen, so bekommt man die Gleichung der Evolute, wenn man diese unabhängige Variabele zwischen den beiden Gleichungen eliminiert.

201. Eigenschaften der Evolute und Evolvente. Um die Eigenschaften der Evolute zu untersuchen, wenden wir die in Nr. 200 erhaltenen Formeln (1) an, nämlich

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x - R \sin\alpha, \\ y_1 &= y + R \cos\alpha. \end{aligned}$$

R und α bezeichnen Krümmungsradius und Winkel der fixierten Tangentenrichtung. Die Gröſsen, welche in diesen Gleichungen vorkommen, sind Funktionen derselben unabhängigen Variabelen, und die Differentiation giebt:

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx - R\cos\alpha\, d\alpha - dR \sin\alpha, \\ dy_1 &= dy - R \sin\alpha\, d\alpha + dR\cos\alpha. \end{aligned}$$

Aber die Terme

$$dx - R\cos\alpha\, d\alpha, \quad dy - R\sin\alpha\, d\alpha$$

sind null zufolge der Gleichungen

$$dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds \sin\alpha, \quad ds = R\,d\alpha;$$

man hat also einfach:

$$(2)\qquad dx_1 = - dR\sin\alpha, \quad dy_1 = dR\cos\alpha,$$

und gewinnt aus diesen Gleichungen:

$$(3)\qquad \frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{cotg}\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

ferner

$$(4)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Die Gleichung (3) besagt, *daſs die Normalen der gegebenen Kurve die Tangenten der Evolute sind,* und die Gleichung (4), *daſs das Differential des Krümmungsradius der gegebenen Kurve gleich dem Differentiale ds_1 des Bogens s_1 der Evolute ist,* wenn dieser Bogen von einem willkürlichen festen Anfangspunkt bis zu dem betrachteten Krümmungsmittelpunkt gerechnet wird.

Rechnen wir den Bogen $C_0C = s_1$ der Evolute von einem Punkte C_0 an, der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M_0

der gegebenen Kurve ist, und bezeichnen mit R_0 den Krümmungsradius im Punkte M_0, so giebt die Gleichung (4), wenn wir nur das positive Vorzeichen der Quadratwurzel berücksichtigen:

$$ds_1 = dR \quad \text{oder} \quad ds_1 = d(R - R_0).$$

Da die Variabelen s_1 und $R - R_0$ dasselbe Differential haben und gleichzeitig verschwinden, so ist

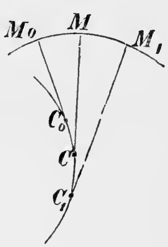
$$s_1 = R - R_0.$$

Damit ist folgende Eigenschaft ausgedrückt:

Ein beliebiger Bogen auf der Evolute einer ebenen Kurve ist gleich der Differenz zwischen den beiden Krümmungsradien, die zu den Endpunkten dieses Bogens führen.

202. Mechanische Erzeugung der Evolvente. Auf Grund der in der letzten Nummer bewiesenen Eigenschaft hat der Ort der Krümmungsmittelpunkte den Namen *Evolute* erhalten. Ist nämlich (Fig. 41) M_0M_1 ein Bogen der gegebenen Kurve, und C_0C_1 der entsprechende der Evolute, und befestigt man in C_1 das eine Ende eines Fadens von der Länge $M_1C_1 = R_1$, so wird, wenn sich dieser Faden auf den Bogen C_1C_0 aufgelegt hat und dabei von C_0 ab in der Richtung C_0M_0 gespannt ist, das andere Ende in den Punkt M_0 fallen, gemäfs der Gleichung $C_0C_1 = R_1 - R_0$. Wickelt man den Faden wieder ab, indem man ihn stets gespannt hält, so beschreibt dieses Ende den Bogen M_0M_1. Denn ist C_1CM eine Lage des Fadens, so ist

Fig. 41.



$$CM = C_0M_0 + C_0C = R_0 + s_1 = R.$$

Also ist CM der Krümmungsradius, welcher zum Punkt C führt, und der Punkt M liegt folglich auf dem Bogen M_0M_1.

Die Evolute einer algebraischen Kurve ist selbst eine algebraische Kurve, und die bewiesenen Sätze lehren, dafs jeder Bogen der Evolute durch eine algebraische Funktion der Koordinaten ausgedrückt werden kann. Man sagt daher, dafs die Evolute einer algebraischen Kurve algebraisch rektifizierbar ist.

203. Differentialgleichung der Evolvente. Um von der Evolute zur Evolvente zurückzukehren, mufs man die beiden Gleichungen anwenden:

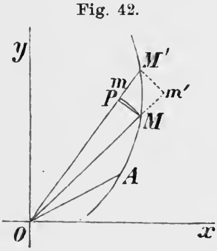
$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0, \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Hier sind x_1 und y_1 gegebene Funktionen einer unabhängigen Variabelen. Eliminiert man diese zwischen den beiden Gleichungen, so erhält man eine Gleichung zwischen $x, y, \frac{dy}{dx}$, welche die Differentialgleichung der gesuchten Evolvente ist. Man sieht, dafs diese Differentialgleichung überhaupt alle *orthogonalen Trajektorien* der gegebenen Kurven umfafst, d. h. alle Kurven, welche die Tangenten von jenen zu Normalen haben. Hieraus folgt, dafs jede Kurve unendlich viele Evolventen hat, worauf wir noch später zurückkommen werden.

§ 6. Polarkoordinaten.

204. Das Differential der Fläche eines Sektors. Die Punkte einer Kurve AM seien bestimmt durch den Radiusvektor $OM = \varrho$, welcher von einem festen Punkt O ausgeht, und durch den Winkel ω, den die Richtung dieses Radius mit einer festen Richtung OX bildet. Ist A ein fester Punkt und M ein variabeler, so wird die Fläche des Sektors OAM, die von der Kurve und den beiden Radien OA, OM eingeschlossen ist, eine Funktion, deren Differential wir bestimmen wollen.

Fig. 42.



Erteilt man ω den Zuwachs $MOM' = \Delta\omega$, so ändert sich der Radius um $\Delta\varrho$, und die Fläche $AOM = u$ erhält das Inkrement

$$\Delta u = MOM'.$$

Ist $\varrho + \Delta_1\varrho$ der gröfste Wert, welcher unter den Radienvektoren von OM bis OM' überhaupt vorkommt, und $\varrho + \Delta_2\varrho$ der kleinste, so wird der Kreissektor, welcher zu dem Winkel $\Delta\omega$ und dem Radius $\varrho + \Delta_1\varrho$ gehört, gröfser sein, als die Fläche Δu, dagegen der Kreissektor mit demselben Winkel und dem Radius $\varrho + \Delta_2\varrho$ kleiner. Es ist also

$$\frac{1}{2}\Delta\omega(\varrho+\Delta_1\varrho)^2 > \Delta u > \frac{1}{2}\Delta\omega(\varrho+\Delta_2\varrho)^2,$$

oder

$$\frac{1}{2}(\varrho+\Delta_1\varrho)^2 > \frac{\Delta u}{\Delta\omega} > \frac{1}{2}(\varrho+\Delta_2\varrho)^2.$$

Läſst man nun $\Delta\omega$ nach null konvergieren, so konvergieren auch, da ϱ als stetige Funktion von ω vorausgesetzt ist, $\Delta_1\varrho$ und $\Delta_2\varrho$ nach null, und es wird

$$\frac{1}{2}\varrho^2 = \frac{du}{d\omega} \quad \text{oder} \quad du = \frac{1}{2}\varrho^2 d\omega.$$

Legen wir durch den Anfangspunkt oder Pol des Systems die Gerade Oy senkrecht zu Ox und bezeichnen wir mit x und y die rechtwinkligen Koordinaten in Bezug auf diese Axen, so ist

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}, \quad \varrho\cos\omega = x.$$

Die erste Gleichung giebt durch Differentiation:

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{xdy - ydx}{x^2} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 d\omega = xdy - ydx.$$

Also kann das Differential des Sektors u auch durch die Gleichung

$$du = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

dargestellt werden.

205. Das Bogendifferential. Wird mit s der Bogen AM bezeichnet, dessen Anfangspunkt A fest ist, während der Punkt M variabel bleibt, so ist Δs das Inkrement MM', welches dem Zuwachs $\Delta\omega$ entspricht. Wir fällen vom Punkte M die Senkrechte MP auf den Radius OM' und ziehen die Sehne MM'. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPM' folgt

$$MM'^2 = MP^2 + M'P^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{MM'}{\Delta\omega}\right)^2 = \left(\frac{MP}{\Delta\omega}\right)^2 + \left(\frac{M'P}{\Delta\omega}\right)^2.$$

Es ist

$$MP = \varrho\sin\Delta\omega, \quad M'P = \varrho + \Delta\varrho - \varrho\cos\Delta\omega.$$

Die Grenzen der Verhältnisse, welche in die obige Gleichung eingehen, werden nicht geändert, wenn man

$$MM', \quad MP, \quad M'P$$

bezüglich durch

$$\Delta s, \quad \varrho\Delta\omega, \quad \Delta\varrho$$

ersetzt. Denn die Grenze des Verhältnisses von Δs zu seiner

Sehne MM' ist die Einheit; ebenso die Grenze des Verhältnisses von $MP : \varrho\Delta\omega = \frac{\sin\Delta\omega}{\Delta\omega}$. Endlich wird auch

$$\frac{M'P}{\Delta\omega} = \frac{\Delta\varrho}{\Delta\omega} + \varrho\,\frac{1-\cos\Delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\Delta\varrho}{\Delta\omega} + 2\varrho\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}\Delta\omega}{\Delta\omega},$$

also

$$\lim\frac{M'P}{\Delta\omega} = \frac{d\varrho}{d\omega}.$$

Demnach hat man

$$\lim\left(\frac{\Delta s}{\Delta\omega}\right)^2 = \varrho^2 + \lim\left(\frac{\Delta\varrho}{\Delta\omega}\right)^2,$$

d. h.

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 \quad \text{oder} \quad ds^2 = \varrho^2 d\omega^2 + d\varrho^2.$$

Man kann diese Gleichung auch aus der bei rechtwinkligen Koordinaten gewonnenen ableiten; wir haben dies in Nr. 80 gethan und brauchen hier nicht nochmals darauf zurückzukommen.

206. Bestimmung der Tangente. Im Polarkoordinatensysteme bestimmt man die Tangente vermittelst des Winkels μ, den sie mit dem Radiusvektor bildet. Der Winkel μ im Punkte M der Kurve ist die Grenze, nach welcher der Winkel $PM'M$ konvergiert, wenn sich der Punkt M' dem Punkte M unbegrenzt nähert (Fig. 42. Nr. 204).

Das rechtwinklige Dreieck $MM'P$ giebt

$$\cos PM'M = \frac{M'P}{MM'}, \quad \sin PM'M = \frac{MP}{MM'}.$$

Die Grenzen der rechten Seiten dieser Gleichungen ändern sich nicht, wenn man wie in der vorigen Nummer

$$MM', \quad MP, \quad M'P$$

ersetzt durch

$$\Delta s, \quad \varrho\Delta\omega, \quad \Delta\varrho.$$

Man erhält demnach:

$$\cos\mu = \lim\frac{\Delta\varrho}{\Delta s}, \quad \sin\mu = \lim\frac{\varrho\Delta\omega}{\Delta s},$$

d. h.

$$\cos\mu = \frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}},$$

$$\sin\mu = \frac{\varrho\,d\omega}{ds} = \frac{\varrho\,d\omega}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Hierbei bedeutet μ den Winkel, den die nach der Richtung wachsender Winkel ω konstruierte Tangente mit der Richtung des verlängerten Radiusvektor einschliefst. Ist $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega}$ null, so wird dieser Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$, ist $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega} = \infty$, so wird dieser Winkel null.

207. Ein besonderes Koordinatensystem. Man kann die Punkte einer Kurve auch durch zwei Radienvektoren ϱ_1 und ϱ_2 bestimmen, welche von zwei gegebenen Anfangspunkten ausgehen. Bezeichnet man mit μ_1 und μ_2 die Winkel, die diese Radien mit der Tangente bilden, so ist

$$\cos \mu_1 = \frac{d\varrho_1}{ds}, \quad \cos \mu_2 = \frac{d\varrho_2}{ds},$$

also

$$\frac{\cos \mu_2}{\cos \mu_1} = \frac{d\varrho_2}{d\varrho_1}.$$

In diesem Koordinatensysteme ist z. B. die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel

$$\varrho_2 \pm \varrho_1 = \text{Konst.}$$

Daraus folgt $\frac{d\varrho_2}{d\varrho_1} = \mp 1$, und unsere Gleichung ergiebt

$$\cos \mu_2 = \mp \cos \mu_1,$$

was eine bekannte Eigenschaft der Tangente an Kegelschnitten ausdrückt. An Stelle der beiden Radienvektoren, die von zwei festen Anfangspunkten ausgehen, kann man auch die Winkel ω_1 und ω_2 als Koordinaten einführen, welche diese Radien mit der durch die Anfangspunkte gehenden Geraden bilden. Man hat nun die Gleichungen

$$\sin \mu_1 = \frac{\varrho_1\, d\omega_1}{ds}, \quad \sin \mu_2 = \frac{\varrho_2\, d\omega_2}{ds},$$

und infolge der Relation:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2},$$

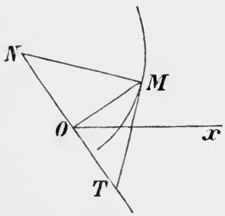
wird

$$\frac{\sin \mu_2}{\sin \mu_1} = \frac{\sin \omega_1\, d\omega_2}{\sin \omega_2\, d\omega_1}.$$

208. Subtangente und Subnormale. Zieht man (Fig. 43) durch den Pol des Koordinatensystems eine Senkrechte zum

Radiusvektor, so werden die Abschnitte auf dieser Geraden vom Anfangspunkt bis zu den Schnittpunkten mit der Tangente und der Normale die *Polarsubtangente* und *-Subnormale* genannt. Die Subtangente $OT = T'$ und Subnormale $ON = N'$ erhalten die Längen

Fig. 43.



$$T' = \varrho \operatorname{tang} \mu, \quad N' = \varrho \operatorname{cotg} \mu,$$

oder

$$T' = \varrho^2 \frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{\varrho'}, \quad N' = \frac{d\varrho}{d\omega} = \varrho'.$$

Die Längen T und N der Tangente und der Normalen sind:

$$T = \sqrt{\varrho^2 + T'^2} = \varrho \frac{ds}{d\varrho}, \quad N = \sqrt{\varrho^2 + N'^2} = \frac{ds}{d\omega}.$$

Dabei sind sämtliche Faktoren mit positiven Zeichen zu nehmen.

209. Kontingenzwinkel und Krümmungsradius. Der Kontingenzwinkel $d\sigma$ ist, wie wir sahen, gleich dem Differentiale des Winkels, den die Tangente mit der x-Axe bildet. Andererseits ist dieser Winkel gleich $\omega + \mu$; man erhält demnach

$$d\sigma = d\omega + d\mu.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\omega}}$$

liefert durch Differentiation, wenn man ω als unabhängige Variabele betrachtet:

$$\frac{1}{\cos^2 \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}{\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}, \quad \frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}.$$

Es ist also

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2}.$$

Da nun $\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}$ ist, so folgt hieraus für den Krümmungsradius

$$R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}. \tag{1}$$

Dabei ist das Vorzeichen der Quadratwurzel immer positiv zu nehmen.

Man kann diese Formel auch aus derjenigen ableiten, welche bei rechtwinkligen Koordinaten erhalten wurde; dies ist in Nr. 80 ausgeführt, als wir uns mit dem Probleme der Transformation der Variabelen beschäftigten.

Führt man $\frac{1}{\varrho}$ an Stelle von ϱ ein, so erhält R die Gestalt:

(2) $$R = \frac{\left[\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho}\right)'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^3 \left[\frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)''\right]}.$$

§ 7. Einhüllende Kurven.

210. Definition der Einhüllenden. Es sei $f(x, y, \alpha)$ eine Funktion der 3 Variabelen x, y, α und

(1) $$f(x, y, \alpha) = 0$$

für jeden Wert des veränderlichen Parameters α die Gleichung einer Kurve. Die Gesamtheit der durch (1) dargestellten Kurven heifst eine *Kurvenschar.* Wird, nachdem α einen bestimmten Wert erhalten hat, dem Parameter der neue Wert $\alpha + \Delta\alpha$ erteilt, so erhält man eine zweite Kurve mit der Gleichung:

(2) $$f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0.$$

Die Koordinaten derjenigen Punkte, welche (1) und (2) gleichzeitig genügen, befriedigen auch die Gleichung:

(3) $$\frac{f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Besitzt nun f als Funktion von α eine bestimmte Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, so geht für $\Delta\alpha = 0$ die letzte Gleichung über in:

(4) $$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Man sagt nun, die durch (1) dargestellte Kurvenschar besitzt eine *einhüllende Kurve,* wenn die Elimination von α aus den Gleichungen (1) und (4) wieder die Gleichung einer Kurve liefert:

(5) $$g(x, y) = 0,$$

welche ihrerseits *die Einhüllende* der *eingehüllten* Kurvenschar (1) heifst. Zufolge der obigen Erörterungen ist demnach die Einhüllende der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche je zwei benachbarte Kurven der Schar gemein haben.

211. Ein Beispiel. Es sei die Einhüllende aller Kreise zu bestimmen, die einen festen Radius haben und deren Mittelpunkte auf einer festen Geraden liegen. Wählen wir die feste Gerade als x-Axe, so ist die Gleichung der fraglichen Kreisschar:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

und α ist der veränderliche Parameter. Die Differentiation nach α giebt:

$$x - \alpha = 0,$$

und die Elimination von α liefert:

$$y^2 - a^2 = (y - a)(y + a) = 0$$

als einhüllende Kurve. Die Einhüllende besteht also hier aus den zwei Geraden, welche im Abstande des Radius a parallel zur x-Axe gezogen werden können.

Es mag hierbei bemerkt werden, dafs hier wie bei allen geometrischen Untersuchungen darauf zu achten ist, was die Kurve ist, welche durch eine gegebene Gleichung dargestellt wird, oder umgekehrt, welches die Gleichung oder die Gleichungen sind, welche eine gegebene Kurve darstellen.

Löst man nämlich die Gleichung der Kreisschar nach $x - \alpha$ auf, so erhält man

$$x - \alpha \pm \sqrt{a^2 - y^2} = 0.$$

Fixiert man das Vorzeichen der Wurzel und wählt z. B. das negative, so wird $x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right|$ eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, α. Die Schar aller Kurven

$$x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0$$

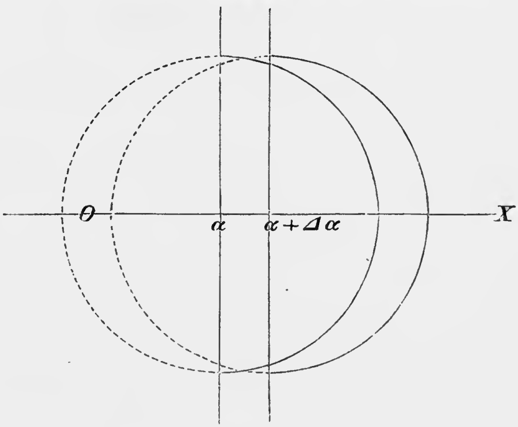
besitzt aber keine Einhüllende, denn die Differentiation nach α liefert die sinnlose Gleichung $-1 = 0$, welche beweist, dafs zwei benachbarte Kurven der durch die Gleichung

$$x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0$$

dargestellten Schar keinen Punkt gemein haben. In der That stellt diese Gleichung auch gar nicht die Gleichung einer

Kreisschar dar, sondern eine Schar von Halbkreisen, deren jeder zur Rechten der Geraden $x = \alpha$ liegt. In unserer Kreisschar schneiden sich aber, wie untenstehende Figur zeigt, die Kreise immer der Art, daſs die rechte Hälfte des einen Kreises die linke des benachbarten trifft. Die rechten Hälften dieser Kreise haben also thatsächlich keine Einhüllende.

Fig. 44.



Will man also die Einhüllende unserer Kreisschar aus der aufgelösten Form der Gleichungen bestimmen, so muſs man sagen, daſs erst das System der zwei Gleichungen

$$x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0, \quad x - \alpha + \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0$$

unsere Kreisschar definiert. Der Fall, daſs unsere Kurvenschar erst durch *mehrere* Gleichungen analytisch definiert ist, ist in der vorigen Nummer aber nicht behandelt, und man muſs zur Bestimmung der Einhüllenden direkt verfahren, indem man in jeder der Gleichungen α um $\Delta\alpha$ vermehrt und die gemeinsamen Lösungen der entstandenen Gleichungen bestimmt. In unserem Beispiele giebt dies:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha \\ y &= +\left|\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}\Delta\alpha^2}\right| \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha \\ y &= -\left|\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}\Delta\alpha^2}\right| \end{aligned}$$

Geht man jetzt zur Grenze $\Delta\alpha = 0$ über, so erhält man

$$x = \alpha,\ y = a \quad \text{und} \quad x = \alpha,\ y = -a$$

als den Schnittpunkt des Kreises um α mit seinem benachbarten und

$$y = \pm a$$

wie vorher als den geometrischen Ort aller dieser Schnittpunkte.

212. Eine Eigenschaft der Einhüllenden.

Lehrsatz. Die Einhüllende eines Kurvensystemes berührt die Kurven in jedem nicht singulären Punkte, wo sie denselben begegnet.

Ist

$$(1) \qquad f(x, y, \alpha) = 0$$

die Gleichung des Systemes in geradlinigen Koordinaten, so ist die Einhüllende durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$(2) \qquad f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Um den Richtungskoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ der Tangente in einem bestimmten Punkt einer Systemskurve zu erhalten, mufs man die Gleichung (1) differentiieren; man bekommt

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0.$$

Will man nun den Richtungskoeffizienten der Tangente in einem bestimmten Punkte der Einhüllenden finden, so kann man noch die Gleichung (1) als deren Gleichung ansehen, nur mufs man α nicht mehr als Konstante, sondern als eine Funktion von x und y betrachten, welche durch die zweite der Gleichungen (2) bestimmt ist. Unter dieser Annahme hat man die Gleichung (1) zu differentiieren, und das ergiebt:

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0.$$

Die zweite Gleichung (2), welche für jeden Punkt der Einhüllenden erfüllt ist, reduziert aber die Gleichung (4) auf die Form (3). Also erhält man für die Einhüllende sowohl wie für die Eingehüllte

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Bemerkung. Ein Beispiel für die betrachtete Eigenschaft der Einhüllenden haben wir bereits behandelt. Die Evolute einer Kurve ist nichts anderes als die Einhüllende des Normalensystemes, und wir haben gesehen, dafs sie die Normalen tangiert.

Die Gleichung $f(x, y, \alpha) = 0$ kann, wenn die Koordinaten x, y eines Punktes M in sie eingesetzt werden, mehrere Werte α liefern; unter diesen ist aber, wenn M zugleich ein Punkt der Einhüllenden ist, jedenfalls einer vorhanden, der auch der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ genügt. Die auf diese Weise bestimmte Systemskurve wird von der Einhüllenden tangiert während die anderen Systemskurven, die etwa noch durch den Punkt M gehen können, die Einhüllende daselbst schneiden.

Ein Kurvensystem kann einhüllende Kurven nur dann besitzen, wenn α vom höheren als dem ersten Grade in der Gleichung vorkommt, d. h. geometrisch, wenn das Kurvensystem die Ebene zum mindesten zweifach überdeckt, so dafs durch einen Punkt der Ebene im allgemeinen zwei Kurven hindurchgehen.

Endlich ist wohl zu beachten, dafs unser Lehrsatz von der Berührung der Einhüllenden und Eingehüllten ausdrücklich nur auf nicht singuläre Punkte beschränkt ist. Es ist daher sehr wohl der Fall denkbar, dafs z. B. sämtliche Punkte der Einhüllenden singuläre Punkte sind, für welche $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ immer gleichzeitig null sind, und dann braucht die Einhüllende die Eingehüllten keineswegs zu berühren.

213. Die Koordinaten x und y eines Kurvenpunktes sind als Funktionen des Tangentenwinkels α gegeben. Betrachtet man eine beliebige Kurve bezogen auf zwei rechtwinklige Axen und ist α der Winkel, den die Richtung der Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so wird die Gleichung dieser Tangente

(1) $$x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha),$$

und $f(\alpha)$ ist eine Funktion von α, die von der Art der Kurve abhängt und abgesehen vom Vorzeichen den Abstand der Tangente vom Koordinatenanfange angiebt. Da diese aber die Einhüllende ihrer Tangenten ist, so bekommt man ihre Gleichung, indem man α zwischen der Gleichung (1) und der hieraus durch Differentiation folgenden Gleichung

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = f'(\alpha) \tag{2}$$

eliminiert. Man kann α zur unabhängigen Variabelen machen, und alsdann bestimmen die Gleichungen (1) und (2) die Koordinaten x und y als Funktionen von α. Man findet:

$$\begin{aligned} x &= f'(\alpha) \cos \alpha + f(\alpha) \sin \alpha, \\ y &= f'(\alpha) \sin \alpha - f(\alpha) \cos \alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt dann weiter:

$$\begin{aligned} dx &= [f''(\alpha) + f(\alpha)] \cos \alpha \, d\alpha, \\ dy &= [f''(\alpha) + f(\alpha)] \sin \alpha \, d\alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

und indem man diese Gleichungen quadriert und addiert:

$$ds = [f''(\alpha) + f(\alpha)] \, d\alpha, \tag{5}$$

was übrigens auch aus den Formeln in Nr. 194 hervorgeht. Da $d\alpha$ gleich dem Kontingenzwinkel ist, so erhält man für den Krümmungsradius

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = f''(\alpha) + f(\alpha). \tag{6}$$

Die vorstehenden Formeln lassen verschiedene Anwendungen zu, von denen wir ein Beispiel geben wollen. Erteilt man α einen bestimmten Wert, so stellt die Gleichung (2) eine Senkrechte zur Tangente dar, und zwar in dem Punkte x, y, welcher durch die Gleichung (3) bestimmt ist, also im Kurvenpunkte. Die Gleichung (2) liefert mithin die Normalen der Kurve. Bildet man nun die Ableitung der Gleichung (2) nach α, nämlich

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = f''(\alpha), \tag{7}$$

so gehört das System der Gleichungen (2) und (7) den Einhüllenden des Normalensystemes an, also der Evolute der gebenen Kurve. Berechnet man aus (2) und (7) die Werte von x, y, und bezeichnet man sie durch x_1 und y_1, so wird

$$\begin{aligned} x_1 &= f'(\alpha) \cos \alpha - f''(\alpha) \sin \alpha, \\ y_1 &= f'(\alpha) \sin \alpha + f''(\alpha) \cos \alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

und dies sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes. Durch Differentiation folgt weiter:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -[f'(\alpha) + f'''(\alpha)] \sin \alpha \, d\alpha, \\ dy_1 &= +[f'(\alpha) + f'''(\alpha)] \cos \alpha \, d\alpha, \end{aligned} \tag{9}$$

also, wenn s_1 den Bogen der Evolute ausdrückt:

(10) $$ds_1 = [f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\,d\alpha = dR.$$

Man findet so die Resultate der Nr. 201 wieder.

§ 8. Oskulierende Kurven.

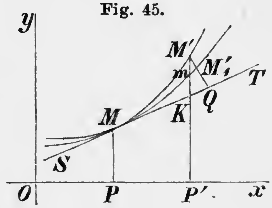
214. Definition einer Berührung μ^{ter} Ordnung. Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer Kurve MM' (Fig. 45) in rechtwinkligen Koordinaten; und in demselben Koordinatensysteme sei

$$y_1 = f_1(x)$$

Fig. 45.



die Gleichung einer zweiten Kurve MM_1'. Wir sagen nun, dafs die beiden Kurven sich im Punkte M in der μ^{ten} Ordnung berühren, wenn für die Abscisse x dieses Punktes die Gleichungen bestehen:

(1) $$y_1 = y;\quad y_1' = y';\quad y_1'' = y'';\ldots\quad y_1^{(\mu)} = y^{(\mu)},$$

wo $y^{(\mu)}$ und $y_1^{(\mu)}$ die μ^{ten} Ableitungen bedeuten, und wenn

(2) $$y^{(\mu+1)} \neq y_1^{(\mu+1)}$$

ist.

Wir nehmen an, dafs in der Umgebung der Stelle x die Funktionen y und y_1 nach dem *Taylor*schen Satze entwickelbar sind. Vermehren wir daher x um Δx, so werden die $x + \Delta x$ entsprechenden Werte Y und Y_1 der Ordinaten y und y_1 gegeben durch:

$$Y = y + y'\cdot\frac{\Delta x}{1!} + y''\cdot\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + y^{(\mu)}\cdot\frac{(\Delta x)^\mu}{\mu!} + y^{(\mu+1)}\cdot\frac{(\Delta x)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + R_{\mu+2},$$

$$Y_1 = y + y'\cdot\frac{\Delta x}{1!} + y''\cdot\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + y^{(\mu)}\cdot\frac{(\Delta x)^\mu}{\mu!} + y_1^{(\mu+1)}\cdot\frac{(\Delta x)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + R'_{\mu+2},$$

und daher wird

$$Y - Y_1 = \frac{y^{(\mu+1)} - y_1^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}\cdot(\Delta x)^{\mu+1} + \cdots$$

an der Stelle x, d. h. für $\Delta x = 0$, null von der $\mu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung.

Die letzte Gleichung liefert uns eine geometrische Definition für die Zahl μ, welche die Ordnung der Berührung angiebt. Machen wir in Fig. 45 $OP = x$, $PP' = \Delta x$, so wird

$mP' = Y_1$, $M'P' = Y$ und daher $mM' = Y - Y_1$. Es wird daher mM', wenn Δx null wird, null von der Ordnung $\mu + 1$; d. h. es wird

$$\lim_{PP'=0} \frac{mM'}{(PP')^{\mu+1}}$$

endlich und von null verschieden.

Um nun noch die Strecken mM' und PP' durch solche zu ersetzen, welche eine vom Koordinatensysteme unabhängige Bedeutung haben, verschieben wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Punkt M und machen die Tangente in M, also die Gerade ST zur x-Axe. Dann wird aus mM' die Strecke $M'M_1'$ und aus PP' die Strecke MQ und diese beiden Gröfsen haben eine von dem Koordinatensysteme unabhängige Bedeutung. Fällt man von einem Punkt M', der auf der Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von M liegt, das Lot MQ auf die gemeinsame Tangente in M, so schneiden die beiden Kurven auf ihm das Stück $M'M_1'$ aus. Der Fufspunkt Q des Lotes ist um MQ vom gemeinsamen Berührungspunkte M entfernt, und nun heifst μ die Ordnung der Berührung beider Kurven, wenn

$$\lim_{MQ=0} \frac{M'M_1'}{(mQ)^{\mu+1}}$$

endlich und von null verschieden ist.

Ist, um die vorigen Betrachtungen an einem Beispiele auszuführen, $\mu > 0$ und die eine Kurve MM_1' eine gerade Linie, also die Tangente an die Kurve MM', so wird — allgemein zu reden — y'' im Punkte M nicht null sein, und daher wird für die Kurve die Reihe der Differentialquotienten

$$y,\ y',\ y'',\ y''',\ldots,$$

für die Tangente dagegen

$$y,\ y',\ 0,\ 0,\ldots$$

Mithin ist $\mu = 1$. Die Tangente berührt die Kurve im Allgemeinen in der ersten Ordnung. In speziellen Fällen kann natürlich die Ordnung der Berührung sich sehr erhöhen; wir kommen dadurch zurück auf die Betrachtungen der Nr. 172.

215. Berührung gerader und ungerader Ordnung. Wie in Nr. 172 wollen wir jetzt allgemein unterscheiden, ob μ ungerade oder gerade ist. Ist die Ordnung μ ungerade, so ändert $Y - Y_1$ sein Zeichen nicht, wenn man das Vorzeichen von Δx ändert, sobald Δx in der Umgebung von $\Delta x = 0$ sich befindet; das Zeichen bleibt also das nämliche wie das der Differenz

$$\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y_1}{dx^{\mu+1}}.$$

Dies besagt, dafs zu beiden Seiten des Berührungspunktes die eine Kurve durchaus auf derselben Seite der andern verläuft.

Ist dagegen μ eine gerade Zahl, so ändert $Y - Y_1$ mit Δx auch sein Zeichen, und die Kurven durchsetzen sich gegenseitig im Berührungspunkte.

Wir bemerken schliefslich, dafs es im Falle einer Berührung μ^{ter} Ordnung nicht möglich ist, durch den Punkt M eine dritte Kurve zu legen, die zwischen den beiden ersten verläuft, es sei denn, dafs sie im Punkte M eine Berührung von μ^{ter} oder höherer Ordnung mit jenen besitzt. Denn ist Y_2 die Ordinate der dritten Kurve, welche zur Abscisse $x + \Delta x$ gehört, so ist

$$Y_2 - Y_1 = (Y_2 - Y) + (Y - Y_1).$$

Ist nun $Y_2 - Y$ von niederer als der $\mu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung null, so wird auch $Y_2 - Y_1$ von derselben Ordnung null, und folglich haben

$$Y_2 - Y_1 \quad \text{und} \quad Y_2 - Y$$

auch dasselbe Zeichen. Hieraus folgt im Besonderen der Satz, dafs es nicht möglich ist, durch den Kurvenpunkt M eine Gerade zu ziehen, welche in der Umgebung des Berührungspunktes M zwischen der Kurve und ihrer Tangente verliefe. Denn die Sekante durch M berührt — so dürfen wir sagen — die Kurve in der nullten Ordnung, also in einer niedrigeren als die Tangente.

216. Definition des Oskulierens. C bezeichne eine gegebene Kurve $y = f(x)$; wir nehmen an, dafs in der Umgebung der gerade betrachteten Stelle $x = x_0$ die Funktion $f(x)$ nach dem *Taylor*schen Satze entwickelbar ist:

$$(1) \qquad y = f(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Dieser Kurve stellen wir eine Schar von Kurven C' gegenüber:

$$F(x, y_1; c_0, c_1 \ldots c_n) = 0,$$

in deren Gleichung $n+1$ willkürliche Konstanten vorkommen und deren Ordinaten wir mit y_1 bezeichnen. Wir wollen annehmen, daſs die Gleichung dieser Kurvenschar nach y_1 aufgelöst und die rechte Seite in der Umgebung von $x-x_0$ nach dem *Taylor*schen Satze entwickelt sei, und als Koeffizienten der ersten $n+1$ Glieder mögen geradezu die $n+1$ Konstanten

$$c_0, c_1, \dots c_n$$

auftreten. Dann sieht die Gleichung der Kurvenschar so aus:

$$(2) \quad y_1 = c_0 + c_1\cdot(x-x_0) + c_2\cdot(x-x_0)^2 + \cdots \\ + c_n\cdot(x-x_0)^n + A_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \cdots$$

Die Gröſsen $c_0, c_1 \dots c_n$ sind willkürlich, aber die folgenden Koeffizienten $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$ Funktionen von ihnen oder feste, von den c unabhängige Zahlen.

Ist nun die ganze Zahl μ kleiner als n, so kann man über die Konstanten $c_0, c_1 \dots c_n$ der Kurvenschar C' so verfügen, daſs die Kurven C und C' eine Berührung μ^{ter} Ordnung im Punkte x_0 haben. Dazu hat man einfach die $\mu+1$ Gleichungen zu erfüllen:

$$(3) \qquad c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0', \quad c_2 = \frac{y_0''}{2}, \cdots \quad c_\mu = \frac{y_0^{(\mu)}}{\mu!}.$$

Die übrigen $n-\mu$ Konstanten bleiben dann willkürlich. Man muſs nur Sorge tragen, daſs

$$c_{\mu+1} \neq \frac{y_0^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}$$

wird. Ist aber $n=\mu$, so ist die Kurve C' durch die Gleichungen (3) vollkommen bestimmt und hat im Punkte $M(x_0, y_0)$ mit C eine Berührung mindestens n^{ter} Ordnung. In diesem Falle sagt man *die Kurve C' oskuliert die Kurve C im Punkte M.*

Anders aber als im Falle $\mu < n$ sind hier zwei Fälle zu unterscheiden. Durch die $n+1$ Gleichungen

$$c_0 = y_0, \ c_1 = y_0', \dots, c_n = \frac{y_0^{(n)}}{n;}$$

sind jetzt alle c bestimmt und mit ihnen daher auch bereits alle folgenden Koeffizienten $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$ in der Entwickelung (2). Im Allgemeinen wird nun nicht gerade auch

$$A_{n+1} = \frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

werden, und die Berührung ist dann genau die μ^{te}. Aber es kann zufälligerweise die letzte Gleichung an der speziellen Stelle x_0 doch erfüllt sein und sogar noch von den analogen folgenden Gleichungen einige. Dann ist die Berührung von noch höherer als μ^{ter} Ordnung. Die Kurven C und C' können sogar identisch werden, dann ist

$$\mu = \infty.$$

Jedenfalls giebt es unter den Kurven der Schar C' jedesmal eine und nur eine, welche die Kurve in einem gegebenen Punkte M von allgemeiner Lage oskuliert, und diese hat mit C eine höhere Berührung als jede andere Kurve der Schar C'.

Im Allgemeinen kann man auch aus einer Kurvenschar, deren Gleichung die allgemeine Form

(4) $$F(x, y_1;\, c_0, c_1 \ldots c_n) = 0$$

hat über die $n + 1$ Konstanten so verfügen, dafs die Berührung mit C mindestens von der n^{ten} Ordnung wird. Es können die Konstanten jedoch so in F eingehen, dafs dies nicht mehr möglich ist. Die Behauptung, dafs man aus der Schar C', wenn ihre Gleichung in der Form (4) gegeben ist, eine Kurve herausfinden kann, die C in mindestens n^{ter} Ordnung berührt, bedarf daher in jedem Falle eines besonderen Nachweises, der freilich dann überflüssig ist, wenn man sich nicht mit der blofsen Abzählung der Konstanten begnügt, sondern die verlangte C' thatsächlich herstellt.

217. Oskulierende Gerade. Oskulierender Kegelschnitt. Die Gleichung einer Geraden enthält nur zwei Konstanten; sie läfst sich unmittelbar in die Form (2) der vorigen Nummer setzen. Man kann daher zwischen einer gegebenen Kurve und einer Geraden in einem allgemein gegebenen Kurvenpunkte nur eine Berührung erster Ordnung herstellen. Die oskulierende Gerade einer Kurve ist also in jedem Punkte nichts anderes als die Tangente der Kurve. Dieses Resultat findet man auch nach der allgemeinen Regel. Denn ist

$$y_1 = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0)$$

die allgemeine Gleichung einer Geraden, so hat man

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0'.$$

Also wird

$$y_1 - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x_0, y_0). Ihre laufenden Koordinaten sind x und y_1. Schreibt man für diese wie gewöhnlich ξ und η und läſst die Indices 0 fort, so entsteht die alte Form der Tangentengleichung:

$$\eta - y = y' \cdot (\xi - x),$$

bei der (x, y) der Berührungspunkt ist.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung enthält fünf willkürliche Konstanten. Bringt man sie in die Form (2), so zeigt sich, daſs c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 ebenfalls willkürlich bleiben; mithin hat der oskulierende Kegelschnitt einer gegebenen Kurve eine Berührnng vierter Ordnung mit dieser Kurve. In gewissen besonderen Kurven kann die Berührung auch von höherer Ordnung werden. So hat z. B. eine Kurve dritter Ordnung im Allgemeinen 27 Punkte, in denen die oskulierenden Kegelschnitte je eine Berührung fünfter Ordnung mit der Kurve besitzen. Wenn man Kegelschnitte betrachtet, welche noch anderweitigen bestimmten Bedingungen genügen, so wird die Zahl der willkürlichen Konstanten kleiner als 5, und die oskulierende Kurve hat im Allgemeinen nicht mehr eine Berührung vierter Ordnung: Dieser Fall tritt ein, wenn man z. B. nur Parabeln betrachtet, welche von vier Konstanten abhängen, oder Kreise, welche drei Konstante enthalten, und die wir nun genauer untersuchen wollen.

218. Der oskulierende Kreis. Die allgemeine Gleichung eines Kreises enthält drei Konstanten, nämlich die Koordinaten x_1, y_1 des Mittelpunktes und den Radius R. Man kann daher im Allgemeinen nur eine Berührung zweiter Ordnung in einem Punkte x, y einer gegebenen Kurve mit einem Kreise herstellen, und die Bedingungen dieser Oskulation sind:

$$(1) \qquad y_1 = y, \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn y_1 die Ordinate des Kreises bezeichnet. Die Gleichung desselben ist

$$(x-a)^2+(y_1-b)^2=R^2,$$

und differentiiert man sie zweimal, so folgt:

$$(x-a)+(y_1-b)\frac{dy_1}{dx}=0,$$

$$1+\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+(y_1-b)\frac{d^2y_1}{dx^2}=0.$$

Ersetzt man in diesen drei Gleichungen die Gröfsen y_1, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$ durch ihre Werte gemäfs den Gleichungen (1), so erhält man die drei folgenden:

$$(2)\qquad \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \\ (x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0, \\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \end{cases}$$

durch welche die Koordinaten a_1, b_1 des Mittelpunktes und der Radius R des im Kurvenpunkte x, y oskulierenden Kreises bestimmt werden.

Diese Gleichungen sind aber genau dieselben, wie die, durch welche der Krümmungskreis bestimmt wird; nur dafs hier die Koordinaten seines Mittelpunktes (a, b) heifsen statt wie Nr. 198 (x_1, y_1). Wir sehen also:

Der oskulierende Kreis ist der Krümmungskreis.

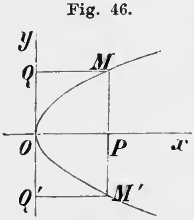
Achtes Kapitel.

Anwendungen der Theorie ebener Kurven.

§ 1. Die Fläche und das Bogenelement der Kegelschnitte.

Wiewohl die Messung der von Kurven begrenzten Flächen der Integralrechnung angehört, so wollen wir doch hier bereits einige der einfachsten Fälle und insbesondere die Kegelschnitte behandeln.

Fig. 46.



219. Die Parabelfläche. Es sei die Fläche des Segmentes MOM' zu bestimmen, welche zwischen dem Parabelbogen und seiner Sehne enthalten ist. Zur x-Axe wählen wir den Durchmesser Ox, der durch die Mitte P der Sehne MM' geht, und zur y-Axe die Tangente Oy im Endpunkte dieses Durchmessers.

Sind x, y die Koordinaten eines Punktes M, der als variabel gedacht ist, so wird das Differential der Fläche $OMP = u$ (Nr. 192):

$$du = y dx.$$

Die Gleichung $y^2 = 2px$ der Parabel ergiebt aber

$$y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}},$$

also ist:

$$du = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx.$$

Da nun $x^{\frac{1}{2}} dx$ das Differential von $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ ist, so hat die Fläche u das nämliche Differential wie die Funktion $\frac{2}{3} \sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}}$ und unterscheidet sich daher von dieser Funktion nur um eine Konstante. Andererseits werden aber beide Funktionen für

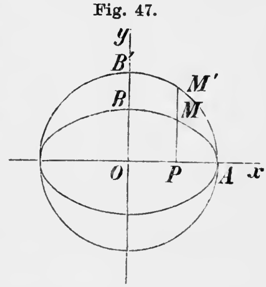
$x = 0$ ebenfalls null; mithin mufs diese Konstante gleich null sein und man erhält:

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2px} \cdot x \quad \text{oder} \quad u = \frac{2}{3}xy.$$

Diese Gleichung besagt, dafs die Fläche OPM gleich $\frac{2}{3}$ der Fläche des Parallelogrammes $OMPQ$ ist, welches mit den Koordinaten des Punktes M gebildet ist. Desgleichen ist die Fläche $OM'P$ gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogrammes $OPM'Q'$, mithin ist das Segment MOM' auch gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogrammes $MM'Q'Q$.

220. Die Ellipsenfläche. Eine Ellipse sei bezogen auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptaxen; $2a$ und $2b$ seien die Längen der Axen, und es werde die Fläche u gesucht, welche zwischen den beiden Axen Ox, Oy, dem Bogen BM und der Ordinate MP liegt. Wird der Kreis konstruiert, welcher die grofse Axe $2a$ zum Durchmesser hat, und mit u' die Fläche bezeichnet, die zwischen den Axen Ox und Oy, dem Kreisbogen $B'M'$ und der Ordinate $M'P$ liegt, so ist

Fig. 47.



$$du = y\,dx, \; du' = y'\,dx.$$

Da aber y' und y die Ordinaten des Kreises und der Ellipse sind, so ist $\frac{y'}{a} = \frac{y}{b}$, also

$$du = \frac{b}{a}\,du'.$$

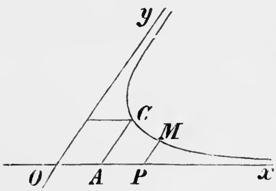
Mithin haben die Gröfsen u und $\frac{b}{a}u'$ dasselbe Differential, und weil sie gleichzeitig mit x verschwinden, so sind sie gleich, d. h. es ist

$$u = \frac{b}{a}u'.$$

Die ganze Kreisfläche ist πa^2, die ganze Ellipsenfläche demnach πab.

221. Die Hyperbelfläche. Wir betrachten eine Hyperbel, die auf ihre beiden Asymptoten als Koordinatenaxen bezogen ist; ihre Gleichung wird

Fig. 48.



$$xy = m^2,$$

u bezeichne die Fläche, die zwischen der Kurve, der x-Axe und den Ordinaten AC, PM liegt; von den letzteren ist die eine fest, die andere variabel gedacht.

Ist nun θ der Winkel zwischen den Axen Ox und Oy, so ist nach Nr. 192:

$$du = y dx \sin\theta.$$

Also wird für unsere Hyperbel:

$$du = m^2 \sin\theta \frac{dx}{x}.$$

$\frac{dx}{x}$ ist aber das Differential des natürlichen Logarithmus von x; also ist

$$u = m^2 \sin\theta\, lx + \text{Konst.}$$

Die Fläche u mufs null werden, wenn x gleich der Abscisse x_0 des Punktes C ist, folglich ist

$$0 = m^2 \sin\theta\, lx_0 + \text{Konst.} \quad \text{oder} \quad \text{Konst.} = -m^2 \sin\theta\, lx_0.$$

Demnach wird

$$u = m^2 \sin\theta\, l \frac{x}{x_0}.$$

Ist die Hyperbel gleichseitig, so ist $\theta = 90^0$. Wählen wir also als feste Anfangsordinate die des Scheitels C der Hyperbel, und setzen wir m gleich der Längeneinheit, so wird

$$u = lx.$$

Die durch die verschiedenen Ordinaten der gleichseitigen Hyperbel begrenzten Flächen sind also gleich den Logarithmen der entsprechenden Abscissen. Auf Grund dieser Eigenschaft heifsen die natürlichen Logarithmen auch die *hyperbolischen.*

222. Das Bogenelement der Ellipse. Die Koordinaten einer Ellipse, bezogen auf Mittelpunkt und Hauptaxen, lassen sich als Funktionen eines variabelen Winkels φ durch die Gleichungen

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi$$

ausdrücken; a und b sind die Längen der Halbaxen, φ die excentrische Anomalie, gerechnet von der kleinen Axe. Konstruiert man nämlich den konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser $2a$, so wird der zu einem Punkte M der Fläche zugehörige Winkel φ gefunden, indem man die Ordinate PM (Fig. 47 Nr. 220) bis zu ihrem Durchschnitte M' mit diesem Kreise verlängert; es ist alsdann $\angle B'OM' = \varphi$. Aus den obigen Gleichungen folgt

$$dx = a \cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$ds = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Bezeichnet man mit k die Excentricität, d. h. das Verhältnis $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, so gewinnt dieser Ausdruck die Form:

(1) $$ds = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

statt der man auch schreiben kann:

(2) $$\frac{ds}{a} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - k^2 \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Bisweilen ist es auch notwendig, ds als Funktion des Winkels λ zu bestimmen, den die Normale der Kurve mit der x-Axe bildet. Nach den vorigen Formeln wird:

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\operatorname{cotg}\varphi, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{cotg}\lambda,$$

also:

$$a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda}$$

und

$$d\varphi = -\frac{a}{b}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\lambda}\, d\lambda = -\frac{ab\, d\lambda}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda}.$$

Also folgt:

$$ds = \frac{a^2 b^2\, d\lambda}{(a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

oder:

$$ds = \frac{b^2}{a}\frac{d\lambda}{(1 - k^2 \sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

$d\lambda$ ist nichts anderes als der Kontingenzwinkel, und also stellt $\frac{ds}{d\lambda}$ den Krümmungsradius dar.

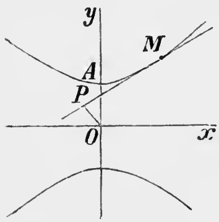


Fig. 49.

223. Das Bogenelement der Hyperbel. Für das Differential des Hyperbelbogens kann man einen ganz ähnlichen Ausdruck wie bei der Ellipse aufstellen. Wählen wir zur x-Axe die Hauptaxe, welche die Kurve nicht schneidet, zur y-Axe die andere, und bezeichnen wir mit $2a$ die Länge der ersten Axe, mit $2b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \cdot 2a$ die Länge der zweiten, so wird die Gleichung der Kurve

$$y = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \left(k^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Die Koordinaten x, y lassen sich als Funktionen eines Winkels φ ausdrücken, indem man

$$x = a\sqrt{1-k^2} \operatorname{tang} \varphi, \quad y = \frac{ak}{\sqrt{1-k^2}} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

setzt. Sie genügen bei jedem Werte von φ der Kurvengleichung. Hieraus folgt:

$$dx = a\sqrt{1-k^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad dy = a\sqrt{1-k^2} \frac{k \sin \varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

und es wird

$$(1) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{1-k^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Durch den Endpunkt M des Bogens s, dessen Anfang wir im Scheitel A der y-Axe annehmen, legen wir die Tangente MP und fällen auf sie vom Mittelpunkte die Senkrechte OP. Die Gleichung der Geraden OP wird

$$\eta k \sin \varphi + \xi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = 0.$$

Bezeichnet t die Strecke MP der Tangente, welche die Entfernung des Punktes M von der Geraden OP mifst, so ist

$$t = \frac{a}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi},$$

und differentiiert man diesen Ausdruck, so folgt:

$$(2) \qquad dt = a\sqrt{1-k^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Subtrahiert man nun die Gleichung (2) von der Gleichung (1), so wird

$$(3) \quad d(s-t) = \frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

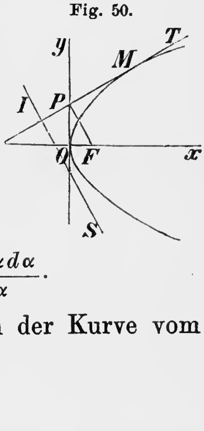
Die Gröfse t ist eine algebraische Funktion der Koordinaten, und man sieht, dafs das Differential der Differenz $s-t$ eine ähnliche Form hat, wie das Differential des Ellipsenbogens.

224. Rektifikation der Parabel. Es sei

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ihre Hauptaxe und die Scheiteltangente, ferner α der Winkel zwischen der Tangente und der x-Axe, so ist

Fig. 50.



$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

oder

$$y = p\operatorname{cotg}\alpha, \quad x = \frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Hieraus folgt:

$$dy = -\frac{p\,d\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad dx = -\frac{p\operatorname{cotg}\alpha\, d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Bezeichnet man ferner mit s den Bogen der Kurve vom Scheitel an, so wird

$$(1) \qquad ds = -\frac{p\,d\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Wir setzen das negative Zeichen vor diesen Ausdruck, weil die Quadratwurzel, welche das Zeichen Plus oder Minus hat, fortgefallen ist und s eine abnehmende Funktion ist, wenn α wächst.

Bezeichnen wir mit t die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkte M, der zugleich Endpunkt des Bogens s ist, und dem Schnittpunkt P mit der y-Axe, so ist

$$t = \frac{x}{\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad t = \frac{p}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

demnach

(2) $$dt = \frac{p}{2}\frac{d\alpha}{\sin\alpha} - p\frac{d\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der Gleichung (1), so folgt:

(3) $$d(s-t) = -\frac{p}{2}\frac{d\alpha}{\sin\alpha}.$$

In Nr. 52 wurde gezeigt, dafs $\frac{d\alpha}{\sin\alpha}$ das Differential von $l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right)$ ist, mithin ist

$$s - t = -\frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right) + \text{Konst.}$$

Der Bogen s und die Strecke t verschwinden für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, folglich ist die Konstante null, und man hat

(4) $$s = t - \frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right).$$

225. Anwendung der Parabelrektifikation. Dies Resultat giebt ohne weiteres die Lösung eines nicht uninteressanten Problemes. Die Linie PF, welche den Punkt P mit dem Brennpunkte der Parabel verbindet, steht senkrecht zur Tangente MT und ihre Länge ist

$$PF = \frac{p}{2\sin\alpha}.$$

Wählen wir nun den Punkt J auf der Verlängerung von MP so, dafs MJ gleich dem Bogen s ist, so wird

$$JP = s - t = -\frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Wenn wir jetzt die Linie JS senkrecht zu JT konstruieren und die beiden Geraden JT und JS zu Koordinatenlinien machen, so werden die Koordinaten x, y des Brennpunktes F

$$y = \frac{p}{2\sin\alpha}, \quad x = -\frac{p}{2}\,l\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$e^{-\frac{2x}{p}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha, \quad e^{\frac{2x}{p}} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha,$$

oder

$$e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}} = \frac{2}{\sin\alpha},$$

und auf Grund der ersten Gleichung wird also:

$$(5)\qquad e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}} = \frac{4y}{p} \quad \text{oder} \quad y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right).$$

Es ist nun leicht einzusehen, dafs dies die Gleichung der Kurve wird, welche der Brennpunkt beschreibt, wenn die Parabel, ohne zu gleiten, auf der festen Geraden JT rollt. Diese Kurve ist die *Kettenlinie.*

§ 2. Krümmung der Kegelschnitte.

226. Krümmungsradius. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte kann immer auf die Form

$$(1)\qquad y^2 = 2px + qx^2$$

gebracht werden, wobei x und y rechtwinklige Koordinaten sind. Es ist dies die Scheitelgleichung der Kurve. Durch zwei aufeinander folgende Differentiationen erhält man:

$$(2)\qquad y\frac{dy}{dx} = p + qx,$$

$$(3)\qquad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q.$$

Multipliziert man die Gleichungen (1) und (3) und subtrahiert man alsdann die Gleichung (2), nachdem sie ins Quadrat erhoben ist, so folgt

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2.$$

Der Ausdruck für den Krümmungsradius

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wird folglich:

$$R = -\frac{\left[y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Nun ist aber

$$y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = N^2,$$

wenn N die Länge der Normalen bedeutet, folglich ist

$$R = -\frac{N^3}{p^2}. \tag{4}$$

Der Krümmungsradius der Kegelschnitte ist also dem Kubus der Normalen proportional, letztere gerechnet vom Berührungspunkte bis zum Durchschnitt mit der Axe.

Die Gleichung (2) giebt zum Quadrat erhoben:

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2,$$

und folglich ist

$$N^2 = p^2 + (1+q)\,y^2, \tag{5}$$

wodurch man also den Krümmungsradius als Funktion von einer der beiden Koordinaten ausdrücken kann.

Ein anderer bemerkenswerter Ausdruck für R wird erhalten, wenn man den Winkel γ einführt, den die Normale mit dem von einem Brennpunkt ausgehenden Radiusvektor bildet. Bezeichnet man mit ϱ diesen Radius und mit ω den Winkel, den er mit der x-Axe bildet, so hat man bekanntlich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1+\sqrt{1+q}\cos\omega}{p}, \quad \text{daher} \quad \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{\sqrt{1+q}\sin\omega}{p}\,d\omega.$$

Der Winkel γ ist nun bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega},$$

und wird demnach hier

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sqrt{1+q}}{p}\,\varrho\sin\omega = \frac{y\sqrt{1+q}}{p}.$$

Die Gleichung (5) reduziert sich also auf

$$N = \frac{p}{\cos\gamma}. \tag{6}$$

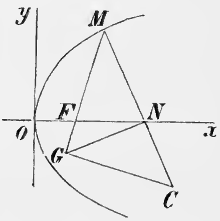
Die Projektion der Normalen auf den von einem Brennpunkt ausgehenden Radiusvektor ist also bei einem Kegelschnitte konstant und gleich dem Parameter.

Der Ausdruck (4) für den Krümmungsradius wird, indem man N durch seinen Wert aus der Gleichung (6) ersetzt:

$$R = -\frac{p}{\cos^3\gamma} \quad \text{oder} \quad R = -\frac{N}{\cos^2\gamma}. \tag{7}$$

227. Konstruktion des Krümmungsradius. Die letzte Formel führt zu einer einfachen Konstruktion des Krümmungsradius. Man ziehe die Normale in M bis zu ihrem Durchschnittspunkt N mit der Brennpunktsaxe und verbinde den Punkt M mit dem Brennpunkte F, alsdann errichte man in N die zur Normale Senkrechte NG bis zu ihrem Durchschnitt G mit dem Radiusvektor MF und konstruiere endlich im Punkte G das Lot GC auf dem Radius, bis es die Normale in C schneidet, so wird der Punkt C der Krümmungsmittelpunkt des Punktes M. Denn es ist

Fig. 51.



$$MG = \frac{MN}{\cos\gamma} = \frac{N}{\cos\gamma}$$

und

$$MC = \frac{MG}{\cos\gamma} = \frac{N}{\cos^2\gamma},$$

folglich

$$MC = |R|.$$

228. Evolute der Ellipse. Aus der Flächengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

folgt durch die Differentiation:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

ferner:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(a^4 - c^2x^2)}{a^4y^2} = \frac{b^4 + c^2y^2}{a^2y^2},$$

wenn man

$$c^2 = a^2 - b^2$$

setzt. Die Gleichungen (3) der Nr. 198:

$$x_1 = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad y_1 = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden folglich:

$$(2) \qquad x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

Nimmt man also c^2 positiv an, d. h. $a^2 > b^2$, und setzt man

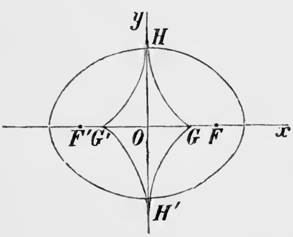
$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

so folgt aus den Gleichungen (2) auf Grund der Gleichung (1)

$$(3) \qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

welches die gesuchte Gleichung für die Ellipsenevolute ist. Diese Evolute $GHG'H'$ hat als Symmetrieaxen die Hauptaxen der Kurve, und die Punkte GG', in denen sie die Brennpunktsaxe schneidet, liegen zwischen den Brennpunkten F, F' der Ellipse, weil $a_1 < c$. Ferner erkennt man aus den Gleichungen (2), dafs jeder Quadrant der Ellipse und der entsprechende Quadrant der Evolute in den zwei Nebenwinkeln gelegen sind, welche mit der nämlichen Richtung der x-Axe und den beiden entgegengesetzten Richtungen der y-Axe gebildet werden. Auch kann man bemerken, dafs die Evolute ganz innerhalb der Fläche liegt, wenn $b_1 < b$ oder

Fig. 52.



$$\frac{a^2 - b^2}{b} < b, \quad \text{d. h.} \quad a < b\sqrt{2}$$

ist. Sie trifft die Ellipse in den Scheitelpunkten der kleinen Axe, wenn

$$a = b\sqrt{2}$$

ist; sie schneidet die Ellipse in vier Punkten, wenn

$$a > b\sqrt{2}$$

ist. Die Krümmungsradien der Ellipse in den Endpunkten der kleinen und der grofsen Axe sind bezüglich $b + b_1$ und $a - a_1$ oder $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{b^2}{a}$. Die Länge eines Quadranten der Evolute ist folglich

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Differentiiert man die Gleichung (3) zweimal, so folgt, indem man $dx_1 =$ Konst. setzt:

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy_1}{dx_1} = 0,$$

$$-\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3b_1^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0,$$

und hieraus:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b_1^{\frac{2}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{y_1^{\frac{1}{3}}}{x_1^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{b_1^{\frac{4}{3}}}{3a_1^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{4}{3}} y_1^{\frac{1}{3}}}.$$

Der Krümmungsradius R_1 der Evolute wird also

$$R_1 = \frac{3x_1^{\frac{1}{3}} y_1^{\frac{1}{3}} (a_1^{\frac{4}{3}} x_1^{\frac{2}{3}} + b_1^{\frac{4}{3}} y_1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{a_1^{\frac{4}{3}} b_1^{\frac{4}{3}}}.$$

Der Wert $\frac{dy_1}{dx_1}$ ist null in den Schnittpunkten G, G' mit der grofsen Axe, und unendlich in den Schnittpunkten H, H' der kleinen Axe. Hieraus erkennt man, dafs diese vier Punkte Rückkehrpunkte erster Art sind. In jedem von ihnen wird der Krümmungsradius R_1 gleich null. Der Wert von $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ hat immer dasselbe Vorzeichen wie y_1. Die Evolute ist demnach stets konvex nach der Abscissenaxe gerichtet.

229. Evolute der Hyperbel. Bei der Rechnung, die uns zur Gleichung der Ellipsenevolute führte, braucht b^2 nicht als positiv angenommen zu werden; sie gilt daher auch für die Hyperbel. Schreibt man $-b^2$ an Stelle von b^2, so erhält die mit c^2 bezeichnete Gröfse den Wert

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

und die Gleichungen (1) und (2) des vorigen Paragraphen werden:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2) \qquad x_1 = +\frac{c^2x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Die Gleichung (1) stellt die Hyperbel, die Gleichungen (2) die Koordinaten ihres Krümmungsmittelpunktes dar. Setzt man wie früher:

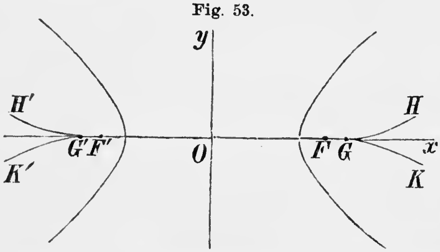
$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

so giebt die Elimination von x und y:

$$(3) \qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Man erkennt leicht vermittelst dieser Gleichungen, daſs die Hyperbelevolute aus zwei unendlichen Ästen HGK, $H'G'K'$ besteht, die zu den beiden Axen symmetrisch, und nach der reellen Axe konvex gelegen sind. Die Punkte G, G', in denen sie diese Axe trifft, sind Rückkehrpunkte erster Art. Sie liegen auſserhalb der Brennpunktsstrecke FF', weil $a_1 > c$ ist.

Fig. 53.



230. Evolute der Parabel. Die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px$$

ergiebt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

also

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = \frac{2px + p^2}{y^2},$$

und hieraus folgen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes die folgenden Werte:

$$x_1 = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 3x + p,$$

$$y_1 = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

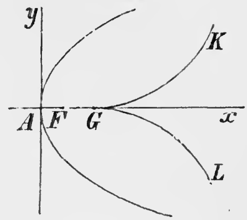
oder:

$$x = \frac{1}{3}(x_1 - p), \quad y = -\sqrt[3]{y_1 p^2}.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung der Parabel ein, so erhält man die der Evolute, nämlich

$$y_1^2 = \frac{8}{27}\frac{(x_1 - p)^3}{p}.$$

Fig. 54.



Durch Differentiation folgt:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{p}}\, y_1^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{3p^{\frac{2}{3}}}\, y_1^{\frac{2}{3}}.$$

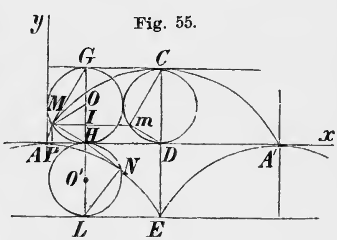
Diese Gleichungen beweisen, dafs die Evolute der Parabel aus zwei unendlichen Ästen GK, GL besteht, die sich im Punkte G der Hauptaxe vereinigen. Dieser Punkt, dessen Abscisse gleich p ist, ist ein Rückkehrpunkt erster Art. Die Evolute kehrt die konvexe Seite der Parabelaxe zu.

§ 3. Die Cykloide.

231. Definition. Die *Cykloide* wird erzeugt durch einen festen Punkt auf der Peripherie eines Kreises, wenn dieser ohne zu gleiten, auf einer festen unbegrenzten Geraden rollt.

Zur x-Axe wählen wir die Gerade Ax, auf welcher der gegebene Kreis rollt, und zum Anfangspunkte einen unter den Punkten A auf dieser Geraden, mit welchen der erzeugende Punkt der Cykloide zusammenfallen kann. Da sich die Bewegung des rollenden Kreises unbegrenzt fortsetzt und dabei immer wieder der erzeugende Punkt auf die Basislinie kommt, so besteht die Cykloide aus unendlich vielen Teilen, die unter einander kongruent sind und auf derselben Seite der Geraden Ax, zur Rechten oder Linken des Punktes A liegen. Die Gleichung der Kurve läfst sich leicht ableiten. Die y-Axe sei senkrecht zur Abscissenaxe Ax gewählt, es werde ein Punkt M der Cykloide betrachtet; bei der zugehörigen Lage des erzeugenden Kreises sei H der Berührungspunkt zwischen Kreis und Basislinie.

Fig. 55.



Es seien nun

$$AP = x, \quad MP = y$$

die Koordinaten von M. Wir verbinden diesen Punkt mit dem

Mittelpunkt O des erzeugenden Kreises HMG und fällen die Senkrechte MI und GH. Dann ist

$$x = AH - PH = AH - MI,$$
$$y = OH - OI.$$

Bezeichnet man nun mit a den Radius des erzeugenden Kreises, mit φ die jeweilige Gröfse des Wälzungswinkels, d. h. den Winkel, welchen der Radius MO mit der Richtung OH bildet, so ist

$$MI = a \sin\varphi, \quad OI = a\cos\varphi.$$

Nun ist die Länge AH gleich der Länge des Bogens $MH = a\varphi$ gemäfs der Definition der Cykloide. Mithin wird

(1) $$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi),$$

und man erhält alle Punkte der Kurve, wenn man der Gröfse φ alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ beilegt. Die zweite der Gleichungen (1) ergiebt:

(2) $$\cos\varphi = \frac{a-y}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a},$$

daher

(3) $$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a},$$

und substituiert man diese Werte in die erste der Gleichungen (1), so folgt:

(4) $$x = a \operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Die Wurzel mufs mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen werden, je nach dem Werte von φ.

Die Gleichung (4) ist die Kurvengleichung als Relation zwischen x und y. Doch ist es nicht vorteilhaft, sie an Stelle der Gleichungen (1) zu setzen, und wir behalten daher die letzteren bei.

232. Tangente und Normale. Aus der Differentiation der Gleichungen (1) folgt:

(5) $$dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$
$$dy = a\sin\varphi\,d\varphi.$$

Der Ausdruck für die Subnormale N' wird auf Grund der Gleichungen (1) und (5)

(6) $$N' = y\frac{dy}{dx} = a\sin\varphi = PH.$$

Hieraus folgt, dafs MH die Normale der Kurve ist, und dafs folglich die Gerade MG, welche den Punkt M mit dem Gegenpunkte von H auf dem Kreise verbindet, die Tangente ist.

Dies Ergebnis führt zu einem einfachen Verfahren, um die Tangente in einem beliebigen Punkt M der Cykloide zu konstruieren. Wir bemerken zunächst, dafs das Maximum von y gleich $2a$ ist und jedesmal eintritt, sobald φ gleich π oder einem ungeraden Vielfachen von π ist. Da aber alles, was von einem Teile der Kurve ausgesagt wird, auch für alle anderen gilt, so haben wir nur den Teil zu betrachten, der seinen Anfang im Punkte A hat. Dann gehört zu dem Maximum der Wert $x = \pi a$; das ist die Mitte der Basis der Cykloide. Konstruiert man nun über der Maximalordinate CD als Durchmesser den erzeugenden Kreis CmD, und legt durch den Punkt M die Gerade Mm parallel zu Ax, verbindet man ferner den Punkt m, in welchem die Gerade den Halbkreis CmD schneidet, mit C, und zieht endlich durch den Punkt M die Gerade MG parallel zu mC, so wird diese Gerade die gesuchte Tangente.

Vermittelst der Gleichung (3) kann man dem Ausdruck für die Subnormale N' die Form geben:

$$N' = \sqrt{2ay - y^2}, \tag{7}$$

und da die Normale N gleich $\sqrt{N'^2 + y^2}$ ist, so wird

$$N = \sqrt{2ay},$$

oder

$$N = 2a \sin \frac{1}{2} \varphi. \tag{8}$$

Schreibt man in der Gleichung (7) an Stelle von N' seinen Ausdruck $y\frac{dy}{dx}$, so erhält man die *Differentialgleichung* der Cykloide, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}. \tag{9}$$

Es ist mitunter auch von Vorteil, den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel C der Cykloide zu verlegen und die Geraden GC und CD als x- und y-Axe zu wählen. Man mufs alsdann in den Gleichungen x durch $\pi a + x$, und y durch $2a - y$ ersetzen. Macht man z. B. diese Substitution in der Gleichung (9), so wird

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

Wir haben dabei das Zeichen auf der linken Seite nicht geändert, weil das Vorzeichen auf der rechten Seite zweideutig bleiben kann.

233. Quadratur der Cykloide. Bezeichnet man mit u die Fläche, welche zwischen der Kurve, ihrer Basis und der Ordinate $MP = y$ enthalten ist, so ist

$$du = y dx = a^2 (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2 (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi.$$

Setzt man

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi),$$

so wird

$$du = a^2 \left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi.$$

Die rechte Seite ist, wie leicht ersichtlich, das Differential der Funktion

$$a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Ferner verschwindet diese Funktion ebenso wie u für $\varphi = 0$; folglich ist

$$u = a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right). \tag{10}$$

Will man die ganze Fläche U bestimmen, die von dem einen Zweige der Kurve und der Basis begrenzt ist, so hat man $\varphi = 2\pi$ zu setzen und dies ergiebt

$$U = 3\pi a^2. \tag{11}$$

Die ganze Fläche eines Zweiges der Cykloide ist demnach gleich dem Dreifachen der Fläche des erzeugenden Kreises.

234. Rektifikation der Cykloide. Die Gleichungen (5) in Nr. 232 geben

$$dx^2 + dy^2 = 2a^2 (1 - \cos\varphi) d\varphi^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi d\varphi^2,$$

also

$$ds = 2a \sin\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi. \tag{12}$$

Die rechte Seite ist das Differential von $-4a\cos\frac{1}{2}\varphi$; also ist

$$s = -4a\cos\frac{1}{2}\varphi + \text{Konst.}$$

Wählt man den Punkt A zum Anfang des Bogens s, so wird dieser Bogen null für $\varphi = 0$; mithin ist

$$0 = -4a + \text{Konst.},$$

d. h. die Konstante ist gleich $4a$, und man hat

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi\right) = 8a\sin^2\frac{1}{4}\varphi. \tag{13}$$

Die ganze Länge S eines Zweiges der Kurve ergiebt sich für $\varphi = 2\pi$, und demnach ist

$$S = 8a. \tag{14}$$

Diese Länge ist also gleich dem Vierfachen des Durchmessers des erzeugenden Kreises.

235. Krümmungsradius. Der Winkel, den die Tangente der Kurve mit der y-Axe bildet, ist gleich der Hälfte des Winkels φ. Hieraus folgt, dafs der Kontingenzwinkel gleich $\frac{1}{2}d\varphi$ und der Krümmungsradius

$$R = 2\frac{ds}{d\varphi}$$

ist. Die Gleichung (12) ergiebt $\frac{ds}{d\varphi} = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi$, und dies ist nach Gleichung (8) die Länge N der Normalen; also ist

$$R = 2N, \tag{15}$$

d. h. der Krümmungsradius ist das Doppelte der Normalen.

236. Evolute. Aus diesem Resultate läfst sich ohne Rechnung die Evolute der Cykloide bestimmen. Wir verlängern den Durchmesser GH des Kreises O um die Länge $HL = GH$ unterhalb der Axe Ax (Figur in Nr. 231) und konstruieren über HL als Durchmesser den Kreis O', der im Punkte N die verlängerte Normale MH schneidet, ferner ziehen wir an diesen Kreis die Tangente LE parallel zu Ax, welche die Maximalordinate CD in E schneidet. Aus der Gleichheit der Winkel MHG, LHN folgt die der Bögen MG, LN und der supplementären MH, HN. Die Sehnen

MH und HN sind ebenfalls gleich, und folglich ist N der zum Punkte M gehörige Krümmungsmittelpunkt. Der Bogen HN ist gleich der Länge AH und also sein Supplement LN gleich HD oder LE.

Mithin kann die Evolute der Cykloide durch einen Punkt N auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius a erzeugt werden, wenn dieser ohne zu gleiten auf einer Geraden EL rollt, die parallel zu Ax in der Entfernung $2a$ liegt, derart, dafs die Lagen des Punktes N auf der Geraden EL den nämlichen Abscissenwerten entsprechen, wie die Maximalordinaten der ursprünglichen Cykloide. Die Evolute ist also ebenfalls eine Cykloide, welche der ersten gleich ist.

Dasselbe erkennt man auch ohne Benutzung der Gleichung für den Krümmungsradius. Denn während MG die Tangente der ersten Cykloide im Punkte M ist, ist NH die Tangente im Punkte N der zweiten. Diese ist also die Enveloppe der Normalen zur ursprünglichen Kurve, und folglich ihre Evolute.

Endlich ergiebt sich auch dieser Satz sehr leicht aus den allgemeinen Gleichungen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes. Die Differentiation der Gleichungen (5) in Nr. 232 liefert, indem $d\varphi$ als konstant genommen wird:

$$(16) \qquad d^2x = a \sin\varphi \, d\varphi^2, \quad d^2y = a \cos\varphi \, d\varphi^2,$$

und mittelst der Gleichungen (5) und (16) werden die allgemeinen Gleichungen der Nr. 200

$$x_1 = a(\varphi + \sin\varphi), \quad y_1 = -a(1 - \cos\varphi).$$

Verschiebt man nun die Koordinatenaxen parallel zu sich in den Punkt, dessen Koordinaten $x = \pi a$ und $y = -2a$ sind, so mufs man $\pi a + x_1$ und $-2a + y_1$ an Stelle von x_1 und y_1 schreiben, und wenn man gleichzeitig $\varphi_1 + \pi$ an Stelle von φ einführt, so erhält man die Gleichungen:

$$x_1 = a(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \quad y_1 = a(1 - \cos\varphi_1),$$

welche in der That eine der ursprünglichen gleiche Cykloide darstellen.

Diese Eigenschaft der Cykloide führt nun auch unmittelbar zu ihrer Rektifikation. Denn der Bogen EN der Evolute ist gleich der Differenz

$$EC - MN = 4a - 4a \sin \frac{1}{2} \varphi$$

zwischen den Krümmungsradien der Punkte C und M. Andererseits ersieht man, dafs der Bogen $s = AM$ erhalten wird, wenn man in diesem Ausdruck $\pi - \varphi$ statt φ setzt; also ist

$$s = 4a - 4a \cos \frac{1}{2} \varphi = 8a \sin^2 \frac{1}{4} \varphi.$$

Dieselbe Eigenschaft der Cykloide liefert noch ein Mittel, die Quadratur dieser Kurve zu erhalten; wir beschränken uns indefs auf diese Angabe, welche der Leser selbst wird ausführen können.

§ 4. Die Epicykloiden.

237. Definition. Epicykloide nennt man die Kurve, welche von einem bestimmten Punkt auf der Peripherie eines Kreises erzeugt wird, wenn dieser ohne zu gleiten auf einem anderen festen Kreise rollt. Die Cykloide gehört also zur Klasse der Epicykloiden; bei ihr wird der Radius des festen Kreises unendlich.

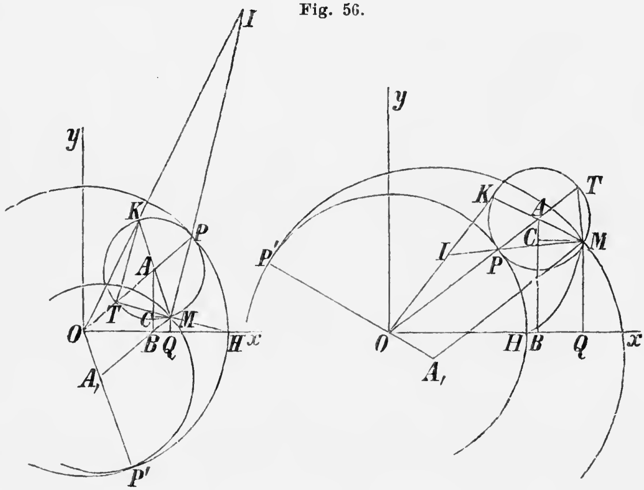
Die Epicykloide heifst eine *innere* oder *äufsere*, je nachdem sie im Innern des festen Kreises oder aufserhalb von ihm gelegen ist. Jede Epicykloide kann vermittelst zweier verschiedener Kreise erzeugt werden, die auf demselben festen Kreise rollen. Die Radien dieser beiden Kreise haben entweder zu ihrer Summe oder zu ihrer Differenz den Radius des festen Kreises, je nachdem es sich um eine innere oder um eine äufsere Epicykloide handelt.

Nehmen wir nämlich an, dafs die innere oder äufsere Epicykloide erzeugt sei durch einen Punkt M des Kreises A, der auf dem festen Kreise O rollt (Fig. 56 auf folgender Seite). Es sei H einer der Punkte des festen Kreises, mit denen der erzeugende Punkt zusammenfallen kann, und P ein bestimmter Berührungspunkt der beiden Kreise. Wir ziehen AM und konstruieren über .den Linien AO, AM das Parallelogramm $OAMA'$; wir beschreiben endlich einen Kreis um den Punkt A' als Mittelpunkt mit dem Radius $A'M$. Dieser Kreis wird den Kreis O in einem Punkte P' berühren, der auf der Verlängerung der Linie OA' gelegen ist. Denn bezeichnet man mit r den Radius des Kreises O, mit a und a' die Radien der Kreise A und A', so ist

$$r = a + a'$$

bei der inneren Epicykloide, und

Fig. 56.



$$r = a' - a$$

bei der äufseren. Da nun die Winkel PAM, $P'A'M$, POP' gleich sind, so ist

$$\frac{\text{arc}\, PM}{a} = \frac{\text{arc}\, P'M}{a'} = \frac{\text{arc}\, PP'}{r},$$

also

$$\frac{\text{arc}\, P'M \pm \text{arc}\, PM}{a' \pm a} = \frac{\text{arc}\, PP'}{r},$$

und weil $a' \pm a = r$ ist, so ist

$$\text{arc}\, P'M \pm \text{arc}\, PM = \text{arc}\, PP'.$$

Das obere Zeichen entspricht der inneren, das untere der äufseren Epicykloide. In beiden Fällen aber hat man

$$\text{arc}\, PM = \text{arc}\, PH$$

nach der Definition für die Erzeugung der Kurve; folglich ist auch

$$\text{arc}\, P'M = \text{arc}\, P'H,$$

und demnach kann die Epicykloide auch erzeugt werden durch einen Punkt M, sowohl des Kreises A, als auch des Kreises A', die auf dem Kreise O rollen.

Dabei ist noch folgendes zu bemerken: Wird eine äufsere Epicykloide erzeugt, indem ein Kreis vom Radius a auf dem Kreise r rollt, so dafs die beiden Kreise sich mit ihren konvexen Seiten berühren, wobei $a \gtreqless r$ sein kann, so ist $a' = r + a$, und der zweite erzeugende Kreis berührt mit seiner konkaven Seite die konvexe des festen.

Wird eine innere Epicykloide erzeugt, indem ein Kreis vom Radius a auf dem Kreise r rollt, so dafs die konvexe Seite des beweglichen die konkave des festen berührt, so ist $a < r$ und $a' = r - a$; und dieser zweite Kreis liegt ebenfalls im Innern des festen.

Geht man dagegen von einem Kreise $a > r$ aus, der mit seiner konkaven Seite die konvexe des festen berührt, so hat man die Formel für die äufsere Epicykloide anzuwenden, jedoch mit Vertauschung der Vorzeichen auf der rechten Seite, es wird $a' = a - r$, also $r = a - a'$.

238. Gleichung. Beziehen wir die Kurve auf zwei rechtwinklige Axen Ox, Oy, von denen die erste durch den Punkt H geht, und bezeichnen wir mit φ den Wälzungswinkel MAP, der von dem Radius AM des erzeugenden Punktes beschrieben ist, wenn sich dieser aus seiner anfänglichen Lage HO bewegt hat, — der Winkel φ kann von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, denn die Bewegung kann als eine unbegrenzte betrachtet werden —, so sind die Bögen PM und PH gleich $a\varphi$ und der Winkel POH wird gleich $\frac{a\varphi}{r}$.

$OQ = x$ und $MQ = y$ sind die Koordinaten des Punktes M. Fällt man AB senkrecht auf Ox und MC senkrecht auf AB, so ist, nach der Figur:

$$x = OB + MC, \quad y = AB - AC,$$

und die Dreiecke OAB, AMC ergeben:

$$x = (r \pm a) \cos \frac{a\varphi}{r} \mp a \cos\left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right),$$

$$y = (r \pm a) \sin \frac{a\varphi}{r} \mp a \sin\left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right).$$

Die oberen Zeichen gelten für die äufsere, die unteren für die innere Epicykloide. Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ werde gleich n gesetzt; dann hat man für die äufsere Epicykloide:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi, \\ \dfrac{y}{a} = \dfrac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi, \end{cases}$$

und diese Formeln gelten auch für die innere, wenn man statt a, n, φ die Werte $-a$, $-n$, $-\varphi$ setzt.

Die Epicykloide ist eine algebraische Kurve, wenn die positive oder negative Zahl n rational ist. Der Fall $n = -\frac{1}{2}$ liefert eine innere Cykloide, die eine Gerade ist. Die zweite der Gleichungen (1) wird dann $y = 0$, und die Kurve reduziert sich auf einen Durchmesser des festen Kreises. Für $n = -\frac{1}{4}$ werden die Gleichungen (1), wenn man a in $-a$, φ in $-\varphi$ verwandelt:

$$\frac{x}{a} = 3 \cos\frac{\varphi}{4} + \cos\frac{3\varphi}{4} = 4\cos^3\frac{\varphi}{4},$$

$$\frac{y}{a} = 3 \sin\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{3\varphi}{4} = 4\sin^3\frac{\varphi}{4},$$

also, wenn man φ eliminiert, und r an Stelle von $4a$ setzt:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

Im Falle $n = 1$ hat man

$$\frac{x}{a} = 2\cos\varphi - \cos 2\varphi, \quad \frac{y}{a} = 2\sin\varphi - \sin 2\varphi,$$

oder

$$\frac{x-a}{2a} = \cos\varphi(1-\cos\varphi), \quad \frac{y}{2a} = \sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Führt man die Polarkoordinaten ϱ und ω ein und setzt

$$x - a = \varrho\cos\omega, \quad y = \varrho\sin\omega,$$

so folgt aus diesen Gleichungen

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\omega \quad \text{oder} \quad \varphi = \omega,$$

und

$$\varrho = 2a(1-\cos\omega) \quad \text{oder} \quad \varrho = 4a\sin^2\frac{1}{2}\omega.$$

Allgemein: Jede Epicykloide wird aus unendlich vielen, unter sich gleichen Zweigen gebildet, und die Punkte, in denen diese Zweige auf dem festen Kreise enden, sind Rückkehrpunkte. Die Anzahl dieser Zweige wird eine endliche und die ganze Kurve ist in sich geschlossen, wenn das Verhältnis $n = \frac{a}{r}$ eine rationale Zahl ist.

239. Tangente und Normale. Die Differentiation der Gleichungen (1) ergiebt:

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{a} = (n+1)\,[\sin(n+1)\,\varphi - \sin n\varphi]\,d\varphi \\ \quad = 2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)d\varphi, \\ \frac{dy}{a} = (n+1)\,[\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi]\,d\varphi \\ \quad = 2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)d\varphi, \end{cases}$$

also:

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Diese Gleichung beweist, dafs die Tangente im Punkte M der Epicykloide die Gerade MT ist, welche den Punkt M mit dem Punkte T, dem Gegenpunkte von P im Kreise A, verbindet. Denn der Winkel, den diese Gerade MT mit der x-Axe bildet, ist gleich der Summe der Winkel AOx und OTM, die stets gleich $n\varphi + \frac{\varphi}{2}$ ist, wenn man von den Vielfachen von π absieht. Hieraus folgt, dafs die Normale im Punkte M der Epicykloide die Gerade MP ist, die den Punkt M mit dem jeweiligen Berührungspunkt der Kreise O und A verbindet.

240. Rektifikation der Epicykloide. Addiert man die Gleichungen (2), nachdem man sie ins Quadrat erhoben hat, und zieht man die Quadratwurzel aus der erhaltenen Summe, so folgt:

$$(4)\qquad \frac{ds}{a} = 2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

also

$$\frac{s}{a} = -4(n+1)\cos\frac{\varphi}{2} + \text{Konst.}$$

Nimmt man H zum Anfang des Bogens s, so wird s zugleich mit φ null; die Konstante ist also $4(n+1)$, und man hat:

$$\frac{s}{a} = 4(n+1)\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 8(n+1)\sin^2\frac{\varphi}{4}\cdot$$

Um die Länge S eines ganzen Zweiges der Kurve zu erhalten, hat man $\varphi = 2\pi$ zu setzen, und es wird

$$(5) \qquad S = 8(n+1)a.$$

241. Quadratur der Epicykloide. Die Gleichungen (1) und (2) ergeben:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{a^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$

oder

$$du = a^2\frac{(n+1)(2n+1)}{2n}(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$

wenn u die Fläche bezeichnet, die von der Kurve, dem Radiusvektor des Punktes M und der Abscissenaxe eingeschlossen ist. Es ist aber $d\varphi - \cos\varphi\,d\varphi$ das Differential von $\varphi - \sin\varphi$, und diese Funktion verschwindet ebenso wie u gleichzeitig mit φ. Demnach erhält man

$$u = a^2\frac{(n+1)(2n+1)}{2n}(\varphi - \sin\varphi).$$

Für die ganze Fläche U, welche von einem Zweige der Kurve und seinen äufsersten beiden Radien eingeschlossen ist, wird $\varphi = 2\pi$, also

$$U = a^2\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\pi.$$

Der Sektor des Kreises zwischen den nämlichen Radien ist $\frac{\pi a^2}{n}\cdot$ Die zwischen dem festen Kreise und dem Kurvenzweige gelegene Fläche ist folglich $U - \frac{\pi a^2}{n}$, und nennt man U_1 diese Fläche, so ist

$$U_1 = (2n+3)a^2\pi.$$

Da wir für n auch negative Werte zulassen, so gelten die Formeln auch für die innere Epicykloide ebenso wie für die äufsere. Sie reduziert sich auf $U_1 = 3\pi a^2$ für $n = 0$, und so findet man das für die Cykloide bereits erhaltene Resultat wieder.

242. Krümmungsradius. Die Gleichung (3) lehrt, dafs der Kontingenzwinkel $d\sigma$ gleich ist

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)d\varphi.$$

Mithin erhält der Krümmungsradius $R=\frac{ds}{d\sigma}$ nach Gleichung (4) den Wert

$$R=\frac{4(n+1)}{2n+1}a\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{6}$$

und weil $2a\sin\frac{\varphi}{2}=MP$ ist (Fig. in Nr. 237), so hat man

$$\frac{R}{MP}=\frac{2n+2}{2n+1}=\frac{2r\pm 2a}{r\pm 2a}. \tag{7}$$

Legt man durch den Punkt T die Sehne TK parallel zur Normalen MP und zieht die Gerade OK, welche diese Normale in J schneidet, so ist im Dreieck OKT

$$\frac{PJ}{KT}=\frac{OP}{OT},$$

also, weil $KT=MP$ ist:

$$\frac{MJ}{MP}=\frac{OP+OT}{OT}=\frac{2r\pm 2a}{r\pm 2a}.$$

Die oberen Zeichen gelten hier, wie in Gleichung (7), für die äufsere Epicykloide, die unteren für die innere. Aus dieser Gleichung und der Gleichung (7) folgt

$$R=MJ,$$

mithin ist J der zum Punkte M gehörige Krümmungsmittelpunkt.

243. Evolute. Die Differentiation der Gleichung (3) liefert:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{2n+1}{2}\frac{d\varphi}{dx};$$

folglich werden die Gleichungen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes J

$$x_1=x-\frac{2}{2n+1}\frac{dy}{d\varphi},\quad y_1=y+\frac{2}{2n+1}\frac{dx}{d\varphi},$$

oder nach den Gleichungen (1) und (2):

$$\frac{x_1}{a}=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}\cos n\varphi+\cos(n+1)\varphi\right],$$

$$\frac{y_1}{a}=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}\sin n\varphi+\sin(n+1)\varphi\right].$$

Drehen wir die Koordinatenaxen um den Winkel $n\pi$, und zwar in der Richtung von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe, und bezeichnen wir mit x_1' und y_1' die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes in Bezug auf diese neuen Axen, so wird

$$x_1' = x_1 \cos n\pi + y_1 \sin n\pi, \quad y_1' = -x_1 \sin n\pi + y_1 \cos n\pi.$$

Setzt man

$$a_1 = \frac{a}{2n+1}, \quad \varphi_1 = \varphi - \pi,$$

so folgt:

$$\frac{x_1'}{a_1} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi_1 - \cos(n+1)\varphi_1,$$

$$\frac{y_1'}{a_1} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi_1 - \sin(n+1)\varphi_1.$$

Diese Formeln unterscheiden sich von den Gleichungen (1) durch die Vertauschung von a mit $a_1 = \frac{a}{2n+1}$; *die Evolute der Epicykloide ist also wiederum eine Epicykloide, die der ursprünglichen ähnlich ist.* Sie wird erzeugt, indem der Kreis vom Radius $\frac{a}{2n+1}$ auf dem Kreise vom Radius $\frac{r}{2n+1}$ rollt; dieser feste Kreis liegt zu dem ursprünglichen festen Kreise konzentrisch, und die Spitzen der Evolute sind um den Winkel $n\pi$ gegen die Spitzen der ursprünglichen gedreht.

§ 5. Andere Kurven.

244. Kreisevolvente. Ersetzt man in den Gleichungen (1) der Nummer 238, welche eine Epicykloide definiren, a durch seinen Wert nr, und führt man an Stelle von φ den Winkel $\psi = n\varphi$ ein, den die Verbindungslinie der Mittelpunkte O und A der Kreise mit der x-Axe bildet, so erhalten die Gleichungen der Epicykloide die Form:

$$\frac{x}{r} = \cos\psi \left(1 + 2n \sin^2 \frac{\psi}{2n}\right) + \psi \sin\psi \frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}},$$

$$\frac{y}{r} = \sin\psi \left(1 + 2n \sin^2 \frac{\psi}{2n}\right) - \psi \cos\psi \frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}}.$$

Nehmen wir nun an, dafs der Radius a des erzeugenden Kreises unendlich wird, so wird auch n unendlich; das Verhältnis $\sin\frac{\psi}{n} : \frac{\psi}{n}$ konvergiert nach 1, und $2n\sin^2\frac{\psi}{2n}$ nach null. Demnach wird für diesen Grenzfall

$$\frac{x}{r} = \cos\psi + \psi\sin\psi,$$

$$\frac{y}{r} = \sin\psi - \psi\cos\psi.$$

Diese Gleichungen, welche man auch leicht direkt bilden kann, bestimmen die Evolvente des Kreises, d. h. die Kurve, deren Evolute der Kreis ist, und die aus der Abwickelung eines gespannt erhaltenen Fadens von einem Kreise entsteht. Sie besteht aus zwei unendlichen Zweigen, deren Vereinigungspunkt ein Rückkehrpunkt ist, und die zu den beiden Bewegungen entgegengesetzten Sinnes gehören, die man der erzeugenden Tangente beilegen kann.

Die Eigenschaft, dafs die Epicykloide ihrer Evolute ähnlich ist, gilt im eigentlichen Sinne nicht mehr für diesen Grenzfall; indessen kann man doch die Kreisevolvente und den Kreis selbst als Epicykloiden betrachten, und jede dieser Kurven entspricht dem Fall $n = \infty$; denn läfst man einen Kreis vom Radius a auf einem beliebig kleinen Kreise rollen, so beschreibt der Punkt, der am Anfang auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte im Abstande $2a$ vom festen Centrum liegt, eine Kurve, die beliebig wenig von einem Kreise mit dem Radius $2a$ verschieden ist.

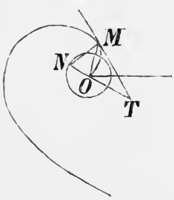
245. Die Spirale des Archimedes. Diese Spirale ist in Polarkoordinaten definiert durch die Gleichung

$$\varrho = a\omega,$$

wobei a eine gegebene Strecke bezeichnet. Beschreibt man um den Anfangspunkt einen Kreis mit dem Radius a, so sind die Bogen dieses Kreises, gerechnet von der festen Axe, die Längen der Radienvektoren, die durch die Endpunkte dieser Bogen zu legen sind.

Der Winkel μ zwischen der Tangente und dem Radiusvektor, die Subtangente T' und die Subnormale N' haben hier die Werte

Fig. 57.



$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{a} = \omega,$$

$$T' = \frac{\varrho^2 d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{a} = a\omega^2, \quad N' = \frac{d\varrho}{d\omega} = a.$$

Mithin ist die Subnormale konstant, was ein einfaches Verfahren für die Konstruktion der Tangente liefert. Der Krümmungsradius wird, wenn man die Normale $N = \sqrt{\varrho^2 + N'^2}$ einführt:

$$R = \frac{(\varrho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2a^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2},$$

und bezeichnet man mit a' die Projektion der Subnormalen a auf die Normale N, so ist

$$R = \frac{N^2}{N + a'},$$

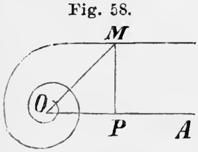
ein Ausdruck, der sich leicht konstruieren läfst.

246. Die hyperbolische Spirale. Die hyperbolische Spirale ist in Polarkoordinaten definiert durch

$$\varrho\omega = a,$$

wobei a eine gegebene Strecke ist. Für $\omega = 0$ ist ϱ unendlich.

Fig. 58.



Der Radius nimmt ab, wenn ω wächst, und wird null für $\omega = \infty$. Die Kurve macht also um den Anfangspunkt O unendlich viele Windungen, ohne ihn jemals zu erreichen; dieser Punkt ist ein *asymptotischer*. Die Ordinate $MP = \varrho \sin\omega$ der Kurve hat den Wert

$$\varrho \sin\omega = a\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

und wird für $\omega = 0$ gleich a. Hieraus folgt, dafs die Kurve zur Asymptote die Gerade besitzt, welche im Abstande a von der x-Axe parallel zu derselben verläuft. Die Gröfsen $\operatorname{tang} \mu$, T', N' erhalten hier die Werte:

$$\operatorname{tang} \mu = -\frac{\varrho\omega^2}{a} = -\omega, \quad T' = -a, \quad N' = -\frac{a}{\omega^2}.$$

Die Subtangente ist konstant, und hieraus folgt eine einfache Tangentenkonstruktion.

Die Konstruktion des Krümmungsradius enthält auch keinerlei Schwierigkeit. Doch bietet sie zu wenig Interesse, als dafs wir bei ihrer Entwickelung verweilen wollen.

247. Die logarithmische Spirale. Die logarithmische Spirale ist durch die Gleichung

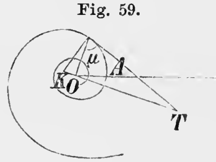
$$(1) \qquad \varrho = a e^{m\omega}$$

definiert, wobei a eine gegebene Strecke, m eine gegebene Zahl bezeichnet. Diese Gleichung repräsentiert die nämliche Kurve, wie grofs auch die gegebene Strecke a sein mag. Denn dreht man die feste Axe, von der aus der Winkel ω gerechnet wird, um einen Winkel α, so mufs man, um die Gleichung der Kurve in Bezug auf diese neue Axe zu erhalten, ω durch $\omega + \alpha$ ersetzen, und dies giebt, wenn man $ae^{m\alpha}$ mit a' bezeichnet:

$$\varrho = a' e^{m\omega}.$$

Demnach kann man auch $a = 1$ annehmen, wir wollen indessen, um die Homogenität der Gleichungen zu bewahren, die Gleichung (1) beibehalten.

Fig. 59.



Die Gleichung (1) ergiebt für $\omega = 0$, $\varrho = a = OA$, und läfst man nun ω von 0 bis ∞ wachsen, so bekommt ϱ entsprechende, ebenfalls unbegrenzt wachsende Werte. Legt man dagegen der Gröfse ω negative Werte von 0 bis $-\infty$ bei, so nimmt ϱ von a bis 0 ab. Demnach macht die Kurve vom Punkte A an unendlich viele Windungen, sowohl in dem einen, wie in dem andern Drehsinne um den Pol.

Die Differentiation der Gleichungen (1) ergiebt:

$$(2) \qquad \frac{d\varrho}{d\omega} = mae^{m\omega}, \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{d\omega} = m\varrho.$$

Folglich erhalten der Winkel μ zwischen Tangente und Radiusvektor, die Subtangente T' und die Subnormale N' die Werte:

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \mu = \frac{1}{m}, \quad T' = \frac{\varrho}{m}, \quad N' = m\varrho.$$

Die erste Gleichung besagt:

Bei der logarithmischen Spirale ist der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente konstant.

Das Flächendifferential eines Sektors der Kurve ist

$$du = \frac{1}{2}\,\varrho^2 d\omega = \frac{1}{2m}\,\varrho\, d\varrho.$$

$\varrho\, d\varrho$ ist das Differential von $\frac{\varrho^2}{2}$; folglich ist

$$u = \frac{\varrho^2}{4m} + \text{Konst.}$$

Soll die Fläche u zugleich mit ω null werden, so wird die Konstante $-\frac{a^2}{4m}$, und also

$$u = \frac{\varrho^2 - a^2}{4m}.$$

Das Bogendifferential ds der Kurve ist

$$(4)\quad ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2} = \sqrt{m^2+1}\,\varrho\, d\omega = a\sqrt{m^2+1}\,e^{m\omega} d\omega = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\, d\varrho,$$

mithin

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,\varrho + \text{Konst.}$$

Mifst man den Bogen s vom Punkte A an, für welchen $\varrho = a$ ist, so wird

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,(\varrho - a).$$

Der Kontingenzwinkel, der allgemein gleich $d\mu + d\omega$ ist, wird hier gleich $d\omega$. Der Krümmungsradius R ist also $\frac{ds}{d\omega}$, und nach den Gleichungen (2) und (4) wird

$$(5)\quad R = \sqrt{m^2+1}\,\varrho.$$

Dieser Ausdruck ist aber zugleich die Länge $N = \sqrt{\varrho^2 + N'^2}$ der Normalen; mithin ist der Krümmungsmittelpunkt der Endpunkt K der Subnormalen. Hiernach ist es auch leicht, die Gleichung für die Evolute der logarithmischen Spirale zu bilden. Denn die Koordinaten ϱ_1, ω_1 des Mittelpunktes K sind

$$\varrho_1 = N' = m\varrho = m a e^{m\omega}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega,$$

und dies giebt nach Elimination von ω

$$(6)\quad \varrho_1 = m a e^{m\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Die Evolute der logarithmischen Spirale ist also eine gleiche logarithmische Spirale mit dem nämlichen Pol.

248. Logarithmische Spiralen, die ihre eigene Evolute sind. Wie wir schon oben sahen, läſst sich die Gleichung (6) auf die Form (1) bringen, wenn man die feste Axe um den Pol unter einem bestimmten Winkel α dreht. Da es frei steht ein ganzes Vielfaches von 2π zu α zu addieren oder zu subtrahieren, ohne daſs die neue Richtung dadurch geändert wird, so kann man $\alpha + 2k\pi$ statt α schreiben, wobei k eine ganze noch unbestimmte Zahl, α einen Winkel zwischen 0 und 2π bedeutet. Wir ersetzen also in der Gleichung (6) ω_1 durch $\omega + \alpha + 2k\pi$ und schreiben ϱ an Stelle von ϱ_1, dann wird die Gleichung der Evolute:

$$\varrho = m a e^{m\left(\alpha + 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) + m\omega}$$

und reduziert sich auf

$$\varrho = a e^{m\omega},$$

wenn man α durch die Bedingung

$$m e^{m\left(\alpha + 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

oder

(7) $$\alpha = -(4k - 1)\frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}$$

bestimmt; das Symbol l bezeichnet den natürlichen Logarithmus.

Ist nun die Zahl m so beschaffen, daſs

(8) $$\frac{lm}{m} = -(4k - 1)\frac{\pi}{2}$$

wird, wobei k irgend eine bestimmte ganze Zahl bezeichnet, so giebt die Gleichung (7) $\alpha = 0$, und in diesem Falle wird die logarithmische Spirale (1) ihre eigene Evolute. Die Funktion $\frac{lm}{m}$, deren Ableitung $\frac{1 - lm}{m^2}$ ist, wächst von $-\infty$ bis $\frac{1}{e}$, wenn man m von 0 bis e wachsen läſst, und nimmt ab von $\frac{1}{e}$ bis 0, wenn m von e bis $+\infty$ wächst. Hieraus folgt, daſs, wenn für k irgend eine ganze positive Zahl gewählt wird, auch jedesmal ein Wert m vorhanden ist, welcher die Gleichung (8) befriedigt. Es giebt also unendlich viele logarithmische Spiralen, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, daſs sie mit ihrer Evolute zusammenfallen.

249. Anwendungen der Theorie der Einhüllenden. Wir wollen zum Schlusse dieses Kapitels zwei Beispiele für die in Nr. 210 entwickelte Methode zur Bestimmung der Einhüllenden eines Kurvensystemes geben.

Aufgabe I. Die Variabelen x_1 und y_1 seien mit einander durch die Relation verbunden:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m = 1, \tag{1}$$

in welcher a und b Konstante sind. Es soll die Einhüllende der Kurven bestimmt werden, welche durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = 1 \tag{2}$$

definiert sind.

Da x_1 und y_1 als Funktionen des nämlichen Parameters betrachtet werden können, so hat man die Ableitung der Gleichung (2) in Bezug auf diesen Parameter zu bilden; man erhält so:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n \frac{x_1'}{x_1} + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n \frac{y_1'}{y_1} = 0.$$

Da aber x_1 und y_1 durch die Gleichung (1) verbunden sind, so besteht zwischen x_1' und y_1' die Relation:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m \frac{x_1'}{x_1} + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m \frac{y_1'}{y_1} = 0,$$

und die Elimination von $\dfrac{y_1'}{x_1'}$ zwischen diesen Gleichungen ergiebt:

$$\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n}{\left(\frac{x_1}{a}\right)^m} = \frac{\left(\frac{y}{y_1}\right)^n}{\left(\frac{y_1}{b}\right)^m}. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) ist die Gleichung, die aus der Differentiation der Gleichung (2) in Bezug auf den variabelen Parameter hervorgeht. Auf Grund der Gleichungen (1) und (2) ist die Summe der Nenner und ebenso der Zähler in der Gleichung (3) gleich 1. Folglich ist jedes Glied der Gleichung (3) gleich 1, und man hat

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n = \left(\frac{x_1}{a}\right)^m, \quad \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = \left(\frac{y_1}{b}\right)^m,$$

oder

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^{m+n} = \left(\frac{y}{b}\right)^n. \tag{4}$$

Die Elimination von x_1 und y_1 zwischen den Gleichungen (1) und (4) läfst sich unmittelbar ausführen, und man erhält als Gleichung der gesuchten Einhüllenden:

$$(5)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1.$$

Der Fall $a = b$, $m = 2$, $n = 1$ verdient besonders bemerkt zu werden. Die Gleichungen

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2, \quad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

stellen ein System von Geraden dar, auf welchen die zwischen den Axen enthaltene Strecke die konstante Länge a hat. Die Einhüllende, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

wird, ist eine Epicykloide, wie in Nr. 238 gezeigt wurde.

250. Aufgabe II. *Auf die Peripherie eines Kreises treffen parallele Strahlen, welche von dort reflektiert werden, wobei der reflektierte Strahl mit der Normalen jedesmal denselben Winkel bildet wie der auffallende. Es soll die Einhüllende der reflektierten Strahlen bestimmt werden.*

Die gesuchte Einhüllende wird die *Katakaustika* genannt. Als Koordinatenaxen wählen wir zwei rechtwinklige Durchmesser, von denen der eine, die x-Axe, den auffallenden Strahlen parallel sei. Sind $a \cos\varphi$ und $a \sin\varphi$ die Koordinaten eines Punktes der Peripherie, auf welchen ein Strahl fällt, so bildet der reflektierte Strahl mit der x-Axe den Winkel 2φ, und die Gleichung dieses Strahles wird

$$(y - a \sin\varphi) = \operatorname{tang} 2\varphi\,(x - a \cos\varphi),$$

oder

$$y \cos 2\varphi - x \sin 2\varphi + a \sin\varphi = 0.$$

Mithin mufs φ eliminiert werden zwischen dieser Gleichung und der folgenden:

$$y \sin 2\varphi + x \cos 2\varphi - \frac{a}{2} \cos\varphi = 0,$$

die durch Differentiation nach φ entsteht. Löst man die beiden Gleichungen nach x und y auf, so folgt:

$$x = \frac{a}{4}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi),$$

$$y = \frac{a}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi).$$

Auf Grund der Gleichungen in Nr. 238 erkennt man, dafs die durch diese Gleichungen dargestellte Katakaustika eine äufsere Epicykloide ist, welche von einem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{4}a$ erzeugt wird, der auf einem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{2}a$ rollt, welcher zu dem ursprünglichen konzentrisch liegt.

Neuntes Kapitel.

Theorie der Raumkurven und Flächen.

251. Gleichungen einer Raumkurve und einer Fläche. Im siebenten Kapitel haben wir gesehen, daſs eine ebene Kurve analytisch durch die verschiedensten Gleichungen gegeben sein kann. So kann auch eine und dieselbe Raumkurve oder Fläche in der mannigfachsten Weise analytisch dargestellt werden. Wir wollen hier diejenigen Darstellungsformen anführen, welche im Folgenden hauptsächlich werden verwandt werden. Wir wählen

a) ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z).

I. Raumkurven.

1. y und z sind als Funktionen von x gegeben:

$$y = f(x), \quad z = F(x).$$

2. x, y, z sind als Funktionen eines Parameters t (z. B. der Zeit oder der Bogenlänge) gegeben:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

3. Zwischen x, y, z bestehen zwei Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

II. Flächen.

1. z ist als Funktion von x und y gegeben:

$$z = F(x, y).$$

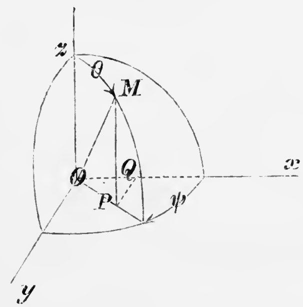
2. Zwischen x, y, z besteht eine Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0.$$

b) Polarkoordinaten.

Im räumlichen Polarkoordinatensysteme ist jeder Punkt M des Raumes durch einen Radiusvektor r, welcher stets im absoluten Sinne genommen wird, und durch zwei Winkel θ und ψ definiert (vergl. Fig. 60).

Fig. 60.



Beschreibt man eine Kugel um den Koordinatenanfang O, auf deren Oberfläche der Punkt $M(x, y, z)$ liegt und zieht den Radiusvektor OM, so ist seine Länge gleich r:

$$OM = r.$$

Fällt man von M auf die xy-Ebene das Lot MP, so ist OP die Projektion von OM auf die xy-Ebene und θ der Winkel zwischen OM und der positiven Richtung der z-Axe Oz. Endlich ist ψ der Winkel, den OP mit der x-Axe bildet. Die xy-Ebene heifst die Äquatorebene des Polarkoordinatensystemes, z der *Pol*, θ die *Poldistanz* und ψ die *Länge* des Punktes M; θ läuft von 0 bis π, ψ von 0 bis 2π.

Projiziert man noch OP auf die x-Axe, indem man auf sie das Lot PQ fällt, so wird:

$$\begin{aligned} x &= OQ = OP \cos\psi = OM \sin\theta \cos\psi, \\ y &= PQ = OP \sin\psi = OM \sin\theta \sin\psi, \\ z &= PM = OM \cos\psi; \end{aligned}$$

d. h. wir haben

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta.$$

Eine Fläche ist durch eine, eine Kurve durch zwei Gleichungen zwischen r, θ, ψ gegeben.

Diesem Schema mögen einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

Ad I. *Raumkurven.*

Die Gleichungen 1 sind wieder Spezialfälle sowohl von 2. als von 3. Unter 3. erscheint die Kurve als Schnitt irgend zweier Flächen, unter 1. als Schnitt der Mäntel zweier Cylinder, deren Basiskurven in der xy-Ebene und in der xz-Ebene liegen.

Ad II. *Flächen.*

1. ist wieder ein Spezialfall von 2.

Wir betrachten auch die räumlichen Gebilde immer nur in der Umgebung einer Stelle, in der die zur Darstellung benutzten Funktionen nebst den vorkommenden Ableitungen stetig sind. Diese Voraussetzung, welche in Kapitel IV als Forderung $\mathfrak{B}$ eingeführt wurde, wird hier ein für alle Mal bei allen Entwickelungen des achten und neunten Kapitels als erfüllt angesehen, solange nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist. Aufserdem neu hinzukommende Voraussetzungen werden jedes Mal besonders namhaft gemacht.

§ 1. Tangente und Normalebene einer Kurve. — Normale und Tangentialebene einer Fläche.

An die Spitze dieses Paragraphen stellen wir die Forderung:

Forderung $\mathfrak{C}$. *Es seien*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

die Gleichungen der betrachteten Kurve. Die Forderung $\mathfrak{B}$ *ist erfüllt; aufserdem sind in der gerade betrachteten Stelle t die drei Funktionen* φ', ψ', χ' *nie gleichzeitig null.*

252. Tangente und Normalebene einer Kurve.

1. Die Gleichungen der Raumkurve seien:

(1) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

und dem Parameterwerte t entspreche der Punkt $M(x, y, z)$ der Kurve, dem Parameterwerte $t + \Delta t$ der Punkt $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ der Kurve. M_1 liege in der Umgebung von M. Seine Koordinaten ergeben sich aus (1), wenn man dort t durch $t + \Delta t$ ersetzt. Die Gleichungen der Sekante $\overline{MM_1}$ sind:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\eta - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}};$$

dabei bedeuten ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten der Sekante. Wird Δt null, so geschieht Gleiches mit $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ und M_1 rückt nach M hinein; die Sekante MM_1 wird zur Tangente in M. Gleichzeitig gehen die in den letzten Gleichungen auftretenden Differenzenquotienten über in die entsprechenden Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

Mithin werden die Gleichungen der Tangente:

(2) *Tangente:* $$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Dabei sind x', y', z' proportional den Kosinus der Winkel (α, β, γ), welche die Tangente mit den drei Axen bildet. Es ist also:

$$\frac{\cos\alpha}{x'} = \frac{\cos\beta}{y'} = \frac{\cos\gamma}{z'}.$$

Da aber

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist, so folgt:

(3) $$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Normalebene im Punkte M nennt man die Ebene, welche auf der Tangente in M senkrecht steht. Da die Gleichungen der Tangente durch (2) gegeben sind, so wird nach den Regeln der analytischen Geometrie die Normalebene:

(4) *Normalebene:* $$x'(\xi - x) + y'(\eta - y) + z'(\zeta - z) = 0.$$

2. Sind hingegen die Gleichungen der Raumkurve in der Form gegeben:

(1') $$y = f(x), \quad z = F(x),$$

so brauchen wir in den Formeln (2) nur $t = x$, $x' = 1$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$ zu setzen, um als Gleichungen der Tangente zu erhalten:

(2') *Tangente:* $$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x).$$

Aus (4) folgt durch dieselbe Substitution die Gleichung der Normalebene:

(4') *Normalebene:* $$(\xi - x) + \frac{dy}{dx}(\eta - y) + \frac{dz}{dx}(\zeta - z) = 0.$$

3. Sind endlich die Gleichungen der Raumkurve diese:

(1'') $$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

so erhalten wir nach Nr. 82 für dx, dy, dz die Bedingungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0 \\ F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0\,. \end{cases}$$

dx, dy, dz sind aber proportional $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, und diese Gröfsen sind nach (2) wieder proportional $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$; also werden die Gleichungen der Tangente:

$$(2'') \quad \textit{Tangente:} \quad \begin{cases} f'_x(\xi - x) + f'_y(\eta - y) + f'_z(\zeta - z) = 0 \\ F'_x(\xi - x) + F'_y(\eta - y) + F'_z(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Jede der Gleichungen (2″) stellt eine durch M gehende Ebene vor. Sie schneiden sich in einer bestimmten Geraden, sobald nicht gleichzeitig

$$(6) \qquad \frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y} = \frac{f'_z}{F'_z}$$

ist für die Koordinaten des Punktes M. Bestehen hingegen für die Koordinaten des Punktes M die zwei Gleichungen (6), so liefert uns unser Gleichungssystem (1″) keine bestimmte Tangente.

Wir nehmen an, dafs die Gleichungen (6) nicht erfüllt sind für die Koordinaten des Punktes M. Dann liefern die Gleichungen (5) die Verhältnisse der dx, dy, dz:

$$\frac{dx}{f'_y F'_z - f'_z F'_y} = \frac{dy}{f'_z F'_x - f'_x F'_z} = \frac{dz}{f'_x F'_y - f'_y F'_x};$$

hierdurch sind auch die Verhältnisse von $x' : y' : z'$ gegeben, und ihre Substitution in (4) giebt uns die Gleichung der Normalebene:

$$(4'') \quad (f'_y F'_z - f'_z F'_y)(\xi - x) + (f'_z F'_x - f'_x F'_z)(\eta - y) + (f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\zeta - z) = 0,$$

welche auch in die Determinantenform gesetzt werden kann:

$$\begin{vmatrix} \xi - x, & \eta - y, & \zeta - z \\ f'_x\ , & f'_y\ , & f'_z \\ F'_x\ , & F'_y\ , & F'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Noch ist zu bemerken, dafs immer nur eine der beiden Kurvengleichungen bei der Bildung je einer der Gleichungen (5) vorkommt; folglich hängt auch die Ebene, welche durch solch eine Gleichung bestimmt ist, immer nur von *einer* der Flächen ab, auf welcher die Kurve liegt. Im Folgenden wird diese Bemerkung weiter entwickelt werden.

253. Die Tangentenebene und die Normale einer Fläche. Eine Fläche, welche auf drei geradlinige Axen Ox, Oy, Oz bezogen ist, habe allgemein die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

in welcher x, y, z die Koordinaten irgend eines Flächenpunktes M bedeuten.

Ziehen wir auf der Fläche eine beliebige Kurve, welche durch den Punkt M geht, so kann diese Kurve als Schnitt der gegebenen Fläche mit einer zweiten betrachtet werden, und es sei

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung dieser zweiten Fläche. Die Tangente der Kurve im Punkte M wird nach Nr. 252 durch die beiden Gleichungen dargestellt:

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Die durch die Gleichung (3) definierte Ebene enthält demnach alle Tangenten, welche sich an all den verschiedenen Kurven in diesem Punkte konstruieren lassen, die auf der Fläche verlaufen und durch diesen Punkt hindurchgehen. Sie heifst die *Tangentenebene* der Fläche im Punkte M.

Wir setzen indessen voraus, dafs die Verhältnisse der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

im Punkte M nicht gleichzeitig verschwinden. Dies würde in einem *singulären Punkte* der Fläche eintreten; z. B. in dem Scheitel der Kegelflächen.

Normale der Fläche in einem bestimmten Punkte heifst die im Berührungspunkte auf der Tangentenebene senkrecht stehende Gerade. Jede durch die Normale gelegte Ebene heiſst eine *Normalebene*. Aus der Gleichung (3) folgen für die Normale die Gleichungen:

$$(5)\qquad \frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

254. Die Gröſsen p und q. Betrachtet man x und y als die unabhängigen Variabelen, und bezeichnet man das totale Differential von z mit

$$(6)\qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

wobei die partiellen Ableitungen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

bestimmt sind, so wird die Gleichung der Tangentenebene

$$(7)\qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

und die Gleichungen der Normalen bei rechtwinkligen Koordinaten

$$(8)\qquad (\xi - x) + p(\zeta - z) = 0, \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0.$$

255. Tangentialebene an eine Fläche von einem Punkte auſserhalb. Will man an die Fläche mit der Gleichung (1) von einem gegebenen auſserhalb der Fläche gelegenen Punkte mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 eine Tangentenebene legen, so genügt es zunächst, die Berührungspunkte zu bestimmen. Die Koordinaten dieses Punktes müssen die beiden Gleichungen erfüllen:

$$(9)\qquad \begin{gathered} f(x, y, z) = 0, \\ (x_0 - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (y_0 - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (z_0 - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{gathered}$$

Sie bestimmen auf der Fläche einer Kurve, die den Ort der gesuchten Punkte bildet. Verbindet man den gegebenen Punkt mit dem Berührungspunkte einer dieser Tangentenebenen und der Fläche, so wird die Gleichung dieser Geraden:

$$(10)\qquad \frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y - y_0} = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}.$$

Die Elimination der Koordinaten x, y, z zwischen diesen Gleichungen und den beiden vorigen liefert die Gleichung sie zusammenfallen.

Wenn der Punkt mit den Koordi
Geraden

$$x_0 = a z_0, \quad y_0 =$$

sich bewegt und dabei ins Unendlich
Stelle der zweiten Gleichung (9) die

$$(11) \qquad a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

Denn diese Gleichung drückt aus, daſs
Fläche in einem Punkte x, y, z der
parallel ist. Verbindet man (11) mit
Ort der Berührungspunkte eines der
schriebenen Cylinders, dessen Erzeug
chungen

$$\xi = a \zeta, \quad \eta =$$

definierten Geraden parallel sind. Die
ders haben die Gleichungen

$$(12) \qquad \xi - x = a(\zeta - z), \quad \eta -$$

und seine Gleichung ergiebt sich, we
x, y, z zwischen den Gleichungen (1), (11) und (12) eliminiert.

256. Homogene Koordinaten. Bezeichnet man die geradlinigen Koordinaten eines Punktes durch die Verhältnisse

$$\frac{x_1}{x_4}, \quad \frac{x_2}{x_4}, \quad \frac{x_3}{x_4},$$

so kann jede Gleichung

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

deren linke Seite eine homogene Funktion oder — wie man sagt — eine *Form* von x_1, x_2, x_3, x_4 ist, als Gleichung einer Fläche betrachtet werden. In ähnlicher Weise wie in Nr. 175 erhält man die Gleichung der Tangentenebene in der Form

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_4}-\frac{x_1}{x_4}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}+\left(\frac{\xi_2}{\xi_4}-\frac{x_2}{x_4}\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}+\left(\frac{\xi_3}{\xi_4}-\frac{x_3}{x_4}\right)\frac{\partial f}{\partial x_3}+\left(\frac{\xi_4}{\xi_4}-\frac{x_4}{x_1}\right)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,$$

wenn $\frac{\xi_1}{\xi_4}$, $\frac{\xi_2}{\xi_4}$, $\frac{\xi_3}{\xi_4}$ die variabelen Koordinaten bedeuten. Auf Grund der Eigenschaft der Formen wird aber die Gleichung (1) auch in der Gestalt

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$$

darstellbar, und die Gleichung der Tangentenebene läfst sich reduzieren; man erhält für sie

$$\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\xi_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+\xi_4\frac{\partial f}{\partial x_4}=0. \tag{2}$$

Desgleichen werden, wenn eine Kurve durch zwei homogene Gleichungen

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

definiert ist, die Gleichungen für die Tangente

$$\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\xi_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+\xi_4\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,$$
$$\xi_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+\xi_3\frac{\partial F}{\partial x_3}+\xi_4\frac{\partial F}{\partial x_4}=0.$$

Ist die Gleichung (1) algebraisch und vom Grade m und sind die vier partiellen Ableitungen von f nicht alle null, so wird die Gleichung (2) nur vom Grade $m-1$ in Bezug auf die Koordinaten des Berührungspunktes. Die Zahl m heifst die Ordnung der Fläche. Betrachtet man alle Tangentenebenen der Fläche, welche durch einen bestimmten Punkt $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0$ des Raumes gehen, so wird der Ort ihrer Berührungspunkte durch zwei Gleichungen definiert, von denen die eine vom m^{ten}, die andere vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade ist. Diese Kurve ist demnach im Allgemeinen von der Ordnung $m(m-1)$. Betrachtet man zwei verschiedene Punkte im Raume und konstruiert zu jedem den berührenden Kegel, so schneiden sich die Kurven, längs welcher diese Kegel die Fläche berühren, im Allgemeinen in $m(m-1)^2$ reellen oder imaginären Punkten; denn diese Punkte sind aus einer Gleichung m^{ten} Grades und zwei Gleichungen $m-1^{\text{ten}}$ Grades zu bestimmen. Die zu diesen Punkten gehörigen Tangentenebenen gehen durch die beiden Kegelspitzen und enthalten demnach die Verbindungsgerade. Mithin giebt es bei einer Fläche m^{ter} Ordnung im Allgemeinen $m(m-1)^2$ Tangentenebenen, die durch eine beliebige Gerade im Raum hindurchgehen. Diese Zahl heifst die *Klasse der Fläche.*

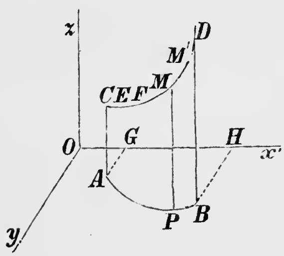
Für $m = 2$ folgt:

Die Flächen zweiter Ordnung sind auch von der zweiten Klasse und umgekehrt.

§ 2. Die Bogenlänge einer Raumkurve.

257. Definition der Bogenlänge. In derselben Weise wie bei den ebenen Kurven (Nr. 189) haben wir auch hier bei den räumlichen vorzugehen. Es sei CD der Bogen einer beliebigen Kurve, die wir auf drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz beziehen.

Fig. 61.



Es seien

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

die Gleichungen unserer Kurve und, wenn der Parameter t stetig wachsend von t_0 bis t_1 geht, möge der Punkt (x, y, z) stetig von C nach D den Bogen $\widehat{CD}$ entlang wandern. In dem Intervalle von t_0 bis t_1 seien φ, ψ, χ nebst ihren 1^{ten} Ableitungen φ', ψ', χ' stetig und φ', ψ', χ' mögen von t_0 bis t_1 ihr Zeichen nicht ändern. Es sei nun M irgend ein Punkt des Bogens $\widehat{CD}$, welcher dem Parameterwerte t entspricht, wo $t_0 < t < t_1$ ist. Spannen wir den Bogen $\widehat{CM}$ entlang einen Faden, so können wir ihn wieder geradlinig an einem Lineal ausspannen und so die Länge des Bogens $\widehat{CM}$ messen. Jedem Werte von t zwischen t_0 und t_1 wird so eine bestimmte Zahl entsprechen, welche die Länge des Bogens $\widehat{CM}$ mifst. Auf diese Weise wird die Bogenlänge $\widehat{CM}$ zu einer Funktion des Parameters t, deren genaue Definition in der Integralrechnung gegeben wird, und die wir, wie bei den ebenen Kurven, mit s bezeichnen:

$$s = \widehat{CM}.$$

Wir stellen uns die Aufgabe den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ zu ermitteln.

Zu dem Zwecke vermehren wir t um Δt und markieren den Punkt M', welcher dem Parameterwerte $t + \Delta t$ entspricht. Seine Koordinaten seien $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Ziehen wir nun die Sehne $\overline{MM'}$, so wird die Länge:

$$\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2},$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist. Daher wird:

$$\Delta s = \widehat{MM'} = \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \cdot \frac{\widehat{MM'}}{\overline{MM'}},$$

und mithin:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\widehat{MM'}}{\overline{MM'}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

In der Integralrechnung werden wir nun zeigen, daſs, wenn der Punkt M' nach M hineinrückt, das Verhältnis des Bogens zur Sehne den Grenzwert 1 erhält; es wird also für $\Delta t = 0$

$$(1) \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

der gesuchte Differentialquotient. Wir rekapitulieren:

Satz. Es seien

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

die Gleichungen einer Raumkurve und φ, ψ, χ nebst ihren ersten Ableitungen φ', ψ', χ' stetig in dem Intervalle von t_0 bis t_1. Endlich sollen φ', ψ', χ' in dem Intervalle ihr Zeichen nicht ändern. Entspricht nun dem Parameterwerte t_0 der Punkt C der Kurve, dem Parameterwerte t des Intervalles der Punkt M, so ist die Länge des Bogens $\widehat{CM}$ eine Funktion von t, deren Ableitung durch die Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

gegeben wird. Die Quadratwurzel ist dabei positiv zu nehmen.

Multipliziert man (1) mit dt, so erhält man das Differential der Bogenlänge:

$$(2) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ist x die unabhängige Variabele und sind also

$$y = f(x), \quad z = F(x)$$

die Kurvengleichungen, so wird

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{3}$$

258. Polarkoordinaten. Sind die Gleichungen der Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so wird nach Nr. 251:

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta,$$

also

$$dx = dr \sin\theta \cos\psi + r \cos\theta \cos\psi d\theta - r \sin\theta \sin\psi d\psi,$$

$$dy = dr \sin\theta \sin\psi + r \cos\theta \sin\psi\, d\theta + r \sin\theta \cos\psi d\psi,$$

$$dz = dr \cos\theta - r \sin\theta d\theta.$$

Erhebt man diese Gleichungen ins Quadrat und addiert sie, so folgt nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\psi^2}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich auch leicht direkt bilden. Denn in dem Polarsysteme werden die Punkte des Raumes durch den Schnitt dreier Flächensysteme bestimmt, nämlich *erstens:* der konzentrischen Kugeln, für welche r allgemein den Radius bezeichnet; *zweitens* der Rotationskegel mit der Axe Oz, für welche θ der erzeugende Winkel ist; *drittens* der Ebenen, welche durch die Axe Oz gehen, und für welche ψ die Neigung zur festen Ebene zOx angiebt. Betrachten wir nun einen krummlinigen Pyramidenstumpf, bei welchem zwei gegenüberliegende Eckpunkte mit den Endpunkten des Bogens Δs einer gegebenen Kurve zusammenfallen, und der durch die Kugel mit den Radien r und $r + \Delta r$, durch die Kegel mit den Winkeln θ und $\theta + \Delta\theta$, endlich durch die Ebenen mit den Winkeln ψ und $\psi + \Delta\psi$ bestimmt ist. Die Basis dieses Pyramidenstumpfs ist auf der Kugel mit dem Radius r ein Rechteck, das von vier Kreisbogen gebildet wird. Zwei gegenüberliegende Seiten sind Bogen gröfster Kreise und haben die Länge $r\Delta\theta$, die beiden anderen Seiten haben die Länge $r \sin\theta \Delta\psi$, und $r \sin(\theta + \Delta\theta) \Delta\psi$, endlich projiziert sich der Bogen Δs auf die Kugel längs einer Diagonale γ dieses

Rechteckes. Die drei Bogen $r\Delta\theta$, $r\sin\theta\Delta\psi$, γ haben zu ihren Sehnen ein Verhältnis, das an der Grenze d. h. für $\Delta\theta = 0$ gleich eins wird. Ferner bilden die beiden ersten Sehnen einen Winkel mit einander, der für $\Delta\theta = 0$ gleich $\frac{\pi}{2}$ wird; folglich ist

$$\gamma^2 = (r^2\,\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\Delta\psi^2)\,\varepsilon,$$

wo ε für $\Delta t = 0$ gleich eins wird. Desgleichen haben Δs und γ zu ihren Sehnen ein Verhältnis, das für für $\Delta\theta = 0$ gleich 1 wird, und der Winkel, den Δr mit der Sehne des Bogens γ bildet, wird für $\Delta\theta = 0$ gleich einem rechten; also ist

$$\Delta s^2 = (\gamma^2 + \Delta r^2)\,\varepsilon_1.$$

Die beiden Gleichungen ergeben also

$$\frac{\Delta s^2}{\Delta\theta^2} = \frac{\Delta r^2}{\Delta\theta^2}\,\varepsilon_1 + \left(r^2\sin^2\theta\,\frac{\Delta\psi^2}{\Delta\theta^2} + r^2\right)\varepsilon\,\varepsilon_1,$$

geht man zur Grenze über, so wird

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2\sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{d\theta^2} + r^2,$$

oder

$$ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\psi^2 + r^2\,d\theta^2,$$

wie oben gefunden wurde.

259. Richtungswinkel der Tangente. Die Winkel α, β, γ, welche die Tangente in dem einen oder andern Sinne ihrer Richtung mit den positiven Koordinatenaxen eines rechtwinkligen Systemes bildet, sind nach Nr. 252 proportional den Differentialen

$$dx,\ dy,\ dz;$$

bezeichnet nun s die Bogenlänge der Kurve von einem festen Anfangspunkte bis zum Punkte $M\ (x, y, z)$, so ist die Summe $dx^2 + dy^2 + dz^2$ gleich ds^2, und die Relation

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz}$$

giebt, da

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist:

$$(1)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Die Vorzeichen sind überall ganz bestimmte; dem entspricht, daſs durch diese Formeln ähnlich wie in Nr. 194 schon entschieden ist, welche von den beiden entgegengesetzt gleichen Richtungen der berührenden Geraden als *Richtung der Tangente* anzusehen ist, es ist das diejenige, für welche die unabhängige Veränderliche wächst.

§ 3. Krümmung einer Raumkurve.

An die Spitze dieses Paragraphen stellen wir die Forderung:

Forderung $\mathfrak{D}$. *Die Forderung* $\mathfrak{B}$ *ist erfüllt. Sind*

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ z = \chi(t)$$

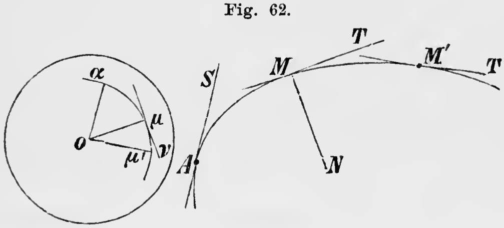
die Gleichungen der Raumkurve, so sind auſserdem die drei Ausdrücke:

$$y'z'' - y''z', \ z'x'' - z''x', \ x'y'' - x''y'$$

nie gleichzeitig null an der gerade betrachteten Stelle t.

260. Definition der Krümmung. Der Bogen AM einer Kurve werde von einem beweglichen Punkte in der Richtung von A nach M durchlaufen; als Richtung der Tangente in jedem Punkte fixieren wir die der Nr. 259. Aus dem Centrum einer Kugel, deren Radius gleich der Längeneinheit und deren Mittelpunkt ein beliebiger Punkt o ist, ziehen wir nun Radien parallel zu den Richtungen der Tangenten, die in den verschiedenen Punkten des Bogens AM konstruiert sind. Der Ort der Endpunkte dieser Radien ist eine sphärische Kurve, und die Länge $\alpha\mu = \sigma$ derselben, die dem Bogen $AM = s$ der gegebenen Kurve entspricht, heiſst die absolute *Krümmung* des Bogens AM.

Fig. 62.



Ist der Anfangspunkt A des Bogens AM fest, der Endpunkt M beweglich, so sind s und σ variabele Gröſsen. Das

Differential $d\sigma$ der Krümmung wird der *Kontingenzwinkel* der Kurve im Punkte M genannt.

Ist AM eine ebene Kurve, so ist $\alpha\mu$ der Bogen eines gröfsten Kreises, durch welchen der Winkel zwischen den Tangenten in den Endpunkten des Bogens AM gemessen wird. Die obigen Definitionen decken sich also bei ebenen Kurven mit den in Nr. 195 gegebenen.

Erteilt man nun dem Bogen s den Zuwachs $\Delta s = MM'$, so bekommt die Krümmung σ das Inkrement $\Delta\sigma = \mu\mu'$. Der Winkel i, den die Tangenten MT, $M'T'$ mit einander bilden, wird gleich $\mu o \mu'$ oder gleich dem Bogen des gröfsten Kreises $\mu\mu'$; folglich ist

$$\frac{i}{\Delta\sigma} = \frac{\text{Kreisbogen } \mu\mu'}{\text{Kurvenbogen } \mu\mu'} = \frac{\text{Kreisbogen } \mu\mu'}{\text{Sehne } \mu\mu'} \cdot \frac{\text{Sehne } \mu\mu'}{\text{Kurvenbogen } \mu\mu'}.$$

Die Quotienten auf der rechten Seite werden aber beide gleich 1, und folglich ist

$$\lim \frac{i}{\Delta\sigma} = 1.$$

Dies besagt: *Das Verhältnis zwischen dem Winkel, den die Tangenten in den Endpunkten eines verschwindenden Bogens bilden, und der Krümmung dieses Bogens hat den Grenzwert* 1.

Wie bei den ebenen Kurven nennen wir *mittleres Krümmungsmafs eines Kurvenbogens* das Verhältnis der absoluten Krümmung zur Bogenlänge. Demgemäfs wird das *Krümmungsmafs* oder schlechtweg die *Krümmung* der Kurve in einem Punkte M der Grenzwert der mittleren Krümmung eines verschwindenden Bogens, dessen einer Endpunkt M ist. *Krümmungsradius* ist der Radius eines Kreises, dessen Krümmung gleich der der Kurve im Punkte M ist.

Nach diesen Definitionen wird also die Krümmung der Kurve AM im Punkte M:

$$\lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds},$$

und der Krümmungsradius $R = \frac{ds}{d\sigma}$ wie bei den ebenen Kurven.

Hierzu mag noch Folgendes bemerkt werden.

Das Vorzeichen von ds ist nach Nr. 257 stets positiv, wenn die unabhängige Variabele wächst. Das von $d\sigma$ stimmt mit dem von $\Delta\sigma$ überein, sobald M' hinreichend nahe an M liegt. Mithin ist es positiv oder negativ, je nachdem der Winkel $\mu o \mu'$ positiv oder negativ ist; d. h. je nachdem bei der Bewegung von μ nach μ' der Punkt o zur Linken oder zur Rechten bleibt.

Die vorigen Betrachtungen setzen voraus, dafs auf dem Wege von A nach M $d\sigma$ nie null wird. Der Ausdruck (3) der nächsten Nummer zeigt, dafs dies durch die Forderung $\mathfrak{D}$ ausgeschlossen ist.

261. Der Krümmungsradius. Die Kurve AM sei auf drei rechtwinklige Axen bezogen und ihr Anfangspunkt O sei der Mittelpunkt der mit dem Radius 1 konstruierten Kugel. Mit x, y, z bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes M, mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtung MT der Tangente mit den positiven Koordinatenaxen bildet. Die Koordinaten des Punktes μ der sphärischen Kurve werden dann

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma,$$

und folglich wird die Ableitung $\frac{d\sigma}{dt}$ des Bogens dieser Kurve

$$\sigma' = \pm\sqrt{(\cos\alpha)'^2 + (\cos\beta)'^2 + (\cos\gamma)'^2}, \tag{1}$$

wo das Vorzeichen nach Nr. 260 zu bestimmen ist und die Ableitungen nach t durch Accente bezeichnet sind.

Man kann noch einen andern Ausdruck für σ' bilden. Differentiiert man die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'},$$

so wird

$$(\cos\alpha)' = \frac{x''}{s'} - \frac{x's''}{s'^2},$$

also

$$(\cos\alpha)'^2 = \left(\frac{x''}{s'}\right)^2 - \frac{2x'x''s''}{s'^3} + \left(\frac{x's''}{s'^2}\right)^2.$$

Ersetzt man hier x erst durch y, sodann durch z, so erhält man die Ausdrücke für $(\cos\beta)'^2$ und $(\cos\gamma)'^2$; und demnach wird

$$\sigma'^2 = \frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{s'^2} - 2\frac{s''}{s'^3}(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \frac{s''^2}{s'^4}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2$$

ergiebt aber durch Differentiation

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = s's'',$$

und nach Substitution dieser Werte erhält man:

$$\sigma' = \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}{s'}. \tag{2}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit s', und ersetzt dann s'^2 und $s's''$ durch ihre Werte als Funktionen der Koordinaten, so wird

$$\sigma' = \frac{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}}{s'^2},$$

was sich auch in der Form schreiben läfst:

$$\sigma' = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z''x' - z'x'')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{s'^2}. \tag{3}$$

Hier ist die unabhängige Variabele nicht näher bezeichnet. Wählt man aber den Bogen s als diese Variabele, so wird s'' null und die Gleichung (2) bekommt die einfachere Form:

$$\sigma' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Das Vorzeichen ist wieder nach Nr. 260 zu bestimmen. Ist $d\sigma = 0$, so ist auch $\frac{d\sigma}{dt} = 0$. Dann liefert (3):

$$y'z'' - y''z' = 0, \quad z'x'' - z''x' = 0, \quad x'y'' - x''y' = 0.$$

Also die gemeinsamen Wurzeln t der zwei Gleichungen

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} \tag{4}$$

liefern die Punkte t, welche zu Anfang dieses Paragraphen ausgeschlossen wurden.

Nach der Gleichung (3) erhält der Krümmungsradius R oder $\frac{ds}{d\sigma} = \frac{s'}{\sigma'}$ als Funktion der Koordinaten den Wert:

$$R = \frac{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}}{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}.$$

Diese Formel gilt, wie auch die unabhängige Variabele definiert sein mag.

262. Die Hauptnormale einer Raumkurve. Wir betrachten eine Raumkurve AM und die zugehörige sphärische Kurve $\alpha\mu$ (Fig. in Nr. 260). Durch den Punkt μ dieser letzteren Kurve legen wir die Tangente $\mu\nu$ und durch den entsprechenden Punkt M der gegebenen Kurve die Gerade MN parallel zu $\mu\nu$. Die Gerade MN heifst dann die *Hauptnormale* der Kurve AM im Punkte M. Die Richtung der Hauptnormalen ist die von μ nach ν.

Sind φ, ψ, χ die Winkel, welche die Richtung MN oder $\mu\nu$ mit den positiven Koordinatenaxen bildet, so wird, da $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Koordinaten des Punktes μ sind (Nr. 259):

$$(1)\qquad \cos\varphi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma},\quad \cos\psi = \frac{d\cos\beta}{d\sigma},\quad \cos\chi = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma},$$

oder:

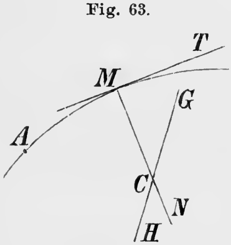
$$(2)\qquad \cos\varphi = R\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \cos\psi = R\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \cos\chi = R\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Wählt man den Bogen s als unabhängige Variabele, so kann man schreiben:

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\cos\varphi,\quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{R}\cos\psi,\quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{R}\cos\chi.$$

263. Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsaxe. Wenn man in einem Punkte M der Raumkurve AM die Tangente MT und die Hauptnormale MN zieht und den Kreis in der Ebene NMT konstruiert, dessen Radius der Krümmungsradius ist und der die Tangente MT in M derart berührt, dafs er mit den benachbarten Kurvenpunkten auf der nämlichen Seite der durch MT senkrecht zu NMT gelegten Ebene liegt, so wird das Centrum C dieses Kreises, welches auf der Hauptnormale MN liegt, der *Krümmungsmittelpunkt* des Punktes M genannt. Die Richtung MC ist die *Richtung des Krümmungsradius.* Errichtet man im Punkte C die Gerade GH senkrecht zu NMT, so heifst diese die *Krümmungsaxe;* wird dagegen das Lot auf der Ebene NMT im Kurvenpunkte M errichtet, so heifst dies die *Binormale.*

Fig. 63.



Lehrsatz. Es seien

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

die Gleichungen einer Raumkurve. Haben in der Umgebung einer Stelle t die Funktionen φ, ψ, χ und ihre ersten drei Ableitungen bestimmte endliche Werte, und ist an der betreffenden Stelle $\frac{d\sigma}{dt}$ nicht null, so gilt der Satz:

Die zu dem Kurvenpunkte gehörige Krümmungsaxe ist die Grenzlage des Schnittes der Normalebene mit einer benachbarten Normalebene.

Denn die Gleichung der Normalebene wird:

$$(1) \qquad (\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnen wir kurz mit $V = 0$. Die Normalebene in einem zweiten Kurvenpunkte wird erhalten, wenn man in der Gleichung (1) die Gröfsen

$$x,\ y,\ z,\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

durch

$$x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z,\ \cos\alpha + \Delta\cos\alpha,\ \cos\beta + \Delta\cos\beta,$$
$$\cos\gamma + \Delta\cos\gamma$$

ersetzt, und die so gebildete Gleichung werde durch $V + \Delta V = 0$ dargestellt. Bezeichnet t die unabhängige Variabele, so wird die Schnittgerade der beiden Normalebenen durch die Gleichungen

$$V = 0, \ \frac{\Delta V}{\Delta t} = 0$$

definiert. Mithin wird die Grenze, nach welcher diese Schnittgerade konvergiert, wenn der zweite Kurvenpunkt in den ersten hineinrückt, die Gerade, welche durch die Gleichungen

$$V = 0, \ \frac{dV}{dt} = 0,$$

definiert ist. Die eine dieser Gleichungen ist die Gleichung (1), die andere ergiebt sich, wenn man diese differentiiert, wobei ξ, η, ζ wie Konstante anzusehen sind; dies ergiebt:

$$(\xi - x)(\cos\alpha)' + (\eta - y)(\cos\beta)' + (\zeta - z)(\cos\gamma)'$$
$$- (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma) = 0,$$

oder wenn man die Formeln von Nr. 259 bis Nr. 262 beachtet:

$$(2)\qquad (\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = R.$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, die senkrecht zur Hauptnormale ist und deren Entfernung vom Punkte M gleich R oder MC ist. Zum Beweise des ausgesprochenen Lehrsatzes mufs man also nur noch zeigen, dafs die zu M benachbarten Kurvenpunkte zwischen der Ebene (2) und der zu ihr parallelen im Punkte M sich befinden. Diese letztere Ebene, welche übrigens *rektifizierende Ebene* genannt wird, ist durch die Gleichung

$$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = 0$$

bestimmt. Ersetzt man ξ, η, ζ durch die Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ eines zu M benachbarten Kurvenpunktes, und wählt man jetzt s zur unabhängigen Variabelen, so giebt der Ausdruck

$$(3)\qquad \begin{aligned}(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi \\ = \Delta x\cos\varphi + \Delta y\cos\psi + \Delta z\cos\chi\end{aligned}$$

den Abstand des Punktes $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ von der rektifizierenden Ebene. Hat dieser Ausdruck dasselbe Vorzeichen wie R, so liegen nach (2) auch die Kurvenpunkte in der Umgebung von M auf derselben Seite der rektifizierenden Ebene wie die Krümmungsaxe. Dies ist aber wirklich der Fall. Denn nach dem *Taylor*schen Satze wird:

$$\Delta x = x' \cdot \Delta t + \frac{x''}{2}(\Delta t)^2 + \frac{x_1'''}{3!}(\Delta t)^3,$$

wo x_1''' den Wert von x''' für eine Zahl zwischen t und $t + \Delta t$ bedeutet. Analoge Ausdrücke ergeben sich für Δy Δz, und eine leichte Rechnung ergiebt, wenn man diese Werte in den Ausdruck (3) einsetzt, als Abstand des Kurvenpunktes $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ von der rektifizierenden Ebene:

$$\frac{1}{2}\,\frac{s'}{R}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(x_1'''\cos\varphi + y_1'''\cos\psi + z_1'''\cos\chi)\cdot(\Delta t)^3.$$

Für hinreichend kleine Δt hat dieser Ausdruck dasselbe Zeichen wie $\frac{s'}{R} = \sigma'$, sobald dies nicht null ist, und also ist unser Satz erwiesen.

In den besonderen Punkten, für welche $R = \infty$ wird, liegt der Krümmungsmittelpunkt und die Krümmungsaxe unendlich weit; sie sind durch die Forderung $\mathfrak{D}$ ausgeschlossen.

Für die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Krümmungsmittelpunktes ergeben sich die Gleichungen:

$$(4)\quad x_1 - x = R\cos\varphi,\quad y_1 - y = R\cos\psi,\quad z_1 - z = R\cos\chi,$$

oder

$$x_1 - x = R^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad y_1 - y = R^2\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad z_1 - z = R^2\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Die Formeln (4) lehren, dafs die Richtung der Hauptnormalen mit der des Krümmungsradius übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, je nachdem R positiv oder negativ ist.

264. Richtung der Binormale. Bezeichnen wir mit λ, μ, ν die Winkel, welche die eine oder die andere der beiden Richtungen der Krümmungsaxe oder Binormale mit den positiven Koordinatenaxen bildet, so bestehen, da diese Gerade senkrecht zur Tangente und senkrecht zur Hauptnormale ist, und da auch diese letzteren zu einander senkrecht stehen, zwischen den Kosinus der neun Winkel

$$\alpha, \beta, \gamma;\quad \varphi, \psi, \chi;\quad \lambda, \mu, \nu$$

die bekannten Relationen, nämlich:

$$(1)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\quad \cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1;$$

$$(2)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\varphi + \cos^2\lambda = 1,\quad \cos^2\beta + \cos^2\psi + \cos^2\mu = 1,$$
$$\cos^2\gamma + \cos^2\chi + \cos^2\nu = 1;$$

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0, \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \\ \cos\varphi\cos\lambda + \cos\psi\cos\mu + \cos\chi\cos\nu = 0; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta + \cos\varphi\cos\psi + \cos\lambda\cos\mu = 0, \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\varphi\cos\chi + \cos\lambda\cos\nu = 0, \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\psi\cos\chi + \cos\mu\cos\nu = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad\begin{cases}\cos\lambda = \pm(\cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi),\\ \cos\mu = \pm(\cos\gamma\cos\varphi - \cos\alpha\cos\chi),\\ \cos\nu = \pm(\cos\alpha\cos\psi - \cos\beta\cos\varphi);\\[1ex] \cos\varphi = \pm(\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta),\\ \cos\psi = \pm(\cos\nu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\gamma),\\ \cos\chi = \pm(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha);\\[1ex] \cos\alpha = \pm(\cos\psi\cos\nu - \cos\chi\cos\mu),\\ \cos\beta = \pm(\cos\chi\cos\lambda - \cos\varphi\cos\nu),\\ \cos\gamma = \pm(\cos\varphi\cos\mu - \cos\psi\cos\lambda);\end{cases}$$

$$(6)\quad \cos\lambda(\cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi) + \cos\mu(\cos\gamma\cos\varphi - \cos\alpha\cos\chi) + \cos\nu(\cos\alpha\cos\psi - \cos\beta\cos\varphi) = \pm 1.$$

In den zehn Gleichungen (5) und (6) müssen entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen gewählt werden. Dieselben beziehen sich auf die eine oder die andere Richtung der Krümmungsaxe.

In den vorhergehenden Paragraphen sind die Ausdrücke für die Kosinus der Winkel α, β, γ und φ, ψ, χ als Funktionen des Parameters t gegeben. Die drei ersten Gleichungen (5) lassen auch die Kosinus der Winkel λ, μ, ν in derselben Weise ausdrücken. Die erste dieser Gleichungen läfst sich, ohne dafs die unabhängige Variabele fixiert wird, schreiben:

$$\cos\lambda = \pm\frac{1}{s'\sigma'}\left(y'\left(\frac{z'}{s'}\right)' - z'\left(\frac{y'}{s'}\right)'\right) = \pm R\,\frac{y'z'' - y''z'}{s'^3},$$

und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man das Gleichungssystem:

$$(7)\quad\begin{cases}\cos\lambda = \pm R\,\dfrac{y'z'' - z'y''}{s'^3},\\[2ex] \cos\mu = \pm R\,\dfrac{z'x'' - x'z''}{s'^3},\\[2ex] \cos\nu = \pm R\,\dfrac{x'y'' - y'x''}{s'^3}.\end{cases}$$

265. Differenz zwischen Kurvenbogen und Sehne. Einen sehr bemerkenswerten Ausdruck für die Differenz zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne erhält man, wenn man die Krümmungsradien in den Endpunkten des Bogens einführt.

Diese Rechnung möge hier Platz finden als eine interessante Anwendung der gewonnenen Resultate.

Es sei s die Länge des Bogens, gerechnet von einem willkürlichen Anfangspunkt, x, y, z seien die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes; die Gröfse s werde als unabhängige Variabele genommen, R bezeichne den Krümmungsradius im Endpunkt. Dann ist

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Durch Differentiation der Gleichung (1) folgt:

$$(3) \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Differentiiert man diese Gleichung von Neuem, so erhält man unter Berücksichtigung von (2):

$$(4) \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3} = -\frac{1}{R^2}.$$

Die Differentiation von (2) ergiebt ferner:

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3} = \frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds},$$

und endlich die Gleichung (4) auf Grund von (5):

$$(6) \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} + \frac{dy}{ds}\frac{d^4y}{ds^4} + \frac{dz}{ds}\frac{d^4z}{ds^4} = -\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}.$$

Sind Δx, Δy, Δz die Inkremente von x, y, z, wenn s um Δs wächst, so hat man nach der *Taylor*schen Entwickelung:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{ds^3}\Delta s^2 + \frac{1}{24}\frac{d^4x}{ds^4}\Delta s^3 + \varepsilon_4.$$

ε_4 bezeichnet eine Gröfse, die mit Δs von mindestens 4ter Ordnung null wird. Die in den folgenden Formeln auftretenden Gröfsen ε_4 werden ebenfalls sämtlich mit Δs von mindestens 4ter Ordnung null, sie sind aber von Formel zu Formel verschiedene Funktionen von Δs. Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, so erhält man

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s + \left[\frac{1}{3}\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\right]\Delta s^2$$
$$+ \left[\frac{1}{12}\frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} + \frac{1}{6}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}\right]\Delta s^3 + \varepsilon_4.$$

Hieraus gewinnt man die Werte von $\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2$ und $\left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2$, wenn man y und z an Stelle von x schreibt; addiert man alsdann diese drei Gleichungen, so folgt auf Grund der früheren Gleichungen:

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta s^2} = 1 - \frac{1}{12}\cdot\frac{\Delta s^2}{R^2} - \frac{1}{24}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\cdot\Delta s^3 + \varepsilon_4.$$

Zieht man gemäſs der Binomialformel die Quadratwurzel aus, so wird

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\frac{\Delta s^2}{R^2} + \frac{1}{24}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\Delta s^3 + \varepsilon_4\right) + \cdots$$

oder

$$(7) \quad \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \frac{1}{24}\frac{\Delta s^2}{R^2} - \frac{1}{48}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\Delta s^3 + \varepsilon_4.$$

Diese letzte Gleichung kann noch auf eine andere Weise geschrieben werden. R bezeichnet den Krümmungsradius im Endpunkte des Bogens s, also im Anfangspunkte von Δs; mit R_1 werde der Krümmungsradius im Endpunkte des Bogens Δs bezeichnet. Die Differenz der Gröſsen

$$\frac{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}}{\Delta s} \quad \text{und} \quad \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}$$

wird mit Δs null, und substituiert man die erste derselben in die Gleichung (7) an Stelle der zweiten, so wird dadurch nur die Gröſse ε_4 geändert. Es ist demnach

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = 1 - \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta s^2}{48} + \varepsilon_4.$$

Multipliziert man endlich beide Seiten mit Δs, so wird

$$(8) \quad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta s - \frac{1}{48}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2}\right)\Delta s^3 + \varepsilon_5;$$

ε_5 wird mit Δs mindestens von der fünften Ordnung null.

Die Differenz zwischen einem Bogen Δs und seiner Sehne ist also gleich

$$\frac{1}{48}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1{}^2}\right)\Delta s^3$$

bis auf eine Gröfse, die mit Δs^5 multipliziert ist. Dabei bedeuten R und R_1 die Krümmungsradien in den Endpunkten von Δs.

Wir wenden die Gleichung (8) auf den Bogen eines Kreises vom Radius 1 an. Ist $\Delta s = 2a$, so ist

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} = 2\sin a,$$

und die Formel (8) giebt:

$$\sin a = a - \frac{a^3}{6} + \varepsilon_5.$$

266. Ordnung der Berührung einer Kurve und Fläche. Es sei

(1) $$z = F(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche. Für $x = x_0$, $y = y_0$ möge $z = z_0$ werden; dann ist $M(x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt der Fläche. In der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ möge $F(x, y)$ nebst seinen sämtlichen Ableitungen bis zur $n+1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliefslich stetig sein.

Es seien zweitens

(2) $$y = f(x), \quad z = F(x)$$

die Gleichungen einer Raumkurve; für $x = x_0$ werde $y = y_0$ und $z = z_0$. Dann ist M auch ein Punkt der Raumkurve; in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ sollen f und F nebst ihren $n+1$ ersten Ableitungen bestimmte endliche Werte haben.

Wir betrachten nun den Cylinder

(3) $$y = f(x)$$

und fragen nach der Schnittkurve dieses Cylinders mit der Fläche (1). Nennen wir z_1 die z-Koordinate dieser Schnittkurve, so wird

$$z_1 = F(x, f(x)) = G(x)$$

nebst seinen $n+1$ ersten Ableitungen, die nach der Regel der Nr. 71 zu bilden sind, stetig in der Umgebung der Stelle $x = x_0$. Für $x = x_0$ selbst wird $z_1 = z_0$, da die Fläche (1) und die Raumkurve (2) den Punkt $M(x_0, y_0, z_0)$ gemein haben. Entwickeln wir daher $G(x)$ nach dem *Taylor*schen Satze, so wird:

$$(4)\quad z_1 = G(x_0) + \frac{G'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{G^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Dabei bedeutet x_1 eine Zahl zwischen x_0 und x, und es ist:

$$G(x_0) = z_0 = F(x_0, y_0) = F(x_0).$$

Wir bilden nun die Differenz $z - z_1$ zwischen der z-Ordinate $z = F(x)$ unserer Raumkurve (2) und die der z_1-Koordinate der Schnittkurve von unserer Fläche (1) und des Cylinders (3). Ihr absoluter Wert giebt den Abschnitt des Lotes z an, welcher zwischen der Fläche (1) und der Raumkurve (2) enthalten ist. Aus der zweiten Gleichung (2) folgt:

$$(5)\quad z = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(x_2)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

und es ist wieder x_2 eine Zahl zwischen x_0 und x. Subtrahieren wir (4) von (5), so erhalten wir den gesuchten Wert:

$$(6)\qquad z - z_1 = \frac{F'(x_0) - G'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{F^{(n)}(x_0) - G^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(x_2) - G^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ist nun k eine ganze positive Zahl, kleiner als n, so kann es vorkommen, dafs die k ersten Potenzen von $(x - x_0)$ in der Entwickelung (6) fortfallen, aber nicht mehr die $k + 1^{\text{ten}}$, so dafs

$$(7)\quad F'(x_0) = G'(x_0), \ldots, F^{(k)}(x_0) = G^{(k)}(x_0);\ F^{(k+1)}(x_0) \neq G^{(k+1)}(x_0)$$

wird. Dann wird die Differenz $z - z_1$ für $x = x_0$ null von der $k + 1^{\text{ten}}$ Ordnung, und man hat:

$$(8)\qquad z - z_1 = \frac{F^{(k+1)}(x_0) - G^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} + \cdots$$
$$+ \frac{F^{(n+1)}(x_1) - G^{(n+1)}(x_2)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Wir sagen in diesem Falle, dafs die Fläche (1) *und die Raumkurve* (2) *sich im Punkte M in der* k^{ten} *Ordnung berühren.*

Ist $k = 0$, so *schneidet* die Kurve (2) die Fläche (1) im Punkte M. Ist $k = 1$, so wird die Tangentialebene an die Fläche (2) im Punkte M:

$$(9)\quad \zeta - z_0 = F_x'(x_0, y_0) \cdot (\xi - x_0) + F_y'(x_0, y_0) \cdot (\eta - y_0).$$

Dagegen wird die Tangente an die Raumkurve im Punkte M:

$$(10)\quad \eta - y_0 = f'(x_0) \cdot (\xi - x_0), \quad \zeta - z_0 = F'(x_0) \cdot (\xi - x_0).$$

Da aber $k = 1$ ist, so wird:

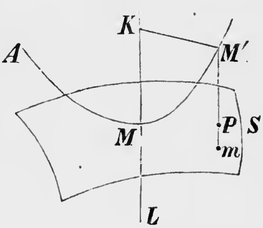
$$(11)\quad F'(x_0) = G'(x_0) = \{F_x'(x, y) + F_y'(x, y) \cdot y'\}_{x = x_0,\, y = y_0}$$
$$= F_x'(x_0, y_0) + F_y'(x_0, y_0) \cdot f'(x_0).$$

Mithin wird die Gleichung (9) identisch erfüllt von allen Werten ξ, η, ζ, welche (10) erfüllen. *Im Falle der Berührung erster Ordnung liegt also die Tangente der Raumkurve* (2) *in der Tangentialebene der Fläche* (1).

Wir wollen nun die allgemeine Definition der Berührung k^{ter} Ordnung uns geometrisch veranschaulichen.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Figur 64 und legen den Koordinatenanfang in den Punkt M, dann ist:

Fig. 64.



$$x_0 = y_0 = z_0 = F(x_0) = G(x_0) = 0.$$

Die Tangentialebene der Fläche (1) machen wir zur xy-Ebene; dann wird:

$$F_x'(x_0, y_0) = 0, \quad F_y'(x_0, y_0) = 0,$$

und mithin nach (11) auch:

$$F'(x_0) = G'(x_0) = 0.$$

Es wird daher einmal nach (5)

$$(12)\quad F(x) = \frac{F''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{F^{(n+1)}(x_2)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

und sodann wird die Gleichung (8):

$$(13)\quad z - z_1 = c_{k+1} \cdot x^{k+1} + \cdots + c_n x^n + \varphi(x) \cdot x^{n+1};$$

dabei bedeuten $c_{k+1} \ldots c_n$ Konstante, deren erste von null verschieden ist und $\varphi(x)$ eine Funktion von x, welche in der Umgebung der Stelle $x = 0$ bestimmte endliche Werte hat.

Die geometrische Bedeutung der Gleichung (12) ist jetzt evident. Ist $M'(x, y, z)$ in Fig. 64 ein Punkt der Raumkurve, welcher in der Umgebung des Punktes M liegt, so ist z_1 sein

Abstand von der Tangentialebene in M. Ist m der Schnittpunkt des von M' auf die Tangentialebene gefällten Lotes mit der Fläche (1), so ist z der Abstand des Punktes m von der Tangentialebene. Also wird $z - z_1$ der Abstand der Punkte m und M' von einander und wir erhalten:

(14) $M'm = x^{k+1}\{c_{k+1} + c_{k+2}x^{k+2} + \cdots + c_n x^{n-k-1} + \varphi(x)x^{n-k}\}$.

Andrerseits wird der Abstand $M'K$ des Punktes M' von der Flächennormale in M gleich $\sqrt{x^2+y^2}$, wo $y = F(x)$ zu setzen ist. Nach (12) wird daher

$$M'K^2 = x^2 + y^2 = x^2 + F(x)^2 = x^2 + \psi(x)\cdot x^4,$$

wo $\psi(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ bestimmte endliche Werte hat. Mithin wird

$$\frac{M'K^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = 1 + \psi(x)\cdot x^2,$$

und mithin

$$\lim_{x=0} \frac{x^2+y^2}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{M'K^2}{x^2} = 1.$$

Also ist auch:

$$\lim_{x=0} \frac{M'K}{x} = 1.$$

Da demnach mit x auch $M'K$ verschwindet, so können wir auch schreiben:

$$\lim_{M'K=0} \frac{M'K}{x} = 1.$$

Nach (14) wird aber:

$$\lim_{x=0} \frac{M'm}{x^{k+1}} = c_{k+1}.$$

Also wird auch

$$\lim_{M'K=0} \frac{M'm}{(M'K)^{k+1}} = c_{k+1}$$

endlich und von null verschieden; d. h. $M'm$ wird mit $M'K$ von der $k+1^{\text{ten}}$ Ordnung null.

Mithin haben wir eine rein geometrische Definition der Berührung k^{ter} Ordnung gewonnen:

Die Fläche (1) *und die Raumkurve* (2) *mögen den Punkt M gemein haben. Das Lot von einem M benachbarten Punkte M′ der Raumkurve auf die Tangentialebene an die Fläche in M schneide* *die Fläche im Punkte m; der Abstand des Punktes M' von der Flächennormalen in M sei M'K. Alsdann haben die Fläche* (1) *und die Raumkurve* (2) *eine Berührung* k^{ter} *Ordnung in M, wenn die Länge M'm mit M'K von der* $k+1^{\text{ten}}$ *Ordnung null wird.*

267. Oskulierende Flächen. Betrachten wir statt einer Fläche (1) eine Schar von solchen, deren Gleichung $m+1$ willkürliche Konstante enthält:

$$(1') \qquad z = F(x, y;\ a_1, a_2, \ldots a_{m+1})$$

und behalten unsere Raumkurve (2) bei, so können wir wieder $y = f(x)$ in (1') einsetzen und erhalten so wie in (3):

$$(3') \qquad z_1 = F(x, f(x);\ a_1 \ldots a_{m+1}) = G(x;\ a_1 \ldots a_{m+1}).$$

Entwickeln wir, indem wir die Voraussetzungen der vorigen Nummer beibehalten, z_1 wieder nach Potenzen von $x - x_0$, so wird

$$(4') \quad z_1 = C_0 + C_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + C_n \cdot (x - x_0)^n + \varphi(x) \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

wo

$$C_k = \frac{1}{k!}\, G^{(k)}(x_0;\ a_1 \ldots a_{m+1})$$

ist. Hingegen wird die Entwickelung (5) der vorigen Nummer:

$$(5) \quad z = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + c_n (x - x_0)^n + \psi(x) \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

wobei zur Abkürzung

$$c_k = \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}$$

gesetzt ist. Wir nehmen an, daſs $n > m + 1$ ist.

Die Entwickelung (5) giebt eine z-Koordinate unserer festgegebenen Raumkurve; ihre Koeffizienten c sind feste Zahlen. Die Entwickelung (4') giebt die z-Koordinaten der Punkte, in welchen die z-Koordinate unserer Raumkurve eine jede Fläche der Schar schneidet; ihre Koeffizienten C sind daher Funktionen von den willkürlichen Gröſsen $a_1 \ldots a_{m+1}$:

$$\begin{aligned} C_0 &= g_0(a_1 \ldots a_{m+1}) \\ C_1 &= g_1(a_1 \ldots a_{m+1}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ C_m &= g_m(a_1 \ldots a_{m+1}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun die a so bestimmen, dafs

$$(6) \qquad \begin{cases} g_0(a_1 \ldots a_{m+1}) = C_0 = c_0 \\ g_1(a_1 \ldots a_{m+1}) = C_1 = c_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_m(a_1 \ldots a_{m+1}) = C_m = c_m \end{cases}$$

wird. Dies sind $m+1$ Gleichungen zur Bestimmung der $m+1$ Gröfsen a. Im Allgemeinen reichen diese zur Berechnung der Unbekannten $a_1 \ldots a_{m+1}$ aus. Setzen wir die gefundenen Lösungen in den Ausdruck

$$C_{m+1} = g_{m+1}(a_1 \ldots a_{m+1})$$

ein, so wird C_{m+1} nun seinerseits bestimmt, und es wird im Allgemeinen nicht mehr

$$(7) \qquad C_{m+1} = c_{m+1}$$

werden. Den gewählten Werten der a entspricht dann eine bestimmte Fläche unserer Schar (1′), welche unsere gegebene Raumkurve in $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung und daher in so hohem Grade als möglich berührt. Wir definieren nun:

Definition. Eine Fläche aus einer Flächenschar, welche eine gegebene Raumkurve in so hoher Ordnung als möglich berührt, heisst eine oskulierende Fläche der Schar.

Stimmen z. B. alle Koeffizienten der Entwickelungen (4′) und (5) überein, so liegt die Kurve ganz in der Fläche; die Fläche berührt sie in unendlich hoher Ordnung. So ist die oskulierende Ebene einer ebenen Kurve die Ebene, in welcher die Kurve liegt. Ferner lehrt das Vorige:

Eine oskulierende Fläche aus einer Flächenschar, deren Gleichung $m+1$ willkürliche Parameter enthält, berührt eine gegebene Raumkurve in einem gegebenen Punkte im Allgemeinen in der m^{ten} Ordnung. Es wird dies nämlich dann und nur dann eintreten, wenn es nur solche Wertsysteme $(a_1 \ldots a_{m+1})$ giebt, welche zwar die $m+1$ Gleichungen (6) *erfüllen, aber nicht mehr die Gleichung* (7).

Wir behandeln im Folgenden als Anwendung die oskulierende Ebene und oskulierende Kugel einer Raumkurve, welche auch Schmiegungsebene und Schmiegungskugel genannt werden.

268. Schmiegungsebene. Die Gesamtheit aller Ebenen bildet eine Schar von Flächen, welche von $m+1=3$ willkürlichen Parametern abhängt. Man wird daher erwarten können, daſs man für eine gegebene Raumkurve in einem gegebenen Punkt eine in zweiter Ordnung berührende Ebene als oskulierende Ebene erhält.

In der That seien

$$(2) \qquad y = f(x), \quad z = F(x)$$

wieder die Gleichungen der gegebenen Raumkurve und $M(x_0, y_0, z_0)$ der Punkt der Raumkurve, in welchem wir die Schmiegungsebene konstruieren wollen. Dann ist:

$$(3) \qquad y_0 = f(x_0), \quad z_0 = F(x_0).$$

Die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt M geht, ist:

$$(1) \qquad z - z_0 = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0).$$

Eine z-Koordinate unserer Raumkurve schneidet sie in einem Punkte, dessen z-Koordinate z_1 sich berechnet aus

$$z_1 - z_0 = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (f(x) - f(x_0)),$$

oder

$$(4) \quad z_1 - z_0 = [a + b \cdot f'(x_0)]\,(x - x_0) + \frac{b}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{b}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots$$

Den Bau der fortgelassenen und nur durch Punkte bezeichneten Glieder erkennt man aus der mit (4′) bezeichneten Gleichung der vorigen Nummer. Er geht uns hier nichts an. Andrerseits wird die z-Koordinate der Raumkurve nach Gleichung (5) der vorigen Nummer:

$$(5) \quad z - z_0 = F'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} F'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \cdots$$

Wir bestimmen nun a und b so, daſs

$$(6) \qquad a + b \cdot f'(x_0) = F'(x_0), \quad b \cdot f''(x_0) = F''(x_0)$$

wird; dies geht immer, wenn $f''(x_0)$ nicht null ist. Da die z- und y-Koordinate gleich berechtigt sind, kann man immer annehmen, daſs $f''(x_0)$ nicht null ist, wenn nicht $f''(x_0)$ und $F''(x_0)$ beide null sind. Ist dies nicht der Fall, so bestimmen

$$b = \frac{F''(x_0)}{f''(x_0)} \quad \text{und} \quad a = \frac{F'(x_0) f''(x_0) - F''(x_0) f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

die Schmiegungsebene, und diese berührt in der zweiten Ordnung, wenn nicht

$$\frac{F''(x_0)}{f''(x_0)} = \frac{F'''(x_0)}{f'''(x_0)}$$

wird. Nach (1) wird ihre Gleichung:

$$f''(x_0)(z - z_0) = [F'(x_0) f''(x_0) - F''(x_0) f'(x_0)] (x - x_0) \\ + F''(x_0) \cdot (y - y_0).$$

Schreiben wir x, y, z für x_0, y_0, z_0 und ξ, η, ζ für x, y, z, so sieht die Gleichung so aus:

$$(7) \quad \frac{d^2y}{dx^2}(\zeta - z) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)(\xi - x) + \frac{d^2z}{dx^2}(\eta - y).$$

Sie liefert uns wirklich die Gleichung einer Ebene, wenn nicht im Punkte M gerade y'' und z'' verschwinden.

Sind die Gleichungen der Raumkurve in der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

gegeben, so wird, wenn die Accente Ableitungen nach t bedeuten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'}{x'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x'z'' - x''z'}{x'^2},$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y'z'' - y''z'}{x'^2},$$

und mithin wird

$$(8) \quad (y'z'' - y''z')(\xi - x) + (z'x'' - z''x') \cdot (\eta - y) \\ + (x'y'' - x''y')(\zeta - z) = 0$$

die Gleichung der Schmiegungsebene, sobald im Punkte $M(x, y, z)$ nicht gleichzeitig

$$y'z'' - y''z' = 0, \quad z'x'' - z''x' = 0, \quad x'y'' - x''y' = 0$$

wird. Unter dieser Annahme wird das Lot auf der Schmiegungsebene

$$\frac{\xi - x}{y'z'' - y''z'} = \frac{\eta - y}{z'x'' - z''x'} = \frac{\zeta - z}{x'y'' - x''y'}$$

nach Nr. 264, Gleichung (7) die *Binormale*. Also sehen wir:

Die Schmiegungsebene ist die durch Tangente und Hauptnormale gelegte Ebene; d. h. die Ebene des Krümmungskreises.

Übrigens läſst sich ihre Gleichung (8) auch in die Determinantenform setzen:

$$\begin{vmatrix} \xi - x, & \eta - y, & \zeta - z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

269. Andere Definition der Schmiegungsebene. *Die Schmiegungsebene in einem Punkte M einer Kurve ist die Grenze, nach welcher eine Ebene konvergiert, die durch den Punkt M und zwei andere Kurvenpunkte $M' M''$ gelegt ist, wenn diese nach M hineinrücken.*

Ist wiederum t die unabhängige Variabele, und sind die Koordinaten der Kurvenpunkte durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

definiert, werden ferner die Werte der Variabelen, welche den Punkten M, M', M'' entsprechen, mit t, $t + h_1$, $t + h_2$ bezeichnet, so ist die Bedingung, daſs die Ebene

$$a\xi + b\eta + c\zeta - p = 0$$

durch den Punkt M geht:

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c\chi(t) - p = 0.$$

Bezeichnen wir den Ausdruck links mit $F(t)$, so werden die Bedingungen, daſs die Ebene die drei Punkte M, M', M'' enthält:

$$F(t) = 0, \quad F(t + h_1) = 0, \quad F(t + h_2) = 0.$$

Läſst man die beiden Gröſsen h_1 und h_2 null werden, so reduziert sich dieses System nach Nr. 66 auf

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0.$$

Zur Bestimmung der Konstanten a, b, c, p erhält man also die Relationen:

$$\begin{aligned} ax + by + cz - p &= 0, \\ ax' + by' + cz' &= 0, \\ ax'' + by'' + cz'' &= 0, \end{aligned}$$

wodurch die Schmiegungsebene definiert ist.

Bemerkung. Man definiert auch von vornherein die Oskulationsebene vermittelst einer der beiden zuletzt bewiesenen

Lehrsätze. Die Hauptnormale kann dann definiert werden als die Schnittlinie der Normalebene mit der oskulierenden.

§ 4. Torsion einer Raumkurve.

An die Spitze dieses und des folgenden Paragraphen stellen wir die Forderung:

Forderung 𝔈. *Die Forderung* 𝔇 *sei erfüllt; aufserdem sei in der Umgebung der betrachteten Stelle t, solange das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt ist, der Ausdruck*

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

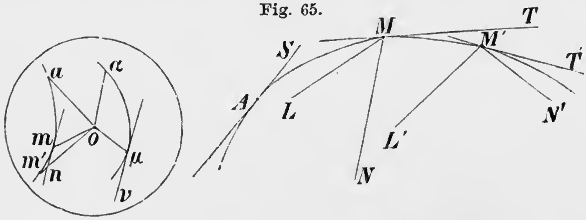
$$x''(y'''z' - y'z''') + y''(z'''x' - z'x''') + z''(x'''y' - x'y''')$$

nicht null.

270. Definition der Torsion. Die Änderung der Tangentenrichtung beim Übergange von einem Kurvenpunkt zu einem andern hat uns zu dem Begriffe der Krümmung geführt. Bei den Raumkurven aber hat man noch eine andere Eigentümlichkeit zu betrachten, *die Torsion oder zweite Krümmung*, von welchen der Name *Kurven doppelter Krümmung* herrührt. Die Torsion eines Kurvenbogens ergiebt sich aus der Änderung in der Stellung der Oskulationsebene, oder der Krümmungsaxe, beim Übergange von dem einen Ende des Bogens zum andern. Zu ihrer präzisen Definition müssen wir dieselben Betrachtungen wie bei der ersten Krümmung anwenden.

Es sei AM ein Kurvenbogen, MT die Richtung der Tangente in M, MN die der Hauptnormalen und ML die

Fig. 65.



eine oder andere der beiden Richtungen der Binormale. Die Richtung der Tangente ist hierbei in jedem Punkte des

Bogens AM ebenso bestimmt, wie in Nr. 259. Wir konstruieren eine Kugel mit beliebigem Mittelpunkt O, deren Radius gleich der Einheit ist, und ziehen die Radien, welche parallel sind den Tangenten in den verschiedenen Punkten des Bogens AM; ihre Endpunkte bestimmen auf der Kugel die Kurve $\alpha\mu$, deren Länge die erste absolute Krümmung des Bogens AM mifst. Sodann ziehen wir durch den Mittelpunkt O derselben Kugel die Durchmesser, welche den Binormalen in den verschiedenen Punkten des Bogens AM parallel sind. Die Endpunkte dieser Durchmesser werden auf der Kugel zwei symmetrische Kurvenbogen bestimmen. Ist am einer dieser Bogen, so heifst seine Länge τ die *absolute Torsion* oder zweite Krümmung des Bogens AM.

Ist der Endpunkt A des Bogens AM fest und M beweglich, so wird die Torsion τ variabel. Das Differential $d\tau$ heifst der *Torsionswinkel* im Punkte M oder der *Kontingenzwinkel in Bezug auf die zweite Krümmung.*

Ist $MM' = \Delta s$ ein Zuwachs des Bogens s und j der Winkel, den die Oskulationsebene des Punktes M mit der Oskulationsebene in M' bildet, so bestimmen die Endpunkte der Radien Om, Om', parallel zu den Loten dieser Ebenen, auf der sphärischen Kurve den Bogen $\Delta\tau$, der nach unserer Definition die Torsion des Bogens MM' ist. Nach dem bei der ersten Krümmung in Nr. 260 angewandten Verfahren kann man beweisen, dafs

$$\lim \frac{j}{\Delta\tau} = 1$$

wird; d. h. das Verhältnis des Winkels der Oskulationsebenen in den Endpunkten eines Bogens zur Torsion dieses Bogens hat, wenn der Bogen null wird, die Einheit zur Grenze.

Mittlere Torsion eines Kurvenbogens ist das Verhältnis der absoluten Torsion zur Bogenlänge. Endlich nennen wir Mafs der Torsion oder der zweiten Krümmung, oder auch schlechtweg *Torsion der Kurve in einem bestimmten Punkte* die Grenze, nach welcher die mittlere Torsion eines Kurvenbogens konvergiert, der diesen Punkt zum Anfang hat, wenn die Bogenlänge null wird. Demnach hat die Torsion im Punkte M der Kurve AM den Wert:

$$\lim \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \text{ oder } \frac{d\tau}{ds}.$$

Auch diese zweite Krümmung kann man der Krümmung eines Kreises gleichsetzen. Demnach nennt man *Torsionsradius* den Radius eines Kreises, dessen Krümmung gleich der Torsion der Kurve in dem betrachteten Punkte ist. Für den Wert T derselben erhält man

$$T = \frac{ds}{d\tau} = \frac{s'}{\tau'}.$$

Hinsichtlich des Vorzeichens von $d\tau$ gelten analoge Bemerkungen wie in Nr. 260 über das von $d\sigma$. Die Betrachtungen setzen voraus, dafs $d\tau$ auf dem Wege von a bis m auf der Einheitskugel nie null, also T nicht unendlich wird. Die Formel (1) der Nr. 274 lehrt, dafs dies die Forderung $\mathfrak{E}$ ausschliefst.

271. Torsionswinkel. Die Kurve AM sei auf drei rechtwinklige Axen bezogen und der Mittelpunkt O der Kugel in den Anfangspunkt dieses Koordinatensystems gelegt. x, y, z bezeichnen die Koordinaten des Punktes M, λ, μ, ν die Winkel, welche eine der Richtungen ML oder Om der Binormale mit den positiven Koordinatenaxen bildet. Die Koordinaten des Punktes m sind dann

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu,$$

und folglich wird die Ableitung $\frac{d\tau}{dt}$ des Bogens τ:

$$\tau' = \sqrt{(\cos\lambda)'^2 + (\cos\mu)'^2 + (\cos\nu)'^2}.$$

Die Kosinus der Winkel λ, μ, ν sind als Funktionen der Koordinaten bekannt (Nr. 264); man kann demnach τ' und $T = \frac{s'}{\tau'}$ als Funktion dieser Gröfsen berechnen, was später geschehen soll.

272. Die Frenetschen Formeln. Die *Frenet*schen Formeln beruhen auf der Thatsache, dafs die Tangenten in den entsprechenden Punkten m und μ der beiden sphärischen Kurven, welche wir eingeführt haben, parallel sind.

Indem wir die Bezeichnungen der früheren Paragraphen beibehalten, haben wir die beiden Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned}\cos\alpha(\cos\alpha)' + \cos\beta(\cos\beta)' + \cos\gamma(\cos\gamma)' = 0,\\ \cos\lambda(\cos\alpha)' + \cos\mu(\cos\beta)' + \cos\nu(\cos\gamma)' = 0.\end{aligned}$$

Denn da die Gröfsen $(\cos\alpha)'$, $(\cos\beta)'$, $(\cos\gamma)'$ proportional sind zu $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$, so drücken die Gleichungen (1) aus, dafs die Hauptnormale zur Tangente und zur Binormale senkrecht steht. Beachtet man die zweite dieser Gleichungen und differentiiert man die folgenden:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

so erhält man:

$$(2)\quad \begin{aligned}\cos\alpha(\cos\lambda)' + \cos\beta(\cos\mu)' + \cos\gamma(\cos\nu)' = 0,\\ \cos\lambda(\cos\lambda)' + \cos\mu(\cos\mu)' + \cos\nu(\cos\nu)' = 0.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Ableitungen

$$(3)\qquad (\cos\alpha)',\quad (\cos\beta)',\quad (\cos\gamma)'$$

in den Gleichungen (1) sind aber genau dieselben, wie die Koeffizienten der Ableitungen

$$(4)\qquad (\cos\lambda)',\quad (\cos\mu)',\quad (\cos\nu)'$$

in den Gleichungen (2); folglich sind die Ableitungen (3) und (4) einander proportional, d. h. man hat:

$$(5)\qquad \frac{(\cos\lambda)'}{(\cos\alpha)'} = \frac{(\cos\mu)'}{(\cos\beta)'} = \frac{(\cos\nu)'}{(\cos\gamma)'}.$$

Diese Gleichungen beweisen die ausgesprochene Eigenschaft: denn die Kosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte m der zweiten sphärischen Kurve mit den Axen bildet, sind proportional den Ableitungen der Koordinaten, d. h. den Ableitungen (4); und ebenso sind die Kosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte μ der ersten Kurve bildet, proportional den Ableitungen (3). Hieraus folgt, dafs diese beiden Tangenten parallel sind.

Aber indem man die Punkte a und α zu Anfangspunkten der sphärischen Kurven wählt, können die Tangenten in entsprechenden Punkten die nämliche Richtung oder die entgegengesetzte haben. Die sphärische Kurve, welche sich auf die Axen der Oskulationsebenen bezieht, setzt sich nach unserer Konstruktion aus zwei symmetrischen Teilen zusammen, welche den beiden Richtungen dieser Axen entsprechen. Solange man also nur den einen oder den anderen Teil der Kurve am berücksichtigt, können die Richtungen der Tangenten in m und μ gleich oder entgegengesetzt sein. Wir wollen nun annehmen, dafs man die Kurve am derart konstruiert hat, dafs die Tangenten in m und μ die nämliche Richtung haben, dieselbe, welche zugleich Richtung der Hauptnormalen im Punkte M ist. Alsdann ergiebt, auf Grund der Gleichungen (1) der Nr. 262, die obige Formel:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\cos\lambda}{d\tau} = \cos\varphi, \\ \dfrac{d\cos\mu}{d\tau} = \cos\psi, \\ \dfrac{d\cos\nu}{d\tau} = \cos\chi. \end{cases}$$

273. Zusammenstellung der bisher gefundenen Formeln. Wir wollen hier noch die verschiedenen Resultate, welche wir in den vorigen Paragraphen abgeleitet haben, zusammenstellen.

Wir bezeichneten mit

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten,

α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Tangente, genommen in der Richtung der positiv wachsenden unabhängigen Variabelen, mit den positiven Koordinatenaxen bildet,

φ, ψ, χ die Winkel, welche die Hauptnormale mit denselben Axen bildet,

λ, μ, ν die Winkel, welche die entsprechende Richtung der Binormale mit den positiven Koordinatenaxen bildet,

$ds, d\sigma, d\tau$ das Differential des Bogens, den Kontingenzwinkel und den Torsionswinkel.

Alsdann hat man:

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

$$(2) \qquad \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \cos\varphi, \quad \frac{d\cos\beta}{d\sigma} = \cos\psi, \quad \frac{d\cos\gamma}{d\sigma} = \cos\chi,$$

$$(3) \qquad \frac{d\cos\lambda}{d\tau} = \cos\varphi, \quad \frac{d\cos\mu}{d\tau} = \cos\psi, \quad \frac{d\cos\nu}{d\tau} = \cos\chi,$$

und die Richtung der Binormale ist nun bestimmt, wie im vorigen Paragraphen angegeben wurde.

Differentiiert man die Gleichung

$$\cos^2\varphi = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\lambda,$$

so folgt:

$$\cos\varphi\, d\cos\varphi = -\cos\alpha\, d\cos\alpha - \cos\lambda\, d\cos\lambda,$$

und benutzt man die Gleichungen (2) und (3), so wird:

$$d\cos\varphi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben erhält man ein neues System von Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} d\cos\varphi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d\cos\psi = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d\cos\chi = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2), (3), (4) drücken die Differentiale der neun Kosinus als Funktionen von ihnen und der Differentiale ds, $d\sigma$, $d\tau$ aus. Andererseits hat man

$$(5)\qquad \frac{ds}{d\tau} = R\frac{d\sigma}{d\tau} = T.$$

Aus den Gleichungen (4) folgt noch:

$$\sqrt{(d\cos\varphi)^2 + (d\cos\psi)^2 + (d\cos\chi)^2} = \sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}.$$

Dieser Ausdruck ist das Differential des Bogens einer dritten sphärischen Kurve, welche entsteht, wenn man durch das Centrum der Kugel die Radien zieht, welche den Hauptnormalen der gegebenen Kurve parallel sind.

274. Eine Anwendung dieser Formeln. Als Beispiel für die Anwendung dieser Formeln wollen wir die Berechnung des Torsionsradius T als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten ausführen. Wir benutzen die Gleichungen (7) in Nr. 264, nämlich:

$$\pm\frac{s'^3\cos\lambda}{R} = y'z'' - y''z',$$

$$\pm\frac{s'^3\cos\mu}{R} = z'x'' - z''x',$$

$$\pm\frac{s'^3\cos\nu}{R} = x'y'' - x''y'.$$

Differentiiert man diese Gleichungen, indem man die Formeln (3) und (5) des vorigen Paragraphen beachtet, so findet man:

$$\left(\frac{s'^3}{R}\right)'\cos\lambda + \frac{s'^4}{RT}\cos\varphi = \pm(y'z''' - y'''z'),$$
$$\left(\frac{s'^3}{R}\right)'\cos\mu + \frac{s'^4}{RT}\cos\psi = \pm(z'x''' - z'''x'),$$
$$\left(\frac{s'^3}{R}\right)'\cos\nu + \frac{s'^4}{RT}\cos\chi = \pm(x'y''' - x'''y'),$$

und addiert man diese Gleichungen, nachdem man sie bezüglich multipliziert hat mit den drei folgenden (Nr. 262):

$$\frac{s'^2}{R}\cos\varphi = x'' - \frac{s''}{s'}x',$$
$$\frac{s'^2}{R}\cos\psi = y'' - \frac{s''}{s'}y',$$
$$\frac{s'^2}{R}\cos\chi = z'' - \frac{s''}{s'}z',$$

so folgt:

$$\frac{s'^6}{R^2T} = \pm\{(y'z''' - y'''z')x'' + (z'x''' - z'''x')y'' + (x'y''' - x'''y')z''\}.$$

Ersetzt man nun $\frac{s'^6}{R^2}$ durch seinen Wert aus den Gleichungen (7) der Nr. 264, so wird

$$(1)\quad T = \pm\frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}{(y'z''' - y'''z')x'' + (z'x''' - z'''x')y'' + (x'y''' - x'''y')z''}.$$

Der Wert von T ist positiv; diese letzte Formel bestimmt demnach das Vorzeichen, welches man in den Gleichungen (5), (6), (7) der Nr. 264 an Stelle des zweideutigen Zeichens $\pm$ zu setzen hat, wenn man sich erinnert, dafs die Richtung der Binormale durch die in Nr. 272 gemachte Annahme fixiert ist. Auch ist zu bemerken, dafs sich der Torsionsradius als eine rationale Funktion der Ableitungen darstellt.

275. Die ebene Kurve als Spezialfall der Raumkurve. Wenn man den Nenner des Ausdruckes (1) für T null setzt bei allen Werten der Variabelen, so erhält man die Bedingung dafür, dafs die Kurve eine ebene ist. Macht man x zur unabhängigen Variabelen, setzt also $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0$ so wird:

$$T = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2}{y'''z'' - y''z'''},$$

und die Bedingung wird:

$$y'''z'' - y''z''' = 0.$$

Diese Gleichung läfst sich in der Form schreiben:

$$\left(\frac{z''}{y''}\right)' = 0,$$

sie drückt also aus, dafs das Verhältnis $\frac{z''}{y''}$ gleich einer Konstanten B ist; also hat man

$$z'' = By'' \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{B\,d^2y}{dx^2},$$

und folglich können $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{B\,dy}{dx}$ nur um eine Konstante differieren; es ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{B\,dy}{dx} + A,$$

und hieraus folgt

$$z = By + Ax + C,$$

wobei C eine neue Konstante ist. Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, in welcher die Kurve liegt.

§ 5. Die Schmiegungskugel einer Raumkurve.

276. Definition der Schmiegungskugel. Wir knüpfen an die Betrachtungen der Nr. 266 und 267. Wir betrachten die Gesamtheit aller Kugeln. Sie bilden eine Schar von Flächen, deren Gleichung

$$(1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

$m + 1 = 4$ willkürliche Parameter enthält, die Koordinaten (a, b, c) des Kugelmittelpunktes und den Radius r der Kugel. Wir suchen nun für eine gegebene Raumkurve:

$$(2) \qquad y = f(x), \; z = F(x)$$

diejenige Kugel, welche sie in einem gegebenen Punkte $M(x_0\, y_0\, z_0)$ *oskuliert.* Es wird im Allgemeinen dann eine Berührung $m = 3^{\text{ter}}$ Ordnung zu erwarten sein. Wie finden wir die Schmiegungskugel? Hierzu ist es nötig die Gröfsen a, b, c, r zu finden.

Um an die Betrachtungen von Nr. 266 und 267 anknüpfen zu können, wollen wir uns (1) nach z aufgelöst denken:

$$(3) \qquad z = \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}.$$

Für $x = x_0$, $y = y_0$ wird die Wurzel gleich z_0; ist — wie wir annehmen können — z_0 von null verschieden, so bestimmt sein Vorzeichen auch das der Wurzel an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ und auch in der Umgebung dieser Stelle; denn in ihr muſs das Vorzeichen dasselbe bleiben wie an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ selbst. Um die Ideen zu fixieren denken wir uns das Zeichen positiv.

Nach der Methode der Nr. 266 müssen wir nun aus (2) $y = f(x)$ in (3) einsetzen und nun Gleichung 4 in (Nr. 266)

$$z_1 = \sqrt{r^2 - (x - a)^2 - (f(x) - b)^2} \tag{4}$$

nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln; alsdann müssen die ersten vier Koeffizienten dieser Entwickelung übereinstimmen mit den entsprechenden der Gleichung (5) in Nr. 266; d. h. mit

$$F(x_0),\ F'(x_0),\ \frac{F''(x_0)}{2!},\ \frac{F'''(x_0)}{3!}. \tag{5}$$

Wie werden nun jene ersten vier Koeffizienten der Gleichung (4) berechnet? Da müssen wir in der Gleichung (4) die Werte von

$$z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \frac{1}{2!}\frac{d^2z_1}{dx^2},\ \frac{1}{3!}\frac{d^3z_1}{dx^3}$$

an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ ermitteln. Diese finden wir aber, indem wir in (1) $y = f(x)$, $z = z_1$ setzen, die so erhaltene Gleichung

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad (x - a)^2 + (f(x) - b)^2 + (z_1 - c)^2 - r^2 = 0 \\ \text{dreimal nach } x \text{ differentiieren:} \\ \qquad (x - a) + (f(x) - b)\cdot f'(x) + (z_1 - c)\dfrac{dz_1}{dx} = 0, \\ 1 + f'(x)^2 + \left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^2 + (f(x) - b)\, f''(x) + (z_1 - c)\dfrac{d^2z_1}{dx^2} = 0, \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{d}{dx}\left\{1 + f'(x)^2 + \left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^2\right\} + (f(x) - b)\cdot f'''(x) + \\ \qquad\qquad + (z_1 - c)\cdot\dfrac{d^3z_1}{dx^3} = 0 \end{array}\right.$$

und schlieſslich $x = x_0$ setzen.

Hierin ist nun die Substitution

$$z_1 = F(x_0),\ \left(\frac{dz_1}{dx}\right)_0 = F'(x_0),\ \left(\frac{d^2z_1}{dx^2}\right)_0 = F''(x_0),\ \left(\frac{d^3z_1}{dx^3}\right)_0 = F'''(x_0)$$

zu machen. Setzen wir zur Abkürzung

$$f(x_0) = y_0,\ f'(x_0) = y_0',\ f''(x_0) = y_0'',\ f'''(x_0) = y_0''',$$
$$F(x_0) = z_0,\ F'(x_0) = z_0',\ F''(x_0) = z_0'',\ F'''(x_0) = z_0''',$$

so werden die Gleichungen (6):

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2 = 0,$$
$$(x_0 - a) + (y_0 - b) y_0' + (z_0 - c) z_0' = 0,$$
$$(1 + y_0'^2 + z_0'^2) + (y_0 - b) y_0'' + (z_0 - c) z_0'' = 0,$$
$$\frac{3}{2}(1 + y_0'^2 + z_0'^2) + (y_0 - b) y_0''' + (z_0 - c) z''' = 0.$$

Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes M wieder mit (x, y, z) und die linke Seite der Kugelgleichung mit V, so werden die letzten Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} V \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{dV}{dx} \equiv (x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} \equiv \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z-c)\frac{d^2z}{dx^2} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d^3V}{dx^3} = 3\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2} + (y-b)\frac{d^3y}{dx^3} + (z-c)\frac{d^3z}{dx^3} = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeuten die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \cdots$ die Werte, welche sie unter Zugrundelegung der Gleichungen der Raumkurve

$$(2)\qquad y = f(x),\ z = F(x)$$

haben.

Ist dagegen die Raumkurve durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \chi(t)$$

gegeben, so verwandelt sich wegen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'}{x'}$$

das System (7) in bekannter Weise in das folgende:

$$(8)\quad \begin{cases} V \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dt^2} = s'^2 + (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d^3V}{dt^3} = 3s's'' + (x-a)x''' + (y-b)y''' + (z-c)z''' = 0. \end{cases}$$

So viel Lösungssysteme (a, b, c, r^2) als diese vier Gleichungen besitzen, so viele Schmiegungskugeln giebt es im Punkte M der Raumkurve.

Die drei letzten Gleichungen sind linear in a, b, c. Ihre Determinante:

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}$$

ist nach Anforderung $\mathfrak{E}$ von null verschieden. Also giebt es nur *ein* Wertsystem a, b, c, welchem nach (1) auch nur ein Wert von r^2 entspricht. Wir haben also nur *eine* wohl bestimmte Schmiegungskugel.

Analog wie bei der Schmiegungsebene geben wir hier noch eine andere Definition der Schmiegungskugel.

277. Neue Definition der Schmiegungskugel. Es besteht der

Satz. Legt man durch den Punkt M und drei benachbarte Punkte M', M'', M''' einer Raumkurve eine Kugel, so geht diese in die Schmiegungskugel über, wenn M', M'', M''' nach M hineinrücken.

Setzen wir in die Kugelgleichung

$$V \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

die Werte

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$$

ein, so wird V eine Funktion von t:

$$V = V(t).$$

Den Punkten M', M'', M''' mögen die Werte $t+h_1$, $t+h_2$, $t+h_3$ des Parameters t entsprechen; dann sind für eine durch M, M', M'', M''' gehende Kugel a, b, c, r^2 aus den vier Gleichungen

$$V(t) = 0,\ V(t+h_1) = 0,\ V(t+h_2) = 0,\ V(t+h_3) = 0$$

zu bestimmen. Mit Hülfe des Satzes der Nr. 66 schliefst man hieraus, wie in Nr. 269, dafs für $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ dieses Gleichungssystem übergeht in

$$V(t) = 0,\ V'(t) = 0,\ V''(t) = 0,\ V'''(t) = 0,$$

und hiermit ist der Satz bewiesen.

278. Radius und Mittelpunkt der oskulierenden Kugel. Die Koordinaten des Mittelpunktes der oskulierenden Kugel werden durch die letzten drei Gleichungen (8) der vorigen Nummer bestimmt. Wählt man s als unabhängige Variabele, und schreibt x_0, y_0, z_0 für a, b, c, so werden jene drei Gleichungen:

$$(x_0 - x)\frac{dx}{ds} + (y_0 - y)\cdot\frac{dy}{ds} + (z_0 - z)\cdot\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(x_0 - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (y_0 - y)\frac{d^2y}{ds^2} + (z_0 - z)\frac{d^2z}{ds^2} = 1,$$

$$(x_0 - x)\frac{d^3x}{ds^3} + (y_0 - y)\frac{d^3y}{ds^3} + (z_0 - z)\frac{d^3z}{ds^3} = 0.$$

Nach Nr. 273 wird aber:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \ldots$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\cos\alpha}{ds} = \cos\varphi\cdot\frac{1}{R}, \ldots$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{1}{R}\left(\frac{\cos\alpha}{R} + \frac{\cos\lambda}{T}\right) - \frac{\cos\varphi}{R^2}\cdot\frac{dR}{ds}, \ldots$$

Mithin bestimmen sich x_0, y_0, z_0 aus:

(1) $(x_0 - x)\cos\alpha + (y_0 - y)\cos\beta + (z_0 - z)\cos\gamma = 0,$

(2) $(x_0 - x)\cos\varphi + (y_0 - y)\cos\psi + (z_0 - z)\cos\chi = R,$

(3) $(x_0 - x)\cos\lambda + (y_0 - y)\cos\mu + (z_0 - z)\cos\nu = -T\frac{dR}{ds}.$

Addiert man nun diese drei Gleichungen, nachdem man sie vorher jedesmal bezüglich mit $\cos\alpha$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$, sodann mit $\cos\beta$, $\cos\psi$, $\cos\mu$, endlich mit $\cos\gamma$, $\cos\chi$, $\cos\nu$ multipliziert hat, so folgt:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0 - x = R\cos\varphi - \frac{T\,dR}{ds}\cos\lambda, \\ y_0 - y = R\cos\psi - \frac{T\,dR}{ds}\cos\mu, \\ z_0 - z = R\cos\chi - \frac{T\,dR}{ds}\cos\nu. \end{cases}$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so erhält man für das Quadrat des Kugelradius den einfachen Ausdruck

$$(5)\qquad r^2 = R^2 + \frac{T^2 dR^2}{ds^2}.$$

Der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel liegt auf der

Krümmungsaxe und die Gleichung (3) lehrt, dafs seine Entfernung von der Ebene des Krümmungskreises gleich dem absoluten Werte von $\frac{T\,dR}{ds}$, oder nach Gleichung (5) gleich $\left|\sqrt{r^2 - R^2}\right|$ ist; hieraus folgt:

Der Krümmungskreis in einem Punkte der Kurve ist der Schnitt der Schmiegungsebene mit der Schmiegungskugel.

279. Eine Folgerung. Diese Eigenschaft führt zu einer Folgerung, die wir entwickeln wollen. Die im Punkt M der Kurve oskulierende Kugel ist die Grenze der Kugeln, die durch M und drei andere Kurvenpunkte M', M'', M''' gehen; desgleichen ist die oskulierende Ebene die Grenze der Ebenen, die durch M und durch die beiden Punkte M', M'' gehen. Hieraus folgt, dafs der Krümmungskreis die Grenze der Kreise ist, die durch M und zwei andere benachbarte Punkte M', M'' gehen. Projizieren wir nun die Kurve und den Kreis auf irgend eine Ebene, und sind m, m', m'' die Projektionen von M, M', M'', so wird der Kreis in eine Ellipse projiziert, die eine Berührung zweiter Ordnung in m mit der Projektion der Kurve besitzt; projiziert man insbesondere die Raumkurve auf die Ebene des Krümmungskreises selbst, so wird derselbe Kreis auch Krümmungskreis für die Projektion.

§ 6. Einhüllende Flächen.

An die Spitze dieses Paragraphen stellen wir die Forderung:

Forderung $\mathfrak{F}$. *Die Forderung* $\mathfrak{B}$ *ist erfüllt, aufserdem sind in der Umgebung der betrachteten Stelle x, y, z niemals*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

gleichzeitig null.

280. Definition der Einhüllenden. Die Gleichung

$$f(x, y, z;\ \alpha) = 0 \tag{1}$$

stellt, wenn man den Parameter α variiert, eine Schar von Flächen dar. Wird, nachdem α einen bestimmten Wert erhalten hat, dem Parameter der neue Wert $\alpha + \Delta\alpha$ erteilt, so erhält man eine zweite Fläche:

(2) $$f(x, y, z;\ \alpha + \Delta\alpha) = 0.$$

Die Koordinaten derjenigen Punkte, welche (1) und (2) gleichzeitig genügen, erfüllen auch die Gleichung

(3) $$\frac{f(x, y, z;\ \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z;\ \alpha)}{\Delta\alpha} = 0,$$

und für $\Delta\alpha = 0$ geht diese über in

(4) $$\frac{\partial f(x, y, z;\ \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Wenn nun die Elimination von α aus den Gleichungen (1) und (4) wieder die Gleichung einer Fläche liefert:

(5) $$g(x, y, z) = 0,$$

so heifst diese die *Einhüllende* der *eingehüllten* Schar (1). Die durch die Gleichungen (1) und (4) dargestellte veränderliche Kurve hat *Monge* die *Charakteristik der Einhüllenden* genannt.

281. Lehrsatz I. *Die Einhüllende berührt die Flächen des Systemes in jedem Punkte einer Charakteristik.*

Ist $M(x, y, z)$ ein gemeinsamer Punkt, so hat man, um den Beweis zu führen, dafs Einhüllende und Eingehüllte die nämliche Tangentenebene in M besitzen, nur zu zeigen, dafs, wenn man x und y als die unabhängigen Variabelen betrachtet, der Wert des totalen Differentiales dz im Punkte M für beide Flächen der gleiche wird.

Die Eingehüllte ist durch die Gleichung (1) dargestellt, wobei α einen bestimmten Wert hat, der Wert von dz für diese Fläche ist also gegeben durch die Gleichung

(6) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Dieselbe Gleichung (1) kann auch als Gleichung der Einhüllenden angesehen werden, wenn man α nicht mehr als konstant, sondern als eine Funktion von x, y, z betrachtet, die durch die Gleichung (4) definiert ist. Um also den Wert von dz zu erhalten, welcher der Einhüllenden entspricht, hat man die Gleichung (1), mit Berücksichtigung, dafs α variabel ist, zu differentiieren. Dann erhält man:

(7) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Da aber die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ null ist, so reduziert sich die Gleichung (7) auf (6); der Wert von α mufs hier aus der Gleichung (4) genommen werden. Da dieser Wert für die gemeinsamen Punkte der Einhüllenden und der Eingehüllten genau der nämliche ist, welchen die Eingehüllte besitzt, so giebt die Gleichung (6) für beide Flächen denselben Wert von dz, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

282. Rückkehrkurve. Wir betrachten drei Flächen des Systemes, welche den Werten α, $\alpha + h_1$, $\alpha + h_2$ entsprechen. Sie schneiden sich in gewissen Punkten $m, m' \ldots$, deren Koordinaten bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(8)\quad f(x, y, z, \alpha) = 0,\; f(x, y, z, \alpha + h_1) = 0,\; f(x, y, z, \alpha + h_2) = 0.$$

Wenn die Gröfsen h_1 und h_2 nach null konvergieren, so reduziert sich dieses System, die Existenz und Stetigkeit auch von $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ vorausgesetzt, wie man aus der in Nr. 269 gegebenen Methode erkennt, auf

$$(9)\quad f(x, y, z, \alpha) = 0,\quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,\quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Man erkennt, dafs die aus diesen Gleichungen bestimmten Punkte $M, M' \ldots$ auch die Grenzen sind, nach denen die Schnittpunkte der Charakteristik

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,\quad \frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

und der Fläche

$$f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0$$

konvergieren, wenn $\Delta\alpha$ null wird.

Man hat also auf jeder Charakteristik einen oder mehrere Punkte $M, M' \ldots$, und der Ort aller dieser Punkte bildet eine Kurve, deren Gleichung sich vermittelst der Elimination von α aus den Gleichungen (9) ergiebt. *Monge* hat diese die *Rückkehrkurve* (arête de rebroussement) der Enveloppe genannt.

283. Lehrsatz II. *Alle Charakteristiken berühren die Rückkehrkurve.* Zum Beweise dieses Satzes mufs man zeigen, dafs in jedem Punkte, welcher einer Charakteristik und der Rückkehrkurve zugleich angehört, die Werte $dx : dy : dz$ für beide Kurven die nämlichen sind, wenn man x als die unabhängige Variabele betrachtet. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ bezeichnen wir der Kürze halber mit f' und f'', dann sind die Gleichungen einer Charakteristik

$$(10) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f'(x, y, z, \alpha) = 0,$$

und differentiiert man sie unter der Annahme, dafs α konstant ist, so erhält man:

$$(11) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial f'}{\partial x} dx + \frac{\partial f'}{\partial y} dy + \frac{\partial f'}{\partial z} dz = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (10) können auch als die Gleichungen der Rückkehrkurve betrachtet werden, wenn man α als eine Funktion von x, y, z betrachtet, die durch die Gleichung

$$(12) \qquad f''(x, y, z, \alpha) = 0$$

definiert ist. Differentiiert man aber die Gleichungen (10) unter dieser Annahme, so erhält man die nämlichen Gleichungen (11), denn die Terme $\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha$ und $\frac{\partial f'}{\partial \alpha} d\alpha$ oder $f' d\alpha$ und $f'' d\alpha$, welche durch die Variation von α auftreten, sind nach den Bedingungen des Problemes null. Da nun α den nämlichen Wert hat für die gemeinsamen Punkte einer Charakteristik und der Rückkehrkurve, so ergeben die Gleichungen (8) für beide Kurven die gleichen Werte für dy und dz.

Eine eigentliche Rückkehrkurve kommt nur dann zu stande, wenn die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$ den Parameter α noch enthält. Ist also $f(x, y, z, \alpha)$ eine ganze rationale Funktion in α, so mufs sie α zum mindesten in der dritten Potenz enthalten.

§ 7. Abwickelbare Flächen.

284. Definition der abwickelbaren Flächen. Wir werden jede Fläche eine *abwickelbare* oder *developpabele* nennen, welche die Einhüllende einer beweglichen Ebene ist, d. h. eines ebenen Systemes, welches von einem variabelen Parameter abhängt.

Sind a, b, c, p gegebene Funktionen des variabelen Parameters, a', b', c', p' ihre Ableitungen, so ist die Gleichung der beweglichen Ebene

$$(1)\qquad ax + by + cz - p = 0,$$

und man erhält die Einhüllende durch Elimination des Parameters aus dieser Gleichung und der folgenden:

$$(2)\qquad a'x + b'y + c'z - p' = 0.$$

Ist nicht gleichzeitig $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ und $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$, so bestimmen diese beiden Gleichungen eine Gerade, welche die Charakteristik der Einhüllenden heifst. Da sie die Rückkehrkurve der Einhüllenden berührt, so erkennt man: *eine abwickelbare Fläche ist der geometrische Ort der Tangenten einer Raumkurve.*

Die Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche kann sich auf einen Punkt zusammenziehen. Dies tritt ein, wenn die Funktionen a, b, c, p des Parameters mit einander durch eine lineare Gleichung verknüpft sind:

$$(3)\qquad ax_0 + by_0 + cz_0 - p = 0,$$

in welcher x_0, y_0, z_0 Konstante sind. In diesem Falle werden die Gleichungen (1) und (2):

$$(4)\qquad \begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0, \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) &= 0, \end{aligned}$$

und die abwickelbare Fläche ist ein Kegel, welcher den Punkt x_0, y_0, z_0 zur Spitze hat. Setzt man endlich

$$x_0 = mz_0, \quad y_0 = nz_0,$$

wobei m und n Konstante sind, und läfst man z_0 unendlich werden, so reduziert sich die Gleichung (3) auf die Form:

$$(5)\qquad am + bn + c = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (3) können dann in der Form

$$(6)\qquad \begin{aligned} a(x - mz) + b(y - nz) - p &= 0, \\ a'(x - mz) + b'(y - nz) - p' &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden, und bestimmen eine Cylinderfläche. Hier hat sich die Rückkehrkurve auf einen Punkt im Unendlichen zusammengezogen.

285. Eine Eigenschaft der abwickelbaren Flächen. *Die bewegliche Ebene, deren Einhüllende eine developpabele Fläche* *ist, ist zugleich die Schmiegungsebene der Rückkehrkurve dieser Fläche.* Denn bezeichnen wir mit x, y, z die Koordinaten eines Punktes dieser Rückkehrkurve, und sind a'', b'', c'' die zweiten Ableitungen der Funktionen a, b, c, so hat man

$$ax + by + cz - p = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z - p' = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z - p'' = 0.$$

Alle Gröfsen, welche hier auftreten, sind Funktionen eines Parameters; durch die Gleichungen ist die Kurve definiert, wenn der Parameter eliminiert wird. Differentiiert man zur Berechnung des ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten die Gleichungen nach diesem Parameter, so folgt aus den ersten beiden, unter Berücksichtigung der zweiten und dritten Gleichung:

$$ax' + by' + cz' = 0,$$
$$a'x' + b'y' + c'z' = 0,$$

und differentiiert man die erste von ihnen mit Berücksichtigung der zweiten, so hat man

$$ax'' + by'' + cz'' = 0.$$

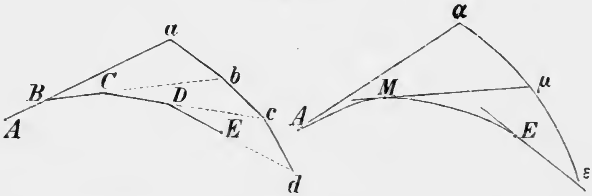
Die Gleichungen

$$ax' + by' + cz' = 0 \quad \text{und} \quad ax'' + by'' + cz'' = 0$$

zeigen (Nr. 267), dafs a, b, c proportional sind den Kosinus der Winkel, welche die Binormale der Rückkehrkurve mit den Koordinatenaxen bildet; also ist die Oskulationsebene die bewegliche Ebene selbst.

286. Veranschaulichung der Abwickelbarkeit. Betrachten wir eine beliebige abwickelbare Fläche: es sei A ein Punkt der Rückkehrkurve, von dem an wir den Bogen s der Kurve messen, und E der Punkt, welcher der Länge $s = S$ entspricht. Dem Bogen S schreiben wir ein Polygon $ABCDE$ mit n Seiten ein, deren Richtungen bezüglich $AB, BC, CD\ldots$ sind. Indem wir allgemein mit s die Länge des Kurvenbogens vom Punkte A bis zu irgend einem Eckpunkte des Polygones bezeichnen, verlängern wir die Seite, welche in dieser Ecke endigt, um eine Gröfse $t = \varphi(s)$, wobei φ eine beliebige Funktion bedeutet. Wir verbinden endlich die Punkte $a, b, c, \ldots$ welche die Endpunkte der verlängerten Seiten $AB, BC, CD, \ldots$ sind. Auf diese Weise erhält man eine Polyederfläche, die aus $n - 1$ Dreiecksflächen besteht, und die

Fig. 66.



durch ein Polygon, welches dem Bogen S eingeschrieben ist, durch die beiden äufsersten Seiten desselben und die gebrochene Linie a, b, c, d begrenzt ist. Läfst man nun die Dreiecke $Ddc, Ccb, \ldots$ um die Seiten $Dc, Cb \ldots$ sich drehen, so kann man alle diese Dreiecke in die Ebene ABC des ersten bringen; auf diese Weise erhält man den Prozess, welchen man die *Abwickelung der Polyederfläche* nennt. Bei dieser Abwickelung bleiben die Längen t und die Längen der gebrochenen Linien $ABCDE$, $abcd$ ungeändert.

Nehmen wir nun an, dafs die Zahl n der Seiten unbegrenzt wächst, und dafs jede von ihnen nach null konvergiert, so hat die Linie $ABCDE$ zur Grenze den Bogen S, und die Polyederfläche fällt mit einem Teil der developpabelen Fläche zusammen, der begrenzt ist durch den Bogen AE der Rückkehrkurve, durch die Tangenten $A\alpha$, $E\varepsilon$ in den Endpunkten, und durch eine bestimmte Kurve $\alpha\varepsilon$, definiert durch die Gleichung

$$t = \varphi(s),$$

wobei s den Bogen AM der Rückkehrkurve und t die Länge $M\mu$ der Tangente in M zwischen dem Berührungspunkte und der Kurve $\alpha\varepsilon$ bedeutet.

Andererseits konvergiert auch die Abwickelung der Polyederfläche nach einer bestimmten Grenze, und diese Grenze nennen wir die *Abwickelung* des betrachteten Teiles der developpabelen Fläche. Im Besonderen ist die ebene Kurve, welche die Grenze des Polygones $abcd$ bei der Abwickelung der Polyederfläche bildet, die Abwickelung oder Transformierte der auf der abwickelbaren Fläche gelegenen Kurve $\alpha\varepsilon$. Es ist leicht ersichtlich, dafs die Ebene ABC zur Grenze die Schmiegungsebene der Rückkehrkurve im Punkte A hat, welche zugleich die abwickelbare Fläche berührt. Die Abwickelung ist also auf der Tangentenebene des Punktes A vollzogen worden. Endlich bemerken wir noch, dafs die Gleichung $t = \varphi(s)$, welche wir für die Kurve $\alpha\varepsilon$ angenommen haben, auch nach der Abwickelung fortbesteht. Überhaupt bleiben alle Längen von Geraden oder Kurven auf der abwickelbaren Fläche durch die Abwickelung ungeändert.

§ 8. Polarfläche und Evolutenkurve.

Wir nehmen in diesem Paragraphen wieder die Forderung $\mathfrak{C}$ als erfüllt an.

287. Definition der Polarfläche einer Raumkurve. In Nr. 263 wurde bewiesen, dafs die Krümmungsaxe oder Polargerade eines Kurvenpunktes x, y, z die Gleichungen hat:

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0,$$

wenn $V = 0$ die Gleichung der Normalebene ist; ferner wurde in Nr. 276 gezeigt, dafs die Koordinaten des Mittelpunktes der oskulierenden Kugel durch die drei Gleichungen bestimmt sind:

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0, \quad \frac{d^2V}{dt^2} = 0.$$

Hieraus folgt, dafs die Normalebenen einer Kurve von einer developpabelen Fläche eingehüllt werden, deren Charakteristiken die Krümmungsaxen sind und deren Rückkehrkurve von den Mittelpunkten der oskulierenden Kugeln gebildet wird. Diese developpabele Fläche heifst die *Polarfläche.* Auf dieser Polarfläche liegen auch die Krümmungsmittelpunkte der Kurve.

288. Eine Eigenschaft der Polarfläche. Die Werte der Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln sind nach Nr. 278:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 = x + R\cos\varphi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\lambda, \\[2mm] y_0 = y + R\cos\psi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\mu, \\[2mm] z_0 = z + R\cos\chi - \dfrac{TdR}{ds}\cos\nu, \end{cases}$$

und ferner ist ihr Radius r gegeben durch

$$(2)\qquad r^2 = R^2 + \left(\frac{TdR}{ds}\right)^2.$$

Differentiiert man die Gleichungen (1) und (2), indem man die Formeln in Nr. 273 benutzt, und setzt man

$$(3)\qquad \frac{ds_0}{ds} = \pm\left(\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)\right),$$

indem man ds_0 das Vorzeichen von ds erteilt, so folgt

$$(4)\qquad \frac{dx_0}{ds} = \mp\cos\lambda\frac{ds_0}{ds},\quad \frac{dy_0}{ds} = \mp\cos\mu\frac{ds_0}{ds},\quad \frac{dz_0}{ds} = \mp\cos\nu\frac{ds_0}{ds}$$

und

$$(5)\qquad r\frac{dr}{ds} = \pm T\frac{dR}{ds}\cdot\frac{ds_0}{ds}.$$

Die Gleichungen (4) beweisen: *erstens*, dafs s_0 das Differential des Bogens der Rückkehrkurve der Polarfläche ist, *zweitens*, dafs die Tangente dieser Kurve die Krümmungsaxe oder Polargerade ist, was eine Bestätigung des früher schon erhaltenen Resultates bildet. Man sieht aber auch, dafs $\frac{ds_0}{ds}$ null sein kann, und dann reduziert sich die Rückkehrkurve auf einen Punkt. Die Formeln (4) und (5) zeigen alsdann, dafs x_0, y_0, z_0, r Konstante sind. Die nämliche Kugel oskuliert alsdann die Kurve in jedem Punkte; diese liegt also ganz auf der Kugel.

Hat man ferner eine Kurve, für welche der Radius der Schmiegungskugel konstant ist, so ist:

$$(6)\qquad R^2 + \left(T\frac{dR}{ds}\right)^2 = a^2$$

und

$$r = a,\quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Dies findet statt nach Gleichung (5) *erstens*, wenn $\frac{ds_0}{ds} = 0$ ist; d. h. für die sphärischen Kurven und ihre Ausartung für

$T = \infty$: die ebenen Kurven; *zweitens*, wenn $\frac{dR}{ds} = 0$, also wenn $R = $ konst. ist. In diesem Falle wird nach (2) $r = R$ und die Gleichungen (1) verglichen mit den Gleichungen (4) der Nr. 263 zeigen, dafs der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfällt. Es besteht also der Satz:

Ist der Radius der Schmiegungskugel einer Raumkurve konstant, so fällt der Mittelpunkt der Schmiegungskugel mit dem Krümmungsmittelpunkte und der Ort der Krümmungsmittelpunkte mit der Rückkehrkurve der developpabelen Fläche zusammen, die von den Normalebenen der Kurve gebildet wird.

289. Beziehung zwischen der Polarfläche und ihrer Rückkehrkurve. Bezeichnen wir mit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$; λ_0, μ_0, ν_0; R_0, T_0 die Gröfsen, welche den Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ analog sind und sich auf die Rückkehrkurve beziehen, und sehen wir dabei von den ebenen Kurven, d. h. von dem Falle $T = \infty$ ab, so können wir die Gleichungen (4) folgendermafsen schreiben:

$$(7) \quad \cos\alpha_0 = \mp \cos\lambda, \quad \cos\beta_0 = \mp \cos\mu, \quad \cos\gamma_0 = \mp \cos\nu.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergiebt:

$$\frac{ds_0}{R_0}\cos\varphi_0 = \mp \frac{ds}{T}\cos\varphi, \quad \frac{ds_0}{R_0}\cos\psi_0 = \mp \frac{ds}{T}\cos\psi,$$

$$\frac{ds_0}{R_0}\cos\chi_0 = \mp \frac{ds}{T}\cos\chi,$$

also:

$$(8) \qquad \frac{ds_0}{R_0} = \frac{ds}{T} \quad \text{oder} \quad d\sigma_0 = d\tau,$$

und

$$(9) \quad \cos\varphi_0 = \mp \cos\varphi, \quad \cos\psi_0 = \mp \cos\psi, \quad \cos\chi_0 = \mp \cos\chi.$$

Die Differentiation der Gleichungen (9) giebt folglich, wenn man die Gleichungen (7) und (8) beachtet:

$$\frac{ds_0}{T_0}\cos\lambda_0 = \mp \frac{ds}{R}\cos\alpha, \quad \frac{ds_0}{T_0}\cos\mu_0 = \mp \frac{ds}{R}\cos\beta,$$

$$\frac{ds_0}{T_0}\cos\nu_0 = \mp \frac{ds}{R}\cos\gamma,$$

also

$$(10) \qquad \frac{ds_0}{T_0} = \frac{ds}{R} \quad \text{oder} \quad d\tau_0 = d\sigma,$$

und

$$(11) \quad \cos\lambda_0 = \mp \cos\alpha, \quad \cos\mu_0 = \mp \cos\beta, \quad \cos\nu_0 = \mp \cos\gamma.$$

Vergleicht man also die gegebene Kurve mit der Rückkehrkurve der Polarfläche, so sieht man, dafs für beide Kurven die Richtung der Hauptnormalen die nämliche ist, und dafs die Tangente einer Kurve parallel ist der Binormale der anderen. Zugleich drücken die Gleichungen (8) und (10) aus, dafs die erste absolute Krümmung einer jeden Kurve der zweiten absoluten Krümmung der anderen gleich ist. Das zweideutige Zeichen $\mp$ kann in jeder der Formeln (7), (9), (11) durch das Plus- oder Minuszeichen ersetzt werden. Endlich bemerken wir noch, dafs die Gleichung (3) die Form erhält:

$$(12)\qquad \pm ds_0 = \frac{R\,ds_0}{R_0} + d\,\frac{R_0\,dR}{ds_0} = R\,d\sigma_0 + d\,\frac{dR}{d\sigma_0}\,.$$

290. Eine Anwendung. Wir betrachten in der xy-Ebene die bewegliche Gerade, deren Gleichung

$$(13)\qquad \xi \sin\sigma_0 - \eta\cos\sigma_0 = R$$

ist. Ihre Enveloppe wird durch diese Gleichung zusammen mit der Gleichung

$$(14)\qquad \xi\cos\sigma_0 + \eta\sin\sigma_0 = \frac{dR}{d\sigma_0}$$

bestimmt; aus diesen beiden folgt:

$$(15)\qquad \begin{cases} \xi = +R\sin\sigma_0 + \dfrac{dR}{d\sigma_0}\cos\sigma_0\,, \\ \eta = -R\cos\sigma_0 + \dfrac{dR}{d\sigma_0}\sin\sigma_0\,. \end{cases}$$

Differentiiert man sie, so wird

$$d\xi = \left(R\,d\sigma_0 + d\,\frac{dR}{d\sigma_0}\right)\cos\sigma_0\,,$$

$$d\eta = \left(R\,d\sigma_0 + d\,\frac{dR}{d\sigma_0}\right)\sin\sigma_0\,,$$

und dies ergiebt, auf Grund der Gleichung (12):

$$(16)\qquad d\xi = \pm\,ds_0\cos\sigma_0,\quad d\eta = \pm\,ds_0\sin\sigma_0\,.$$

Diese Formeln sagen aus, dafs für die betrachtete ebene Enveloppe Bogenlänge und Krümmung dieselben sind, wie für die Rückkehrkurve der Polarfläche.

Führt man nun in die Gleichungen (1), welche den Mittelpunkt der oskulierenden Kugel bestimmen, die Gröfsen ξ, η und die Winkel φ_0, ψ_0, χ_0, λ_0, μ_0, ν_0 ein, die sich auf die Rückkehrkurve beziehen, so erhält man

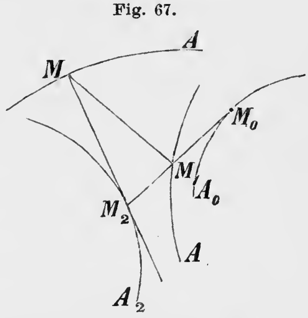
$$(17)\begin{cases} x_0 = x \pm \xi(\cos\sigma_0\cos\alpha_0 - \sin\sigma_0\cos\varphi_0) \pm \eta(\sin\sigma_0\cos\alpha_0 \\ \qquad + \cos\sigma_0\cos\varphi_0), \\ y_0 = y \pm \xi(\cos\sigma_0\cos\beta_0 - \sin\sigma_0\cos\psi_0) \pm \eta(\sin\sigma_0\cos\beta_0 \\ \qquad + \cos\sigma_0\cos\psi_0), \\ z_0 = z \pm \xi(\cos\sigma_0\cos\gamma_0 - \sin\sigma_0\cos\chi_0) \pm \eta(\sin\sigma_0\cos\gamma_0 \\ \qquad + \cos\sigma_0\cos\chi_0). \end{cases}$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ in den Gleichungen (16) und (17) ist immer durch $+$ oder durch $-$ zu ersetzen.

Die Gleichungen (17) liefern unmittelbar die Lösung der Aufgabe, eine Kurve zu bestimmen, für welche der Ort der oskulierenden Kugeln gegeben ist. In diesem Falle sind alle Gröfsen mit dem Index null, die sich auf die gegebene Kurve beziehen, bekannte Funktionen derselben unabhängigen Variabelen. Die Gleichungen (16) bestimmen ξ und η durch ihre Differentiale, und alsdann ergeben die Gleichungen (17) die Koordinaten x, y, z der gesuchten Kurve.

291. Definition der Evolutenkurve und Evolventenkurve. Wenn eine ebene oder räumliche Kurve AM beschrieben wird durch den einen Endpunkt eines Fadens, der auf einer zweiten Kurve A_2M_2 aufgerollt war, und mit seinem zweiten Ende auf dieser Kurve befestigt ist, und welcher derart abgewickelt wird, dafs er stets gespannt bleibt, so heifst die Kurve A_2M_2 eine *Evolute* der Kurve AM. Umgekehrt heifst AM eine *Evolvente* der Kurve A_2M_2.

Fig. 67.



292. Bestimmung der Evoluten einer gegebenen Kurve. Wir bezeichnen die Elemente der gegebenen Kurve wie in Nr. 273, die analogen Gröfsen für die zweite Kurve mit dem Index 2; die Ableitungen nach t durch Accente.

Setzt man

$$(1) \qquad u = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2},$$

so sind die Bedingungen dafür, dafs A_2M_2 eine Evolute von AM ist:

(2) $x_2 - x = u\cos\alpha_2,\quad y_2 - y = u\cos\beta_2,\quad z_2 - z = u\cos\gamma_2$
und

(3) $$s_2' = u'.$$

Differentiiert man die erste Gleichung (2), und benutzt man dabei die Formeln der Nr. 273, so folgt

$$s_2'\cos\alpha_2 - s'\cos\alpha = \frac{u s_2'}{R_2}\cos\varphi_2 + u'\cos\alpha_2,$$

oder wegen Gleichung (3):

$$s'\cos\alpha = -\frac{uu'}{R_2}\cos\varphi_2,$$

ebenso:

$$s'\cos\beta = -\frac{uu'}{R_2}\cos\psi_2,$$

$$s'\cos\gamma = -\frac{uu'}{R_2}\cos\chi_2.$$

Diese drei Gleichungen ergeben

(4) $$s' = \frac{uu'}{R_2},$$

ferner

(5) $\cos\varphi_2 = -\cos\alpha,\quad \cos\psi_2 = -\cos\beta,\quad \cos\chi_2 = -\cos\gamma.$

Dies besagt: Die Hauptnormale im Punkte M_2 der Evolute ist parallel der Tangente im entsprechenden Punkte M der Evolvente. Die Tangenten der beiden Kurven stehen also senkrecht, und es ist:

(6) $$\cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2 = 0.$$

Differentiiert man diese Gleichung mit Benutzung der bereits erwähnten Formeln in Nr. 273, so findet man:

$$\frac{s'}{R}(\cos\varphi\cos\alpha_2 + \cos\psi\cos\beta_2 + \cos\chi\cos\gamma_2)$$
$$+ \frac{s_2'}{R_2}(\cos\varphi_2\cos\alpha + \cos\psi_2\cos\beta + \cos\chi_2\cos\gamma) = 0,$$

also nach den Gleichungen (3), (4), (5):

(7) $$\cos\varphi\cos\alpha_2 + \cos\psi\cos\beta_2 + \cos\chi\cos\gamma_2 = \frac{R}{u}.$$

Es ist nun auch:

(8) $$\cos\lambda\cos\alpha_2 + \cos\mu\cos\beta_2 + \cos\nu\cos\gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{R_2}{u^2}},$$

denn es ergiebt sich eine Identität, wenn man die Gleichungen (6), (7), (8) quadriert und addiert. Addiert man die nämlichen

Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit $\cos\alpha$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$, sodann mit $\cos\beta$, $\cos\psi$, $\cos\mu$, endlich mit $\cos\gamma$, $\cos\chi$, $\cos\nu$ multipliziert hat, so folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} \cos\alpha_2 = \frac{R}{u}\cos\varphi + \sqrt{1-\frac{R^2}{u^2}}\cos\lambda, \\ \cos\beta_2 = \frac{R}{u}\cos\psi + \sqrt{1-\frac{R^2}{u^2}}\cos\mu, \\ \cos\gamma_2 = \frac{R}{u}\cos\chi + \sqrt{1-\frac{R^2}{u^2}}\cos\nu, \end{cases}$$

und die Gleichungen (2) werden also:

$$(10)\qquad \begin{cases} x_2 = x + R\cos\varphi + \sqrt{u^2-R^2}\cos\lambda, \\ y_2 = y + R\cos\psi + \sqrt{u^2-R^2}\cos\mu, \\ z_2 = z + R\cos\chi + \sqrt{u^2-R^2}\cos\nu. \end{cases}$$

Alle auf die Kurve AM bezüglichen Gröfsen sind als Funktionen einer gewissen unabhängigen Variabelen bekannt; wenn man also noch den Ausdruck u als Funktion derselben Variabelen bestimmen kann, so liefern die Gleichungen (10) eine vollständige explicite Darstellung der Evolute.

Um u zu finden, genügt es aber die Gleichung (7) zu differentiieren. Dies ergiebt:

$$\begin{aligned} &\frac{s_2'}{R}(\cos\varphi\cos\varphi_2 + \cos\psi\cos\psi_2 + \cos\chi\cos\chi_2) \\ &-\frac{s'}{R}(\cos\alpha\cos\alpha_2 + \cos\beta\cos\beta_2 + \cos\gamma\cos\gamma_2) \\ &-\frac{s'}{T}(\cos\lambda\cos\alpha_2 + \cos\mu\cos\beta_2 + \cos\nu\cos\gamma_2) = \left(\frac{R}{u}\right)', \end{aligned}$$

oder auf Grund der früheren Formeln:

$$(11)\qquad \left(\frac{R}{u}\right)' + \tau'\sqrt{1-\frac{R^2}{u^2}} = 0.$$

Dies ist die Gleichung, durch welche u bestimmt wird. Ist die gegebene Kurve eine doppelt gekrümmte, so ist τ' nicht null, und es wird

$$\frac{-\left(\frac{R}{u}\right)'}{\sqrt{1-\frac{R^2}{u^2}}} = \tau'.$$

Die linke Seite ist die Ableitung eines Bogens, dessen Kosinus gleich $\frac{R}{u}$ ist, man hat also, wenn g eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$\arccos \frac{R}{u} = \tau + g,$$

oder

$$(12) \qquad \frac{R}{u} = \cos(\tau + g), \quad u = \frac{R}{\cos(\tau + g)}.$$

Ist die gegebene Kurve eben, so reduziert sich die Gleichung (11) auf

$$\left(\frac{R}{u}\right)' = 0,$$

und man hat

$$(13) \qquad \frac{R}{u} = \cos g, \quad u = \frac{R}{\cos g},$$

wenn g eine willkürliche Konstante bezeichnet. Diese Formel ist also in der allgemeinen Gleichung (12) enthalten, wenn man dort $\tau = 0$ setzt.

Führt man den Wert von u in die Gleichungen (10) ein, so erhält man:

$$(14) \qquad \begin{cases} x_2 = x + R\cos\varphi + R\,\mathrm{tang}(\tau + g)\cos\lambda, \\ y_2 = y + R\cos\psi + R\,\mathrm{tang}(\tau + g)\cos\mu, \\ z_2 = z + R\cos\chi + R\,\mathrm{tang}(\tau + g)\cos\nu. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind bekannte Funktionen der unabhängigen Variabelen; sie enthalten indessen die Gröſse τ, den Bogen der sphärischen Kurve, welche die zweite Krümmung der gegebenen miſst, und die Bestimmung von τ als Funktion der unabhängigen Variabelen erfordert in den meisten Fällen eine Integration. Die Gleichungen enthalten eine willkürliche Konstante; daraus erkennt man, daſs die gegebene Kurve unendlich viele Evoluten hat.

293. Eigenschaften der Evolute. Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes M_1, der zum Punkte M gehört, und ist A_1M_1 der Ort dieser Mittelpunkte, so ist nach Nr. 263

$$(15) \quad x_1 = x + R\cos\varphi, \quad y_1 = y + R\cos\psi, \quad z_1 = z + R\cos\chi.$$

Welchen Wert man auch der Konstanten g beilegen mag, die Werte x_2, y_2, z_2 können niemals mit x_1, y_1, z_1 zusammenfallen, wenn τ nicht konstant ist.

Mithin ist bei den doppelt gekrümmten Kurven der Ort der Krümmungsmittelpunkte niemals zugleich eine Evolute.

Die Gleichungen (14) und (15) ergeben:

$$(16) \qquad \frac{x_1 - x_2}{\cos\lambda} = \frac{y_1 - y_2}{\cos\mu} = \frac{z_1 - z_2}{\cos\nu},$$

und dies beweist, dafs die Punkte M_2 der Evoluten auf den Krümmungsaxen $M_0 M_1$ der gegebenen Kurve liegen. Hieraus folgt, dafs alle Evoluten auf der Polarfläche liegen, welche also der geometrische Ort von ihnen ist.

Sämtliche Evoluten, welche durch die Gleichungen (14) dargestellt sind, sind doppelt gekrümmte Kurven, mit Ausnahme derjenigen, die, im Falle dafs $\tau = 0$ ist, zu $g = 0$ gehört. Denn die Differentiation der Gleichungen (5) ergiebt (Nr. 274):

$$\sigma_2' \cos\alpha_2 + \tau_2' \cos\lambda_2 = \sigma' \cos\varphi,$$
$$\sigma_2' \cos\beta_2 + \tau_2' \cos\mu_2 = \sigma' \cos\psi,$$
$$\sigma_2' \cos\gamma_2 + \tau_2' \cos\nu_2 = \sigma' \cos\chi,$$

also

$$\sigma_2'^2 + \tau_2'^2 = \sigma'^2.$$

Soll die Kurve eben sein, so mufs $\tau_2' = 0$, und folglich $\sigma_2' = \sigma'$ sein, und es ist

$$\cos\alpha_2 = \cos\varphi, \quad \cos\beta_2 = \cos\psi, \quad \cos\gamma_2 = \cos\chi.$$

Nach den Gleichungen (7) oder (8) wird demnach

$$u = R.$$

Diese Gleichung findet aber gemäfs der Gleichung (12) nur dann statt, wenn die Kurve AM eben ist, und sie entspricht dem Werte $\tau = -g$. Im Falle $\tau = 0$, $g = 0$ fällt der Punkt M_1 mit dem Krümmungsmittelpunkte zusammen; also bestehen die Sätze:

1. Die unendlich vielen Evoluten einer räumlichen Kurve sind selbst alle doppelt gekrümmt.

2. Eine ebene Kurve besitzt unter allen ihren unendlich vielen Evoluten eine einzige, die auch eben ist, nämlich die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte.

294. Die Abwickelung der Polarfläche. Auf der Polarfläche haben wir aufser der Rückkehrkurve (dem Orte der Mittelpunkte oskulierender Kugeln) noch das System der Evoluten und den Ort der Krümmungsmittelpunkte. Subtrahiert man von den Koordinaten x_2, y_2, z_2 und x_1, y_1, z_1, welche durch die Gleichungen (14) und (15) gegeben sind, die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Centrums der oskulierenden Kugel (Nr. 288), so erhält man:

$$x_2 - x_0 = \left[R \operatorname{tang}(\tau + g) + \frac{dR}{d\tau}\right] \cos\lambda,$$

$$y_2 - y_0 = \left[R \operatorname{tang}(\tau + g) + \frac{dR}{d\tau}\right] \cos\mu,$$

$$z_2 - z_0 = \left[R \operatorname{tang}(\tau + g) + \frac{dR}{d\tau}\right] \cos\nu,$$

und

$$x_1 - x_0 = \frac{dR}{d\tau} \cos\lambda,$$

$$y_1 - y_0 = \frac{dR}{d\tau} \cos\mu,$$

$$z_1 - z_0 = \frac{dR}{d\tau} \cos\nu.$$

Indem wir aber nur die Gröfsen einführen wollen, die sich auf die Rückkehrkurve beziehen, ersetzen wir $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ durch $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$, und zwar was gestattet ist, mit dem nämlichen Zeichen; ferner $d\tau$ durch $d\sigma_0$ und τ selbst durch σ_0. Ferner setze ich:

$$R = -X \sin\sigma_0 + Y \cos\sigma_0,$$

$$\frac{dR}{d\sigma_0} = -X \cos\sigma_0 - Y \sin\sigma_0,$$

und die neuen Variabelen X und Y sind als Funktionen der zu der Rückkehrkurve gehörigen Gröfsen durch die Gleichungen

$$dX = ds_0 \cos\sigma_0, \quad dY = ds_0 \sin\sigma_0 \tag{17}$$

definiert (Nr. 289). Alsdann werden die obigen Gleichungen:

$$\frac{x_2 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y_2 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z_2 - z_0}{\cos\gamma_0} = \frac{-X\cos g + Y \sin g}{\cos(\sigma_0 + g)}, \tag{18}$$

$$\frac{x_1 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y_1 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z_1 - z_0}{\cos\gamma_0} = -(X\cos\sigma_0 + Y\sin\sigma_0). \tag{19}$$

Nun nehmen wir an, dafs zur Ebene x, y eine Tangentenebene der Polarfläche gewählt ist, und führen die Abwickelung dieser Fläche in dieser Ebene aus. Wir behalten dieselben Buchstaben bei, um die verschiedenen Gröfsen auch nach der Abwickelung zu bezeichnen. Da die Punkte M_0, M_1, M_2 immer auf einer Geraden liegen, und ihre gegenseitigen Abstände unveränderlich sind, ebenso wie die Bogen s_0 und σ_0, so bestehen die Formeln (18) und (19) ohne Änderung fort. Aber nach der Abwickelung werden z_0, z_1, z_2 null; die Rückkehrkurve ist eine ebene Kurve geworden und $d\sigma_0$ kann an Stelle von $d\alpha_0$ gewählt werden; man kann selbst $\alpha_0 = \sigma_0$ annehmen, auf Grund der willkürlichen Gröfse g, welche mit σ_0 verbunden ist. Demnach hat man

$$\cos\alpha_0 = \cos\sigma_0, \quad \cos\beta_0 = \sin\sigma_0, \quad \cos\gamma_0 = 0.$$

Weiter zeigen die Gleichungen (17), dafs dX und dY nichts anderes sind als dx_0 und dy_0, man kann also

$$X = x_0, \quad Y = y_0$$

setzen, da der Koordinatenanfangspunkt willkürlich ist. Demnach erhalten die Transformierten der Evoluten die Gleichungen:

$$(20) \qquad \frac{x_2 - x_0}{\cos\sigma_0} = \frac{y_2 - y_0}{\sin\sigma_0} = \frac{-x_0\cos g + y_0\sin g}{\cos(\sigma_0 + g)},$$

und die Transformierte der Kurve der Krümmungsmittelpunkte wird:

$$(21) \qquad \frac{x_1 - x_0}{\cos\sigma_0} = \frac{y_1 - y_0}{\sin\sigma_0} = -(x_0\cos\sigma_0 + y_0\sin\sigma_0).$$

Man kann aus den Gleichungen (20) x_0, y_0, σ_0 eliminieren; diese Elimination ergiebt

$$(22) \qquad x_2\cos g - y_2\sin g = 0,$$

und hieraus folgt der Satz:

Lehrsatz I. Die Evoluten einer beliebigen Kurve transformieren sich bei der Abwickelung der Polarfläche in gerade Linien, welche durch einen festen Punkt F gehen.

Da die Längen der Kurvenbogen sich bei der Abwickelung nicht ändern, so kann man hinzufügen, dafs die Evoluten, auf der Polarfläche die kürzesten Linien zwischen zwei Punkten sind; sie sind also, wie man sagt, *geodätische* Linien. Die Gleichung (21) enthält die beiden Gleichungen:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\operatorname{tang}\sigma_0, \quad y_1 = -x_1\operatorname{cotg}\sigma_0.$$

Die erste stellt die Tangente im Punkte x_0, y_0 der Abwickelung der Rückkehrkurve dar; die zweite Gleichung die des Lotes, welches vom Punkte F, dem Koordinatenanfangspunkte, auf diese Tangente gefällt ist. Man hat demnach den andern Satz:

Lehrsatz II. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Raumkurve wird, nach der Abwickelung der Polarfläche, Ort der Fuſspunkte aller Lote, die von dem gemeinsamen Punkte der Evoluten auf die Tangenten der transformierten Rückkehrkurve gefällt sind.

295. Der Fall der ebenen und sphärischen Kurven. Die besonderen Fälle, daſs die gegebene Kurve sphärisch oder eben ist, sind noch hervorzuheben. Im ersten Falle ist die Polarfläche ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, auf welcher sich die Kurve befindet, und alle unsere Formeln bleiben gültig. Ist die Kurve eben, so wird die Polarfläche ein Cylinder, dessen senkrechter Schnitt die ebene Evolute bildet. Man kann hier $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$, $\cos\nu = 1$ und $z_1 = 0$ setzen. Dann hat man nach den Gleichungen (14) in Nr. 292

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = R \operatorname{tang} g.$$

Da der Anfangspunkt des Bogens s_1 unbestimmt ist, so kann man $R = s_1$ annehmen. Nach der Abwickelung der Polarfläche wird s_1 eine geradlinige Abscisse, und die Transformierten der Evoluten sind gerade Linien, welche die Gleichung haben

$$z_2 = s_1 \operatorname{tang} g.$$

Die Evoluten, deren Tangenten einen konstanten Winkel mit den Erzeugenden der Polarfläche bilden, sind *Schraubenlinien* auf diesem Cylinder.

296. Bestimmung der Evolventen einer gegebenen Kurve. Die Gleichungen des Problemes sind, wie in Nr. 292:

$$x_2 - x = u\cos\alpha_2, \quad y_2 - y = u\cos\beta_2, \quad z_2 - z = u\cos\gamma_2,$$
$$s_2' = u',$$

aber die Lösung ist viel leichter, als die des umgekehrten Problemes, denn hier sind x_2, y_2, z_2, α_2, β_2, γ_2, s_2 gegebene

Funktionen der nämlichen Variabelen, und man erhält unmittelbar die Werte von x, y, z. Es wird nämlich

$$u = s_2 + g,$$

wobei g eine willkürliche Konstante ist, und die obigen Gleichungen werden demnach

$$x = x_2 - (s_2 + g) \cos \alpha_2, \quad y = y_2 - (s_2 + g) \cos \beta_2,$$
$$z = z_2 - (s_2 + g) \cos \gamma_2.$$

Man sieht, dafs jede Kurve, mag sie eine ebene oder räumliche sein, unendlich viele Evolventen hat. Die einzige Schwierigkeit dieses Problemes besteht in der Bestimmung des Bogens s_2, dessen Ableitung im allgemeinen zunächst nur gegeben ist. Die Berechnung von s_2 ist daher ein Problem der Integralrechnung.

297. Das Beispiel der Schraubenlinie. Die rechtwinkligen Koordinaten der gewöhnlichen Schraubenlinien können durch die Gleichungen:

(1) $$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = a t \operatorname{cotg} i$$

dargestellt werden, wobei i einen gegebenen Winkel und a den Radius des Kreiscylinders bedeutet, auf welchem die Kurve liegt. Wir behalten alle früheren Bezeichnungen bei, die wir hier nicht zu wiederholen brauchen. Aus den Gleichungen

$$dx = -a \sin t \, dt, \quad dy = a \cos t \, dt, \quad dz = a \, dt \operatorname{cotg} i$$

folgt:

(2) $$ds = \frac{a\,dt}{\sin i}$$

und

(3) $$\cos \alpha = -\sin i \sin t, \quad \cos \beta = \sin i \cos t, \quad \cos \gamma = \cos i.$$

Die letzte besagt:

Die Tangente der Schraubenlinie bildet mit der Axe des Cylinders den konstanten Winkel i.

Die Differentiation der Gleichungen (3) ergiebt:

$$\cos \varphi \, d\sigma = -\sin i \cos t \, dt, \quad \cos \psi \, d\sigma = -\sin i \sin t \, dt, \quad \cos \chi \, d\sigma = 0,$$

also:

(4) $$d\sigma = \sin i \, dt,$$

und

(5) $$\cos \varphi = -\cos t, \quad \cos \psi = -\sin t, \quad \cos \chi = 0,$$

ferner vermittelst der Gleichungen (2) und (4):

$$R = \frac{a}{\sin^2 i}. \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) lehren:

Die Hauptnormale oder die Richtung des Krümmungsradius ist senkrecht zur Axe des Cylinders, und der Radius der ersten Krümmung der Schraubenlinie ist konstant.

Die Differentiation der Gleichungen (5) ergiebt:

$$\cos\alpha\, d\sigma + \cos\lambda\, d\tau = -\sin t\, dt,$$
$$\cos\beta\, d\sigma + \cos\mu\, d\tau = \cos t\, dt,$$
$$\cos\gamma\, d\sigma + \cos\nu\, d\tau = 0,$$

oder, auf Grund der Gleichungen (3) und (4)

$$\cos\lambda\, d\tau = -\cos^2 i \sin t\, dt, \quad \cos\mu\, d\tau = \cos^2 i \cos t\, dt,$$
$$\cos\nu\, d\tau = -\cos i \sin i\, dt.$$

Hieraus folgt:

$$d\tau = \cos i\, dt \tag{7}$$

und

$$\cos\lambda = -\cos i \sin t, \quad \cos\mu = \cos i \cos t, \quad \cos\nu = -\sin i, \tag{8}$$

ferner nach den Gleichungen (2) und (7)

$$T = \frac{a}{\sin i \cos i}. \tag{9}$$

Die Schmiegungsebene bildet einen konstanten Winkel mit der Ebene, die zur Cylinderaxe senkrecht ist, und der Radius der zweiten Krümmung ist konstant.

Der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel fällt mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen (nach Nr. 292); die Koordinaten sind:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x + R\cos\varphi = -a \operatorname{cotg}^2 i \cos t, \\ y_1 &= y + R\cos\psi = -a \operatorname{cotg}^2 i \sin t, \\ z_1 &= z + R\cos\chi = at \operatorname{cotg} i. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Rückkehrkurve der Polarfläche ist also eine Schraubenlinie, die auf einem Cylinder liegt, welcher die nämliche Axe wie der Cylinder der gegebenen Schraubenlinie hat, und dessen Radius gleich $a \operatorname{cotg}^2 i$ ist.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$-\sin i \sin t(x - a\cos t) + \sin i \cos t(y - a\sin t) + \cos i(z - at\operatorname{cotg} i) = 0,$$

oder

$$(11) \qquad -x\sin t + y\cos t + z\operatorname{cotg} i = at\operatorname{cotg}^2 i.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach t ergiebt:

$$(12) \qquad -x\cos t - y\sin t = a\operatorname{cotg}^2 i.$$

Man erhält also die Gleichung der Polarfläche, wenn man t zwischen den Gleichungen (11) und (12) eliminiert. Diese Fläche wird eine *abwickelbare Schraubenfläche.* Ihr Schnitt mit der Basis des Cylinders hat die beiden Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{aligned} -x\sin t + y\cos t &= at\operatorname{cotg}^2 i, \\ -x\cos t - y\sin t &= a\operatorname{cotg}^2 i, \end{aligned}$$

und folglich ist nach Nr. 244 diese Kurve die Evolvente eines Kreises mit dem Radius $a\operatorname{cotg}^2 i$.

Da endlich die Gleichung (7) liefert:

$$\tau = t\cos i + \text{konst},$$

so sind nach Nr. 292 die Evoluten der Schraubenlinie durch die Gleichungen dargestellt:

$$(14) \qquad \begin{cases} x = -a\operatorname{cotg}^2 i\cos t - \dfrac{a\cos i}{\sin^2 i}\sin t\operatorname{tang}(t\cos i + g), \\ y = -a\operatorname{cotg}^2 i\sin t + \dfrac{a\cos i}{\sin^2 i}\cos t\operatorname{tang}(t\cos i + g), \\ z = at\operatorname{cotg} i - \dfrac{a}{\sin i}\operatorname{tang}(t\cos i + g), \end{cases}$$

wobei g eine willkürliche Konstante bezeichnet. Endlich hat man, weil nach Gleichung (3)

$$s = \frac{at}{\sin i} + \text{konst}$$

ist, für die Evolventen:

$$(15) \qquad \begin{cases} x = a\cos t + \left(\dfrac{at}{\sin i} + g\right)\sin i\sin t, \\ y = a\sin t - \left(\dfrac{at}{\sin i} + g\right)\sin i\cos t, \\ z = -g\cos i. \end{cases}$$

Die Evolventen der Schraubenlinie sind Evolventen eines Kreises, was mit dem in Nr. 294 erhaltenen Resultate übereinstimmt.

298. Eine charakteristische Eigenschaft der Schraubenlinie. Bei der Schraubenlinie sind, wie wir gesehen haben, die beiden Krümmungen konstant. Es ist auch leicht zu beweisen, dafs sie die einzige Kurve ist, die diese Eigenschaft besitzt.

Denn betrachten wir eine Kurve, bei welcher die Radien R und T der beiden Krümmungen konstant sind; nach den Formeln (2) und (3) der Nr. 273 hat man:

$$R(\cos\alpha)' - T(\cos\lambda)' = 0,$$
$$R(\cos\beta)' - T(\cos\mu)' = 0,$$
$$R(\cos\gamma)' - T(\cos\nu)' = 0,$$

folglich sind die Differenzen:

$$R\cos\alpha - T\cos\lambda,\quad R\cos\beta - T\cos\mu,\quad R\cos\gamma - T\cos\nu$$

konstant; und da die Summe ihrer Quadrate gleich $R^2 + T^2$ ist, so kann man setzen:

$$R\cos\alpha - T\cos\lambda = \sqrt{R^2+T^2}\cos a,$$
$$R\cos\beta - T\cos\mu = \sqrt{R^2+T^2}\cos b,$$
$$R\cos\gamma - T\cos\nu = \sqrt{R^2+T^2}\cos c,$$

wobei a, b, c die Winkel bezeichnen, die eine feste willkürliche Gerade mit den Koordinatenaxen bildet. Man kann die z-Axe mit dieser Geraden zusammenfallen lassen und also setzen:

$$(1)\qquad \begin{cases} R\cos\alpha - T\cos\lambda = 0, \\ R\cos\beta - T\cos\mu = 0, \\ R\cos\gamma - T\cos\nu = \sqrt{R^2+T^2}. \end{cases}$$

Subtrahieren wir die ersten beiden dieser Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit $\cos\psi$ und $\cos\varphi$ multipliziert haben, subtrahieren wir ferner die erste und dritte, nachdem sie mit $\cos\chi$ und $\cos\varphi$ multipliziert sind, und endlich die zweite und dritte, nachdem sie mit $\cos\chi$ und $\cos\varphi$ multipliziert sind, so folgt nach den Gleichungen in Nr. 264:

$$(2)\qquad \begin{cases} T\cos\alpha + R\cos\lambda = +\sqrt{R^2+T^2}\cos\psi, \\ T\cos\beta + R\cos\mu = -\sqrt{R^2+T^2}\cos\varphi, \\ T\cos\gamma + R\cos\nu = 0; \end{cases}$$

diese Gleichungen geben zusammen mit den früheren:

$$(3)\qquad \cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}}\cos\psi, \quad \cos\beta = \frac{-T}{\sqrt{R^2+T^2}}\cos\varphi,$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}}.$$

Dabei ist zu bemerken, dafs die bisherige Rechnung nur voraussetzt, dafs das Verhältnis $\frac{R}{T}$ der beiden Krümmungen konstant ist. Die letzte der Gleichungen (3) lehrt nun, dafs die Tangente der Kurve mit der z-Axe einen konstanten Winkel bildet, und liefert also den Satz:

Wenn die beiden Krümmungen einer Kurve unter einander ein konstantes Verhältnis haben, so ist die Kurve eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, dessen Basis eine beliebige Kurve ist.

Aus den Gleichungen (3) folgt:

$$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi = 0,$$

und hieraus folgt, dafs $\cos\gamma\cos\chi = 0$ ist. Also ist $\cos\chi = 0$. Mithin kann man schreiben:

$$\cos\psi = \sin\varphi$$

und

$$(4)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha &= +\sin\gamma\sin\varphi, \\ \cos\beta &= -\sin\gamma\cos\varphi. \end{aligned}$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen, so wird

$$\frac{ds}{R}\cos\varphi = \sin\gamma\cos\varphi\, d\varphi \quad \text{oder} \quad ds = R\sin\gamma\, d\varphi,$$

und die Gleichungen (4) geben:

$$\frac{dx}{ds} = \sin\gamma\sin\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin\gamma\cos\varphi,$$

und ferner hat man:

$$\frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

also

$$dx = R\sin^2\gamma\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = -R\sin^2\gamma\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$dz = R\sin\gamma\cos\gamma\, d\varphi.$$

Wir haben bisher nur das Verhältnis von T zu R konstant angenommen. Ist der Radius R selbst konstant, so unterscheiden sich die Koordinaten von den Gröfsen

$$-R\sin^2\gamma\cos\varphi, \quad -R\sin^2\gamma\sin\varphi, \quad R\varphi\sin\gamma\cos\gamma$$

nur um Konstante; und da der Anfangspunkt der Koordinaten willkürlich ist, so kann man setzen:

$$(5)\quad x=-R\sin^2\gamma\cos\varphi,\ y=-R\sin^2\gamma\sin\varphi,\ z=R\varphi\sin\gamma\cos\gamma.$$

Diese Gleichungen definieren in der That die gewöhnliche Schraubenlinie, bei welcher der Krümmungsradius gleich R und der Radius des Cylinders gleich $R\sin^2\gamma$ ist.

§ 9. Berührung und Oskulation zweier Kurven und zweier Flächen.

299. Definition der Berührung k^{ter} Ordnung zweier Kurven. Es seien zwei Raumkurven gegeben:

$$(1)\qquad y_1 = f_1(x), \quad z_1 = F_1(x)$$

und

$$(2)\qquad y_2 = f_2(x), \quad z_2 = F_2(x)$$

und die rechten Seiten seien in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickelt. Man kann entweder die unendliche *Taylor*sche Entwickelung als möglich voraussetzen, oder — wie bisher — die *Taylor*sche Reihe in der Form des „verallgemeinerten Mittelwertssatzes" der Nr. 112 sich als gegeben denken, indem man zu den n ersten Gliedern der *Taylor*schen Reihe noch einen Rest R_n hinzufügt. In diesem Falle nehmen wie n gröfser als die sogleich zu definierende Zahl $k+1$ an. In beiden Fällen sind die Gleichungen der Kurven (1) und (2) bezw.:

$$(3)\quad \begin{cases} y_1 = b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \cdots \\ z_1 = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \cdots \end{cases}$$

und

$$(4)\quad \begin{cases} y_2 = \beta_0 + \beta_1(x-x_0) + \cdots + \beta_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \cdots \\ z_2 = \gamma_0 + \gamma_1(x-x_0) + \cdots + \gamma_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \cdots \end{cases}$$

Die Koeffizienten sind in bekannter Weise nach Nr. 112 zu berechnen. Wir legen darauf keinen Wert, ebensowenig wie auf die fortgelassenen Glieder höherer Ordnung, die nur durch Punkte angedeutet sind.

Wir bilden nun die Differenzen $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$, indem wir die entsprechenden Reihen gliedweise subtrahieren. Dabei kann es eintreten, dafs die ersten Potenzen von $x - x_0$ einschliefslich der nullten sich fortheben. Es sei etwa λ die niedrigste Potenz von $x - x_0$, die in der Entwickelung von $y_1 - y_2$ stehen bleibt und μ die analoge Zahl für $z_1 - z_2$. Dann wird

(5) $$y_1 - y_2 = b \cdot (x - x_0)^\lambda + \cdots, \quad b \neq 0,$$

(6) $$z_1 - z_2 = c \cdot (x - x_0)^\mu + \cdots, \quad c \neq 0,$$

und es werden daher $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$ an der Stelle $x = x_0$ null von der Ordnung λ bezw. μ.

Bezeichnet nun $k + 1$ die kleinere der beiden Zahlen λ und μ, wenn λ und μ verschieden sind, dagegen ihren gemeinsamen Wert, wenn λ und μ gleich sind, so sagt man, dafs die beiden Kurven *sich in der k^{ten} Ordnung berühren.*

Die kleinsten Werte, die λ und μ haben können, damit k nicht negativ ist, sind $\lambda = 1$ und $\mu = 1$. Dann ist $b_0 = \beta_0$, $c_0 = \gamma_0$ oder
$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \quad F_1(x_0) = F_2(x_0).$$
Also stimmen an der Stelle $x = x_0$ die Werte von y_1 und y_2 einerseits, sowie von z_1 und z_2 andrerseits überein; d. h. die Kurven schneiden sich in dem Punkte M, dessen Abscisse x ist. Gleichzeitig wird $k = 0$. Also:

Zwei sich schneidende Kurven berühren sich in der nullten Ordnung.

Wird nur eine der Zahlen λ und μ gröfser als 1, während die andere gleich 1 bleibt, so bleibt auch $k = 0$; k erreicht den Wert 1, sobald gleichzeitig
$$\lambda = 1, \quad \mu = 1$$
wird. In diesem Falle wird
$$b_0 = \beta_0, \quad b_1 = \beta_1; \quad c_0 = \gamma_0, \quad c_1 = \gamma_1;$$
oder
$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \qquad f_1'(x_0) = f_2'(x_0),$$
$$F_1(x_0) = F_2(x_0), \quad F_1'(x_0) = F_2'(x_0).$$

Mithin werden die beiden Tangenten in M

$$\eta - f_1(x_0) = f_1'(x_0)\cdot(\xi - x_0), \quad \zeta - F_1(x_0) = F_1'(x_0)\cdot(\xi - x_0)$$

und

$$\eta - f_2(x_0) = f_2'(x_0)\cdot(\xi - x_0), \quad \zeta - F_2(x_0) = F_2'(x_0)\cdot(\xi - x_0)$$

identisch. Also:

Zwei sich in erster Ordnung berührende Kurven haben im Berührungspunkte die Tangente gemein.

Nach Nr. 214 berühren sich die Projektionskurven der beiden Raumkurven auf die xy-Ebene in der $\lambda - 1^{\text{ten}}$, die auf die xz-Ebene in der $\mu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung; denn nach (5) und (6) wird mit $x - x_0$ die Differenz $y_1 - y_2$ von der λ^{ten} und $z_1 - z_2$ von der μ^{ten} Ordnung null. k ist aber — kurz gesagt — die kleinere der beiden Zahlen $\lambda - 1$ und $\mu - 1$. Also sehen wir:

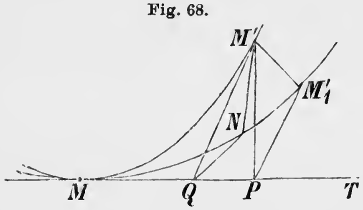
Berühren sich zwei Raumkurven in der k^{ten} Ordnung, so berühren sich ihre Projektionskurven auf die xy-Ebene und xz-Ebene mindestens je in der k^{ten}, und in der einen Ebene genau in der k^{ten} Ordnung.

Endlich wollen wir uns wieder die Definition der Berührung k^{ter} Ordnung geometrisch veranschaulichen. Wir legen den Koordinatenanfang in den Punkt M; dann wird:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Die x-Axe legen wir — unter der Voraussetzung, dafs eine solche vorhanden ist — in die gemeinsame Tangente im Punkte M. Es sei nun M' (Fig. 68) ein Punkt (x, y_1, z_1) der ersten Kurve, der in der Umgebung von M liegt. Wir legen durch M' eine Ebene senkrecht zur gemeinsamen Tangente. Sie wird parallel der yz-Ebene und schneidet die zweite Kurve in dem Punkte $M_1'(x, y_2, z_2)$, die Tangente in einem Punkte P, dessen Entfernung MP vom Berührungspunkte gleich x ist. Alsdann wird die Entfernung von M' und M_1'

Fig. 68.



$$\overline{M'M_1'} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

nach den Gleichungen (5) und (6):

$$\overline{M'M_1'} = \sqrt{b^2x^{2\lambda} + \cdots + c^2x^{2\mu} + \cdots}$$

Ist nun $\lambda \neq \mu$, so sei etwa $\lambda < \mu$. Dann wird $\lambda = k + 1$ und

$$\overline{M'M_1'} = \sqrt{b^2 x^{2k+2} + \cdots} = b \cdot x^{k+1} \cdot \sqrt{1 + \cdots}$$

Mithin wird in diesem Falle für $x = 0$, d. h. an der Stelle M

$$\lim_{x=0} \frac{M'M_1'}{x^{k+1}} = \lim_{MP=0} \frac{M'M_1'}{MP^{k+1}} = b$$

endlich und von null verschieden. Aber auch wenn $\lambda = \mu$ ist, tritt dies ein; dann wird $\lambda = \mu = k + 1$ und

$$\overline{M'M_1'} = \sqrt{(b^2 + c^2)x^{2k+2} + \cdots} = \sqrt{b^2 + c^2} \cdot x^{k+1} \sqrt{1 + \cdots},$$

und also

$$\lim_{x=0} \frac{M'M_1'}{x^{k+1}} = \lim_{MP=0} \frac{M'M_1'}{MP^{k+1}} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

wieder endlich und von null verschieden.

Wir können also sagen:

Zwei Kurven berühren sich in einem Punkte M in der k^{ten} Ordnung, heifst, wenn $k > 0$ ist:

Man fälle von einem Punkte M' der einen Kurve eine Ebene senkrecht auf die gemeinsame Tangente in M; es sei M_1' ihr Schnittpunkt mit der anderen Kurve und P ihr Schnittpunkt mit der Tangente in M. Alsdann wird die Entfernung von M' und M_1' mit MP null von $k + 1^{\text{ter}}$ Ordnung.

300. Oskulation von einer Kurve einer Schar und einer gegebenen Kurve. Die eine der beiden Kurven der vorigen Nummer bleibe fest gegeben, etwa die Kurve (1); fest gegeben sei auch der Punkt M auf ihr. Die andere Kurve werde durch eine ganze Schar von solchen ersetzt, deren Gleichungen (2) von $m+1$ willkürlichen Konstanten $a_1\ a_2 \ldots a_{m+1}$ abhängen. Es seien geradezu die $m + 1$ ersten Koeffizienten der Gleichungen (4) jene willkürlichen Konstanten. Wir suchen unter den Kurven der Schar (2) wieder eine *oskulierende*, d. h. in möglichst hoher Ordnung berührende, und fragen, wie hoch im Allgemeinen diese Ordnungszahl wird.

Wir haben da zwei Fälle zu unterscheiden:

1) m ist ungerade: $m = 2n + 1$. Dann seien gerade:

$$a_1 = \beta_0, \qquad a_2 = \beta_1, \ldots a_{n+1} = \beta_n,$$
$$a_{n+2} = \gamma_0, \quad a_{n+3} = \gamma_1, \ldots a_{2n+2} = \gamma_n$$

die $m + 1$ willkürlichen Konstanten unserer Schar. Wir können über sie so verfügen, dafs ihre Werte mit den entsprechenden Koeffizienten in den Reihen (3) der gegebenen Kurve übereinstimmen. Im Allgemeinen wird dann noch

$$b_n = \beta_n, \quad c_n = \gamma_n;$$

aber nicht mehr

$$b_{n+1} = \beta_{n+1}, \quad c_{n+1} = \gamma_{n+1}$$

werden. Wir erhalten *eine bestimmte* oskulierende Kurve, welche in der n^{ten} Ordnung berührt.

Ist dagegen:

2) m gerade: $m = 2n + 2$; dann seien gerade:

$$a_1 = \beta_0, \qquad a_2 = \beta_1, \ldots a_{n+1} = \beta_n,$$
$$a_{n+2} = \gamma_0, \quad a_{n+3} = \gamma_1, \ldots a_{2n+2} = \gamma_n, \; a_{2n+3} = \gamma_{n+1}$$

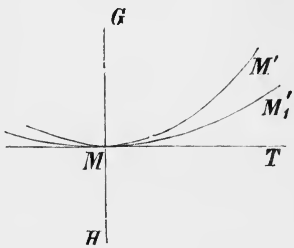
die $m + 1$ willkürlichen Konstanten unserer Schar. Verfügen wir über $a_1 \ldots a_{2n+2}$ wie vorher, so wird wieder eine Berührung mindestens n^{ter} Ordnung erreicht. Nun bleibt zwar γ_{n+1} mit a_{2n+3} noch willkürlich und wir können es noch mit c_{n+1} in Übereinstimmung bringen. Aber β_{n+1} ist jetzt fest und im Allgemeinen verschieden von b_{n+1}. Wir bekommen im Allgemeinen also eine Schar von unendlich vielen oskulierenden Kurven, deren jede in der n^{ten} Ordnung berührt und aus denen man keine noch inniger berührende heraussuchen kann.

301. Der oskulierende Kreis ist der Krümmungskreis. Die Gleichungen eines Kreises im Raum enthalten $m + 1 = 6$ willkürliche Gröfsen, nämlich die Koordinaten des Mittelpunktes, den Radius, und zwei der Winkel, welche die Ebene des Kreises mit den Koordinatenaxen bildet. Es ist also hier $m = 2n + 1 = 5$, $n = 2$. Also ist die Berührung einer Kurve mit dem sie oskulierenden Kreise von zweiter Ordnung. In Nr. 279 wurde gezeigt, dafs die Projektionen einer Kurve und ihres Krümmungskreises auf eine beliebige Ebene eine Berührung zweiter

Ordnung besitzen; folglich haben auch die beiden Kurven dieselbe Berührung, der oskulierende Kreis ist also der Krümmungskreis.

302. Die Berührung zweier Flächen. Wir betrachten zwei Flächen, die durch einen Punkt M gehen und dort die nämliche Tangentenebene besitzen. Durch die gemeinsame Normale GH legen wir eine Ebene, welche die Flächen in den Kurven MM', MM_1' schneidet, die im Punkte M die nämliche Tangente MT haben. Die Ordnung k der Berührung dieser Kurven kann mit der Normalebene GHT variieren. Wenn nun für alle Normalebenen die Ordnung der Berührung der Schnittkurven niemals kleiner ist als k, und auch nicht in allen Normalebenen gröfser ist als k, so sagt man, dafs die beiden Flächen eine Berührung k^{ter} Ordnung haben.

Fig. 69.



Es sei die z-Axe parallel zur Normalen GH, die beiden anderen Axen sind alsdann parallel zur Tangentenebene; bezeichnet man mit x und y die Koordinaten des Punktes M, mit z und z' die Ordinaten der Flächen, die den Abscissen

$$x + \Delta x = x + \varrho \cos\omega, \quad y + \Delta y = y + \varrho \sin\omega$$

entsprechen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Berührung k^{ter} Ordnung, dafs die Differenz

$$Z - Z'$$

der Abstände zweier Punkte M' und M_1' einer Normalebene von der Tangente MT mit ϱ mindestens von der Ordnung $k+1$ null wird, welches auch der Wert des Winkels ω sein mag, und nicht für alle ω von höherer als $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung null wird. Sind aber z und z' die Werte von Z und Z', welche dem Werte $\varrho = 0$ entsprechen, so hat man:

$$Z = z + dz + \frac{1}{2} d^2 z + \cdots \frac{1}{n!} d^n z + R_{n+1},$$

$$Z' = z' + dz' + \frac{1}{2} d^2 z' + \cdots \frac{1}{n!} d^n z' + R'_{n+1}.$$

Die Bedingungen der Berührung k^{ter} Ordnung sind also:

$$z' = z, \quad dz' = dz, \quad d^2z' = d^2z, \ldots d^kz' = d^kz, \quad d^{k+1}z' \neq d^{k+1}z,$$

und die Werte von dx und dy sind hier $\varrho \cos \omega$ und $\varrho \sin \omega$.

Da aber diese Bedingungen unabhängig vom Werte ω stattfinden sollen, so erkennt man, dafs die für die Berührung k^{ter} Ordnung notwendigen und hinreichenden Bedingungen darin bestehen, dafs für den Punkt M die Ordinaten z der beiden Flächen, sowie sämtliche partielle Ableitungen, bis einschliefslich derer k^{ter} Ordnung, einander bezüglich gleich sind. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dieser Schlufs gilt unabhängig von dem Koordinatensysteme, auf welches die Flächen bezogen sind. Denn, wenn man eine Transformation des Koordinatensystemes ausführt, so stellt sich bei jeder Fläche jede partielle Ableitung μ^{ter} Ordnung der neuen Ordinate z in Bezug auf die neuen Abscissen durch eine Funktion dar, welche die partiellen Ableitungen der ursprünglichen Gröfse z in Bezug auf die alten Abscissen, bis zur μ^{ten} Ordnung inklusive, enthält. Mithin bleiben die Gleichungen zwischen den partiellen Ableitungen auch in Bezug auf das neue System bestehen. Man mufs nur beachten, dafs wenn die z-Axe des neuen Systemes parallel der Tangentenebene wird, die partiellen Ableitungen erster Ordnung unendlich und daher die Formeln illusorisch werden.

303. Oskulierende Fläche einer Flächenschar. Wenn man eine bestimmte Fläche und aufserdem ein Flächensystem betrachtet, in dessen Gleichung $m+1$ willkürliche Gröfsen enthalten sind, so kann man *oskulierende Fläche* in diesem Systeme diejenige nennen, welche in einem gegebenen Punkte der gegebenen Fläche eine Berührung von möglichst hoher Ordnung mit der letzteren besitzt. Doch führt diese Betrachtung nicht zu einem wesentlichen Resultate. Die oskulierende Fläche, wie wir sie definiert haben, wird mit der gegebenen eine Berührung besitzen, deren Ordnung k die gröfste ganze Zahl ist, welche der Bedingung

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \text{oder} < m+1$$

genügt; und dabei werden meistens in der Gleichung der oskulierenden Fläche noch willkürliche Gröfsen unbestimmt bleiben.

Im Falle der Ebene hat man $m = 2$ und $k = 1$; die oskulierende Ebene hat eine Berührung erster Ordnung und ist nichts anderes als die Tangentenebene. Im Falle der Kugel hat man $m = 3$ und $k = 1$; hier bleibt aber eine willkürliche Gröfse unbenutzt, und es ist ersichtlich, dafs für eine Fläche eine bestimmte oskulierende Kugel nicht vorhanden ist.

Zehntes Kapitel.

Die Kurven auf Flächen und die Flächenfamilien.

Wir setzen die Gleichung einer Fläche meist in der Form

(1) $$z = F(x, y)$$

als gegeben voraus. Eine auf ihr liegende Raumkurve denken wir uns in der Form gegeben:

(2) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t);$$

so dafs die Substitution der Gleichungen (2) in (1) die Gleichung (1) zu einer Identität macht. Einem bestimmten Parameterwerte t entspricht ein bestimmter Punkt M der Kurve, welcher auf der Fläche liegt. In der Umgebung dieses Punktes sehen wir für die Funktionen F, φ, ψ, χ die Forderung $\mathfrak{B}$ als erfüllt an. Weitere Annahmen werden in jedem einzelnen Falle angegeben.

§ 1. Die Krümmung der durch einen Flächenpunkt gehenden Kurven.

304. Berechnung des Krümmungsradius irgend einer durch einen Flächenpunkt gehenden Kurve. Wir bezeichnen mit x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Fläche und setzen:

(1) $$dz = p\,dx + q\,dy \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

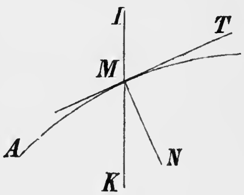
(2) $$\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy \\ dq &= s\,dx + t\,dy \end{aligned} \quad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Nimmt man x und y als unabhängige Variabele, so hat man hiernach

$$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Wir betrachten nun eine Kurve AM, die auf der Fläche liegt; $M(x, y, z)$ sei ein Punkt dieser Kurve, MT die Tangente in M, MN die Hauptnormale, die zugleich Richtung des Krümmungsradius ist, IK die Normale im Punkte M der Fläche. Wir bezeichnen ferner mit α, β, γ die Winkel, welche die Richtung MT der Tangente mit den positiven Koordinatenaxen bildet; mit φ, ψ, χ die Winkel, welche die Richtung der Hauptnormalen MN mit denselben Axen bildet; mit R den Krümmungsradius der Kurve im Punkte M, mit σ die totale Krümmung des Bogens AM, gemessen von einem beliebigen Anfangspunkte A. Dann ist $d\sigma$ der Kontingenzwinkel und $R d\sigma$ bezeichnet das Differential des Bogens AM. Man hat also unter den Voraussetzungen der Nr. 259—262:

Fig. 70.



$$\text{(3)} \qquad \frac{dx}{d\sigma} = R\cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma} = R\cos\beta, \quad \frac{dz}{d\sigma} = R\cos\gamma$$

und

$$\text{(4)} \qquad \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \cos\varphi, \quad \frac{d\cos\beta}{d\sigma} = \cos\psi, \quad \frac{d\cos\gamma}{d\sigma} = \cos\chi.$$

Nun haben gemäfs der Gleichung (1) die Winkel, welche mit den positiven Koordinatenaxen eine der beiden Richtungen der Normalen IK bildet, die Kosinus

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

wobei die Wurzel $\sqrt{1+p^2+q^2}$ mit irgend einem Vorzeichen zu nehmen ist.

Ist dieses Vorzeichen willkürlich fixiert, so ist die Richtung der Normalen dem Sinne nach bestimmt; es sei MK diese Richtung. Bezeichnen wir endlich mit θ den zwischen 0 und π enthaltenen Winkel, den die Richtungen MN und MK mit einander bilden, so ist

$$\cos\theta = \frac{\cos\chi - p\cos\varphi - q\cos\psi}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

also auf Grund der Gleichungen (4)

$$\text{(5)} \qquad \cos\theta = \frac{\frac{d\cos\gamma}{d\sigma} - p\,\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} - q\,\frac{d\cos\beta}{d\sigma}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Substituiert man in die Gleichungen (1) und (2) die Werte von dx, dy, dz, welche aus den Gleichungen (3) folgen, so erhält man

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta, \tag{6}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{d\sigma} &= R(r\cos\alpha + s\cos\beta),\\ \frac{dq}{d\sigma} &= R(s\cos\alpha + t\cos\beta). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Die Differentiation der Gleichung (6) giebt ferner

$$\frac{d\cos\gamma}{d\sigma} = \left(p\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} + q\frac{d\cos\beta}{d\sigma}\right) + \left(\frac{dp}{d\sigma}\cos\alpha + \frac{dq}{d\sigma}\cos\beta\right),$$

oder nach den Gleichungen (7):

$$\begin{aligned} \frac{d\cos\gamma}{d\sigma} - p\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} - q\frac{d\cos\beta}{d\sigma}& \\ = R(r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta)&. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gleichung (5) verwandelt sich also in die folgende:

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}. \tag{9}$$

Sie drückt den Krümmungsradius der Kurve AM als Funktion der Gröfsen aus, die sich auf die Fläche beziehen, und der Winkel, durch welche die Richtung der Tangente und der Hauptnormale der Kurve bestimmt sind. Der Radius R ist eine positive Gröfse; das Zeichen $\cos\theta$ wird also immer das der rechten Seite der Gleichung (9).

Anmerkung. Ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche, und konstruiert man in einem Punkte x, y, z die Flächennormale, so kann man die beiden Richtungen dieser Normale im Allgemeinen dadurch unterscheiden, dafs für die Punkte auf der einen Richtung die Funktion $f(x, y, z)$ einen positiven, für die Punkte der anderen einen negativen Wert erhält. Denn es ist die Gleichung der Normalen

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

bezeichnet man also die Koordinaten eines auf der Normalen gelegenen Punktes mit $x + h$, $y + k$, $z + l$, so bestehen die Relationen:

$$k\frac{\partial f}{\partial x}=h\frac{\partial f}{\partial y},\quad l\frac{\partial f}{\partial x}=h\frac{\partial f}{\partial z},$$

und es wird:

$$f(x+h,y+k,z+l)=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)_\theta$$

$$=\frac{h}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\theta}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]_\theta$$

Der Index θ bedeutet, dafs $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l$ für x, y, z zu setzen ist. Der Wert der Funktion ändert demnach sein Zeichen, je nach dem Vorzeichen von h. Ist die Gleichung in der expliciten Form gegeben:

$$z-f(x,y)=0,$$

so ist

$$z+l-f(x+h,x+k)=-\frac{h}{p_\theta}[1+p^2+q^2]_\theta$$

Demnach kann man die eine Richtung der Normalen und dementsprechend die eine Flächenseite als die positive, die andere als die negative bezeichnen, je nach dem Vorzeichen des Wertes $f(x+h, y+k, z+l)$.

Betrachtet man diejenige Richtung der Normalen, die nach der positiven Seite verläuft, so erhalten die Kosinus der Winkel, die diese Richtung mit den positiven Koordinatenaxen bildet, einen bestimmten unzweideutigen Wert, und demgemäfs mufs auch das Vorzeichen von $\sqrt{1+p^2+q^2}$ unzweideutig bestimmt sein.

Setzt man

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

wobei das Vorzeichen auf der rechten Seite noch fraglich ist, α, β, γ aber die fixierte Richtung bezeichnen, so wird die Gleichung der Normalen:

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma},$$

und bestimmt man auf der angenommenen Richtung der Normalen den Punkt $x+h$, $y+k$, $z+l$, so haben in der Gleichung

$$\frac{h}{\cos\alpha} = \frac{k}{\cos\beta} = \frac{l}{\cos\gamma}$$

die Verhältnisse einen positiven Wert. Es wird nun

$$z + l - f(x+h,\, y+k) = (l - hp - kq)_\theta$$
$$= \left[\frac{h}{\cos\alpha}(\cos\gamma - p\cos\alpha - q\cos\beta)\right]_\theta = \left[\frac{h}{\cos\alpha}\left(\frac{1+p^2+q^2}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\right]_\theta$$
$$= \pm\left[\frac{h}{\cos\alpha}\sqrt{1+p^2+q^2}\right]$$

Soll also der Ausdruck positiv werden, so hat man der Quadratwurzel das positive Zeichen zu geben; mithin ist bewiesen: Giebt man in den Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

der Quadratwurzel das positive Zeichen, so fixiert man damit diejenige Richtung der Normalen, welche in jedem Punkte nach der positiven Flächenseite gerichtet ist, das heifst nach derjenigen, für welche die Funktion $z - f(x, y)$ positiv wird.

Dasselbe findet statt bei der allgemeineren Flächengleichung $f(x, y, z) = 0$, wenn man setzt:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Einer besonderen Untersuchung bedürfen jedesmal die Punkte, in denen diese partiellen Ableitungen sämtlich gleich 0 sind, oder p und q unbestimmt werden.

305. Ein Satz von Meunier. Betrachten wir jetzt den Normalschnitt der Fläche, welcher erhalten wird, wenn man sie durch die Ebene der Linien MT, MK schneidet.

Ist R_0 der Krümmungsradius im Punkte M dieses Schnittes, so wird der Winkel θ hier 0 oder π. Die Gleichung (9) ergiebt

$$\frac{R_0}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

und folglich ist:

$$(10) \qquad R = \pm R_0 \cos\theta.$$

Das zweideutige Zeichen $\pm$ kann durch Plus oder Minus ersetzt werden, je nachdem θ kleiner oder gröfser ist als $\frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung (10) enthält das wichtige Theorem von *Meunier*, welches aussagt:

Der Krümmungsradius einer beliebigen auf einer Fläche gelegenen Kurve ist in jedem Punkte gleich dem Produkte aus dem Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes, der die Tangente der Kurve enthält, und dem Kosinus des Winkels, den diese Schnittebene mit der Schmiegungsebene der Kurve bildet.

Dieser Satz führt unmittelbar zu der bemerkenswerten Folgerung:

Konstruiert man eine Kugel, deren Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt eines Normalschnittes und deren Radius der Krümmungsradius desselben ist, so schneiden sämtliche Ebenen, welche man durch die Tangente dieses Normalschnittes hindurchlegt, die Kugel in Kreisen, welche die Krümmungskreise für sämtliche durch diese Ebenen gebildeten schiefen Schnitte sind.

Nach dem Theorem von *Meunier* erfordert also die Untersuchung der Krümmung der verschiedenen Kurven, welche man auf einer Fläche durch einen gegebenen Punkt ziehen kann, und die eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Oskulationsebene besitzen, nur die Untersuchung der Krümmung der Normalschnitte.

306. Das Vorzeichen des Krümmungsradius. Wir sahen, dafs der Krümmungsradius R eines Normalschnittes im Punkte M einer Fläche durch die Gleichung gegeben ist:

$$(1) \qquad \frac{R}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

wobei das Zeichen der Quadratwurzel willkürlich gewählt werden kann; das zweideutige Zeichen des Nenners auf der linken Seite mufs dann so bestimmt werden, dafs R einen positiven Wert erhält. Dieser Nenner ± 1 ist aber der Kosinus des Winkels, den die Richtung MN des Radius mit der Richtung MK der Flächennormalen bildet, welche letztere durch das Vorzeichen von $\sqrt{1+p^2+q^2}$ fixiert ist. Dieser Winkel ist gleich 0 oder π, folglich mufs das zweideutige Zeichen $\pm$ durch Plus ersetzt werden, wenn der Radius R nach MK gerichtet ist, und durch Minus, wenn die Richtung von R der Richtung von MK entgegengesetzt ist. Setzt man also fest, dafs der Krümmungsradius R positiv sein soll in dem ersten Falle und negativ in dem zweiten, so hat man die einheitliche Formel

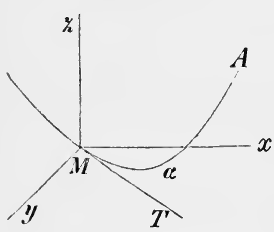
$$(2)\qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

welche die Krümmungsradien der Normalschnitte im Punkte M nach Gröfse und Richtung bestimmt.

Die Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte in einem Flächenpunkte sind alle auf der nämlichen Geraden gelegen und werden sämtlich von einem gemeinsamen Anfangspunkte an gemessen. Wir befolgen also eine allgemeine geometrische Regel, wenn wir diese Radien als positiv oder als negativ betrachten, je nachdem sie in dem einen oder anderen Sinne gerichtet sind.

307. Normalschnitte und Hauptschnitte. Nabelpunkte. Der Vergleich aller möglichen Radien in einem Punkte wird sehr erleichtert, wenn wir den Koordinaten-Anfangspunkt in den Punkt M der Fläche legen, und eine der Axen, z. B. die z-Axe, mit der Richtung MK der Normalen zusammenfallen lassen. Die Axen der Koordinaten x und y liegen alsdann in der Tangentenebene, und man hat

Fig. 71.



$$p = 0, \quad q = 0,$$

ferner

$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\beta = \sin\alpha.$$

Die Wurzel $\sqrt{1+p^2+q^2}$ reduziert sich auf ± 1, aber da es uns freisteht, das Zeichen zu fixieren, so wählen wir das positive. Die Normale ist alsdann nach der positiven Seite der Fläche gerichtet.

Demnach wird die Gleichung (2):

$$(3) \qquad R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist gleich

$$\frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\alpha + s\sin 2\alpha.$$

Bestimmt man also einen Winkel $2\alpha_0$ zwischen 0 und π derart, dafs

$$s = \frac{r-t}{2}\operatorname{tang} 2\alpha_0,$$

so wird die Gleichung (3):

$$(4) \qquad R = \frac{1}{\frac{r+t}{2} + \sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}\cos 2(\alpha-\alpha_0)}.$$

Die Wurzel $\sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$ hat das Vorzeichen des Quotienten $\frac{r-t}{2} : \cos 2\alpha_0$.

Man erkennt hieraus, dafs der Wert von R ein Maximum oder Minimum wird für die Werte

$$\cos 2(\alpha-\alpha_0) = \mp 1,$$

welche ergiebt:

$$\alpha = \alpha_0 + k\frac{\pi}{2},$$

wenn k eine ganze Zahl ist. Da aber zwei Werte von α, die sich um ein Vielfaches von π unterscheiden, zu dem nämlichen Normalschnitt gehören, so reicht es aus, die beiden Werte

$$\alpha = \alpha_0 \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

zu betrachten, welche zwei zu einander senkrechte Normalschnitte bestimmen. Für den einen von ihnen ist der Krümmungsradius R ein Minimum, für den andern ein Maximum. Diese beiden Normalschnitte heifsen die *Hauptschnitte* der

Fläche im Punkte M und ihre Krümmungsradien die *Hauptkrümmungsradien* der Fläche in diesem Punkte.

Dies erfordert indessen, daſs s und $r - t$ nicht zugleich null sind; denn wenn $s = 0$ und $r = t$ ist, so ist der Winkel α_0 nicht mehr bestimmt. In diesem Falle reduziert sich die Gleichung (3) auf

$$R = \frac{1}{r}$$

und hieraus folgt, daſs alle Normalschnitte der Fläche im Punkte M den nämlichen Krümmungsradius haben. Irgend zwei zu einander rechtwinklige Schnitte können als ein System von Hauptschnitten betrachtet werden. Die Punkte der Fläche, welche diese Eigenschaft haben, heiſsen *Nabelpunkte* oder *Punkte sphärischer Krümmung.*

308. Die Eulersche Gleichung. Wir können noch die Diskussion der Gleichung (3) vereinfachen, wenn wir als Koordinatenebenen zx und zy die Hauptschnitte wählen, deren Existenz wir bewiesen haben. Der mit α_0 bezeichnete Winkel wird dann null, und die Gleichung, welche zur Definition dieses Winkels diente, giebt dann

$$s = 0.$$

Alsdann wird die Gleichung (3)

$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha},$$

oder

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha. \tag{5}$$

Sind R_1 und R_2 die Krümmungsradien der Hauptschnitte, welche durch die zx- und zy-Ebene gebildet werden, so giebt die Gleichung (5) für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t. \tag{6}$$

Folglich wird der allgemeine Ausdruck für $\frac{1}{R}$, die *Euler*sche Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha. \tag{7}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ändert sich nicht, wenn man statt α den Wert $\pi - \alpha$ einsetzt; man hat also den Satz:

Zwei Normalschnitte, welche gegen einen Hauptschnitt in dem einen oder andern Sinne gleich geneigt sind, haben gleiche und gleich gerichtete Krümmungsradien.

Bezeichnet man mit R' den Wert, der aus R hervorgeht, wenn man α um $\frac{\pi}{2}$ vermehrt, so hat man

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha, \tag{8}$$

und die Gleichungen (7) und (8) ergeben:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{9}$$

Die halbe Summe der Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ wird die *mittlere Krümmung* der Fläche im Punkte M genannt. Die Gleichung (9) liefert also den Satz:

Die mittlere Krümmung zweier zu einander senkrechten Normalschnitte ist in einem Flächenpunkte konstant und gleich der mittleren Krümmung der Fläche in diesem Punkte.

309. Krümmungsänderung von Normalschnitt zu Normalschnitt. Wir untersuchen nun die Änderung von R, wenn man dem Winkel α successive alle Werte beilegt, welche den verschiedenen Normalschnitten entsprechen, und die zwischen 0 und π enthalten sind.

Zuerst nehmen wir an, dafs die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 von gleichem Zeichen sind; dabei kann man voraussetzen, dafs sie positiv sind, denn um ihr Zeichen zu ändern, genügt es, die Richtung der positiven z-Axe zu ändern. Ferner sei

$$R_1 < R_2.$$

Die Gleichung (7) kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin^2\alpha.$$

Man erkennt, dafs R wächst von R_1 bis R_2, während α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, und dafs es dann abnimmt von R_2 bis R_1, während α von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst. Die Fläche ist in der Umgebung des Berührungspunktes ganz auf der nämlichen

Seite der Tangentenebene gelegen, denn sämtliche Normalschnitte sind nach derselben Seite gekrümmt.

Nehmen wir zweitens an, dafs R_1 und R_2 von entgegengesetztem Zeichen sind; es sei R_1 positiv und es werde

$$R_2 = - R_1 \operatorname{tang}^2 \alpha_0$$

gesetzt, wobei α_0 ein Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist; die Gleichung (7) wird nun

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 \sin^2 \alpha_0} (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha).$$

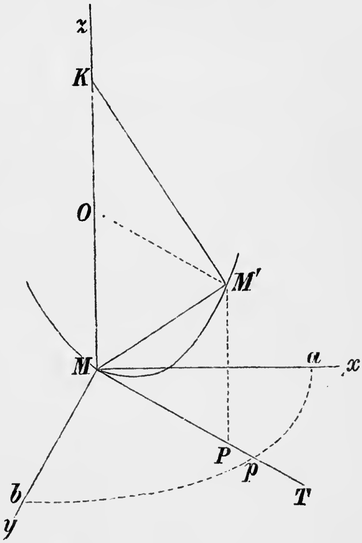
Läfst man α von 0 bis α_0 wachsen, so wächst R von R_1 bis ∞ und ändert, indem es durch den unendlichen Wert geht, sein Zeichen; wächst α weiter von α_0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wächst R ebenfalls von $-\infty$ bis $-R_1 \operatorname{tang}^2 \alpha_0 = R_2$. Wenn α von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi - \alpha_0$ wächst, so nimmt R ab von R_2 bis $-\infty$ und ändert wiederum sein Zeichen beim Durchgang durch den unendlichen Wert. Endlich wenn α von $\pi - \alpha_0$ bis π wächst, so nimmt R ab von $+\infty$ bis R_1. In diesem Falle liegen die zum betrachteten Punkte benachbarten Punkte teils auf der einen, teils auf der andern Seite der Tangentenebene.

§ 2. Ableitung der vorigen Resultate mit Hülfe der Dupinschen Indikatrix.

310. Definition der Indikatrix. Die vorstehenden, von *Euler* zuerst aufgestellten Sätze gewinnen eine sehr anschauliche Form durch die Betrachtungsweisen, welche *Charles Dupin* gegeben hat. Diese elegante Methode wollen wir nun auseinander setzen.

Wir betrachten (Fig. 72) eine Fläche und beziehen sie wie vorhin auf drei rechtwinklige, durch den Punkt M gelegte Axen, von denen die eine, Mz, mit der Normalen zusammenfällt, die beiden anderen, Mx und My in der Tangentenebene liegen. Es sei MM' ein Schnitt der Fläche mit der Ebene zMT, dessen Spur auf der xy-Ebene mit der x-Axe den Winkel α bildet. Wir verbinden den Punkt M mit einem benachbarten Punkte M' der Kurve MM' und legen durch den Punkt M' in der Ebene zMT die Geraden $M'O$ und $M'K$ senkrecht zu Mz und MM' bezüglich. O und K seien die Punkte, in denen die beiden Geraden die Normale Mz schneiden. Der Kreis, welcher dem rechtwinkligen Dreiecke $MM'K$ umschrieben ist, hat seinen Mittelpunkt auf der Normalen Mz, und folglich ist (Nr. 217) der Krümmungskreis der Kurve MM' im Punkte M seine Grenze, wenn M' in den Punkt M hineinrückt. Der Durchmesser dieses Kreises ist aber

Fig. 72.



$$MK = MO + OK = MO + \frac{\overline{M'O}^2}{MO};$$

bezeichnet man also den Krümmungsradius des Normalschnittes MM' im Punkte M mit R, so ist

$$R = \frac{1}{2} \lim \frac{\overline{M'O}^2}{MO}. \tag{1}$$

Die letzte Formel giebt uns nun vor allem einen geometrischen Beweis für die Richtigkeit der Gleichung (3) in Nr. 307.

Bezeichnen wir nämlich mit α den Winkel $\angle aMp$ (Fig. 72) und mit $u = M'O$ den Abstand des Punktes M' von der Normalen, so sind die Koordinaten des Punktes M':

$$\left\{\begin{aligned} x &= u \cdot \cos\alpha, \\ y &= u \cdot \sin\alpha, \\ z &= \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + R_3. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die letzte Formel ergiebt sich aus der Entwickelung von z nach dem *Mac-Laurin*schen Satze, wenn man beachtet, daſs die Tangentenebene im Koordinatenanfange berührt, daſs also für $x = 0$, $y = 0$ auch $z = 0$ wird, und daſs die Tangentenebene mit der xy-Ebene zusammenfällt, dafs also im Punkte M auch p und q verschwinden. Setzt man die Werte von x und y aus den beiden ersten Gleichungen (2) in die dritte Gleichung (2) ein, so wird

$$(3)\quad \begin{cases} MO = z = \frac{1}{2} u^2 \cdot (r \cos^2 \alpha + 2s \cos\alpha \sin\alpha + t \sin^2\alpha) + R_3, \\ M'O = u. \end{cases}$$

Dabei wird R_3 mit u mindestens von der dritten Ordnung null. Mithin wird die Gleichung (1):

$$R = \frac{1}{2} \lim_{u=0} \frac{u^2}{u^2 \left\{ \frac{1}{2} (r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \sin\alpha + t \sin^2\alpha) + \frac{R_3}{u^2} \right\}}.$$

$$(4)\qquad R = \frac{1}{r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \sin\alpha + t \sin^2\alpha}$$

unsere alte Gleichung (3) aus Nr. 307.

Um nun zur Definition der Indikatrix zu gelangen, schneiden wir unsere Fläche durch die Ebene $z = h$ und vernachlässigen den Rest R_3, dann liefert uns die dritte Gleichung (2) den Kegelschnitt

$$(5)\qquad \frac{1}{2} (rx^2 + 2sxy + ty^2) = h,$$

welcher die *Indikatrix* unserer Fläche im Punkte M heifst. In Figur 72 ist sie durch den punktierten Bogen $\widehat{ab}$ bezeichnet.

Errichten wir in den Punkten $p(x, y)$ ihrer Peripherie Lote, so bilden diese einen Cylinder, welcher unsere Fläche nach (2) in der Höhe

$$z = h + R_3$$

schneidet, die bis auf Gröfsen mindestens 3^{ter} Ordnung gleich h ist.

Wir führen nun auch in unserer Indikatrix (5) Polarkoordinaten ein und setzen:

$$x = \varrho \cos\alpha,\ y = \varrho \sin\alpha;$$

ϱ bedeutet dann den Radiusvektor Mp der Indikatrix und α den Winkel aMp, den Mp mit der x-Axe bildet. Dann wird (5)

$$(6)\qquad r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \sin\alpha + t \sin^2\alpha = \frac{2h}{\varrho^2},$$

und daher giebt (4):

$$R = \frac{\varrho^2}{2h}, \quad \text{d. h.:} \tag{7}$$

Die Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte sind proportional den Quadraten der Radienvektoren der Indikatrix, welche mit den Spuren jener Schnitte in der Tangentenebene zusammenfallen.

Liegt die Fläche ganz auf der einen Seite der Tangentenebene in der Umgebung des Punktes M, so giebt die Indikatrix, welche in der angegebenen Weise konstruiert ist, die Krümmungsradien aller Normalschnitte. Wenn aber der andere Fall vorliegt, so kann die Gleichung (1) nicht alle Radien liefern, aufser wenn man der Gröfse z sowohl positive wie negative Werte beilegt. Man mufs alsdann der Gröfse h das doppelte Zeichen $\pm$ geben. Die auf diese Weise gebildete Indikatrix ist aus zwei verschiedenen Kurven zusammengesetzt, und giebt dann, wie im vorigen Falle, die Krümmungsradien aller Normalschnitte.

311. Elliptische, Parabolische und hyperbolische Krümmung. Wir knüpfen an die Gleichung (5) der vorigen Nummer an; h ist, wir wiederholen, eine willkürliche Länge, der man das doppelte Zeichen $\pm$ geben mufs.

Ist nun $rt - s^2 > 0$, so mufs man, um eine reelle Kurve zu erhalten, h dasselbe Zeichen geben, welches die Ableitungen r und t besitzen; die Indikatrix ist also eine *Ellipse;* man nennt die Fläche in solch einem Punkte *elliptisch oder positiv gekrümmt.*

Ist $rt - s^2 = 0$, so mufs man ebenfalls h das Zeichen der Ableitungen r und t beilegen; die Indikatrix besteht in diesem Falle aus zwei *parallelen Geraden*, die in gleichen Abständen vom Punkte M verlaufen. Die Fläche heifst in diesem Punkte *parabolisch gekrümmt.*

Ist endlich $rt - s^2 < 0$, so mufs man der Gröfse h sowohl das positive, wie das negative Zeichen beilegen. Die Indikatrix besteht aus zwei *konjugierten Hyberbeln*, welche die nämlichen Asymptoten besitzen, und bei denen die transversale Axe der einen die nicht transversale für die andere ist.

Die Fläche heifst in dem Punkte *hyperbolisch oder negativ* gekrümmt.

Die Gleichung (7), welche den Wert des Krümmungsradius angiebt, wird gemäfs der Gleichung (6)

$$R = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha},$$

und das ist dieselbe Gleichung, die wir in Nr. 310 auf ganz anderem Wege erhalten haben.

312. Normalschnitte und Indikatrix. Da die Krümmungsradien der Normalschnitte in einem Flächenpunkte proportional sind den Quadraten der Radienvektoren der Indikatrix, so entspricht einer jeden Eigenschaft dieser Radien auch eine analoge der Krümmungsradien.

So hat in einer Ellipse der aus dem Mittelpunkt gezogene Radius ein Maximum und ein Minimum, und die Richtungen dieser beiden sind zu einander senkrecht. Also existieren im Falle, dafs $rt - s^2 > 0$, zwei Normalschnitte der Fläche senkrecht zu einander, derart, dafs der Krümmungsradius der einen am gröfsten, der anderen am kleinsten ist. Dies sind die Schnitte, welche wir die Hauptschnitte genannt haben. Einer der Krümmungsradien wird unendlich, wenn $rt - s^2 = 0$ ist, wobei die elliptische Indikatrix in zwei parallele Gerade ausartet. Endlich besteht auch die nämliche Eigenschaft, wenn die Indikatrix aus zwei Hyperbeln gebildet wird. In diesem Systeme hat das Quadrat des Radiusvektor zwei Minima, welche den beiden zu einander senkrechten transversalen Axen der Hyperbeln zugehören. Da aber von diesen beiden Radien der eine einem positiven, der andere einem negativen Krümmungsradius entspricht, so sieht man, dafs auch hier, wie im Falle der Ellipse, ein Maximum und ein Minimum stattfindet, und dafs die entsprechenden Schnitte senkrecht zu einander sind.

Bei der elliptischen Indikatrix ist wie bei jeder Ellipse die Summe der inversen Quadrate zweier senkrechter Radien konstant; dasselbe findet statt bei der hyperbolischen Indikatrix, wenn man die Differenz statt der Summe einführt. Hieraus folgt, indem man die Vorzeichen der Krümmungsradien beachtet, dafs die Summe der Krümmungen zweier zu einander senkrechter Normalschnitte konstant und gleich der Summe der Hauptkrümmungen ist. Dies wurde auch schon in Nr. 308 bewiesen.

Zwei Radienvektoren der Indikatrix, die gegen eine Hauptaxe gleich geneigt sind in verschiedenem Sinne, sind unter einander gleich. Hieraus schliefst man, dafs zwei Normalschnitte, die gegen einen Hauptschnitt gleich geneigt sind, auch gleiche Krümmung haben.

Endlich erkennt man, dafs die Punkte der Fläche, welche wir *Nabelpunkte* genannt haben, diejenigen sind, für welche die Indikatrix ein Kreis ist. Denn alsdann haben alle Normalschnitte die gleiche Krümmung. Bei den Flächen zweiter Ordnung sind alle Schnitte, die durch parallele Ebenen bestimmt werden, ähnliche Kurven; demnach ist die Indikatrix in jedem Punkte irgend eine der Kurven, welche durch eine zur Tangentenebene parallele Ebene ausgeschnitten wird. Die Nabelpunkte der Flächen zweiter Ordnung sind also die Punkte, in denen die Tangentenebene parallel zu einer der Ebenen ist, welche die Fläche in einem Kreise schneiden.

313. Ein Beispiel für einen singulären Punkt. Das bemerkenswerte Gesetz, nach welchem die Krümmung der Normalschnitte in einem Flächenpunkte sich ändert, setzt das Vorhandensein einer Tangentenebene in diesem Punkte voraus, und erfordert aufserdem, dafs die partiellen Ableitungen r, s, t in diesem Punkte bestimmte Werte haben, für welche der Satz vom totalen Differentiale

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

gültig ist. Letzteres ist insbesondere dann der Fall, wenn die Gröfsen r, s, t in der Umgebung des betrachteten Punktes stetige Funktionen der unabhängigen Variabelen sind. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so gilt unsere Untersuchung nicht mehr, und das Gesetz, nach welchem sich die Krümmungen der Normalschnitte ändern, kann von dem für den regulären Fall gefundenen durchaus verschieden sein. Dies soll durch ein Beispiel gezeigt werden.

Wir betrachten die Fläche, welche in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung

$$(1)\qquad z = \frac{x^2 + y^2}{2f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

dargestellt ist, wobei f eine gegebene Funktion ist. Setzt man

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \sin\alpha,$$

so wird

$$(2)\qquad z = \frac{\varrho^2}{2f(\operatorname{tang}\alpha)},$$

und dies ist die Gleichung eines Schnittes, der auf der Fläche durch die Ebene $y = x \operatorname{tang}\alpha$ gebildet wird; z und ϱ sind also die Koordinaten. Dieser Schnitt ist eine Parabel, deren Tangente im Koordinatenanfangspunkt in der xy-Ebene liegt. Für diesen Anfangspunkt wollen wir den allgemeinen Ausdruck der Krümmungsradien bestimmen. Gemäß der Gleichung (1) ist z eine homogene Funktion zweiten Grades in x und y; also ist nach dem Theorem für homogene Funktionen (Nr. 139):

$$rx^2 + 2s\,xy + ty^2 = \frac{x^2 + y^2}{f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Ersetzt man x und y durch $\varrho\cos\alpha$ und $\varrho\sin\alpha$, dividiert man durch ϱ^2 und läßt ϱ nach null konvergieren, so wird

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha = \frac{1}{f(\operatorname{tang}\alpha)};$$

r, s, t haben in dieser Gleichung die Werte, welche dem Koordinatenanfangspunkt entsprechen, und α ist der Winkel, den die Tangente des Normalschnittes mit der x-Axe bildet. Der Ausdruck für den Krümmungsradius (Nr 307) wird also

$$R = f(\operatorname{tang}\alpha),$$

und das Gesetz seiner Änderung ist also ebenso willkürlich wie die Funktion f. Also hat er auch nicht mehr, wie im regulären Falle ein einziges Maximum und ein einziges Minimum, die senkrecht zu einander sind.

Die allgemeine Theorie ist in dem vorliegenden Falle deshalb nicht anwendbar, weil für $x = 0$, $y = 0$ die partiellen Ableitungen r, s, t unbestimmt werden. Ihre Werte hängen vielmehr von der Grenze ab, nach welcher das Verhältnis $\frac{y}{x}$ konvergiert, während x und y null werden.

314. Haupttangenten und Haupttangentenkurven. Es werde eine Kurve betrachtet, die auf einer gegebenen Fläche verläuft. Die Tangentenebene der Fläche in einem Kurvenpunkte hat die Gleichung (x, y, z)

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y). \tag{1}$$

Ihre Einhüllende ist eine abwickelbare Fläche; sie ist bestimmt durch die Gleichung (1) zusammen mit der Gleichung, welche aus der Differentiation nach der unabhängigen Variabelen, von der auf der gegebenen Kurve die Gröſsen x, y, z, p, q abhängen, hervorgeht. Bezeichnet man die Ableitungen nach dieser unabhängigen Veränderlichen wieder durch Accente, so ergiebt sich aus (1):

$$p' \cdot (\xi - x) + q' \cdot (\eta - y) = 0. \tag{2}$$

Um die Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche zu erhalten, muſs man die Gleichung (2) nochmals differentiieren; dies ergiebt

$$p''(\xi - x) + q''(\eta - y) - (p'x' + q'y') = 0. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) sind enthalten in der Formel:

$$\frac{\xi - x}{q'} = -\frac{\eta - y}{p'} = \frac{\zeta - z}{pq' - p'q} = \frac{p'x' + q'y'}{q'p'' - q''p'}. \tag{4}$$

Die Werte von ξ, η, ζ, welche aus diesen Gleichungen folgen, sind die Koordinaten des Punktes der Rückkehrkurve, welcher dem Punkt x, y, z entspricht. Die Gleichungen, welche zwischen den ersten drei Verhältnissen in der Formel (4) bestehen, sind äquivalent den Gleichungen (1) und (2); sie bestimmen die Erzeugende oder Charakteristik der abwickelbaren Fläche. Diese Charakteristik und die Tangente an die Kurve im Punkte (x, y, z) heiſsen nach *Dupin konjugierte Tangenten* der Fläche.

Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Kurve mit den Koordinaten bildet, und mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel, welche die konjugierte Tangente bildet, so sind die Kosinus der ersten proportional zu x', y', z', die Kosinus der anderen proportional zu $q', -p', pq' - qp'$, gemäſs der

Formel (4), oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung proportional zu

$$s x' + t y', \; -(r x' + s y'), \quad (ps - qr) x' + (pt - qs) y'.$$

Man hat also

$$(5) \quad \frac{\cos\alpha_1}{s\cos\alpha + t\cos\beta} = \frac{\cos\beta_1}{-(r\cos\alpha + s\cos\beta)} = \frac{\cos\gamma_1}{(ps-qr)\cos\alpha + (pt-qs)\cos\beta}.$$

Dies sind die Relationen, welche zwischen den Kosinus zweier konjugierter Tangenten einer Fläche bestehen.

Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt in einen Punkt der Fläche und macht man die Tangentenebene zur Ebene xy, die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte zur zx- und zy-Ebene, so wird

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0,$$
$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\beta = \sin\alpha,$$
$$\cos\gamma_1 = 0, \quad \cos\beta_1 = \sin\alpha_1,$$

und die Gleichung (5) ergiebt

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha_1 = -\frac{r}{t}.$$

Diese Gleichung drückt folgende Eigenschaft aus:

Irgend zwei konjugierte Tangenten sind parallel zweien konjugierten Durchmessern der Indikatrix.

Und hieraus folgt:

Die algebraische Summe der Krümmungsradien zweier Normalschnitte, welche zweien konjugierten Tangenten entsprechen, ist konstant.

Denn die Krümmungsradien sind proportional den Quadraten der Durchmesser der Indikatrix, und diese Quadrate haben eine konstante Summe oder Differenz.

Den Zusammenhang zwischen zwei konjugierten Tangenten kann man auch in dem Satze aussprechen: *Geht man von einem Flächenpunkte in einer bestimmten Tangentenrichtung weiter, so beginnt die Tangentenebene sich um die konjugierte Tangente zu drehen.* Denn es ist die konjugierte Tangentenrichtung die Schnittlinie zweier benachbarter Tangentenebenen.

Aus der Gleichung (5), die man in der Form schreiben kann:

$$r\cos\alpha\cos\alpha_1 + s(\cos\alpha\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta) + t\cos\beta\cos\beta_1 = 0,$$

sowie aus den geometrischen Eigenschaften der konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes folgt: In jedem Punkte einer Fläche giebt es zwei Richtungen, von denen jede mit sich selbst konjugiert ist; sie bestimmen sich aus der Gleichung

$$(7)\qquad r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta = 0$$

und entsprechen den Richtungen der Asymptoten der Indikatrix. Diese beiden Richtungen heifsen die *Haupttangenten* in dem Flächenpunkte; sie sind imaginär im Punkte elliptischer Krümmung, $(rt - s^2 > 0)$, und reell im Punkte hyperbolischer Krümmung $(rt - s^2 < 0)$. In einem Punkte mit parabolischer Krümmung $(rt - s^2 = 0)$ bildet die eine ausgezeichnete Richtung mit der Krümmung null die konjugierte zu jeder andern Richtung, denn es wird hier

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} = -\frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{r\cos\alpha + s\cos\beta} = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{r}},$$

also unabhängig von α, und diese Richtung ist zugleich die Richtung der Haupttangente.

Ersetzt man in der Gleichung (7) die Kosinus durch die ihnen proportionalen Werte x' und y', so folgt

$$(8)\qquad rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = 0,$$

und diese Gleichung giebt die beiden Fortschreitungsrichtungen an, die in einem Flächenpunkte mit den Richtungen der Haupttangenten zusammenfallen. Zu den beiden Werten $x' : y'$, die aus dieser Gleichung folgen, erhält man den zugehörigen Wert z' vermittelst der Gleichung $z' = px' + qy'$.

Die Fortschreitungsrichtungen der Haupttangenten bilden zusammen ein System von *Haupttangentenkurven* auf der Fläche; durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Kurven dieses Systems, sie sind aber nur dann reell, wenn die Fläche in diesem Punkte hyperbolisch oder parabolisch gekrümmt ist. Wird in der Gleichung (8) der Wert von z als Funktion der unabhängigen Variabelen x und y vermittelst der Flächengleichung eingeführt, so stellt sie *die Differentialgleichung der Projektionen der Haupttangentenkurven* in der xy-Ebene dar.

§ 3. Die Hauptkrümmungsradien und das Krümmungsmafs in einem Flächenpunkte.

315. Noch einmal der Krümmungsradius eines Normalschnittes. Die allgemeine Formel, welche Gröfse und Richtung des Krümmungsradius eines Normalschnittes mit den Winkeln α, β, γ bestimmt, war (Nr. 306)

$$(1) \qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Die Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{1+p^2+q^2}$ bestimmt dabei die Richtung der Normalen, nach welcher die Krümmungsradien positiv sind. Die Kosinus der Winkel α, β, γ genügen den Relationen:

$$(2) \qquad \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

und

$$(3) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

und die Elimination von $\cos\gamma$ giebt:

$$(4) \quad (1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1.$$

Wir multiplizieren den Ausdruck R mit der linken Seite dieser Gleichung, um ihn in Bezug auf $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ homogen zu machen; die Gleichung (1) kann dann geschrieben werden:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\left(1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos^2\alpha + 2\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha\cos\beta \\ &\qquad + \left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos^2\beta = 0. \end{aligned} \right.$$

316. Bestimmung der Nabelpunkte. Diese Gleichung liefert uns unmittelbar die Bestimmung der Nabelpunkte. Denn sie läfst den Wert des Verhältnisses $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ermitteln, welcher in einem bestimmten Flächenpunkte einem gegebenen Werte R entspricht. Ist nun der Punkt ein Nabelpunkt, so ist das Verhältnis $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ unbestimmt, und umgekehrt. Demnach erhält man die Bedingungen für einen Nabelpunkt, wenn man die Koeffizienten von $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos^2\beta$ einzeln gleich null setzt; man findet so:

$$(6)\qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

und jeder dieser Quotienten hat den Wert $\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}$, wobei R den Krümmungsradius im Nabelpunkt bezeichnet.

Im Allgemeinen bestimmen die zwei Gleichungen, welche in der Formel (6) enthalten sind, eine endliche Anzahl von Punkten, oder wenigstens ein Punktsystem, das keine kontinuierliche Kurve bildet. Indessen kann es auch eintreten, daſs sich die beiden Gleichungen infolge der Flächengleichung auf eine reduzieren, und alsdann besitzt die Fläche eine Kurve von Nabelpunkten.

317. Bestimmung der Hauptkrümmungsradien. Die Gleichung (5) läſst auch die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes bestimmen. Es müssen nämlich die beiden Werte des Verhältnisses $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, welche aus dieser Gleichung folgen, einander gleich werden, sowohl für das Maximum als auch für das Minimum. Die Bedingung dieser Gleichheit liefert:

$$\left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 - \left(1+p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0,$$

oder

$$(7)\quad \begin{cases} (rt-s^2)R^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\,R \\ \qquad\qquad + (1+p^2+q^2) = 0. \end{cases}$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung für R sind die beiden Hauptkrümmungsradien.

Es erübrigt noch die Bestimmung des Quotienten $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ für jeden der beiden Hauptschnitte. Ist nun R eine Wurzel der Gleichung (7), so hat die Gleichung (5) eine doppelt zählende Wurzel, mag man $\cos\alpha$ oder $\cos\beta$ als die unbekannte Gröſse betrachten. Diese doppelte Wurzel muſs also auch der Gleichung genügen, welche man durch Differentiation der Gleichung (5) entweder nach $\cos\alpha$ oder nach $\cos\beta$ erhält. Demnach ist

$$\left(1+p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha + \left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\beta = 0,$$

$$\left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\alpha + \left(1+q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cos\beta = 0,$$

und dies ergiebt die Gleichungen

$$(8)\quad \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{pq\cos\alpha + (1+q^2)\cos\beta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Die Gleichung zwischen den ersten beiden Quotienten ist vom zweiten Grade in Bezug auf das Verhältnis $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; sie bestimmt diejenigen Werte von ihm, die den Hauptschnitten zugehören. Zusammen mit den Gleichungen (2) und (3) erhält man die Werte der drei Kosinus: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Die Gleichung (7) fällt mit der Gleichung (6) der Nr. 162 zusammen, wenn man $\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ an Stelle von $Z - z$ setzt. Man sieht also, dafs die Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte genau die beiden Punkte sind, welche wir bei der Aufgabe in der citierten Nr. 162 betrachtet haben.

Bezeichnet man mit R_1 und R_2 die Wurzeln der Gleichung (7), so hat man

$$(9)\quad \begin{cases} R_1 + R_2 = \dfrac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2}\sqrt{1+p^2+q^2} \\[2ex] R_1 R_2 = \dfrac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt:

$$(10)\quad \begin{cases} (R_1 - R_2)^2 = \dfrac{(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)p^2q^2}{(rt-s^2)^2}\left[\dfrac{2s}{pq} - \dfrac{r}{1+p^2} - \dfrac{t}{1+q^2}\right]^2 \\[2ex] \qquad + \dfrac{(1+p^2+q^2)^2(1+p^2)(1+q^2)}{(rt-s^2)^2}\left[\dfrac{r}{1+p^2} - \dfrac{t}{1+q^2}\right]^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt, dafs die Gleichungen (6) notwendig sind, wenn die Gleichung (7) zwei gleiche Wurzeln hat; so findet man also aufs Neue die für die Nabelpunkte abgeleiteten Bedingungen.

318. Das Gaufssche Krümmungsmafs. Die Werte der beiden Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes stehen auch in engster Beziehung zu der Gröfse, welche *Gaufs* als *Krümmungsmafs* der Fläche in einem Punkte definiert hat; sie ist von der in Nr. 308 genannten mittleren Krümmung zu unterscheiden. Wie bei der Krümmung der Kurven die Länge des Bogens und des Bogenelementes eingeführt werden mufste, um die Krümmung zu messen, so ist hier der Begriff der Gröſse einer krummen Fläche und ihres Differentiales d. h. des Flächenelementes erforderlich. Ihre genaue Bestimmung kann erst in der Integralrechnung (Nr. 589 und 590) gegeben werden, doch wollen wir hier schon unter Voraussetzung jener Begriffe die Definition und Berechnung der Krümmung kurz entwickeln.

Wir betrachten ein beliebiges Stück auf einer Fläche, das durch eine bestimmte Kurve C begrenzt ist, und es sei S die Gröſse dieses Stückes. Auf einer Kugel mit dem Radius 1, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt gedacht sei, konstruieren wir die Radien, welche den Normalen der Fläche in den Punkten der Kurve C parallel sind, wobei wir annehmen, daſs in den Punkten dieser Kurve die Richtung der Normalen sich stetig ändert, und daſs nicht zwei verschiedene Normalen einander parallel sind. Alsdann bestimmen die Radien eine Kurve C' auf der Kugel, welche eine Fläche von der Gröſse σ begrenzt. Die Gröſse σ heiſst die absolute Krümmung der Fläche S, und der Quotient $\frac{\sigma}{S}$ ihre relative Krümmung. Zieht man nun die Kurve C immer enger zusammen, so daſs sie nach einem bestimmten Flächenpunkt konvergiert, so heiſst der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\sigma}{S}$ das *Krümmungsmaſs* oder einfach die *Krümmung* der Fläche in dem betrachteten Punkte. Hierbei werden Zähler und Nenner des Quotienten null; der Zähler reduziert sich auf das Element der Kugelfläche, der Nenner auf das der gegebenen Fläche. An Stelle dieser Elemente können wir nun auch ihre orthogonalen Projektionen auf eine Ebene, z. B. die xy-Ebene einführen, weil beide Elemente einander parallel sind; die Projektionsebene darf nur nicht senkrecht zur Tangentenebene des betrachteten Flächenpunktes gewählt werden. Demnach wird die Krümmung

$$K = \frac{d\sigma'}{dS'},$$

wenn $d\sigma'$ und dS' die Projektionen der Flächenelemente bezeichnen. Als Element dS' wählen wir das Dreieck, gebildet von den Punkten mit den Koordinaten x, y; $x + d_1x,\ y + d_1y$; $x + d_2x,\ y + d_2y$, so daſs

$$dS' = \frac{1}{2}(d_1x\,d_2y - d_2x\,d_1y)$$

ist. Ferner seien die Koordinaten der entsprechenden Punkte für die Projektion des Kugelelementes X, Y; $X + d_1X$, $Y + d_1Y$; $X + d_2X$, $Y + d_2Y$, so dafs

$$d\sigma' = \frac{1}{2}(d_1X\,d_2Y - d_2X\,d_1Y).$$

Folglich ist

$$K = \frac{d_1X\,d_2Y - d_2X\,d_1Y}{d_1x\,d_2y - d_2x\,d_1y}.$$

Es ist nun $d_1X = \frac{\partial X}{\partial x}d_1x + \frac{\partial X}{\partial y}d_1y$, $d_2X = \frac{\partial X}{\partial x}d_2x + \frac{\partial X}{\partial y}d_2y$ u. s. w., und führt man diese Werte in die Gleichung für K ein, so wird

$$K = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Es ist aber $X = \frac{p}{\omega}$, $Y = \frac{q}{\omega}$, wenn man $\omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ setzt; aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\omega r - p\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\omega^2}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\omega s - p\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\omega s - q\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\omega^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\omega t - q\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega^2}$$

folgt:

$$K = \frac{1}{\omega^4}\left[\omega^2(rt - s^2) + \omega\frac{\partial \omega}{\partial y}(sp - rq) + \omega\frac{\partial \omega}{\partial x}(sq - pt)\right],$$

oder, indem man $\omega\frac{\partial \omega}{\partial x} = pr + qs$, $\omega\frac{\partial \omega}{\partial y} = ps + qt$ einführt:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Die Krümmung der Fläche in einem Punkte ist also gleich dem reziproken Werte des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien.

319. Bestimmung der Nabelpunkte des Ellipsoides. Als Anwendung der Theorie in Nr. 317 geben wir die Bestimmung der Nabelpunkte des Ellipsoides. Bezeichnen wir die Halbaxen der Fläche mit ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ und nehmen dabei $b < c$ an, so ist die Gleichung des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{x}{\varrho^2} + \frac{pz}{\varrho^2 - c^2} = 0, \quad \frac{y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{qz}{\varrho^2 - c^2} = 0,$$

und durch weitere Differentiation:

$$rz + (1 + p^2) = \frac{c^2}{\varrho^2},$$

$$tz + (1 + q^2) = \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2},$$

$$sz + pq = 0.$$

Daraus bildet man:

$$z[pqr - (1 + p^2)s] = \frac{c^2}{\varrho^2} pq,$$

$$z[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] = \frac{b^2(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2(\varrho^2 - b^2)} + \frac{c^2}{\varrho^2} q^2 - \frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2} p^2.$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen null sind für einen Nabelpunkt, so erhält man für diesen entweder $p = 0$ oder $q = 0$. Die Annahme $p = 0$ würde für q einen imaginären Wert ergeben. Für $q = 0$ folgt aber

$$p = \frac{b\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\varrho\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{c}, \quad x = \pm\frac{b\varrho}{c}, \quad y = 0.$$

Die Quadratwurzeln sind mit beiderlei Zeichen, sowohl Plus wie Minus, zu nehmen. Das Ellipsoid hat also vier reelle Nabelpunkte, welche in der Ebene der gröſsten und der kleinsten Axe gelegen sind, was mit dem in Nr. 312 Gesagten übereinstimmt.

§ 4. Die Krümmungskurven einer Fläche.

320. Definition und Differentialgleichung der Krümmungskurven. *Krümmungskurven einer Fläche* nennt man alle die Kurven, bei denen die in den verschiedenen Kurvenpunkten konstruierten Flächennormalen eine abwickelbare Fläche bilden.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines bestimmten Flächenpunktes, und es werde wie gewöhnlich

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

gesetzt. Die Normale der Fläche im Punkte (x, y, z) hat die Gleichungen:

$$(1) \quad (\xi - x) + p(\zeta - z) = 0, \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0.$$

Wenn nun die Koordinaten x, y, z einer Krümmungskurve angehören, so müssen sie, ebenso wie p und q, Funktionen *einer* Variabelen sein; da nun die Gerade (1) Tangente der Rückkehrkurve einer developpabelen Fläche, oder was das Nämliche besagt, die Charakteristik dieser Fläche sein soll, so ist sie in der beweglichen Ebene enthalten, welche von dieser Fläche eingehüllt wird. Die Gleichung dieser Ebene wird also

$$(2) \quad [(\xi - x) + p(\zeta - z)] + \lambda[(\eta - y) + q(\zeta - z)] = 0,$$

wobei λ eine Funktion des Parameters oder der Variabelen ist, von welcher die Koordinaten x, y, z abhängen. Nach der in Nr. 280 gegebenen Theorie ist die Einhüllende dargestellt durch die Gleichung (2), zusammen mit derjenigen, die aus der Differentiation derselben nach dem Parameter hervorgeht. Diese letztere Gleichung mufs aber durch die Gleichungen (1) identisch erfüllt werden. Differentiiert man die Gleichung (2), bezeichnet wieder die Ableitungen nach dem Parameter durch Accente und läfst dabei das mit λ' multiplizierte Glied fort, welches auf Grund der Gleichungen (1) null ist, so kommt:

$$[-(x' + pz') + (\zeta - z)p'] + \lambda[-(y' + qz') + (\zeta - z)q'] = 0.$$

Diese Gleichung mufs bei jedem Wert von ζ bestehen; sie zerlegt sich demnach in die beiden:

$$(3) \quad \begin{cases} x' + pz' = -\lambda(y' + qz'), \\ \quad p' = -\lambda q', \end{cases}$$

oder wenn man λ eliminiert:

$$(4) \quad \frac{p'}{x' + pz'} = \frac{q'}{y' + qz'}.$$

Dies ist die Gleichung, welche, der Definition nach, für jeden Punkt einer Krümmungskurve bestehen mufs. Ersetzt man z', p', q' durch ihre Werte, so erhält sie die Form

$$(5) \quad \frac{rx' + sy'}{(1 + p^2)x' + pqy'} = \frac{sx' + ty'}{pqx' + (1 + q^2)y'},$$

oder

$$(6) \quad [(1 + q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\frac{dy}{dx} + [pqr - (1 + p^2)s] = 0.$$

Die Ableitungen p, q, r, s, t sind gegebene Funktionen der Koordinaten x, y, und diese Gleichung ist die *Differentialgleichung* der Projektionen der Krümmungskurve auf die xy-Ebene.

Hat die quadratische Gleichung (6) zwei reelle Wurzeln, so gehen durch den fixierten Punkt der Fläche zwei Krümmungskurven. Für einen Nabelpunkt verschwindet jede eckige Klammer in der Differentialgleichung (6).

321. Die Krümmungskurven berühren die Hauptnormalschnitte. Die Gleichung der beweglichen Ebene, welche wir betrachtet haben, wird nach der zweiten der Gleichungen (3):

$$[(\xi - x) + p(\zeta - z)]q' - [(\eta - y) + q(\zeta - z)]p' = 0,$$

und um die Rückkehrkurve ihrer Enveloppe zu bestimmen, mufs man diese Gleichung mit den beiden Gleichungen verbinden, die aus ihr durch zweimalige Differentiation folgen. Die erste Differentiation giebt unter Berücksichtigung der Gleichung (4):

$$[(\xi - x) + p(\zeta - z)]q'' - [(\eta - y) + q(\zeta - z)]p'' = 0.$$

Differentiieren wir diese und bezeichnen wir mit $\frac{1}{M}$ den Wert eines jeden Gliedes in der Gleichung (4), den wir bestimmt, endlich und von null verschieden annehmen, so folgt, indem man die vorhergehenden Gleichungen beachtet, welche, wenn $p'q'' - p''q'$ nicht null ist, den Gleichungen der Normalen äquivalent sind:

$$(\zeta - z - M)(p'q'' - q'p'') = 0,$$

oder

$$\zeta - z = M.$$

Dieser Wert von ζ gehört dem Berührungspunkte der Normalen mit der Rückkehrkurve an. Bezeichnet man mit R den Teil der Normalen, welcher zwischen diesem Berührungspunkte und dem Flächenpunkte enthalten ist, so ist

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

oder wegen der Gleichungen (1)

$$R = \sqrt{1 + p^2 + q^2}(\zeta - z) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, M.$$

Es ist aber $\frac{1}{M}$ der gemeinsame Wert der Glieder in der Formel (5), also ist:

$$(7)\qquad \frac{rx'+sy'}{(1+p^2)x'+pqy'}=\frac{sx'+ty'}{pqx'+(1+q^2)y'}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Krümmungskurve mit den Koordinatenaxen bildet, so ist

$$\frac{x'}{\cos\alpha}=\frac{y'}{\cos\beta},$$

und die vorige Formel wird:

$$(8)\qquad \frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=\frac{s\cos\alpha+t\cos\beta}{pq\cos\alpha+(1+q^2)\cos\beta}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}.$$

Die beiden in dieser Formel enthaltenen Gleichungen sind aber genau die nämlichen, welche (Nr. 317) zur Bestimmung der Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte in einem Flächenpunkte dienten, und die Werte des Verhältnisses von $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, welche dieser Relation genügen, bestimmen die Tangenten der beiden Hauptschnitte. Mithin ist unter den gemachten Voraussetzungen bewiesen:

Die Krümmungslinien, welche durch jeden Punkt einer gegebenen Fläche gehen, berühren in diesem die beiden Hauptnormalschnitte und schneiden sich folglich unter rechtem Winkel.

Die Rückkehrkurve der developpabelen Fläche, welche durch die Normalen der Fläche längs den Punkten einer Krümmungskurve gebildet wird, ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Hauptnormalschnitte, welche die Krümmungskurve berühren.

322. Bemerkungen. Es ist wichtig zu bemerken, dafs die Krümmungsradien einer Krümmungskurve im Allgemeinen nicht gleich sind den Krümmungsradien der berührenden Hauptschnitte. Bezeichnet ϱ den Krümmungsradius einer Krümmungskurve, θ den Winkel, den die Richtung dieses Radius mit der Richtung des Krümmungsradius R des Hauptschnittes bildet, so ist

$$\varrho = R\cos\theta,$$

wie in Nr. 305 gezeigt wurde. Die Gleichheit zwischen ϱ

und R findet also nur dann statt, wenn die Oskulationsebene der Krümmungskurve durch die Normale der Fläche geht.

Wir haben die Differentialgleichung für die Projektionen der Krümmungskurven einer Fläche auf die xy-Ebene erhalten; die Bestimmung der Gleichung dieser Kurven zwischen den Koordinaten allein erfordert im Allgemeinen Methoden, welche den Gegenstand der Integralrechnung bilden. Indessen können wir auch hier schon einsehen, dafs die Krümmungskurven zwei Systeme von Kurven bilden, welche man *orthogonale* nennt. Diese Linien zerlegen in der That die Fläche in unendlich kleine Vierecke, bei welchen alle vier Winkel rechte sind. Die Kurven, denen zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks entsprechen, gehören dem einen Systeme von Krümmungskurven an, und die orthogonalen Trajektorien dieser Kurven bilden das andere System. Aber im Allgemeinen sind die beiden Krümmungskurven, welche durch den nämlichen Flächenpunkt gehen, nicht *analytisch verschieden:* sie sind vielmehr nur zwei Zweige derselben Kurve, und nur in besonderen Fällen können die beiden Systeme von Krümmungskurven durch verschiedene Gleichungen dargestellt werden.

Jede Kurve, welche auf einer Ebene oder auf einer Kugel gezogen wird, ist als Krümmungskurve dieser Flächen anzusehen. Im ersten Falle bilden die Normalen, welche durch die Punkte der beliebigen Kurve gelegt werden, eine Cylinderfläche, die abwickelbar ist. Mithin genügt die Kurve der Definition einer Krümmungskurve. Bei der Kugel schneiden sich die Normalen im Mittelpunkte und bilden eine Kegelfläche, welche ebenfalls abwickelbar ist. Übrigens sieht man auch, dafs die Gleichung (4) der Krümmungskurven immer bei einer ebenen oder sphärischen Kurve erfüllt ist. Für eine ebene Kurve ist

$$p' = 0, \quad q' = 0,$$

und für eine Kugel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0$$

ist:

$$x' + pz' + (z - z_0)p' = 0 \quad \text{und} \quad y' + qz' + (z - z_0)q' = 0.$$

323. Vorbereitende Formeln. Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche die Tangente einer auf der Fläche gelegenen Kurve C mit den Koordinatenaxen bildet, mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel der Normalen, so ist

$$p = -\frac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1}, \quad q = -\frac{\cos\beta_1}{\cos\gamma_1},$$

ferner

$$\frac{x'}{\cos\alpha} = \frac{y'}{\cos\beta} = \frac{z'}{\cos\gamma}.$$

Die Gleichung der Krümmungskurven

$$\frac{p'}{x'+pz'} = \frac{q'}{y'+qz'}$$

wird demnach, wenn C eine Krümmungskurve ist:

$$\frac{\cos\gamma_1(\cos\alpha_1)' - \cos\alpha_1(\cos\gamma_1)'}{\cos\alpha\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\gamma} = \frac{\cos\gamma_1(\cos\beta_1)' - \cos\beta_1(\cos\gamma_1)'}{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1},$$

oder:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1)(\cos\alpha_1)' \\ &\quad + (\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\alpha\cos\gamma_1)(\cos\beta_1)' \\ &\quad + (\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1)(\cos\gamma_1)' = 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\cos\alpha(\cos\alpha_1)' + \cos\beta(\cos\beta_1)' + \cos\gamma(\cos\gamma_1)' = 0,$$
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$

und hieraus folgt durch Differentiation:

$$\cos\alpha_1(\cos\alpha_1)' + \cos\beta_1(\cos\beta_1)' + \cos\gamma_1(\cos\gamma_1)' = 0.$$

Verbindet man diese letzte Identität mit der Gleichung (1), so erhält man

$$(2) \qquad \frac{(\cos\alpha_1)'}{\cos\alpha} = \frac{(\cos\beta_1)'}{\cos\beta} = \frac{(\cos\gamma_1)'}{\cos\gamma}.$$

Damit also eine auf einer Fläche gegebene Kurve Krümmungskurve dieser Fläche sei, ist notwendig und hinreichend, dafs die Tangente der Kurve in jedem Punkte parallel der Geraden ist, welche mit den Koordinatenaxen Winkel bildet, deren Kosinus proportional sind den Ableitungen

$$(\cos\alpha_1)', \quad (\cos\beta_1)', \quad (\cos\gamma_1)'.$$

Wir setzen:

$$(3) \qquad d\sigma_1 = \sqrt{(d\cos\alpha_1)^2 + (d\cos\beta_1)^2 + (d\cos\gamma_1)^2},$$

indem wir die Voraussetzungen (Kap. IX § 3, Forderung $\mathfrak{D}$) als erfüllt ansehen, welche bei der Definition dieser Gröfse gemacht wurden, und bestimmen drei Winkel $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad \frac{d\cos\alpha_1}{d\sigma_1} = \cos\varphi_1, \quad \frac{d\cos\beta_1}{d\sigma_1} = \cos\psi_1, \quad \frac{d\cos\gamma_1}{d\sigma_1} = \cos\chi_1.$$

Ist die gegebene Kurve C eine Krümmungskurve, so werden die Normalen in ihren verschiedenen Punkten Tangenten einer Kurve C_1. Dann ist $d\sigma_1$ der Kontingenzwinkel dieser Kurve und φ_1, ψ_1, χ_1 sind die Winkel, welche ihre Hauptnormale mit den Axen bildet. In allen Fällen ist die Richtung, welche durch die Winkel φ_1, ψ_1, χ_1 bestimmt wird, senkrecht zur Flächennormale, also in der Tangentenebene gelegen. Denn die Gleichung

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$

giebt durch Differentiation

$$\cos\alpha_1\cos\varphi_1 + \cos\beta_1\cos\psi_1 + \cos\gamma_1\cos\chi_1 = 0.$$

Sind noch λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel, welche eine zur Flächennormale und zu der Richtung $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$ senkrechte Gerade mit den Axen bildet, so sind die Kosinus der Winkel $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$, welche proportional zu $d\cos\alpha_1$, $d\cos\beta_1$, $d\cos\gamma_1$ sind, auch proportional nach Nr. 273 zu $d\cos\lambda_1$, $d\cos\mu_1$, $d\cos\nu_1$. Setzt man also, indem man die Forderung $\mathfrak{E}$ des § 4 Kap. IX als erfüllt ansieht, die bei der Definition von $d\tau_1$ zu stellen ist,

$$(5) \qquad d\tau_1 = \sqrt{(\cos\lambda_1)'^2 + (\cos\mu_1)'^2 + (\cos\nu_1)'^2},$$

so ist

$$(6) \qquad \frac{d\cos\lambda_1}{d\tau_1} = \cos\varphi_1, \quad \frac{d\cos\mu_1}{d\tau_1} = \cos\psi_1, \quad \frac{d\cos\nu_1}{d\tau_1} = \cos\chi_1.$$

Wir bezeichnen nun allgemein mit ω den Winkel zwischen der Tangente der gegebenen Kurve C und der Richtung $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1)$; mit θ den Winkel, welchen die Flächennormale mit der Oskulationsebene der Kurve C bildet. Ferner seien für diese Kurve, nach unserer früheren Bezeichnung, φ, ψ, χ und λ, μ, ν die Winkel, welche von der Hauptnormale und der Binormale mit den Koordinatenaxen gebildet werden, $d\sigma$ und $d\tau$ die Kontingenzwinkel der ersten und der zweiten Krümmung. Die Geraden, welche mit den Koordinatenaxen die Winkel

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \varphi_1, & \psi_1, & \chi_1, \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{array}$$

bilden, bestimmen ein rechtwinkliges System, und die Kosinus der Winkel, welche mit diesen Geraden von der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale der gegebenen Kurve gebildet werden, sind bezüglich

$$\begin{array}{ccc} 0, & \cos\omega, & \sin\omega, \\ \cos\theta, & \pm\sin\theta\sin\omega, & \mp\sin\theta\cos\omega, \\ \sin\theta, & \mp\cos\theta\sin\omega, & \pm\cos\theta\cos\omega. \end{array}$$

Da man von den unteren Zeichen zu den oberen übergehen kann, indem man ω in $\omega+\pi$ verwandelt, d. h. an Stelle der anfänglich für die Tangente der Kurve gewählten Richtung die entgegengesetzte einführt, so behalten wir nur die oberen Zeichen bei; man erhält alsdann die folgenden Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0, \\ \cos\alpha\cos\varphi_1+\cos\beta\cos\psi_1+\cos\gamma\cos\chi_1=\cos\omega, \\ \cos\alpha\cos\lambda_1+\cos\beta\cos\mu_1+\cos\gamma\cos\nu_1=\sin\omega; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\varphi\cos\alpha_1+\cos\psi\cos\beta_1+\cos\chi\cos\gamma_1=\cos\theta, \\ \cos\varphi\cos\varphi_1+\cos\psi\cos\psi_1+\cos\chi\cos\chi_1=\sin\theta\sin\omega, \\ \cos\varphi\cos\lambda_1+\cos\psi\cos\mu_1+\cos\chi\cos\nu_1=-\sin\theta\cos\omega; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos\alpha_1+\cos\mu\cos\beta_1+\cos\nu\cos\gamma_1=\sin\theta, \\ \cos\lambda\cos\varphi_1+\cos\mu\cos\psi_1+\cos\nu\cos\chi_1=-\cos\theta\sin\omega, \\ \cos\lambda\cos\lambda_1+\cos\mu\cos\mu_1+\cos\nu\cos\nu_1=+\cos\theta\cos\omega. \end{cases}$$

Differentiiert man die erste und dritte der Gleichungen (7), ferner die erste der Gleichungen (8), und benutzt man dabei die Formeln der Nr. 274, so folgt, indem man alle vorhergehenden Gleichungen berücksichtigt:

$$(10)\qquad \cos\omega\, d\sigma_1+\cos\theta\, d\sigma=0,$$

$$(11)\qquad d\tau_1=d\omega+\sin\theta\, d\sigma,$$

$$(12)\qquad d\tau=d\theta+\sin\omega\, d\sigma_1,$$

und wegen Gleichung (10) ergiebt die Gleichung (12)

$$(13)\qquad d\tau=d\theta-\cos\theta\operatorname{tang}\omega\, d\sigma.$$

324. Kriterium dafür, dafs eine Kurve Krümmungskurve ist. Die letzten vier Gleichungen beziehen sich auf eine beliebige auf der Fläche gelegene Kurve. Die Bedingung für eine Krümmungskurve ist $\sin\omega = 0$; diese Bedingung wird also nach Gleichung (13)

$$d\tau = d\theta,$$

und dies ergiebt den bemerkenswerten Satz von *Lancret*:

Satz I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine auf einer Fläche gelegene Kurve Krümmungskurve der Fläche ist, besteht darin, dafs das Differential des Torsionswinkels der Kurve gleich dem Differentiale des Winkels ist, den die Oskulationsebene mit der Flächennormalen bildet.

Ist insbesondere $d\tau = 0$, so folgt, dafs $d\theta = 0$, also $\theta =$ Konst. ist, und umgekehrt. Man hat demnach den

Folgesatz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine ebene auf der Fläche verlaufende Kurve Krümmungskurve ist, besteht darin, dafs die Ebene der Kurve die Fläche überall unter gleichem Winkel schneidet.

Ist die gegebene Kurve eine ebene Krümmungskurve der Fläche, so hat man $\sin\omega = 0$, $d\omega = 0$ und $d\theta = 0$. Folglich ergeben die Gleichungen (10) und (11) durch Division:

$$\frac{d\tau_1}{d\sigma_1} = -\operatorname{tang}\theta = \text{Konst.}$$

und man erhält den

Satz II. Wenn die Krümmungskurve einer Fläche eben ist, so bilden die Flächennormalen in den Punkten dieser Kurve eine developpabele Fläche, deren Rückkehrkurve die Eigenschaft hat, dafs ihre beiden Krümmungen ein konstantes Verhältnis haben. Diese Rückkehrkurve ist folglich eine Schraubenlinie auf einer allgemeinen Cylinderfläche (Nr. 298).

325. Kriterium dafür, dafs die Schnittkurve zweier Flächen Krümmungskurve für beide Flächen ist. Wir betrachten jetzt eine Kurve, welche den Schnitt zweier Flächen bildet. Nach der Gleichung (13) in Nr. 323 ist:

$$d\tau = d\theta - \cos\theta \operatorname{tang}\omega\, d\sigma,$$
$$d\tau = d\theta_1 - \cos\theta_1 \operatorname{tang}\omega_1 d\sigma,$$

wenn man mit θ_1 und ω_1 die Gröfsen auf der zweiten Fläche bezeichnet; hieraus folgt:

$$d(\theta - \theta_1) = (\cos\theta_1 \operatorname{tang}\omega_1 - \cos\theta \operatorname{tang}\omega)\, d\sigma.$$

Die Winkel θ und θ_1 liegen in der nämlichen Ebene und werden in demselben Sinne gerechnet, nämlich von der Hauptnormale der gegebenen Kurve an. Mithin drückt die Differenz $\theta_1 - \theta$ den Winkel aus, den die beiden Flächen mit einander bilden. Andererseits ist

$$\sin \omega = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \omega_1 = 0$$

die Bedingung dafür, dafs die betrachtete Kurve eine Krümmungskurve der ersten oder der zweiten Fläche ist. Man hat demnach den

Satz III. Wenn die Schnittkurve zweier Flächen Krümmungskurve für jede der beiden Flächen ist, so müssen sich die Flächen überall unter gleichem Winkel schneiden. Und umgekehrt: *Wenn zwei Flächen sich überall unter gleichem Winkel schneiden, und die Schnittlinie ist eine Krümmungskurve der einen Fläche, so ist sie auch Krümmungskurve der andern Fläche.*

Da eine ebene oder sphärische Kurve stets Krümmungskurve der Ebene oder der Kugel ist, auf welcher sie liegt, so erhält man den Folgesatz, welcher denjenigen des Satzes I (Nr. 324) umfafst.

Folgesatz. Damit eine auf einer Fläche gelegene ebene oder sphärische Kurve Krümmungskurve der Fläche ist, ist notwendig und hinreichend, dafs die Ebene oder die Kugel, welche die Kurve enthält, die Fläche überall unter gleichem Winkel schneidet.

Die Tangentenebenen einer developpabelen Fläche bilden überall mit der Fläche den Winkel null, und enthalten die geradlinige Erzeugende. Mithin besteht der

Folgesatz. Die Erzeugenden einer developpabelen Fläche sind Krümmungskurven von ihr.

326. Andere Herleitung des letzten Kriteriums. Man kann den Satz III auch leicht beweisen, ohne auf die Gleichungen in Nr. 323 zurückzugehen. Betrachtet man zwei Flächen, für welche bezüglich

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dz = p_1\,dx + q_1\,dy$$

ist, so gelten diese beiden Gleichungen zugleich für die Schnittkurve der Flächen; es ist also

$$\frac{x'}{q-q_1} = \frac{y'}{p_1-p} = \frac{z'}{qp_1-q_1p} = \lambda.$$

Setzen wir

$$\frac{x'+pz'}{p'} = P, \qquad \frac{y'+qz'}{q'} = Q,$$

$$\frac{x'+p_1z'}{p_1'} = P, \qquad \frac{y'+q_1z'}{q_1'} = Q_1,$$

so ist:

$$Pp' = x'+pz' = [(q-q_1)+p(qp_1-q_1p)]\lambda$$
$$= [q(1+pp_1+qq_1)-q_1(1+p^2+q^2)]\lambda,$$
$$Qq' = y'+qz' = [(p_1-p)+q(qp_1-q_1p)]\lambda$$
$$= [p_1(1+p^2+q^2)-p(1+pp_1+qq_1)]\lambda.$$

Setzt man also

$$V = \frac{1+pp_1+qq_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}},$$

so ist

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{Qq'}{\lambda\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{-Pp'}{\lambda\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial p}p' + \frac{\partial V}{\partial q}q' = (Q-P)\frac{p'q'}{\lambda\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und ebenso

$$\frac{\partial V}{\partial p_1}p_1' + \frac{\partial V}{\partial q_1}q_1' = (Q_1-P_1)\frac{p_1'q_1'}{\lambda\sqrt{1+p^2+q^2}\,(1+p_1^2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also durch Addition:

$$V' = \frac{\frac{Q-P}{1+p^2+q^2}p'q' + \frac{Q_1-P_1}{1+p_1^2+q_1^2}p_1'q_1'}{\lambda\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}}.$$

Aus dieser Formel erkennt man, daſs wenn zwei der Gröſsen

$$V', \quad Q-P, \quad Q_1-P_1$$

null sind, die dritte ebenfalls null wird, womit der zu beweisende Satz ausgesprochen ist.

327. Die Ebene und die Kugel sind die einzigen Flächen, deren sämtliche Punkte Nabelpunkte sind. Bezeichnet man mit X, Y, Z die Kosinus der Winkel, welche die Normale einer Fläche mit den Koordinatenaxen bildet, so ist

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

also:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{pqt-(1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichungen

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

welche die Nabelpunkte einer Fläche bestimmen, sind also äquivalent mit den folgenden:

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es leicht, zu beweisen, dafs die Kugel die einzige Fläche ist, bei welcher jeder Punkt ein Nabelpunkt ist. Denn für solch eine Fläche müssen diese Gleichungen in jedem Punkte gelten. Die ersten beiden drücken aus, dafs X unabhängig von y, und Y unabhängig von x ist; also dafs X nur von x allein, Y nur von y allein abhängt. Da aber die beiden Ableitungen $\frac{\partial X}{\partial x}$ und $\frac{\partial Y}{\partial y}$ einander gleich sind, so mufs ihr Wert notwendig eine Konstante sein; bezeichnen wir dieselbe mit $\frac{1}{a}$, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{a},$$

folglich haben X und Y die Werte

$$X = \frac{x-x_0}{a}, \quad Y = \frac{y-y_0}{a},$$

wobei x_0 und y_0 Konstante sind. Der Kosinus Z wird alsdann

$$Z = \frac{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{a}.$$

Da nun die Werte von p und q gleich $-\frac{X}{Z}$ und $-\frac{Y}{Z}$ sind, so ergiebt die Gleichung $dz = pdx + qdy$

$$(2) \qquad dz = -\frac{(x-x_0)\,dx + (y-y_0)\,dy}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist das totale Differential von $\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$; bezeichnet man also mit z_0 eine neue Konstante, so hat man

$$z - z_0 = \sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}.$$

oder

$$(3) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2,$$

was die allgemeine Gleichung einer Kugel ist. Der besondere Wert $\frac{1}{a} = 0$ liefert bei der Integration die Gleichung einer Ebene.

§ 5. Dreifach unendliche Scharen von orthogonalen Flächen.

328. Bedingung für die Orthogonalität einer dreifach unendlichen Flächenschar. Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten, λ, μ, ν drei variabele Parameter, f_1, f_2, f_3 gegebene Funktionen. Jede der Gleichungen

$$(1) \qquad \lambda = f_1(x, y, z), \quad \mu = f_2(x, y, z), \quad \nu = f_3(x, y, z)$$

stellt dann ein System von Flächen dar, und diese drei bilden ein *dreifaches Flächensystem.* Sind die drei Gleichungen nach x, y, z aufgelöst gegeben, derart, daſs

$$(2) \qquad x = F_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = F_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = F_3(\lambda, \mu, \nu),$$

so sind die verschiedenen Punkte des Raumes durch die drei Variabelen λ, μ, ν dargestellt, die man dann allgemein als die *krummlinigen Koordinaten* eines Punktes bezeichnet.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, daſs jede Fläche eines jeden Systemes von allen Flächen der anderen beiden Systeme überall rechtwinklig geschnitten wird. Das dreifache System heiſst dann ein *orthogonales.*

Wir setzen:

$$(3)\qquad \begin{cases} L^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2, \\ M^2 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2, \\ N^2 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^2. \end{cases}$$

Die Normalen der drei Flächen in einem Punkte (x, y, z) bilden mit den Koordinatenaxen Winkel, deren Kosinus bezüglich sind:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, & \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, & \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ \frac{1}{M}\frac{\partial \mu}{\partial x}, & \frac{1}{M}\frac{\partial \mu}{\partial y}, & \frac{1}{M}\frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ \frac{1}{N}\frac{\partial \nu}{\partial x}, & \frac{1}{N}\frac{\partial \nu}{\partial y}, & \frac{1}{N}\frac{\partial \nu}{\partial z}. \end{array}$$

Folglich sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs das System orthogonal ist:

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \nu}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

329. Die Ossian-Bonnetsche Differentialgleichung. Man kann zwei der Funktionen λ, μ, ν zwischen den Gleichungen (4) und den aus diesen durch Differentiation abgeleiteten eliminieren; das Resultat dieser Elimination ist eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für eine dieser Funktionen. Dieses wichtige Theorem, welches von *Ossian-Bonnet* aufgestellt ist, ist folgendermafsen zu beweisen.

Die beiden letzten der Gleichungen (4) ergeben:

$$(5)\qquad \begin{cases} K\frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial y}, \\ K\frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ K\frac{\partial \nu}{\partial z} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial x}, \end{cases}$$

wobei K den Wert $\frac{LM}{N}$ hat. Ferner ist ersichtlich, dafs die Summe null erhalten wird, wenn man die drei Gröfsen

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(K\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(K\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(K\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

addiert, nachdem man sie zuvor bezüglich mit $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$ multipliziert hat. Gemäfs den Gleichungen (5) ist also:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\right]\\
+&\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\right]\\
+&\frac{\partial v}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

Führt man die Differentiationen aus und addiert man zu der erhaltenen Gleichung die beiden letzten der Gleichungen (4), nachdem man diese bezüglich mit

$$-\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)\text{ und }+\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right)$$

multipliziert hat, so folgt:

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}\right]\\
+&\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}\right]\\
+&\frac{\partial v}{\partial z}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion μ entfernen. Zu dem Zwecke differentiiert man die erste der Gleichungen (4) nach jeder Variabelen x, y, z, so wird:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z},$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\mu}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}.$$

Vermittelst dieser Gleichungen und der Gleichungen (5), welche die Ableitungen von ν eliminieren lassen, wird die Gleichung (6):

$$(7)\begin{cases}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}\right)+\\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}\right)+\\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)=0,\end{cases}$$

oder

$$(8)\ A\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+B\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)^2+A'\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}+B'\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}+C'\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(9)\begin{cases}A=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z},\\ B=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial x},\\ C=\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y},\\ A'=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial z}\right),\\ B'=\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial x}\right),\\ C'=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial y}\right).\end{cases}$$

Demnach haben wir zwei Gleichungen, welche die Funktion ν nicht mehr enthalten, sondern nur die ersten und zweiten Ableitungen von λ, und die ersten Ableitungen von μ, nämlich die erste der Gleichungen (4) und die Gleichung (8). Diese beiden Gleichungen sind homogen in Bezug auf die Ableitungen $\frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\mu}{\partial y}, \frac{\partial\mu}{\partial z}$; man kann daher die Verhältnisse von zweien derselben zur dritten bestimmen, derart, daſs

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mathfrak{A}} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mathfrak{B}} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial z}}{\mathfrak{C}},$$

wird, und hierbei sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bekannte Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen der Funktion λ. Man hat demnach

$$(10) \qquad H\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mathfrak{A}, \quad H\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mathfrak{B}, \quad H\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mathfrak{C}.$$

Die Elimination von μ läfst sich nun auf demselben Wege, wie vorhin die Elimination von ν vollziehen. Addiert man die drei Gröfsen

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(H\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(H\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\left(H\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(H\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

nachdem man sie bezüglich mit $\frac{\partial \mu}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ multipliziert hat, so erhält man eine identisch verschwindende Summe, und folglich hat man, vermittelst der Gleichungen (10):

$$(11) \quad \mathfrak{A}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right) = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur die Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung der Funktion λ, und folglich gilt der Satz:

Soll die Gleichung $\lambda = f(x, y, z)$ ein Flächensystem darstellen, welches einem dreifach orthogonalen Systeme angehört, so mufs die Funktion λ einer bestimmten partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen.

330. Andere Form der Orthogonalitätsbedingung. Wählt man zu unabhängigen Variabelen die Parameter λ, μ, ν eines dreifach orthogonalen Systems, so lassen sich die partiellen Ableitungen von x, y, z in Bezug auf λ, μ, ν sehr leicht durch die partiellen Ableitungen von λ, μ, ν in Bezug auf x, y, z ausdrücken. Ersetzt man nämlich in der Gleichung

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu} d\nu$$

$d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ durch ihre Werte

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so folgt, indem man beiderseits die Koeffizienten von dx, dy, dz einander gleich setzt:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man sie bezüglich mit $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$, ferner mit $\frac{\partial \mu}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z}$, und endlich mit $\frac{\partial \nu}{\partial x}$, $\frac{\partial \nu}{\partial y}$, $\frac{\partial \nu}{\partial z}$ multipliziert hat, so folgt mit Benutzung der Gleichungen (3) und (4):

$$(12) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = L^2 \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = M^2 \frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = N^2 \frac{\partial x}{\partial \nu}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$(13) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = L^2 \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = M^2 \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} = N^2 \frac{\partial y}{\partial \nu},$$

$$(14) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = L^2 \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = M^2 \frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} = N^2 \frac{\partial z}{\partial \nu}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (4):

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{L^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \\ \frac{1}{M^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2, \\ \frac{1}{N^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2; \end{aligned}\right.$$

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \nu} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \lambda} &= 0. \end{aligned}\right.$$

331. Berechnung der zweiten Differentialquotienten bei einer orthogonalen Schar. Die Gleichungen (15) und (16) enthalten einfach die Relationen, welche zwischen den Kosinus der Winkel bestehen, die drei rechtwinklige Richtungen mit den Koordinatenaxen bilden; durch Differentiation kann man aus ihnen eine grofse Zahl anderer Relationen ableiten, die ebenfalls Eigenschaften orthogonaler Systeme ausdrücken. Diese Untersuchung bietet keinerlei Schwierigkeiten und führt zu wichtigen Resultaten. Um aber die Grenzen, welche ich mir gesteckt habe, nicht zu überschreiten, beschränke ich mich darauf, hier nur die Formeln anzugeben, welche die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\cdots$$

in Funktion der Ableitungen erster Ordnung der Variabelen x, y, z und der Gröfsen L, M, N liefern.

Zu dem Zwecke differentiieren wir die erste der Gleichungen (15) nach μ und die zweite nach λ, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}=-\frac{1}{L^2}\frac{\partial\log L}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{\partial z}{\partial\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}=-\frac{1}{M^2}\frac{\partial\log M}{\partial\lambda}.$$

Differentiiert man ferner die Gleichungen (16) nach ν, λ, μ bezüglich, addiert die beiden letzten der so erhaltenen Gleichungen und subtrahiert davon die erste, so folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial\nu}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\nu}\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{\partial z}{\partial\nu}\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}=0.$$

Wenn man nun die drei zuletzt aufgeschriebenen Gleichungen addiert, nachdem man sie zuvor bezüglich mit $\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \frac{\partial\mu}{\partial x}, \frac{\partial\nu}{\partial x}$, ferner mit $\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \frac{\partial\mu}{\partial y}, \frac{\partial\nu}{\partial y}$, endlich mit $\frac{\partial\lambda}{\partial z}, \frac{\partial\mu}{\partial z}, \frac{\partial\nu}{\partial z}$ multipliziert hat, so wird, mit Rücksicht auf die Gleichungen (12) bis (14):

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}&=-\frac{\partial\log L}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}-\frac{\partial\log M}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu}&=-\frac{\partial\log L}{\partial\mu}\frac{\partial y}{\partial\lambda}-\frac{\partial\log M}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}&=-\frac{\partial\log L}{\partial\mu}\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial\log M}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen ergeben durch Änderung der Buchstaben auch die Werte der sechs übrigen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \mu \partial \nu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \mu \partial \nu},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \nu \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \nu \partial \lambda}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \nu \partial \lambda}.$$

332. Der Dupinsche Satz über die orthogonalen Flächenscharen. Man verdankt *Ch. Dupin* den schönen Satz:

In jedem dreifach orthogonalen Systeme wird jede Fläche des einen Systems von den Flächen der beiden anderen Systeme in ihren Krümmungskurven geschnitten.

Der Beweis dieses Satzes ist in den letzten Gleichungen des vorigen Paragraphen enthalten. Denn diese Gleichungen können durch die eine Formel ausgedrückt werden:

$$\frac{\dfrac{\partial\left(L\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial x}{\partial \mu}} = \frac{\dfrac{\partial\left(L\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial y}{\partial \mu}} = \frac{\dfrac{\partial\left(L\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial z}{\partial \mu}} = -\frac{L}{M}\frac{\partial M}{\partial \lambda}.$$

Betrachten wir nun den Schnitt C zweier Flächen, welche den Systemen

$$\lambda = \text{konst}, \quad \nu = \text{konst}$$

bezüglich angehören, so sind die Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial \mu}$ nach (16) proportional den Kosinus der Winkel, welche die Tangente der Kurve C mit den Axen bildet. Andererseits sind die Gröfsen $\frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, \frac{1}{L}\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ oder $L\frac{\partial x}{\partial \lambda}, L\frac{\partial y}{\partial \lambda}, L\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ die Kosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche λ mit den Koordinatenaxen bildet, und ihre Ableitungen

$$\frac{\partial\left(L\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial\left(L\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial\left(L\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\right)}{\partial \mu},$$

in Bezug auf eine Verschiebung längs der Kurve C sind nach der obigen Formel den Kosinus der Winkel, welche zur Tangente dieser Kurve gehören, proportional. Dies ist aber (nach Nr. 323) die Bedingung dafür, dafs C eine Krümmungskurve der Fläche λ ist; und der *Dupin*sche Satz ist also bewiesen.

333. Lamésche Koordinaten. Unter den dreifach orthogonalen Flächensystemen ist vor allem dasjenige bemerkenswert, welches von konfokalen Flächen zweiter Ordnung gebildet wird. Die Gleichungen dieser Flächen sind:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda^2}+\dfrac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2}+\dfrac{y^2}{\mu^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\mu^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2}-\dfrac{y^2}{b^2-\nu^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\nu^2}=1, \end{cases}$$

b und c sind gegebene Gröſsen; wir nehmen $b < c$ an. Die Zahlen λ, μ, ν heiſsen die *Laméschen Koordinaten* der Punkte des Raumes.

Giebt man dem Parameter λ^2 Werte gröſser als c^2, dem Parameter μ^2 Werte zwischen b^2 und c^2, endlich dem Parameter ν^2 Werte kleiner als b^2, so stellt die erste Gleichung Ellipsoide, die zweite einschalige Hyperboloide, die dritte zweischalige Hyperboloide dar. Alle diese Flächen sind konzentrisch und ihre Hauptschnitte haben dieselben Brennpunkte; man nennt sie daher konfokal.

Da die Gleichungen (1) vom ersten Grade in Bezug auf x^2, y^2, z^2 sind, so ist es leicht, sie aufzulösen. Man gelangt dazu am raschesten auf folgendem Wege. Ordnet man die erste Gleichung nach Potenzen von λ^2, so wird

$$(2)\quad \begin{aligned} &\lambda^6-\lambda^4(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2) \\ &\quad +\lambda^2[b^2c^2+(b^2+c^2)x^2+c^2y^2+b^2z^2]-b^2c^2x^2=0. \end{aligned}$$

Da die beiden folgenden Gleichungen sich aus der ersten ableiten lassen, indem man λ^2 mit μ^2 oder mit ν^2 vertauscht, so besitzt die Gleichung (2), welche vom dritten Grade in Bezug auf λ^2 ist, die drei Wurzeln λ^2, μ^2, ν^2; folglich ist

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2=x^2+y^2+z^2+b^2+c^2, \\ \lambda^2\mu^2+\mu^2\nu^2+\nu^2\lambda^2=b^2c^2+(b^2+c^2)x^2+c^2y^2+b^2z^2, \\ \lambda^2\mu^2\nu^2=b^2c^2x^2. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung giebt den Wert von x^2. Die Gleichungen (1) ändern sich aber nicht, wenn man die Buchstaben x und y vertauscht, und gleichzeitig λ^2, μ^2, ν^2 durch λ^2-b^2,

$\mu^2 - b^2$, $\nu^2 - b^2$, ferner b^2 und c^2 durch $-b^2$ und $c^2 - b^2$ ersetzt; die nämlichen Gleichungen ändern sich auch nicht, wenn man x^2 und z^2 vertauscht und dabei λ^2, μ^2, ν^2 durch $\lambda^2 - c^2$, $\mu^2 - c^2$, $\nu^2 - c^2$ und b^2 und c^2 durch $-(c^2 - b^2)$ und $-c^2$ ersetzt. Man kann also auch die nämlichen Vertauschungen in den Gleichungen (3) vollziehen, und die letzte von ihnen ergiebt dann:

$$(4)\qquad \begin{cases} (\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2) = b^2(c^2 - b^2)\,y^2, \\ (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2) = c^2(c^2 - b^2)\,z^2. \end{cases}$$

Man erhält demnach:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \pm \dfrac{\lambda\mu\nu}{bc}, \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\[2ex] z = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}. \end{cases}$$

Die Gröfsen ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ und $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ gehen auch durch den Wert null hindurch; man kann daher annehmen, dafs sie ihr Zeichen wechseln, und dies ist notwendig, damit die Gleichungen alle Punkte des Raumes enthalten. Die Schwierigkeit, welche aus der Zweideutigkeit der Vorzeichen hervorgehen kann, läfst sich vermeiden, wenn man zwei Winkel ψ und φ einführt, derart, dafs

$$\nu = b\cos\psi, \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = b\sin\psi,$$

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - b^2}\cos\varphi, \quad \sqrt{c^2 - \mu^2} = \sqrt{c^2 - b^2}\sin\varphi.$$

Aus den Gleichungen (5) folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\lambda\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - b^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\lambda\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}},$$

$$\frac{\partial x}{\mu} = \frac{\lambda\nu}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\mu\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{\mu\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\lambda\mu}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\frac{\nu\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = -\frac{\nu\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

und man bestätigt unmittelbar durch diese Gleichungen, dafs das konfokale System in der That ein dreifach orthogonales ist.

334. Eine dreifach unendliche Schar von Kugeln. Die Gleichungen (1) stellen auch dann noch ein dreifach orthogonales System dar, wenn man x, y, z, λ ersetzt durch $\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}, \frac{\lambda}{\varepsilon}$, wobei ε eine Konstante ist. Wenn man nach dieser Substitution $\varepsilon = 0$ macht, so werden die Gleichungen (1):

$$(6) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0. \end{cases}$$

Dieses neue System wird gebildet von einem Systeme konzentrischer Kugeln und zwei Systemen von Kegeln zweiter Ordnung, deren Scheitel im Mittelpunkte der Kugeln liegen. Macht man in den Gleichungen (5) die nämliche Substitution, so folgt:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda\mu\nu}{bc}, \\ y = \dfrac{\lambda\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\ z = \dfrac{\lambda\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}. \end{cases}$$

335. Eine dreifach unendliche Schar von Paraboloiden. Ersetzt man in der ersten Gleichung (1) x durch $x - b$, wodurch der Koordinatenanfangspunkt in einen der gemeinsamen Brennpunkte aller Hauptschnitte in der xy-Ebene verlegt wird, und schreibt zugleich $c + b$ an Stelle von c, $\lambda + b$ an Stelle von λ, so wird diese Gleichung:

$$\frac{(x+\lambda)^2}{b\left(1 + \frac{\lambda}{b}\right)^2} - \frac{2(x+\lambda)}{1 + \frac{\lambda}{b}} + \frac{y^2}{2\lambda + \frac{\lambda^2}{b}} + \frac{z^2}{2(\lambda - c) + \frac{\lambda^2 - c^2}{b}} = 0.$$

Läfst man nun b unendlich werden, so reduziert sich die Gleichung auf die folgende:

$$\frac{y^2}{4\lambda} + \frac{z^2}{4(\lambda - c)} = x + \lambda.$$

Verfährt man ebenso mit den anderen beiden Gleichungen (1), so erhält man Grenzgleichungen, die sich aus der letzten durch Vertauschung von λ mit μ und ν ableiten lassen. So gewinnt man ein neues dreifach orthogonales und konfokales System, nämlich:

$$\frac{y^2}{4\lambda} + \frac{z^2}{4(\lambda - c)} = x + \lambda,$$

$$\frac{y^2}{4\mu} - \frac{z^2}{4(c - \mu)} = x + \mu,$$

$$\frac{-y^2}{-4\nu} - \frac{z^2}{-4(\nu - c)} = x + \nu.$$

Ist die Konstante c positiv, so stellt die erste Gleichung, wenn man λ die Werte von c bis $+\infty$ beilegt, elliptische Paraboloide dar; giebt man μ die Werte von 0 bis c, so liefert die zweite Gleichung hyperbolische Paraboloide, und endlich giebt die dritte Gleichung ein neues System von elliptischen Paraboloiden, wenn man der Gröfse ν irgend welche negative Werte erteilt. Die beiden letzten Gleichungen gehen aus der ersten durch Vertauschung von λ mit μ und ν hervor; ordnet man diese nach λ, so kommt

$$\lambda^3 - (c - x)\lambda^2 - \left(\frac{y^2 + z^2}{4} + cx\right)\lambda + \frac{cy^2}{4} = 0.$$

Man hat demnach

$$\lambda + \mu + \nu = c - x,$$

$$\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda = -\left(\frac{y^2 + z^2}{4} + cx\right),$$

$$\lambda\mu\nu = -\frac{cy^2}{4},$$

und hieraus:

$$(9)\qquad \begin{cases} x = c - \lambda - \mu - \nu, \\ y = 2\sqrt{\dfrac{-\lambda\mu\nu}{c}}, \\ z = 2\sqrt{\dfrac{(\lambda - c)(c - \mu)(c - \nu)}{c}}. \end{cases}$$

Auch kann man leicht mittels dieser Formeln bestätigen, dafs das System in der That orthogonal ist.

§ 6. Die Krümmungskurven des Ellipsoides.

336. Darstellung der Krümmungskurven mit Hülfe der dreifach unendlichen Schar von konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Das Ellipsoid sei dargestellt durch die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

und seine Halbaxen haben die bestimmten Werte λ, $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$. Nach dem *Dupin*schen Satze kennen wir seine Krümmungskurven. Denn ist μ^2 ein variabeler Parameter zwischen b^2 und c^2, so bestimmen die einschaligen Hyperboloide, deren Wert

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1$$

ist, auf dem Ellipsoide ein erstes System von Krümmungskurven; desgleichen sind die Krümmungskurven des anderen Systemes die Durchschnitte des Ellipsoides mit den zweischaligen Hyperboloiden:

$$(3)\qquad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1,$$

wenn ν^2 ein variabeler Parameter kleiner als b^2 ist.

Man erhält die Gleichungen für die Projektionen der Krümmungskurven auf die Hauptebenen der Fläche, wenn man nach einander z^2, y^2, x^2 zwischen den Gleichungen (1) und jeder der Gleichungen (2) oder (3) eliminiert. Auf diese Weise findet man für das erste System:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{c^2x^2}{\lambda^2\mu^2}+\dfrac{(c^2-b^2)\,y^2}{(\lambda^2-b^2)\,(\mu^2-b^2)}=1, \\[2ex] \dfrac{b^2x^2}{\lambda^2\mu^2}+\dfrac{(c^2-b^2)\,z^2}{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}=1, \\[2ex] \dfrac{-\,b^2y^2}{(\lambda^2-b^2)\,(\mu^2-b^2)}+\dfrac{c^2z^2}{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}=1, \end{cases}$$

und für das zweite:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{c^2x^2}{\lambda^2\nu^2}-\dfrac{(c^2-b^2)\,y^2}{(\lambda^2-b^2)\,(b^2-\nu^2)}=1, \\[2ex] \dfrac{b^2x^2}{\lambda^2\nu^2}+\dfrac{(c^2-b^2)\,z^2}{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\nu^2)}=1, \\[2ex] \dfrac{b^2y^2}{(\lambda^2-b^2)\,(b^2-\nu^2)}+\dfrac{c^2z^2}{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\nu^2)}=1; \end{cases}$$

λ^2 bedeutet hierbei stets einen festen Wert; μ und ν sind veränderlich.

Die Krümmungskurven beider Systeme projizieren sich also auf die xz-Ebene, welche die Ebene der gröfsten und der kleinsten Axe ist, als Ellipsen. In der Ebene xy sowohl, wie in der Ebene yz, welche beide die mittlere Axe des Ellipsoides enthalten, projizieren sich dagegen die Kurven des einen Systems als Ellipsen, die des anderen als Hyperbeln.

337. Monges Konstruktion der Krümmungskurven. *Monge* hat eine äufserst einfache Konstruktion angegeben, um die Projektionen der Krümmungskurven des Ellipsoides in den Hauptebenen darzustellen. Betrachten wir z. B. die Projektionen auf die xy-Ebene, welche die Ebene der gröfsten und der mittleren Axe ist. Werden die Längen der Halbaxen einer Ellipse, welche die Projektion einer Krümmungskurve des ersten Systems bildet, mit x_1 und y_1 bezeichnet, so ist nach den Gleichungen (4)

$$\frac{c^2 x_1^2}{\lambda^2} = \mu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{\lambda^2 - b^2} = \mu^2 - b^2,$$

also folgt durch Elimination von μ:

$$\frac{c^2 x_1^2}{b^2 \lambda^2} - \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{b^2(\lambda^2 - b^2)} = 1. \tag{6}$$

Bezeichnen x_1 und y_1 die Halbaxen der Hyperbel, nach welcher sich eine Krümmungskurve des zweiten Systems projiziert, so hat man ebenso nach den Gleichungen (5):

$$\frac{c^2 x_1^2}{\lambda^2} = \nu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{\lambda^2 - b^2} = b^2 - \nu^2,$$

also

$$\frac{c^2 x_1^2}{b^2 \lambda^2} + \frac{(c^2 - b^2) y_1^2}{b^2(\lambda^2 - b^2)} = 1. \tag{7}$$

Betrachten wir x_1 und y_1 als Koordinaten, so stellen die letzten beiden Gleichungen eine Hyperbel und eine Ellipse dar, die den nämlichen Mittelpunkt haben wie das Ellipsoid, und deren Axen mit den Axen der Projektionen der Krümmungskurven zusammenfallen. *Monge* hat diese Kurven die Hülfshyperbel und -Ellipse genannt (hyperbole et ellipse auxiliaire). Hat man diese konstruiert, und wählt man die Koordinaten eines jeden Punktes der ersten Kurve zu Halbaxen einer Reihe von Ellipsen, die Koordinaten eines jeden Punktes der zweiten zu Halbaxen einer Reihe von Hyperbeln, so hat man die Projektionen der beiden Systeme von Krümmungskurven in der xy-Ebene.

Macht man $y_1 = 0$, so ergeben die beiden Gleichungen (6) und (7):

$$x_1 = \pm \frac{b\lambda}{c}.$$

Diese Abscissen gehören zu den Nabelpunkten (Nr. 319); die gemeinsamen Scheitel der Hülfshyperbel und -Ellipse sind also die Projektionen der Nabelpunkte auf die xy-Ebene. Diese Scheitel liegen immer im Innern des Hauptschnittes, denn da der Annahme nach b kleiner ist als c, so ist die Gröfse $\frac{b\lambda}{c}$ kleiner als die halbe gröfste Axe λ des Ellipsoides.

Wird $\mu^2 = b^2$ gesetzt, so hat die Ellipse, welche die Projektion einer Linie des ersten Systems bildet, zur grofsen Axe die gemeinsame Axe der Hülfsellipse und -Hyperbel, und ihre kleine Axe ist null. Die Ellipse fällt also mit der x-Axe zusammen, und hieraus folgt, dafs die in der xz gelegene Hauptellipse eine Krümmungskurve ist. Wächst μ^2 von b^2 bis c^2, so wachsen die beiden Axen der Ellipse. Für $\mu^2 = c^2$ fällt die Ellipse mit der Hauptellipse in der xy-Ebene zusammen, welche mithin ebenfalls eine Krümmungskurve ist. Da die Variabele μ^2 nicht gröfsere Werte annimmt als c^2, so ist die Hülfshyperbel nur bis zu den Punkten zu nehmen, wo sie von den Tangenten der Hauptellipse, welche den Axen parallel sind, geschnitten wird.

Die Krümmungslinien des zweiten Systemes haben als Projektionen die Gleichungen (5). Ist $\nu^2 = b^2$, so hat die Hyperbel in der xy-Ebene zur transversalen Axe die gemeinsame Axe der Hülfshyperbel und -Ellipse. Die andere Axe ist null und die Kurve reduziert sich auf die geraden Strecken, welche zwischen den Nabelpunkten und der Hauptellipse enthalten sind. Nimmt ν^2 von seinem Maximalwert b^2 ab bis zum Wert null, so wird die transversale Axe kleiner, und die nicht transversale wächst. Die erstere wird null für $\nu^2 = 0$, die Hyperbel reduziert sich also auf die y-Axe, und hieraus folgt, dafs auch der dritte Hauptschnitt des Ellipsoides in der yz-Ebene eine Krümmungskurve ist.

Alle Ellipsen und Hyperbeln in der xy-Ebene kehren ihre konkave Seite nach den beiden Punkten, welche die Projektionen der Nabelpunkte sind. Die Krümmungskurven umschliefsen diese vier Punkte, die einen von der einen, die anderen von der anderen Seite; je mehr sie sich ihnen nähern, um so enger ziehen sie sich zusammen, und wenn sie sie erreicht haben, fallen sie mit der Hauptellipse, auf welcher die Nabelpunkte liegen, zusammen.

338. Fortsetzung. Alle Krümmungskurven des Ellipsoides projizieren sich in die Ebene der gröfsten und der kleinsten Axe als Ellipsen. Um diese Projektionen zu konstruieren, genügt die Anwendung einer einzigen Hülfsellipse. Denn bezeichnen wir mit x_1 und z_1 die Halbaxen einer Ellipse, welche die Projektion einer Krümmungskurve bildet, so hat man:

$$\frac{b^2 x_1^2}{\lambda^2} = \mu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{\lambda^2 - c^2} = c^2 - \mu^2,$$

oder

$$\frac{b^2 x_1^2}{\lambda^2} = \nu^2, \quad \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{\lambda^2 - c^2} = c^2 - \nu^2.$$

Die Elimination von μ^2 oder ν^2 ergiebt:

$$\frac{b^2 x_1^2}{c^2 \lambda^2} + \frac{(c^2 - b^2) z_1^2}{c^2(\lambda^2 - c^2)} = 1. \tag{8}$$

Für die Linien der einen Krümmung hat man:

$$\mu^2 > b^2, \quad \text{also} \quad x_1 > \lambda, \quad z_1 < \sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

und für die der anderen:

$$\nu^2 < b^2, \quad \text{also} \quad x_1 < \lambda, \quad z_1 > \sqrt{\lambda^2 - c^2}.$$

Es genügt den Quadranten der Hülfsellipse zu betrachten, welcher zu positiven Werten von x und z gehört. Dann sieht man, dafs die Gerade $x_1 = \lambda$, welche die Hauptellipse berührt, den Quadranten der Hülfsellipse in zwei Teile teilt, von denen der eine den Kurven der ersten Krümmung, der andere denen der zweiten entspricht. Die Scheitel der Hülfsellipse sind

$$\pm \frac{c\lambda}{b}, \quad \pm \frac{c\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Die Geraden, welche diese Scheitel paarweise verbinden, bilden einen Rhombus, dessen Seiten die Gleichungen haben

$$(9) \qquad \pm\frac{bx}{c\lambda} \pm \frac{z\sqrt{c^2-b^2}}{c\sqrt{\lambda^2-c^2}} = 1$$

und also (Nr. 319) durch die Nabelpunkte hindurchgehen. Eliminiert man x zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen der Projektionen der Krümmungskurven, nämlich

$$\frac{b^2x^2}{\lambda^2\mu^2} + \frac{(c^2-b^2)z^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)} = 1,$$

so folgt:

$$\left[z \pm \frac{(c^2-\mu^2)\sqrt{\lambda^2-c^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\right]^2 = 0.$$

Da diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so sieht man, dafs die Projektionen aller Krümmungskurven die vier Seiten dieses Rhombus berühren; sie sind demselben also eingeschrieben. Hieraus folgt, dafs die vier Punkte, in denen die Seiten dieses Rhombus die in der xz-Ebene gelegene Hauptellipse berühren, die Nabelpunkte sind. Denn wir haben gesehen, dafs diese Hauptellipse eine Krümmungskurve ist und dafs sie auch die Nabelpunkte enthält.

339. Differentialgleichung der Krümmungskurven. Um die Differentialgleichung der Projektionen der Krümmungskurven des Ellipsoides nach der allgemeinen Methode in Nr. 320 zu bilden, genügt es die Gröfsen p, q, r, s, t aus der Flächengleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1$$

zu bestimmen und diese Werte in die Gleichung (6) der genannten Nummer einzusetzen. Einen Teil dieser Rechnung haben wir schon in Nr. 319 ausgeführt und daselbst gefunden:

$$\frac{x}{\lambda^2} + \frac{pz}{\lambda^2-c^2} = 0, \qquad \frac{y}{\lambda^2-b^2} + \frac{qz}{\lambda^2-c^2} = 0;$$

ferner:

$$rz + (1+p^2) = \frac{c^2}{\lambda^2},$$

$$tz + (1+q^2) = \frac{c^2-b^2}{\lambda^2-b^2},$$

$$sz + pq = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z[(pqr-(1+p^2)s]=\frac{c^2}{\lambda^2}pq,$$

$$z[(1+q^2)s-pqt]=-\frac{c^2-b^2}{\lambda^2-b^2}pq,$$

$$z[(1+q^2)r-(1+p^2)t]=\frac{b^2(\lambda^2-c^2)}{\lambda^2(\lambda^2-b^2)}+\frac{c^2}{\lambda^2}q^2-\frac{c^2-b^2}{\lambda^2-b^2}p^2.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung (6) der Nr. 320 und führt man ferner an Stelle von p und q ihre Werte in x und y ein, so erhält man die gesuchte Gleichung, nämlich:

$$(10)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

wobei

$$A=\frac{(c^2-b^2)\lambda^2}{c^2(\lambda^2-b^2)},\quad B=\frac{b^2\lambda^2}{c^2}.$$

In der Integralrechnung wird gezeigt werden, wie man von dieser Gleichung auf die Gleichung

$$(11)\qquad \frac{c^2x^2}{\lambda^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)}=1$$

zurückkommt, die wir unmittelbar auf Grund der allgemeinen Eigenschaft orthogonaler Systeme gebildet haben. Umgekehrt ist es leicht zu bestätigen, dafs aus der Elimination von μ^2 zwischen der Gleichung (11) und der aus ihr durch Differentiation nach x und y abgeleiteten die Differentialgleichung (10) hervorgeht.

§ 7. Die Niveaulinien und die Linien gröfsten Falles.

340. Definition der Niveaulinien. Ist eine Fläche auf drei rechtwinklige Koordinatenebenen bezogen, von denen die eine, die xy-Ebene, als horizontal betrachtet wird, so heifsen die horizontalen Schnitte der Fläche die *Niveaulinien.*

Für jede Niveaulinie ist $dz=0$ oder, da $dz=pdx+qdy$ ist:

$$p\,dx+q\,dy=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{p}{q}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs in jedem Punkte einer Niveaulinie die Tangente zusammenfällt mit der horizontalen Geraden, welche in der Tangentenebene des nämlichen Flächenpunktes liegt. Denn diese Ebene hat die Gleichung

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

und der Neigungswinkel ihrer horizontalen Linie ist bestimmt durch $-\frac{p}{q}$.

Setzt man den obigen Wert für $\frac{dy}{dx}$ in die Differentialgleichung der Krümmungskurven ein (Nr. 320), so folgt:

$$pq(r - t) + (q^2 - p^2)s = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung wird von allen den Flächen erfüllt, für welche die Niveaulinien Krümmungskurven sind.

Zu einem einfacheren Resultate gelangt man noch, wenn man als Horizontalebene die xz-Ebene wählt. Dann ist für die Niveaulinien $\frac{dy}{dx} = 0$, und setzt man diesen Wert in die Differentialgleichung der Krümmungskurven ein, so wird diese

$$\frac{r}{1+p^2} - \frac{s}{pq} = 0.$$

Für die Flächen, welche dieser Gleichung genügen, ist die eine Bedingung der Nabelpunkte von selbst erfüllt. Diese Punkte sind also nur noch durch eine einzige Gleichung bestimmt, und folglich besitzt jede dieser Flächen eine Kurve von Nabelpunkten.

341. Definition der Linien gröfsten Falles. *Linie gröfsten Falles* auf einer Fläche nennt man jede auf der Fläche gelegene Kurve, deren Tangente in jedem Punkte diejenige unter den Tangenten der Fläche ist, welche dort den gröfsten Winkel mit der horizontalen Tangente bildet. Die Tangente solch einer Kurve ist daher selbst die Linie gröfsten Falles innerhalb der Tangentenebene, d. h. sie ist rechtwinklig zur horizontalen Geraden in dieser Ebene.

Ist die Fläche auf drei rechtwinklige Axen bezogen, von denen die eine, nämlich die z-Axe, vertikal ist, so hat die horizontale Gerade in der Tangentenebene den Richtungskoeffizienten $-\frac{p}{q}$; die Differentialgleichung der Linien gröfsten Falles ist also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}.$$

Die Ableitungen p und q sind mittelst der Flächengleichung als Funktionen von x und y gegeben.

Legt man durch einen Flächenpunkt die Niveaulinie und die Linie gröfsten Falles, so sind die Tangenten an diesen Kurven senkrecht zu einander. Die Niveaulinien und die Linien gröfsten Falles bilden also auf der Fläche ein orthogonales System.

Sind also die Niveaulinien zugleich Krümmungskurven, so bilden die Linien gröfsten Falles das andere System von Krümmungskurven. Diese Thatsache kann man auch dadurch bestätigen, dafs man in die Differentialgleichung der Krümmungskurven für $\frac{dy}{dx}$ den Wert $\frac{q}{p}$ einsetzt; man findet dann dieselbe partielle Differentialgleichung, welche bei der Substitution anläfslich der Niveaulinien erhalten wurde.

342. Anwendung auf das Ellipsoid. Die Anwendung der Gleichungen auf das Ellipsoid ergiebt: Ist

$$x^2 + my^2 + nz^2 = a^2$$

die Gleichung der Fläche, so wird

$$x + nzp = 0, \quad my + nzq = 0,$$

also

$$\frac{q}{p} = \frac{my}{x}.$$

Die Differentialgleichung der Linien gröfsten Falles ist demnach:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{m}{x} = 0.$$

Die linke Seite ist die Ableitung von

$$ly - mlx \quad \text{oder} \quad l\frac{y}{x^m}.$$

Der Quotient $\frac{y}{x^m}$ ist also gleich einer Konstante c, und mithin ist

$$y = cx^m$$

die Gleichung für die horizontalen Projektionen der Linien gröfsten Falles auf dem Ellipsoide.

§ 8. Definition von Flächenfamilien durch partielle Differentialgleichungen.

343. Linienflächen. Im Folgenden sollen verschiedene Klassen von Flächen untersucht und die partiellen Differentialgleichungen bestimmt werden, durch welche man alle Flächen der nämlichen Klasse darstellen kann.

Unter den Flächen, mit denen wir uns beschäftigen wollen, sind vor allem die *Linienflächen* zu beachten, d. h. die Flächen, welche durch eine bewegliche Gerade erzeugt werden. Die Klasse der Linienflächen teilt sich in zwei verschiedene Arten; die eine Art enthält die Flächen, welche wir *abwickelbare* genannt haben, die andere *nicht abwickelbare* oder *gekrümmte* Flächen.

Bezeichnen wir mit x, y, z geradlinige Koordinaten und sind a, b, α, β Funktionen eines variabelen Parameters, so sind die Gleichungen für die Erzeugenden einer beliebigen Linienfläche

(1) $$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta.$$

Es ist ersichtlich, dafs man als variabelen Parameter irgend eine der Gröfsen a, b, α, β, falls sie sich nicht auf einen konstanten Wert reduziert, wählen kann. Man hat also in dem allgemeinsten Falle nur drei willkürliche Funktionen.

Wir suchen zunächst die Bedingung dafür, dafs die Gerade (1) eine abwickelbare Fläche erzeugt. Da eine abwickelbare Fläche Einhüllende einer beweglichen Ebene ist, welche die Erzeugende enthält, so wird die Gleichung dieser beweglichen Ebene

(2) $$(x - az - \alpha) + \lambda (y - bz - \beta) = 0,$$

wobei λ eine bestimmte Funktion des Parameters sein mufs, von welchem a, b, α, β abhängen. Differentiiert man die Gleichung (2) nach dem Parameter, so folgt

(3) $$-(za' + \alpha') - \lambda(zb' + \beta') + \lambda'(y - bz - \beta) = 0,$$

und damit die Fläche eine abwickelbare sei, ist notwendig und hinreichend, dafs das System der Gleichungen (2) und (3) die nämliche Gerade darstellt, wie das System der Gleichungen (1). Die Gleichung (2) wird durch die Gleichungen (1) befriedigt, und damit auch die Gleichung (3) dadurch erfüllt sei, muſs

$$(za' + \alpha') + \lambda(zb' + \beta') = 0$$

sein, bei allen Werten von z. Dies giebt die beiden Bedingungen

$$a' + \lambda b' = 0, \quad \alpha' + \lambda \beta' = 0,$$

und demnach durch Elimination von λ:

(4) $$a'\beta' - b'\alpha' = 0.$$

Diese Gleichung drückt die Bedingung für eine abwickelbare Fläche aus. Der Weg, auf welchem sie abgeleitet ist, ist derselbe, den wir bei der Bestimmung der Krümmungskurven einschlugen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erzeugt die bewegliche Gerade, welche durch die Gleichungen (1) dargestellt ist, eine gekrümmte Fläche.

344. Der Abstand zweier benachbarter Erzeugenden. Bezeichnen wir den Parameter, von welchem a, b, α, β abhängen, mit θ, und betrachten wir die beiden Erzeugenden, welche den Werten θ und $\theta + \Delta\theta$ des Parameters entsprechen. Die Gleichungen dieser Erzeugenden sind

$$x = az + \alpha, \quad x = (a + \Delta a) z + (\alpha + \Delta\alpha),$$
$$y = bz + \beta, \quad y = (b + \Delta b) z + (\beta + \Delta\beta).$$

Ist D die kürzeste Entfernung der beiden Geraden und i der Winkel, den sie miteinander bilden, so hat man nach bekannten Formeln:

(5) $$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{\Delta a\,\Delta\beta - \Delta b\,\Delta\alpha}{\pm\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}, \\ \sin i &= \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}}, \end{aligned}\right.$$

also

$$\frac{D}{i} = \pm\frac{\sin i}{i}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}$$
$$\times \frac{\frac{\Delta a}{\Delta\theta}\frac{\Delta\beta}{\Delta\theta} - \frac{\Delta b}{\Delta\theta}\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}}{\left(\frac{\Delta a}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta b}{\Delta\theta} - b\frac{\Delta a}{\Delta\theta}\right)^2}.$$

Läſst man $\Delta\theta$ nach null konvergieren und geht zu den

Grenzen über, so wird dieser Ausdruck, wenn man die Ableitungen nach θ durch Accente bezeichnet:

$$(6)\quad \lim \frac{D}{i} = \pm \lim \frac{\sin i}{i} (a^2 + b^2 + 1) \frac{a'\beta' - b'\alpha'}{a'^2 + b'^2 - (ab' - a'b)^2}.$$

Ist die Bedingung (4) nicht erfüllt, so hat die rechte Seite dieser Gleichung einen endlichen von null verschiedenen Wert, und hieraus schliefst man den

Lehrsatz I. Bei einer nicht abwickelbaren Linienfläche wird die kürzeste Entfernung zweier benachbarter Erzeugenden mit dem Winkel, welchen dieselben mit einander bilden, in der ersten Ordnung null, wenn $a'\beta' - b'\alpha'$ nicht null ist.

345. Die Cylinderflächen. Den einfachsten Fall abwickelbarer Flächen bilden die Cylinder. Die bewegliche Ebene, deren Einhüllende die Fläche ist, und die umgekehrt die Tangentenebene der Fläche bildet, ist hier einer festen gegebenen Geraden parallel. Hieraus läfst sich unmittelbar die partielle Differentialgleichung der Fläche bilden. Denn sind

$$\xi = a\zeta, \quad \eta = b\zeta$$

die Gleichungen der Geraden, welche parallel zu den Erzeugenden durch den Anfangspunkt des geradlinigen Koordinatensystemes gelegt ist, und

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die Gleichung der Tangentenebene der Fläche im Punkte x, y, z, so wird die Bedingung dafür, dafs diese Ebene der Geraden parallel ist:

$$(1)\quad ap + bq = 1.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung, welche alle cylindrischen Flächen mit der vorgeschriebenen Richtung der Erzeugenden erfüllen müssen.

Man kann diese auch ableiten aus der Koordinatengleichung, welche für die cylindrischen Flächen besteht. Wenn die Gleichungen

$$(2)\quad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

eine Erzeugende der Fläche darstellen, so hängen α und β von einem variabelen Parameter ab, und sind also mit einander durch eine Gleichung

(3) $$\Phi(\alpha, \beta) = 0$$

verbunden, in welcher Φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Eine solche willkürliche Funktion von zwei Variabelen (α, β) wird uns später noch öfter begegnen. Hier wie dort wählen wir die Funktion nicht ganz willkürlich, vielmehr einmal so, dafs sie in der Umgebung der betrachteten Stelle der Forderung $\mathfrak{B}$ genügt, sodann so, dafs ebenfalls in jener Umgebung $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ nicht gleichzeitig null sind. Die Elimination von α und β zwischen den Gleichungen (2) und (3) liefert

(4) $$\Phi(x - az, y - bz) = 0,$$

und dies ist die allgemeine Funktionalgleichung der Cylinderflächen. Um die partielle Differentialgleichung zu erhalten, mufs man die Funktion Φ nach der Methode der Nr. 88 eliminieren. Differentiiert man die Gleichung (3) oder (4) partiell nach x sowohl wie nach y, so folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(1 - ap) - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} bp = 0,$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} aq + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(1 - bq) = 0,$$

und die Elimination des Verhältnisses $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} : \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ führt auf die partielle Differentialgleichung (1).

In der Integralrechnung wird gezeigt werden, wie man von der partiellen Differentialgleichung umgekehrt zu der Funktionalgleichung, welche nur die Koordinaten enthält, zurückkommt.

Da die cylindrischen Flächen abwickelbar sind, so bilden ihre Erzeugenden ein erstes System von Krümmungskurven (Nr. 325); das zweite System wird von den zu den Erzeugenden senkrechten Schnitten geliefert.

346. Die Kegelflächen. Die Kegelflächen gehören auch zu den abwickelbaren; die bewegliche Ebene, welche von der Fläche eingehüllt wird, geht durch einen festen Punkt; sie ist zugleich die Tangentenebene der Fläche. Bezeichnet man also mit x_0, y_0, z_0 die geradlinigen Koordinaten des festen Scheitel-punktes, mit x, y, z die Koordinaten der Flächenpunkte, so mufs jede Tangentenebene die Gleichung erfüllen:

$$(1) \qquad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung der Kegelflächen. Sie kann auch aus der allgemeinen Funktionalgleichung der Flächen abgeleitet werden. Sind

$$(2) \qquad x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

die Gleichungen der Erzeugenden, so hängen die Gröfsen a und b von einem Parameter ab, d. h. sie sind unter einander durch eine Gleichung

$$(3) \qquad \Phi(a, b) = 0$$

verbunden, wobei Φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Die Elimination von a und b ergiebt die Gleichung, welche zwischen den Koordinaten x, y, z einer Kegelfläche besteht, nämlich:

$$(4) \qquad \Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Differentiiert man die Gleichungen (3) oder (4) partiell nach x und nach y, so folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}[(z - z_0) - p(x - x_0)] - \frac{\partial \Phi}{\partial b} p(y - y_0) = 0,$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial a} q(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial b}[(z - z_0) - q(y - y_0)] = 0.$$

Die Elimination des Verhältnisses $\frac{\partial \Phi}{\partial a} : \frac{\partial \Phi}{\partial b}$ führt auf die partielle Differentialgleichung (1), und umgekehrt läfst sich aus dieser die Funktionalgleichung ableiten, wie in der Integralrechnung gezeigt werden wird.

Die Erzeugenden der Kegelfläche bilden ein System von Krümmungskurven (Nr. 325); das andere erhält man, wenn man die Fläche mit allen Kugeln durchschneidet, deren Mittelpunkt der Scheitel des Kegels ist.

347. Die Konoidflächen. Die *Konoidflächen*, welche zur nicht abwickelbaren Art von Linienflächen gehören, werden von einer beweglichen Geraden erzeugt, welche stets eine feste Gerade schneidet und dabei parallel zu einer festen Ebene bleibt. Die feste Gerade heifst die *Direktrix oder Leitgerade*, die feste Ebene die *Leitebene.* Das hyperbolische

Paraboloid ist ein Konoid. Sind in Bezug auf drei beliebige Axen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

die Gleichungen der Leitgeraden, und

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung der Leitebene, ferner

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Erzeugenden, so müssen, damit diese die Leitgerade treffen und der Leitebene parallel sind, die Gleichungen erfüllt sein:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{a - m}{\alpha - \mu} = \dfrac{b - n}{\beta - \nu}, \\ Aa + Bb + C = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen zwei der Gröfsen a, b, α, β als Funktionen der beiden anderen, und diese beiden sind durch eine willkürliche Funktion mit einander verbunden. Um die partielle Differentialgleichung der Fläche zu bilden, hat man die Bedingungen aufzustellen, dafs die Tangentenebene in einem beliebigen Punkt x, y, z der Fläche, deren Gleichung

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

ist, die Erzeugende enthält, oder parallel ist zur Geraden $\xi = a\zeta$, $\eta = b\zeta$; auf diese Weise erhält man

$$(3) \qquad ap + bq = 1.$$

Eliminiert man nun die vier Gröfsen a, b, α, β zwischen den fünf Gleichungen (1), (2) und (3), so erhält man die partielle Differentialgleichung, nämlich:

$$(4) \quad \frac{p(x - mz - \mu) + q(y - nz - \nu)}{mp + nq - 1} = \frac{A(x - mz - \mu) + B(y - nz - \nu)}{Am + Bn + C}.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man die Leitgerade zur z-Axe und die Leitebene zur xy-Ebene wählt; alsdann hat man

$$m = 0, \quad \mu = 0, \quad n = 0, \quad \nu = 0, \quad A = 0, \quad B = 0,$$

und die Gleichung (4) reduziert sich auf

$$(5) \qquad px + qy = 0.$$

In diesem Falle sind die Gleichungen der Erzeugenden, welche die z-Axe treffen, und der xy-Ebene parallel sind:

(6) $$z = h, \quad y = gx.$$

Die Gröfsen h und g sind durch eine willkürliche Gleichung mit einander verbunden, und setzt man

(7) $$h = \varphi(g),$$

so ergiebt die Elimination der Gröfsen h und g aus den drei Gleichungen (6) und (7) als Gleichung einer beliebigen Konoidfläche mit den vorgeschriebenen Bedingungen

(8) $$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Diese besagt, dafs z eine willkürliche homogene Funktion nullter Ordnung von x und y ist. Um die Funktion φ zu eliminieren, kann man also das Theorem über homogene Funktionen anwenden, wodurch man wieder auf die Gleichung (5) geführt wird.

348. Die Rotationsflächen. Bei jeder Rotationsfläche schneidet die Normale jedes Flächenpunktes die Axe. Aus dieser Eigenschaft kann man unmittelbar die partielle Differentialgleichung dieser Flächen ableiten; denn sind in Bezug auf drei rechtwinklige Axen

$$(\xi - x) + p(\zeta - z) = 0 \quad \text{und} \quad (\eta - y) + q(\zeta - z) = 0$$

die Gleichungen der Normale im Punkte x, y, z, und

$$\xi = m\zeta + \mu, \quad \eta = n\zeta + \nu$$

die Gleichungen der Axe der Fläche, so erhält man, indem man ξ, η, ζ aus diesen vier Gleichungen eliminiert:

(1) $$(q + n)(x + pz - \mu) - (p + m)(y + qz - \nu) = 0,$$

und dies ist die partielle Differentialgleichung.

Man kann diese Gleichung auch ableiten aus der Funktionalgleichung, welche die Koordinaten der Flächenpunkte erfüllen müssen. Die Rotationsfläche wird nämlich erzeugt durch einen Kreis von beweglichem Radius, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt, und dessen Ebene senkrecht zur Axe ist. Zur Darstellung dieses Kreises dienen die beiden Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned}(x-\mu)^2+(y-\nu)^2+z^2&=u,\\ mx+ny+z&=v.\end{aligned}$$

Die erste repräsentiert eine Kugel mit variabelem Radius, deren Mittelpunkt der Fufspunkt der Axe auf der xy-Ebene ist, die zweite eine bewegliche Ebene senkrecht zur Axe. Die Gröfsen u und v sind durch eine willkürliche Gleichung

$$(3)\qquad \Phi(u, v)=0$$

mit einander verbunden, welche die Gleichung der Rotationsfläche wird, wenn man u und v durch ihre Werte aus den Gleichungen (2) ersetzt. Differentiiert man diese nach x sowohl wie nach y, so folgt:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial u}[(x-\mu)+pz]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}(m+p)=0,$$

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial u}[(y-\nu)+qz]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}(n+q)=0.$$

Die Elimination von $\frac{\partial\Phi}{\partial u}:\frac{\partial\Phi}{\partial v}$ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt die oben gebildete partielle Differentialgleichung.

Wählt man die Axe der Rotationsfläche zur z-Axe, so wird $m=0$, $\mu=0$, $n=0$, $\nu=0$; die partielle Differentialgleichung reduziert sich auf

$$(4)\qquad qx-py=0,$$

und die Gleichungen (2) und (3) ergeben als Funktionalgleichung:

$$(5)\qquad \Phi(x^2+y^2, z)=0 \quad\text{oder}\quad z=\varphi(x^2+y^2),$$

wobei φ eine willkürliche Funktion ist.

349. Die Krümmungskurven der Rotationsflächen. Auf den Rotationsflächen bilden die Meridiankurven und Parallelkreise die beiden Systeme von Krümmungskurven. Denn die Normalen der Fläche, welche in den Punkten einer Meridiankurve konstruiert werden, liegen in der Meridianebene, und die Normalen in den Punkten eines Parallelkreises bilden einen Rotationskegel. Man kann dies auch vermittelst der allgemeinen Gleichung der Krümmungskurven

$$\frac{p'}{x'+pz'}=\frac{q'}{y'+qz'}$$

bestätigen. Denn nach der Gleichung (5) wird

$$p = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \quad q = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

demnach:

$$p' = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,x' + 2x\varphi''(x^2 + y^2)\,2(xx' + yy'),$$
$$q' = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,y' + 2y\varphi''(x^2 + y^2)\,2(xx' + yy').$$

Die Accente bedeuten Ableitungen nach dem Parameter, welcher als unabhängige Variabele in den Gleichungen der Krümmungskurven auftritt; bei der Funktion φ bedeuten freilich die Accente Differentiationen nach dem Argumente $x^2 + y^2$ der Funktion φ.

Aus der Gleichung (5) folgt aber auch

$$z' = \varphi'(x^2 + y^2)\,2(xx' + yy'),$$

und sonach ist:

$$p' = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,x' + 2x\frac{\varphi''}{\varphi'}z', \quad q' = 2\varphi'(x^2 + y^2)\,y' + 2y\frac{\varphi''}{\varphi'}z'.$$

Setzt man diese Werte von p, q, p', q' in die Gleichung

$$\frac{p'}{x' + pz'} = \frac{q'}{y' + qz'}$$

ein, so erhält man:

$$z'(xy' - yx')\left[\frac{\varphi''(x^2 + y^2)}{\varphi'(x^2 + y^2)} - 2\varphi'(x^2 + y^2)^2\right] = 0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden:

$$z' = 0, \quad \left(\frac{y}{x}\right)' = 0.$$

Für das eine System der Krümmungskurven ist also $z =$ konst, für das andere $\frac{y}{x} =$ konst, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

350. Eine allgemeine Betrachtung. Wenn die Gleichung einer Flächenfamilie, welche von den geradlinigen Koordinaten x, y, z und einem variabelen Parameter α abhängt, eine willkürliche Funktion dieses Parameters enthält, also von der Form ist

$$f[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0,$$

so kann man aus den Gleichungen, welche die Einhüllende dieser Flächen enthält,

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

die willkürliche Funktion φ eliminieren. Man erhält auf diese

Weise eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche allen Einhüllenden angehört, die sich nur durch die Beschaffenheit der Funktion φ unterscheiden. Wir wollen hier diese Rechnung nicht wiederholen, die in Nr. 91 ausreichend entwickelt ist. Hinsichtlich der Fälle aber, bei denen die gegebene Gleichung mehrere willkürliche Funktionen des Parameters α enthält, müssen wir uns auf die abwickelbaren (developpabelen) Flächen beschränken.

351. Eine Schar partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die abwickelbaren Flächen. Wir betrachten eine bewegliche Ebene, welche durch die Gleichung

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha) \tag{1}$$

dargestellt ist, wobei α einen variabelen Parameter, $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ zwei willkürliche Funktionen desselben bezeichnen. Die Ableitung der Gleichung nach α ist

$$0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \tag{2}$$

und das System dieser beiden Gleichungen repräsentiert alle abwickelbaren Flächen.

Der Wert des totalen Differentiales dz wird erhalten, indem man die Gleichung (1) differentiiert unter der Annahme, dafs α, infolge der Gleichung (2), eine Funktion der Variabelen x und y ist. Da aber infolge dieser Gleichung der Koeffizient von $d\alpha$ verschwindet, so ist

$$dz = \alpha dx + \varphi(\alpha)\, dy, \tag{3}$$

wie wenn α konstant wäre. Hieraus folgt, dafs

$$p = \alpha, \quad q = \varphi(\alpha), \tag{4}$$

uud nun lassen sich leicht zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung bilden, die allen abwickelbaren Flächen angehören und nur eine einzige willkürliche Funktion enthalten. Denn die letzten Gleichungen ergeben durch Elimination von α:

$$q = \varphi(p). \tag{5}$$

Trägt man die Werte für α und $\varphi(\alpha)$ aus den Gleichungen (4) in die Gleichung (1) ein, so erhält man

$$z = px + qy + \psi(p). \tag{6}$$

Jede der Gleichungen (5) und (6) enthält nur eine willkürliche Funktion; und dies sind die beiden Gleichungen, welche wir bilden wollten. Noch allgemeiner ist die Gleichung

(7) $$z = px + qy + \psi(p, q),$$

wo ψ eine willkürliche Funktion von p und q bezeichnet. In der Integralrechnung wird gezeigt werden, dafs auch umgekehrt die Gleichung (5) nur auf abwickelbare Flächen führt, und dafs dasselbe mit einer gewissen Einschränkung auch für die Gleichungen (6) und (7) gilt.

352. Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $rt - s^2 = 0$. Um die willkürliche Funktion, welche in jeder der drei letzten Gleichungen nachgeblieben ist, zu eliminieren, mufs man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einführen. Betrachtet man zuerst die Gleichung (5) und differentiiert sie total, so folgt:

$$dq = \varphi'(p)\, dp \quad \text{oder} \quad s\,dx + t\,dy = (r\,dx + s\,dy)\, \varphi'(p).$$

Hieraus gewinnt man die beiden Gleichungen

$$s = r\varphi'(p) \quad \text{und} \quad t = s\varphi'(p),$$

also

(8) $$rt - s^2 = 0.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche von allen abwickelbaren Flächen erfüllt wird. Sie sagt aus (Nr. 318), dafs in jedem Punkte der Fläche einer der Hauptkrümmungsradien unendlich ist.

Untersucht man ebenso die Gleichung (7), welche die Gleichung (6) umfafst, indem man sie total differentiiert, so folgt die Gleichung

$$dz = (p\,dx + q\,dy) + \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) dp + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) dq,$$

die sich, da $dz = p\,dx + q\,dy$, auf

$$\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) dp + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) dq = 0$$

reduziert. Setzt man hier für dp und dq ihre Werte $r\,dx + s\,dy$, und $s\,dx + t\,dy$ ein, so folgt:

$$\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) r + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) s = 0,$$

$$\left(x + \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) s + \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) t = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Differentialgleichung (8); dabei ist indessen noch zu beachten, daſs diese Gleichungen auch erfüllt sind, indem man

$$x + \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0, \; y + \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0 \tag{9}$$

setzt. Eliminiert man nun p und q aus den Gleichungen (7) und (9), so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welche im Allgemeinen keine abwickelbare Fläche darstellt und doch der Gleichung (7) genügt. Doch wollen wir hier auf diesen Gegenstand nicht näher eingehen, welcher der Integralrechnung angehört.

353. Neue Ableitung des Satzes, daſs die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche Krümmungskurven dieser Fläche sind. Trägt man die Werte von p, q, dp, dq aus den Gleichungen (4) und den Wert von dz aus der Gleichung (3) in die Gleichung der Krümmungskurven

$$\frac{p'}{x' + p z'} = \frac{q'}{y' + q z'}$$

ein, so erhält man:

$$\alpha'[\{1+\varphi^2(\alpha)-\alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)\}y' + \{\alpha\varphi(\alpha)-(1+\alpha^2)\varphi'(\alpha)\}x'] = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden:

$$\alpha' = 0, \; \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\alpha^2)\,\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)}{1 + \varphi^2(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)}. \tag{11}$$

Die erste Gleichung (11) ergiebt $\alpha =$ Konst.; sie bestimmt die Erzeugenden der Fläche, welche das eine System von Krümmungskurven auf der Fläche bilden, wie schon früher (Nr. 325) bemerkt wurde. Die zweite liefert zusammen mit der Gleichung (2) die Differentialgleichung für das andere System.

354. Die Kanalflächen. Unter einer Kanalfläche versteht man die Einhüllende einer Kugel von gegebenem Radius, deren Mittelpunkt eine willkürliche ebene Kurve beschreibt. Bezeichnet man mit a den Radius der Kugel, mit α einen variabelen Parameter, mit $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Funktion von α, so folgt die Gleichung der Flächen aus der Elimination von α zwischen den beiden Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(x-\alpha)^2+[y-\varphi(\alpha)]^2+z^2=a^2,\\ &(x-\alpha)+[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)=0. \end{aligned}$$

Wir haben bereits in Nr. 92 die partielle Differentialgleichung erster Ordnung gebildet, welche zu diesen Flächen gehört; wir sahen, dafs die erste der Gleichungen (1) ergiebt:

$$(2)\qquad (x-\alpha)+pz=0,\quad [y-\varphi(\alpha)]+qz=0,$$

und dafs man durch Elimination von $\varphi(\alpha)$ und α die Gleichung erhält:

$$(3)\qquad z=\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Wir wollen nun noch die Krümmungskurven der Fläche bestimmen. Aus der Differentiation der Gleichungen (2) folgt:

$$(4)\qquad x'+pz'+zp'=\alpha',\quad y'+qz'+zq'=\varphi'(\alpha)\alpha';$$

setzt man andererseits die Werte von $x-\alpha$ und $y-\varphi(\alpha)$ aus (2) in die zweite Gleichung (1) ein, so erhält man:

$$p+q\varphi'(\alpha)=0 \quad \text{oder} \quad \varphi'(\alpha)=-\frac{p}{q}.$$

Hieraus und aus (4) gewinnt man:

$$1+\frac{zp'}{x'+pz'}=\frac{\alpha'}{x'+pz'},$$

$$1+\frac{zq'}{y'+qz'}=-\frac{p}{q}\,\frac{\alpha'}{y'+qz'}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber für die Krümmungskurven einander gleich, und mithin ist die Gleichung dieser Kurven:

$$\frac{q\alpha'}{x'+pz'}+\frac{p\alpha'}{y'+qz'}=0,$$

oder

$$(1+p^2+q^2)\,z'\alpha'=0;$$

dies ergiebt:

$$\alpha'=0 \quad \text{oder} \quad z'=0,$$

d. h.

$$\alpha=\text{Konst.} \quad \text{oder} \quad z=\text{Konst.}$$

Also sind die Krümmungskurven des einen Systemes die Charakteristiken der Enveloppe, welche hier von gröfsten Kreisen der beweglichen Kugel gebildet werden. Diese Kurven sind zugleich auch die Linien des gröfsten Falles auf der

Fläche, wenn man die xy-Ebene als horizontal betrachtet, denn die Kurven der andern Krümmung sind die Niveaulinien.

355. Die Linienflächen. Zum Schlusse dieses Kapitels betrachten wir den allgemeinen Fall der Linienflächen. Die Gleichungen der Erzeugenden enthalten drei willkürliche Funktionen und die Elimination von diesen erfordert die Einführung der partiellen Ableitungen dritter Ordnung. Wir bezeichnen wie früher:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

und setzen weiter:

$$dr = u\,dx + v\,dy, \quad ds = v\,dx + w\,dy, \quad dt = w\,dx + \tilde{\omega}\,dy.$$

Ferner seien

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der Erzeugenden der Fläche.

Differentiiert man diese nach x und y, und bezeichnet man mit a', b', α', β' die Ableitungen von a, b, α, β in Bezug auf den Parameter θ, von welchem diese Gleichungen abhängen, so wird

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= ap + (a'z + \alpha')\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ 0 &= aq + (a'z + \alpha')\frac{\partial\theta}{\partial y}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= bp + (b'z + \beta')\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ 1 &= bq + (b'z + \beta')\frac{\partial\theta}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} : \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{ap-1}{aq} = \frac{bp}{bq-1},$$

also:

$$ap + bq = 1, \tag{4}$$

$$a\frac{\partial\theta}{\partial x} + b\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

Die Ableitungen a', b', α', β' treten in diesen Gleichungen nicht auf.

Differentiiert man nun die Gleichung (4) nach x, ferner auch nach y, so erhält man:

$$(ar + bs) + (a'p + b'q)\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(as + bt) + (a'p + b'q)\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, nachdem man sie zuvor mit a und b multipliziert hat, so folgt auf Grund der Gleichung (5)

(6) $$a^2 r + 2ab\,s + b^2 t = 0.$$

Differentiiert man dann diese Gleichung nach x und nach y, so erhält man:

$$(a^2 u + 2ab\,v + b^2 w) + \frac{\partial(a^2 r + 2abs + b^2 t)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$(a^2 v + 2ab\,w + b^2 \tilde{\omega}) + \frac{\partial(a^2 r + 2abs + b^2 t)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Addiert man endlich diese beiden Gleichungen, nachdem man sie mit a und b multipliziert hat, so wird

(7) $$a^3 u + 3a^2 bv + 3ab^2 w + b^3 \tilde{\omega} = 0.$$

Die Gleichungen (6) und (7) enthalten nur die beiden Funktionen a und b, sie sind überdies homogen und reichen also zur Elimination derselben aus. Setzt man zur Abkürzung

(8) $$\mathsf{M} = \frac{-s + \sqrt{s^2 - rt}}{t},$$

so folgt aus der Gleichung (6) $b = a\mathsf{M}$, und substituiert man diesen Wert in die Gleichung (7), so erhält man

(9) $$u + 3v\mathsf{M} + 3w\mathsf{M}^2 + \tilde{\omega}\mathsf{M}^3 = 0$$

als partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für alle Linienflächen.

Elftes Kapitel.

Über Funktionen einer komplexen Variabelen.

§ 1. Komplexe Zahlen.

356. Definition der komplexen Zahl. Wir knüpfen an die Betrachtungen an, welche wir in den ersten Paragraphen des ersten Kapitels angestellt haben. Ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion von z, so stellt die algebraische Gleichung

$$f(z) = 0 \tag{1}$$

die Forderung eine Zahl z zu finden, welche dieser Gleichung genügt. Dieses Verlangen ist aber nicht immer erfüllbar im Bereiche der Zahlen, die wir bisher allein betrachtet haben und die wir bereits in Nr. 3 als *reelle Zahlen* bezeichnet haben. Man weiſs aber, daſs die algebraische Gleichung (1) immer Wurzeln der Form

$$z = a + bi \tag{2}$$

besitzt, wo a und b gewöhnliche reelle Zahlen sind und i — wie immer im Folgenden — die imaginäre Einheit bedeutet, d. h. die positiv genommene Quadratwurzel aus -1:

$$i = +\sqrt{-1}. \tag{3}$$

Eine Zahl der Form (2) heiſst eine *komplexe Zahl*. Die Gesamtheit aller komplexen Zahlen entsteht, wenn wir in (2) a und b alle möglichen reellen Zahlwerte annehmen lassen. Sie begreift in sich die reellen Zahlen selbst; diese entstehen, wenn $b = 0$ ist, und die sogenannten *rein imaginären* Zahlen; diese entstehen, wenn $a = 0$ ist, und sind also definiert als das Produkt einer reellen Zahl und der imaginären Einheit.

Nachzutragen ist noch, dafs die in den ersten Nummern erwähnten Rechnungsgesetze sich unverändert auf die Gröfsen der Form $a + bi$ übertragen, eben deshalb nennt man auch sie Zahlen. Im Besonderen sei der Satz erwähnt, der unmittelbar aus der Definition von i folgt:

Satz. Sind a und b reelle Zahlen, so kann die Gleichung

$$a + bi = 0$$

nur dadurch erfüllt werden, dafs man

$$a = 0 \quad \textit{und} \quad b = 0$$

setzt.

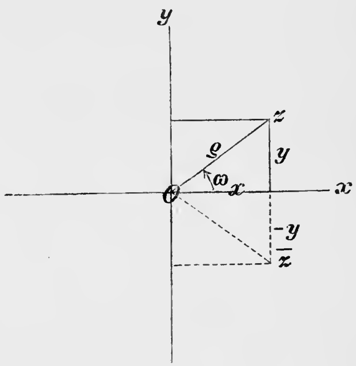
Hieraus geht hervor, dafs die reellen und imaginären Zahlen nur eine Zahl, die Null, gemein haben.

357. Geometrische Deutung der komplexen Zahl. Erteilen wir in der Gleichung

$$z = x + yi \tag{1}$$

den Variabelen x und y alle möglichen reellen Werte, so erhält z alle möglichen komplexen Werte und heifst daher *die komplexe Variabele z*. Deuten wir x und y als rechtwinklige Koordinaten der Punkte einer Ebene, so entspricht jeder komplexen Zahl z ein und nur ein Punkt dieser Ebene, der ebenfalls durch z bezeichnet werden möge, und umgekehrt entspricht jedem Punkte z der Ebene eine und nur eine komplexe Zahl z. Insofern die Punkte einer Ebene dieser Deutung unterworfen werden, heifst die Ebene *die Ebene der komplexen Variabelen z*.

Fig. 73.



Ersetzen wir y durch $-y$, so wird aus z eine neue komplexe Zahl:

$$\bar{z} = x - yi, \tag{2}$$

welche die zu z konjugierte Zahl heifst. Ihr Bildpunkt $\bar{z}$ in der Ebene der komplexen Variabelen z ist das Spiegelbild des Punktes z in Bezug auf die reelle Axe.

Führen wir in der Ebene der komplexen Variabelen z Polarkoordinaten ein, so wird:

(3) $$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

und also:

(4) $$z = \varrho \cdot (\cos \omega + i \sin \omega).$$

ϱ ist die positiv genommene Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + y^2}$ und bedeutet geometrisch die Entfernung des Punktes z vom Koordinatenanfange O; man nennt diese Zahl den absoluten Betrag (früher auch Modul) der komplexen Zahl z und bezeichnet ihn wie bei den reellen Zahlen. Man schreibt also:

$$|z| = + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ist z reell, also $y = 0$, so wird

$$|z| = + \sqrt{x^2} = |x|,$$

also dasselbe, was wir in Nr. 4 als absoluten Betrag der reellen Zahl x kennen gelernt haben. Der Winkel ω, gemessen zwischen 0 und 2π, heifst das *Argument* der komplexen Zahl z.

Stellt man eine komplexe Zahl in der Form (1) dar, so sieht man:

Zwei komplexe Zahlen sind dann und nur dann einander gleich, wenn der reelle Teil der einen gleich ist dem reellen Teile der anderen Zahl, und wenn auch der imaginäre Teil der einen gleich ist dem imaginären Teile der anderen Zahl.

Stellt man dagegen eine komplexe Zahl in der Form (4) dar, so erkennt man:

Zwei komplexe Zahlen sind dann und nur dann einander gleich, wenn der absolute Betrag der einen Zahl gleich dem der anderen ist, und wenn auch das Argument der einen Zahl gleich dem der anderen ist.

Geometrisch entsprechen zwei gleichen komplexen Zahlen zwei zusammenfallende Punkte und umgekehrt.

358. Geometrische Deutung der Addition und Subtraktion. Addition und Subtraktion komplexer Zahlen lassen sich geometrisch einfach genug deuten.

Gesetzt, man habe (Fig. 74) die Punkte c_1 und c_2 markiert, welche zwei gegebenen komplexen Zahlen c_1 und c_2 entsprechen.

Wie findet man durch geometrische Konstruktion den Punkt $c_1 + c_2$, welcher der Summe der beiden Zahlen c_1 und c_2 entspricht?

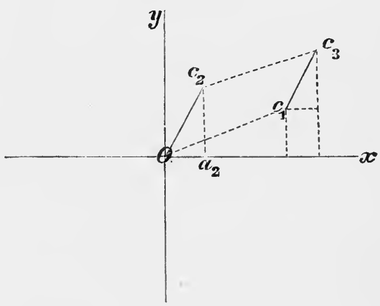
Wir verbinden einen der Punkte c_1 und c_2, etwa c_2, mit dem Koordinatenanfange O durch die Strecke Oc_2. Ziehen wir nun durch den anderen Punkt c_1 eine Strecke gleich und gleichgerichtet mit Oc_2, so ist der Endpunkt c_3 dieser Strecke der gesuchte Punkt $c_1 + c_2$.

Zum Beweise setzen wir:

$$c_1 = a_1 + b_1 i, \quad c_2 = a_2 + b_2 i;$$

dann sind (a_1, b_1) und (a_2, b_2) die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte c_1 und c_2. Fällen wir nun von c_1, c_2 und c_3 Lote auf die x-Axe und ziehen durch c_1 eine Parallele zur x-Axe, bis sie das Lot, welches von c_3 auf die x-Axe gefällt war, schneidet, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse $\overline{c_1 c_3}$ die Länge $\overline{Oc_2}$ hat und dessen durch c_1 gehende Kathete mit $\overline{c_1 c_3}$ denselben Winkel bildet, wie die Strecke $\overline{Oa_2}$ mit $\overline{Oc_2}$. Das Dreieck ist also kongruent dem rechtwinkligen Dreieck Oa_2c_2; folglich haben seine Katheten die Längen a_2 und b_2, und mithin sind $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$ die Koordinaten des Punktes c_3. Also ist die durch ihn repräsentierte Zahl:

Fig. 74.



$$c_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i = c_1 + c_2,$$

wie behauptet war.

Aus der Gleichung

(1) $$c_3 = c_1 + c_2$$

folgt umgekehrt:

(2) $$c_1 = c_3 - c_2.$$

Mithin ergiebt sich folgende geometrische Konstruktion der Differenz zweier komplexer Zahlen:

Sind c_3 und c_2 zwei gegebene Zahlen und c_3 und c_2 (Fig. 74) die sie repräsentierenden Punkte, so ziehe man $\overline{Oc_2}$ und durch c_3 eine Strecke $\overline{c_3 c_1}$ gleich $\overline{c_2 O}$ und gleichgerichtet mit $\overline{c_2 O}$. Der Endpunkt c_1 dieser Strecke repräsentiert dann die Zahl $c_3 - c_2$.

In dem Vierecke $Oc_1c_3c_2$ sind die Strecken $\overline{Oc_2}$ und $\overline{c_1 c_3}$ gleich und parallel; es ist also ein Parallelogramm. Durch diese Bemerkung gewinnen wir eine einfache analytische Darstellung der Entfernung zweier Punkte c_1 und c_3. Es ist

$$\overline{c_2 c_3} = \overline{Oc_1},$$

und nach Nr. 357 wird die Entfernung $\overline{Oc_1}$ eines Punktes c_1 vom Koordinatenanfange O durch den absoluten Betrag der komplexen Zahl c_1 gemessen. Es ist also:

$$\overline{c_2 c_3} = |c_1|.$$

Nach (2) ist aber:

$$c_1 = c_3 - c_2.$$

Also erhalten wir:

$$\overline{c_2 c_3} = |c_3 - c_2|; \quad \text{d. h.:}$$

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem absoluten Betrage der Differenz der durch die Punkte repräsentierten komplexen Zahlen.

Die geometrische Konstruktion für die Summe zweier Zahlen läſst sich auf eine beliebige Anzahl von Summanden ausdehnen. Sind

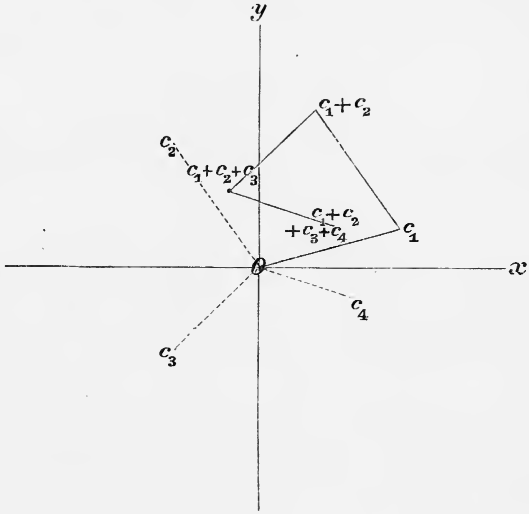
$$c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$$

eine Anzahl komplexer Zahlen und sind die sie repräsentierenden Punkte ebenso bezeichnet, so findet man den Punkt $c_1 + c_2 + \cdots c_n$ durch wiederholte Anwendung der oben für den Fall $n = 2$ gegebenen Regel:

Man verbinde (Fig. 75) $c_2, c_3, \ldots c_n$ mit O, ziehe durch c_1 eine Strecke gleich und gleichgerichtet $\overline{Oc_2}$. Ihr Endpunkt ist $c_1 + c_2$. Durch ihn ziehe man eine Strecke gleich und gleichgerichtet mit $\overline{Oc_3}, \ldots$; schlieſslich ziehe man durch $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}$ eine Strecke gleich und gleichgerichtet mit $\overline{Oc_n}$. Ihr Endpunkt ist der gesuchte Punkt $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

In Fig. 75 ist diese Konstruktion für den Fall $n = 4$ durchgeführt. Man wird bemerken, dafs die Summe der

Fig. 75.



Längen der Strecken, die wir bei unserer Konstruktion durchlaufen mufsten, um von O über c_1, $c_1 + c_2$, $c_1 + c_2 + c_3$, ... nach $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ zu gelangen, gleich ist

$$|c_1| + |c_2| + |c_3| + \cdots + |c_n|.$$

Dieser Ausdruck stellt also den Weg dar, der uns von O nach $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ geführt hat. Der kürzeste Weg zwischen O und $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ ist natürlich die Gerade $\overline{O, c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$, deren Länge durch

$$|c_1 + c_2 + \cdots + c_n|$$

gegeben wird. Wir haben also:

$$|c_1 + c_2 + \cdots + c_n| \leqq |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n|.$$

Also gilt auch für komplexe Zahlen der überaus wichtige

Satz. *Der absolute Betrag einer Summe von einer endlichen Reihe von Zahlen ist nicht gröfser als die Summe ihrer absoluten Beträge.*

Für reelle Zahlen haben wir den Satz schon in Nr. 4 kennen gelernt.

359. Endlicher Grenzwert einer unendlichen Reihe von Zahlen. An die Spitze dieser Nummer stellen wir die folgende

Definition. Es sei eine unendliche Reihe komplexer Zahlen gegeben:

$$c_1,\ c_2,\ \ldots c_n,\ \ldots$$

von folgender Eigenschaft:

Ist σ eine (beliebig klein) vorgeschriebene reelle positive Zahl, so kann man immer eine ganze positive Zahl n finden, so daſs

$$|c_{n'} - c| < \sigma$$

wird für jede ganze positive Zahl n', die n übersteigt.

Ist diese Forderung erfüllt, so sagen wir, die Reihe der c_n hat für $n = \infty$ den Grenzwert c und schreiben:

$$\lim_{n=\infty} c_n = c.$$

Wir wollen nun diese Definition einer kurzen Diskussion unterwerfen. Zunächst wollen wir den besonderen Fall betrachten, daſs alle c reell sind. c_n wird dann eine Funktion von n, und in Nr. 17 haben wir definiert, was es heiſst, die Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x hat für $x = \infty$ den Grenzwert A. Schreibt man in der dortigen Definition c_n für $f(x)$, und c für A, so entsteht genau unsere jetzige Definition; es besteht nur der Unterschied, daſs unsere Variabele n hier auf ganze positive Zahlen beschränkt ist, während in Nr. 17 die Veränderliche x für hinreichend groſse x *alle* reellen Werte wachsend durchlaufen sollte. Abgesehen hiervon können wir sagen:

Die hier für komplexe Zahlen gegebene Definition eines Grenzwertes stimmt formal mit der in Nr. 17 für reelle Zahlen gegebenen vollständig überein.

Jetzt wollen wir mit unserer Definition auch eine bestimmte Anschauung zu verbinden suchen. In der Ebene der komplexen Variabelen z denken wir uns die Punkte $c, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ alle markiert (Fig. 76). Ist z irgend ein Punkt der Ebene, so ist nach Nr. 358 sein Abstand vom Punkte c durch den Ausdruck

$$|z - c|$$

gegeben. Die Gleichung

$$|z - c| = \sigma$$

liefert uns also alle Punkte, deren Abstand von c gleich σ ist; d. h. sie ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt c und dessen Radius σ ist. Die Ungleichheit

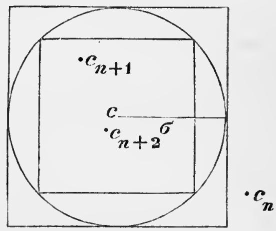
$$|z-c|>\sigma$$

liefert uns alle Punkte im Äufseren, die Ungleichheit

$$|z-c|<\sigma$$

alle Punkte im Inneren dieses Kreises. Soll also die Reihe der Zahlen

Fig. 76.



$$c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$$

den Grenzwert c für $n=\infty$ besitzen, so heifst dies, dafs, von einem bestimmten n an, alle Punkte

$$c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$$

im Inneren eines Kreises liegen, der um c mit dem Radius σ beschrieben ist. Da dies gelten soll, wie klein man auch den Radius σ des Kreises wählt, so folgt, dafs in noch so grofser Nähe von c immer noch unendlich viele Punkte unserer Zahlenreihe liegen und die Stelle c heifst deshalb eine *Häufungsstelle* für die Punkte der Zahlenreihe $c_1, c_2, \ldots$

Im Anschlusse an diese Betrachtung können wir sofort einen wichtigen Satz ableiten. Er lautet:

Satz. Damit die komplexen Zahlen

$$c_n = a_n + b_n i \tag{1}$$

für $n=\infty$ den Grenzwert

$$c = a + bi \tag{2}$$

besitzen, ist notwendig und hinreichend, dafs der reelle Teil a_n von c_n zum Grenzwert den reellen Teil a von c, und dafs der imaginäre Teil $b_n i$ von c_n zum Grenzwert den imaginären Teil bi von c hat; in Zeichen: Wenn

$$\lim_{n=\infty}(a_n + b_n i) = a + bi \tag{3}$$

ist, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} a_n = a \quad \textit{und} \quad \lim_{n=\infty} b_n = b; \tag{4}$$

und umgekehrt, bestehen die Gleichungen (4), *so folgt aus ihnen* (3).

1. Wir beweisen zunächst, dafs aus der Gleichung (3) die beiden Gleichungen (4) folgen, nachher das Umgekehrte. Es sei also:

$$\lim_{n=\infty} c_n = c;$$

dann kann man, wenn σ eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl ist, immer ein n finden, so dafs alle Punkte

$$c_{n+1},\ c_{n+2},\ \ldots$$

im Inneren des Kreises um c mit dem Radius σ liegen. Wir beschreiben jetzt um diesen Kreis ein Quadrat, dessen Seitenstrecken der x- und der y-Axe parallel sind (Fig. 76); sie haben die Länge 2σ. Dann liegen $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ auch im Inneren dieses Quadrates. Sind nun $(a_{n+1}, b_{n+1}), (a_{n+2}, b_{n+2}), \ldots$ die Koordinaten der Punkte $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ so wird:

$$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}i, \quad c_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2}i, \ \ldots$$

Die Projektionen der Strecke $\overline{cc_{n+1}}$ auf die Koordinatenaxen sind:

$$a - a_{n+1}, \quad b - b_{n+1}.$$

Sie sind, da c_{n+1} in dem Quadrat mit der Seite 2σ liegt, beide absolut kleiner als σ:

$$|a_{n+1} - a| < \sigma, \quad |b_{n+1} - b| < \sigma.$$

Diese Ungleichheiten bleiben für jedes gröfsere n ebenfalls bestehen. Es ist also, wenn σ irgend eine positive Zahl,

$$|a_{n'} - a| < \sigma$$

für jedes $n' > n$ und ebenso:

$$|b_{n'} - b| < \sigma.$$

Also folgt:

(4) $$\lim_{n=\infty} a_n = a, \quad \lim_{n=\infty} b_n = b.$$

2. Ist nun zweitens vorausgesetzt, dafs die Gleichungen (4) bestehen, so folgt aus ihnen rückwärts (3). Wir können, unter τ eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl verstanden, die Gleichungen (4) durch die Ungleichheiten ersetzen:

$$|a_{n'} - a| < \tau, \quad |b_{n'} - b| < \tau,$$

welche für jedes $n' > n$ bestehen müssen. Es liegen also die Punkte $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ alle im Inneren eines Quadrates (Fig. 76), dessen Mittelpunkt c ist und dessen Seiten den Axen parallel und von der Länge 2τ sind. Beschreiben wir um dieses Quadrat einen Kreis, so ist dessen Radius

$$\sigma = \tau \cdot \sqrt{2}.$$

In seinem Innern liegen alle Punkte $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$, es wird auch

$$|c_{n'} - c| < \sigma$$

für jedes n', das gröfser als n ist. Da aber gleichzeitig mit τ auch σ beliebig vorgeschrieben werden kann, so folgt:

$$\lim_{n=\infty} c_n = c, \tag{3}$$

wie behauptet war.

360. Die Stelle $z = \infty$. Während man bei den reellen Zahlen zwei verschiedene Arten des Unendlichwerdens unterscheidet, nämlich $+\infty$ und $-\infty$, führt man bei den komplexen Zahlen nur *einen* unendlich grofsen Grenzwert ein. Man sagt:

Definition. Ist eine unendliche Reihe komplexer Zahlen gegeben

$$c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$$

von der Eigenschaft, dafs

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{c_n} = 0$$

ist, so sagt man, dafs der Grenzwert von c_n für $n = \infty$ unendlich grofs ist und schreibt:

$$\lim_{n=\infty} c_n = \infty.$$

Ist

$$c_n = r_n(\cos\omega_n + i\sin\omega_n),$$

so wird

$$\frac{1}{c_n} = \frac{1}{r_n}(\cos\omega_n - i\sin\omega_n),$$

und also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{r_n} = 0.$$

Mithin wird:

$$\lim_{n=\infty} r_n = \infty.$$

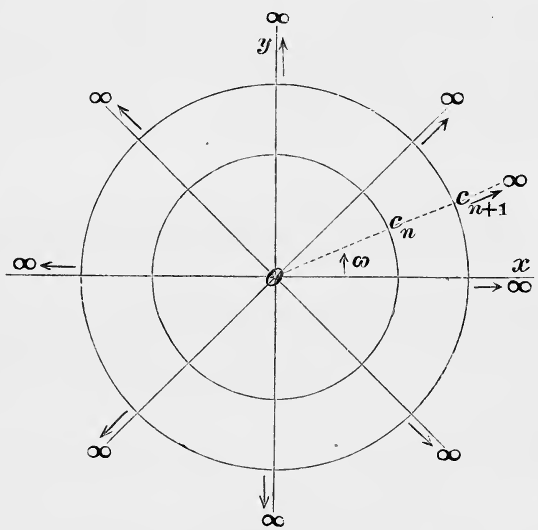
Denkt man sich also die zu c_1, c_2, ... gehörigen Bildpunkte konstruiert, so wachsen deren Abstände vom Koordinatenanfange

$$r_1, r_2, \ldots$$

von einer bestimmten Stelle an über jedes Mafs: die Punkte c entfernen sich immer weiter von O. Aber man sagt, dafs sie immer *derselben* Stelle ∞ zustreben, in welcher Weise sie sich auch von O entfernen mögen.

Die letzte Bemerkung soll noch etwas erläutert werden.

Fig. 77.



Setzen wir etwa

$$c_n = r_n(\cos\omega + i\sin\omega)$$

und nehmen für

$$r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$$

irgend eine bis ins Unendliche wachsende Reihe positiver Zahlen, während wir ω einen festen Wert erteilen, so werden die Bildpunkte auf einer Geraden ins Unendliche rücken (in Fig. 77 die punktierte Gerade, die mit der x-Axe den Winkel ω bildet, und die wir kurz die Gerade ω nennen wollen). Welchen Wert nun auch ω haben mag, deutet man die Ebene als Ebene der komplexen Variabelen z, so werden auf jeder solchen

Geraden die Punkte c_n nach demselben Punkte ∞ zustreben. In der Figur ist dies für die Fälle:

$$\omega = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$$

erläutert.

Alle Strahlen durch O vereinigen sich nach dieser Anschauung in demselben Punkte ∞, die Ebene erscheint somit als eine Kugel von unendlich grofsem Radius. Ein Pol von ihr ist der Nullpunkt; die durch ihn gehenden Meridiane, das sind die Strahlen durch O, vereinigen sich schliefslich in dem Gegenpole von O, dem Punkte ∞. Es ist unnötig hinzuzufügen, dafs die Unterscheidung *zweier* Punkte $+\infty$ und $-\infty$ auf der reellen x-Axe, welche wir bei den reellen Veränderlichen einführten, hier fortfällt; beide vereinen sich ebenfalls im Punkte ∞ und sie sind ebensowenig verschieden wie $+0$ und -0.

§ 2. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

361. Reihen mit konstanten Gliedern.

Definition. Eine Reihe

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

deren Glieder $u_0, u_1, \ldots$ *komplexe Zahlen sind, heifst konvergent, wenn die Reihe der Zahlen*

$$S_1 = u_0, \quad S_2 = u_0 + u_1, \quad S_3 = u_0 + u_1 + u_2, \cdots,$$
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \cdots$$

für $n = \infty$ *einen bestimmten endlichen Grenzwert hat:*

$$\lim_{n=\infty} S_n = S.$$

S *heifst die Summe der Reihe* (1) *und man schreibt:*

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heifst divergent.

Man sieht, dafs die Definition der Konvergenz formal genau übereinstimmt mit der in Nr. 99 für reelle Reihen gegebenen Definition. Überhaupt stimmen die im 1. Kapitel benutzten Definitionen des Limes und der Satz von den absoluten Beträgen (Nr. 4), endlich auch die Rechnungsgesetze für die reellen Zahlen mit den für die komplexen geltenden formal vollständig überein.

Auf diesen Thatsachen allein fuſst aber der § 1 des 5. Kapitels. Wir schlieſsen daraus:

Die allgemeinen Sätze des ersten Paragraphen von Kapitel 5 gelten auch für Reihen mit komplexen Gliedern.

Im Besonderen wollen wir auch hier die Definition beibehalten:

Definition. Eine Reihe heiſst unbedingt konvergent, wenn die Reihe ihrer absoluten Beträge konvergiert.

Von einer unbedingt konvergenten Reihe wissen wir dann nach Nr. 109, daſs ihr Wert unabhängig ist von der Anordnung ihrer Glieder. Wir rekapitulieren ferner aus Nr. 103 den Satz:

Satz. Die Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots$$

konvergiert unbedingt, wenn

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, der kleiner als 1 ist; dagegen ist sie divergent, wenn jener Grenzwert > 1 ist.

362. Potenzreihen. Haben wir eine Reihe, fortschreitend nach ganzen, positiven Potenzen von $z - z_0$:

$$c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \cdots,$$

bei welcher der Limes von $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, dessen Betrag $\frac{1}{r}$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{r},$$

so folgt aus dem letzten Satze, da

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot (z - z_0) \right| = \frac{|z - z_0|}{r}$$

wird, daſs die Potenzreihe unbedingt konvergiert für alle z, die der Bedingung genügen:

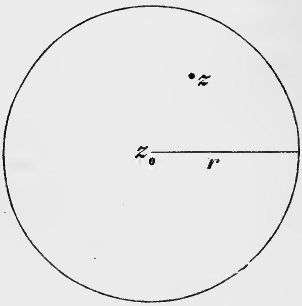
$$|z - z_0| < r.$$

Sie ist dagegen divergent für alle z, die der Bedingung

$$|z - z_0| > r$$

genügen. Unsere Potenzreihe konvergiert daher (vgl. Nr. 361) unbedingt für alle Werte z, die im Inneren eines um z_0 mit dem Radius r konstruierten Kreises liegen; sie divergiert dagegen für alle Werte z aufserhalb dieses Kreises. Der fragliche Kreis heifst daher der *Konvergenzkreis* unserer Potenzreihe.

Fig. 78.



Mit diesem Resultate können wir uns aber für das Folgende nicht begnügen. Da die Potenzreihen die Grundlage für die Betrachtungen dieses Kapitels abgeben sollen, so ist es vielmehr nötig uns noch genauere Kenntnisse über das Verhalten unserer Potenzreihe innerhalb und aufserhalb ihres Konvergenzkreises zu machen.

363. Gleichmäfsige Konvergenz. Wir wollen von unserer Potenzreihe den Rest abtrennen und sie schreiben:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + R_n;$$

dann bedeutet

$$R_n = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Wert von dem der komplexen Variabelen z, sowie dem der ganzen positiven Zahl n abhängt. Da nun unsere Reihe konvergiert, sobald $|z - z_0| < r$ ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0$$

für jedes z im Inneren des Konvergenzkreises. Erteilen wir also z einen festen Wert, der im Inneren des Konvergenzkreises sich befindet, und schreiben eine beliebig kleine positive Zahl σ vor, so kann man immer eine Zahl n finden, so dafs

$$|R_{n'}| < \sigma$$

wird für jedes ganze positive n', das n übersteigt. Man kann n immer so gewählt denken, dafs für $n' = n$ die letzte Ungleichheit noch nicht gilt, sondern erst von $n' = n + 1$ an.

Der zu findende Wert n wird sich im Allgemeinen ändern wenn die Stelle z, die man betrachtet, eine andere ist. Läſst man also σ immer fest, während z nach und nach in jede Stelle des Konvergenzkreises rückt, so wird man den unendlich vielen Lagen von z entsprechend unendlich viele ganze positive Zahlen n finden. Um dies recht anschaulich zu haben, denke man sich geradezu in jeder Stelle z des Kreisinneren ein Lot auf der z-Ebene von der Gröſse des zugehörigen n errichtet.

Jetzt sind zwei Möglichkeiten denkbar:

1) Unter den unendlich vielen Werten n giebt es einen gröſsten Wert. In diesem Falle kann man *ein* n finden, so daſs für alle z im Inneren des Kreises gleichmäſsig

$$| R_{n'} | < \sigma$$

wird, sobald $n' > n$ ist.

2) Wie groſs man auch eine ganze positive Zahl N wählen mag, es giebt immer noch Werte n, welche sie übersteigen.

Die Erfahrung lehrt nun, daſs bei allgemeinen konvergenten Reihen mit variabelen Gliedern thatsächlich beide Möglichkeiten vorkommen. Man hat daher zwei Arten der Konvergenz zu unterscheiden, Reihen der ersten Art nennt man *gleichmäſsig konvergent*, Reihen der zweiten Art *ungleichmäſsig konvergent.* Die Reihen der ersten Art lassen sich analytisch sehr bequem behandeln, während die der zweiten Art groſse Vorsicht bei ihrer Anwendung erfordern. Es ist deshalb eine auſserordentlich wichtige Thatsache, daſs in unserem Falle, wo wir es mit einer Potenzreihe zu thun haben, im Inneren des Kreises immer gleichmäſsige Konvergenz vorhanden ist. Es gilt der

Satz. In der Reihe

$$c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \cdots$$

habe $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ *für* $n = \infty$ *einen bestimmten endlichen Grenzwert* $\frac{1}{r}$:

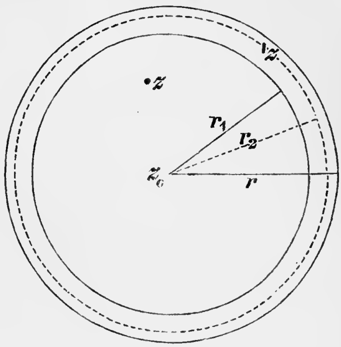
$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{r},$$

und es sei r_1 *irgend eine positive Zahl kleiner als* r; *alsdann* *konvergiert die Reihe unbedingt und gleichmäfsig für alle Werte z, die der Bedingung*

$$|z - z_0| \leqq r_1$$

genügen.

Fig. 79.



Es sei nämlich (Fig. 79) z irgend eine Stelle, für welche

$$|z - z_0| = r_2$$

ist, d. h. die auf der Peripherie des Kreises liegt, der um z_0 mit dem Radius r_2 beschrieben ist, und es sei $r_2 < r$.

Dann konvergiert unsere Potenzreihe an dieser Stelle; mithin ist (Nr. 101) dort:

$$\lim_{n=\infty} |c_n(z - z_0)^n| = \lim_{n=\infty} |c_n r_2^n| = 0.$$

Ist also ε eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl, so kann man immer ein N finden, so dafs

$$|c_n r_2^n| < \varepsilon$$

wird für jedes positive n, das N übersteigt.

Betrachten wir andrerseits die Terme:

$$|c_1 r_2|, \quad |c_2 r_2^2|, \quad |c_3 r_2^3|, \ldots |c_N r_2^N|.$$

Da ihre Zahl begrenzt ist, können wir die gröfste Zahl unter ihnen aussuchen; sie sei η und schliefslich sei M wieder die gröfsere der beiden Zahlen ε und η. Dann ist für *alle* n:

$$|c_n| \leqq \frac{M}{r_2^n}.$$

Unser Rest R_n wird nun:

$$R_n = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

und daher

$$|R_n| \leqq \frac{M|z - z_0|^n}{r_2^n}\left\{1 + \frac{|z - z_0|}{r_2} + \frac{|z - z_0|^2}{r_2^2} + \cdots\right\}.$$

Ist nun z irgend ein Punkt im Inneren des Kreises mit dem Radius r_2, so sei:

$$|z - z_0| = r_1.$$

Dann ist:

$$\frac{r_1}{r_2} \leqq 1,$$

und für jedes z, das im Innern oder auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r_1 liegt:

$$\frac{|z - z_0|}{r_2} < \frac{r_1}{r_2} < 1.$$

Mithin wird

$$|R_n| \leqq \frac{Mr_1^n}{r_2^n}\left\{1 + \frac{r_1}{r_2} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$\leqq \frac{Mr_1^n}{r_2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_1}{r_2}} = \frac{Mr_1^n}{r_2^{n-1}(r_2 - r_1)}$$

für jedes z, das auf der Peripherie oder im Inneren des Kreises mit dem Radius r_1 liegt.

Ist nun σ eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl, so bestimme man n so, daſs

$$\frac{Mr_1^n}{r_2^{n-1}(r_2 - r_1)} < \sigma$$

wird. Dies geht, da $\frac{r_1}{r_2}$ ein echter Bruch ist. Alsdann wird für dieses n und alle folgenden immer

$$|R_n| < \sigma,$$

wo auch der Punkt z in oder auf dem Kreise mit dem Radius r_1 liegen mag.

r_1 ist nun der Bedingung unterworfen, daſs es kleiner als r_2 ist, wo r_2 seinerseits nur dadurch beschränkt ist, daſs es kleiner als r ist. Mithin ist r_1 nur der Beschränkung unterworfen, daſs es kleiner als r ist; denn zwischen einer solchen Zahl r_1 und r kann man immer eine Zahl r_2 einschieben, so daſs

$$r_1 < r_2 < r$$

wird. Hierdurch ist unser Satz erwiesen.

364. Gleichmäſsige Konvergenz für Reihen mit reellen Gliedern und für Potenzreihen von mehreren Veränderlichen. Man wird bemerken, daſs der Begriff der gleichmäſsigen Konvergenz sich unmittelbar auch auf Reihen mit reellen Gliedern überträgt.

Definition. Die reelle Potenzreihe

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + R_n$$

heifst gleichmäfsig konvergent für alle reellen x, *die der Bedingung* $|x - x_0| < r$ *genügen, wenn zu einer (beliebig klein) vorgeschriebenen positiven Zahl* σ *man immer ein* n *finden kann, so dafs*

$$|R_{n'}| < \sigma$$

wird für jedes $n' > n$ *und für alle reellen* x, *die der Bedingung* $|x - x_0| < r$ *genügen.*

Da die formale Definition ungeändert bleibt, so gilt auch der in der vorigen Nummer gefolgerte Satz wörtlich ebenso für eine reelle Potenzreihe und eine reelle Variabele z.

Natürlich kann man den Begriff der gleichmäfsigen Konvergenz für irgend welche Reihen aufstellen, deren Glieder variabel sind, im Besonderen wird man für Potenzreihen mit mehr Veränderlichen definieren:

Definition. Die Potenzreihe

$$a_{00} + [a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0)] + \cdots$$
$$+ [a_{n-1,0}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_{0,n-1}(y - y_0)^{n-1}] + R_n$$

heifst gleichmäfsig konvergent für alle x, y *eines bestimmten Variabilitätsbereiches* $\mathfrak{B}$, *wenn zu einer (beliebig klein) vorgeschriebenen positiven Zahl* σ *immer ein* n *gefunden werden kann, so dafs*

$$|R_{n'}| < \sigma$$

wird für jedes ganze positive $n' > n$ *und für alle Werte* x, y *des Variabilitätsbereiches* $\mathfrak{B}$.

Zu dieser Definition ist zweierlei zu bemerken:

1. Lediglich der Übersichtlichkeit halber ist nur von zwei Veränderlichen x, y gesprochen; es ist einleuchtend wie die Definition für eine beliebige Zahl von Variabelen lautet.

2. Die Definition behält ihre Gültigkeit, mag man von reellen Potenzreihen der reellen Veränderlichen x, y oder von komplexen Potenzreihen der komplexen Veränderlichen x, y reden.

§ 3. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

365. Ganze rationale Funktionen. Setzt man

$$z = x + yi, \quad z_0 = x_0 + y_0 i,$$

so wird die m^{te} Potenz von $z - z_0$,

$$(1) \qquad (z - z_0)^m = \{(x - x_0) + (y - y_0)i\}^m,$$

wenn m eine ganze positive Zahl ist, ebenfalls eine komplexe Zahl, d. h. von der Form:

$$(2) \qquad (z - z_0)^m = u + vi = w,$$

wo u und v reelle Veränderliche sind, die Funktionen der reellen Veränderlichen x und y sind. In der That kann man die rechte Seite in (1) nach dem binomischen Satze in eine endliche Zahl von Summanden zerlegen, die abwechselnd reell und rein imaginär sind.

Ist also z eine komplexe Veränderliche, m eine ganze positive Zahl und z_0 irgend eine komplexe Konstante, so wird auch

$$(3) \qquad w = (z - z_0)^m$$

eine komplexe Veränderliche, und jeder Stelle z in der Ebene der komplexen Variabelen z entspricht eine und nur eine Stelle w, die man als Punkt in einer neuen Ebene, der Ebene der komplexen Variabelen w, deuten kann. Man sagt daher $(z - z_0)^m$ ist eine *Funktion der komplexen Variabelen* z und spricht von einer *Abbildung der* z-*Ebene auf die* w-*Ebene*, welche durch die Gleichung (3) hervorgerufen wird.

Multipliziert man $(z - z_0)^m$ mit irgend einer komplexen Konstanten c_m, so wird das Produkt wieder eine komplexe Variabele:

$$w = u + vi = c_m \cdot (z - z_0)^m.$$

Addiert man eine endliche Anzahl solcher Glieder und vermehrt die Summe um irgend eine Konstante c_0, so entsteht ein Ausdruck von der Form:

$$(4) \qquad w = c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots c_m (z - z_0)^m.$$

w wird wieder eine komplexe Variabele; d. h. von der Form

$$w = u + vi,$$

wo u und v reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x und y sind:

$$(5) \qquad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

Zu jedem Werte der komplexen Variabelen z gehört vermöge der Gleichung (4) ein bestimmter Wert w; man nennt daher auch in diesem Falle w eine *Funktion der komplexen Variabelen* z und schreibt:

$$w = f(z),$$

und man sagt, daſs durch einen Ausdruck der Form (4) eine *ganze rationale Funktion* von z definiert wird.

366. Analytische Funktionen. Betrachten wir jetzt eine Reihe, fortschreitend nach ganzen, positiven Potenzen von $z - z_0$:

$$(1) \qquad c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

welche im Inneren eines Kreises konvergiert, der mit dem Radius r um den Punkt z_0 beschrieben ist. Alsdann wird jeder komplexen Zahl z, welche der Bedingung

$$| z - z_0 | < r$$

genügt, eine komplexe Zahl

$$(2) \qquad w = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \cdots = u + vi$$

entsprechen, die durch Summation der Reihe (1) mit jeder beliebigen Annäherung berechnet werden kann. Wir sagen daher:

Durch die Gleichung (2) *wird uns im Inneren unseres Konvergenzkreises eine analytische Funktion w der komplexen Variabelen z gegeben und wir schreiben*

$$w = f(z).$$

Man hat Mittel, eine solche Funktion noch über ihren Konvergenzbereich fortzusetzen. Im Gegensatze zu der so entstehenden gesamten Funktion sagt man auch wohl, die Gleichung definiert nur ein *Element* einer analytischen Funktion. Wir können hier in der Differentialrechnung diese Ausdrucksweise entbehren, da sie erst in der Funktionentheorie ihre eigentliche Bedeutung erlangt, und da wir in der Regel ohnehin nur „Elemente" von Funktionen betrachten.

367. Grenzwerte der analytischen Funktionen. Ganz analog wie in Nr. 15 definieren wir:

Definition. Wenn man sagt, die analytische Funktion $f(z)$ der komplexen Variabelen z hat an der Stelle $z = c$ den Grenzwert C, so heifst dies:

Wird eine (beliebig kleine) positive Zahl σ vorgeschrieben, so kann man immer eine positive Zahl h finden, so dafs

$$|f(c + h') - C| < \sigma$$

wird für jedes komplexe h', dessen Betrag kleiner als h ist.

Es ist selbstverständlich, dafs wir von unserem Standpunkte aus uns vorstellen, dafs die analytische Funktion $f(z)$ im Inneren eines gewissen Kreises durch eine Reihe fortschreitend nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$ gegeben ist und, wenn wir die Funktion an einer bestimmten Stelle $z = c$ betrachten, so ist es selbstverständlich, dafs dieses c im Inneren des Konvergenzkreises der Potenzreihe liegt, von welcher wir soeben gesprochen haben. Dies mag hier ein für alle Mal bemerkt werden.

Wie schon hervorgehoben, stimmt unsere Definition des Grenzwertes einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen formal vollständig mit der bei reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen überein. Es gelten also auch hier dieselben Regeln wie früher für das Rechnen mit Grenzwerten.

Man wird bemerken, dafs schon in Nr. 359 eine analoge Übertragung vorgenommen wurde, und wir wollen die dort angestellten Betrachtungen auch hier verwerten, indem wir an die Figur 76 anknüpfen. Die Ebene der Zeichnung sei aber diesmal die Ebene der komplexen Variabelen w, die an z durch die Gleichung

$$w = f(z)$$

geknüpft ist. Trennen wir w in seinen reellen und imaginären Teil

$$w = u + vi,$$

so dafs u und v reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x und y werden:

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y),$$

und setzen wir noch

$$c = a + bi, \quad C = A + Bi,$$

so schliefsen wir ganz wie in Nr. 359 aus der Fig. 76 auf den

Satz. Damit die analytische Funktion

$$w = f(z) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) \cdot i \tag{1}$$

an der Stelle $z = a + bi$ den Grenzwert $w = A + Bi$ habe, ist notwendig und hinreichend, dafs der reelle und imaginäre Teil von w bezw. A und B zum Grenzwerte haben an der Stelle $x = a$, $y = b$; in Zeichen: Wenn

$$\lim_{z=c} f(z) = A + B \cdot i \tag{2}$$

ist, so ist auch

$$\lim_{x=a,\, y=b} \varphi(x, y) = A \quad \text{und} \quad \lim_{x=a,\, y=b} \psi(x, y) = B \tag{3}$$

und umgekehrt.

Wir wollen schliefslich noch kurz erläutern, was die Schreibweisen

$$\lim_{z=c} f(z) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{z=\infty} f(z) = C$$

bedeuten.

Definition. Man sagt, $f(z)$ hat an der Stelle $z = c$ den Grenzwert ∞, wenn dort $\frac{1}{f(z)}$ den Grenzwert null hat. Es sind also die zwei Gleichungen äquivalent:

$$\lim_{z=c} f(z) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{z=c} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Man sagt, $f(z)$ habe an der Stelle $z = \infty$ den Grenzwert C, wenn $f\left(\frac{1}{z}\right)$ an der Stelle $z = 0$ den Grenzwert C hat. Es sind also die zwei Gleichungen äquivalent:

$$\lim_{z=\infty} f(z) = C \quad \textit{und} \quad \lim_{z=0} f\left(\frac{1}{z}\right) = C.$$

Demnach hat z. B. $\frac{1}{z}$ an der Stelle $z = 0$ den Grenzwert ∞ und an der Stelle $z = \infty$ den Grenzwert 0.

368. Stetigkeit der analytischen Funktionen. Ganz wie bei den reellen Funktionen reeller Veränderlicher ist die Stetigkeit mit Hülfe des Grenzbegriffes auch bei den Funktionen komplexer Veränderlicher zu definieren. Wir verweisen geradezu hier auf die Definitionen in Nr. 20 und 21. Schreibt man dort z für x, c für a und läſst die Veränderlichen komplex sein, ebenso wie die Zahl h', während h und σ reell und positiv bleiben, so bekommt man die Definition der Stetigkeit für Funktionen komplexer Veränderlicher. Mit den Definitionen bleiben auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen bestehen. Im Besonderen heben wir aus Nr. 23i den Satz hervor:

Eine ganze rationale Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z ist an jeder Stelle $z = c$ stetig.

Sodann beweisen wir jetzt den wichtigen

Satz. *Die durch die Gleichung*

$$w = f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \cdots$$

definierte analytische Funktion ist stetig an jeder Stelle $z = c$, die im Inneren des Kreises liegt, für welchen die rechter Hand stehende Reihe konvergiert.

Setzen wir in der That

$$f_n(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1},$$

so wird

$$f(z) = f_n(z) + R_n(z).$$

Da aber die Reihe für $f(z)$ gleichmäſsig konvergiert im Inneren des Konvergenzkreises (Nr. 363), so kann man, unter $\frac{\sigma}{3}$ eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl verstanden, eine ganze positive Zahl N finden, so daſs

$$|R_n(z)| < \frac{\sigma}{3}$$

wird für jede ganze Zahl n, die N übersteigt. Diese Zahl N ist dieselbe für alle z im Inneren des Konvergenzkreises. Es ist daher auch

$$|R_n(c)| < \frac{\sigma}{3}$$

und durch Subtraktion folgt:

$$|R_n(z) - R_n(c)| \leqq |R_n(z)| + |R_n(c)| < \frac{2\sigma}{3}.$$

Ferner ist $f_n(z)$ als ganze rationale Funktion jedenfalls an der Stelle $z = c$ stetig; es ist also:

$$\lim_{z=c} f_n(z) = f_n(c).$$

Man kann folglich eine positive Zahl h finden, so dafs

$$|f_n(z) - f_n(c)| < \frac{\sigma}{3}$$

wird für alle z, die der Bedingung

$$|z - c| < h$$

genügen. Für alle diese z wird mithin:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(c)| &= |f_n(z) - f_n(c) + R_n(z) - R_n(c)| \\ &< |f_n(z) - f_n(c)| + |R_n(z) - R_n(c)| < \sigma. \end{aligned}$$

Mithin ist:

$$\lim_{z=c} f(z) = f(c)$$

oder $f(z)$ ist stetig an der Stelle $z = c$.

369. Differentiierbarkeit einer analytischen Funktion. Betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{h=0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

wo h als komplexe Variabele nach null konvergiert. Wenn er existiert, so nennen wir ihn die Ableitung oder den Differentialquotienten von $f(z)$ und bezeichnen ihn durch

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{h=0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Es gilt nun der

Satz. Die analytische Funktion

(1) $$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

besitzt an jeder Stelle z, die im Inneren des Konvergenzkreises der Potenzreihe (1) *liegt, die Ableitung:*

(2) $$f'(z) = 1c_1 + 2c_2 \cdot (z - z_0) + 3c_3 \cdot (z - z_0)^2 + \cdots$$

Die Reihe rechter Hand in (2) *konvergiert in demselben Kreise wie* (1).

Zunächst ist die Reihe für $f'(z)$ konvergent für alle z, welche der Bedingung

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{(n+1)\,c_{n+1}}{n c_n}(z-z_0)\right|<1$$

genügen. Nun ist aber

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{1}{r}$$

(vgl. Nr. 362) und

$$\lim_{n=\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

also folgt, daſs die Reihe für $f'(z)$ konvergiert für alle z, die der Bedingung

$$|z-z_0|<r \tag{3}$$

genügen.

Wendet man diese Betrachtung noch einmal an, so folgt, daſs auch die Reihe

$$f''(z)=2\cdot 1\,c_2+3\cdot 2\,c_3(z-z_0)+4\cdot 3\,c_4(z-z_0)^2+\cdots$$

in demselben Kreise wie die für $f(z)$ konvergiert. Sie konvergiert in seinem Inneren unbedingt. Also hat für jedes z, das der Bedingung (3) genügt,

$$2\cdot 1\,|c_2|+3\cdot 2\,|c_3|\,|z-z_0|+4\cdot 3\,|c_4|\,|z-z_0|^2+\cdots \tag{4}$$

einen bestimmten endlichen Wert.

Es ist nun zu zeigen, daſs

$$\lim_{h=0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$$

wird. Wir finden $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ gleich einer Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$c_n\cdot\frac{(\zeta+h)^n-\zeta^n}{h}=c_n\left\{\binom{n}{1}\zeta^{n-1}+\binom{n}{2}\zeta^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right\},$$

wo ζ für $z-z_0$ geschrieben ist.

Daher wird die Differenz

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)$$

gleich einer Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$\binom{n}{2}h c_n\left\{\zeta^{n-2}+\frac{n-2}{3}\zeta^{n-3}h+\frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}\zeta^{n-4}h^2+\cdots\right\}. \tag{5}$$

Wählen wir jetzt den Betrag von h so klein, daſs

$$|\zeta| + |h| < r_1$$

ist, wo r_1 eine positive Zahl kleiner als r ist; dann wird die Klammer in (5) absolut kleiner als

$$|\zeta^{n-2}| + \frac{n-2}{3}|\zeta^{n-3}h| + \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}|\zeta^{n-4}h^2| + \cdots$$

$$< |\zeta^{n-2}| + \frac{n-2}{1}|\zeta^{n-3}h| + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}|\zeta^{n-4}h^2| + \cdots$$

$$< \{|\zeta| + |h|\}^{n-2} < r_1^{\,n-2}.$$

Folglich wird

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)$$

kleiner als eine Reihe, deren allgemeines Glied nach (5) durch

$$\binom{n}{2}|h|\,c_n|\,r_1^{\,n-2}$$

gegeben wird. Diese Reihe ist aber weiter nichts, als:

$$\frac{1}{2}|h|\{2\cdot 1\,|c_2| + 3\cdot 2\,|c_3|\,r_1 + 4\cdot 3\,|c_4|\,r_1^2 + \cdots\}\cdot$$

Nach (4) hat aber diese Reihe einen endlichen Wert, da $r_1 < r$ ist. Ist daher M der Wert der Klammer, so wird

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| < \frac{|h|}{2} M$$

und, da für $h=0$ die rechte Seite null wird, erhalten wir:

$$\lim_{h=0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z),$$

wie behauptet war.

370. Eine Folgerung aus der Stetigkeit. Den folgenden Betrachtungen möge zur Vorbereitung ein Satz vorangeschickt werden, den wir in den früheren Kapiteln bei reellen Funktionen reeller Veränderlicher direkt der Anschauung entlehnt haben. Er lautet:

Satz. Es sei $z = c$ eine Stelle im Innern des Konvergenzkreises der $f(z)$ definierenden Potenzreihe und $f(c)$ nicht null. Alsdann ist auch in der Umgebung von $z = c$ die Funktion $f(z)$ nicht null.

Das Wesentliche, was wir von der analytischen Funktion hier brauchen, ist, daſs sie an der Stelle $z = c$ *stetig* ist.

Hieraus und aus $f(c) \neq 0$ folgt, daſs auch in der Umgebung der Stelle $z = c$ die Funktion $f(z)$ nicht null ist. Der soeben ausgesprochene Satz gilt wörtlich ebenso für reelle Funktionen reeller Veränderlicher: Sind sie stetig an einer Stelle und dort nicht null, so sind sie auch in der Umgebung der Stelle nicht null. Wir haben ihn bisher auch oft schon benutzt, indem wir ihn als unmittelbar evident der Anschauung entlehnten. Der hier gegebene Beweis wird daher gleichzeitig das Frühere ergänzen.

Da $f(z)$ in $z = c$ stetig ist, so kann man zu einer vorgeschriebenen positiven Zahl σ immer eine positive Zahl h finden, so daſs

$$|f(c + h') - f(c)| < \sigma$$

ist für alle Zahlen h', deren Betrag kleiner als h ist (Nr. 20). Wählen wir im Besonderen $\sigma = |f(c)|$, so folgt:

$$|f(c + h') - f(c)| < |f(c)|,$$

also auch:

$$|f(c)| - |f(c + h')| < |f(c) - f(c + h')| < |f(c)|.$$

Mithin wird

$$|f(c + h')| > 0$$

für alle h', deren Betrag kleiner als h ist; d. h. $f(z)$ ist in der Umgebung der Stelle $z = c$ nicht null.

371. Die Potenzreihenentwickelung ist nur auf eine Weise möglich. Aus unserem vorigen Satze folgern wir zunächst:

Satz. Wenn die Reihe

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

für jeden Wert z verschwindet, welcher der Bedingung

$$|z - z_0| < r$$

genügt, so sind alle ihre Koeffizienten null.

Zunächst folgt für $z = z_0$:

$$c_0 = 0.$$

Angenommen nun, unser Satz wäre nicht richtig, dann giebt es einen ersten unter den Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots$, der nicht null ist. Es sei c_m dieser Koeffizient. Dann wird unsere Reihe:

$$(z - z_0)^m \{c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \cdots\}.$$

Ist nun z irgend eine von z_0 verschiedene Stelle, die in der Umgebung von z_0 liegt, so ist der erste Faktor $(z - z_0)^m$ in unserer letzten Formel nicht null. Der zweite Faktor ist (Nr. 368) eine stetige Funktion von z, welche für $z = z_0$ den von null verschiedenen Wert c_m annimmt; folglich ist er auch (Nr. 370) in der Umgebung von $z = z_0$ nicht null gegen die Voraussetzung. Also giebt es keinen ersten unter den Koeffizienten c, der von null verschieden ist; d. h. alle c sind null.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt sofort der neue

Satz. Wenn zwei Reihen

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots \quad \textit{und} \quad e_0 + e_1(z - z_0) + \cdots$$

für alle Werte z übereinstimmen, die der Bedingung

$$|z - z_0| < r$$

genügen, so sind die Reihen identisch; d. h. es ist:

$$c_0 = e_0, \quad c_1 = e_1, \ldots$$

Bildet man die Differenz beider Reihen

$$c_0 - e_0 + (c_1 - e_1)(z - z_0) + \cdots,$$

so verschwindet diese für alle z, welche der Bedingung $|z - z_0| < r$ genügen. Also sind nach dem vorigen Satze ihre sämtlichen Koeffizienten null; d. h. es ist

$$c_0 = e_0, \quad c_1 = e_1, \ldots,$$

wie behauptet war.

372. Die Taylorsche Reihe. Unsere bisherigen Betrachtungen gestatten uns, die *Taylor*sche Reihe auch auf Funktionen komplexer Veränderlicher auszudehnen. Die Entwickelung

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

konvergiere für alle z, die der Bedingung

$$|z - z_0| < r$$

genügen. Dann konvergieren, wie durch wiederholte Anwendung des Satzes der Nr. 369 folgt, in demselben Bereiche die Reihen

$$\begin{aligned}
&f'(z) = 1c_1 + 2c_2(z - z_0) + \cdots \\
&f''(z) = 2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 (z - z_0) + \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&f^{(n)}(z) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 c_n + (n+1) n \cdots 3 \cdot 2\, c_{n+1}(z - z_0) + \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und sie definieren uns ebenfalls nach Nr. 369 die successiven Ableitungen von $f(z)$. Setzen wir nun $z = z_0$, so finden wir:

$$f(z_0) = c_0, \quad \frac{f'(z_0)}{1!} = c_1, \quad \frac{f''(z_0)}{2!} = c_2, \ldots, \quad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = c_n, \ldots$$

und daher:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

Wir sehen also:

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten einer Potenzreihe wird immer durch die Taylorsche Reihe gegeben.

Die Frage freilich, wann der *Taylor*sche Satz auf eine Funktion anwendbar ist, werden wir erst in der Integralrechnung beantworten können und zwar — wollen wir gleich hinzufügen — in sehr viel befriedigenderer Weise, als dies für reelle Funktionen reeller Veränderlicher möglich ist. Vorläufig müssen wir uns begnügen unsere Ergebnisse so zusammenzufassen:

Haben wir eine unendliche Reihe komplexer Zahlen

$$c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$$

von der Eigenschaft, dafs

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{r}$$

einen bestimmten endlichen Wert hat, so kann man immer eine analytische Funktion $f(z)$ bilden, deren n^{te} Ableitung an einer willkürlich vorgeschriebenen Stelle $z = z_0$ den Wert

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n$$

annimmt, und die für jeden Punkt im Innern des um z_0 mit dem Radius r beschriebenen Kreises durch die Reihe

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \cdots$$

definiert ist.

§ 4. Spezielle analytische Funktionen.

373. Die Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$. Die Funktion e^z haben wir für reelles z bereits kennen gelernt und sie in Nr. 117 nach dem *Taylor*schen Satze entwickelt. Wir fanden:

$$(1) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

In Nr. 105 haben wir auf eine auch für komplexes z gültige Weise erkannt, dafs die Reihe für jedweden endlichen Wert von z konvergiert. Wir definieren deshalb durch die Gleichung (1) die Funktion e^z für jeden komplexen Wert von z. Der Radius des Konvergenzkreises, dessen Mittelpunkt die Stelle $z = 0$ wäre, ist durch keine Ungleichheit beschränkt, oder — wie man auch sagt — die Reihe ist *beständig konvergent.* Es fällt also hier das „Funktionselement" zusammen mit der ganzen analytischen Funktion und, da somit zu jedem Werte des Argumentes z auch nur ein Wert der Funktion e^z gehört, nennen wir sie eine *eindeutige* analytische Funktion.

Ganz Analoges läfst sich von den Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ aussagen. Wir definieren sie nach Nr. 119 durch die nach Nr. 105 beständig konvergenten Reihen

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \tag{2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \tag{3}$$

für jeden komplexen Wert von z als eindeutige analytische Funktionen der komplexen Variabelen z.

Alle Gleichungen, welche für reelles z für die Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$ als richtig erkannt wurden, lassen sich direkt aus den Reihenentwickelungen ableiten und bleiben daher auch für komplexe Werte z richtig.

Wir heben z. B. hervor die Relationen

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \tag{4}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{5}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{6}$$

welche für alle Paare komplexer Zahlen x, y gelten. Zum Beweise der Gleichung (4) z. B. beachte man, dafs e^x und e^y durch Reihen gegeben werden, deren allgemeine Glieder sind

$$\frac{x^n}{n!} \quad \text{und} \quad \frac{y^n}{n!}.$$

Multipliziert man beide Reihen nach der Regel der Nr. 110, so entsteht wieder eine beständig konvergente Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$\frac{x^n}{n!}\cdot 1 + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{y}{1!} + \cdots + 1\cdot\frac{y^n}{n!} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Das ist aber genau das allgemeine Glied der Reihe für e^{x+y}. Hierdurch ist (4) erwiesen, und auf dieselbe Weise thut man die Richtigkeit von (5) und (6) dar. Setzt man in letzteren Gleichungen im Besonderen $x = z$, $y = 2\pi$, so findet man

(7) $$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

Also auch für komplexes z sind $\sin z$ *und* $\cos z$ *periodische Funktionen mit der reellen Periode* 2π.

Zu den bekannten Formeln fügen wir eine neue hinzu. Addieren wir zur Gleichung (3) die mit i multiplizierte Gleichung (2), so erhalten wir die Reihe für e^{zi}; d. h. es wird:

(8) $$\cos z + i \sin z = e^{zi}.$$

Diese von *Euler* gefundene Gleichung ist eine der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Vertauscht man in ihr z mit $-z$ so findet man durch Addition und Subtraktion:

(9) $$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$$

Aus (8) folgt ferner:

$$(\cos z + i \sin z)^m = e^{mzi} = (\cos mz + i \sin mz).$$

So entsteht der

(10) *Satz von Moivre.* $(\cos z + i \sin z)^m = (\cos mz + i \sin mz)$,

welcher ebenso wie (8) für jeden komplexen Wert z erwiesen ist.

Setzen wir in (8) $z + 2\pi$ an Stelle von z, so erhalten wir:

$$e^{(z+2\pi)i} = \cos z + i \sin z = e^{zi}$$

oder, wenn man z für zi schreibt:

(10) $$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

das heifst:

Die analytische Funktion e^z hat die rein imaginäre Periode $2\pi i$.

374. Die rationalen Funktionen. Eine ganze rationale Funktion $f(z)$ ist eine eindeutige analytische Funktion; denn an jeder Stelle $z = z_0$ läfst sie sich in eine Reihe entwickeln, fortschreitend nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$. Da diese Reihe überhaupt nur eine endliche Anzahl von Gliedern hat, ist sie gewifs beständig konvergent. Es wird:

(1) $f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \cdots + c_m \cdot (z - z_0)^m$.

Die Koeffizienten berechnen sich nach dem *Taylor*schen Satz; z. B. ist:

$$c_0 = f(z_0).$$

Ist z. B. $f(z_0) = 0$, so wird die rechte Seite von (1) durch $z - z_0$ teilbar. Wir haben den Satz:

Ist $z = z_0$ Wurzel einer algebraischen Gleichung,

$$f(z) = 0,$$

so ist ihre linke Seite durch $z - z_0$ teilbar.

Der Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen definiert uns die gebrochene rationale Funktion:

$$w = \frac{f(z)}{g(z)}. \tag{2}$$

Wir können immer annehmen, dafs $f(z)$ und $g(z)$ an keiner Stelle der Ebene gleichzeitig verschwinden. Ist n der Grad der ganzen rationalen Funktion $g(z)$, so läfst sich bekanntlich $g(z)$ in n lineare Faktoren zerlegen:

$$g(z) = c \cdot (z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_n).$$

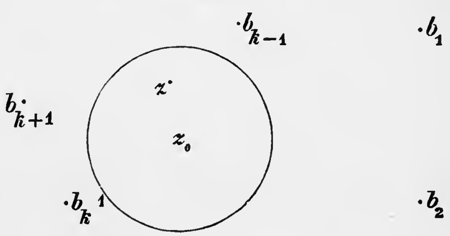
Betrachten wir nun einen der Faktoren

$$\frac{1}{z - b}$$

an irgend einer von b verschiedenen Stelle $z = z_0$ der Ebene. Dann wird:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{-1}{(b-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{b-z_0}\right)}.$$

Fig. 80.



Die rechte Seite läfst sich in eine geometrische Reihe entwickeln, die konvergiert, so lange

$$\left|\frac{z - z_0}{b - z_0}\right| < 1$$

ist; d. h. solange

$$|z - z_0| < |b - z_0|$$

ist. Beschreibt man also um z_0 einen Kreis, der durch den Punkt b geht, so konvergiert unsere Reihe im Inneren dieses Kreises. Markieren wir daher in der Ebene die Punkte $b_1, b_2, \ldots b_n$ und suchen unter den Abständen

$$\overline{z_0 b_1},\ \overline{z_0 b_2} \ldots \overline{z_0 b_n}$$

den kürzesten r aus, so wird sich die Funktion

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{c(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)}$$

in eine Reihe entwickeln lassen, fortschreitend nach ganzen, positiven Potenzen von $z - z_0$, die in dem um z_0 mit dem Radius r beschriebenen Kreise konvergiert. Multipliziert man diese Reihe mit der Entwickelung für $f(z)$, so entsteht für die rationale Funktion

$$(3) \qquad w = \frac{f(z)}{g(z)} = C_0 + C_1 \cdot (z - z_0) + \cdots$$

eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_0$, welche in dem nämlichen Kreise konvergiert. Mithin ist auch die rationale Funktion eine analytische Funktion und, da zu jedem Werte z nur ein Wert w gehört, eine eindeutige analytische Funktion; aber anders als früher wird uns durch eine Reihenentwickelung (3) nur ein Element der analytischen Funktion gegeben und nur durch den Ausdruck (2) die ganze analytische Funktion.

375. Die Funktion lz. In Nr. 120 haben wir für die Funktion $l(1+x)$ bei reellem x eine Reihenentwickelung nach ganzen positiven Potenzen von x abgeleitet, von der wir in Nr. 106 auf eine auch für komplexe Variabele gültige Weise zeigten, dafs sie für alle x konvergiere, deren Betrag kleiner als 1 ist.

Setzen wir daher $1 + x = z$, mithin $x = z - 1$, so definiert uns die Gleichung

$$(1) \qquad lz = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots$$

eine analytische Funktion von z für jedes komplexe z, welches der Bedingung

$$|z - 1| < 1$$

genügt, das also im Inneren eines um $z = 1$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises liegt.

376. Die Funktion $(1+z)^m$. In Nr. 125 haben wir $(1+x)^m$ nach ganzen positiven Potenzen von x für alle reellen x, deren Betrag kleiner als 1 ist entwickelt.

Setzen wir $x = z - 1$, so finden wir:

(1) $$z^m = 1 + \frac{m}{1}(z-1) + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(z-1)^2 + \cdots$$

Der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder wird

$$\frac{m-n}{n+1}(z-1).$$

Da nun für jedes komplexe m

$$\lim_{n=\infty} \frac{m-n}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

ist, so folgt, dafs der Konvergenzbereich unserer Reihe durch

$$|z-1| < 1$$

gegeben ist oder:

z^m ist eine analytische Funktion der komplexen Variabelen z, welche für jedes z im Inneren eines um $z = 1$ mit dem Radius 1 *beschriebenen Kreises und für jedes komplexe m durch die nach ganzen positiven Potenzen von $z - 1$ fortschreitende Reihe* (1) *definiert ist.*

§ 5. Partielle Differentialgleichungen. — Konforme Abbildung.

377. Eigenschaften der Funktion u und v. Wir fahren jetzt in unseren allgemeinen Betrachtungen fort. Nehmen wir eine analytische Funktion, welche im Inneren eines um $z = z_0$ mit dem Radius r beschriebenen Kreises $\mathfrak{K}$ durch die Reihenentwickelung definiert ist:

(1) $$w = f(z) = c_0 + c_1\cdot(z - z_0) + \cdots$$

Wir zerlegen jetzt wie in Nr. 366 w in seinen reellen und imaginären Teil,

(2) $$w = u + vi,$$

und suchen uns zunächst genauere Rechenschaft von der Definition der Funktionen

(3) $$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

zu geben. Setzen wir unter Beibehaltung der alten Bezeichnungsweise

(4) $$f_n(z) = \varphi_n(x, y) + \psi_n(x, y)\cdot i,$$

so werden $\varphi_n(x, y)$ und $\psi_n(x, y)$ reelle ganze rationale Funktionen $n - 1^{\text{ten}}$ Grades der reellen Veränderlichen x, y; d. h. es werden $\varphi_n(x, y)$ bezw. $\psi_n(x, y)$ gleich einer Summe von Termen der Gestalt:

$$
(5) \left\{ \begin{aligned} & a_{\lambda 0}(x-x_0)^\lambda + a_{\lambda-1,1}(x-x_0)^{\lambda-1}(y-y_0) + \cdots \\ & \qquad + a_{0,\lambda}(y-y_0)^\lambda \\ \text{bezw. } & b_{\lambda 0}(x-x_0)^\lambda + b_{\lambda-1,1}(x-x_0)^{\lambda-1}(y-y_0) + \cdots \\ & \qquad + b_{0,\lambda}(y-y_0)^\lambda, \end{aligned} \right.
$$

wo alles reell ist. Summiert man diese für $\lambda = 0, 1, \cdots n-1$, so entsteht $\varphi_n(x, y)$ bezw. $\psi_n(x, y)$. Da aber

$$
(6) \lim_{n=\infty} f_n(z) = \lim_{n=\infty} \{\varphi_n(x,y) + \psi_n(x,y) \cdot i\} = f(z) = \varphi(x,y) + \psi(x,y)
$$

ist, so folgt nach dem Satz der Nr. 359, dafs

$$
(7) \quad \lim_{n=\infty} \varphi_n(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \psi_n(x, y) = \psi(x, y)
$$

ist, und dies gilt gleichmäfsig für alle Punkte z im Inneren unseres Kreises $\mathfrak{K}$. Umgekehrt folgt aus (7) auch (6). Es werden somit $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ fortschreitende Reihen, welche für alle Punkte (x, y) im Inneren von $\mathfrak{K}$ gleichmäfsig konvergieren.

Ist $z = c = a + bi$ irgend eine Stelle im Inneren von $\mathfrak{K}$, so ist $f(z)$ dort stetig (Nr. 368), also (Nr. 367):

$$
(8) \qquad \lim_{z=c} f(z) = f(c) = \varphi(a, b) + \psi(a, b) \cdot i,
$$

folglich ist auch (Nr. 367):

$$
(9) \quad \lim_{x=a, y=b} \varphi(x,y) = \varphi(a,b) \quad \text{und} \quad \lim_{x=a, y=b} \psi(x,y) = \psi(a,b).
$$

Umgekehrt folgt aus (9) auch (8). Aus der gleichmäfsigen Konvergenz der Reihen für $u = \varphi(x, y)$ und $v = \psi(x, y)$ schliefst man analog wie in Nr. 369, dafs die Funktionen u und v innerhalb $\mathfrak{K}$ auch die ersten Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ und daher auch alle Ableitungen von beliebig hoher Ordnung besitzen, und daſs diese durch gliedweise Differentiation der Reihen gewonnen werden. Wir erkennen:

Satz. Ist die analytische Funktion

$$w = f(z)$$

der komplexen Variabelen $z = x + yi$ *durch eine nach ganzen positiven Potenzen von* $z - z_0$ *entwickelbare, in einem Kreise* $\mathfrak{K}$ *gleichmäſsig konvergente Reihe gegeben, so sind der reelle und imaginäre Teil der Funktion* $w = u + vi$,

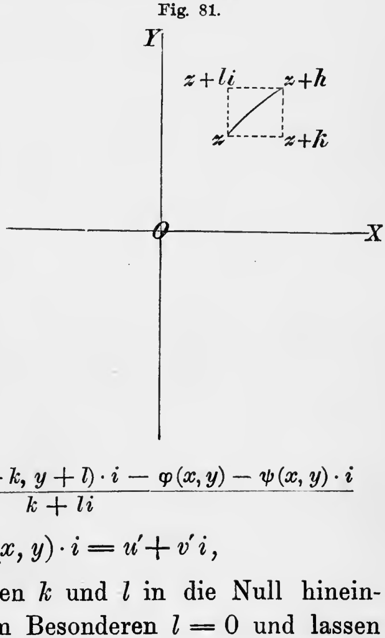
$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

durch nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ *und* $y - y_0$ *entwickelbare Reihen gegeben, welche in* $\mathfrak{K}$ *stetig sind und nebst den Reihen für ihre Ableitungen in* $\mathfrak{K}$ *gleichmäſsig und unbedingt konvergieren.*

378. Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. In Nr. 369 erkannten wir, daſs für jedes z innerhalb $\mathfrak{K}$

$$(1) \qquad \lim_{h=0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Fig. 81.



war, auf welchem Wege auch die komplexe Variabele

$$h = k + li$$

in die Stelle $h = 0$ hineinrückt. Trennen wir wieder reell und imaginär, so wird

$$w' = f'(z) = u' + v'i$$
$$= \varphi'(x, y) + \psi'(x, y) \cdot i,$$

wo sich über φ' und ψ' dasselbe aussagen läſst wie in Nr. 377 von φ und ψ. Mithin folgt aus (1):

$$\lim_{k=0,\, l=0} \frac{\varphi(x+k, y+l) + \psi(x+k, y+l) \cdot i - \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot i}{k + li}$$
$$= \varphi'(x, y) + \psi'(x, y) \cdot i = u' + v'i,$$

wie auch die reellen Variabelen k und l in die Null hineinrücken mögen. Setzen wir im Besonderen $l = 0$ und lassen dann k in die Null rücken, d. h. bewegt sich h auf der Geraden von $z+k$ nach z, so wird

$$(2)\qquad u'+v'i=\lim_{k=0}\frac{\varphi(x+k,y)-\varphi(x,y)}{k}$$

$$+\lim_{k=0}\frac{\psi(x+k,y)-\psi(x,y)}{k}\cdot i$$

$$=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\cdot i.$$

Setzen wir umgekehrt erst $k=0$ und lassen sodann l null werden, so bewegt sich h auf der Geraden von $z+li$ nach z und es wird

$$u'+v'i=-\lim_{l=0}\frac{\varphi(x,y+l)-\varphi(x,y)}{l}i+\lim_{l=0}\frac{\psi(x,y+l)-\psi(x,y)}{l},$$

$$(3)\qquad =-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}i+\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}.$$

Wir schliefsen aus dem Vergleiche von (2) und (3), indem wir wieder u für φ und v für ψ schreiben:

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Der reelle und imaginäre Teil einer Funktion einer komplexen Variabelen sind also nicht willkürlich, sondern durch die Gleichungen (4) mit einander verknüpft.

Bestehen umgekehrt für $u=\varphi(x,y)$ und $v=\psi(x,y)$ die Gleichungen (4), so wird $u+vi$ eine Funktion von $x+yi$. Zum Beweise nehmen wir für die Funktionen φ und ψ Reihen an, fortschreitend nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$, welche innerhalb $\mathfrak{K}$ gleichmäfsig konvergieren. Wir haben:

$$(5)\left\{\begin{aligned} u&=a_{00}+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(y-y_0)+a_{20}(x-x_0)^2\\ &\qquad+a_{11}(x-x_0)(y-y_0)+a_{02}(y-y_0)^2+\cdots\\ v&=b_{00}+b_{10}(x-x_0)+b_{01}(y-y_0)+b_{20}(x-x_0)^2\\ &\qquad+b_{11}(x-x_0)(y-y_0)+b_{02}(y-y_0)^2+\cdots\end{aligned}\right.$$

und daher wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{10} + 2a_{20}(x - x_0) + a_{11}(y - y_0) + \cdots$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_{01} + a_{11}(x - x_0) + 2a_{02}(y - y_0) + \cdots$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = b_{10} + 2b_{20}(x - x_0) + b_{11}(y - y_0) + \cdots$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = b_{01} + b_{11}(x - x_0) + 2b_{02}(y - y_0) + \cdots$$

Die Relationen (4) ergeben daher:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &a_{10} = b_{01}, && 2a_{20} = b_{11}, && a_{11} = 2b_{02}, \ldots \\ &a_{01} = -b_{10}, && a_{11} = -2b_{20}, && 2a_{02} = -b_{11}, \ldots \end{aligned}$$

Setzt man demnach zur Abkürzung

$$a_{00} = a_0, \quad b_{00} = b_0, \quad a_{10} = a_1, \quad b_{10} = b_1, \quad a_{20} = a_2, \quad b_{20} = b_2, \ldots$$

so findet man aus (6):

$$a_{01} = -b_1, \quad b_{01} = a_1; \quad a_{11} = -2b_2, \quad a_{02} = -a_2,$$
$$b_{11} = 2a_2, \quad b_{02} = -b_2, \ldots$$

Trägt man diese Werte in (5) ein, so wird

$$\begin{aligned} u = a_0 + a_1(x - x_0) - b_1(y - y_0) + a_2(x - x_0)^2 \\ - 2b_2(x - x_0)(y - y_0) - a_2(y - y_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} v = b_0 + b_1(x - x_0) + a_1(y - y_0) + b_2(x - x_0)^2 \\ + 2a_2(x - x_0)(y - y_0) - b_2(y - y_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} w = u + vi &= (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i)\{(x - x_0) + (y - y_0)i\} \\ &\quad + (a_2 + b_2 i)[(x - x_0) + (y - y_0)i]^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Es wird also $w = f(z)$ eine Funktion von $x + yi$ allein, wie behauptet. Wir erkennen:

Satz. Ist

$$w = f(z)$$

eine analytische Funktion $w = u + vi$ der komplexen Variabelen $z = x + yi$, so genügen ihr reeller und imaginärer Teil u und vi den partiellen Differentialgleichungen 1^ter^ *Ordnung*

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Genügen umgekehrt u und v diesen Gleichungen, so ist $u + vi$ eine Funktion der komplexen Variabelen $x + yi$. Sämtliche Funktionen denken wir uns dabei durch Potenzreihen definiert.

379. Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Eben haben wir erkannt, dafs u und v nicht beide beliebige Funktionen sind, sondern, dafs sie durch die Gleichungen (4) der vorigen Nummer verknüpft sind. Wir werden jetzt zeigen, dafs weder die eine noch die andere Funktion willkürlich gewählt werden kann.

Aus den Gleichungen (4) folgt durch Differentiation:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad (2)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$(3)\quad -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (4)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Addiert man (1) und (4) einerseits, sowie (2) und (3) andrerseits, so folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

In der Physik definiert man:

Definition. Jede Funktion ω der reellen Veränderlichen x und y, welche der Gleichung

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

genügt, heifst ein Potential.

Also sehen wir:

Der reelle und der imaginäre Teil einer analytischen Funktion einer komplexen Variabelen sind Potentiale.

Umgekehrt wird in der Integralrechnung gezeigt werden, dafs zu irgend einem Potentiale u eine Funktion v gefunden werden kann, welche den Gleichungen (4) der vorigen Nummer genügt; dann genügt v auch der Gleichung (5) dieser Nummer und ist mithin ebenfalls ein Potential; denken wir uns u, wie wir es thun müssen, durch eine Potenzreihe definiert, so wird v und mit ihm $w = u + vi$ durch eine in demselben Kreise konvergierende Potenzreihe gegeben. *Die Gleichung* (5) *definiert alsodie Gesamtheit aller analytischen Funktionen.*

380. Konforme Abbildung. Wir knüpfen wieder an die Thatsache an, dafs bei einer analytischen Funktion

(1) $$w = f(z)$$

die Ableitung

$$f'(z) = \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$$

unabhängig von dem Wege ist, auf welchem Δz nach null konvergiert. Unsere Betrachtungen gelten zunächst nur für das Innere des Kreises in der z-Ebene, für welches die $f(z)$ definierende Potenzreihe konvergiert, und dasjenige Gebiet in der w-Ebene, welches das Bild des Konvergenzkreises in der w-Ebene ist. Wir werden im Folgenden auf diesen Umstand nicht wieder besonders aufmerksam machen. Wir definieren weiterhin wie früher das Differential von $f(z)$. Is dz eine willkürlich gewählte komplexe Zahl, so ordnen wir eine komplexe Zahl dw zu, die wir aus

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) \quad \text{oder} \quad dw = f'(z)\, dz$$

bestimmen. Dann heifst dw das zu dz gehörige Differential der Funktion $f(z)$ an der Stelle z. Endlich benutzen wir wieder die in Nr. 365 erläuterte Anschauungsweise, nach welcher die Gleichung (1) die z-Ebene auf eine w-Ebene abbildet. Trennen wir reell und imaginär, so vermitteln die zwei Gleichungen

(2) $$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$$

dieselbe Abbildung; dabei sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten der z-Ebene, u und v die der w-Ebene.

Fixieren wir nun einen Punkt z in der z-Ebene nebst dem Bildpunkte w in der w-Ebene und erteilen (Fig. 82) dem Differentiale dz die zwei willkürlichen Werte $d_1 z$ und $d_2 z$, so werden die zugehörigen Werte von dw:

$$d_1 w = f'(z)\, d_1 z, \quad d_2 w = f'(z)\, d_2 z.$$

Setzen wir

$$d_1 z = r_1 e^{\varphi_1 i}, \quad d_2 z = r_2 e^{\varphi_2 i},$$

so wird

$$\frac{d_2 w}{d_1 w} = \frac{d_2 z}{d_1 z} = \frac{r_2}{r_1} e^{(\varphi_2 - \varphi_1) i}.$$

Substituieren wir also analog

$$d_1 w = \varrho_1 e^{\psi_1 i}, \quad d_2 w = \varrho_2 e^{\psi_2 i},$$

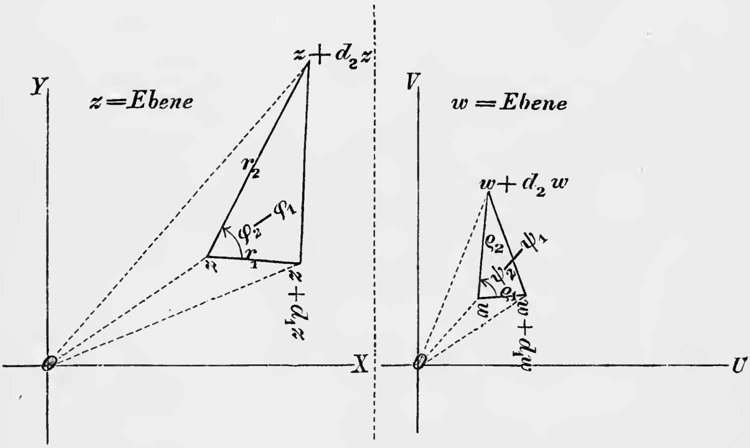
so wird

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{(\psi_2 - \psi_1) i} = \frac{r_2}{r_1} e^{(\varphi_2 - \varphi_1) i},$$

und mithin (Nr. 357):

$$(3) \qquad \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \psi_2 - \psi_1 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Fig. 82.



In Fig. 82 bestimmen nun die drei Punkte $(z, z + d_1 z, z + d_2 z)$ ein Dreieck in der z-Ebene und die drei Punkte $(w, w + d_1 w, w + d_2 w)$ das entsprechende in der w-Ebene. Die Seiten $\overline{z, z + d_1 z}$ und $\overline{z, z + d_2 z}$ haben die Länge r_1 und r_2, sie schliefsen miteinander den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ ein. In der w-Ebene haben die Seiten $\overline{w, w + d_1 w}$ und $\overline{w, w + d_2 w}$ die Längen ϱ_1 und ϱ_2 und schliefsen den Winkel $\psi_2 - \psi_1$ ein. Die Gleichungen (3) besagen daher:

Die Dreiecke $(z, z + d_1 z, z + d_2 z)$ und $(w, w + d_1 w, w + d_2 w)$ sind einander ähnlich,

sie stimmen ja im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein.

Um Misverständnisse zu vermeiden, möge noch ausdrücklich betont werden: w ist zwar der Bildpunkt von z, aber $w + dw$ im Allgemeinen nicht mehr der Bildpunkt von $z + dz$; denn $w + dw$ bestimmt sich nicht aus der Gleichung

$$w + dw = f(z + dz),$$

sondern aus

$$dw = f'(z)\,dz.$$

Setzt man aber

$$w + \Delta w = f(z + \Delta z),$$

so wird für $\Delta z = 0$

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}.$$

Unser Satz sagt also:

Ist $(z, z + \Delta_1 z, z + \Delta_2 z)$ ein Dreieck und $(w, w + \Delta_1 w, w + \Delta_2 w)$ sein Bild, so wird an der Grenze für $\Delta_1 z = \Delta_2 z = 0$ auch:

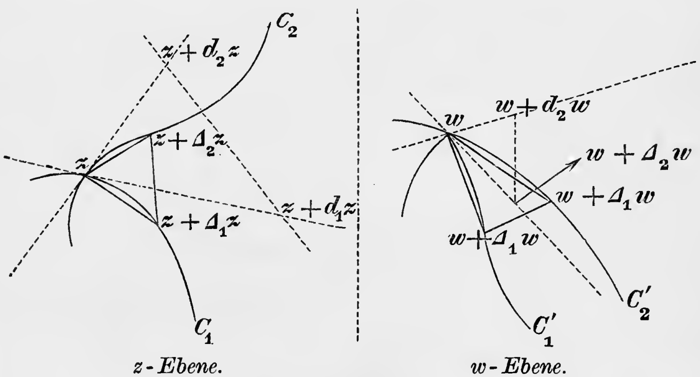
$$\frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 z} = \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 z}.$$

Die Dreiecke konvergieren also nach der Ähnlichkeit. Man sagt:

Die durch eine analytische Funktion $w = f(z)$ der komplexen Variabelen z bewirkte Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene ist dem Original ähnlich in den kleinsten Teilen; sie ist winkeltreu oder konform.

381. Winkel zweier Kurven. Um noch etwas genauer in das Wesen der konformen Abbildung einzudringen, wollen

Fig. 83.



wir (Fig. 83) den Winkel betrachten, unter dem sich zwei Kurven C_1 und C_2 in der z-Ebene schneiden; die Bildkurven C_1' und C_2' in der w-Ebene schneiden sich in dem entsprechenden Punkte unter demselben Winkel. Dies wollen wir jetzt zeigen.

Wir können uns die Kurven C_1 und C_2 dadurch analytisch gegeben denken, daſs wir x und y als Funktionen eines reellen Parameters t dargestellt haben. Indem wir in die Gleichungen

$$u = \varphi(x, y)$$
$$v = \psi(x, y)$$

die der Kurve C_1 oder C_2 entsprechenden Werte von x und y als Funktionen von t einsetzen, werden u und v als Funktionen von t dargestellt und definieren somit wieder eine Kurve in der w-Ebene — die Bildkurve von C_1 bezw. C_2.

Setzen wir im Besonderen $t = t_0$, so erhalten wir einen bestimmten Punkt (x, y) auf der Kurve C_1 und einen solchen auf der Kurve C_2. Wir nehmen an, daſs dasselbe Wertepaar (x, y) geliefert wird, wenn wir $t = t_0$ in die Gleichungen der Kurve C_1 oder wenn wir $t = t_0$ in die Gleichungen der Kurve C_2 einsetzen. Setzen wir dann

$$z = x + yi,$$

so schneiden sich C_1 und C_2 in dem Punkte z, der dem Parameterwerte $t = t_0$ entspricht. Demselben Parameterwerte entspricht ein bestimmtes Wertepaar (u, v), welches den Bildpunkt

$$w = u + vi$$

des Punktes z in der w-Ebene liefert, indem sich die Bildkurven C_1' und C_2' schneiden.

Wir nehmen an, daſs alle vorkommenden Funktionen in der Umgebung der Stelle $t = t_0$ und der entsprechenden Stellen (x, y) und (u, v) der Forderung $\mathfrak{B}$ genügen. Erteilen wir t den Wert $t_0 + \Delta t$, der in der Umgebung von t_0 liegt, so entspricht ihm ein bestimmter Punkt

$$z + \Delta_1 z = (x + yi) + (\Delta_1 x + \Delta_1 y \cdot i)$$

der Kurve C_1, ein bestimmter Punkt

$$z + \Delta_2 z = (x + yi) + (\Delta_2 x + \Delta_2 y \cdot i)$$

der Kurve C_2, ein bestimmter Punkt

$$w + \Delta_1 w = (u + vi) + (\Delta_1 u + \Delta_1 v \cdot i)$$

der Kurve C_1' und ein bestimmter Punkt

$$w + \Delta_2 w = (u + vi) + (\Delta_2 u + \Delta_2 v \cdot i)$$

der Kurve C_2'; w ist der Bildpunkt von z, $w + \Delta_1 w$ der von $z + \Delta_1 z$, $w + \Delta_2 w$ der von $z + \Delta_2 z$; d. h. es ist

$$w = f(z),\quad w + \Delta_1 w = f(z + \Delta_1 z),\quad w + \Delta_2 w = f(z + \Delta_2 z).$$

Dementsprechend erhalten wir das Dreieck $(z, z + \Delta_1 z, z + \Delta_2 z)$ und dessen Bild $(w, w + \Delta_1 w, w + \Delta_2 w)$, die Dreiecke sind in Figur 83 gezeichnet, sie sind im Allgemeinen nicht ähnlich.

Lassen wir nun aber $\Delta t = 0$ werden, und nehmen an, dafs an der Stelle $t = t_0$ weder für die Kurve C_1 noch für C_2 die Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleichzeitig null sind, so bestimmen diese die Tangente im Punkte z an die Kurve C_1, in die die Sehne $\overline{z, z + \Delta_1 z}$ übergeht und die Tangente im Punkte z an die Kurve C_2, in welche die Sehne $\overline{z, z + \Delta_2 z}$ übergeht. Es werde an der Stelle $t = t_0$ für die Kurve C_1:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_1 x}{\Delta t} = x_1',\quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_1 y}{\Delta t} = y_1'$$

und für die Kurve C_2:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_2 x}{\Delta t} = x_2',\quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_2 y}{\Delta t} = y_2'.$$

Ebenso wird aber für $\Delta t = 0$ die Tangente an die Kurve C_1' bestimmt durch

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_1 u}{\Delta t} = u_1',\quad \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_1 v}{\Delta t} = v_1'$$

und die Tangente an C_2 bestimmt durch

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_2 u}{\Delta t} = u_2',\quad \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta_2 v}{\Delta t} = v_2'.$$

Nach bekannten Regeln wird dabei:

$$u_1' = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} x_1' + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} y_1',\quad v_1' = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} x_1' + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot y_1$$

und:

$$u_2' = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} x_2' + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} y_2',\quad v_2' = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} x_2' + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \cdot y_2'.$$

Dabei sind u_1' und v_1' nicht beide null und auch u_2' und v_2' nicht beide null. Denn wäre z. B. $u_1' = v_1' = 0$, so hätte man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_1' = 0,\quad \frac{\partial \psi}{\partial x} x_1' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y_1' = 0.$$

Also würde die Determinante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{dy}\right)^2=0$$

sein oder man hätte:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

Dies schliefsen wir aber aus.

Nach dem in der vorigen Nummer Bewiesenen ist nun, da für $\Delta t=0$ auch $\Delta_1 z$ und $\Delta_2 z$ verschwinden:

$$\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z}=\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 w}.$$

Rechts und links stehen zwei komplexe Zahlen. Sollen diese gleich sein, so müssen ihre Argumente übereinstimmen. Das Argument der komplexen Zahl $\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z}$ ist aber gleich dem Winkel, den die Sehnen $\overline{z,\, z+\Delta_1 z}$ und $\overline{z,\, z+\Delta_2 z}$ mit einander bilden; an der Grenze $\Delta t=0$ geht aber der Winkel in den der beiden Tangenten in z an die Kurven C_1 und C_2 über. Analoge Betrachtungen gelten für die w-Ebene. Wir sehen also, dafs unter den gemachten Voraussetzungen der Winkel der Tangenten in z der Gröfse und dem Sinne nach mit dem Winkel der Tangenten in w übereinstimmt. Hierdurch ist unsere Behauptung erwiesen.

Wählt man auf der Tangente an C_1 willkürlich einen Punkt $z+d_1 z$ und auf der Tangente an C_2 willkürlich den Punkt $z+d_2 z$ und berechnet $d_1 w$ und $d_2 w$ aus

$$d_1 w=f'(z)\cdot d_1 z,\quad d_2 w=f'(z)\cdot d_2 z,$$

so liegen die Punkte $d_1 w$ und $d_2 w$ auf den Tangenten an C_1' bezw. C_2'', und es sind die Dreiecke

$$(z,\ z+d_1 z,\ z+d_2 z)\ \text{und}\ (w,\ w+d_1 w,\ w+d_2 w)$$

ähnlich nach den Betrachtungen der vorigen Nummer.

382. Die konforme Abbildung definiert die Funktionen einer komplexen Variabelen. Wir setzen jetzt umgekehrt voraus, dafs die Gleichungen

(2) $$u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$$

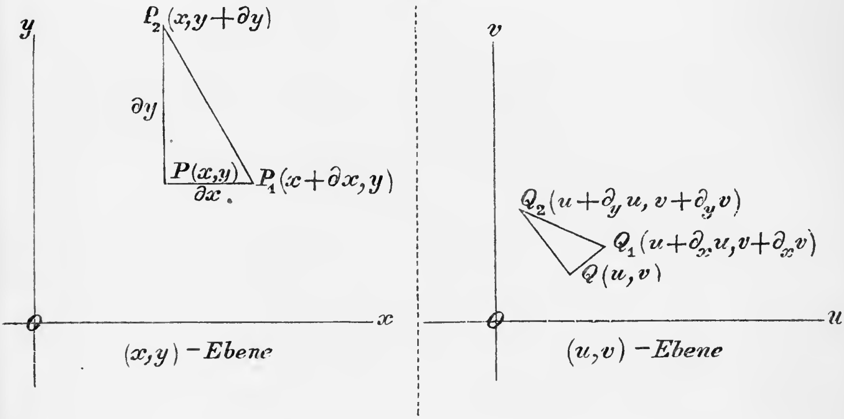
die (x, y)-Ebene winkeltreu auf die (u, v)-Ebene abbilden. Alsdann behaupten wir:

$$w = u + vi$$

ist eine Funktion von $x + yi$.

Um dies einzusehen fixieren wir einen bestimmten Punkt $P(x, y)$ in der (x, y)-Ebene und seinen zugehörigen Bildpunkt

Fig. 84.



$Q(u, v)$ in der (u, v)-Ebene. Wir gehen jetzt in der (x, y)-Ebene längs einer Parallelen zur x-Axe (Fig. 84) zu dem Punkte $P_1(x + \partial x, y)$ über.

Dem Zuwachs ∂x von x entsprechen, da y ungeändert bleibt, die partiellen Differentiale von u und v in Beziehung auf x:

$$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x, \quad \partial_x v = \frac{\partial v}{\partial x} \partial x.$$

Wir markieren jetzt in der (u, v)-Ebene auch den Punkt

$$Q_1(u + \partial_x u, \ v + \partial_x v).$$

Lassen wir andrerseits x ungeändert, vermehren aber y um ∂y, so schreiten wir in der (xy)-Ebene längs einer Parallelen zur y-Axe vom Punkte (x, y) zum Punkte $P_2(x, y + \partial y)$ fort. Dem Differentiale ∂y entsprechen die Differentiale von u und v:

$$\partial_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \partial y, \quad \partial_y v = \frac{\partial v}{\partial y} \partial y,$$

und wir markieren in der (u, v)-Ebene den Punkt $Q_2(u + \partial_y u, v + \partial_y v)$.

Nach der Definition der konformen Abbildung mufs jetzt das Dreieck

$$P P_1 P_2$$

ähnlich sein dem Dreiecke

$$Q Q_1 Q_2.$$

Der Winkel bei P ist aber ein rechter, folglich steht auch $Q Q_1$ senkrecht auf $Q Q_2$; d. h. es ist:

$$\frac{\partial_x v}{\partial_x u} \cdot \frac{\partial_y v}{\partial_y u} = -1. \tag{4}$$

Sodann müssen die Verhältnisse

$$\frac{P P_2}{P P_1} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

und

$$\frac{Q Q_2}{Q Q_1} = \frac{\sqrt{\partial_y u^2 + \partial_y v^2}}{\sqrt{\partial_x u^2 + \partial_x v^2}}$$

übereinstimmen. Also folgt:

$$\sqrt{\frac{\partial_y u^2 + \partial_y v^2}{\partial_x u^2 + \partial_x v^2}} = \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{5}$$

Wir schreiben jetzt die Gleichungen (4) und (5) so um, dafs an Stelle der Differentiale die Differentialquotienten treten. Aus (4) folgt durch Multiplikation mit $\partial_x u \partial_y u$

$$\partial_x u \partial_y u + \partial_x v \partial_y v = 0,$$

also, wenn man durch $\partial x \partial y$ dividiert:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

und (5) erhält durch Quadrieren die Form:

$$\frac{\partial_x u^2 + \partial_x v^2}{\partial x^2} = \frac{\partial_y u^2 + \partial_y v^2}{\partial y^2},$$

oder:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \tag{7}$$

Aus (6) folgt nun, dafs wir setzen können:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Substituieren wir dies in (7), so folgt für λ die Bedingung:

$$\lambda = \pm 1.$$

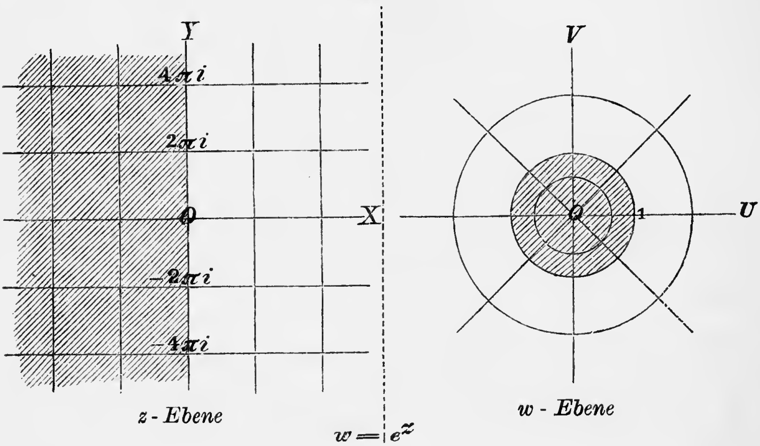
Soll, wie wir voraussetzen, auch der Sinn der Winkel erhalten bleiben, so ist $\lambda = +1$, und wir finden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Also ist nach Nr. 378 $u + vi$ eine Funktion von $x + yi$.

383. Beispiel. Als Anwendung des Vorhergehenden betrachten wir die in Fig. 85 veranschaulichte konforme Abbildung, welche durch die Funktion $w = e^z$ hervorgerufen wird.

Fig. 85.



Trennen wir reell und imaginär, so wird:

(1) $$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Hieraus folgt:

(2) $$u^2 + v^2 = e^{2x}, \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} y.$$

Den Geraden $x =$ Konst, welche in der z-Ebene parallel zur y-Axe verlaufen, entspricht in der w-Ebene die Schar aller Kreise:

$$u^2 + v^2 = \text{Konst},$$

deren Centrum der Punkt O ist. Die imaginäre Axe, d. h. die Gerade $x = 0$ sondert die Schar der Parallelen links von ihr von der Schar der Parallelen zu ihrer Rechten, ebenso sondert der Kreis $u^2 + v^2 = 1$ mit dem Radius 1 alle Kreise um O in solche, deren Radius kleiner als 1 ist und solche, deren Radius gröfser als 1 ist. Allen Punkten z links von der lateralen Axe entspricht das Innere des Kreises $u^2 + v^2 = 1$, allen rechts von ihr das Äufsere. Dies ist in der Figur 85 durch Schraffierung angedeutet.

Den Geraden $y = \text{Konst}$, die in der z-Ebene parallel zur x-Axe verlaufen, entspricht in der w-Ebene der Strahlbüschel

$$\frac{v}{u} = \text{Konst.},$$

dessen Centrum der Punkt O ist. Geht y von 0 bis 2π, so durchläuft der entsprechende Strahl $\frac{v}{u}$ in der w-Ebene bereits alle Strahlen des Büschels. Also schon dem Streifen in der z-Ebene, welcher von der x-Axe und der zu ihr parallelen Geraden im Abstande 2π eingeschlossen ist, entspricht die ganze w-Ebene. Jeder Punkt in diesem Streifen hat zum Bildpunkt einen und nur einen Punkt der w-Ebene und umgekehrt. Geht y von 2π bis 4π, so entspricht wieder jedem Punkte z in diesem Streifen ein und nur ein Bildpunkt w der w-Ebene. Auf diese Weise zerlegt sich die ganze z-Ebene in Streifen von der Höhe 2π, und das Bild eines jeden von ihnen ist immer die ganze w-Ebene. Diese Thatsache veranschaulicht recht deutlich den Umstand, dafs e^z die Periode $2\pi i$ besitzt; indem zwei Werte z, die um $2\pi i$ differieren, d. h. die im Abstande 2π senkrecht übereinander stehen, immer *denselben* Bildpunkt w haben.

Jede Gerade $x = \text{Konst}$ schneidet jede Gerade $y = \text{Konst}$ unter einem rechten Winkel. Der Konformität unserer Abbildung entsprechend schneidet auch jeder Kreis $u^2 + v^2 = \text{Konst}$ jeden Strahl $\frac{v}{u} = \text{Konst}$ unter einem rechten Winkel.

Zwölftes Kapitel.

Zerlegung der rationalen Funktionen in Partialbrüche.

§ 1. Existenz der Partialbruchzerlegung.

384. Einleitende Bemerkungen. Die Zerlegung der rationalen Funktionen ist für die Analysis von grofser Bedeutung, und wir werden besonders in der Integralrechnung Gelegenheit haben, sie anzuwenden. Auch halte ich es für notwendig, hier alle auf diese Theorie bezüglichen Entwickelungen anzugeben, welche ich in meinem „Lehrbuch der höheren Algebra" dargestellt habe.

Wir werden zuerst beweisen, dafs sich eine rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$, deren Zähler und Nenner beliebige, aber relativ prime Polynome sind, d. h. keinen gemeinsamen Teiler besitzen, zerlegen läfst in eine ganze Funktion (welche auch null sein kann) und in *Partialbrüche*, deren Zähler konstant, und deren Nenner die verschiedenen Potenzen der linearen Faktoren sind, in welche das Polynom $f(x)$ geteilt werden kann. Wir werden dann weiter zeigen, dafs die rationale Funktion sich so nur auf eine einzige Weise zerlegen läfst, und werden endlich den Weg angeben, diese Zerlegung auszuführen.

385. Existenz einer Partialbruchzerlegung. Wir beweisen zunächst den

Satz. Es sei a eine α-fache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, d. h. es sei identisch

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot f_1(x),$$

wo f und f_1 Polynome sind, von denen das zweite für $x=a$ nicht verschwindet. Es sei ferner $F(x)$ ein Polynom von x, welches ebenfalls für $x=a$ nicht verschwindet. Alsdann kann *die rationale Funktion* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *in zwei Teile der folgenden Art zerlegt werden:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

A bedeutet dabei eine von null verschiedene Konstante, $F_1(x)$ ein Polynom.

Denn es ist identisch, was auch der Wert von A sein mag:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

und damit das zweite Glied der rechten Seite in seinem Nenner nur die $\alpha - 1^{\text{te}}$ Potenz von $x - a$ enthält, mufs der Zähler $F(x) - Af_1(x)$ durch $x - a$ teilbar sein, d. h. (Nr. 374) für $x = a$ verschwinden. Setzen wir also

$$F(a) - Af_1(a) = 0,$$

so wird

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Dieser Wert von A ist endlich und von null verschieden, weil $f_1(a)$ und $F(a)$ nicht null sind. Wählt man also für A diesen Wert und setzt man

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

so ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

Folgesatz. Es sei

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda,$$

wobei $a, b, c \ldots l$ verschiedene Gröfsen, und $\alpha, \beta \ldots \lambda$ positive ganze Zahlen sind, und es sei $F(x)$ ein zweites Polynom, welches $a, b, c, \ldots l$ nicht zu Nullstellen hat. Alsdann kann die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ *in folgender Weise zerlegt werden:*

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}, \\ & + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \frac{B_{\beta-1}}{x-b}, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + E(x).\end{aligned}$$

Dabei bedeuten $A, A_1, \ldots B, B_1 \ldots L, L_1 \ldots$ Konstanten, unter denen $A, B \ldots L$ nicht verschwinden, und $E(x)$ eine ganze Funktion.

Denn setzt man wie vorhin

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

so ist nach dem obigen Satze:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-a) f_1(x)} = \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

$A, A_1 \ldots A_{\alpha-1}$ sind endliche und bestimmte Konstanten, $F_1(x), F_2(x) \ldots F_\alpha(x)$ ganze Funktionen. Zu bemerken ist nur, daſs, während die Konstante A niemals gleich null ist, die Gröſsen $A_1, A_2 \ldots A_{\alpha-1}$ auch null werden können, denn die Polynome $F_1(x), F_2(x) \ldots$ können durch $x-a$ teilbar sein. Addiert man die Gleichungen, so folgt

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

Setzt man

$$f_1(x) = (x-b)^\beta f_2(x)$$

und verfährt mit dem Quotienten $\dfrac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}$ in derselben Weise, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)} = \frac{F_\alpha(x)}{(x-b)^\beta f_2(x)} = \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}.$$

Folglich ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{F_{\alpha+\beta}(x)}{f_2(x)}.$$

$B, B_1 \ldots$ sind bestimmte Konstante, deren erste von null verschieden ist, $F_{\alpha+\beta}(x)$ ein Polynom. Fährt man so fort, so erhält man die zu beweisende Gleichung.

386. Die Partialbruchzerlegung ist nur auf eine Weise möglich.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt aus der eindeutigen Bestimmung eines jeden Wertes $A, A_1 \ldots, B, B_1 \ldots$, läſst sich aber auch in noch allgemeinerer Weise durch folgende Überlegung direkt bestätigen:

Nimmt man an, daſs für den Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$ zwei verschiedene Zerlegungen gefunden sind:

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots E(x),$$

und

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha'-1}} + \cdots \frac{B}{(x-b)^{\beta'}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta'-1}} + \cdots E'(x),$$

so ist also

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \cdots + E(x) = \frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \cdots E'(x).$$

α und α' sollen die höchsten Potenzen von $x - a$ auf beiden Seiten angeben; dann ist zu beweisen, daſs $\alpha = \alpha'$ und $A = A'$ ist. Wenn nämlich α und α' verschieden sind, und $\alpha > \alpha'$ ist, so entnehmen wir aus dieser Gleichung den Wert von $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ und bringen alle übrigen Glieder auf den gleichen Nenner. Alsdann wird

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

oder

$$A = \frac{(x-a)\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

$\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind Polynome, von denen das zweite nicht durch $x - a$ teilbar ist. Andererseits ist A eine Konstante; es folgt also, daſs der Wert null sein muſs, denn für $x = a$ ergiebt die Gleichung den Wert $A = 0$. Ist also A nicht gleich null, so kann man nicht annehmen, daſs $\alpha > \alpha'$ ist; es ist also $\alpha = \alpha'$. Daraus aber geht weiter hervor, daſs $A = A'$ ist. Denn die Gleichung zwischen den beiden Zerlegungen ergiebt nun, wenn $\alpha' = \alpha$ ist:

$$\frac{A - A'}{(x-a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

oder

$$A - A' = \frac{(x-a)\,\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Auch hier sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Polynome, von denen das zweite durch $x-a$ nicht teilbar ist. Die Differenz $A - A'$ ist also gleich null für $x = a$.

Da sonach die Glieder, welche die höchste Potenz von $x - a$ im Nenner enthalten, nach beiden Seiten einander gleich sind, so kann man sie fortlassen, und die Reste sind einander gleich. Indem man nun diese Reste ebenso behandelt, erkennt man, dafs auch die Glieder, welche im Nenner die höchste Potenz desselben Binomes $x - a$ oder irgend eines anderen enthalten, gleich sein müssen, und fährt man so fort, so erkennt man weiter, dafs überhaupt die Partialbrüche in den beiden Ausdrücken für den Quotienten $\frac{F(x)}{f(x)}$ einzeln unter einander gleich sind. Daraus folgt auch schliefslich die Gleichheit von $E(x)$ und $E'(x)$.

Folgerung. Die ganze Funktion, welche bei der Zerlegung eines rationalen Bruches $\frac{F(x)}{f(x)}$ auftritt, ist gleich dem ganzen Quotienten, der bei der Division von $F(x)$ durch $f(x)$ erhalten wird.

Denn bezeichnet man mit $E(x)$ diesen Quotienten und mit $\varphi(x)$ den Rest dieser Division, so ist

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Da der Zähler des Bruches $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ von niederem Grade ist als der Nenner, so wird diese Funktion für $x = \infty$ gleich null, folglich kann sie keine ganze Funktion mehr erhalten.

§ 2. Ausführung der Partialbruchzerlegung.

387. Spezialfall, dafs der Nenner aus lauter einfachen Faktoren besteht. Es sei $f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, und $a, b, \ldots l$ seien lauter verschiedene Werte. Bezeichnet $F(x)$ ein beliebiges Polynom, so wird nach den vorigen Sätzen:

$$(1)\qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots \frac{L}{x-l} + E(x),$$

$A, B, \ldots L$ sind von null verschiedene Konstante, $E(x)$ eine ganze Funktion.

Wie wir schon sagten, kann man das Polynom $E(x)$ dadurch erhalten, dafs man die Division von $F(x)$ durch $f(x)$ ausführt, falls die Ordnung des Zählers gleich oder gröfser ist als die des Nenners. Sonach hat man nur die Gröfsen $A, B, \ldots L$ zu bestimmen. Multipliziert man die Gleichung (1) mit $f(x)$, so folgt:

$$F(x) = \frac{Af(x)}{x-a} + \frac{Bf(x)}{x-b} + \cdots \frac{Lf(x)}{x-l} + E(x)f(x),$$

und diese Gleichung ist eine identische, d. h. sie gilt bei allen Werten von x. Setzt man x gleich a, so werden alle Glieder auf der rechten Seite null, mit Ausnahme des ersten. Dieses wird gleich $Af'(a)$, wenn man mit $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Folglich ist

$$F(a) = Af'(a), \text{ also } A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

Da nun a irgend eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so hat man

$$(2) \qquad A = \frac{F(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)} \cdots L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

und die Gleichung (1) wird:

$$(3) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)} + E(x).$$

Ist der Grad von $F(x)$ kleiner als der Grad m von $f(x)$, so wird die ganze Funktion null, und es ist:

$$(4) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)}.$$

Es sei

$$F(x) = P_0 x^{m-1} + P_1 x^{m-2} + \cdots P_{m-2}x + P_{m-1}.$$

Multipliziert man die Gleichung (4) mit $f(x)$ und ordnet die rechte Seite nach abnehmenden Potenzen von x, so wird der Koeffizient von x^{m-1} gleich

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \cdots \frac{F(l)}{f'(l)},$$

diese Summe ist gleich dem Koeffizienten von x^{m-1} auf der linken Seite, also gleich P_0; es ist also

$$(5) \qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = P_0,$$

wobei das Summenzeichen Σ die Bedeutung hat, daſs man x durch jede der m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ersetzen und die Summe der erhaltenen Werte bilden soll. Ist die Funktion $F(x)$ höchstens vom Grade $m - 2$, so ist die Gröſse P_0 gleich null, und man erhält in diesem Falle:

$$(6) \qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = 0,$$

eine Gleichung, welche bei vielen algebraischen Untersuchungen nützlich ist.

388. Erste Methode zur Berechnung der Partialbrüche. Der erste Lehrsatz der Nr. 385, durch welchen die Möglichkeit der Zerlegung nachgewiesen ist, enthält zugleich die Methode, sie auszuführen. Denn setzt man

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} f_1(x),$$

so erhält man

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

indem man

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)} \quad \text{und} \quad F_1(x) = \frac{F(x) - \dfrac{F(a)}{f_1(a)} f_1(x)}{x - a}$$

setzt. Man hat auf diese Weise einen Partialbruch, und man findet die übrigen, wenn man den nämlichen Satz auf den Quotienten

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

anwendet. Hat die Gleichung $f(x) = 0$ lauter einfache Wurzeln, so gelangt man auf diese Weise auch wieder zu der vorhin aufgestellten Formel. Aber abgesehen von diesem Falle, erfordert die Ausführung dieses Prozesses ziemlich umständliche Rechnungen.

389. Zweite Methode zur Berechnung der Partialbrüche. Man kann auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten anwenden, die wir schon in Nr. 387 benutzt haben. Unter den alten Voraussetzungen, daſs $f(x)$ und $F(x)$ keinen gemeinsamen Teiler haben, und a eine α-fache Wurzel von der Gleichung $f(x) = 0$ ist, setze man:

$$(1)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{(x-a)^\alpha F_\alpha(x)}{f(x)},$$

nach Nr. 385. Multipliziert man dann die Gleichung mit $f(x)$, und ersetzt man zugleich x durch $a+h$, so folgt:

$$F(a+h) = A\frac{f(a+h)}{h^\alpha} + A_1\frac{f(a+h)}{h^{\alpha-1}} + \cdots A_{\alpha-1}\frac{f(a+h)}{h} + h^\alpha F_\alpha(a+h).$$

Nun ist nach der *Taylor*schen Entwickelung:

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2!}F''(a) + \cdots \frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}F^{(\alpha-1)}(a) + \cdots$$

$$f(a+h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) + \frac{h^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a) + \cdots,$$

und trägt man diese Werte ein, so wird:

$$\begin{aligned}
F(a) + \frac{h}{1}F'(a) + \frac{h^2}{2!}F''(a) + \cdots \frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}F^{(\alpha-1)}(a) + \cdots,\\
= A\left[\frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} + \frac{h}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a) + \cdots\right],\\
+ A_1\left[\frac{h}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) + \frac{h^2}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a) + \cdots\right],\\
+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
+ A_{\alpha-1}\left[\frac{h^{\alpha-1}}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) + \cdots\right] + h^\alpha F_\alpha(a+h).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von h; setzt man also die Koeffizienten der gleichen Potenzen von h auf beiden Seiten einander gleich, bis zur Potenz $\alpha - 1$, so erhält man:

$$\frac{A}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) = F(a),$$

$$\frac{A}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a) + \frac{A_1}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) = F'(a),$$

$$\frac{A}{(\alpha+2)!}f^{(\alpha+2)}(a) + \frac{A_1}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a) + \frac{A_2}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) = \frac{1}{2!}F''(a),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{A}{(2\alpha-1)!}f^{(2\alpha-1)}(a) + \frac{A_1}{(2\alpha-2)!}f^{(2\alpha-2)}(a) + \cdots \frac{A_{\alpha-2}}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a)$$

$$+ \frac{A_{\alpha-1}}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) = \frac{1}{(\alpha-1)!}F^{(\alpha-1)}(a).$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach einander die Werte $A, A_1, A_2 \ldots$ berechnen, und diese Werte sind endlich und bestimmt, weil $f^\alpha(a)$ der Annahme nach von null verschieden ist. So ergeben sich alle Partialbrüche, welche den verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen, und die ganze Funktion kann von vornherein durch Division von $F(x)$ durch $f(x)$ ermittelt werden.

Man kann die Rechnung auch in folgender Weise ausführen: Nachdem man durch Division die ganze Funktion bestimmt hat, setzt man den übrigen echt gebrochenen Teil gleich der Summe von Partialbrüchen, in welche sich derselbe zerlegen lassen mufs, wobei die Zähler dieser Brüche noch unbestimmt sind. Entfernt man nun durch Multiplikation alle Nenner und setzt man die Koeffizienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die zur Bestimmung dieser Koeffizienten notwendigen linearen Gleichungen.

390. Dritte Methode zur Berechnung der Partialbrüche. Endlich kann man auch die Zerlegung durch ein Verfahren gewinnen, welches nur algebraische Divisionen erfordert. Denn setzt man wie vorhin

$$f(x) = (x - a)^\alpha f_1(x),$$

und schreibt man $a + h$ an Stelle von x, so wird die Gleichung (1) der vorigen Nummer, multipliziert mit h^α:

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha F_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}.$$

Ordnet man $F(a + h)$ und $f_1(a + h)$ nach steigenden Potenzen von h und dividiert dann $F(a + h)$ durch $f_1(a + h)$, bis ein Rest von mindestens α^{tem} Grade bleibt, so wird der bis dahin erhaltene Quotient gerade das Polynom

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}$$

sein. Durch diese Division findet man also die Partialbrüche, welche zur Wurzel a gehören.

In gleicher Weise kann man, unabhängig von einander, die Partialbrüche, welche zu den verschiedenen Wurzeln gehören, bestimmen, noch einfacher aber wird es sein, die nämliche Methode auf den Bruch $\frac{F_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}$ anzuwenden, welcher aus dem soeben erhaltenen Reste $\frac{h^\alpha F_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}$ durch Absonderung des Faktors h^α entsteht. Alsdann erhält man die Glieder, welche sich auf eine zweite Wurzel beziehen, nebst einem dritten Quotienten, mit dem das Verfahren fortzusetzen ist.

391. Fortsetzung der vorigen Methode. Die vorige Methode hat überdies den Vorteil, daſs man für die Zähler der Partialbrüche zugleich ihren allgemeinen algebraischen Ausdruck kennen lernt. Denn die Division der Polynome $F(a+h)$ und $f_1(a+h)$, welche wir zur Bestimmung der Koeffizienten $A, A_1, A_2 \ldots$ ausführen, ist dieselbe wie die Entwickelung der Funktion $\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)}$ in eine nach wachsenden Potenzen von h geordnete Reihe, und da sich eine Funktion nur auf eine einzige Weise in solch eine Reihe entwickeln läſst, so erhält man dasselbe Resultat auch nach der *Mac-Laurin*schen Formel. Setzt man also

$$\frac{F(x)}{f_1(x)} = \varphi(x),$$

so wird

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = \varphi(a+h)$$

$$= \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(a) + \cdots \frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\varphi^{(\alpha-1)}(a) + h^\alpha R_1,$$

wobei $h^\alpha R_1$ den Rest der Reihe bedeutet. Man erhält also

$$A = \varphi(a), \quad A_1 = \varphi'(a), \quad A_2 = \frac{\varphi''(a)}{2} \cdots A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!},$$

und folglich den allgemeinen Satz:

Ist

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$$

und $F(x)$ eine ganze Funktion, welche durch $f(x)$ dividiert den ganzen Quotienten $E(x)$ und eine echt gebrochene Funktion liefert, so wird, wenn man

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)} \cdots \tilde{\omega}(x) = (x-l)^\lambda \frac{F(x)}{f(x)}$$

setzt:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E(x) + \frac{\varphi(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi''(a)}{2!(x-a)^{\alpha-2}} + \cdots \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!(x-a)},$$

$$+ \frac{\psi(b)}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi'(b)}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{\psi''(b)}{2!(x-b)^{\beta-2}} + \cdots \frac{\psi^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!(x-b)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\tilde{\omega}(l)}{(x-l)^\lambda} + \frac{\tilde{\omega}'(l)}{(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{\tilde{\omega}''(l)}{2!(x-l)^{\lambda-2}} + \cdots \frac{\tilde{\omega}^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!(x-l)}.$$

392. Neue Darstellung der Partialbruchzerlegung. Dem gewonnenen Resultate kann man noch eine andere sehr einfache und elegante Form geben, welche wir noch aufstellen wollen. Man bezeichne mit $F(x)$ eine rationale Funktion, mit

$$x_1, x_2 \ldots x_\mu$$

die verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{1}{F(x)} = 0,$$

und mit

$$m_1, m_2 \ldots m_\mu$$

die Ordnungen der Vielfachheit dieser Wurzeln. Ferner werde der Kürze halber

$$\varphi(x) = (x - x_1)^{m_1} F(x)$$

gesetzt, wobei $\varphi(x)$ eine Funktion bezeichnet, die für $x = x_1$ einen endlichen von null verschiedenen Wert hat.

Denkt man sich die rationale Funtion $F(x)$ in ihre Partialbrüche zerlegt, so ist die Summe der zu der Wurzel x_1 gehörigen Brüche

$$\frac{\varphi(x_1)}{(x-x_1)^{m_1}} + \frac{\varphi'(x_1)}{(x-x_1)^{m_1-1}} + \cdots \frac{\varphi^{(m_1-i-1)}(x_1)}{(m_1-i-1)!(x-x_1)^{i+1}} + \cdots \frac{\varphi^{(m_1-1)}(x_1)}{(m_1-1)!(x-x_1)}.$$

Nun ergiebt sich diese Summe, wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\varphi(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)^{m_1}} + \frac{\varphi'(x_1+\zeta)}{(x-x_1-\zeta)^{m_1-1}} + \cdots \frac{\varphi^{(m_1-i-1)}(x_1+\zeta)}{(m_1-i-1)!(x-x_1-\zeta)^{i+1}}$$
$$+ \cdots \frac{\varphi^{(m_1-1)}(x_1+\zeta)}{(m_1-1)!(x-x_1-\zeta)}$$

die Gröfse ζ gleich null setzt. Die Funktionen $\varphi'(x_1+\zeta)$, $\varphi''(x_1+\zeta) \ldots$ können aber als die Ableitungen von $\varphi(x_1+\zeta)$ nach der Variabelen ζ betrachtet werden, und man erkennt leicht, dafs der vorige Ausdruck sich auf

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\,D_\zeta^{m_1-1}\,\frac{\varphi(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}$$

reduziert. $D_\zeta^{m_1-1}$ bezeichnet die $m_1 - 1^{\text{te}}$ Ableitung nach ζ.

Da

$$\varphi(x_1+\zeta) = \zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)$$

ist, so ist die Summe der auf die Wurzel x_1 bezüglichen Partialbrüche gleich dem Werte, den der Ausdruck

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\,D_\zeta^{m_1-1}\,\frac{\zeta^{m_1} F(x_1+\zeta)}{x-x_1-\zeta}$$

für $\zeta = 0$ annimmt. Wenn also die rationale Funktion $F(x)$ keinen ganzen Bestandteil enthält, so ist

$$F(x) = \sum_1^{\mu}{}_{\alpha} \frac{1}{(m_\alpha-1)!}\,D_\zeta^{m_\alpha-1}\,\frac{\zeta^{m_\alpha} F(x_\alpha+\zeta)}{x-x_\alpha-\zeta}.$$

In dieser Formel ist nach den Differentiationen $\zeta = 0$ zu setzen, und das Summenzeichen bezieht sich auf alle Indices α von 1 bis μ.

Enthält die Funktion $F(x)$ eine ganze Funktion $E(x)$, so hat man

$$F(x) = E(x) + \sum_1^{\mu}{}_{\alpha} \frac{1}{(m_\alpha-1)!}\,D_\zeta^{m_\alpha-1}\,\frac{\zeta^{m_\alpha} F(x_\alpha+\zeta)}{x-x_\alpha-\zeta},$$

und der Wert von $E(x)$ läſst sich folgendermaſsen bestimmen. Bezeichnet n den Überschuſs des Grades des Zählers von $F(x)$ über den Grad des Nenners, so wird n der Grad der Funktion $E(x)$. Setzt man nun in der Gleichung an Stelle von x den Wert $\frac{1}{z}$ und multipliziert beide Seiten mit z^n, so folgt:

$$z^n F\left(\frac{1}{z}\right) = z^n E\left(\frac{1}{z}\right) + z^{n+1} \sum_1^{\mu}{}_{\alpha} \frac{1}{(m_\alpha-1)!}\,D_\zeta^{m_\alpha-1}\,\frac{\zeta^{m_\alpha} F(x_\alpha+\zeta)}{1-(x_\alpha+\zeta)z}.$$

Hieraus erkennt man, daſs wenn $z^n F\left(\frac{1}{z}\right)$ in eine Reihe entwickelt wird, welche nach wachsenden Potenzen von z fortschreitet, die Summe aller Glieder, deren Ordnung nicht gröſser ist als n, gleich $z^n E\left(\frac{1}{z}\right)$ ist.

Nun hat man nach der *Mac-Laurin*schen Formel

$$z^n F\left(\frac{1}{z}\right) = \left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + z\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + \frac{z^2}{2!}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + \cdots,$$

also ist

$$z^n E\left(\frac{1}{z}\right) = \left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + z\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + \frac{z^2}{2!}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0$$
$$+ \cdots \frac{z^n}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0,$$

oder

$$E(x) = x^n\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + x^{n-1}\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 + \frac{x^{n-2}}{2!}\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0$$
$$+ \cdots \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0.$$

Die Nullen bedeuten, dafs nach der Differentiation $\zeta = 0$ zu setzen ist.

Man kann auch einen anderen noch einfacheren Ausdruck für das Polynom $E(x)$ finden. Der Koeffizient von ζ^{n-i} in der Entwickelung von $\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ nach ganzen positiven Potenzen von ζ ist nämlich gleich dem Koeffizienten von ζ^n in der Entwickelung von $\zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Andererseits sind diese Koeffizienten die Werte, welche die beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{n-i}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n!}\frac{d^n \zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n}$$

für $\zeta = 0$ annehmen. Also ist für $\zeta = 0$

$$\frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{n-i}\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^{n-i}} = \frac{1}{n!}\frac{d^n \zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{d\zeta^n}.$$

Demnach wird der Wert von $E(x)$:

$$E(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)(1 + \zeta x + \zeta^2 x^2 + \cdots \zeta^n x^n)\right]_0.$$

Da für $i > n$

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^{n+i} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]_0 = 0$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$E(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)(1+\zeta x+\zeta^2x^2+\cdots\zeta^nx^n+\zeta^{n+1}x^{n+1}+\cdots)\right],$$

oder

$$E(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\frac{\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1-\zeta x}\right].$$

Demnach hat man die folgende Formel, welche die Zerlegung einer beliebigen rationalen Funktion in eine ganze Funktion und in Partialbrüche darstellt:

$$F(x) = \frac{1}{n!}D_\zeta^n\frac{\zeta^n F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{1-\zeta x}+\sum_1^\mu{}_\alpha\frac{1}{(m_\alpha-1)!}D_\zeta^{m_\alpha-1}\frac{\zeta^{m_\alpha}F(x_\alpha+\zeta)}{x-x_\alpha-\zeta}.$$

Die Gröſse ζ muſs nach den Differentiationen gleich null gesetzt werden.

§ 3. Anwendungen.

393. Anwendung des Vorigen auf den Fall eines reellen Quotienten. Die entwickelte Theorie gilt für alle rationalen gebrochenen Funktionen, die Koeffizienten mögen reell oder komplex sein. Wenn aber die Koeffizienten reell sind, und unter den Wurzeln des Nenners $f(x) = 0$ befinden sich komplexe Werte, so enthält auch die Zerlegung des Bruches $\frac{F(x)}{f(x)}$ komplexe Konstanten. In diesem Falle sucht man die Zerlegung so abzuändern, daſs auch die einzelnen Brüche eine reelle Form bekommen.

394. Vorbereitender Satz. Die Möglichkeit solch einer Zerlegungsform ergiebt sich aus dem folgenden Satze:

Satz. Ist x^2+px+q das Produkt der beiden konjugiert komplexen Faktoren des reellen Polynomes $f(x)$, und n die höchste Potenz dieses Trinomes, welches einen Faktor von $f(x)$ bildet, so daſs

$$f(x) = (x^2+px+q)^n f_1(x)$$

ist, so kann der reelle rationale Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ in folgender Weise zerlegt werden:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}+\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)},$$

wobei P und Q reelle Konstanten und $F_1(x)$ ein reelles Polynom ist.

Denn es ist identisch:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F(x)-(Px+Q)f_1(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)},$$

und man kann P und Q so bestimmen, dafs der Zähler des zweiten Teiles auf der rechten Seite durch x^2+px+q teilbar wird, d. h. dafs er verschwindet, wenn man für x jede der beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

einsetzt. Bezeichnen wir diese Wurzeln mit $h+ik$ und $h-ik$, und setzen wir

$$F(h \pm ik) - [P(h \pm ik) + Q] f_1(h \pm ik) = 0,$$

so wird

$$P(h \pm ik) + Q = \frac{F(h \pm ik)}{f_1(h \pm ik)} = M \pm iN.$$

Die Gröfsen M und N sind reell und haben bestimmte endliche Werte, weil der Annahme nach $f_1(x)$ nicht mehr teilbar ist durch x^2+px+q. Die Gleichung zerlegt sich dann in die beiden

$$Ph + Q = M, \quad Pk = N,$$

welche für P und Q die reellen und endlichen Werte ergeben:

$$P = \frac{N}{k}, \quad Q = \frac{Mk - Nh}{k}.$$

Nachdem die Werte von P und Q auf diese Weise bestimmt sind, setzt man

$$\frac{F(x)-(Px+Q)f_1(x)}{x^2+px+q} = F_1(x),$$

und $F_1(x)$ wird ein reelles Polynom, und man erhält

$$\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} f_1(x)},$$

was zu beweisen war.

Folgerung. Die rationale gebrochene Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ läfst sich in folgender Weise zerlegen:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{(x^2+px+q)} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)},$$

wobei P, Q, P_1, Q_1 ... reelle Konstanten und $F_n(x)$ ein reelles Polynom bezeichnen.

395. Reelle Partialbruchzerlegung eines reellen Quotienten. Verbindet man diesen Satz mit dem analogen der Nr. 385, so erhält man den folgenden

Satz. Zerlegt man das reelle Polynom $f(x)$ in seine reellen Faktoren ersten und zweiten Grades derart, daſs

$$f(x) = (x-\alpha)^\alpha (x-\beta)^\beta \ldots (x-l)^\lambda (x^2+px+q)^n \ldots (x^2+rx+s)^m$$

ist, so kann man die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = E(x) &+ \frac{A}{(x-\alpha)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\alpha-1}} + \cdots \frac{A_{\alpha-1}}{x-\alpha}, \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}, \\ &+ \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{x^2+px+q}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^m} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{m-1}} + \cdots \frac{R_{m-1}x+S^{m-1}}{(x^2+rx+s)}. \end{aligned}$$

$E(x)$ bezeichnet eine ganze Funktion, die auch null sein kann, die Gröſsen A, A_1 ... L, L_1 ... P, Q, P_1, Q_1 ... sind reelle Konstanten.

396. Die vorige Zerlegung ist nur auf eine Weise möglich. Angenommen, es seien zwei Werte für die nämliche rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ gefunden. Wie in Nr. 386 kann man alsdann die Gleichheit der Partialbrüche beweisen, welche zu linearen Faktoren des Nenners gehören. In gleicher Weise läſst sich diese aber auch für die Faktoren zweiten Grades beweisen. Ist nämlich $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ das Glied, dessen Nenner die höchste

Potenz von $x^2 + px + q$ in der ersten für $\frac{F(x)}{f(x)}$ gefundenen Zerlegung enthält, und $\frac{P'x + Q'}{(x^2 + px + q)^{n'}}$ das analoge Glied in der zweiten, so mufs $n = n'$ sein. Denn nimmt man an, dafs $n > n'$ wäre, so würde aus der Gleichheit der beiden Formeln für $\frac{F(x)}{f(x)}$ eine Gleichung für den Wert von $\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}$ folgen. Dieser Wert würde durch eine Summe von Gröfsen dargestellt sein, von denen keine in ihrem Nenner eine Potenz von $x^2 + px + q$ enthält, deren Exponent gröfser ist als $n - 1$. Bringt man diese Glieder alle auf gleichen Nenner, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}\psi(x)},$$

oder

$$Px + Q = (x^2 + px + q)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

$\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnen Polynome, von denen das zweite $\psi(x)$, durch $x^2 + px + q$ nicht teilbar ist. Diese Gleichung ist aber unmöglich; denn die Gleichung $Px + Q = 0$ müfste die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zulassen, was nicht eintreten kann, da P und Q der Voraussetzung nach nicht beide gleichzeitig null sind. Man kann daher weder $n > n'$ noch $n' > n$ annehmen, folglich ist $n' = n$.

Weiter ist zu zeigen, dafs auch $P = P'$ und $Q = Q'$ ist. Denn betrachtet man wiederum die Gleichung, welche zwischen den beiden Formen von $\frac{F(x)}{f(x)}$ besteht, und vereinigt man auf einer Seite die beiden Terme $\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}$ und $\frac{P'x + Q'}{(x^2 + px + q)^{n}}$, auf der anderen die übrigen, deren Nenner keine höhere Potenz von $x^2 + px + q$ als die $n - 1^{\text{te}}$ enthält, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{(P - P')x + Q - Q'}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}\psi(x)},$$

oder

$$(P - P')x + (Q - Q') = (x^2 + px + q)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Auch hier bezeichnen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Polynome, von denen $\psi(x)$ jedenfalls nicht teilbar ist durch $x^2 + px + q$, und es folgt also wie oben

$$P = P', \quad Q = Q'.$$

In den beiden Formen von $\frac{F(x)}{f(x)}$ sind also die Glieder, welche im Nenner die höchste Potenz eines Faktors zweiten Grades enthalten, einander gleich. Läfst man diese Glieder fort, so sind die Reste einander gleich, und wendet man dieselbe Betrachtung auf diese Funktionen an, so sieht man, dafs die beiden Formen der betrachteten Quotienten aus Partialbrüchen zusammengesetzt sind, welche paarweise übereinstimmen; zugleich ergiebt sich auch die Gleichheit der ganzen Funktionen, falls solche vorhanden sind.

397. Methode der Berechnung. Um die Zerlegung auszuführen, wird man die ganze Funktion und die Partialbrüche, welche zu reellen Faktoren ersten Grades gehören, so bestimmen, wie es in Nr. 388 und in den folgenden Nummern gezeigt wurde. Die Brüche, welche zu rellen Faktoren zweiten Grades gehören, kann man nach einander mittelst desselben Verfahrens berechnen, welches zum Beweise des ersten Lehrsatzes diente. Auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten läfst sich anwenden.

In dem Falle, wo die komplexen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ alle verschieden sind, kann man den neuen Ausdruck für die rationale Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ auch ableiten aus demjenigen, der in Nr. 387 aufgestellt wurde. Denn sind $h + ik$ und $h - ik$ zwei einfache komplexe Wurzeln, so enthält der Bruch $\frac{F(x)}{f(x)}$ die beiden Partialbrüche

$$\frac{F(h+ik)}{f'(h+ik)} \cdot \frac{1}{x-h-ik} \quad \text{und} \quad \frac{F(h-ik)}{f'(h-ik)} \cdot \frac{1}{x-h+ik},$$

deren Summe die Form hat:

$$\frac{A+iB}{x-h-ik} + \frac{A-iB}{x-h+ik}.$$

Diese reduziert sich demnach auf

$$\frac{Px+Q}{(x-h)^2+k^2}.$$

Hieraus folgt, dafs der Partialbruch $\frac{Px + Q}{(x-h)^2 + k^2}$, in welchem P und Q reelle Konstante sind, die beiden Partialbrüche ersetzt, welche zu den Wurzeln $h \pm ik$ gehören.

398. Lagranges Interpolationsformel. Eine ganze Funktion der Variabelen x vom Grade m ist vollständig bestimmt wenn man die Werte dieser Funktion kennt, welche zu $m+1$ gegebenen von einander verschiedenen Werten von x gehören. Die Gleichung, durch welche die Funktion bestimmt wird, ist, wie man sehen wird, genau die nämliche, welche in Nr. 387 aufgestellt wurde, und die den Wert einer rationalen Funktion, zerlegt in ihre Partialbrüche, ausdrückt.

Es seien $u_0, u_1, u_2 \ldots u_m$ die Werte einer rationalen Funktion $F(x)$ vom Grade m, welche zu den gegebenen Werten $x_0, x_1 \ldots x_m$ der Variabelen x gehören. Wir setzen

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m),$$

so ist

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_0} + \frac{f(x)}{x - x_1} \cdots \frac{f(x)}{x - x_m},$$

und folglich

$$f'(x_\mu) = (x_\mu - x_0)(x_\mu - x_1) \ldots (x_\mu - x_m).$$

Da der Grad von $f(x)$ um eine Einheit den Grad von $F(x)$ übertrifft, so ist nach Nr. 387, Gleichung (4):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \frac{1}{x - x_0} + \frac{F(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \frac{1}{x - x_1} + \cdots \frac{F(x_m)}{f'(x_m)} \frac{1}{x - x_m},$$

und multipliziert man mit $f(x)$, so folgt:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_m)} + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_m)} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_m \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung, welche die *Lagrange*sche Interpolationsformel heifst, giebt die Lösung der vorgelegten Aufgabe, und diese kann keine andere Lösung besitzen. Denn würde noch eine andere Funktion $F_1(x)$ vom Grade m existieren, die von

$F(x)$ verschieden ist und doch denselben Bedingungen genügt, so hätte die Gleichung

$$F_1(x) - F(x) = 0,$$

deren Grad nicht höher ist als m, die $m+1$ verschiedenen Wurzeln $x_0, x_1 \ldots x_m$, was nur so möglich ist, dafs die Koeffizienten identisch verschwinden.

Bemerkungen.

Zunächst mögen einige Lehrbücher über Differential- und Integralrechnung aufgeführt werden, welche der Leser nach vollendetem Studium des Serretschen Werkes zur Hand nehmen kann.

Wer eine allen Anforderungen an Strenge genügende Behandlung der Grundlagen kennen lernen will, findet eine solche in ebenso knapper als klarer Form in:

Genocchi-Peano, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, Torino 1884.

Dieses Buch wird demnächst auch in deutscher Sprache veröffentlicht und in den Litteraturnachweisen vervollständigt werden. Mit mehr Ausführlichkeit geht das ebenfalls sehr lesbare Werk vor:

J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, Paris 1886.

Will der Leser lieber ein deutsches Buch zur Hand nehmen, so seien ihm die Werke genannt:

O. Stolz, Vorlesungen über Arithmetik. Leipzig 1885.

O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. Leipzig 1893—96.

A. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881.

Diese drei Werke sind sehr gründlich, aber nicht immer leicht zu lesen. Alle bisher genannten Bücher legen wenig oder gar keinen Wert auf die anschaulich-geometrischen Kapitel der Differentialrechnung. Eine ausgezeichnete Ergänzung in dieser Hinsicht bildet das umfangreiche, aber sehr angenehm zu lesende Werk:

J. Boussinesq, Cours d'analyse. 2 Bände. Paris 1887—90.

Das vollständigste Buch über Differential- und Integralrechnung ist wohl augenblicklich:

J. Jordan, Cours d'analyse. 3 Bände. Paris 1893—96.

Es vereinigt eine sorgfältige Behandlung der grundlegenden Begriffe mit grofser Reichhaltigkeit des Inhaltes und steht auf einem ganz modernen Standpunkte. Es ist als Nachschlagewerk dem reiferen Leser zu empfehlen.

Wer rasch in die Fragen eingeführt sein will, welche in der letzten Zeit im Vordergrunde des mathematischen Interesses standen, sei namentlich hinsichtlich der Theorie der Differentialgleichungen angelegentlichst auf:

E. Picard, Traité d'analyse. Paris 1891—96. 3 Bde.

aufmerksam gemacht.

Einen ausführlicheren Bericht über die einschlägige Litteratur wird man in einem demnächst in den Göttinger Anzeigen erscheinenden Referate von mir über Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung finden.

Wir wenden uns jetzt zu den Einzelheiten.

Erstes Kapitel.

1.—5. Eine ausführliche Begründung des Zahlbegriffes findet man bei

O. Stolz, Vorlesungen über Arithmetik.

Unser Text hier beschränkt sich darauf die Einteilung der Zahlen zu geben, um die Analogien mit der in § 2 gegebenen Einteilung der Funktionen hervortreten zu lassen. Über die Beziehung des Kontinuums der reellen Zahlen und des Kontinuums aller Punkte einer Geraden findet man Ausführlicheres bei:

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882.

Fundamental für unsere jetzige Auffassung sind für den Zahlbegriff die Entwickelungen der Cantorschen Mengenlehre, sowie der Dedekindsche Begriff des Schnittes. Man lese bei:

H. Weber, Lehrbuch der Algebra. 2 Bände. Braunschweig 1895—1896.

die Einleitung zum ersten Bande, sowie den 25. Abschnitt des zweiten Bandes. Im letzteren Abschnitte findet man auch einfache Darstellungen der Beweise für die Transcendenz von e und π nebst Litteraturangaben.

6 ff. Mit der Nummer 6 beginnt das Studium der reellen Funktionen von reellen Veränderlichen. Wer dies gründlich betreiben will, dem sei neben dem oben genanten Buche von Tannery noch das Werkchen empfohlen:

E. Pascal, Esercizii di calcolo infinitesimale. Milano 1895.

Dieses enthält Studien des Verfassers über die Eigenschaften reeller Funktionen, angestellt an speciellen Beispielen.

23. Auf pag. 28 Zeile 5 v. o. lies „die y-Koordinate" statt: „das Modell".

Eine Fundamentaleigenschaft der stetigen Funktionen ist diese:

Wenn $f(x)$ stetig ist für alle Werte x in dem Intervalle $a \leq x \leq b$, so nimmt in diesem Intervalle $f(x)$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Der Beweis erfordert eine Kenntnis des Zahlbegriffes und ist daher im Texte übergangen. Gleichwohl wird, wenn man genau zusieht, der Satz im Folgenden fortwährend benutzt. Es sei auf Genocchi-Peano Nr. 19 verwiesen.

26. Es fehlt das folgende Kriterium für die Existenz eines Grenzwertes:

Damit $f(x)$ für $x = \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert besitzt, ist notwendig und hinreichend, dafs man zu einer (beliebig klein) vorgeschriebenen positiven Zahl σ immer eine positive Zahl N finden kann, so dafs

$$|f(x) - f(x')| < \sigma$$

wird für alle Wertepaare (x, x'), welche die Bedingungen

$$x > N, \quad x' > N$$

erfüllen.

Den Beweis, der wieder auf dem Begriff der Zahl fufst, findet man z. B. bei Genocchi-Peano Nr. 15.

Setzt man z. B. $f(x) = S_n$, indem man $x = n$ als ganzzahlige Variable ansieht, so wird aus dem vorigen Satze dieser:

Soll $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ einen bestimmten endlichen Wert haben, so ist dafür notwendig und hinreichend, dafs man zu einer beliebig (klein) vorgeschriebenen positiven Zahl σ immer eine ganze positive Zahl N finden kann, so dass für alle ganze positive Zahlen p

$$|S_n - S_{n+p}| < \sigma$$

wird, sobald nur die ganze Zahl n die Zahl N übersteigt.

Hiermit sind die Sätze der Nr. 101 und 102 gewonnen; man vergleiche auch die Bemerkungen zu diesen Nummern.

28. Hier ist folgender Satz als evident angenommen:

Ist $f(x)$ stetig in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$, so hat es in ihm sowohl ein Maximum als ein Minimum — vorausgesetzt, dafs es nicht konstant bleibt in dem ganzen Intervalle.

Beweis siehe Genocchi-Peano, Nr. 21.

33 ff. Übungsbeispiele zur Differential- und Integralrechnung findet man z. B. bei:

O. Schlömilch, Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. 2 Bde. Leipzig 1878—1882.

36. Man vergegenwärtige sich an der in dieser Nummer ausgeführten Differentiation eines Quotienten, wie nötig die bisher abgeleiteten Sätze sind. Man findet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v + \Delta v} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Die rechte Seite ist eine Funktion von x und Δx. x wird festgehalten, die Variabele Δx läfst man null werden. Welches wird der Grenzwert (Nr. 15) der rechten Seite? Existiert er? Nach der vor Nr. 33 gemachten Annahme haben u und v an der fixierten Stelle x bestimmte endliche Ableitungen (Nr. 27); diese sind aber die Grenzwerte der Differenzenquotienten für $\Delta x = 0$ (Nr. 32), also ist zunächst:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Nicht nur u' und v' auch u und v haben an der fixierten Stelle x bestimmte endliche Werte (Nr. 33), also sind dort u und v auch stetig (Bemerkung zu Nr. 27). Also ist nach der Definition der Stetigkeit (Nr. 20):

$$\lim_{\Delta x = 0} (u + \Delta u) = \lim_{x = 0} u(x + \Delta x) = u(x) = u,$$

und ebenso:

$$\lim_{\Delta x = 0} (v + \Delta v) = v.$$

Es ist weiter angenommen (Nr. 36), dafs v an der fixierten Stelle x nicht null ist; nach Nr. 23b ist jede Konstante, also auch 1 eine stetige Funktion von x, also ist auch nach der Regel 24d:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{v + \Delta v} = \frac{\lim 1}{\lim (v + \Delta v)} = \frac{1}{v}.$$

Da auch $\frac{u}{v}$ einen endlichen, zudem von Δx unabhängigen Wert hat, so zählt es für den Grenzübergang als Konstante; also ist nach denselben Regeln:

$$\lim \frac{u}{v(v + \Delta v)} = \frac{\lim \frac{u}{v}}{\lim (v + \Delta v)} = \frac{\frac{u}{v}}{v} = \frac{u}{v^2}.$$

Nach Regel 24c wird mithin:

$$\lim \frac{1}{v + \Delta v} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim \frac{1}{v + \Delta v} \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{v} u',$$

und ebenso:

$$\lim \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{u}{v^2} \cdot v'.$$

Nach Regel 24b darf ein konstanter Faktor vor das Zeichen lim gesetzt werden; z. B. der Faktor -1, also folgt:

$$\lim \left(- \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = - \frac{u}{v^2} \cdot v'.$$

Wenden wir endlich die Regel 24a an, so folgt durch Addition:

$$\lim \left(\frac{1}{v + \Delta v} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim \left(\frac{1}{v + \Delta v} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$+ \lim \left(- \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2},$$

oder

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'}{v} - \frac{u v'}{v^2}.$$

54. Wegen der Existenz einer Funktion y von x, welche implicite durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ definiert ist, vergl. 187 ff. Einen von der Theorie der Differentialgleichungen unabhängigen Existenzbeweis findet man bei Genocchi-Peano, Nr. 110.

56.—58. Aus den Gleichungen der Nr. 58 lassen sich $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\cdots$ berechnen, wenn die sogenannte Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z}, & \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

an der betrachteten Stelle nicht null ist. Die Theorie der Differentialgleichungen liefert unter diesen Umständen analoge Existenztheoreme für die Funktionen $y, z, \ldots$ Man vergleiche auch den von der Theorie der Differentialgleichungen unabhängigen Existenzbeweis für ein noch allgemeineres System bei Genocchi-Peano Nr. 116. Im Besonderen fordert die Gültigkeit der Beweise in Nr. 56 aufser den Bedingungen der Nr. 41, d. h. aufser der Stetigkeit von f, F und ihren ersten Ableitungen, dafs die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nicht null ist. Eine klare Einsicht über die Art dieser Bedingungen liefert das Studium der Funktionaldeterminanten. Man lese bei

R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig 1881.

den § 12.

59—61. Mit dem Worte Elimination kann man nur dann eine klare Vorstellung verbinden, wenn man in jedem gegebenen Falle einen Prozess angiebt, durch welchen die Elimination vollzogen werden kann oder soll. Die Resultate erscheinen so abhängig von der mehr oder minder willkürlichen Wahl dieses Processes. Wir schreiben die Gleichungen (1) und (2) der Nr. 61 so:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ \ldots \ f_n = 0; \quad f_1' = 0, \ \ldots \ f_n' = 0$$

und definieren die Elimination dadurch, dafs wir diese $2n$ Gleichungen nach den $2n$ Gröfsen $y', z', u', \ldots a, b, c, \ldots$ auflösen, indem wir uns die f durch Potenzreihen definiert denken. Nach den Bemerkungen zu Nr. 56—58 geht dies, sobald die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y'}, & \frac{\partial f_1}{\partial z'}, & \dots; & \frac{\partial f_1}{\partial a}, & \frac{\partial f_1}{\partial b}, & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial y'}, & \frac{\partial f_2}{\partial z'}, & \dots; & \frac{\partial f_2}{\partial a}, & \frac{\partial f_2}{\partial b}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1'}{\partial y'}, & \frac{\partial f_1'}{\partial z'}, & \dots; & \frac{\partial f_1'}{\partial a}, & \frac{\partial f_1'}{\partial b}, & \dots \\ \frac{\partial f_2'}{\partial y'}, & \frac{\partial f_2'}{\partial z'}, & \dots; & \frac{\partial f_2'}{\partial a}, & \frac{\partial f_2'}{\partial b}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

nicht null ist. Nun wird aber:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial z'} = \dots = \frac{\partial f_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial z'} = \dots = 0,$$

$$\frac{\partial f_1'}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1'}{\partial z'} = \frac{\partial f_1}{\partial z}, \dots; \quad \frac{\partial f_2'}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2'}{\partial z'} = \frac{\partial f_2}{\partial z}, \dots,$$

also wird die Determinante das Produkt:

$$\pm \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ist keiner der 2 Faktoren null, so ist die fragliche Auflösung möglich und liefert im Besondern y', z', $\cdots$ als Funktionen von x, y, z, $\cdots$, das heifst ein System von n verschiedenen Differentialgleichungen. Hierdurch ist auch der Sinn der im Text gebrauchten Wendung: „im Allgemeinen“ festgelegt.

Im Besondern können wir die in Nr. 59 verlangte Elimination von C und die Aufstellung der Differentialgleichung auf die angegebene Weise leisten, sobald $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial C}$ beide von null verschieden sind.

Drittes Kapitel.

65 ff. Über Differenzenrechnung vergleiche man:

G. Boole, Finite Differences. London 1872.

und:

A. Markoff, Differenzenrechnung, deutsch von Friesendorff und Prümm. Leipzig 1896.

68. Ein Beispiel, wo $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ wird, findet man auch bei Genocchi-Peano Nr. 123.

76. Aus den Gleichungen (2) und (3) des Textes lassen sich die gesuchten Differentiale berechnen, sobald die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

nicht null ist.

77. Die Gleichungen (1) und (2) des Textes sind:

$$f = 0, \quad f' = 0, \ \ldots \quad f^{(n-1)} = 0, \ \ldots$$

Aus den n ersten Gleichungen lassen sich $a, b, c, \ldots$ als Funktionen von $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ berechnen, sobald die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a}, & \frac{\partial f}{\partial b}, & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial a}, & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial b}, & \ldots \end{vmatrix}$$

nicht null ist. Der determinantenkundige Leser schliefst hieraus nach Baltzer § 9, Nr. 1 und 2, dafs f einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt:

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} + \cdots = 0,$$

deren Koeffizienten nicht von x, y abhangen. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen lehrt, dafs dann f die Konstanten $a, b, c, \ldots$ nur in weniger als n Verbindungen enthält. Ist aber jene Determinante nicht null, so setze man die Werte von $a, b, c, \ldots$ als Funktionen von $x, y, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ in die Gleichung $f^{(n)} = 0$ ein. Diese hat zum Koeffizienten von $\frac{d^n y}{dx^n}$ den Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial y}$. Wird dieser nicht null, so entsteht eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Viertes Kapitel.

91—93. Für die Möglichkeit der fraglichen Eliminationen ergeben sich bestimmte Determinantenbedingungen; im dritten Bande wird ohnehin auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ausführlich eingegangen. Dabei kommen dann auch diese Dinge zur Sprache.

94. Es ist angenommen, dafs die Gleichungen, welche die x als Funktionen der ξ geben, nach den ξ auflösbar sind; nur dann spricht man von einer Transformation der x in die ξ.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit besteht darin, dafs die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_m}{\partial \xi_1}, & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Siehe Baltzer a. a. O. § 12.

Fünftes Kapitel.

101. und **102.** Die Sätze dieser beiden Nummern sind bereits in den Bemerkungen zu Nr. 26 in einen zusammengefafst und durch den dort gegebenen Litteraturnachweis erledigt.

Die im Text gegebene Darstellung bedarf einer Berichtigung. Der Satz der Nr. 101 mufs heifsen:

Satz. Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots$$

konvergent, so sei σ eine (beliebig klein) vorgeschriebene positive Zahl; dann kann man immer eine ganze positive Zahl N finden, so dafs

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < \sigma$$

wird für jedes n, das N übersteigt und für alle Werte von p.

Der Beweis hierfür wird genau wie im Text geführt. Bei den dort benutzten Bezeichnungsweisen kann man zu $\frac{\sigma}{2}$ immer ein N finden, so dafs

$$|S - S_n| < \frac{\sigma}{2}$$

wird für jedes n, das N übersteigt. Also wird auch:

$$|S - S_{n+p}| < \frac{\sigma}{2},$$

und mithin:

$$|S_n - S_{n+p}| = |(S - S_{n+p}) + (S_n - S)| < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma,$$

wie behauptet.

Der Satz der Nummer 102 wird jetzt:

Satz. Kann man zu einer (beliebig klein) vorgeschriebenen positiven Zahl σ immer eine ganze positive Zahl N finden, so dafs für alle p

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < \sigma$$

wird für jedes n, das N übersteigt, so ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots$$

konvergent.

Der Beweis bleibt der im Text gegebene; man wird bemerken, dafs er den Begriff des Schnittes benutzt.

Die Abweichung der Fassung der Sätze 101 und 102 von der im Text gegebenen beruht darauf, dafs $u_n + \cdots + u_{n+p-1}$ gleichmäfsig für alle p nach null konvergieren mufs, damit der Satz 102 richtig bleibt.

Nehmen wir beispielsweise die Reihe, deren allgemeines Glied

$$u_n = l\frac{n+1}{n+2} = l(n+1) - l(n+2)$$

ist, so ist:

$$S_n = (l1 - l2) + (l2 - l3) + \cdots + (ln - l(n+1)) = -l(n+1)$$
$$= l\frac{1}{n+1}.$$

Die Reihe divergiert mithin, da $\lim\limits_{n=\infty} S_n = l0 = -\infty$ ist.

Bilden wir aber die Differenz

$$S_n - S_{n+p} = l\frac{1}{n+1} - l\frac{1}{n+1+p} = l\left(1 + \frac{p}{n+1}\right),$$

so wird für jedes p trotzdem:

$$\lim (S_n - S_{n+p}) = 0,$$

aber es ist nicht möglich ein N zu finden, so dafs für alle p

$$l\left(1 + \frac{p}{n+1}\right) < \sigma$$

wird, sobald nur $n > N$ ist. Vielmehr kann man zu jedem n noch Werte p finden, so dafs die linke Seite jeden gegebenen Wert übersteigt.

108. Dafs man bei einer bedingt konvergenten Reihe durch passende Anordnung der Glieder jeden beliebigen Wert für die Summe herausbekommen kann, beweist z. B. Jordan, a. a. O. I Nr. 291.

110. Im Texte ist nicht erwähnt, dafs die Reihe der w auch unbedingt konvergiert. In der That wird:

$$|w_m| \leqq |u_0|\,|v_m| + \cdots + |u_m|\,|v_0|.$$

Nun konvergieren die Reihen

$$|u_0| + |u_1| + \cdots, \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + \cdots,$$

also konvergiert auch nach dem Satze des Textes die Reihe, deren allgemeines Glied

$$|u_0|\,|v_m| + \cdots + |u_m|\,|v_0|$$

ist, also auch die Reihe der $|w_m|$.

115. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Taylorschen Lehrsatzes sind neuerdings von Pringsheim aufgefunden und von Stolz (Differentialrechnung) am Schlusse des zweiten Bandes reproduziert worden. Im Übrigen sei für weitere Eigentümlichkeiten der Potenzreihen der Leser auf die Nummern 362—372 des elften Kapitels verwiesen. Die dort angestellten Betrachtungen gelten unmittelbar auch für reelle Veränderliche. Ausführliche Belehrung über diesen Gegenstand findet man in der Differentialrechnung von Stolz.

126. Der erste Satz dieser Nummer ist eine Behauptung. Diese fufst auf dem Satze von Abel:

Wenn die Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für $x = x_1$ konvergiert, so wird $\lim\limits_{x = x_1} f(x) = f(x_1)$, wenn x vom Inneren des Konvergenzbereiches in die Stelle w_1 hineinrückt (Abel, Oeuvres complètes, Édition par Sylow et Lie I pag. 223). Hieraus geht dann hervor, dafs die Gleichung (4) des Textes auch für $x = -1$ und $x = +1$ gilt, wenn nur für diese Werte die Reihe rechter Hand konvergiert.

129. Man lese die kritischen Bemerkungen von Peano zu Nr. 124—126 des Genocchi-Peano.

137. Eine der wesentlichsten Eigenschaften der Potenzreihen einer Variabelen ist die, dafs das Verhältnis des Restes R_n zu dem vorhergehenden Term $n - 1^{\text{ten}}$ Grades für $n = \infty$ die Grenze null hat (vergl. Nr. **115**, 3). Diese Eigenschaft besteht im Allgemeinen nicht mehr für Potenzreihen mit mehr Variabelen. Dies ist ein fundamentaler Unterschied.

Sechstes Kapitel.

154 ff. Weiter gehende Untersuchungen über die Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher findet man bei Jordan a. a. O. I Nr. 396 ff.

162. Ob ein Minimum oder ein Maximum stattfinden kann, wenn der Punkt M_0 mit einem Punkte K' oder K'' zusammenfällt, ist mittelst der höheren Ableitungen zu entscheiden, und von Herrn Mayer (Berichte der K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. 1881) näher untersucht worden.

Siebentes Kapitel.

178—180. Die Betrachtungen dieser Nummern gehören dem Gebiete der abzählenden Geometrie an. Eine strenge Begründung dieser Disciplin steht zur Zeit noch aus. Als umfassendes Nachschlagewerk sei genannt:

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. Leipzig 1876.

Neuntes Kapitel.

251. In dem Verzeichnisse der Darstellung einer Fläche fehlt die, bei welcher die rechtwinkligen Koordinaten als Funktionen zweier Parameter u und v gegeben sind. Diese Darstellung wird im vorliegenden Buche gar nicht benutzt, aber gerade sie spielt in der eigentlichen Flächentheorie eine grofse Rolle. Wer genauer in die moderne Flächentheorie eindringen will, dem seien die Werke genannt:

Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1896.

sowie:

Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen. Leipzig 1888.

Das vollständigste Werk, das auch sehr lesbar ist, ist:

Darboux, Théorie des surfaces. 4 Bde. Paris 1887—1896.

Man mache sich überhaupt die Thatsachen der Kapitel 7—10 so viel wie möglich anschaulich und durch Modelle klar und glaube nicht, dafs man einen geometrischen Satz schon dann verstehe, wenn man nur die Formeln nachgerechnet hat, deren sich der Autor, den man gerade vor sich hat, zufälliger Weise bedient.

Zehntes Kapitel.

Über die Eigenschaften einer Fläche orientiert man sich am besten, wenn man die Kurven betrachtet, die sich auf ihr ziehen lassen. Diese Aufgabe behandelt das zehnte Kapitel. In der modernen Flächentheorie spielt seit Gaufs die Form des Linienelementes ds einer beliebigen solchen Kurve eine charakteristische Rolle. Man vergleiche die angeführte Litteratur.

318. Bei allen Biegungen einer Fläche, die ohne Dehnung oder Zusammenziehung vollzogen werden, bleibt die Gaufssche Krümmung in jedem Punkte ungeändert. Diesen Satz sowie die weiteren analytischen Darstellungen findet man aufser in den genannten Quellen im Original bei:

Gaufs, Flächentheorie (Ostwalds Klassiker Nr. 5).

in kurzer Übersicht auch bei:

Baltzer, Theorie der Determinanten.

Elftes Kapitel.

356. Den Begriff der komplexen Zahl hat man heutzutage erweitert, indem man mehr als 2 Einheiten nahm und das kommutative Gesetz bei der Multiplikation aufgab. Wer sich für die Natur dieser Zahlensysteme und ihre Geschichte interessiert, möge das 21. Kapitel lesen in dem Werke:

Lie-Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen. Leipzig 1893.

363. Einfache Beispiele für nicht gleichmäſsig konvergente Reihen findet man bei Jordan, a. a. O. I 332.

383. Zur Einführung in die moderne Funktionentheorie sei empfohlen:

Burkhardt, Vorlesungen über Funktionentheorie. Leipzig 1897.

sowie die ausführliche Darstellung von:

C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig 1884.

Vollständigere Untersuchungen über Potenzreihen findet man in der Differentialrechnung von Stolz.

Zwölftes Kapitel.

398. Auch die Partialbruchzerlegung mit mehrfachen Wurzeln führt zu einem Interpolationsprobleme, welches das von Lagrange als Spezialfall enthält. Man vergleiche das erste Kapitel der Differenzenrechnung von Markoff.

Berichtigungen.

Siehe die Bemerkungen zu Nr. 23, 101 und 102.

Sachregister.

(Die Zahlen bedeuten die Nummern der einzelnen Artikel.)

C.

D.

E.

RETURN TO → Astronomy/Mathematics/Statistics Library
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 **1 MONTH**	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

FORM NO. DD 19

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720