L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

HUITIÈME ANNÉE

1906

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS
10, CORRATERIE, 10

1906

DE L'ENSEIGNEMENT
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
DANS LES UNIVERSITÉS ET HAUTES ECOLES TECHNIQUES[1].

Les observations qui suivent se rattachent aux propositions qui ont été publiées par la Commission pédagogique de la « Société Allemande des Naturalistes et Médecins », réunie dernièrement à Meran ; j'admets donc que le lecteur puisse se procurer son « Rapport »[2], rédigé par M. GUTZMER. Les propositions de la Commission sont relatives à l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles dans nos écoles supérieures, dites « à neuf classes » *(neunklassig)*. En elles-mêmes, elles n'apportent rien de précisément nouveau, mais sont plutôt la conséquence du développement constant qui se produit dès longtemps dans les milieux scolaires, sous l'impulsion des divers facteurs de la culture moderne. Et cependant elles semblent avoir causé dans les divers cercles de l'enseignement supérieur et universitaire, comme une émotion générale. On se rend compte de ce que l'adoption, comme aussi l'application des mesures proposées devraient occasionner, dans l'enseignement supérieur et universitaire, des modifications multiples. De fait, la Commission, dans le rapport et les conclusions qu'elle doit présenter l'année prochaine, ne pourra pas ne pas donner son avis sur les questions traitées ici même. D'autre part, elle sait fort bien que toutes les propositions qu'elle pourra for-

[1] Traduit de l'allemand par A. Dufour (Genève) d'aprés le texte allemand publié par le *Jahresbericht der D. M. V.*, Octobre, 1905. — Là où le terme de Haute Ecole est employé sans autre qualificatif, il signifie indifléremment et à la fois, soit : « Université », soit « Haute école technique », tandis que le terme d'écoles supérieures *(hôhere Schulen)*, est réservé aux écoles qui, inférieures aux Hautes Ecoles, y préparent et conduisent.

[2] Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforsteher und Aerzte über ihre bisherige Tätigkeit. Leipzig, F. C. W. Vogel, 1905.

[Voir notre compte rendu du Congrés de Meran, *L'Ens. math.*, 7e année ; p. 487-488, 15 nov. 1905. — Le rapport sur l'enseignement des mathématiques se trouve reproduit in-extenso dans les *Notes et Documents* du présent numéro. *Réd.*]

muler ne vaudront guère mieux qu'un coup d'épée dans l'eau, si elle n'est sûre d'avance de se voir appuyée de divers et nombreux côtés, dans les milieux militants de l'enseignement supérieur; puis, ces propositions ne trouveront leur vraie formule qu'après qu'elles auront été discutées, même en dehors d'elle, et d'un peu partout. C'est pourquoi la Commission a chargé deux de ses membres, eux-mêmes intéressés en première ligne, comme professeurs, au succès de la tâche proposée, savoir M. le prof. Chun, à Leipzig, et moi-même, de soumettre des propositions de ce genre, à titre préalable, aux représentants des diverses Hautes Ecoles et de les inviter à les examiner d'avance et à les discuter aussi publiquement que possible. M. le prof. Chun se chargera surtout de ce qui concerne l'enseignement biologique, tandis que je me borne à ce qui touche à l'enseignement des mathématiques et de la physique. Restent réservées les considérations spéciales relatives à celui de la chimie.

Peut-être me sera-t-il permis d'ajouter que j'ai déjà mis à profit les nombreuses occasions que j'ai eues d'échanger avec mes divers collègues, nos vues et nos idées personnelles sur les points à examiner. Et, d'emblée, je veux signaler deux objections qui m'ont été plus d'une fois exprimées à l'endroit du rapport de Meran. Comment organiser les cours de début (dits *Anfangsvorlesungen),* destinés qu'ils sont à de jeunes étudiants munis d'un bagage scientifique si divers, si étendu même par sa seule hétérogénéité, selon l'école d'où ils sortent ? Et où trouver, plus tard, des maîtres capables de fournir dans les écoles « à neuf classes », un enseignement spécifié comme on le propose ? Ces deux questions rentrent du plus ou moins dans les deux problèmes principaux que je me propose de traiter ici, et auxquels je consacre à chacun, un des chapitres (I et II) qui vont suivre. Dans le chapitre I, je vais parler des cours de mathématiques et de physique destinés aux étudiants, qui ne doivent s'en occuper qu'à titre de sciences auxiliaires ; puis, dans le chapitre II, je m'occuperai de la méthode rationnelle à employer pour former ceux qui se destinent à enseigner les mathématiques et la physique. Quant à l'appendice (chapitre III), son but est défini par la phrase qui termine le chapitre II.

I. Les Mathématiques et la Physique considérées comme sciences auxiliaires.

Pour ne pas me perdre dans les généralités, je préfère rattacher mes observations, sans autre, aux deux cours principaux en cause : *Le cours de physique expérimentale*, commun aux Universités et aux Hautes écoles techniques, et le *Cours d'introduction aux mathématiques supérieures*, telles qu'ils se donnent dans les écoles techniques, aux futurs ingénieurs ; — il est bien entendu que ce que je dirai s'appliquera aux autres cours d'introduction, *mutatis mutandis* suivant leur objet.

Jusqu'ici, dans ces deux cours, on n'a tenu aucun compte de la différence de culture préalable existant entre les participants. Ils se donnent surtout avec cette admission complaisante qu'on ne saurait exiger d'autres bagages que celui qu'apporte l'étudiant frais sorti du gymnase classique, et même dans le cours de physique expérimentale, on va jusqu'à faire abstraction de beaucoup des prolégomènes de mathématiques, enseignés pourtant dans les classes supérieures de ce gymnase.

Je pars de cette dernière circonstance, qui donne une preuve caractéristique d'un fait patent, c'est que l'homogénéité de la culture préalable, qu'on admet avec une complaisance, toute de théorie arbitraire, dans l'organisation des cours d'entrée dans l'enseignement supérieur, n'existe absoment pas en fait. Auprès de ceux qui possèdent leur certificat complet de maturité, après avoir fait les neuf classes réglementaires viennent s'asseoir d'autres auditeurs, dont beaucoup n'ont que le certificat de sortie de seconde *(Untersekunda)* [1]. Plus le professeur s'efforce de se rendre utile à

[1] On me prie de mentionner ce qui suit: Dans les Hautes Ecoles techniques prussiennes, les jeunes gens munis d'un certificat de maturité *primaire (Primareife)* étaient admis jusqu'ici. Par ordonnance du 5 juillet 1905, il a été statué que, désormais, ne pourront y être admis comme élèves réguliers, d'autres étudiants, parmi les sujets du royaume, que ceux qui seront porteurs d'un certificat de maturité émané d'un gymnase allemand, d'un gymnase « réal » *(Realgymnasium)*, ou d'une école réale supérieure. Eux seuls seront désormais admis aux examens. Les autres, pourvu qu'ils possèdent les connaissances scientifiques exigées pour le service militaire réduit à une année, seront admis comme simples auditeurs *(Hörer)*. Mais on ne leur délivrera aucun diplôme académique.

ses auditeurs, et plus, par conséquent, il se voit amené à mettre son enseignement au niveau et à la portée des étudiants les moins avancés. D'autre part, à l'heure qu'il est, de nombreux gymnases scientifiques *(Realgymnasien)* et écoles réales enseignent la physique, tant théorique qu'expérimentale, d'une manière vraiment sérieuse, et cet enseignement le cède en bien peu de chose à ce que vise le cours de début des Hautes Ecoles ; il présente tous les avantages dus à l'exécution d'un programme systématique et complet *(geschlossen)*, et implique en particulier la culture mathématique parallèle et correspondante. C'est pourquoi les étudiants sortis d'écoles semblables n'acquièrent rien, ou n'acquièrent que peu de chose, aux cours universitaires d'instruction tels qu'on les donne actuellement.

Pour ceux de mes lecteurs peu versés dans les études mathématiques-physiques, qu'il me soit permis de remarquer ici que l'adaptation du niveau de l'enseignement donné, dans les branches dont s'agit, à celui de la culture préalable des étudiants est d'absolue nécessité. Il semble qu'il en soit autrement dans les cours de nature littéraire ou historique, parce que l'auditeur, même le moins préparé, y trouve une pâture intellectuelle abondante et une impulsion toujours profitable, et peut ainsi, par ses propres études privées, graduellement combler les lacunes existantes. Au contraire, dans les mathématiques comme dans la physique, les connaissances ne s'édifient, pour ainsi dire, que par étages successifs, et qui veut parvenir au sommet, doit les gravir un à un. *L'inégalité de culture préalable, parmi nos auditeurs, constitue donc, pour les premiers cours de première année un inconvénient aussi grand que réel.*

Peut-être est-il opportun de signaler clairement et nettement cet inconvénient. Mais ce que ces lignes ont surtout pour but de faire ressortir, c'est que cet inconvénient ne saurait être créé par l'adoption des propositions venues de Meran, mais *qu'il existe depuis longtemps et qu'il y faut parer en tout cas et à tout prix.*

Au reste, faudrait-il donc retarder le développement spécifique des établissements supérieurs dits à neuf classes, parce qu'en l'état, il crée des conditions incommodes à l'enseignement des Hautes Ecoles ? Je mets ici, à dessein, l'accent sur le terme « spécifique ». La réforme scolaire de 1900 a rompu une bonne fois avec l'idée de l'école unique pour tous *(Einheits-Schule)*, qui mène soit à négliger d'importants éléments de culture, soit à créer une uniformité oppressive, soit enfin à abaisser le niveau commun jusqu'à celui d'une sorte de banalité encyclopédique. Sans doute, toute école spécifique est, par essence, plus ou moins exclusive, et se meut, pourrait-on dire, sur un terrain et dans un angle limités, mais le principe de l'universalité se trouve sauvé par la multiplicité et l'existence simultanée d'écoles diverses. Du moment que le jeune homme fréquente l'école supérieure *(höhere Schule)*, qui répond à ses dons naturels et à ses plans d'avenir, il devient possible et désirable, à son point de vue individuel, comme au point de vue général et social, d'abréger dans la mesure du possible, ses études ultérieures et spéciales, relatives à sa vocation future. On l'a dit si souvent, que, là-dessus, je n'insiste pas davantage. Qu'il me soit seulement permis d'ajouter qu'une instruction spéciale comme celle que j'ai en vue ci-dessus, n'est pas une instruction professionnelle, au sens le moins élevé du mot, mais une *instruction générale basée sur des matières spéciales*.

Pour sortir du dilemme signalé, il n'y a qu'une seule voie à suivre : les Hautes Ecoles doivent s'adapter au développement scientifique des écoles préparatoires. Je suis heureux de rappeler, à ce sujet, que l'université traversa, dans les premières décades du siècle passé, une transformation semblable, quoique bien plus complète que celle qui s'impose aujourd'hui pour les sciences dont il est ici question. Ce fut à l'époque de l'organisation permanente de nos gymnases actuels et de l'examen de sortie auquel ils aboutissent *(Abiturientenexamen)*. Tout cet enseignement préparatoire, qui jusque-là avait été la tâche principale de la Faculté de Philosophie, fut désormais dévolu aux gymnases ; et la Faculté de Philosophie put poursuivre des buts nouveaux et plus élevés. Personne ne saurait contester que ce changement a eu les résultats les plus heureux pour cette Faculté, et cela, tant pour son régime intérieur que pour les services qu'elle rend. Que dès lors se tranquillisent ceux qui, aujourd'hui quand de nouvelles modifications vont s'imposer, ne veulent y voir que la néfaste désorganisation de nos Hautes Ecoles.

Sans doute, la chose n'est pas aussi simple que le changement que je viens de rappeler : des écoles préparatoires très diverses, les unes au même rang que les autres, ont des droits incontestablement égaux. *Il parait nécessaire, qu'à côté des cours d'introduction, qui présupposent le maximum de préparation spécifique, on institue d'autres cours complémentaires, qui, partant du niveau inférieur, acheminent au niveau supérieur les étudiants moins bien préparés.*

Donc, qu'on complète le programme, en un sens analogue à celui des cours traitant du latin et du grec, qui s'organisent d'ores et déjà pour les étudiants dont la culture philologique préalable laisse à désirer. Les amis des écoles réales ont travaillé à l'encontre de ces derniers cours dans ce qu'ils croyaient être l'intérêt d'une égalité de droits. Je crois ce point de vue absolument faux. *Le but à poursuivre devrait être, non pas la suppression de cours quelconques, mais leur multiplication, ou, si je puis m'exprimer ainsi, leur généralisation.*

Cependant, et pour rester dans la même ligne, je recommande encore l'organisation de cours d'instruction qui soient séparément adaptés aux diverses études auxquelles se destinent les auditeurs, — c'est-à-dire quelque chose de semblable à ce qui se fait dans les écoles préparatoires. L'extension qu'ont prise les diverses sciences est telle que, plus le temps marche, et moins les cours généraux d'instruction deviennent profitables, — ou prendrait alors tellement de temps, qu'il dépasserait celui dont dispose les étudiants, qui doivent, en un nombre donné de semestres, atteindre un but déterminé selon la profession qu'ils embrassent. Quant aux vues d'ensemble sur les disciplines diverses, ceux qui désirent en acquérir la synthèse peuvent s'en pénétrer, soit dans des cours publics appropriés, soit dans des cours supérieurs destinés au cercle restreint des spécialistes.

Pour ce qui est de la Physique expérimentale, la question se simplifie par le fait que les propositions de Meran paraissent fixer, en Physique, un but à peu près semblable pour toutes les « écoles à neuf classes » *(neunklassig)*. Restent alors les modifications suivantes à apporter aux cours d'introduction :

1°) Institution d'un cours préparatoire spécial pour ceux qui, sans préparation suffisante en physique, entrent dans la Haute Ecole ;

2°) Organisation des cours de manière à ce qu'ils s'adaptent aux divers buts professionnels que les étudiants se proposent, soit aux directions diverses dans lesquelles ils se proposent d'étudier.

Sur ce second réquisite, je dois faire remarquer, à titre d'exemple, que, dès longtemps, à l'Université de Vienne, se donnent des cours d'introduction à la Physique expérimentale, destinés aux futurs professeurs de mathématiques et de Physique, et que, dans ces cours on insiste tout spécialement sur des considérations d'ordre mathématique *(mathematische Formulierung)*. C'est ainsi que je me représente les cours d'introduction destinés soit aux médecins, soit aux ingénieurs, etc., conçus diversement en vue des connaissances utiles et nécessaires aux uns ou aux autres. Quant à la nature et à l'étendue des mesures d'exécution du programme de ces cours en lui-même, c'est aux spécialistes à les formuler. Pour les professeurs de physique, la tâche, ici, sera certes, ardue. Et cependant, il faut, à tout prix l'entreprendre, si l'on ne veut pas voir s'abaisser le niveau des connaissances nécessaires, en matière de sciences naturelles, tant aux futurs médecins, qu'aux futurs ingénieurs, sous la pression croissante des branches plus proprement professionnelles. D'autre part, faudra-il donc écourter, pour ne pas dire mutiler, les cours d'introduction à la physique, ou faudra-t-il les confier à des médecins ou à des ingénieurs, donc à des professeurs qui ne soient pas des physiciens de carrière ? *Caveant consules !*

Je m'attends bien à ce que ces propositions rencontrent de l'opposition chez les spécialistes, et je ne désire rien plus qu'une discussion largement ouverte. Une chose m'apparaît clairement : c'est que la physique elle-même en profiterait dans la même mesure dans laquelle s'opèrerait l'organisation et la multiplication des cours prévus par la proposition de Meran. N'étant point moi-même physicien de carrière, j'en reste convaincu avec une sécurité, dont m'est garante, par analogie, la marche suivie par le *cours d'introduction aux hautes mathématiques,* tel qu'il s'est donné et se donne, aujourd'hui encore, dans les Hautes Ecoles techniques. Le programme des études d'ingénieurs, dans les Hautes Ecoles Techniques allemandes, fut, il y a plusieurs dizaines d'années, calqué sur celui des écoles analogues françaises, en ce qui concerne les mathématiques. Mais, en Allemagne, les développements subséquents ont écourté, en lui enlevant morceau après morceau, l'enseignement mathématique proprement dit au profit de l'enseignement technique et pratique, qui, dès le début des études, en accapare du plus au moins la place. Les Mathématiques supérieures, soit le Calcul différentiel et intégral, ainsi que la Géomètrie analytique, se trouvent aujourd'hui réduits à un simple cours d'introduction qui ne se suit que dans les deux ou trois premiers semestres. En outre, on y enseigne toujours de façon assez complète, la Géométrie descriptive dans l'ancienne acception du terme. Mais déjà dans le cours de Mécanique appliquée ou technique, autrefois de nature foncièrement mathématique, les expériences directes sur la machine même (ou l'inspection des constructions elles-mêmes) se poussent toujours plus au premier rang, comme élément principal. Je fais allusion ici aux laboratoires grandioses, destinés aux ingénieurs, qui, dans les dix dernières années, ont été ajouté aux Hautes Ecoles techniques d'Allemagne.

Ce développement, qui n'est peut-être point parvenu à son dernier terme, fut, à tout prendre, le fruit de la nécessité. Il répond aux besoins actuels de l'industrie allemande, qui demande une grande majorité d'ingénieurs pratiques, et seulement une minorité de théoriciens. Cela est bien dans l'esprit du temps, qui se détourne de plus en plus, et par d'excellentes raisons, d'une culture exclusivement formelle.

Mais la médaille a son revers. On a, comme on dit en allemand « *jeté l'enfant avec l'eau en vidant la baignoire* », dans beaucoup des cas qui se présentent dans la pratique, la culture mathématique seule peut élaborer la réponse cherchée, et les connaissances préliminaires emmagasinées par nos ingénieurs n'y suffisent pas. Je pourrais en citer ici des exemples typiques. Où trouver la moyenne juste ?

C'est ici que les propositions de Meran se montrent sous un jour particulièrement heureux. Alors que l'enseignement mathématique, déjà dans les classes du gymnase, et d'emblée, s'attache à l'intuition d'espace et à la notion de fonction et amène ainsi les élèves au sein même du Calcul différentiel et intégral, le cours d'introduction aux Hautes Mathématiques pourra, dans les Hautes Ecoles être plus nourri qu'il ne le fut jusqu'ici : En particulier, lorsque déjà, dans l'école inférieure l'esprit des élèves a été exercé à considérer les rapports entre la théorie mathématique et ses applications, alors, le parallélisme si désirable avec la technique pratique, se produira plus aisément. En quelques mots, *la mathématique s'incorporera d'une manière beaucoup plus organique à tout ce qui forme l'horizon intellectuel du futur ingénieur, et s'y imprégnera aussi de façon plus permanente que ce n'a été le cas jusqu'ici.*

Je suppose, bien entendu, cela en tenant compte des considérations générales présentées plus haut que, pour ceux qui arrivent dans la Haute Ecole sans la préparation mathématique normale, telle que la demandent les propositions de Meran, il sera institué des *Cours préparatoires* suffisants.

D'autre part pourrait se présenter un allègement profitable pour les élèves diplômés des Ecoles Réales supérieures, — pourvu que, dans ces dernières, comme le recommande la majorité de la commission, l'enseignement soit poussé jusqu'aux éléments du Calcul infinitésimal. Ainsi les élèves sus-mentionnés pourraient être dispensés d'une partie du Cours d'introduction donné dans la Haute Ecole, et ainsi entrer plus tôt dans le domaine des études techniques proprement dites. Il va sans dire que ces cours d'introduction devraient se fragmenter de manière à faciliter la dispense possible que je viens de supposer. Que cela soit praticable et par quels moyens, la Haute Ecole technique de Stuttgart nous en donne un exemple probant : depuis longtemps son programme est conçu dans le sens de cette proposition, — et personne ne s'est jamais plaint que, dans ces conditions, le niveau moyen de la culture mathématique des ingénieurs en ait baissé.

En voilà assez sur le cours proposé : Je renonce à parler de l'importance semblable que pourrait avoir l'application des propositions de Meran pour l'enseignement des Hautes Ecoles en matière de Géométrie descriptive et de Mécanique appliquée (technique)[1]. Mais, pour empiéter sur la deuxième partie des considérations présentées dans ce mémoire, j'ai à formuler une autre requête, qui s'applique assurément aussi aux études de physique : c'est que, dans les Hautes Ecoles techniques, on organise, tant en matière de mathématiques qu'en matière de physique, — au profit de ceux qui désirent une culture plus complète, — des *Cours supérieurs (Spezialvorlesungen)*, — beaucoup plus nombreux et plus complets qu'on ne l'a fait jusqu'ici. J'entends par là des cours, non point, cela s'entend, de nature abstraite, mais des cours dans lesquels la pleine compréhension théorique se marie avec la compréhension pratique et ne fasse qu'un avec celle-ci ; qu'en un mot elles se pénètrent réciproquement. Cela me mènerait trop loin de vouloir montrer, même par quelques exemples, combien cette requête se légitime dans l'intérêt même de notre industrie et de ses exigences croissantes ; qu'il me soit seulement permis de remarquer que l'association des Ingénieurs Allemands l'a déjà présentée, de façon expresse, en 1895, dans ce qu'on

[1] Pour ce qui concerne la Geométrie descriptive, voir, par exemple l'ouvrage si suggestif de Fr. SCHILLING sur ses applications de la Geométrie descriptive, en particulier sur la Photogrammetrie (*Ueber die Anwendungen der darstellender Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie*. — Leipzig 1904). — Un exposé complet des points de vue essentiels, à l'époque actuelle, pour l'enseignement de la mécanique industrielle, ne semble pas exister encore; j'exprime ici le vœu sincère que quelque écrivain compétent ne tarde pas à nous doter de cet exposé.

appelle ses « Résolutions d'Aix-la-Chapelle » *(Aachener Beschluesse)*. Le point de vue auquel je me place ici pour la reprendre à mon compte, est que, sans ces cours supérieurs, il ne sera plus possible aux Hautes Ecoles techniques de participer, dans la proportion que j'esquisserai plus loin, à la production de forces jeunes pour l'enseignement.

A ce sujet, je dois ajouter quelques mots sur une question soulevée plus haut en passant (en ce qui concerne la Physique expérimentale). Par le fait que, comme le montre l'expérience, les mathématiciens et les physiciens, ne sont pas toujours aptes à faire ressortir la signification pratique de la théorie, on tend de nouveau, dans les études techniques comme dans les études médicales, à confier les cours non à des théoriciens, mais à des praticiens. C'est tomber de Charybde en Scylla : on trouve bien chez ces derniers la culture pratique, mais la culture théorique, trop souvent, leur manque, et celle-ci ne s'acquiert que bien difficilement après l'époque des études ; c'est là un fait d'expérience. D'autre part, nous ne pourrons créer des forces enseignantes d'une manière vraiment *systématique* que lorsque nous mettrons le plus tôt possible les étudiants, tant en mathématiques qu'en physique, en contact avec les problèmes pratiques. Sans doute, tout n'est pas fait quand on a acquis une *préparation* systématique. Tout au contraire, il est hautement désirable que, dans le cas d'une profession quelconque, on ne recherche, à l'avenir, non plus les compétences en quelque sorte unilatérales, mais les aptitudes pleinement équilibrées, et cela en matière pédagogique comme en matière scientifique.

II. Des études nécessaires à ceux qui se destinent à l'enseignement des Mathématiques et de la Physique.

Comme base de la discussion qui suivra, je n'envisagerai que l'état de choses qui existe aujourd'hui dans l'Allemagne du Nord (état de choses avec lequel celui qui règne dans l'Allemagne du Sud ne se laisse comparer que bien difficilement). En outre, je mettrai toujours, et en première ligne, l'accent sur la culture *mathématique* des candidats à l'enseignement, et cela, non seulement parce que cette culture me tient de plus près que la culture en matière de physique, mais parce qu'à son sujet, les difficultés me semblent ressortir avec un relief exceptionnel.

Et d'abord, quelques mots sur le développement historique. Il n'y a que 75 ans, on le sait, que nos programmes universitaires présentent une subdivision spéciale à l'instruction des étudiants qui se destinent à l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles [1]. Les exigences étaient d'abord aussi modestes quant au niveau demandé que nombreuses par leur multiple étendue (naturellement, elles embrassaient toutes les sciences naturelles dans leurs diverses disciplines). La haute science, comme telle, avait peu de place dans les épreuves de capacité, en tout cas en matière mathématique. Je n'en veux pour preuve que ni Gauss, ni Dirichlet, ni Riemann n'ont jamais fait partie des jurys d'examen, pas plus que Jacobi, Kummer, Weierstrass ou Kronecker.

Au milieu de la décade 1860-1870, la tendance s'accentue vers de plus hautes études. De plus en plus, les mathématiciens de haute marque font partie des jurys d'examen, et le programme des épreuves de 1866 exige des candidats en des termes dont le sens n'est pas douteux : « qu'ils aient « pénétré assez avant dans le domaine de la Géométrie et « de l'Analyse supérieure, et dans celui de la Mécanique « analytique, pour pouvoir s'y livrer avec succès à des re- « cherches personnelles. » La hausse dans le niveau scientifique qui se produisit aussitôt, s'accompagna naturellement d'un rétrécissement du champ d'études, dans le domaine même des mathématiques. La première branche à en pâtir fut la mathématique appliquée, qui, du moins sous la forme d'études d'astronomie et de géodésie, avait, jusque-là, joué un rôle considérable. Dans les hautes mathématiques même l'intérêt se concentra sur tel ou tel objet, selon que

[1] Voir mon mémoire relatif à « Cent ans d'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de Prusse » dans le recueil général de Lexis sur la Réforme de l'enseignement scolaire supérieur en Prusse. Halle, 1902; réimprimé dans le 13e volume les *Jahresberichte der D. Math. Ver.*, p. 347—356, — et ailleurs.

cet objet se trouvait être celui des investigations favorites de tel ou tel spécialiste (géométrie moderne, théorie des invariants, théorie des fonctions, en particulier des fonctions elliptiques, des équations différentielles linéaires, etc., etc.). Les *Séminaires* universitaires, fondés, à l'origine, pour former des instituteurs capables, se transformèrent de plus en plus complètement en collèges destinés à l'instruction d'hommes voués aux *recherches* scientifiques.

Tout ce développement repose, que ce soit consciemment ou pas, sur cette conception fondamentale, que l'utilité des études universitaires est à chercher, pour les étudiants destinés à l'enseignement, dans leur seule valeur formelle. Il ne s'agit point, selon cette théorie de *l'objet* des études mathématiques, mais de la *concentration* et de *l'effort* qu'on voue à cet objet. Mais les expériences qu'on fit dans les écoles, avec les instituteurs formés par cette méthode, n'ont point été généralement favorables. Aussi voyons nous bientôt se manifester dans l'enseignement universitaire des tendances, qui visent à une culture mathématique moins exclusive, et à un plus grand souci des besoins réels des écoles inférieures. Si aujourd'hui s'offrent, aux futurs instituteurs dans beaucoup d'universités, des tables de lecture et de travail avec de riches bibliothèques, si nous enseignons la Géométrie descriptive et d'autres branches des mathématiques appliquées, tous ces progrès furent suggérés par le désir de rendre plus fructueux pour les écoles l'enseignement mathématique à venir des aspirants instituteurs, tout en lui gardant son caractère scientifique. Inutile d'insister, ce sont là choses qui, ces dernières années, ont été pleinement mises en lumière, et de divers côtés [1]. Je prie, cepen-

[1] Je ne veux mentionner ici que les mémoires les plus récents, sur ces matières, qui figurent dans les « *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung* ». Ce sont: STÆCKEL, *Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten* (Vol. 13, 1904, p. 313—341). GUTZMER, *Ueber die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten* (ibid. p. 517—523). HOLZMUELLER, *Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik* (Vol. 14, 1905, p. 249—274). Il serait certainement grandement à désirer, que l'on pût rendre obligatoire, pour tous les mathématiciens, un certain degré de connaissances en fait de mathématiques appliquées. Il ne faudrait pas représenter celles-ci comme quelque chose d'étranger et de spécial, existant à côté et en dehors des Sciences mathématiques pures, mais bien comme une branche faisant tout naturellement partie de la culture mathématique normale. C'est pourquoi de semblables cours de début me semblent des plus utiles

dant, mes collègues de bien vouloir faire connaître, si ces idées se trouvent partout appliquées de manière satisfaisante, et si, pour ainsi parler, on en est arrivé à appliquer un programme *normal,* qui soit de nature à garantir la future aptitude pratique des étudiants se destinant à l'enseignement.

Admettons que cette organisation normale existe déjà ; je n'en partage pas moins l'opinion de plusieurs de mes collègues : c'est qu'il faut en arriver à quelque chose de plus [2]. On a pu caractériser plaisamment le système actuel d'éducation mathématique comme n'étant souvent qu'un système tendant à un « double oubli ». A l'Université en effet, on commence par mettre de côté les mathématiques apprises dans les écoles inférieures, pour faire de même, après l'examen de capacité et la conquête du diplôme, à l'égard des connaissances supérieures acquises dans l'intervalle ! A l'encontre de cet état de choses, nous demandons pour les étudiants qui se destinent à l'enseignement *des cours spéciaux qui établissent et mettent en lumière les rapports multiples et nécessaires existant entre les mathématiques supérieures et le domaine de l'instruction scolaire,* — des cours ensuite desquels les effets bienfaisants et durables des hautes études universitaires ne manqueront pas de se manifester et de se prolonger dans l'activité scolaire à venir de ceux qui les fréquentent. A ces cours se rattacheraient aisément les considérations pédagogiques sur la nature et le but de l'enseignement mathématique à tous ses degrés. Sans doute, c'est aux « *Séminaires pratiques* » adjoints, en Prusse, depuis une quinzaine d'années aux écoles supérieures *(Hoehere*

---

pour les candidats à la carrière pédagogique, des cours dans lesquels les intérêts de la mathématique pure et ceux de la mathématique appliquée se conditionnent et se pénètrent. C'est ainsi que mon collègue RUNGE a fait, dans le dernier semestre d'été, et avec le plus grand succès, un cours de Calcul différentiel et intégral (3 heures d'exposition et 3 heures d'exercices pratiques), cours qu'il continuera l'hiver prochain sous une forme identique.

[2] Voir par exemple : STÄCKEL, dans le 13e volume des *Jahresberichte*, p. 524-530 : Sur la nécessité de cours réguliers, dans les Universités, sur les mathématiques élémentaires. — J'ai, moi-même, donné des cours semblables, sous une forme nouvelle, dès l'automne de 1904, et espère pouvoir bientôt publier des détails sur les résultats obtenus. — La proposition de M. Stäckel n'exclut naturellement pas la possibilité d'offrir, dans beaucoup de cours supérieurs, des données occasionnelles sur les sciences naturelles, sur les applications pratiques modernes, et aussi sur le développement historique de l'objet traité, ainsi que des exemples tirés de cas spéciaux. Tout cela ne pourra être qu'utile à l'activité scolaire future des auditeurs.

Schulen), que nous confions l'initiation des futurs instituteurs aux méthodes scolaires, mais cela n'exclut point la possibilité désirable, que nous nous étendions, dans les cours universitaires, sur les questions *générales* que soulèvent les mathématiques envisagées au point de vue pédagogique, questions qui ne tiennent naturellement que peu de place dans les cours ordinaires de pédagogie tels que les donnent nos collègues de la Faculté de philosophie, qui, naturellement conçoivent leurs leçons en partant plutôt de leurs propres antécédents philologiques.

Les candidats en mathématiques ayant trouvé à l'université une éducation telle que j'ai cherché à la définir sous ses faces diverses, seraient certainement propres à répondre aux exigences de l'enseignement mathématique réorganisé conformément aux recommandations faites à Meran. Qu'on veuille aussi considérer, que ces recommandations tendraient à faciliter considérablement l'orientation de l'enseignement universitaire et polytechnique vers les côtés pratiques de la carrière future des instituteurs. De fait, leur adoption supprimerait le gouffre qui subsiste entre les mathématiques scolaires et les hautes mathématiques, puisque désormais les mêmes notions pénètreraient l'enseignement des premières, que celles qui président à l'enseignement des secondes. Jusqu'ici, un cours de mathématiques élémentaires semblait être, dans le cycle des cours universitaires, un élément singulier et exceptionnel; désormais il sera possible de le rattacher aux autres éléments de ce cycle.

Des considérations semblables se légitiment, en ce qui concerne nos candidats, pour *l'enseignement de la Physique*. Nous ne saurions nous dispenser de réclamer une extension correspondante de cet enseignement (extension qui déjà, est un fait accompli en plusieurs endroits, ou plutôt un fait commencé). Je veux parler de l'acheminement à la démonstration personnelle par l'étudiant; à des travaux pratiques de laboratoire conçus dans le sens de l'enseignement ultérieur à donner par celui qui s'y livre; à la fabrication personnelle des appareils les plus simples, — enfin, de développements très généraux sur la méthode et l'organisation de l'enseignement de la physique. Ces progrès semblent moins ardus à réaliser que pour les mathématiques, en ce qui concerne l'enseignement de la physique, parce que jamais ce dernier ne s'est écarté d'une certaine moyenne, comme au contraire l'a fait, indubitablement, l'enseignement des mathématiques.

Cependant, une *grosse question* se pose : Où prendre le temps indispensable pour ces adjonctions aux programmes des Hautes Ecoles, pour désirables qu'elles soient ? Sans doute, on peut augmenter le nombre des professeurs, et multiplier les locaux nécessaires, mais *la capacité compréhensive (Fassungskraft) de nos étudiants est une grandeur de moyenne constante, de laquelle, évidemment, nous sommes bien forcés de tenir compte.*

Disons le d'emblée, la prolongation éventuelle du séjour à l'université ne mérite pas même qu'on la discute. S'il doit y avoir allégement, il faut qu'il vienne d'un autre côté. A Gœttingue, où les diverses branches des mathématiques et de la physique sont richement représentées, il y a longtemps que nous essayons du système « facultatif ». Nous ne réclamons l'unité de culture que pour ce qui est absolument indispensable, et, pour le surplus, laissons à chacun le choix, quant aux possibilités que lui offre la variété des cours. Dans d'autres universités, on préférera peut-être faire prévaloir un plan d'études déterminé, ce qui pourrait bien être plus profitable pour l'étudiant. On pourra ainsi arriver à fixer certaines normes pour les conditions d'obtention du diplôme en mathémathiques et en physique. *Mais une entente, ensuite de discussion raisonnée, entre les spécialistes des diverses universités me paraît tout particulièrement désirable.*

Une condition préalable à cela doit être mentionnée ici, et résulte d'une question plus pressante encore. Les mêmes problèmes que nous discutons ici, se présentent quant à la préparation universitaire des futurs instituteurs des sciences biologiques et de chimie (et cela d'autant plus que les propositions dites de Meran prévoient une transformation fort importante de l'enseignement biologique dans les écoles préparatoires supérieures, autrement dit, de cet ensei-enseignement dans la sphère scolaire). Soit dans la ligne mathématico-physique, soit dans la ligne biologico-chimique, une culture spéciale *(fachmännisch)* du candidat paraît indispensable. Sera-t-il encore possible, à l'avenir, de conserver entre ces deux lignes d'études, un lien commun, si léger fût-il, ou nous faut-il travailler dans le sens d'une séparation complète, étanche, pourrais-je dire ?

Je n'hésite pas à me ranger à ce dernier parti. Que si l'étudiant en mathématique ou en biologie conserve, après avoir fait honneur aux branches qui lui sont logiquement indispensables, un surplus d'énergie disponible, il complète alors à sa guise et librement sa culture scientifique. Au reste, pareils compléments sont d'une utilité clairement évidente. Quelques connaissances en chimie (et en minéralogie) sont indispensables à tout physicien, comme quelque familiarité avec la physique, au chimiste. Le biologiste doit avoir certaines notions d'hygiène, comme le mathématicien doit savoir quelque chose de l'astronomie. Et à chacun, même dans son propre domaine, une étude de la philosophie, faite au point de vue de sa spécialité, sera des plus utiles. S'il y a lieu d'ajouter un numéro de plus aux branches sur lesquelles porte l'examen de capacité, je recommande, en outre de la *Propédeutique philosophique*, tout particulièrement la *Géographie* (parce qu'elle se rattache, avec une facilité relative, aux études mathématiques et aux sciences naturelles) [1].

Les conseils scolaires, habitués à l'amalgamation traditionnelle des mathématiques et des sciences naturelles, ne se rangeront point de leur plein gré à la séparation dont je plaide la cause, et je soupçonne que jusque dans le camp des spécialistes, tant mathématiciens que biologistes, se rencontrera, ici et là, quelque opposition à la thèse que je soutiens. On demandera que, comme jusqu'ici, le mathématicien

---

[1] De cette façon, le biologiste trouvera à s'employer utilement même dans le gymnase classique non modifié (ce qui est très important en présence des résolutions de Meran, qui ne réclament un enseignement biologique assez avancé que pour les classes supérieures des écoles « réales », et accentuent d'autre part, la nécessité d'une culture spéciale très complète, professionnelle pourrait-on dire chez les biologistes).

acquière ce qui lui est nécessaire, en fait de connaissances biologiques, pour conquérir les degrés inférieurs dans ces branches (*Unterstufe*), et que le biologiste en fasse autant de son côté, en ce qui concerne les mathématiques et la physique. En ce cas, je recommande, en opposition avec ce qui se pratique aujourd'hui, avec des résultats d'ailleurs peu encourageants, un système qui rende *plus accessible* le « degré inférieur » *(Unterstufe)*. Les spécialistes en mathématiques, en physique, en chimie et dans les diverses sciences, jusque et y compris la biologie, devraient, dans chaque université, se réunir et tomber d'accord sur un programme d'examens bien clair, mais pas trop étendu. C'est ce qui, par exemple, vient, me dit-on, de se passer à Muenster. Ils devraient aussi pourvoir à l'organisation de cours et d'exercices pratiques, qui ne surchargent pas l'étudiant au-delà de ce qui est strictement nécessaire. On pourrait aussi penser à rattacher les épreuves propres au diplôme du degré inférieur, à un *examen intermédiaire* destiné à ceux qui aspirent à conquérir le degré supérieur *(Oberstufe)*. Je me suis toujours, quant à moi, déclaré très sympathique à la création d'un examen intermédiaire de ce genre, et je crois que le caractère scientifique des études, auxquelles se livrent les candidats à l'enseignement, ne saurait qu'y gagner.

Je renonce à développer plus au long les possibilités indiquées plus haut. Je préfère beaucoup effleurer, dans un appendice, deux autres questions tout aussi pressantes, savoir, celle de la préparation raisonnée des futurs instituteurs et professeurs de mathématiques et de physique, dans les Hautes Ecoles techniques, et celle de la culture additionnelle que pourraient et devraient acquérir les instituteurs actuellement en exercice.

III. Appendice.

A. Pour ce qui concerne l'éducation rationnelle dans les Hautes Ecoles techniques. des candidats à l'enseignement, le règlement prussien des examens comprend, dans les trois années d'études requises *(Akademisches Triennium)*, jusqu'à trois semestres passés dans ces Ecoles techniques.

Ainsi les candidats à l'enseignement ne reçoivent donc pas leur certificat de capacité de la seule université, et cette combinaison offre un champ considérable aux influences pratiques de la technique. Cependant les résultats connus démontrent, que ce système n'a produit que des fruits assez illusoires. La principale raison en est, que dans les Ecoles techniques de Prusse, jusqu'ici, il n'existe pas de cours ni d'exercices pratiques destinés spécialement aux candidats à l'enseignement etque ceux-ci se voient obligés d'assister uniquement aux leçons ordinaires faites aux futurs ingénieurs. D'autre part, des combinaisons spéciales d'enseignement ne sauraient vraiment prospérer, qu'en rendant possible une véritable unité des études *(Voller Abschluss)* et en s'y adaptant. Aussi en suis-je venu de plus en plus à me convaincre de la nécessité de créer, dans nos Hautes Ecoles techniques, un programme *complet*, à l'adresse des candidats à l'enseignement mathématique et physique. (Cela existe depuis longtemps dans les institutions analogues de l'Allemagne du Sud, et c'est l'objet d'un désir constamment exprimé dans celle du Nord, par les cercles intéressés.) Et cela implique nécessairement la participation des professeurs de la Haute Ecole technique, qui ont été chargés d'instruire les candidats, aux épreuves de capacité à subir par ces derniers. En sollicitant la discussion sur ce point, je soumets aussi les *desiderata* suivants :

1). Le but de la combinaison devrait être de faire valoir beaucoup plus expressément la signification propre de la technique, pour notre culture moderne, dans l'éducation universitaire des candidats, — beaucoup plus expressément, disais-je, que par la seule création de cours de mathématiques et de physique appliquées, comme c'est généralement le cas dans les universités.

2). Il ne s'agirait point, comme on en a exprimé la crainte, d'introduire dans les Hautes Ecoles techniques un élément étranger, mais bien au contraire de donner tout son relief à leur rôle scientifique.

3). Il semblerait même possible d'insérer définitivement dans leur programme, ces cours supérieurs de mathématiques et de physique dont j'ai parlé au chapitre premier, à un point de vue plus général.

4). Du même coup, pourrait enfin fleurir une branche jusqu'ici trop négligée dans l'éducation des candidats à l'enseignement ; je veux parler de la préparation systématique de maîtres spéciaux et de carrière *(Fachlehrer)* pour les nombreuses écoles techniques moyennes (mais des développements sur ce point, pourtant de capitale importance, ne seraient pas à leur place ici).

5). Il faut aussi considérer, que par le développement désiré de l'enseignement mathématico-physique, l'intérêt des professeurs des branches qui s'y rattachent, quant à la tâche proprement pédagogique dévolue aux Hautes Ecoles techniques, en deviendrait plus vivant et plus intense qu'il ne pouvait l'être jusqu'ici.

6). Même les universités, au sens le plus élevé, profiteront de ce progrès, par le fait que quelque concurrence, sur un terrain qui jusqu'ici leur était exclusivement réservé, leur sera plus fructueux qu'un monopole que personne ne leur disputait.

7). Il est évident que le progrès que je réclame ne saurait s'accomplir sans une augmentation correspondante du personnel enseignant dans les Hautes Ecoles techniques.

B. Les changements de méthode réclamés par les résolutions de Meran, ne sauraient, si d'ailleurs ils doivent être adoptés, point attendre qu'une nouvelle génération de maîtres soit parvenue à maturité ; il s'agit, bien au contraire, de gagner aux innovations requises ceux qui sont actuellement en exercice, notamment aussi les instituteurs plus âgés.

On peut être reconnaissant à l'administration prussienne d'avoir déjà résolu, à ce point de vue, une mesure fort importante. Comme le rapport de Meran le mentionne, cette administration a provoqué, en divers lieux, des essais et des expériences conformes aux propositions de la commission en ce qui concerne l'enseignement mathématique et physique. On projette également des essais analogues quant aux réclamations de Meran, relatives aux sciences biologiques. Espérons donc, qu'ainsi, de divers centres, pourra venir la preuve, pour les cercles scolaires, non seulement du caractère praticable des réformes que nous réclamons, mais encore de ce que ces réformes ont d'utile et d'important !

Les discussions qui se produiront, dans les réunions de professeurs et de maîtres, sur les résultats obtenus, comme sur les voies suivies pour les atteindre, ne manqueront pas de donner à la question plus d'espace et de lumière.

Mais, à mes collègues des Hautes Ecoles, je me permets de demander qu'ils *veulent bien, de leur côté, avoir égard au mouvement qui se dessine, dans l'organisation des cours de vacances qu'ils donneront, ou, s'il y a lieu, d'en organiser précisément au point de vue de ce mouvement.*

Les cours de vacances dans le domaine des sciences naturelles, servent jusqu'ici, et fort utilement, à tenir les maîtres et les instituteurs au courant des progrès récents de la science. Cela est certainement fort important, pour peu que le résultat récompense l'effort, c'est-à-dire, pour autant qu'on réussit à se faire clairement comprendre. Mais, à côté de cela, nous devrions, me semble-t-il, nous appliquer toujours plus, à parler dans les cours de vacances, de la haute signification que présentent les parties anciennes et nouvelles de l'enseignement des Hautes Ecoles pour les voies utiles à suivre, dans les écoles supérieures ou moyennes qui aboutissent à l'Université. Sans doute faut-il aussi que dans celle-ci, les professeurs se tiennent, plus que jusqu'ici, au courant des conditions et de l'état de choses qui prévalent dans ces écoles.

C'est pourquoi je pense que tous nous admettrons que le terme si bref des cours de vacances, qui ne peuvent actuellement agir qu'à titre d'incitation passagère, devrait s'élargir jusqu'à constituer un vrai *semestre de perfectionnement.*

Je ne doute pas de tout ce qui pourrait être suggéré d'intéressant sur tous les sujets traités dans le présent mémoire, et je prie instamment les intéressés de ne pas garder pour eux leurs opinions et leurs observations [1].

Gœttingue, fin de septembre 1905. F. KLEIN.

[1] [Ces observations pourront être signalées dans cette *Revue* dans la rubrique récemment ouverte sous le titre de « Réformes à accomplir ». Voir *L'Enseig. Math.*, 7e année, p. 382-387 et p. 462-472. — *Réd.*].

SUR L'ÉVOLUTION DE LA MATIÈRE

Le livre qu'a publié M. Gustave Le Bon sous le titre « L'évolution de la matière [1] » mérite autre chose qu'un simple compte rendu bibliographique.

Il est du petit nombre de ceux qui font penser, qui obligent le lecteur à discuter avec lui-même et l'on ne sait, après l'avoir lu, s'il faut plus admirer la patience et la constance scientifiques de l'auteur, au cours de ses recherches expérimentales, ou bien l'envolée de son imagination philosophique dans le champ des hypothèses qui déjà s'imposent. Alors même qu'on connaît par avance l'ensemble des idées de M. Gustave Le Bon, par la série des intéressants mémoires publiés antérieurement par lui, notamment dans la *Revue scientifique*, on a plaisir à en retrouver dans son livre une synthèse qui ne fait pas double emploi.

Dans ce recueil, nous ne voulons étudier les doctrines dont il s'agit qu'au point de vue des répercussions qu'elles exercent sur les théories en vigueur dans le domaine des mathématiques appliquées, ou, pour mieux dire, dans celui de la Mécanique rationnelle, puisque c'est là qu'on se trouve toujours ramené, en dernière analyse. Le meilleur hommage que nous puissions rendre à l'auteur, c'est de discuter ses idées avec une entière liberté d'esprit. Il nous parait en effet qu'en tout état de cause, la poussée qu'il imprime à la science moderne ne peut-être que dans le sens d'une marche en avant, fût-il dans l'erreur sur quelques points. D'ailleurs, on le verra dans ce qui va suivre, les discussions portent peut être plutôt sur la forme que sur le fond, sur les mots que sur les choses elles mêmes. Mais, en ces délicates matières, le langage prend une importance considérable, qu'il serait imprudent de méconnaître.

---

[1] 1 vol. de la Bibliothèque de Philosophie scientifique, avec 67 figures (9e mille); Paris, Flammarion, 1905.

L'idée fondamentale de M. Gustave Le Bon est que la propriété des corps radio-actifs est universelle, à des degrés divers. Soit spontanément, soit sous l'action de certaines causes, la matière se désagrège ; l'atome, qu'on croyait indestructible, ne l'est pas, et nous apparaît comme un immense réservoir d'énergie ; dans la dissociation, cette énergie se dissipe, la matière cesse d'être pondérable, et vient à l'état d'éther, en passant par des états intermédiaires entre le pondérable et l'impondérable.

En ce qui touche les faits eux mêmes, il semble bien que l'auteur ait cause gagnée ; en ce qui concerne la manière de les exprimer, et à plus forte raison de les expliquer (si tant est qu'on *explique* jamais réellement un phénomène) c'est une autre affaire. Les théories modernes relatives à l'électricité ont conduit à des notions qui sont pour surprendre, et qui semblent ébranler les principes fondamentaux de la Mécanique. On nous a parlé de masses variables suivant la vitesse, par exemple, d'atomes électriques, de ions, d'électrons jouissant de propriétés spéciales ; et on en est arrivé à se demander si la Mécanique classique, qui suffit largement, telle qu'elle est, à tous nos besoins pratiques et mêmes scientifiques, en ce qui concerne les applications, ne serait pas simplement une première approximation, le premier terme d'une série dont les suivants ne sont pas encore connus de nous. C'est fort possible ; les principes de la Mécanique sont des postulats, non des dogmes immuables ; mais encore faut il s'entendre sur les mots qu'on emploie.

Beaucoup d'entre ces mots sont connus et admis ; d'autres appellent une définition ; certains, enfin, par la nature des choses, sont indéfinissables, mais ont besoin du moins d'être expliqués, pour que le langage soit compréhensible. Dans l'un de ses articles de la *Revue scientifique*, M. Gustave Le Bon proclame avec grande raison qu'il est indispensable de définir nettement tous les termes. Je crains qu'emporté par son sujet, il ne soit pas resté dans son livre absolument fidèle à cette sage maxime. J'ai cherché en vain, par exemple, ce qu'il faut entendre par *masse*, par *énergie*, par *inertie ;* et cette lacune est d'autant plus grave que ces locutions sont souvent assimilées à des quantités, et qu'on nous parle de leur mesure.

La vérité, ce me semble, c'est que la science, à un stade quelconque, ne peut se passer d'hypothèses. Par une tendance assez naturelle de l'esprit humain, nous finissons par donner à ces créations une réalité objective, alors qu'elles n'existent que dans notre cerveau. La Chimie et la Physique actuelles, par exemple, ne peuvent tenir debout sans la conception de la molécule et de l'atome ; la théorie de la lumière, depuis Fresnel, exige qu'on admette l'existence de l'éther. Mais personne a-t-il jamais vu une molécule ou un atome ? Personne a-t-il pu constater quelque part la présence d'une quantité quelconque d'éther ? Et ne pouvons nous faire les mêmes objections aux physiciens de l'école moderne qui jouent avec une telle habileté des ions et des électrons?

Ils pourraient nous répondre qu'en Mécanique, notre *point matériel* n'a guère plus de réalité ; et ils auraient grandement raison ; car il ne s'agit plus ici d'une hypothèse utile pour expliquer des phénomènes, mais d'un mot contenant une contradiction dans les termes, puisqu'il exprime l'idée d'une quantité de matière aussi grande que nous voulons, et qui n'occuperait aucune place.

Pour revenir à l'éther, qui joue dans ces questions un rôle si considérable, quel besoin avons nous, après avoir admis cette hypothèse, de le doter d'une impondérabilité absolue ? Si la masse totale de l'éther supposé répandu dans tout notre univers stellaire connaissable était de 1 milligramme, par exemple, ou même d'une tonne, il est bien probable que nous n'arriverions jamais par nos moyens terrestres à la mettre en évidence. Et cependant, n'existerait-elle pas quand même? Je n'aperçois donc aucun motif *a priori* pour créer cette opposition métaphysique, anti physique, pourrais-je dire, entre le pondérable et l'impondérable, entre la matière et l'éther.

J'admire le titre qu'a choisi M. Gustave le Bon, l'évolution de la matière; je trouve heureuse son expression, *dissociation* de la matière, ou dissociation de l'atome; mais je réprouve la forme et surtout l'idée dans ce vocable un peu barbare « dématérialisation de la matière », auquel il revient souvent avec une sorte de prédilection. C'est à mon sens, diminuer et dénaturer de ses propres mains l'édifice qu'il vient de construire avec tant de talent et de conscience.

Quelle est, en effet, l'affirmation maîtresse qui semble se dégager de toute l'œuvre avec une lumineuse clarté ; c'est que l'atome, jusqu'ici considéré comme un élément simple, indestructible, inerte, est au contraire un système fort compliqué, un véritable univers, capable de se dissocier sous certaines influences, et renfermant une quantité d'énergie considérable dont il est le réservoir. Or, après cette dissociation, après cette libération d'énergie, on vient lui refuser la qualité de matière. Pourquoi ? Parce que, semble dire l'auteur, la propriété essentielle de la matière, c'est d'être inerte ; et il a consacré une grande partie de sa vie et ses meilleurs efforts à démontrer victorieusement qu'elle ne l'est pas.

C'est ici qu'il nous faut revenir aux principes fondamentaux de la Mécanique, et rechercher les modifications que les découvertes physiques modernes doivent nécessairement y introduire. J'ai, pour mon compte, depuis bien longtemps, soutenu que le prétendu *principe* de l'inertie devrait être remplacé par l'*hypothèse* de l'inertie. C'est la base même de toute la science du mouvement. En vertu de cette hypothèse, on admet que si un corps n'est pas en repos, ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, c'est qu'une cause *extérieure* est venue agir sur lui ; à cette cause, on donne le nom de force ; par la comparaison avec les poids, nous arrivons à mesurer les forces ; nous constatons pour un même corps, la proportionnalité des forces aux accélérations, et le rapport constant de la force à l'accélération nous donne, pour un corps quelconque, la notion de masse et nous permet d'effectuer la mesure de cette masse.

Partant de là, on arrive à l'idendité du travail et de la force vive, et comme conséquence à la conception de l'énergie mécanique, demi produit de la masse par le carré de la vitesse. C'est la base fondamentale de toute la théorie de l'énergie ; nous ne pouvons la concevoir, cette énergie, malgré ses apparences diverses, que comme une transformation plus ou moins étudiée, plus ou moins mystérieuse, de la force vive ou énergie mécanique.

Dès lors, pourquoi vouloir maintenir à tout prix dans la science cette notion de force, sinon comme un mot commode à employer dans le langage et le calcul ? La véritable conséquence à tirer des conquêtes de la Physique moderne, c'est, il me semble, la renonciation franche à l'idée d'inertie en tant que principe, et l'adoption de celle de masse comme notion première, au même titre que l'espace ou le temps. L'hypothèse de l'inertie pourra ainsi être présentée comme concordant suffisamment avec tous les besoins pour qu'il n'y ait aucun inconvénient à l'admettre dans les applications ordinaires, mais elle cessera d'apparaître comme un dogme immuable et irréductible. Par contre, la masse restera identique à elle-même et indestructible, au milieu des transformations sans nombre qu'il nous sera donné d'observer. Tant que ces transformations ne toucheront pas à la dissociation de la matière, tant qu'il n'y aura pas libération de l'énergie intra-atomique, en tout ou en partie, les choses se passeront comme si l'inertie supposée était une véritable loi de la nature, et les principes actuels de la Mécanique pourront s'appliquer tels quels. Au contraire, dès que la dissociation interviendra, nous devrons nous attacher exclusivement au principe de la conservation de l'énergie, qui peut rester solide sur sa base et résister longtemps — nous n'osons pas dire toujours — à tant d'assauts.

Une petite quantité de matière, un gramme par exemple, renferme, d'après la théorie de M. Gustave Le Bon, une somme d'énergie qui, si elle était libérée représenterait bien des milliards de kilogrammètres. Que devient-elle, avec cette conception d'un éther immatériel dans lequel la matière vient se perdre. C'est une sorte de *nirvâna* final (suivant le mot de l'auteur), un néant infini et immobile recevant tout et ne rendant rien.

Au lieu de cet éternel cimetière des atomes, j'ai plutôt une tendance à voir dans l'éther le perpétuel laboratoire de la nature. J'irais presque jusqu'à dire qu'il est à l'atome ce qu'en Biologie le protoplasma est à la cellule. Tout y va et tout en vient. C'est une forme de la matière, forme originelle et finale à la fois; dans l'indéfinie circulation des mondes, rien n'est en repos, rien ne nous apparaît immuable, tout se transforme, tout évolue; tout, sauf la masse, qui demeure, et l'énergie qui ne s'éteint pas. Et lorsque je considère la dissociation d'une portion de matière si faible qu'on le voudra, lorsque j'imagine ces particules, des centaines de milliards de fois plus petites que l'atome, se précipitant au sein de l'éther avec une vitesse comparable à celle de la lumière, il ne me répugnerait nullement de penser que l'une d'entre elles, dans les profondeurs inouïes de l'espace, à des distances devant lesquelles celle de Sirius à la Terre ne compte pas, ira peut-être contribuer à la formation tourbillonnaire de quelque nébuleuse, germe d'un monde nouveau, à la construction d'un atome qui fera partie intégrante de ce monde jusqu'à sa dissociation future.

Je ne serais pas étonné de me trouver moins qu'il ne paraît en contradiction avec M. Gustave Le Bon, lorsque je rencontre dans son livre des passages comme celui-ci:

« Nous ne pouvons pas dire comment s'est constitué « l'atome et pourquoi il finit par lentement s'évanouir; « mais au moins nous savons qu'une évolution analogue se « poursuit sans trêve, puisque nous pouvons observer les « mondes à toutes les phases d'évolution, depuis la nébuleuse « jusqu'à l'astre refroidi, en passant par les soleils encore in« candescents comme le nôtre. »

Toutes ces idées, pourra-t-on dire, sont du domaine de l'imagination pure. Je répondrai que l'imagination a sa place nécessairement marquée dans la formation des hypothèses, en cosmogonie notamment, et en général dans tous les domaines, si nombreux et si étendus, hélas, où notre ignorance est encore profonde. Tout ce qu'on doit exiger, c'est que les produits de l'imagination ne viennent pas contredire les faits connus et bien observés, mais soient au contraire consacrés à les coordonner entre eux dans la mesure où il nous est possible de le faire, et à faciliter ainsi la découverte de lois nouvelles.

Je dois ajouter, pour m'excuser, s'il était nécessaire, des critiques auxquelles j'ai cru pouvoir me livrer, que jamais sans doute les réflexions qui précèdent ne se seraient présentées à mon esprit sans la lecture des travaux de M. Gustave Le Bon, et surtout de son remarquable ouvrage « l'Evolution de la matière. » Je regrette que la nature même de cette Revue, ainsi que je l'ai dit plus haut, ne m'ait pas permis une analyse plus complète, en ce qui touche d'autres domaines, comme celui de la Chimie et de la Biologie, par exemple. Malgré mon incompétence, j'ai éprouvé à la lecture de ces passages un plaisir qui sera ressenti également par tous les amis de la science et de la sincérité scientifique.

Pour me résumer, il m'apparaît, en ce qui concerne la Mécanique rationnelle, que ses principes et par suite son enseignement, ne doivent pas recevoir jusqu'ici d'atteinte sérieuse, mais que certaines précautions s'imposent. Elles consisteront principalement: à présenter le principe de l'inertie comme une hypothèse, admissible jusqu'aux phénomènes de dissociation exclusivement; à postuler l'idée de masse, en n'introduisant celle de force qu'à titre de conséquence ; à continuer à s'appuyer sur la conservation de l'énergie ; à voir dans l'éther hypothétique une forme spéciale de la matière, le grand laboratoire des mondes, d'où tout vient, où tout retourne ; sans que nous puissions d'ailleurs avoir sur la nature de cet éther, sans doute d'ici bien longtemps, aucune donnée réelle et précise.

C. A. Laisant.

SUR LE CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE D'UN CORPS

DÉFINITION, COMPOSITION ET DÉTERMINATION
PAR POINTS, AU MOYEN DES PROCÉDÉS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,
DU CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE D'UN CORPS. —
SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE. — TECHNOLOGIE.

1. Introduction. — La définition, la composition et la détermination du contour apparent de la surface d'un corps semblent avoir été données jusqu'ici d'une manière bien imparfaite. Trop souvent encore, on lit par exemple, que le contour apparent de la surface d'un corps est la courbe de contact d'un cône, circonscrit à la surface et ayant l'œil pour sommet, alors qu'on soupçonne immédiatement toutes les restrictions et additions que cette définition exige dans les applications, puisque la courbe de contact à laquelle on a même donné le nom de *Courbe de perspective*, n'appartient pas toujours, ni en tout, ni en partie, à ce qu'il convient d'appeler le *Contour apparent*. (Voir I. M. 1898, p. 6).

Nous avons en vue de donner, dans cette Note, pour le contour apparent et la séparation d'ombre et de lumière sur la surface d'un corps, une définition mathématique complète, la composition précise, une technologie et enfin, une règle générale et méthodique de recherche par points au moyen des procédés de la Géométrie descriptive.

2. Colliers. — Si l'on appelle *tangente à une surface*, une droite tangente à une courbe de la surface, on sait que le lieu *a* des points de contact des tangentes menées par un point O à une surface est le même que le lieu des points de contact des plans tangents menés par le point O à la surface, ou que la courbe de contact du cône ayant O pour sommet et circonscrit à la surface. La ligne *a* peut donc être désignée sous trois appellations différentes, sans compter l'appellation abusive de *contour apparent* ou de *courbe de perspective,* et comme ces trois dénominations sont également désagréables, par leur longueur, dans les raisonnements géométriques, nous désignerons le lieu a sous le nom de *collier pour le point O.* (Voir Int. d. Math. 1898, p. 6).

De même, pour une surface donnée, nous appellerons *collier pour une droite* d, le lieu des points de contact des droites tangentes à la surface et parallèles à d, ou encore le lieu des points de contact des plans tangents à la surface et parallèles à d, ou enfin la courbe de contact du cylindre parallèle à d et circonscrit à la surface.

En particulier, on pourra appeler *collier horizontal,* celui qui correspond à une verticale, et *collier vertical,* celui qui correspond à une droite de bout.

Le collier d'une surface α est considéré fréquemment en projection sur une surface π, plane ou non, à l'intersection de cette surface π avec le cône ou le cylindre circonscrit à la surface α. Cette projection prendra naturellement le nom de *collier projeté sur* π, ou simplement de *collier projeté,* s'il n'en résulte aucune ambiguïté au sujet de la surface de projection pour laquelle on parle. Le collier horizontal, projeté sur le plan horizontal de projection pourra être appelé simplement *collier horizontal projeté ;* le collier vertical, projeté sur le plan vertical de projection pourra être appelé simplement *collier vertical projeté.*

Les colliers et les colliers projetés jouissent d'importantes propriétés[1] et se déterminent en Géométrie descriptive d'après des méthodes qu'il est inutile de rappeler dans cette Note, pour le but que nous avons en vue.

3. Définition du Contour apparent. — Dans le langage vulgaire, on appelle *contour apparent de la surface* α *d'un*

[1] On sait, par exemple, que la tangente en un point du collier d'une surface α et la génératrice de la développable circonscrite correspondante sont deux diamètres conjugués dans l'indicatrice de la surface α, que le collier peut présenter des points remarquables où ces deux diamètres conjugués sont confondus et que la projection, sur une surface π, d'un point remarquable est un point de rebroussement de première espèce du collier projeté, si le point remarquable est un *point ordinaire de seconde espèce.* (Voir Mathesis, 1898, t. VIII (2), pp. 177 à 185).

corps, pour une position déterminée de l'œil O, la ligne qui sépare sur la surface α, la partie vue de la partie cachée de cette surface.

Pour donner à cette définition vulgaire un sens mathématique, nous supposerons:

1° Que l'œil O est réduit à un point géométrique et peut donc être considéré comme un pôle dans les projections polaires ;

2° Que les projetantes polaires issues de l'œil sont considérées comme des rayons visuels ;

3° Que si deux points A et B appartiennent à un même rayon visuel et sont situés sur ce rayon d'un même côté de l'œil, le point A est dit *au-dessus* ou *au-dessous* de B suivant que l'on a

$$OA < OB \text{ ou } OA > OB;$$

4° Qu'un point A est dit *vu*, quand sur le rayon visuel allant de A à l'œil O et se terminant en O, il n'y a dans le corps considéré aucun point placé au-dessus de A ; qu'un point A est dit *caché* dans le cas contraire.

Si l'œil, assimilé à un point géométrique, s'éloigne au-delà de toute limite sur une semi-droite d, donc dans un sens bien connu, les trois dernières conventions se transforment aisément et nous saurons dans ce cas:

1° Que l'œil est réduit à un point géométrique situé à l'infini sur une semi-droite d;

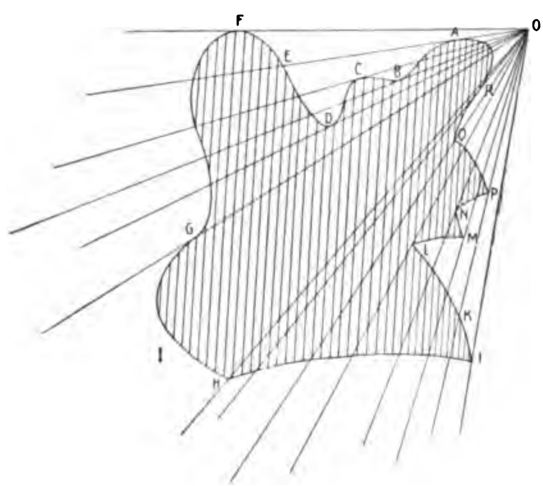
2° Que les rayons visuels convergents ont pour limites des rayons visuels parallèles à d et de même sens ;

3° Que si deux points A et B appartiennent à un même rayon visuel, le point A est au-dessus ou au-dessous de B, suivant qu'en partant de B, dans le sens de la semi-droite d, on passe par A ou non ;

4° Qu'un point A est *vu*, quand sur le rayon visuel passant par A, il n'y a dans le corps considéré, aucun point placé au-dessus de A ; qu'un point A est *caché* dans le cas contraire.

D'après ce qui précède, nous pouvons dire, comme dans le langage vulgaire, mais en employant des termes ayant un sens mathématique, que *le Contour apparent de la surface d'un corps, pour un œil placé à distance finie ou infinie,* c'est-à-dire pour des rayons visuels convergents ou parallèles, *est la ligne qui sépare sur la surface, la partie vue de cette surface de la partie cachée.*

4. **Composition du contour apparent.** — Proposons-nous maintenant de rechercher la composition du contour apparent. Coupons la surface donnée α au moyen d'un plan passant par l'œil, ou parallèle aux rayons visuels dans le cas d'un œil situé à l'infini. Soit l la section (voir la figure) et indiquons par des hachures la position du corps par rapport à la surface.



I. — Menons à la section l tous les rayons visuels tangents. En faisant varier le plan sécant, de manière à engendrer au moyen de la ligne l la surface tout entière, le lieu des points de contact obtenus dans chaque plan sécant est le collier de α pour l'œil O (n° 2) ou pour une droite d parallèle aux rayons visuels.

Dans chaque section, aux environs d'un point de contact, la tangente ne peut être qu'extérieure au corps comme en

A, C, F ; ou intérieure au corps, comme en B, D ; ou intérieure au corps d'un côté du point de contact et extérieure au corps de l'autre côté de ce point, comme en G ou R.

On appelle *point réel*[1] du collier, tout point à tangente extérieure, tels sont les points A, C, F ; un pareil point peut être *vu* ou *caché*.

Un point réel est *vu*, si la tangente en ce point ne perce la surface d'aucun corps au-dessus du point, tels sont les points A et F. Les points *réels vus* séparent chacun sur la section plane, une partie vue d'une partie cachée et appartiennent donc au *contour apparent*.

Un point réel est *caché*, si la tangente en ce point perce la surface du corps au-dessus du point ; tel est le point C. Tout point *réel caché* appartient à une partie entièrement cachée de la section et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

On appelle *point virtuel*[1] du collier, tout point à tangente intérieure; tels sont les points B, D ; un pareil point est nécessairement caché et sur la tangente, au-dessus du point de contact, il existe toujours au moins un point appartenant à la surface du corps, *supposé limité de tous côtés*. Tout point virtuel, appartenant à une partie entièrement cachée de la section plane, ne saurait faire partie du contour apparent, à moins d'être une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous appellerons *point intermédiaire*[1] du collier, tout point tel que G ou R, pour lequel la tangente est extérieure au corps, d'un côté du point, et intérieure au corps de l'autre côté du point. Un pareil point peut être vu comme le point R, ou caché comme le point G, mais il appartiendra toujours à une partie entièrement vue ou entièrement cachée de la section plane et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous voyons donc que le contour apparent de la surface

---

[1] J. De La Gournerie est, pensons-nous, le premier géomètre qui ait employé les dénominations de *point réel* et de *point virtuel*, en vue d'arriver aux points remarquables des colliers (Traité de Perspective linéaire. Paris, 1859). Nous avons introduit les *points intermédiaires*.

d'un corps comprend les points réels vus du collier de la surface. Nous désignerons le lieu de ces points sous le nom de *Contour apparent tangentiel.*

II. — Si la surface α présente des arêtes, droites ou courbes, nous pouvons considérer aussi, sur la section l, les rayons visuels passant par les intersections des arêtes avec le plan sécant. Le lieu de ces points est évidemment constitué par les arêtes de la surface, si l'on fait varier le plan sécant de manière à engendrer la surface tout entière au moyen de la ligne l.

Dans chaque section, aux environs du point situé sur une arête, le rayon visuel ne peut être qu'extérieur au corps comme en P, M, I; ou intérieur au corps comme en L, N, ou extérieur au corps d'un côté du point et intérieur au corps de l'autre côté de ce point, comme en H ou Q.

Nous appellerons *point réel d'une arête,* tout point à rayon visuel extérieur, tels sont les points P, M, I; un pareil point peut être *vu* ou *caché.*

Un point réel est *vu,* si le rayon visuel passant par ce point ne perce la surface d'aucun corps au-dessus du point, tels sont les points P et I. Les points *réels vus* séparent chacun sur la section plane, une partie vue d'une partie cachée et appartiennent donc au *Contour apparent.*

Un point réel est *caché,* si le rayon visuel passant par ce point perce la surface du corps au-dessus du point; tel est le point M. Tout point réel caché appartient à une partie entièrement cachée de la section et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous appellerons *point virtuel* d'une arête, tout point à rayon visuel intérieur au corps; tels sont les points L, N; un pareil point est nécessairement caché et sur le rayon visuel, au-dessus du point considéré, il existe toujours au moins un point appartenant à la surface du corps supposé *limité de tous côtés.* Tout point virtuel, appartenant à une partie entièrement cachée de la section plane, ne saurait faire partie du contour apparent, à moins d'être une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous appellerons *point intermédiaire* d'une arête, tout point tel que H ou Q, pour lequel le rayon visuel est extérieur au corps d'un côté du point considéré et intérieur au corps de l'autre côté du point. Un pareil point peut être vu comme le point Q, ou caché comme le point H, mais il appartient toujours à une partie entièrement vue ou entièrement cachée de la section plane et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous voyons donc que le contour apparent de la surface d'un corps comprend les points réels vus des arêtes de la surface. Nous désignerons le lieu de ces points sous le nom de *Contour apparent rasant.*

Nous appellerons *Contour apparent propre,* l'ensemble du contour apparent tangentiel et du contour apparent rasant.

III et IV. — Il existe sur la surface, un troisième et un quatrième lieu de points faisant partie du contour apparent. Car si nous considérons le rayon visuel passant par un point réel vu tel que A ou P, ce rayon visuel peut percer la surface en un point E ou K, situé *immédiatement au-dessous* de A ou P. Or, le point E ou K sépare sur la section plane, une partie vue d'une partie cachée et appartient donc au contour apparent.

Nous désignerons tout point tel que E ou K, sous le nom de *point consécutif* du point réel vu A ou P.

Nous voyons donc que *le contour apparent de la surface d'un corps comprend le lieu des points consécutifs des points du contour apparent tangentiel et du contour apparent rasant.* Nous désignerons le lieu de ces points sous le nom de *Contour apparent consécutif* et il peut comprendre deux parties : l'une provenant du contour apparent tangentiel et que nous appellerons *Contour apparent consécutif tangentiel ;* l'autre provenant du contour apparent rasant et que nous appellerons *Contour apparent consécutif rasant.*

V. — Il n'est pas nécessaire d'examiner les rayons visuels autres que ceux qui sont tangents à la surface ou qui s'appuient sur des arêtes de la surface, car un point situé sur la surface et correspondant à tout autre rayon visuel, appartient nécessairement à une portion entièrement vue ou entièrement cachée autour du point considéré. Le contour apparent d'un corps ne comprend donc pas d'autres points que ceux que nous avons indiqués aux §§ I, II, III et IV.

VI. — En résumé, nous pouvons indiquer dans le tableau synthétique suivant, la composition du contour apparent et la technologie que nous proposons pour ses différentes parties :

Contour apparent	Contour apparent propre	Contour apparent tangentiel.
		Contour apparent rasant.
	Contour apparent consécutif	Contour apparent consécutif tangentiel.
		Contour apparent consécutif rasant.

5. Criterium permettant de reconnaître dans une épure les points du contour apparent propre. — Le théorème suivant donne un moyen géométrique infaillible pour reconnaître dans une épure, les points réels vus du collier ou des arêtes de la surface d'un corps.

Théorème. — Pour qu'un point A *situé sur une arête ou sur le collier de la surface d'un corps pour des rayons visuels convergents ou parallèles, appartienne au contour apparent propre de la surface, il faut et il suffit que le rayon visuel correspondant ne rencontre pas la surface du corps au-dessus du point et rencontre cette surface, au-dessous du point, en un nombre de points pair ou nul, les points de contact ou d'appui, réels ou virtuels ne comptant pas, les points intermédiaires comptant pour un point. On suppose le corps limité de tous côtés.*

En effet, si le point A appartient à la partie tangentielle ou rasante, il est réel et vu. Le point étant vu, le rayon visuel correspondant ne rencontre pas le corps au-dessus du point. Le point considéré étant réel, le rayon visuel correspondant est extérieur au corps aux environs du point et s'il pénètre dans celui-ci, au-dessous du point, en un premier point d'intersection, il devra en sortir en un second point et ainsi de suite; de sorte qu'au-dessous du point considéré, il y aura nécessairement un nombre nul ou pair de points d'intersection, à condition de négliger tout point de contact ou d'appui, réel ou virtuel, et de compter tout point intermédiaire pour un point.

On voit que les conditions énumérées sont nécessaires; elles sont du reste suffisantes, car on en conclut aisément, que tout point qui y est soumis, est réel et vu.

6. Méthode générale pour la détermination par points du contour apparent. — Nous pouvons enfin donner pour la détermination complète du contour apparent de la surface d'un corps, dans une épure, le procédé général suivant dont la justification se trouve dans ce qui précède. Les rayons visuels convergent en un point O ou sont parallèles à une droite *d*.

1° On cherchera le collier de la surface pour le point O ou la droite *d*;

2° On déterminera l'intersection de la surface du corps, préalablement limité de tous côtés s'il y a lieu, avec le cône ou le cylindre visuel circonscrit à la surface;

3° On distinguera sur le collier cherché au 1°, les points réels vus qu'on reconnaîtra au moyen de l'intersection déterminée au 2°, grâce au théorème du n° **5**. On aura, de cette manière, éliminé les points réels cachés, les points virtuels et les points intermédiaires, pour obtenir le *contour apparent tangentiel*;

4° On prendra, sur l'intersection déterminée au 2°, les points consécutifs des points trouvés au 3° et l'on aura ainsi le *contour apparent consécutif tangentiel;*

5° On considérera les arêtes de la surface du corps et le cône ou cylindre visuel ayant ces arêtes pour directrice;

6° On déterminera l'intersection de la surface du corps avec le cône ou cylindre visuel considéré au 5°;

7° On distinguera, sur les arêtes du corps, les points réels vus qu'on reconnaîtra, au moyen de l'intersection déterminée au 6°, grâce au théorème du numéro **5**. On aura ainsi éliminé, sur les arêtes, les points réels cachés, les points virtuels et les points intermédiaires, pour obtenir le *contour apparent rasant ;*

8° On prendra, sur l'intersection déterminée au 6°, les points consécutifs des points réels vus trouvés au 7°, et l'on aura ainsi le *contour apparent consécutif rasant,* quatrième et dernière partie à trouver pour le contour apparent.

7. Remarque. — La méthode donnée au numéro précédent, pour la détermination d'un contour apparent, est générale et complète ; elle conduit infailliblement au résultat cherché, mais elle peut donner lieu, surtout chez les commençants, à des tracés très compliqués. Il faudra faire les constructions sur l'épure, en tâchant d'être sobre dans le tracé des lignes et en examinant attentivement si certaines constructions ne peuvent être évitées [1].

Il en est ainsi du reste pour l'emploi de toutes les méthodes générales dans toutes les branches des mathématiques, et pour n'en citer qu'un exemple, nous rappellerons de combien de remarques utiles et pratiques on fait suivre, en Algèbre, la méthode générale pour la résolution de n équations du premier degré à n inconnues.

8. Technologie complémentaire. — Pour compléter la technologie relative au contour apparent, il y aurait lieu de définir les expressions ; *Contour apparent horizontal, contour apparent vertical, contour apparent projeté sur une surface, contour apparent horizontal projeté, contour apparent vertical projeté,* mais ces expressions se comprendront comme les termes analogues relatifs aux colliers (n° **2**) avec lesquels il ne peut être permis de les confondre.

9. Séparation d'ombre et de lumière. — Faisons remarquer enfin que si au lieu de rayons visuels, on considère des rayons lumineux issus d'un point ou parallèles à une droite, on trouve, au lieu du contour apparent, la *séparation d'ombre et de lumière* appelée aussi *ombre sur le corps* ou simple-

---

[1] Voir *F. Chomé.* Cours de Géométrie descriptive, Ire Partie, Livre I n° 93, Livre II n° 433.

ment *ombre*. Cette ligne comprend donc *l'ombre propre* et l'ombre consécutive qu'on appelle *ombre portée*. L'ombre propre comprend du reste l'*ombre tangentielle* et l'*ombre rasante*, l'ombre portée comprend l'*ombre portée tangentielle* et l'*ombre portée rasante*.

La règle générale pour rechercher l'ombre d'un corps peut être déduite immédiatement de celle que nous avons donnée au numéro **6** pour la détermination du contour apparent.

Octobre 1905. F. CHOMÉ (Bruxelles).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — III

Questions 2 et 3.

2. — *Quelles sont les branches de la science mathématique vers lesquelles vous vous êtes senti plus particulièrement attiré ?*

3. — *Etes-vous plutôt attiré par l'intérêt de la science mathématique en elle-même, ou par les applications de cette science aux phénomèmes de la nature ?*

Quatre-vingt-deux mathématiciens ont répondu à ces deux questions. Comme on devait s'y attendre, leurs réponses présentent une grande variété. Tandis que les uns ont porté leur attention principalement sur la méthode et le côté logique des mathématiques, il en est un grand nombre qui se

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905.

sont sentis attirés plus particulièrement vers l'une ou même plusieurs des branches mathématiques. On constate en effet fréquemment qu'un même savant s'intéresse successivement ou simultanément à plusieurs domaines par le fait même des concepts ou des principes fondamentaux qui leur sont communs.

Cette diversité dans les réponses ne permet guère de les grouper en une classification à la fois nette et rigoureuse, tout au moins pour ce qui est de la *question 2*. Un examen approfondi des 82 réponses nous a conduit à la répartition suivante:

Mathématiques pures d'une manière générale; méthode et logique des mathématiques	10
Algèbre et théorie des nombres (10); analyse (10); algèbre et analyse (4)	24
Géométrie.	24
Géométrie et algèbre (7); géométrie et analyse, géométrie infinitésimale (8).	15
Mathématiques appliquées	9

Nous reproduisons ci-dessous les réponses[1] les plus caractéristiques de chacun de ces groupes :

Rép. XLVI (Espagne). — Ce sont les branches théoriques qui m'ont attiré plus particulièrement. Mon attention s'est portée principalement sur la méthode mathématique et sa logique rigoureuse. Au commencement la Géométrie m'attirait par sa clarté; mais à présent je n'ai pas de préférence: je vois le même objet sous deux points de vue, celui de la Géométrie et celui de l'Analyse, qui viennent se fondre dans l'intelligence.

J'ai été attiré par la science elle-même comme développement *a priori;* mais après quelques années, j'ai aimé voir contrôlées les lois théoriques dans la réalité extérieure. Un grand intérêt présentaient également pour moi la métaphysique (principalement la Logique) ainsi que les sciences naturelles, la physique et la chimie.

Z. G. DE GALDEANO.

Rép. IX (France). — Les méthodes m'attirent en raison de leur puissance et de leur naturel; j'ai peu de goût pour l'artifice et pourtant je suis séduit par l'élégance des démonstrations artificielles et leur ingéniosité. La mécanique est la branche que je préfère à cause de ses applications aux phénomènes naturels.

---

[1] Suivant le désir exprimé par un grand nombre de nos lecteurs, nous donnerons l'indication du nom de l'auteur de la réponse dans le cas où celui-ci nous y a autorisé.

Autrefois attiré par la science mathématique en elle-même; je suis de plus en plus attiré par l'étude des phénomènes naturels où l'on peut apporter la précision mathématique. (...)

Rép. XXIII (France). — J'ai travaillé beaucoup en amateur sur des sujets variés. Cependant les questions de méthodes et les applications à la mécanique m'ont plus spécialement attiré. L'arithmétique a moins souvent excité ma curiosité.

Je me suis appliqué surtout à des questions de mathématique pure. La physique mathématique m'eut intéressé si les circonstances m'avaient permis de travailler dans un laboratoire. Je ne la comprends pas sans le contrôle de l'expérience. C.-A. Laisant.

Rép. XLIII (France). — Au début (en Elémentaires et Spéciales) l'Algèbre, qui me donnait le plus de satisfaction au point de vue de la rigueur d'exposition, et la Mécanique rationnelle. Plus tard, j'ai lu le traité des Substitutions de M. Jordan parce que je désirais beaucoup savoir ce qu'il avait fait, et aussi par suite de diverses circonstances heureuses qui m'ont donné le temps et les moyens de m'en occuper. Edm. Maillet.

Rép. XXI (Autriche). — Quoique dans la pratique je m'occupe principalement de la Physique théorique je me sens attiré au plus haut point vers les Mathématiques pures, et je compte les heures, où j'étudiais la théorie des nombres, parmi les plus belles de ma vie. Ludw. Boltzmann.

Rép. LV (Etats-Unis). — L'Algèbre, la Théorie des Nombres, la Géométrie, toutes les branches de la Théorie des groupes.

Le principal intérêt dans les beautés de la théorie.

Léonard-Eug. Dickson.

Rép. XXII (Etats-Unis). — J'ai une préférence spéciale pour la théorie des nombres, et dans d'autres branches pour le côté arithmétique du sujet.

Je préfère les Mathématiques pures aux Mathématiques appliquées. Edw. B. Escott.

Rép. LXXIX et LXXX (Norvège). — Théorie des équations algébriques. La science mathématique pure. A. S. et Alf. Guldberg.

Rép. LXXXIV (Suisse). — La théorie des nombres puis l'Analyse.

Par la science elle-même. Gabriel Oltramare.

Rép. XXX (Suède). — D'abord la théorie des nombres, ensuite la théorie des fonctions analytiques.

La science mathématique en elle-même, ainsi que ses applications. Carl Störmer.

Rép. XXXV (France). — Vers l'analyse.

Par l'intérêt de la science mathématique elle-même, mais *parce qu'elle* s'applique aux sciences de la nature. (...)

Rép. LVIII (Italie). — Je préfère l'étude de l'Analyse à celle de la Géométrie pure.

J'ai été attiré par l'intérêt de la science en elle-même, par sa beauté plutôt que par ses applications. Ern. Pascal.

Rép. VII (Allemagne). — Les théories analytiques ont toujours eu plus d'attrait pour moi que les géométriques, pour lesquelles il me manque une certaine imagination de l'espace. Peu à peu mon goût se développa pour les recherches historico-mathématiques, grâce sans doute à l'influence des cours du Prof. Dr Moritz Stern, à Göttingen, dans lesquels de nombreuses digressions historiques captivèrent les auditeurs.

Les Mathématiques pures m'attirent exclusivement.

Moritz Cantor.

Rép. XIX (Allemagne). — Mon intérêt s'étend en première ligne sur l'Analyse et sur son application à la Géométrie ; par contre, je m'intéresse peu à la Géométrie synthétique, la Mécanique et l'application des mathématiques aux sciences de la nature. (...)

Rép. XLIX (France). – L'application de l'Algèbre à la Géométrie m'a toujours séduit par son caractère élégant et où l'imagination a beaucoup de part. (Paul Barbarin).

Rép. XVIII (Italie). — La Géométrie infinitésimale en premier lieu, puis l'Analyse, la théorie des groupes etc.

Par la science mathématique elle même. (...)

Rép. LXXIV (Italie). — La géométrie étudiée par le moyen de l'Analyse algébrique et infinitésimale.

Je suis attiré particulièrement par l'intérêt de la science mathémathique en elle-même. (Geminiano Pirondini).

Rép. XXXII (Autriche). — J'ai vécu d'abord pour la Géométrie, mais je me suis tourné bientôt vers les fonctions analytiques et la philosophie, pour n'y travailler que peu d'années. Je me suis arrêté aux intégrales définies et à l'arithmétique, branches que mes nombreux vieux manuscrits ne me permettent pas d'abandonner, bien que j'aimerais me consacrer encore à d'autres chapitres des Mathématiques pures. Au programme de mes études manquait la Physique ; je n'étais pas initié aux mathématiques appliquées ni aux travaux de laboratoire. (Mathias Lerch).

Rép. I (France). — J'ai été séduit par la Géométrie *au dernier point* dès ma première initiation aux méthodes *modernes* (aux conférences préparatoires au concours général de la classe élémentaire, prof. M. Fabre), et à 17 ans j'ai dévoré littéralement la « Géométrie Supérieure » de Chasles qui venait de paraître (1842). Mais bientôt je me suis aperçu que la Géométrie n'est qu'un mythe comme science *pure*, qu'elle n'est que *l'application de l'Analyse à l'étude des faits géométriques*, et je ne me suis plus occupé que d'Analyse. Celle-ci m'a paru pitoyable par son décousu, ses procédés, son manque absolu de rigueur, et mes principaux efforts ont tendu à la rendre naturelle, claire et rigoureuse autant que la moindre question d'Algèbre élémentaire. Je crois que ces efforts n'ont pas été fournis en pure perte.

Les Mathématiques me séduisent par *elles-mêmes* et presque indépendamment de leurs applications. Je ne pense pas que jamais leurs branches supérieures, si luxuriantes aujourd'hui, rendront aux autres sciences, aux arts industriels, des services comparables même de loin, à ceux que ces dernières ont tiré, tireront toujours de leurs parties *inférieures et moyennes*. Mais je vois dans la culture des Mathématiques poussée *au delà du nécessaire* pour les applications, l'élément dominant, même essentiel, de toute éducation scientifique *solide*, dans quelque direction que ce soit. Je ne prise pas moins les sciences physiques naturelles etc. pour leur beauté propre, et je les estime autrement utiles que les théories mathématiques d'ordre tout a fait supérieur. Si je pouvais recommencer ma vie, je pousserais l'étude des Mathématiques, et cela avec grand soin, jusqu'à un point supérieur au niveau de la Licence, peu inférieur à celui du Doctorat, puis je considérerais comme chose sage de surmonter mon goût personnel, pour les abandonner et m'adonner exclusivement aux sciences physiques et naturelles. Certes il faut que les mathématiques supérieures fassent sans cesse de nouveaux progrès en surface et en hauteur, mais il importe que peu de mains y travaillent à cause de la quasi-nullité des résultats pratiques. A mes yeux les $^3/_4$ de ce qu'on publie sur les Mathématiques n'a pas plus de valeur réelle que la solution d'un cas de casse-tête chinois, indépendamment de la grandeur des difficultés vaincues et du talent de ceux qui en sont venus à bout. (CH. MÉRAY.)

Rép. XXV (Hollande). — La Géométrie, surtout la Géométrie synthétique d'après Poncelet, Steiner, Cremona etc.; puis la Géométrie descriptive, et aussi la Géométrie analytique; quant à l'Analyse, elle me sert surtout comme instrument pour les recherches géométriques.

La science mathématique en elle-même. (...)

Rép. XXIX (Hollande). — La Géométrie en général. La théorie seulement m'attire; par contre les applications me sont assez indifférentes. (JAN DE VRIES.)

Rép. X (Irlande). — Vers la Géométrie (et la *logique* des autres sujets). — Par la science elle-même. (ROB. GENESE.)

Rép. XLII (Italie). — La Géométrie. — Par l'intérêt des sciences mathématiques abstraites. (F. AMODEO.)

Rép. LXXV (France). — La Géométrie. — Par la spéculation des idées pures et métaphysiques. (GASTON DE LONGCHAMPS.)

Rép. XXVI (France). — Mes goûts sur ce point ont été variables. Actuellement mes préférences sont pour la Géométrie, et en particulier la théorie des surfaces, et aussi les principes (Postulatum d'Euclide etc). Je trouve aussi un grand attrait dans la physique mathématique.

Je suis plutôt attiré par les applications à l'étude des choses naturelles; mais je comprends parmi les sciences naturelles la science de la forme, c'est-à-dire le Géométrie. (J.-A. RICHARD.)

Rép. XXXVIII (Allemagne). — La mécanique et principalement ses applications techniques et, d'autre part, les fondements des sciences mathématiques examinés aussi au point de vue de la théorie de la connaissance. (WERNICKE.)

Rép. XI (Russie). — Mécanique et Géométrie. — Par les applications géométriques. (N. DELAUNAY.)

Rép. III (Angleterre). — Les mathématiques appliquées, en particulier la thermodynamique. — Par les applications.

(G. H. BRYAN.)

Quant à la *question 3* on voit, d'après les réponses qui précèdent, qu'un bon nombre de mathématiciens n'envisagent guère que le côté purement abstrait de la science sans se préoccuper en aucune façon des applications. On constate toutefois avec plaisir qu'il y en a environ un tiers qui restent en contact avec les sciences appliquées en faisant une part égale entre les mathématiques pures et appliquées. Un pointage des réponses fournit les chiffres suivants :

La science mathématique en elle-même 54

La science mathématique et ses applications aux phénomènes de la nature 19

Les mathématiques appliquées 9

(A suivre).

CHRONIQUE

Prix Bolyai fondé par l'Académie hongroise des Sciences.

Nous avons annoncé, il y a quelques mois, le prix international fondé par l'Académie de Budapest, en l'honneur du célèbre géomètre hongrois Jean Bolyai. Ce prix, qui consiste en une médaille et en une somme de dix mille couronnes, doit être attribué tous les cinq ans à l'œuvre mathématique la plus remarquable produite pendant les cinq dernières années. Il vient d'être décerné pour la première fois, au mois de décembre dernier, à l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Bolyai. Après une discussion approfondie la commission a décidé, à l'unanimité, d'attribuer le prix au savant français M. Henri Poincaré; elle était composée de MM. König et G. Rados, professeurs à l'Ecole polytechnique de Budapest et de MM. F. Klein (Gœttingue) et Gaston Darboux (Paris).

Nos lecteurs applaudiront avec nous à l'hommage que l'Académie de Budapest vient de rendre à notre illustre collaborateur.

La Rédaction.

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés. — Dans la séance annuelle du 18 décembre 1905 M. G. Darboux, secrétaire perpétuel, a donné lecture des rapports sur les prix décernés par l'Académie en 1905. Voici, d'après les *Comptes rendus*, les prix concernant les sciences mathématiques.

Géométrie; prix Francœur. — Le prix est décerné à M. Stouff pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

Mécanique; prix Montyon. — Le prix est décerné à M. Mesnager, pour ses travaux théoriques et expérimentaux de l'élasticité et la résistance des matériaux.

Prix Fourneyron. — Le prix n'est pas décerné; la commission maintient le sujet du prix pour le concours de 1908.

Prix Poncelet. — Le prix est décerné M. Lallemand, pour l'ensemble de ses travaux sur la figure de la Terre, et des perfectionnements qu'il a apporté aux instruments relatifs aux nivellements et aux mesures géodésiques.

Astronomie; prix Pierre Guzmann. — Le prix n'est pas décerné. — Conformément aux conditions de la fondation, la commission décerne, sur les arrérages, un prix de 12,000 fr. à M. Perrotin, en son vivant Correspondant de l'Académie des Sciences, pour l'ensemble de ses travaux astronomiques.

Prix Lalande. — M.-W. H. Pickering, astronome à l'observatoire d'Harvard, auteur de nombreux travaux, notamment de la découverte de deux nouveaux satellites de Saturne.

Prix Valz. — M. Giacobini, de l'observatoire de Nice, pour sa découverte, depuis 1896, de neuf comètes, qui, sans lui, auraient pu passer inaperçues.

Prix G. de Pontécoulant. — M. J.-C. Kapteyn, directeur du laboratoire astronomique de Groningue, pour ses recherches de Mécanique céleste.

Prix Damoiseau. — Le prix est décerné à M. Fayet, de l'observatoire de Paris; un prix de 1000 fr. prélevé sur les fonds Guzman, est décerné à M. Fabry, de l'Observatoire de Marseille.

Histoire des Sciences; prix Binoux. — La commission décerne le prix à l'ensemble des travaux historiques de Paul Tannery.

Prix généraux : Prix Petit d'Ormoy (Sciences mathématiques). — M. Emile Borel, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

Prix Laplace. — Oeuvres de Laplace remises à M. L.-E. Fortier, sorti premier de l'Ecole polytechnique et entré, en qualitè d'élève ingénieur, à l'Ecole nationale des mines.

Prix Félix Rivot. — Partagé entre MM. L.-E. Fortier et P.-F. Rodhain, entrés les deux premiers en qualité d'élèves ingénieurs à l'Ecole des Mines, et MM. J. Frontard et M.-F. Lefranc, entrés les deux premiers, au même titre, à l'Ecole des Ponts et chaussées.

Prix proposés[1]. — *Prix Francœur* (1000 fr.) — Ce prix *annuel* sera décerné à l'auteur de découvertes ou de travaux utiles au progrès des sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Bordin (1907 ; 3000 fr.) — Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près).

Etudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces.

[1] Par une mesure générale, l'Académie a décidé que la clôture de tous les concours aura lieu le 31 décembre de l'année qui précède celle où le concours doit être jugé.

Prix Vaillant (1907 ; 4000 fr.) — Perfectionner en un point important le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire.

Grand prix des sciences mathématiques (1908; 3000 fr.). — Réaliser un progrès important dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré.

Prix Montyon (prix annuel; 700 fr.). — Invention ou en perfectionnement d'instruments utiles aux progrès de l'Agriculture, des Arts mécaniques ou des Sciences.

Prix Poncelet (2000 fr.). — Décerné alternativement à un Ouvrage sur les Mathématiques pures ou sur les Mathématiques appliquées. Le prix Poncelet sera décerné en 1907 à un Ouvrage sur les Mathématiques appliquées.

Prix Fourneyron (1908; 1000 fr.). — Etude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur.

Prix Vaillant (1909 ; 4000 fr.). — Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

Prix Pierre Guzman (100,000 fr.) — Décerné à celui qui aura trouvé le moyen de communiquer avec un astre autre que la planète Mars. — Les intérêts du capital non décerné s'accumulent et forment un prix quinquennal, qui serait décerné à un savant français, ou étranger, qui aurait fait faire un progrès important à l'Astronomie. Le prix quinquennal, représenté par les intérêts du capital, sera décerné, s'il y a lieu, en 1910.

Prix Lalande (prix annuel; 540 fr.). — Observation, mémoire ou travail le plus utile aux progrès de l'Astronomie.

Prix Valz (prix annuel; 460 fr.). — Observation astronomique la plus intéressante de l'année.

Prix G. de Pontécoulant (1907 ; 700 fr.). — Recherches de Mécanique céleste.

Prix Damoiseau (1998; 2000 fr.). — Théorie de la planète basée sur toutes les observations connues.

Prix Janssen. — Médaille d'or; progrès important à l'Astronomie physique.

Prix Binoux (1907 ; 2000 fr.). — Ce prix alternatif sera décerné, en 1907, à l'auteur de travaux sur l'*Histoire des Sciences.*

Prix Saintour (3000 fr.). — Ce prix *annuel* est décerné par l'Académie dans l'intérêt des Sciences.

Prix Petit d'Ormoy (1907, deux prix de 10,000 fr.). — L'Académie a décidé que, sur les fonds produits par le legs Petit d'Ormoy, elle décernera *tous les deux ans* un prix de *dix mille francs* pour les Sciences mathématiques pures ou appliquées, et un prix de *dix mille francs* pour les Sciences naturelles. Elle décernera les prix Petit d'Ormoy, s'il y a lieu, dans sa séance publique de 1907.

Prix Leconte (1907 ; 50,000 fr.). — Ce prix doit être donné, *en un seul prix, tous les trois ans, sans préférence de nationalité:* 1° Aux auteurs de découvertes nouvelles et capitales en Mathématiques, Physique, Chimie, Histoire naturelle, Sciences médicales ; 2° Aux auteurs d'applications nouvelles de ces sciences, applications qui devront donner des résultats de beaucoup supérieurs à ceux obtenus jusque-là.

Faculté des Sciences de Paris.

Thèses soutenues en 1905 en vue du Doctorat ès sciences mathématiques :

Zoretti (L): Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers.

Stoenesco (P): Sur la propagation et l'extinction des ondes planes dans un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie.

Pompeiu (D): Sur la continuité des fonctions de variables complexes.

Bernard de Montessus de Ballore (R): Sur les fractions continues algébriques.

Husson (A) : Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe.

Reveille (J): Etude synthétique et analytique du déplacement d'un système qui reste semblable à lui-même.

Monteil (C): Contribution à l'étude des courants de convection calorifique.

Les mathématiques au Congrès des Philologues et Pédagogues allemands; Hambourg, 1905.

Le 48^{me} « Congrès des philologues et des Pédagogues Allemands », tenu à Hambourg du 2 au 6 octobre 1905, posséda une section mathématique et physique très fréquentée ; 66 membres participèrent aux séances de cette section, présidée par M. le prof. Thaer (Hambourg).

Dans la première séance M. Schubert (Hambourg) fit une communication sur *Les problèmes de nombres entiers dans la géométrie algébrique.* Après avoir défini « l'angle héronique », comme appartenant à un triangle dont les trois côtés et l'aire peuvent être exprimés par des nombres entiers, désignation tout à fait nouvelle dans la géométrie, il donna une solution assez élégante du problème déjà ancien de trouver tous les triangles héroniques. Il étendit le problème à la recherche des parallélogrammes héroniques, puis des quadrilatères et des polygones inscrits dans un cercle, et possédant la même propriété. Cherchant à trouver une solution du problème, quand on ajoute la condition que les médianes soient aussi des nombres entiers, il prouva qu'il n'est possible de le résoudre que pour une seule médiane[1], mais qu'il y a une infinité de triangles, dont les trois côtés et les trois médianes sont des nombres rationnels, quand on omet la condition que l'aire soit aussi un nombre rationnel. Examinant plus tard les pyramides à base triangulaire, carrée ou hexagonale, il montra que chaque pyramide héronique doit avoir aussi une sphère circonscrite dont le rayon est un nombre entier.

M. Bohnert (Hambourg) donna ensuite un aperçu des exercices de physique faits par les élèves des classes moyennes des écoles réales à Hambourg.

Le lendemain 4 octobre eut lieu une séance générale, également importante pour tous les membres du congrès, et dans laquelle figurait entre autres une conférence de M. Klein (Gottingue) sur l'activité de la Commission d'enseignement chargée par le Congrès des naturalistes et médecins allemands d'étudier les réformes de l'enseignement secondaire supérieur des sciences mathématiques, physiques et naturelles.

La deuxième et dernière séance de la section (5 octobre) comprenait deux communications, celle de M. le prof. Wernicke sur la notion de travail dans la déformation et son application (*Begriff der Formänderungsarbeit und seine Verwendung*), puis, après une intéressante discussion sur ce travail, celle de M. Grimsehl (Hambourg) sur exercices de physique faits par les élèves des classes supérieures de son école. Il présenta plusieurs expériences nouvelles ; puis il conduisit les membres de la section à une exposition, arrangée avec beaucoup de soin, où plus de quarante expériences de physique étaient groupées d'une manière bien instructive.

Le dernier jour du congrès fut consacré à la visite des musées d'histoire naturelle, de l'observatoire maritime et de plusieurs laboratoires de physique de la vieille ville hanséatique.

E. Pahl (Charlottenbourg).

---

[1] Dans une séance de la société Mathématique de Berlin (Décembre 13, 1905) M. Güntzsche fait remarquer qu'il y a une erreur dans la démonstration donnée par M. Schubert, cette démonstration n'étant fondée que sur une seule solution particulière de l'équation à deux inconnus du deuxième degré à laquelle conduit ce problème. Mais on connait déjà beaucoup de couples de valeurs, qui satisfont à cette équation et qui ne sont pas examinés par M. Schubert. Son théorème manque donc encore d'une démonstration exacte.

Association des maîtres de mathématiques des écoles moyennes suisses.

La 5^me réunion annuelle des maîtres de mathématiques des écoles moyennes suisses a eu lieu le 9 décembre 1905 à Zurich sous la présidence de M. le Dr E. GUBLER. Trois communications figuraient à l'ordre du jour.

1. Dans sa communication *sur l'enseignement de la Géométrie descriptive* M. C. EGLI, recteur du Gymnase de Lucerne, montre comment on peut présenter cet enseignement en se bornant d'abord à la projection orthogonale sur un seul plan et en faisant intervenir d'une façon systématique la projection du point de cote 1.

2. M. H. FEHR, professeur à l'Université de Genève, donne un rapide aperçu de quelques-unes *des tendances actuelles de l'enseignement de la Géométrie élémentaire*. Il insiste surtout sur la nécessité qu'il y a, *pour les maîtres*, d'être familiarisés avec la *notion de groupe* qui joue aujourd'hui un rôle si fécond en mathématiques. Comme l'a dit M. Poincaré, la Géométrie est l'étude des propriétés d'un *groupe* particulier, de celui des mouvements des corps solides. Cette idée fondamentale se trouve déjà développée en 1874 dans les *Nouveaux Eléments de Géométrie* de M. Méray, qui établit tous ses postulats uniquement à l'aide des propriétés des déplacements. M. Fehr examine ensuite les avantages que présente la fusion de la Planimétrie et de la Stéréométrie : elle permet, entre autre, de simplifier l'enseignement et de développer de bonne heure l'intuition de l'espace. Puis il donne un aperçu du mouvement en faveur de la fusion en France et en Italie.

Ces deux communications ont donné lieu à d'intéressantes discussions.

3. L'ordre du jour portait ensuite une communication de M. OTTI, professeur à l'Ecole cantonale d'Aarau, sur *les avantages que présente, dans l'enseignement des écoles moyennes, l'emploi de la division décimale de l'angle avec les logarithmes à quatre décimales*. En raison de l'heure avancée de la séance, M. Otti doit se borner à déposer son mémoire. La discussion de ses thèses aura lieu à la prochaine assemblée annuelle.

L'Association a renouvelé son comité comme suit : *président*, M. le Dr FEHR, professeur à l'Université et au Gymnase de Genève ; *assesseurs*, M. le Dr. M. GROSSMANN, maître à l'Ecole réale supérieure de Bâle et M. le Dr A. JUZI, professeur au Gymnase de Bienne.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Bâle*, en octobre 1906.

Nécrologie.

Otto Stolz. — Le 23 novembre 1905 est mort à Vienne M. O. Stolz, membre de l'Académie impériale des Sciences de Vienne. Né à Hall (Tyrol) en 1842, Stolz fit ses études à l'Université de Vienne, où il se consacra tout particulièrement aux Mathématiques et à l'Astronomie. En 1867 il devint assistant à l'Observatoire et fut admis à professer à l'Université en qualité de privat-docent. Quatre ans plus tard il reçut un appel à l'Université d'Innsbruck pour la chaire de Mathématiques. C'est là que se passa sa belle carrière de professeur et de savant au milieu de l'estime générale de ses étudiants et de ses collègues. Pour des raisons de santé il dut prendre sa retraite au mois d'octobre dernier.

Les travaux de Stolz appartiennent aux domaines de l'Arithmétique théorique, de l'Algèbre supérieure et de l'Analyse. Nous nous bornerons à rappeler ici ses divers Traités : *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik,* 2 vol., 1885-6 ; *Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung*, 2 vol., 1893-6 ; puis, en collaboration avec M. J. A. Gmeiner : *Theoretische Arithmetik*, 2 édit., 1902 ; *Einleitung in die Funktionentheorie*, 2 vol.. 1904—1905.

Ern. Kaller (Vienne).

V. Schlegel. — A la même date du 23 novembre est décédé M. V. Schlegel, professeur à l'Ecole supérieure des machines à Hagen (Prusse). Schlegel laisse de nombreux mémoires qui se rattachent, pour la plupart, à l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann. Il est l'un de ceux qui, au cours des trente dernières années, ont le plus contribué à faire connaître les méthodes fécondes dues au savant géométre de Stettin. H. F.

Nominations.

M. O. Blumenthal est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. J.-E. Bonegright est nommé professeur de Mathématiques à l'Université d'Ottowa, Kansas.

M. J. A. Brooks est nommé professeur extraordinaire de Mécanique à la Brown University, Providence, E.-U.

M. J. Rius Castizo, de l'Université de Saragosse, est nommé professeur de Mécanique théorique à l'Université de Madrid.

M. Fr. Cohn, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire d'Astronomie et de Mathématiques à l'Université de Königsberg.

M. M. Ernst, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire d'Astronomie à l'Université de Lemberg.

M. G. Faber est admis à l'Ecole technique supérieure de Karlsruhe en qualité de privat-docent.

M. R. Fueter est admis à l'Université de Marbourg en qualité de privat-docent.

M. Th. Friessendorf est admis à professer les Mathématiques appliquées à l'Université de St. Petersbourg.

M. A.-G. Hall est nommé professeur de Mathématiques à la Miami-University, Oxford, Ohio (E.-U.).

M. F. Hartogs est admis à l'Université de Munich en qualité de privat-docent pour les Mathématiques.

M. J.-J. Jeams est nommé professeur de Mathématiques appliquées à l'Université de Princeton (E.-U.).

M. H. von Koch, privat-docent à l'Université de Stockholm est nommé professeur de Mathématiques pures à l'Ecole technique supérieure de Stockholm.

M. R. H. Lee est nommé professeur de Mathématiques au Rhode Island College (E.-U.).

M. N. Ludwig est admis à l'Ecole technique supérieure de Vienne en qualité de privat-docent de Mécanique technique.

M. M. Mason est nommé professeur adjoint de Mathématiques à la Sheffield Scientific School, Yale University, (E.-U.).

M. H. B. Newson est promu professeur titulaire de Mathématiques à l'Université de Kansas (E.-U.).

M. F. S. Pinkerton est nommé professeur de Mathématiques appliquées à l'University of South Wales, à Cardiff.

M. C. F. Russell est admis à professer les Mathématiques au King's College de Londres.

M. F. Severi, de Pise, est nommé professeur de Géométrie à l'Université de Parme.

M. C. Somigliana, de Pavie, est nommé professeur de Physique mathématique à l'Université de Turin.

M. E. Steinitz est chargé d'un cours de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg.

Médaille d'or à l'Exposition de Bruxelles.

Nos lecteurs apprendront sans doute avec plaisir que l'*Enseignement mathématique* a reçu la médaille d'or à l'Exposition internationale des Arts et Métiers organisée à Bruxelles à l'occasion du 75 anniversaire de l'indépendance nationale.

NOTES ET DOCUMENTS

ALLEMAGNE

RAPPORT SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES ÉTABLISSEMENTS SECONDAIRES SUPÉRIEURS A NEUF CLASSES[1]

Dans nos établissements secondaires supérieurs les Mathématiques se trouvent dans une toute autre situation que les Sciences naturelles ; elles ne doivent pas conquérir au sein de l'organisation scolaire le crédit nécessaire, mais il leur faut une certaine adaptation au but moderne de l'école, et celle-ci leur est rendue difficile moins par les circonstances extérieures que par le poids de la tradition de plusieurs siècles,

Le *principe de cette adaptation* n'est pas douteux ; il ressort déjà nettement des observations méthodiques des programmes prussiens publiés en 1901. Il tend d'une part (comme dans toutes les autres branches) à adapter l'enseignement, plus que par le passé, à la marche naturelle du développement intellectuel ; à placer les nouvelles connaissances en relation organique avec la science actuelle ; enfin à rendre de plus en plus consciente la coordination de la science en soi et avec les autres branches de l'école, de degré en degré. De plus il s'agira, en reconnaissant cependant la valeur éducative des mathématiques, de renoncer à toutes les connaissances spéciales et pratiquement inutiles ; par contre de développer le plus possible la faculté d'observation mathématique du monde des phénomènes.

De là découlent deux buts particuliers : *le développement de l'intuition de l'espace,* d'une part, et de *l'idée de fonction* d'autre part. On ne porte aucun préjudice à l'éducation logique par le but posé à l'enseignement mathématique, et l'on peut même dire que ce but ne fait que gagner par le développement renforcé, dans la direction indiquée, de l'enseignement mathématique. par ce fait que les Mathématiques sont mises en rapport plus

[1] Extrait du Rapport de la Commission d'enseignement de la Société des naturalistes et médecins allemands (Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher u. Ærzte über ihre bisherige Tätigkeit, Verlag F. C. W. Vogel. Leipzig, 1905). Ce Rapport contient 1° un rapport général, rédigé par M. A. Gutzmer ; 2° le rapport ci-dessus sur l'enseignement des mathématiques (rapporteur M. le Prof. F. Klein) ; 3° un rapport sur l'enseignement de la Physique ; 4° un rapport sur l'enseignement de la Chimie y compris la Minéralogie et de la Zoologie avec Anthropologie, la Botanique et la Géologie.

Voir, en tête de ce numéro, l'article de M. F. Klein. *(Réd.)*

étroit avec le domaine qui intéresse l'élève et dans lequel ses capacités logiques devront s'exercer.

Tel est le principe. Notre tâche principale nous a paru la suivante : donner à ce principe une forme plus conséquente qu'auparavant en élaborant un *projet de programme* approprié aux conditions des *Gymnases*. Nous pensons par cela avoir frayé la voie à un réel et grand progrès, qui sera salué avec joie par tous les amis d'une réforme conforme à notre temps et par tous les représentants des Sciences naturelles. Pour ce qui est des détails, nous renvoyons au projet ci-dessous et aux explications qui l'accompagnent et nous ne relevons à l'avance que les points particuliers suivants :

1° Par le fait que notre programme tient compte, dans une mesure plus grande que le précédent, des points de vue généraux déjà cités et rejette pour cela une certaine quantité de matière peu utile, il apporte un *allègement sensible* pour la plupart des élèves, surtout en reculant les notions dont l'introduction prématurée met en doute chez beaucoup d'élèves leur succès dans l'étude des mathématiques. Sont laissées de côté toutes les particularités dont l'emploi intelligent suppose une certaine routine aussi bien dans le domaine des transformations analytiques que des constructions géométriques. D'autre part, les conceptions abstraites et les démonstrations qui sont si souvent incompréhensibles pour le débutant sont renvoyées aux degrés supérieurs. Cela ne nuira point à la sécurité dans l'application des connaissances mathématiques acquises ou à la logique de la pensée mathématique. A ce point de vue, *l'art du maître* dont nous ne voulons pas restreindre l'initiative par des prescriptions spéciales, est de s'en tenir à ce que l'on peut exiger sans tomber dans l'exagération

2° Nous recommandons expressément une grande *liberté du maître* pour ce qui est du choix particulier, la présentation méthodique, la répartition du travail, etc. (bien entendu, dans le cadre du programme général). Nous abandonnerons à cette liberté, dans notre projet, le soin de décider d'un point particulièrement important sur lequel les opinions des intéressés ne semblent pas suffisamment au clair. Nous proposons dans notre projet (comme une conséquence de notre principe général) que l'on mène l'enseignement dans la I^{re} du Gymnase *jusqu'au seuil du calcul infinitésimal;* mais n'avons rien fixé de spécial sur la forme de cet enseignement. Une fois que l'on aura fait l'expérience dans divers établissements on pourra décider avec plus de certitude comment la chose pourrait être le mieux réalisée.

3° Comme but final, l'enseignement mathématique en I^{re} comprend, en somme, les trois points suivants :

Un coup d'œil scientifique sur la parenté des sujets mathématiques traités à l'école ;

une certaine aptitude de la conception mathématique et son emploi à la résolution de problèmes particuliers ;

enfin et surtout la pénétration de l'importance des mathématiques pour la connaissance exacte de la nature.

De cette manière l'élève acquiert des connaissances mathématiques non seulement précieuses en elles-mêmes, mais qui forment en même temps une base pratique pour tous ceux à qui elle est nécessaire pour leur carrière particulière. La *discontinuité* qui apparaît souvent quand on passe aux études supérieures, disparaît de ce fait.

D'une manière analogue la conclusion prévue par notre projet après la II^{me} supérieure sera aussi utile à celui qui quitte l'école avec le certificat de volontariat, comme à celui qui se dispense des classes supérieures de l'établissement.

4° Au point de vue de l'organisation nous faisons valoir le vœu que l'on abroge la réduction à 3 heures seulement de l'enseignement mathématique dans les deux Tertia du Gymnase, adoptée en son temps au profit du grec, et dont l'action défavorable a été reconnue par tous les maîtres. *Dans toutes les classes du Gymnase il devrait être attribué quatre heures aux mathématiques (Arithmétique).*

Nous nous bornerons à ces remarques pour ce qui concerne le programme mathématique des Gymnases Quant au Gymnase réal *(Realgymnasium)* et à l'Ecole réale supérieure *(Realschule)* nous ne ferons que des remarques très générales. Ces écoles se trouvent sous l'influence des nouvelles prérogatives trop en cours de développement pour qu'il soit possible de préciser dès maintenant certains détails. Du reste, dans plusieurs parties du pays, par exemple à l'Est et Ouest de la Prusse, ces écoles semblent posséder encore de grandes différences intérieures.

En Prusse, dans les écoles réales supérieures, les heures suivantes sont actuellement assignées aux Mathématiques.

Mathématiques	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Total
Realgymnasium . .	4	4	4	5	5	5	5	5	5	**42**
Oberrealschule . .	5	5	6	6	5	5	5	5	5	**47**

Il en résulte que dans les programmes actuels on poursuit pour ces deux genres d'école un enseignement mathématique plus élevé que dans les Gymnases classiques.

Pour les Sciences naturelles on a le tableau suivant, tandis que dans les Gymnases, dans toutes les classes, deux heures sont attribuées actuellement aux Sciences naturelles.

Sciences naturelles	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Total
Realgymnasium . .	2	2	2	2	2	4	5	5	5	**29**
Oberrealschule . .	2	2	2	2	4	6	6	6	6	**36**

Ceci est sensiblement davantage que dans les Gymnases classiques, mais semble encore bien insuffisant, si l'on songe au rôle qu'ont à remplir les Sciences naturelles dans les écoles réales, d'autant plus si l'on doit tenir compte des disciplines biologiques dans les classes supérieures. En considérant ce fait, la Commission, sur la proposition de ses membres mathématiciens, estima, pour les *Gymnases réaux* où les circonstances sont spécialement défavorables au développement renforcé des Sciences naturelles, qu'il était préférable de *renoncer au surplus des heures de mathématique, c'est-à-dire de céder une heure aux Sciences naturelles en commençant par la III^me^ inférieure.* Nous aurions alors actuellement, dans l'école réale, pour toutes les classes, 4 heures de mathématiques comme cela est demandé normalement au Gymnase, et on appliquerait aux Gymnases réaux « eo ipso », le programme mathématique arrêté par les Gymnases. Les Sciences naturelles, par contre, obtiendraient au Gymnase réal presque le même nombre d'heures dont elles disposent maintenant dans les écoles réales, c'est-à-dire :

Sciences naturelles	VI	V	IV	III b	III a	II b	II a	I b	I a	Total
Realgymnasium . .	2	2	2	3	3	5	6	6	6	35

Les deux écoles devront alors chercher à obtenir cette augmentation de temps accordée aux Sciences naturelles au moyen de concessions de la part d'autres branches. Sur ce point nous entrerons dans quelques détails dans la partie de notre rapport consacrée aux Sciences naturelles.

Il n'existerait donc un surplus d'heures (pour l'enseignement mathématique) que pour les écoles réales supérieures. Ce surplus doit être employé, d'après l'avis unanime des membres de la Commission, avant tout à un développement plus intense de la même matière qui est traitée dans les Gymnases; d'une part les principes généraux des matières étudiées seront mis en évidence d'une manière particulière et assis plus fortement, d'autre part on concédera une place plus large aux applications pratiques et aux questions graphiques. Une minorité de la Commission voulait se limiter à ce cadre de travail pour les dites écoles. La majorité, par contre, recommande une extension modérée de la matière à la Géométrie analytique et aux éléments du calcul infinitésimal par une transformation systématique de l'enseignement. Cette adaptation correspondrait d'une matière très logique à la tendance précitée (tandis que le surplus que les établissements réaux possédaient jusqu'ici sur les Gymnases semble choisi d'une façon plus arbitraire). En I[re] l'enseignement mathématique se terminerait ainsi quant à sa nature, de la même manière que dans les Gymnases, mais tendrait seulement vers une compréhension mathématique plus complète pour ce qui est des phénomènes de la nature et de la vie journalière. Le travail pourrait être poursuivi, par exemple, jusqu'à l'étude satisfaisante, basée sur les moyens les plus rapides, des oscillations infiniment petites du pendule ou des lois de Kepler sur le mouvement planétaire, comme conséquences des Théorèmes fondamentaux de la mécanique et de la loi de Newton sur la gravitation universelle.

PROGRAMME MATHÉMATIQUE POUR LES GYMNASES

A. Degrés inférieurs.

Sixième. — Les opérations fondamentales de calcul avec des nombres entiers, concrets ou non, dans un domaine limité. Mesures *allemandes*, poids et monnaies. Exercices dans la notation décimale et dans les calculs décimaux les plus simples, comme préparation au calcul des fractions.

Cinquième. — *Calcul.* — Exercices progressifs sur les nombres décimaux concrets en élargissant le domaine des mesures employées (poids et monnaies des pays étrangers), mesures de longueur de diverses espèces (problèmes les plus simples sur les aires et volumes en indiquant le rapport entre volumes et poids. (Dans tous ces calculs il faut toujours d'abord faire prévoir approximativement la grandeur des résultats). Divisibilité des nombres. Fractions ordinaires (tout d'abord comme nombres concrets).

Préliminaires sur la Stéréométrie. Introduction dans les notions fondamentales de l'espace, toutefois de façon à ce que l'espace apparaisse surtout comme support de relations planimétriques. Dimensions de l'espace, surfaces, lignes, points expliqués tout d'abord par l'entourage et confirmés sur les solides les plus divers. Figures planes considérées d'abord comme limites des corps, puis en elles-mêmes, sur lesquelles on expliquera les notions de direction, angle, parallélisme, symétrie. Exercices à la règle et au compas ; usage continuel du dessin et des exercices de mensuration.

Quatrième. — *Calcul.* Calcul des fractions décimales. Calcul abrégé (sur exemples simples). Règle de trois en évitant tout excès de formes schématiques. Problèmes de la vie usuelle ; cas simples du pourcentage (intérêt, escompte). Préparation à l'Algèbre par la répétition de problèmes appropriés déjà traités en employant les lettres au lieu de nombres. Signification d'expressions littérales données et calcul de telles expressions après substitution numérique. Relation entre les règles du calcul de tête et celle du calcul avec parenthèses.

Géométrie. Etude de la droite des angles et des triangles. Déplacement des figures ; relation entre les éléments d'un triangle ; cas limites (triangles rectangles, isocèles, équilatéraux). Théorèmes simples sur les parallélogrammes en partant de la construction.

Troisième inférieure. — *Arithmétique.* Revision systématique des règles fondamentales du calcul par formules littérales. Notion de grandeur relative, développée sur des exemples pratiques et montrée sur une droite par la série des nombres étendue indéfiniment dans les deux sens. Règles pour les grandeurs relatives. Suite des exercices dans le calcul d'expressions littérales en connexion avec les grandeurs négatives et explication constante du caractère fonctionnel des variations de grandeur employées. Application aux équations et problèmes du premier degré à une inconnue. Différence entre identité et équation.

Géométrie. Suite de l'étude du parallélogramme. Le trapèze. Théorèmes fondamentaux sur le cercle. Considération de l'influence exercée sur le caractère général d'une figure par les changements de grandeur et de position des éléments. Application constante à des constructions avec exclusion des problèmes solubles seulement à l'aide d'artifices.

Troisième supérieure. — *Arithmétique.* Compléments et développements sur le calcul littéral, en particulier décomposition de polynomes Propriétés des proportions. Equations pures et problèmes du premier degré à une et plusieurs inconnues. Dépendance de l'expression d'une grandeur par rapport à une variable qu'elle renferme. Représentation graphique de fonctions linéaires et emplois à la résolution d'équations.

Géométrie. Comparaison des aires et leur calcul en rapport avec des figures limitées par des droites compliquées ; calcul approximatif pour des surfaces limitées par des courbes. Répétition des calculs de volume de la cinquième. Problèmes.

Seconde inférieure. — *Algèbre.* Puissances et racines. Equations et problèmes du second degré à une inconnue. Relations entre les coefficients et les racines. Variation du trinome du second degré avec représentation graphique. Résolution de problèmes du deuxième degré à une inconnue par intersection de droites et de paraboles. Considération de la représentation graphique comme moyen de mettre en évidence des relations empiriques données.

Géométrie. Similitude en insistant surtout sur la similitude de position.

Proportion dans le cercle. Calcul de valeurs approchées de la circonférence et de l'aire du cercle par des polygones. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle, surtout du triangle rectangle. Recherche et vérification de tables de ces rapports (comme préparation à la trigonométrie), avec travaux pratiques ; la planchette.

B. Degrés supérieurs.

Seconde supérieure. — *Algèbre*. Extension de la notion de puissance, conception de la puissance comme grandeur exponentielle, notion et emploi du logarithme. Progressions arithmétiques et géométriques, emploi des dernières au calcul des intérêts et rentes (dans des problèmes simples empruntés à la réalité). Représentation graphique de la dépendance du nombre et du logarithme. Règle à calcul. Résolution d'équations quadratiques à deux inconnues, par le calcul et graphiquement.

Géométrie. Trigonométrie en relation avec les constructions planimétriques. Application aux problèmes usuels de la mesure des triangles et quadrilatères. Dépendance réciproque entre les angles et les fonctions par les formules goniométriques. Représentation graphique de ces fonctions. Problèmes appropriés, constructions et calculs. Division et relations harmoniques et notions fondamentales destinées à préparer (comme fin de la planimétrie) à la Géométrie moderne.

Première inférieure. — *Algèbre*. Etude raisonnée des fonctions traitées en considérant leur croissance et décroissance (en utilisant éventuellement les notions de dérivée et d'intégrale); application à de nombreux exemples en Géométrie et en Physique, particulièrement en Mécanique. Théorèmes principaux les plus simples de l'analyse combinatoire avec exemples.

Géométrie. Stéréométrie en tenant compte des principales notions de la projection d'une figure. Exercices de dessin stéréométrique. Théorèmes simples de la trigonométrie sphérique. Géographie mathématique, théorie de la projection des cartes.

Première supérieure. — 1° Sections coniques, traitées analytiquement et synthétiquement, avec application aux éléments de l'astronomie.

2° Répétitions sur l'ensemble de l'enseignement, où, si possible, on fera résoudre de plus grands problèmes par le calcul et dessin.

3° Coup d'œil général rétrospectif avec considérations historiques et philosophiques.

RENSEIGNEMENTS SUR LE PROJET CI-DESSUS

1° *Dans l'enseignement du calcul, dans les classes inférieures*, le domaine des nombres à utiliser dans les exemples doit rester restreint: les nombres au-dessus de 100.000 sont à éviter. On vouera un grand soin au calcul de tête. Pour les applications des mesures, monnaies et poids, tenir compte de préférence de conditions usuelles; les problèmes de la vie courante doivent traiter des questions réelles et non des problèmes fictifs qui ne se rencontrent jamais. Souvent l'enseignement du calcul devient un enseignement spécial, mais il ne doit jamais dépasser ce que nous réclamons en général d'un adulte instruit. D'autre part l'enseignement du calcul doit être considéré comme préparation à l'arithmétique et à l'algèbre. On devra donc bien tenir compte de la distinction des degrés et leur coordination. De même, il faut attacher de l'importance à une notation à la fois bonne et logique. Celle-ci ne doit pas être en contradiction avec celle en usage plus tard dans l'enseignement mathématique. Dans chaque établissement un mathématicien influent ou une conférence des maîtres devrait intervenir dans ce sens.

L'enseignement géométrique doit se lier d'une manière naturelle à l'intuition et partir de mesures pratiques. Il faudra éviter soigneusement de rendre obscur par une démonstration systématique pédante la compréhension des faits qui semblent évidents à l'intuition; au lieu de démonstration logique, il vaut mieux chercher tout d'abord à rendre les élèves conscients de notions acceptées spontanément par l'esprit. Par exemple l'égalité des figures se déduira comme conséquence naturelle de la construction fournissant pratiquement une seule solution. Les démonstrations indirectes sont à éviter le plus possible; traiter comme évidente, la réciproque des relations démontrées directement, en tant que — comme c'est le plus souvent le cas — elle s'impose ainsi à l'esprit. Dans le dessin, la clarté doit être favorisée le plus possible (par l'emploi de hâchures, de couleurs) ; toute complication par des faits secondaires est à éviter, ainsi que des notations peu commodes. Dans les considérations planimétriques mettre en lumière, si possible, les liens avec l'espace à trois dimensions, surtout à l'aide d'exemples empruntés à la réalité. On recommande l'emploi de modèles.

2 *a*. Dans les *degrés moyens* l'Arithmétique est remplacée par l'Algèbre qui, dans la dernière partie de la IV^{me} est préparée par l'exposé méthodique de tout l'enseignement préliminaire du calcul et par la formation d'une certaine pratique dans l'emploi des lettres. Eviter tout pédantisme dans la systématique de l'arithmétique, où souvent il faut craindre qu'un « circulus vitiosus » vienne dissimuler la démonstration. Au contraire les théorèmes de l'Algèbre théorique sont à traiter comme conception scientifique de ce qui est déjà fortement pressenti. De même l'introduction des nombres négatifs doit partir d'exemples tirés de la pratique; la représentation des nombres sur une droite est à traiter comme représentation visuelle des connaissances acquises, de façon à ce que les règles avec quantités relatives se présentent comme des généralisations naturelles des opérations sur valeurs absolues. A éviter toutes les opérations artificielles, divisions de polynomes compliqués, etc.; par contre insister sur la décomposition des polynomes (extraction de racines carrées comme thème d'exercices); pour les proportions ne retenir que les relations élémentaires, mais se rendre maître de la notion de proportionalité directe et inverse.

De cette façon il restera du temps à consacrer à la partie principale du travail : familiariser l'élève avec l'idée de fonction, ce qui est déjà préparé par l'étude préliminaire de l'Algèbre à la fin de la IV^{me}, puisque la variation des expressions algébriques par suite de substitution de différentes valeurs pour les grandeurs diverses qui figurent, s'impose d'elle-même.

2 *b*. Cette habitude de faire intervenir l'idée de fonction doit être entretenue aussi en Géométrie par considération continuelle des modifications qu'éprouve la question par des changements de longueur et position ; par exemple la variation de forme des quadrilatères, variation de position respective de deux cercles, etc. Mais en même temps l'examen des relations trouvées que l'on peut grouper d'après des points de vue divers, constitue un excellent mode d'éducation de la pensée logique dont on fera usage le plus souvent possible ; de même pour la considération des cas de transition et la notion de limite. Pour atteindre ce but il faut exclure du programme

actuel plus d'un point de détail et ne faire que passer sur une foule de choses ; en particulier l'extension des théorèmes établis pour des relations rationnelles ne doit être faite que pratiquement au cas des nombres irrationnels, c'est-à-dire en indiquant la possibilité de rendre aussi petite qu'on le veut l'erreur commise par substitution de nombres rationnels aux irrationnels.

Il ne faut pousser les constructions qu'en rapport intime avec l'enseignement propre ; dans l'analyse, il faut surtout veiller à la marche des pensées par lesquelles on parvient à la solution, c'est-à-dire l'analyse doit être conduite psychologiquement ; attacher aussi une grande importance à l'habitude de la pensée fonctionnelle (les cas limites sont à discuter spécialement).

De plus, il faudra, à ce moment, relier les mathématiques à la construction, soit par l'introduction de la représentation graphique, soit en expérimentant les rapports réciproques entre lignes et angles.

3° Pour ce qui est de l'enseignement dans les *classes supérieures*, nous pouvons nous borner à quelques remarques.

Dans l'enseignement de la II^{me} supérieure, l'extension de la notion de puissance par l'introduction des exposants négatifs et fractionnaires doit être réalisée d'une façon essentiellement fonctionnelle, ce qui fournit l'occasion directe de mettre en relation étroite les progressions arithmétiques et géométriques. Dans la Trigonométrie, laisser dans l'ombre toutes les transformations artificielles pour faire place, d'une part, aux applications pratiques, de l'autre, à la conception fonctionnelle des éléments fondamentaux. Emploi de modèles. En terminant la planimétrie par la trigonométrie à l'aide de problèmes choisis d'une façon rationnelle, insister surtout sur la différence entre relations de position et de mesure.

Pour ce qui a trait à l'introduction des éléments du calcul infinitésimal dans la I^{re} inférieure, la commission l'a considérée simplement comme *éventuelle*, parce que les opinions ne sont pas au clair sur la façon dont elle doit se faire. Jusqu'à une date ultérieure la commission abandonne la décision de ce point aux soins du maître des divers établissements. Il est clair qu'il ne s'agit que de problèmes élémentaires de différentiation et d'intégration. L'introduction de problèmes de Physique, particulièrement de Mécanique, n'a pas seulement en vue la liaison très désirable de la pensée mathématique et physique, mais elle permet aussi de décharger l'enseignement physique très limité par le temps.

Dans la Stéréométrie, l'application du calcul des formules des volumes doit être limitée au profit d'une méthode basée davantage sur l'intuition de l'espace, mettant en relief les principes importants de la Géométrie descriptive. Soigner aussi des exercices de construction simples, pour lesquels on attachera de l'importance à une bonne exécution graphique.

On trouvera aussi l'occasion de mettre à nouveau en lumière des chapitres déjà vus de la planimétrie (similitude, relations harmoniques), en établissant leurs principes par une méthode stéréométrique.

L'étude des coniques en I^{re} supérieure doit tenir compte, le plus possible, du côté analytique et synthétique de l'objet. A recommander en Géométrie synthétique beaucoup de dessin, afin de faire ressortir la relation de forme entre les coniques et le cône, la dépendance de la position du plan sécant, le rapport de position des foyers et directrices. Les cas limites méritent aussi une attention particulière. La géographie mathématique (en I^{re} inférieure) et les éléments de l'Astronomie (en II^me supérieure), se rattachent aux parties correspondantes de l'enseignement physique.

A l'examen de maturité, on reconnaîtra le plus sûrement le développement mathématique de l'élève et son influence sur son développement général lorsqu'on exigera, au lieu de la résolution de quatre problèmes particuliers comme maintenant, d'une part, une étude d'un thème général, d'autre part, l'étude complète (calcul et dessin) d'un problème.

De même, à l'examen oral, il faudrait donner plus de poids à l'intelligence qu'à la mémorisation d'un grand nombre de formules spéciales.

FRANCE

MODIFICATIONS APPORTÉES AU PLAN D'ÉTUDES DES LYCÉES ET COLLÉGES DE GARÇONS

du 31 mai 1902

(Arrêtés des 27, 28 juillet et 8 septembre 1905).

(suite[1])

II. Programmes[2].

Les programmes d'enseignement des mathématiques dans les classes secondaires des lycées et collèges de garçons sont modifiés ainsi qu'il suit :

Cinquième B (4 heures).

Arithmétique. — Numération décimale. — Addition et soustraction des nombres entiers. — Multiplication des nombres entiers. Produit d'une somme ou d'une différence par un nombre. Produit de facteurs. Puissances. — Division des nombres entiers. Règle pratique. — Caractères de divisibilité par 2, 5, 9, 3. — Nombres premiers. Règles pratiques pour la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers, pour la recherche du plus grand commun diviseur, du plus petit commun multiple. — Revision du système métrique.

Géométrie (Voir Instructions). — Usage de la règle, de l'équerre, du compas et du rapporteur. — Ligne droite et plan. Angles. Symétrie par rapport à une droite. Triangles. Triangle isocèle. Cas d'égalité des triangles. — Perpendiculaire et obliques. Cas d'égalité des triangles rectangles. — Droites parallèles. Somme des angles d'un triangle, d'un polygone convexe. — Parallélogramme. Rectangle. Losange. Carré. — Cercle. Diamètre. Cordes et arcs. Tangente. — Positions relatives de deux cercles. — Mesure des an-

[1] Pour la première partie, contenant les *Instructions relatives à l'enseignement des mathématiques*, voir le précédent numéro, pp. 491-497.

[2] Ceux de nos lecteurs qui ne connaissent pas l'organisation de l'enseignement secondaire en France, trouveront un aperçu des différents cycles et divisions dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mai 1905, pp. 183 et 184.

Les *Programmes* sont en vente à la librairie Delalain frères, Paris, 115, boul. Saint-Germain. Réd.

gles. — Constructions d'angles et de triangles. — Tracé des perpendiculaires et des parallèles. — Constructions de cercles, de tangentes.

Dessin géométrique. — Exécution avec les instruments des constructions expliquées dans le cours de géométrie. — Problèmes et exercices simples se rapportant également au cours de géométrie ; exécution graphique de la solution trouvée. Dessins géométriques dans lesquels entrent des lignes droites et des cercles, empruntés à des motifs de décoration de surfaces planes : parquetages, dallages, mosaïques, vitraux ; lavis à l'encre de Chine et à la couleur de quelques-uns de ces dessins.

Quatrième B (5 heures).

Arithmétique. — Fractions ordinaires. Opérations. — Fractions décimales. Grandeurs directement et inversement proportionnelles. Opérations sur les nombres décimaux. — Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. — Progressions arithmétiques et géométriques. Somme des termes des progressions limitées. — Méthodes commerciales du calcul de l'intérêt et de l'escompte. Bordereaux d'escompte. Comptes courants. Notions sommaires sur les valeurs.

Géométrie. — Points qui divisent une droite dans un rapport donné. — Lignes proportionnelles. Propriété des bissectrices d'un triangle. — Triangles semblables. Définition du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle. — Définition des figures homothétiques. Polygones semblables. Pantographe. — Relations métriques dans un triangle rectangle. — Constructions de la quatrième proportionnelle et de la moyenne géométrique. — Polygones réguliers : carré, hexagone et triangle équilatéral. — Mesure de la circonférence du cercle (énoncé). — Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, des polygones. — Rapport des aires des deux polygones semblables. — Aire du cercle. — Construction de quelques courbes simples, telles que la cissoïde, les conchoïdes, etc.

Dessin géométrique. — Même programme que dans la classe précédente. Ajouter la construction graphique de lieux géométriques et le tracé des courbes à la plume.

Troisième B (4 heures).

Algèbre. — Nombres positifs et négatifs. Opérations. Applications concrètes. -- Monômes, polynômes. — Addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes. Identité :

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \dots + a^{m-1}).$$

Division des monômes. — Equations numériques du premier degré à une ou deux inconnues. — Variation et signe de l'expression $ax + b$; représentation graphique. — Equations du second degré. Relations entre les coefficients et les racines.

Variations du trinôme du second degré, de la fonction $\frac{ax + b}{a'x + b'}$; représentation graphique.

Usage des tables de logarithmes et d'antilogarithmes à quatre décimales. Intérêts composés.

Géométrie. — Du plan et de la droite dans l'espace. — Angle dièdre. Droites et plans parallèles. Droite et plan perpendiculaires. — Projection d'un polygone, d'un cercle ; ombres d'une figure plane sur un plan en géométrie cotée. — Définition des angles polyèdres, du prisme, de la pyramide. — Projections, ombres propres et portées sur un plan. — Surfaces et volumes du prisme et de la pyramide. — Cône, cylindre, plan tangent. — Sphère, cône et cylindre circonscrits. Surfaces de révolution. Sections planes de la sphère. Pôles. — Ombres propres et portées sur un plan. — Surfaces et volumes du cône et du cylindre de révolution. — Surface et volume de la sphère (énoncé). — Indications propres à faciliter l'exécution du lavis. — Levé des plans, arpentage, nivellement.

Seconde (C, D) (5 heures).

Algèbre. — Opérations sur les nombres positifs ou négatifs. — Monômes ; polynômes ; termes semblables.

Opérations : Addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes. — Identité :

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1}).$$

Division des monômes. — Résolution des équations du premier degré à une inconnue. Inégalité du premier degré. Résolution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Problèmes ; mise en équation. Discussion des résultats.

Variation de l'expression $ax + b$; représentation graphique.

Equation du second degré à une inconnue (on ne fera pas la théorie des imaginaires). Relations entre les coefficients et les racines.

Existence et signe des racines. Etude du trinôme du second degré.

Inégalité du second degré. Problèmes du second degré. Variation du trinôme du second degré ; représentation graphique.

Variation de l'expression $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$; représentation graphique.

Notion de la dérivée ; signification géométrique de la dérivée. Le signe de la dérivée indique le sens de la variation ; applications à des exemples numériques très simples et en particulier aux fonctions étudiées précédemment.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques. Logarithmes. Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales. — Intérêts composés.

Géométrie (figures planes). — *Ligne droite et plan.* — Angles, sens d'un angle. Droites perpendiculaires. — Triangles. Triangle isocèle. Cas d'égalité des triangles. — Perpendiculaire et obliques. Triangle rectangle. Cas d'égalité. — Définition d'un lieu géométrique. Lieu géométrique des points équidistants de deux points ou de deux droites. — Droites parallèles. — Somme des angles d'un triangle, d'un polygone convexe,— Parallélogrammes.

Nota. — Pour ce qui est des logarithmes, on se proposera essentiellement de familiariser les élèves avec l'usage des tables.

Les professeurs pourront donner des indications très sommaires sur la théorie déduite soit de l'étude des progressions, soit de l'étude des exposants.

— Figures symétriques par rapport à un point ou à une droite. Deux figures planes symétriques sont égales. — Translation d'une figure plane de forme invariable.

Cercle. — Intersection d'une droite et d'un cercle. — Tangente au cercle; les deux définitions de la tangente. — Arcs et cordes. — Positions relatives de deux cercles. — Mesure des angles. — Mouvement de rotation autour d'un point. Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan se ramène à une rotation ou à une translation.

Longueurs proportionnelles. — Points partageant un segment dans un rapport donné. Définition de la division harmonique. — Triangles semblables. — Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. Réciproque. Définition d'un faisceau harmonique.

Propriétés des bissectrices d'un triangle. Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

Notions simples sur l'homothétie. Polygones semblables. Sinus, cosinus tangente et cotangente des angles compris entre 0 et 2 droits. Relations métriques dans un triangle rectangle et dans un triangle quelconque. Lignes proportionnelles dans le cercle. Quatrième proportionnelle; moyenne proportionnelle,

Polygones réguliers. Inscription dans le cercle du carré, de l'hexagone, du triangle équilatéral, du décagone, du pentédécagone, Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables. Rapports de leurs périmètres. Longueur d'un arc de cercle. Rapport de la circonférence au diamètre. Calcul de π. (On se bornera à la méthode des périmètres.)

Aire des polygones; aire du cercle. — Mesure de l'aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque. — Rapport des aires de deux polygones semblables. — Aire d'un cercle, d'un secteur et d'un segment du cercle. Rapport des aires de deux cercles.

Notions d'arpentage. Usage de la chaîne et de l'équerre d'arpenteur.

Première C et D (5 heures).

Géométrie. — Plan et ligne droite. — Détermination d'un plan. — Parallélisme des droites et des plans. — Droite et plan perpendiculaires. — Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan. — Angle dièdre. Sens. Angle plan correspondant à un angle dièdre.

Plans perpendiculaires entre eux. — Projection d'une aire plane.

Translation. Rotation autour d'un axe. Symétrie par rapport à une droite. Symétrie par rapport à un point. Symétrie par rapport à un plan. Ce second mode de symétrie se ramène au premier.

Angles trièdres. Disposition des éléments. Trièdres symétriques. Chaque face d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres. Limites de la somme des faces d'un angle polyèdre convexe.

Trièdres supplémentaires. Applications. — Cas d'égalité des trièdres.

Homothétie. Sections planes parallèles d'angles polyèdres. Aires.

Polyèdres. Polyèdres homothétiques, polyèdres semblables. Prismes. Pyramide.

Notions sommaires sur les symétries du cube et de l'octaèdre régulier.

Volumes des parallélépipèdes et des prismes. Volume de la pyramide.

Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. Volume du tronc de prisme taiangulaire.

Rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

Cylindre à base circulaire. Plan tangent.

Cône à base circulaire. Plan tangent. Sections parallèles à la base.

Surfaces de révolution simples : cylindre, cône.

Sphère. Sections planes. Pôles. Plan tangent. Cône et cylindre circonscrits.

Surface latérale du cylindre et du cône de révolution.

Volume du cylindre et du cône à base circulaire.

Aire de la zone. Aire de la sphère. Volume de la sphère.

Géométrie descriptive. — Projection et cote d'un point. — Représentation de la droite. Pente. Distance de deux points. Droites concourantes. Droites parallèles. — Représentation du plan. Echelle de pente. Plans parallèles. — Rabattement sur un plan horizontal. Angle de deux droites. Distance d'un point à une droite. — Intersections de droites et de plans. Application aux problèmes d'ombres et de sections planes de prismes et de pyramides. — Droites et plans perpendiculaires. Distance d'un point à un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. Angle de deux plans. Application à la construction de polyèdres simples. — Représentation du point, de la droite et du plan à l'aide de deux plans de projection. — Intersections de droites et de plans. Droites et plans parallèles. — Droites et plans perpendiculaires. — Rabattement d'un plan sur un plan horizontal. — Changement du plan vertical.

Reprendre les problèmes précédemment énoncés relatifs aux distances, angles, ombres et sections planes.

Trigonométrie. — Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente et cotangente). Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc. Calcul des fonctions circulaires de quelques arcs : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, etc. — Théorie des projections. — Formules d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente. — Expression de $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$ — Toutes les fonctions circulaires de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$. Connaissant $\cos a = b$, trouver les valeurs du *sin* et du *cos* des arcs $\frac{a}{2}$; choix des valeurs correspondantes à un arc a donné.

Connaissant $\operatorname{tg} a$, trouver les valeurs des *tg* des arcs $\frac{a}{2}$; choix de la valeur correspondante à un arc a donné.

Transformer en produit la somme ou la différence de deux fonctions circulaires, sinus, cosinus ou tangentes. Problème inverse. Expression de la forme

$$a \cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t + \beta)$$

où t désigne la seule variable.

Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales.

Résolution des triangles rectangles. — Résolution ou discussion de quelques équations trigonométriques simples. — Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. Résolution des triangles.

Algèbre. — Equation et trinôme du second degré. Cas où la variable est une ligne trigonométrique. — Calcul des dérivées de fonctions simples. Etude des variations et de la représentation graphique.

Etude d'un mouvement rectiligne au moyen de la théorie des dérivées. Vitesse et accélération. Mouvement uniformément varié.

(Les professeurs devront appliquer les théories de l'algèbre à de nombreux exemples empruntés soit à l'algèbre, soit à la trigonométrie, soit à la géométrie.)

Classe de Mathématiques (8 heures).

Arithmétique. — Numération décimale. — Addition, soustraction, multiplication et division des nombres entiers. Théorèmes fondamentaux concernant ces opérations. Explication des règles pratiques pour effectuer les opérations.

On ne change pas le reste d'une somme, d'une différence, d'un produit, en augmentant ou en diminuant un terme ou un facteur d'un multiple du diviseur. Restes de la division d'un nombre entier par 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3, 11. Caractères de divisibilité par chacun de ces nombres.

Plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres. Nombres premiers entre eux.

Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier à l'un de ces facteurs divise l'autre.

Plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers. Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition ne peut s'effectuer que d'une seule façon. Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers.

Fractions ordinaires. — Réduction d'une fraction à sa plus simple expression. Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Plus petit dénominateur commun. Opérations sur les fractions ordinaires.

Nombres décimaux. Opérations (en considérant les fractions décimales comme cas particulier des fractions ordinaires). Calcul d'un quotient à une approximation décimale donnée.

Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale; condition de possibilité. Lorsque la réduction est impossible, la fraction ordinaire peut être regardée comme la limite d'une fraction décimale périodique illimitée.

Carré d'un nombre entier ou fractionnaire; composition du carré de la somme de deux nombres. Le carré d'une fraction n'est jamais égal à un nombre entier. Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une approximation décimale donnée.

Système métrique. Exercices.

Rapport de deux nombres. Rapports égaux. Partage en parties proportionnelles.

Mesure des grandeurs. Définition du rapport de deux grandeurs de même espèce. Théorème : Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient des nombres qui les mesurent.

Grandeurs directement ou inversement proportionnelles. Problèmes.

Définition de l'erreur absolue et de l'erreur relative. Détermination de la limite supérieure de l'erreur commise sur une somme, une différence, un produit, un quotient, connaissant les limites supérieures des erreurs dont les données sont entachées.

Algèbre. — Nombres, positifs et négatifs. Opérations sur ces nombres.

Monômes, polynômes ; addition, soustraction, multiplication et division des monômes et des polynômes.

Principes relatifs à la résolution des équations. — Equations du premier degré.

Equation du second degré à une inconnue. (On ne développera pas la théorie des imaginaires.) Equations simples qui s'y ramènent.

Inégalités du premier et du second degré. — Problèmes du premier et du second degré.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques. Somme des carrés et des cubes des n premiers nombres entiers.

Logarithmes vulgaires. Usage des tables à cinq décimales. — Intérêts composés et annuités.

Coordonnées d'un point. Représentation d'une droite par une équation du premier degré. Coefficient angulaire d'une droite. — Construction d'une droite par son équation.

Variations et représentations graphiques des fonctions :

$$y = ax + b\,;\; y = \frac{ax + b}{a'x + b'}\,;\; y = ax^2 + bx + c\,;$$
$$y = ax^4 + bx^2 + c.$$

Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Application à l'étude de la variation, à la recherche des maxima ou des minima de quelques fonctions simples, en particulier des fonctions de la forme

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c}\,;\; x^3 + px + q,$$

où les coefficients ont des valeurs numériques.

Dérivée de l'aire d'une courbe regardée comme fonction de l'abscisse. (On admettra la notion d'aire.)

[Le professeur laissera de côté toutes les questions subtiles que soulève une exposition rigoureuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue les applications et ne craindra pas de faire appel à l'intuition.]

Trigonométrie. — Fonctions circulaires. Addition et soustraction des arcs. Multiplication et division par 2. — Résolution des triangles.

Applications de la trigonométrie aux diverses questions relatives au levé des plans.

[On ne parlera pas de la construction des tables trigonométriques.]

Géométrie. — Droite. Angles. Parallélisme. Polygones. Cercle.

Plan ; droites et plans. Angles dièdres ; angles polyèdres.

Translation. Rotation. Symétries.

Homothétie et similitude. Relations métriques. Polygones réguliers.

Prisme, pyramide, cylindre, cône, sphère.

Aires et volumes.

Puissance d'un point par rapport à un cercle et par rapport à une sphère. Axes radicaux. Plans radicaux.

Polaire d'un point par rapport à un cercle ; plan polaire d'un point par rapport à une sphère.

Inversion. Applications. Appareil de Peaucellier. Projection stéréographique.

Vecteurs. — Projection d'un vecteur sur un axe ; moment linéaire par rapport à un point ; moment par rapport à un axe.

Somme géométrique d'un système de vecteurs ; moment résultant par rapport à un point ; somme de moments par rapport à un axe.

Application à un couple de vecteurs.

Projections centrales. — Plan du tableau. Perspective d'un point, d'une droite, d'une ligne. Point de fuite d'une droite. Perspective de deux droites parallèles. Ligne de fuite d'un plan. Conception de la droite à l'infini d'un plan.

Coniques. — *Ellipse*. — Tracé ; tangente ; problèmes simples sur les tangentes. Equation de l'ellipse rapportée à ses axes. Ellipse considérée comme projection du cercle ; problèmes simples sur les tangentes ; intersection de l'ellipse et d'une droite.

Hyperbole. — Tracé ; tangente, asymptotes ; problèmes simples sur les tangentes. Equation de l'hyperbole rapportée à ses axes.

Parabole. — Tracé, tangente ; problèmes simples sur les tangentes. Equation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

Définition commune de ces courbes au moyen d'un foyer et d'une directrice.

Sections planes d'un cône ou d'un cylindre de révolution.

Géométrie descriptive. — Rabattements. Changement d'un plan de projection ; rotation autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection.

Application aux distances et aux angles : distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan ; plus courte distance de deux droites, dont l'une est verticale ou debout ou de deux droites parallèles à un même plan de projection ; perpendiculaire commune à ces droites. Angle de deux droites ; angle d'une droite et d'un plan ; angle de deux plans.

Projection du cercle. Sphère ; section plane, intersection avec une droite. Cône et cylindre à directrice circulaire ; plan tangent passant par un point ou parallèle à une droite ; ombres ; contours apparents ; sections planes. Cônes et cylindres circonscrits à la sphère. Ombres.

Représentation d'une surface par des courbes de niveau. Cote d'un point de la surface dont la projection horizontale est donnée. Pente d'une ligne tracée sur une surface. Lignes d'égale pente. Lignes de plus grande pente.

Application des considérations précédentes aux cartes topographiques.

Planimétrie et nivellement. Lignes et teintes conventionnelles. Lecture d'une carte et en particulier de la carte d'Etat-major. Usage de la carte sur le terrain.

Cinématique. — Unités de longueur et de temps. — Du mouvement. Sa relativité. Trajectoire d'un point. — Exemples de mouvement.

Mouvement rectiligne : Mouvement uniforme ; vitesse, sa représentation par un vecteur. Mouvement varié ; vitesse moyenne ; vitesse à un instant donné, sa représentation par un vecteur ; accélération moyenne ; accélération à un instant donné, sa représentation par un vecteur. Mouvement uniformément varié.

Mouvement curviligne. — Vitesse moyenne, vitesse à un instant donné définies comme vecteurs. Valeur algébrique de la vitesse. Hodographe. Accélération.

Mouvement circulaire uniforme, vitesse angulaire ; projection sur un diamètre, mouvement oscillatoire simple sur une droite.

Changement du système de comparaison. Composition des vitesses.

Exemples et applications (ne pas insister sur les applications purement géométriques).

Mouvement de translation d'un corps solide. Glissières rectilignes.

Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe. Arbres et coussinets. Pivots et crapaudines. Gonds et charnières.

Etude géométrique de l'*hélice*. Mouvement hélicoïdal d'un corps. Vis et écrou.

Transformations simples de mouvements étudiées au point de vue pratique : courroies de transmission, roues dentées, bielles et manivelles. (On n'étudiera pas le détail des mécanismes.)

Dynamique et Statique. — *Point matériel.* — Inertie. Force : sa représentation par un vecteur. Masse. Indépendance des effets des forces. Composition des forces.

Equilibre d'un point matériel libre. Equilibre d'un point matériel sur une courbe ou sur une surface. Equilibre d'un point matériel sur un plan quand on tient compte du frottement.

Mouvement d'un point pesant libre suivant une verticale.

Mouvement parabolique d'un point pesant.

Frottement de glissement. Mouvement d'un point pesant sur la ligne de plus grande pente d'un plan, avec ou sans frottement.

Travail d'une force appliquée à un point matériel. Unité de travail.

Travail d'une force constante, d'une force variable. Travail élémentaire. Travail total. Evaluation graphique. Travail de la résultante de plusieurs forces. Théorème des forces vives pour un point matériel. Exemples simples.

Forces appliquées à un corps solide. — Forces parallèles Centre des forces parallèles. Centre de gravité. Sa recherche dans quelques cas simples : triangle, trapèze, quadrilatère, prisme, pyramide.

Couples, composition des couples.

Réduction des forces appliquées à un solide à deux forces ou à une force et à un couple.

Conditions d'équilibre d'un corps solide. Cas de trois forces, de forces parallèles, de forces situées dans un même plan.

Equilibre d'un corps mobile autour d'un axe fixe, d'un point fixe ou bien assujetti à reposer sur un plan fixe.

Machines simples à l'état de repos et à l'état de mouvement. — Levier. Charge du point d'appui. Treuil. Poulie fixe et poulie mobile.

Moufles, cric, plan incliné.

On vérifiera que si une machine simple est en mouvement, les conditions d'équilibre étant remplies à chaque instant, le travail élémentaire de la puissance est égal et de signe contraire à celui de la résistance.

Enoncé du théorème général des forces vives. Application aux machines.

Travail moteur et travail résistant.

Résistances passives. Frottement.

Travail des résistances passives. Rendement d'une machine.

Indications sur l'emploi des volants et des freins.

Cosmographie. — *Sphère céleste.* Distance angulaire. Hauteur et distance zénithale. Théodolite. — Lois du mouvement diurne. Méridien. Pôle. Jour sidéral. — Ascension droite et déclinaison. Lunette méridienne.

Terre. Coordonnées géographiques. — Dimensions et relief de la Terre. — Mappemonde. Cartes.

Soleil. Mouvement propre apparent sur la sphère céleste. Ecliptique. Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes. Saisons. Année tropique et année sidérale.

Heure sidérale ; heure moyenne ; heure légale. — Calendriers julien et grégorien.

Lune. Mouvement propre apparent sur la sphère céleste. Phases. — Rotation. Variation du diamètre apparent. — Eclipses de Lune et de Soleil.

Planètes. Système de Copernic. — Lois de Képler.

Loi de Newton et ses conséquences. — Notions sommaires sur les distances, les dimensions, la constitution physique du soleil, des planètes et de leurs satellites. Comètes ; étoiles filantes ; bolides. — Etoiles ; constellations. Nébuleuses. Voie lactée.

Quatrième A — (2 heures normales).

Arithmétique. — Produit d'une somme ou d'une différence par un nombre. Produit de facteurs. Puissance.

Caractères de divisibilité par 2, 5, 9, 3.

Nombres premiers. Règles pratiques pour la décomposition d'un nombre en produit, de facteurs premiers, pour la recherche du P. G. C. D., du P. P. C. M.

Proportions. Exercices sur le système métrique, les fractions et les grandeurs directement et inversement proportionnelles. Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

Géométrie (Voir les Instructions). Usage de la règle, de l'équerre, du compas et du rapporteur.

Ligne droite et plan. Angles.

Triangles. Triangle isocèle. Cas d'égalité des triangles.

Perpendiculaire et obliques. Cas d'égalité des triangles rectangles.

Droites parallèles. Somme des angles d'un triangle, d'un polygone convexe. — Parallélogramme. Rectangle. Losange. Carré.

Cercle. Cordes et arcs. Tangente. — Positions relatives de deux cercles.

Mesure des angles.

Constructions élémentaires sur la droite et le cercle

Troisième A (3 heures normales).

Arithmétique. — Exercices sur le système métrique et les grandeurs directement et inversement proportionnelles.

Algèbre. — Nombres positifs et négatifs. Opérations. Applications concrètes. — Monômes ; polynômes. — Addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes. Identité :

$$x^3 - a^3 = (x - a)\ (x^2 + ax + a^2)$$

Division des monômes. — Equations numériques du premier degré à une ou à deux inconnues ; inégalité du premier degré à une inconnue.

Géométrie. — Problèmes et interrogations sur le programme de la classe précédente.

Points qui partagent une droite dans un rapport donné. — Lignes proportionnelles.

Triangles semblables. Définitions du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente d'un angle.

Définition des figures homothétiques. Polygones semblables. Pantographe.

Relations métriques dans un triangle rectangle.

Propriétés des sécantes dans le cercle. — Constructions de la quatrième proportionnelle et de la moyenne proportionnelle.

Polygones réguliers : carré, hexagone et triangle équilatéral.

Mesure de la circonférence du cercle (énoncé).

Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, des polygones, du cercle.

Rapport des aires de deux polygones semblables.

Seconde A, B (2 heures pendant le premier semestre).

Algèbre. — Exercices sur les équations du premier degré et la représentation des variations de la fonction $ax+b$.

Géométrie. — Du plan et de la droite dans l'espace.

Angle dièdre. Droites et plans parallèles. Droite et plan perpendiculaires.

Définitions des angles polyèdres, de la pyramide, du prisme.

Enoncé des règles relatives aux surfaces et aux volumes des prismes, pyramides, cylindres, cônes et sphères.

Première A, B (2 heures pendant le second semestre).

Algèbre. — Exercices sur les équations numériques du premier degré a une ou plusieurs inconnues, et du second degré à une inconnue; représentation des variations de x^2 et $\frac{1}{x}$.

Géométrie. — Mesure des angles. Figures planes semblables. Définition du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle compris entre 0 et 2 droits.

Relations métriques dans le triangle et dans le cercle. Mesure des aires planes.

Enoncé des règles relatives aux surfaces et aux volumes des prismes, pyramides, cylindres, cônes et sphères.

Classe de Philosophie
(2 heures pour les mathématiques; 1 demi-heure pour la cosmographie).

Mathématiques. — Rappel des principales règles relatives au calcul des nombres positifs ou négatifs; développements de $(a+b)^2$, $(a+b)^3$; idendité :

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\,(a^n+a^{n-1}b+\ldots\ldots+b^n).$$

Notions sur l'algèbre géométrique des Grecs : représentation d'un nombre par une ligne, d'un produit par la surface d'un rectangle; figures équivalentes aux identités :

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

Carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Construction d'un rectangle ayant un côté donné et équivalent à un rectangle donné.

Construction d'un rectangle équivalent à un carré donné, connaissant la somme ou la différence de ses côtés; expressions de ces côtés qui résultent de la construction.

Résolution algébrique de l'équation du second degré. Application au problème précédent; comparaison des résultats.

Avantages de la notation moderne et en particulier de l'introduction des nombres positifs et négatifs.

Détermination, au moyen de deux nombres positifs ou négatifs, d'un point d'un plan; représentation inverse d'un système de deux nombres ou moyen d'un point d'un plan.

Extension de la notion de coordonnées; longitude et latitude d'un point d'une sphère.

Représentation graphique de la variation d'un phénomène qui dépend d'une seule variable; courbes des températures, des pressions; application à la statistique. Notion de fonctions; représentation graphique de fonctions très simples :

$$y = ax, \quad y = ax + b, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}.$$

Construction d'une droite définie par une équation numérique du premier degré entre x, y; coefficient angulaire[1], ordonné à l'origine. Coefficient angulaire de la droite qui joint deux points.

Usage du papier quadrillé. Résolution de deux équations numériques du premier degré à deux inconnues par l'intersection de deux droites, des équations numériques de la forme :

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^3 + px + q = 0$$

par l'intersection des courbes (une fois tracées), ayant pour équations :

$$y = x^2, \quad y = x^3$$

avec la droite dont l'équation est $y + px + q = 0$.

Graphique des chemins de fer.

Courbes fournies par les appareils enregistreurs.

Construction de quelques courbes simples définies géométriquement; équations de ces courbes.

Notion de la tangente et de la dérivée. Exemples de tangentes obtenues géométriquement comme limites d'une sécante (cercle, parabole). Coefficient angulaire de la tangente : applications à quelques cas simples :

$$y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}.$$

Notions sur l'usage de la dérivée pour reconnaître le sens de la variation d'une fonction.

[1] Le coefficient angulaire sera défini comme étant le coefficient de x dans l'équation résolue par rapport à y, ou comme l'ordonnée du point d'abscisse égale à l'unité de la parallèle menée par l'origine.

Evaluation approximative de l'aire d'une courbe tracée sur du papier quadrillé en comptant les carrés contenus à l'intérieur de la courbe : limite de l'erreur fournie par le nombre des carrés que traverse la courbe; cette erreur peut être rendue très petite en employant un quadrillage très fin.

Aire du triangle obtenue comme la limite commune de deux sommes de rectangles dont l'une est inférieure, l'autre supérieure à l'aire cherchée. Aire de la parabole. Problème inverse de la recherche d'une dérivée. Aire d'un triangle, ou d'une parabole, obtenue par la recherche d'une fonction dont la dérivée par rapport à x est ax ou ax^2.

Application de la méthode infinitésimale à l'évaluation des volumes ou des surfaces des corps considérés en géométrie élémentaire.

Conseils généraux. — Le professeur n'oubliera pas que les élèves auxquels il s'adresse n'ont pas l'habitude des mathématiques; il évitera donc toute théorie abstraite; il ne mettra pas en avant les idées générales, mais cherchera à les faire ressortir sur des exemples particuliers développés avec la lenteur et le détail qu'il jugera nécessaires pour être bien suivi. Le programme précédent est destiné à le guider, mais ce n'est pas un programme strict. Le maître sera libre d'en développer plus ou moins certaines parties suivant l'aptitude de ses élèves, suivant l'intérêt qu'il aura su exciter en eux. Ces observations concernent en particulier les applications qui sont mentionnées à la fin du programme et qui, dans tous les cas, devront être traitées largement, sans trop s'attacher à la rigueur.

Il est recommandé au maître d'introduire dans son enseigement quelques notions historiques; ainsi il pourra parler de la méthode d'exhaustion chez les anciens (Euclide, Archimède) et donner quelques détails sur l'invention du calcul différentiel et intégral. Son but est de contribuer au développement philosophique de ses élèves en leur faisant acquérir des idées importantes.

Cosmographie. — Système de Copernic. — Le Soleil. Ses dimensions, sa distance à la Terre. Constitution physique, rotation, taches.
Notions sommaires sur les planètes. — La Terre. Forme et dimensions. Rotation, pôles, équateur, méridiens, parallèles. Longitude. Latitude.

La Lune. Mouvement. Constitution physique.

Comètes. Etoiles filantes. Bolides. — Etoiles. Nébuleuses. Voie lactée.

Les programmes ci-dessus seront obligatoires :

A partir de l'*année scolaire* 1905-1906, pour les classes de **Cinquième B** et **Quatrième A** (1er cycle), ainsi que pour la classe de **Seconde A, B, C, D** (2e cycle);

A partir de l'*année scolaire* 1906-1907, pour les classes de **Quatrième B** et **Troisième A** (1er cycle), ainsi que pour la classe de **Première A, B, C, D** (2e cycle);

A partir de l'*année scolaire* 1907-1908, pour la classe de **Troisième** (1e cycle), ainsi que pour les classes de **Philosophie** et de **Mathématiques** (2e cycle).

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1905-1906.

(Suite.)

Cambridge; *University*. — *Michaelmas term*, 1905. — A. R. Forsyth : Partial differential equations, 3 hours. — G. H. Darwin : Theory of potential and attractions, 3. — Sir R. S. Ball : Planetary theory, 3. — J. Larmor :

Electricity and magnetism, 3. — J. J. THOMSON : Properties of matter, 3; Electricity and matter, 2. — B. HOPKINSON : Applied mathematics, 2 ; Electricity, 2. — E. W. HOBSON : Vibrations and sound, 3. — H. F. BAKER : Introduction to theory of functions, 3 ; Solid geometry, 3. — H. W. RICHMOND : Analytic geometry, 3. — E. T. WHITTAKER : Theory of optical instruments, 3. — A. N. WHITEHEAD : Principles of mathematics. — A. BERRY : Elliptic functions, Bessel functions and Fourier series, 3. — MONRO : Hydrodynamics and sound, 3. — J. H. GRACE : Invariants and geometric applications, 3. — BARNES : Gamma functions, 3.

Lent term, 1906. — A. R. FORSYTH : Partial differential equations, II, 3. — G. H. DARWIN : Dynamical astronomy (elementary), 3. — Sir R. S. BALL : An elementary course on quaternions, 3. — J. LARMOR : Electrodynamics with optical applications, 3. — J. J. THOMSON : Electricity and magnetism, 3 ; Discharge of electricity through gases, 2. — B. HOPKINSON : Applied mathematics, II, 2 ; Electricity, II, 2. — E. W. HOBSON : Harmonic analysis, 3. — H. F. BAKER : Theory of Functions, 3 ; Analysis, 3. — E. T. WHITTAKER : The differential equations of applied mathematics, 3. — H. W. RICHMOND : Analytical geometry, 3. — R. A. HERMAN : Hydrodynamics, two courses, each three hours. — A. N. WHITEHEAD : Symbolic logic and its applications to mathematics. — A BERRY : Elliptic functions, 3, — C. T. BENNETT : Line geometry, 3. — E. W. BARNES : Linear differential equations, 3.

Easter term, 1906. — A. R. FORSYTH : Partial differential equations, III, 3. — J. LARMOR : Theory of gases and thermodynamics, 2. — J. J. THOMSON : Electricity and magnetism, 3. — E. W. HOBSON : Theory of the continuum, 3. — H. F. BAKER : Theory of functions, 3 ; Analysis, 3. — W. L. MOLLISON : Theory of potential and electrostatics, 3. — A. N. WHITEHEAD : Non-euclidean geometry, 3. — A. BERRY : Transformation of elliptic functions, 3. — HARDY : Integral functions.

Long vacation, 1906. — RICHMOND : Geometry, 3. — COATES : Electricity and magnetism. — LEATHEM : Physical optics. – YOUNG : Theory of invariants.

Oxford ; *University*. — Lecture List for Hilary Term, 1906 (à partir du 22 janvier). Mathematics. — W. ESSON : Comparison of analytic and synthetic methods in the theory of conics, 2 ; Synthetic geometry of cubics, 1. — E. B. ELLIOT : Elements of elliptic functions, 2 ; Theory of numbers, 1. — H. H. TURNER : Elementary mathematical astronomy, 2. — H C. PLUMMER : Practical work, observatory. — A. E. H. LOVE : Theory of the potential, 2 ; Elements of the differential and integral calculus, 2. — J. W. RUSSELL : Algebra of quantics, 2. — P. J. KIRKBY : Higher algebra, 1. — A. L. DIXON : Calculus of finite differences, 1. — J. E. CAMPBELL : Differential geometry, 2. — C. H. SAMPSON : Higher solid geometry (continued), 2. — C. H. THOMPSON : Dynamics of a particle, 3. — H. T. GERRANS : Hydrodynamics, 2. — C. E. HASELFOOT : Geometrical optics, 2 — A. L. PEDDER : Trigonometry, 1. — C. LEUDESDORF : Geometry (maxima and minima, inversion, &c.), 2. — A. E. JOLIFFE : Analytical geometry (continued), 2. — R. F. McNEILE : Integral calculus, 2. — E. H. HAYES : Elementary mechanics. 3.

Paris ; *Collège de France* (cours du 1er semestre 1904-1905). — Mécanique analytique et mécanique céleste ; M. HADAMARD, suppléant : Equations aux dérivées partielles de la mécanique des milieux continus (2 leçons par semaine). — Mathématiques ; M. HUMBERT, suppléant : Transformation des fonctions elliptiques et abéliennes (2 leçons par semaine). — Physique générale et mathématique; M. Brillouin : Théories moléculaires de la matière et particulièrement la théorie dynamique des gaz, en tenant compte des échanges d'énergie entre l'éther et la matière (1 leçon). Principales méthodes mathématiques de la physique générale appliquées à l'Elasticité et à l'Acoustique (1 leçon).

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'An 1906 publié par le bureau des Longitudes, avec Notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de près de 900 p. avec figures ; prix : 1 fr. 50 (franco, 1 fr. 85) ; Gauthier-Villars, Paris.

La librairie Gauthier-Villars vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, pour 1906. — On sait que ce petit volume compact fournit une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Cette année nous signalons tout spécialement la Notice de M. G. Bigourdan : *Les éclipses de Soleil. Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses,*

René Baire. — **Leçons sur les fonctions discontinues,** professées au Collège de France et rédigées par A. Denjoy. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-126 pages ; prix : 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Les fonctions discontinues sont-elles d'une nature totalement différente des fonctions continues ? Des considérations physiques extrêmement simples ont montré depuis longtemps qu'il n'en était rien. On peut chauffer une barre de façon tout à fait arbitraire et dans ces conditions la température peut être initialement une fonction discontinue de l'abscisse mais, dès que la barre sera abandonnée à elle-même, la température tendra à s'uniformiser d'un point à l'autre et sera une fonction continue de l'abscisse pour tout instant postérieur à l'instant initial. Remontons maintenant dans le temps en inversant les lois de la conductibilité thermique et nous concevons la possibilité de considérer la fonction discontinue primitive comme limite de fonctions continues. C'est là le premier point dont, s'occupe M. R. Baire mais dans un esprit très différent de ce qui précède. C'est au point de vue analytique seul qu'il considère le discontinu comme limite du continu. D'ailleurs les fonctions analogues à celle à laquelle nous venons de faire allusion ne rentrent que comme cas particulier dans celles considérées par l'auteur lesquelles peuvent exister lorsque la variable est dans un ensemble beaucoup plus général que celui des points d'un segment. A ce dernier point de vue, M. Baire a dû ajouter notablement à la théorie des ensembles ; on lui doit non seulement de beaux résultats mais de nombreuses définitions. Particulièrement intéressante est la considération des nombres *transfinis,* nombres ordinaux non entiers, et dont l'introduction est cependant nécessaire, si l'on peut s'exprimer ainsi, pour numéroter les éléments de certains ensembles.

Dans l'étude proprement dite des fonctions d'une variable, l'esprit pénétrant de l'auteur se révèle tout de suite avec la notion de semi-continuité. D'une façon extrêmement brève, on peut considérer en un point d'un certain ensemble une fonction f ayant un minimum m et un maximum M en ce point. L'ordinaire condition de continuité se traduit par la double égalité $f = m = \mathrm{M}$. Il y a semi-continuité quand l'une seulement de ces égalités a lieu. Un chapitre est consacré aux ensembles de points dans l'espace à n dimensions et l'on y retrouve avec une grande symétrie les considérations développées en détail pour l'espace à une dimension. Une des conclusions, les plus importantes du livre est relative aux développements de fonctions continues et discontinues en séries de polynômes. M. Baire n'a certainement pas livré toute sa pensée à cet égard; il nous renvoie pour terminer à un mémoire qui doit paraître incessamment aux *Acta mathematica;* le présent ouvrage y sera en tout cas une introduction aussi excellente que simple.

A. Buhl (Montpellier).

E. Borel. — **Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes,** professées à l'Ecole Normale supérieure et rédigées par Maurice Fréchet avec des notes par M. *P. Painlevé* et *H. Lebesgue.* — 1 vol. gr. in-8° de 160 pages; prix : 4 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Ce volume est le huitième de la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions.* Il envisage les fonctions de variables réelles dans les voies récemment ouvertes par des œuvres comme la thèse de M. Baire.

A vrai dire il est assez difficile de distinguer bien nettement, tout au moins à l'heure actuelle, ce qui revient au champ réel et au champ complexe. Beaucoup de développements en séries de polynômes peuvent presque toujours servir à représenter indistinctement des fonctions analytiques ou non mais, comme les auteurs qui se sont occupés de ces épineux problèmes ont commencé par séparer les deux champs, il est nécessaire de commencer par accepter cette démarcation.

Aussi bien le fait de se cantonner d'abord dans les variables réelles permet de préciser, avec le maximum de simplicité, une foule de questions relatives par exemple à la continuité des fonctions représentées par des séries à termes continus ainsi qu'à l'intégration de ces mêmes séries. A propos du premier exemple rappelons la condition classique de convergence uniforme, condition inattaquable mais trop solide peut-être, et qui a été remplacée par les conditions plus élastiques de *convergence simplement uniforme* et de *convergence quasi-uniforme* dues respectivement à MM. Bendixson et Arzela.

Quand au développement des fonctions de variables réelles en séries de polynômes c'est là un cas particulier du problème extrêmement général de la représentation analytique approchée de fonctions non analytiques. En ces points on sent nettement que M. Borel a tenu, à l'exemple de Weierstrass, a rejeter des considérations intuitives qui, si elles n'ont pas la valeur rigoureuse de sa pure analyse, peuvent être cependant grandement utiles. Echauffons arbitrairement une barre : par le fait même la température en un point de la barre est d'abord une fonction tout à fait quelconque (continue ou discontinue, analytique ou non) de l'abscisse de ce point. Au bout d'un temps fini, mais aussi court qu'on le veut, la température en question est devenue fonction analytique de la dite abscisse et par suite, en remontant le temps, la représentation analytique aussi approchée qu'on le voudra est toute trouvée. Que l'on mette cette idée en formules et l'on aura le procédé de Weierstrass et notamment la fameuse intégrale définie dont il se sert et qui n'a que le tort de paraître venir juste à propos sans qu'on sache pourquoi on a recours à elle plutôt qu'à une autre.

A la suite de la méthode de Weierstrass, M. Borel en expose d'autres dues à MM. Volterra, Lebesgue, Runge; il traite de l'extension de ces résultats aux fonctions de plusieurs variables et consacre des pages très intéressantes au problème de l'interpolation. La formule de Lagrange par exemple conduit bien à représenter une fonction par un polynôme mais, comme le remarque très justement l'auteur, il n'est pas sûr que la courbe parabolique ainsi employée se rapproche d'autant plus de la courbe arbitraire donnée qu'on donne un plus grand nombre de points de celle-ci. Aussi M. Borel tente de donner une théorie générale de l'interpolation qui ne soit pas soumise à des inconvénients de cette nature. La partie rédigée par lui se termine avec la représentation des fonctions discontinues. Ce que j'ai dit plus haut à propos de la méthode de Weierstrass montre immédiatement que le fait pour une fonction d'être représentable par une série de polynômes n'est nullement une preuve de continuité. C'est M. Baire qui a défini le premier les fonctions les plus générales représentables par des séries de polynômes. Le jeune et éminent analyste a donné aussi une classification des fonctions qui se rattache immédiatement au point de vue précédent. Les fonctions continues sont de classe zéro, les fonctions développables en séries de fonctions continues et qui ne sont pas continues sont de classe un, celles développables en séries de fonctions de classe un, et qui ne sont pas de classe un, sont dites de classe deux et ainsi de suite. Une fonction de classe n et représentable par une série multiple d'ordre n dont tous les termes sont des polynômes.

Voyons maintenant la note de M. Painlevé *Sur le développement des fonctions analytiques*. Le problème est de trouver un développement, valable non pas seulement dans un cercle comme le développement taylorien mais dans tout le plan sauf peut-être sur certaines demi-droites formant ce que M. Mittag-Leffler a appelé *l'étoile*. M. Painlevé obtient alors très élégamment des développements en séries de polynôme tels que ceux signalés pour la première fois par M. Fredholm. Le principe de la méthode peut s'exposer en deux mots. Considérons deux champs complexes, celui des τ et celui des t puis une transformation conforme changeant les points d'affixe 0 et 1 du premier en les points 0 et 1 du second et réciproquement. Soient $t = \varphi(\tau)$, $\tau = \chi(t)$ les formules définissant cette transformation choisie en outre de façon à changer un contour aussi aplati qu'on le voudra enveloppant le segment $0 - 1$ en un cercle $\bmod \tau = \text{const} > 1$. On a

$$f[\varphi(\tau)] = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \dots$$

ce qui, pour

$$\tau = 1, \quad \text{est} \quad f[\varphi(1)] \quad \text{ou} \quad f(1) .$$

Mais si l'on compare

$$t = \lambda_1 \tau + \lambda_2 \tau^2 + \dots$$

avec

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots ,$$

développement valable tout au moins dans le voisinage de l'origine, dans lequel on remplace t par la valeur de la formule précédente, on se convainc que A_0, A_1, A_2, ... sont des combinaisons linéaires et homogènes de a_0, a_1, a_2, ... et par suite $f(1)$, non représenté forcément par le développement précédent de $f(t)$ pour $t = 1$, l'est par

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

C'est ce que M. Painlevé appelle une *série génératrice normale*.

Le volume se termine par une seconde note de M. Henri Lebesgue qui revient sur le théorème de M. René Baire dont il a été question plus haut et par une troisième de M. Borel ou ce dernier s'attache à démontrer qu'il existe effectivement des fonctions dans toutes les classes de M. Baire.

A. Buhl (Montpellier).

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une commission internationale sous la direction de M. le D[r] H. Forster Morley. A *Mathematics*. — 1 vol., 201 p. ; prix : fr. 18. 75. Gauthier-Villars, Paris ;

Cette importante publication est due à l'initiative de la *Royal Society* de Londres qui, depuis une dizaine d'années, a réuni une série de conférences internationales en vue de la publication d'un *Catalogue international de la Littérature scientifique*. Les différentes branches scientifiques ont été réparties comme suit en 17 groupes et feront l'objet de 17 volumes annuels.

A. Mathématiques.	G. Minéralogie.	N. Zoologie
B. Mécanique.	H. Géologie.	O. Anatomie humaine.
C. Physique.	J. Géographie.	P. Anthropologie physique.
D. Chimie.	K. Paléontologie.	
E. Astronomie.	L. Biologie générale.	Q. Physiologie.
F. Météorologie.	M. Botanique.	R. Bactériologie.

Il s'agit, comme on le voit, d'une entreprise considérable qui est appelée à rendre de grands services dans tous les domaines de la science ; elle sera particulièrement bien accueillie dans les branches qui, moins favorisées que les sciences mathématiques, ne possédaient pas encore de périodiques spécialement consacrés à la bibliographie, tels que le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et la *Revue semestrielle de publications mathématiques*.

Chaque volume donne, par ordre méthodique, les titres des ouvrages et des mémoires publiés pendant une année dans les Recueils scientifiques, à partir du 1[er] janvier 1901. Nous voudrions pouvoir dire de *tous* les ouvrages et mémoires publiés, mais il est matériellement impossible, surtout dans les premiers volumes, d'être absolument complet.

Le présent volume est consacré aux mathématiques. Il contient, après diverses notes d'introduction et listes : *a*) une classification des différentes branches des mathématiques pures, suivie d'une table des matières (en quatre langues); *b)* le catalogue des ouvrages et mémoires par noms d'auteurs. puis *c)* par ordre des matières.

J. Classen. — **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** II. Band : *Magnetismus und Elektromagnetismus.* (Sammlung Schubert XLII.) — 1 vol. cart. in-8°, IX-251 pages; prix : Mk. 7 ; Gœschen, Leipzig, 1904.

Nous avons déjà fait connaître aux lecteurs de l'*Enseignement mathématique* (n° 5, septembre 1904) la première partie de l'ouvrage de M. Classen sur l'électricité et le magnétisme.

La deuxième partie, dont nous voulons maintenant dire quelques mots, a pour objet le magnétisme et l'électromagnétisme.

L'exposition du magnétisme, d'après les idées de Maxwell, est faite par une méthode tout à fait semblable à celle de l'électrostatique (première partie) et que nous avons cherché déjà de résumer ; mais les hypothèses fondamentales sont naturellement ici un peu diverses et pas toutes accessibles à l'expérience ; il en résulte plus d'une difficulté et l'auteur ne s'en cache d'ailleurs pas.

La partie vraiment intéressante est l'électromagnétisme. Le point de départ de M. Classen, comme celui de plusieurs auteurs, est la loi de Biot-Savart et celle de Faraday sur l'induction (lois intégrales). Mais l'auteur commence, selon nous très à propos, par une hypothèse que l'on pourrait nommer loi différentielle ou hypothèse élémentaire, et qui n'est pas susceptible de vérification directe; elle donne les deux systèmes d'équations différentielles de Maxwell-Hertz, qui, dès à présent, formeront la base de l'exposition systématique de toute la théorie. Après avoir montré qu'elles renferment toute la théorie des phénomènes du magnétisme et de l'électrostatique, etc., l'auteur va les appliquer à l'étude de la propagation des ondes hertziennes dans l'espace et dans les fils, et à celui des courants alternés.

Nous recommandons vivement la lecture du petit livre de M. Classen aux jeunes physiciens avant qu'ils abordent l'étude toujours difficile des mémoires originaux sur les théories modernes de l'électrodynamique. Ils y trouveront, avec de très nombreux rappels à l expérience, une théorie bien détaillée des principaux instruments de mesure, sans que la lecture soit arrêtée par des difficultés analytiques que M. Classen a eu soin d'écarter. Peut-être, croyons-nous, aurait-il été préférable d'employer les notations du calcul vectoriel fort utilisées maintenant dans toutes les théories électriques.

R. Marcolongo (Messine).

L. Couturat. — **L'Algèbre de la Logique.** 1 vol. de 100 pages in-8 écu; Collection Scientia. Prix : 2 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Dans ce nouveau volume de la collection Scientia, M. Couturat présente un exposé très clair des principes et des théories élémentaires de l'Algèbre de la Logique Fondée et développée au cours du XIX^me siècle par G. Boole et E. Schröder, cette science a pour but d'exprimer les principes du raisonnement, les « lois de la pensée ».

L'auteur se limite à l'Algèbre de la Logique classique et se place au point de vue purement formel, qui est celui des mathématiques. Il part de la relation d'inclusion $a < b$ (*a* est contenu dans *b*, ou *a* implique *b*), qu'il envisage comme notion première et par conséquent indéfinissable; a et b désignent des concepts ou des propositions. La relation $<$ peut se traduire approximativement par *donc*: $a<b$ ou a donc b.

Le premier principe ou l'axiome de l'Algèbre de la Logique est le *principe d'identité* $a<a$. Un second principe est celui du *syllogisme*:

$$(a<b)\ (b<c) < (a<c).$$

Puis viennent les trois opérations, *la multiplication* et *l'addition logiques* et *la négation* et leurs principales propriétés et applications. M. Couturat présente d'abord la méthode de Boole et de Schröder qui offre une grande analogie avec l'Algèbre ordinaire : résolution des équations par rapport aux inconnues et éliminations des inconnues. Il expose ensuite la méthode de Poretsky que l'on peut résumer en trois lois : la loi des formes, la loi des conséquences et la loi des causes.

Ce court aperçu montre, d'une façon très imparfaite, il est vrai, que l'Algèbre de la Logique est un algorithme possédant ses propres lois et susceptible d'être développé mathématiquement tant par sa forme que par sa méthode. Il s'agit d'une branche encore peu connue, surtout dans les pays de langue française : aussi faut-il savoir gré à M. Couturat d'en avoir fait l'objet de cet intéressant petit volume.

H. Fehr.

G.-O. James. — **Elements of the Kinematics of a Point and the Rational Mechanics of a Particle.** 1 vol. g. in-8°, XII, 176 p., prix : 2 Doll.; John Wiley & Sons, New-York, 1905.

Ce petit traité de Mécanique élémentaire sert en quelque sorte de préparation aux études supérieures des écoles américaines ; il est écrit avec une extrême clarté.

La théorie des vecteurs, qui désormais doit faire partie du cours de Mécanique, est limitée aux règles de la composition et de la dérivation ; si l'auteur avait exposé les éléments de ce qu'on appelle le calcul vectoriel, toute son exposition aurait gagné beaucoup en simplicité. La Cinématique et la Mécanique proprement dite considèrent seulement le point matériel libre ou assujetti à quelques liaisons simples. L'exposition des principes de la Dynamique (chap. IX) est faite avec étendue et précision. L'auteur suit M. Mach pour la définition de la masse, et Kirchhoff pour celle de la force ; il envisage celle-ci comme « *a purely mathematical and not physical concept* » (page 110).

Le livre ne contient pas beaucoup d'applications ; toutefois, on y trouve l'étude des mouvements harmoniques, celui du mouvement des projectiles dans le vide, même en envisageant l'influence de la rotation de la terre. Qu'il nous soit permis d'observer que la théorie du pendule de Foucault (§ 182) eût été susceptible d'une exposition plus simple et que les équations du § 163 peuvent s'intégrer quelle que soit la valeur de ω.

R. Marcolongo (Messine).

Henri Lebesgue. — **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,** professées au Collège de France. — 1 vol. gr. in-8° de IV-142 pages ; prix : 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1904.

Les aperçus résumés en ce volume sur les problèmes de l'intégration paraîtront à coup sûr nouveaux à bien des lecteurs qui d'eux mêmes n'auraient pas soupçonné l'utilité des recherches approfondies auxquelles se livre M. Lebesgue. Il faut cependant reconnaître que l'idée de fonction s'élargissant sans cesse, des notions telles que celle de l'intégration doivent s'élargir aussi et se perfectionner notablement sous peine de n'avoir plus aucun sens dans les nouveaux domaines où la théorie des fonctions nous entraîne. Nous n'en sommes plus à l'ancienne fonction, la plus importante sans doute, qui n'était qu'une ordonnée variant continuement avec une abscisse et dont l'intégrale existait au même titre que la notion d'aire. Nous considérons des fonctions dont la variable peut être dans des ensembles bien plus divers que celui des points formant un segment de l'axe des abscisses; pourvu qu'à une valeur de cette dernière prise dans l'ensemble corresponde une ordonnée nous avons une fonction au sens de Riemann. Qu'est-ce alors que l'intégrale? C'est la discussion approfondie de cette question qui fait l'objet des leçons de l'auteur. Il reprend la définition de Riemann et l'étend en la complétant. Remarquons spécialement le chapitre relatif à la mesure des ensembles où la notion d'ensemble mesurable au sens de M. Jordan (ensemble mesurable J) est heureusement rapprochée des notions d'intégrales par excès et par défaut dues à M. Darboux. Cela conduit tout de suite à une très belle et très générale conception de l'idée d'aire. Et rien dans ces nouvelles définitions, qui paraîtront peut être bien abstraites et bien quintessenciées à ceux qui ne se sont pas encore heurtés à l'insuffisance des anciennes conceptions, n'est cependant superflu. Ne connaissons-nous pas des courbes dont l'aire est indéterminée comme par exemple celle de M. Peano qui passe par tous les points d'un carré?

Signalons aussi le très intéressant rapprochement des courbes rectifiables et des courbes quarrables.

Si la première partie du volume tend à établir une distinction entre les fonctions intégrables et non intégrables, la seconde, étudie la notion de fonction primitive elle-même dans les cas où cette notion à la raison d'être. L'ouvrage est donc aussi complet qu'on pouvait le souhaiter, et cependant, grâce à l'habileté de M. Lebesgue, il résume de nombreux mémoires dus à Riemann, Dirichlet, Darboux, Cantor, Hilbert, Borel, Baire et autres savants adonnés à l'étude de ces délicates questions.

A. Buhl (Montpellier).

E. Lindelöf. — **Le Calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions.** 1 vol. gr. in-8° de 144 pages, prix 3 fr. 50; Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Ce volume est le neuvième de la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*. Il tranche de façon extrêmement nette sur les volumes précédents. Ces derniers, en effet, ont eu trait aux méthodes introduites tout récemment dans l'analyse et, dans des ouvrages comme ceux de MM. Lebesgue et Baire, on comprenait immédiatement que les auteurs exposaient leurs propres créations. M. Lindelöf nous ramène aux méthodes de Cauchy et rien à mon avis ne sera plus salutaire pour les jeunes géomètres souvent trop occupés de discuter des définitions, des idées logiques et qui délaissent et dédaignent le calcul, les opérations analytiques explicites, la supériorité esthétique indéniable que les égalités ont sur les inégalités. Que de changements à cet égard, je ne veux pas dire après des maîtres comme Cauchy, mais seulement après Hermite dont la mort est encore trop récente pour qu'on puisse oublier son œuvre.

Remercions donc M. Lindelöf de nous ramener dans ces magnifiques domaines.

Il nous rappelle d'abord les théorèmes généraux du calcul des résidus, l'usage qu'on peut en faire pour le développement des fonctions implicites et obtient en outre la célèbre formule de Lagrange ; il calcule aussi quelques intégrales définies et établit l'importante formule de M. Jensen. Nous voyons ensuite les formules sommatoires tirées du calcul des résidus lequel permet en effet d'exprimer la somme des valeurs que prend une fonction analytique pour des valeurs entières successives de la variable. La méthode résulte immédiatement de ce que le résidu de $\pi \cot \pi z f(z)$ relatif à $z = \nu$ (ν entier) est $f(\nu)$ et la formule ainsi obtenue, par des changements dans les variables ou dans les contours d'intégration, se présente sous des formes diverses et également intéressantes.

Des formules de cette nature, M. Lindelöf donne des applications variées et intéressantes. De nouvelles intégrales définies apparaissent et il exprime ainsi la constante d'Euler, les nombres Bernoulli, il étudie de même les sommes de Gauss. Si l'on cherche à effectuer le calcul explicite des intégrales définies introduites, celles-ci se prêtent, sous certaines restrictions, à des développements en séries qui constituent les formules sommatoires d'Euler et leurs analogues.

Voici maintenant les fonctions $\Gamma(x)$, $\log \Gamma(x)$, la formule de Stirling, l'étude dans tout le plan de

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

toutes choses éminemment intéressantes et perfectionnées par Hermite, Hadamard, Lerch, Hurwitz, etc...

L'ouvrage se termine par une solution particulière du problème du prolongement analytique d'une série de Taylor, solution étudiée non seulement par M. Lindelöf mais par MM. Mellin et Le Roy. L'égalité

$$\sum \varphi(\nu)\, x^\nu = \int_C \frac{\varphi(z)\, x^z\, dz}{e^{2\pi i z} - 1}$$

en donne l'idée primordiale. Le premier membre n'existe que dans un cercle alors que le second existe en dehors.

Ces courtes citations ne donneront qu'une idée insuffisante de l'ouvrage court mais cependant très riche dont on peut conseiller la lecture comme exemple d'idées aussi belles que fécondes. A. Buhl (Montpellier).

R. Marcolongo. — **Meccanica razionale** (Manuali Hœpli). — 2 vol. in-16°, 271 + 324 pages ; prix : 3 L. chaque volume ; Ulr. Hœpli, Milan.

La Collection Hœpli vient de s'enrichir de deux nouveaux volumes qui seront d'autant mieux accueillis qu'il manquait précisément un manuel consacré à la Mécanique rationnelle. M. Marcolongo, professeur à l'Université de Messine, semblait tout particulièrement désigné pour entreprendre la tâche assez difficile de condenser en deux petits volumes les notions essentielles de Mécanique rationnelle. S'il y est parvenu d'une manière aussi satisfaisante, c'est surtout grâce à l'emploi de la méthode vectorielle. Il est incontestablement plus simple d'opérer directement sur des vecteurs au lieu de faire intervenir les projections, l'exposé y gagne en clarté et en précision.

L'ouvrage est divisé en trois parties Les deux premières, consacrées à la Cinématique et la Statique font l'objet du premier volume ; la troisième contient la Dynamique et les principes de la Mécanique des fluides forme le volume II.

Spécialement destiné aux étudiants, cet ouvrage est appelé à leur rendre de précieux services non seulement par l'exposé clair et bien ordonné des notions théoriques, mais aussi par les nombreux exercices qui terminent chaque chapitre. H. Fehr.

H. Müller et M. Kutnewsky. — **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.** II. Teil, Ausgabe A. für Gymnasien. Zweite verbesserte und stark gekürzte Auflage. — 1 vol. in-8°, 273 p.; prix : Mk. 2,20 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce livre offre en réalité plus que ne l'indique le titre, puisqu'il contient aussi des problèmes de Géométrie analytique sur les coordonnées et les coniques ; ceux-ci envisagent les uns le calcul, tandis que les autres ont en vue des constructions.

Dans la première partie, on trouve, à côté de problèmes appartenant à la Planimétrie, des questions empruntées à la vie pratique. D'une manière générale les auteurs ont accordé une large place aux applications. La Physique fournit une série de résolutions d'équations : relations entre le volume, le poids et la densité; chute des corps, jet vertical ou oblique d'un mobile, plan incliné, gravitation; puis les lois de Mariotte, d'Archimède, mesure des hauteurs à l'aide du baromètre, chaleur spécifique, Photométrie, réflexion et réfraction de la lumière, mesures électriques, applications des lois d'Ohm et de Kirchhoff.

Tout maître de mathématique qui comprend les besoins modernes fera très bon accueil à ces exercices, ainsi qu'aux problèmes des domaines de la Géographie mathématique, de la Nautique et de l'Astronomie.

Cette édition *réduite* renferme en tout 930 numéros dont la plupart contiennent 3 à 6, quelquefois même 22-28 exemples. Elle fait partie de la remarquable série de manuels[1] publiés avec beaucoup de soin par la maison Teubner sous la direction de M. H. Müller professeur au Gymnase « Kaiserin-Augusta » de Charlottenbourg.

Nous recommandons vivement cet Ouvrage à l'attention de tous les maîtres de mathématiques. Ern. Kaller (Vienne).

Dr Prompt. — **Remarques sur le théorème de Fermat.** — 1 brochure in-12° de 32 pages. Imp. Allier frères, Grenoble, 1905.

Cette petite brochure est intéressante par son originalité. Des poètes ont utilisé des *sextines*, c'est-à-dire des ensembles de six vers que l'on répétait en permuttant les rimes d'une certaine manière. Le Dr Prompt remarque que si l'on applique les mêmes règles de permutation à un nombre quelconque d'objets, toutes ces combinaisons, qui peuvent s'écrire sous forme de

[1] *Prof. H. Müller's Mathematisches Unterrichtswerk*, in 4 Abteilungen.

tableaux carrés ou rectangulaires suivant les cas, ont des propriétés remarquables à rapprocher de celles des carrés magiques. Un nombre passe d'une colonne à une autre d'une sextine suivant un chemin bien déterminé et l'on peut se proposer inversement de déterminer le nombre de la sextine qui parcourt un cycle donné. Ces considérations conduisant à des théorèmes intéressants notamment à celui-ci que $2^p - 1$ est divisible par $p + 1$ si p est un nombre premier diminué de l'unité. On voit l'analogie avec l'un des célèbres théorèmes de Fermat, mais cependant la démonstration de M. Prompt ne paraît valable que pour le nombre 2. Il le reconnaît d'ailleurs lui-même et ne prétend publier sa brochure que pour signaler un mode de démonstration que l'on pourra peut-être généraliser. Il semble bien que son procédé relève un peu plus du hasard que de recherches méthodiques, mais il serait injuste cependant de ne pas reconnaître à ce travail assez de qualités pour intéresser les arithmologues. A. Buhl (Montpellier).

J. Reusch. — **Planimetrische Konstructionen in geometrographischer Ausführung,** mit 104 Figuren im text. — 1 vol. br. in-8°, X-84 pages ; prix M. 1 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Lorsque la solution d'un problème de Géométrie peut être construite par plusieurs procédés, il est naturel de chercher quel est *le meilleur*, si l'on sait exactement dire ce qu'il faut entendre par « *le meilleur procédé* » ; nous pensons qu'il serait bien difficile de donner à ces mots, pour tous les cas, une définition que tout le monde pourrait admettre ou qui permettrait de distinguer, parmi toutes les constructions connues ou possibles, une construction unique qui serait universellement prise pour la meilleure.

On pourrait, par exemple, considérer comme le meilleur procédé, celui qui exige le plus petit nombre d'opérations matérielles ; les hommes de métier, tels que les dessinateurs dans les bureaux techniques, qui ne s'inquiètent que des règles d'exécution indépendamment de tout raisonnement, penseront ainsi assez naturellement parce qu'ils pourront qualifier matériellement ce procédé comme étant le plus simple. Or, en supposant que l'on puisse retrouver, distinguer et compter, dans une figure géométrique, le nombre de toutes les opérations matérielles qui ont été effectuées, il est facile d'imaginer, pour des instruments déterminés, une formule présentant d'une façon claire, la plus ou moins grande complication du tracé de la figure.

M. Lemoine a, le premier, donné à cette idée une forme concrète que nous allons rappeler brièvement.

Si l'on suppose l'emploi de la règle, on peut vouloir distinguer deux opérations dont nous faisons suivre l'indication par des notations représentatives correspondantes :

Faire passer le bord d'une règle par un point . . . . op. : R_1 ;
Tracer une ligne en suivant le bord de la règle. . . . . . . op. : R_2.

On peut vouloir distinguer dans l'emploi du compas trois opérations :

Placer une pointe de compas sur un point donné . . . . . . op. : C_1 ;
Placer une pointe de compas sur un point indéterminé d'une ligne donnée . . . . op. : C_2 ;
Tracer une circonférence . . . . op. : C_3.

L'emploi de tout autre instrument tel que l'équerre, le compas de proportion, etc., donnerait lieu de même à des notations nouvelles, particulières aux opérations que l'on voudrait distinguer.

Toute construction géométrique faite avec la règle et le compas est donc représentée par le symbole

$$\text{op.} : (m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3), \qquad (1)$$

dans lequel m_1, m_2, n_1, n_2 et n_3 indiquent respectivement le nombre des opérations R_1, R_2, C_1, C_2 et C_3.

M. Lemoine appelle *Coefficient de simplicité* ou plus brièvement *simplicité*, le nombre $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$; il appelle *coefficient d'exactitude*, ou plus brièvement *exactitude*, le nombre $m_1 + n_1 + n_2$; m_2 est le nombre de droites tracées; n_3 est le nombre de circonférences tracées.

Les diverses constructions géométriques de la solution d'un problème pourront être comparées entre elles, au moyen du symbole (1), ou de tout autre symbole analogue, se rapportant à un plus grand nombre d'instruments et l'on comprend que cette comparaison a conduit, pour un grand nombre de problèmes, à la recherche de solutions nouvelles de plus en plus *simples* et a été féconde en excitant la sagacité et l'ingéniosité des géomètres. Ces recherches ont été classées sous le nom de *Géométrographie*, par M. Lemoine qui a donné à la *solution générale la plus simple* d'un problème, le nom de *Construction géométrographique*.

On voit donc que la *Géométrographie* a pour but de compter, en les distinguant, les opérations à exécuter, avec des instruments déterminés, pour obtenir la solution d'un problème de géométrie plane ; de chercher de nouvelles solutions exigeant moins d'opérations que celles déjà connues; de comparer entre elles les solutions connues.

Remarquons bien que M. Lemoine ne prétend pas établir une correspondance parfaite entre ses formules, ses définitions et les cas de la pratique ; c'est spéculativement qu'il admet que les opérations R_1, R_2, C_1, C_2, C_3, sont égales pour former les coefficients de simplicité et d'exactitude. Au reste, la géométrographie suppose que la feuille de dessin est aussi grande qu'il est nécessaire à l'exécution intégrale de la construction que l'on veut faire, que les instruments sont aussi petits ou aussi grands qu'il est utile, qu'un point est également bien déterminé, quel que soit l'angle sous lequel se coupent les deux lignes qui fixent le point, etc. (Voir E. Lemoine, *Géométrographie* ou *Art des constructions géométriques*. Paris, 1902).

Le travail de M. Reusch a pour but de répandre, dans les écoles, la méthode donnée pour amener systématiquement la simplification des constructions planimétriques; il contient un exposé historique intéressant, signale dans les travaux de Steiner un passage exprimant très clairement les soucis de ce géomètre au sujet de la plus ou moins grande complication des constructions de la géométrie plane, et montre tout le mérite de la formule de M. Lemoine.

M. Reusch, comme M. Bernès, ne fait pas de différence entre les opérations C_1 et C_2 du symbole de M. Lemoine, estimant avec raison peut-être, que la distinction entre les opérations C_1 et C_2 est pratiquement sans utilité, si elle ne l'est pas théoriquement ; il désigne par C_2 l'opération consistant à tracer une circonférence et prend donc, pour l'exécution d'une construction faite au moyen de la règle et du compas, le symbole

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2,$$

un peu plus simple que le symbole de M. Lemoine.

Le travail de M. Reusch contribuera puissamment, dans son pays d'origine, à propager le goût des méthodes géométrographiques, à faire naître de nouvelles recherches et à enrichir le domaine pratique de la Géométrie plane; il est désirable que les professeurs de Géométrie le fassent connaître à leurs élèves. F. Chomé (Bruxelles).

J. Richard. — **Notions de Mécanique.** — 1 vol. in-8° de 224 pages. Prix: 4 fr.; de Rudeval, éditeur, Paris, 1905.

Cet ouvrage contient toutes les matières des programmes de mathématiques A et B et renferme en outre de nombreuses applications pratiques.

Dans une introduction philosophique et historique, l'auteur définit le caractère de la Mécanique, signale sans insistance inopportune les difficultés qui affectent les fondements de cette science, notamment la notion de force, esquisse un aperçu historique, dont l'intérêt est manifeste pour une science encore en évolution, enfin donne quelques judicieux conseils à l'élève sur la manière d'étudier.

La première partie de l'ouvrage, de beaucoup la plus importante, est consacrée à la Statique. Après avoir établi la notion de la force statique au moyen du dynamomètre et énuméré les différentes espèces de forces, l'auteur expose en tous détails la théorie de leur composition, tout en traitant les nombreuses et intéressantes propriétés géométriques qui s'y rattachent, parmi lesquelles nous relevons celles qui sont relatives au centre de gravité et à l'emploi des coordonnées barycentriques; signalons encore, parmi les applications pratiques, la théorie des appareils à peser et celle de l'équilibre de quelques machines.

La deuxième partie, qui commence par un préambule sur le rapport anharmonique et les triangles homologiques, comporte des notions très étendues, bien que sommairement exposées, sur les polygones funiculaires et la statique graphique, avec applications pratiques, parmi lesquelles se trouve la théorie de la flexion des poutres droites.

La troisième partie comprend les premières notions de cinématique et les propriétés essentielles du déplacement d'une figure invariable dans un plan ainsi que l'étude des engrenages et de quelques systèmes articulés.

Enfin la quatrième partie est consacrée à des considérations générales sur les machines, après introduction des notions de travail et de force.

Cet ouvrage se recommande par l'ordre adopté dans l'exposition, l'élégante sobriété des démonstrations, la judicieuse répartition de l'espace entre les diverses matières, enfin par la très large part légitimement faite aux applications. G. Combebiac (Bourges).

R. Schröder. — **Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung.** — Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. — 1 vol. cart., 131 p.; prix: Mk. 1.60; B. G. Teubner, Leipzig.

Au moment où l'on tend à introduire dans l'enseignement secondaire supérieur les premières notions de calcul infinitésimal, ce petit volume mérite d'être signalé à tous ceux qui enseignent ces éléments. Les considérations théoriques sont limitées au strict nécessaire, par contre l'auteur donne un grand nombre d'exercices et d'applications. A ce point de vue c'est un excellent recueil à mettre entre les mains des élèves. Voici les grandes divisions du manuel :

Calcul différentiel : Notion et propriétés de la dérivée. — Application du Calcul différentiel à la détermination des formes indéterminées ; aux maxima et minima ; à l'étude des courbes planes.

Calcul intégral : La notion d'intégrale. Méthodes d'intégration. — Application du Calcul intégral à la détermination de l'aire de surfaces planes et à la rectification de courbes planes. — Application du calcul infinitésimal à la Mécanique.

M.-E. Wickersheimer. — **Les Principes de la Mécanique.** — 1 vol., 130 p., prix : 4 fr. Ch. Dunod, Paris.

On s'est beaucoup occupé, dans ces dernières années, du remaniement des fondements de la Mécanique, mais on doit convenir que les essais tentés jusqu'à présent en vue de cette reprise en sous-œuvre sont loin d'avoir donné toute satisfaction. M. Wickersheimer estime que, pour construire l'édifice nouveau que tout le monde attend, il faut d'abord que la démolition s'achève et que le terrain soit complètement déblayé. A cet effet, les notions essentielles de la Mécanique font successivement l'objet d'un examen approfondi, qui a pour effet de les dépouiller de la tare anthropomorphique, tout spécialement dénoncée par l'auteur.

C'est ainsi que le temps est réduit au rôle de variable indépendante dans le déplacement d'un corps quelconque et qu'une intéressante analyse de diverses expériences historiques montre que sa mesure n'est nullement impliquée dans l'idée de mouvement, mais n'est au contraire que le résultat d'une comparaison entre certaines vitesses. La question du mouvement absolu est approfondie. L'auteur met aussi en lumière les pétitions de principe cachées dans les méthodes classiques selon lesquelles sont introduites les notions de force et de masse. La notion de force statique soulève de vives critiques et semble devoir désormais céder le pas à la notion du travail ; celle-ci fait l'objet d'un développement important. Enfin un chapitre est consacré à la rotation de la terre. G. Combebiac (Bourges).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire des principaux périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXIX. Beijer, Stockholm.

Fasc. 3 et 4. — A. Wiman : Ueber die Nullstellen der Funktionen $E_a\,(x)$. — H. Poincaré : Sur la méthode horistique de Gyldén. — T. Brodén : Ueber eine Verallgemeinerung des Riemann'schen Problems in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — E. Maillet : Sur les nombres e et π et les équations transcendantes. — M. Lerch : Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers.

American Journal of Mathematics, edited by Frank Morley, published under the Auspices of the John Hopkins University. Vol. XXVII. The Johns Hopkins Press, Baltimore.

N° 3 (Juillet 1905). — G. W. Hill : Deduction of the Power Series Representing a Function from Special Values of the Latter. — Saul Epsteen and Heman Burr Leonard : On the definition of reducible Hypercomplex Number Systems. — Peter Field : Quintic Curves for which P = 1. — C. L. E. Moore : Classification of the surfaces of Singularities of the Quadratic Spherical Complex. — Leonard Eugene Dickson : Subgroups of Order a Power of p in the General and Special m-ary Linear Homogeneous Groups in the GF $[p^n]$.

N° 4 (Octobre 1905). — C. J. Keyser : Concerning certain 4-Space Quintic Configurations of Point Ranges and Congruences, and their Sphere Analogues in Ordinary Space. — G. A. Miller : Some relations between Number Theory and Group Theory. — J. E. Wright : The Differential Invariants of Space. — L. D. Ames : An Arithmethic Treatment of some Problems in Analysis Situs. — Heman Burr Leonard : Hypercomplex Number Systems. II.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Deuxième série. T. VI, 1904. E. Privat, Toulouse ; Gauthier-Villars, Paris.

Fasc. 3 et 4. — Edmond Maillet : Sur les équations de la Géométrie et la théorie des substitutions entre n lettres. — W. Stekloff : Théorie générale des fonctions fondamentales.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — 1905. second semestre, T. CXLI. Gauthier-Villars, Paris.

3. Juillet. — E. Picard : Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique.

17 Juillet. — Lœwy : Nouvelle méthode pour la détermination directe de la réfraction à toutes les hauteurs. — Ch. André : Appareil à éclipses artificielles de soleil. — L. Guichard : Sur les propriétés infinitésimales de l'espace non-euclidien. – Em. Cotton : Sur l'évaluation des erreurs dans l'intégration approchée des équations différentielles.

24 Juillet. — H. Padé : Sur la convergence de la Table des réduites d'une fraction rationnelle.

31 Juillet. — Lœwy : Etude de la réfraction à toutes les hauteurs. Formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. — Demoulin : Sur la théorie des surfaces et des enveloppes de sphères en Géométrie anallagmatique. — P. Boutroux : Sur les propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un. — A. Buhl : Sur de nouvelles séries de polynomes. — De Sparre : Sur le frottement de glissement.

3 Août. — Auric : Sur les fractions continues algébriques.

21 Août. — P. Painlevé : Sur les lois du frottement de glissement.

28 Août. — G. Darboux : Sur une équation différentielle du 4e ordre. — Ed. Maillet : Sur les nombres transcendants.

4 Sept. — Demoulin : Sur les enveloppes de sphères dont les deux nappes se correspondent avec conservation des angles.

11 Sept. — G. Darboux : Sur une équation différentielle du 4e ordre. — Demoulin : Sur deux systèmes cycliques particuliers. — Auric : Sur la généralisation des fractions continues algébriques. — Zervos : Sur le problème de Monge.

23 Sept. — P. Duhem : Sur les origines du principe des vitesses virtuelles.

30 Sept. — P. Painlevé : Sur les lois du frottement de glissement. — Rich. Fuchs : Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. — S. Bernstein : Sur les surfaces minima.

9 Oct. — G.-A. Miller : Groupes contenant plusieurs opérations de l'ordre deuxième.

16 Oct. — G. Remoundos : Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches. — Auric : Sur le calcul d'une arche en maçonnerie.

23 Oct. — Fr. Riesz : Sur les ensembles discontinus.

6 Nov. — Boutroux : Sur les relations recurrentes convergentes. — Padé : Sur les réduites d'une certaine catégorie de fonctions, — G. Zemplén : Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. — Hadamard : Remarque au sujet de la Note de M. Zemplén. — Crémieu : Recherches sur la gravitation.

13 Nov. — Stuyvaert : Sur les congruences des cubiques gauches. — Zoretti : Sur le développement d'une fonction analytique uniforme en produit infini.

20 Nov. — Fréchet : Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues. — Padé : Sur les développements en fractions continues de la fonction F $(h, 1, h', u)$ et la généralisation de la théorie des fonctions sphériques. — Duhem : Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. — Husson : Sur un théorème de M. Poincaré, relativement au mouvement d'un solide pesant.

27 Nov. — Fréchet : Les ensembles de courbes continues. — E. Lebesgue : Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier.

4 Déc. — Guichard : Sur la déformation des quadriques. — Brillonin : Inertie des électrons.

11 Déc. — Padé : Sur la convergence des fractions continues régulières de la fonction F $(h, 1, h', u)$ et de ses dégénérescences. — Stekloff : Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. — Boulanger : Théorie de l'onde solitaire qui se propage le long d'un tube élastique horizontal.

18 Déc. — Séance annuelle. Prix décernés et prix proposés (voir plus haut p. 49-52.)

26 Déc. — A. Demoulin : Sur les surfaces isothermiques et sur une classe d'enveloppes de sphères. — C. Carathéodory : Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. — W. Stekloff : Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution. — Clairin : Sur une transformation de certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von Emil Lampe. Band 34. Jahrgang 1903. G. Reimer, Berlin.

Hefte 1 u. 2 (p. 1 à 736). — Geschichte und Philosophie. — Algebra. — Niedere und höhere Arithmetik. — Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reihen. — Differential- und Integralrechnung. — Funktionentheorie, — Reine, elementare und synthetische Geometrie. — Analytische Geometrie.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer in Jena. 14. Band. Teubner, Leipzig.

Heft 7. — A. Korselt : Ueber die Grundlagen der Mathematik. — E.

Wælsch : Karl Josef Küpper. — N. Hatzidakis : Zum Nekrolog für Wilhelm Sehell. — G. Holzmüller : Zu den Bemerkungen des Herrn Ebner.

Hefte 8 und 9. — E. Study : Sir William Rowan Hamilton. — E. Study : Ueber Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen. — G. Majcen : Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Fläche 3. Ordnung. — Felix Bernstein : Die Theorie der reellen Zahlen. — A. Gutzmer : Kurze Bemerkung über gewisse lineare Differentialgleichungen.

Hefte 10. — F. Klein : Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. — Wilh. Fiedler : Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuer Zeit. — Paul Stäckel : Isometrische Flächenpaare. — Paul Stäckel : Mindings Beweis für die Stabilität des Gleichgewichtes bei einem Maximum der Kräftefunktion. — Bericht über die Jahresversammlung in Meran vom 24. bis 29. September 1905.

Hefte 11 et 12. — K. Hensel : Ueber die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen. — L Schlesinger : Ueber eine Darstellung des Systems der absoluten Geometrie. — E. Müller : Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie. — E. Müller : Beiträge zur Zyklographie. — R. Gans : Gravitation und Elektromagnetismus. — Hugo Dingler : Zur Methodik in der Mathematik. — Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. von Escherich, F. Mertens und W. Wirtinger, XVI. Jahrg. 1905. J. Eisenstein et C°, Wien.

Ch. Beyel : Eine Aufgabe über ein besonderes Viereck. — O. Biermann : Ein Problem der Interpolationsrechnung. — O. Biermann : Eine Divisionsprobe. — E. Fischer : Ueber quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. — R. Fischer : Ein Beitrag zur hyperbolischen Geometrie. — Th. Freud : Ueber die uneigentlichen bestimmten Integrale, — J. A. Gmeiner : Ueber die disjuntiven Konvergenz- und Divergenzkriterien zweiter Art für unendliche Reihen mit positiven Gliedern. — A. Guldberg : Ueber reduzible lineare homogene Differenzengleichungen. — H Hahn : Ueber Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. – H. Hahn : Ueber punktweise unstetige Funktionen. — H. Hahn : Ueber den Fundamentalsatz der Integralrechnung. — G. Huber : Auswertung einiger bestimmter Integrale mit Anwendung des freien Integrationsweges. — M. Lerch : Einiges über den Integrallogarithmus. — N. Niels : Notiz über den Integrallogarithmus. — N. Niels : Ueber die Stirlingschen Polynome und die Gammafunktion. — H. Oppenheimer : Ueber die Ausartungen der Schröterschen Konstruktion der ebenen Kurven dritter Ordnung. — J. T. C. Pohl : Arzelas Abhandlung : Sulle serie dei funzioni, parte prima. (Ueber die Funktionenreihen). — M. Radaković : Bemerkungen über die Summierung Fourierscher Reihen. — Th. Schmidt : Uneigentliche Projektion und Pilletsche Konstruktion. — E. Schrukka v. Rechtenstamm, Lothar Dr : Theorie der Polygonalreste. — H. Tietze : Ueber das Problem der Nachbargebiete im Raum. — H. Tietze : Ueber Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. — E. Wælsch : Nachruf Wilhelm Weiss. — E. Wælsch : Binäranalyse zur Geometrie des Dreiecks. — E. von Weber : Ueber die Beziehung zwischen Kegelschnitten und Kreisen und die Theorie des Imaginären.

Revue de Mathématiques (Revista di Matematica), publiée par G. Peano. — T. VIII. Bocca frères, Turin.

N° 4. — M. Cipolla : Teoria de congruentias intra-numeros integros. — F. Chionio : Super formula de Snell.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien. Math.-Naturw. Klasse. CXIII. Band, Jahrgang 1904. Gerold's Sohn, Wien.

Hefte I bis X. — A. Adler : Zur Theorie des Plücker'schen Konoids. — M. Allé : Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten. — Ueber infinitesimale Transformation. — E. G. Bausenwein : Aenderung des Peltiereffectes mit der Temperatur. — O. Biermann : Ueber das Restglied trigonometrischer Reihen. — G. Burggraf : Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1874 II. — Daublebsky v. Sterneck : Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie. — M. Herz : Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens : Problem der acht Punkte. — Fr. Hocevar : Ueber die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren. — L. Klug : Konstruktion der Perspektivumrisse und der ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung. — F. Löschardt : Ein Vorschlag zur Bestimmung der Venusrotation. — F. Mertens : Ueber eine Darstellung des Legendre'schen Zeichens. — J. Rheden : Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1890 III. — Th. Schmid : Zur Konturbestimmung der Flächen zweiten Grades. — A. Schœnflies : Ueber Stetigkeit und Unstetigkeit des Funktionen einer reellen Veränderlichen. — E. Wælsch : Ueber die lineare Vektorfunktion als binäre doppelquadratische Form. — Ueber die höheren Vektorgrössen der Kristallphysik als binäre Formen. — Ueber Reihenentwicklungen mehrfach binärer Formen — L. Weinek : Graphische Nachweise zur Olbers'schen Methode der Kometenbahnbestimmung. — K. Zahradnik : Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser, XXX. Jahrgang, 1905. Alf. Hölder, Wien.

N° 7. — F. Kemény : Das Mittelschulwesen der Vereinigten Staaten und die Unterrichtsabteilungen der Weltausstellung zu St. Louis 1904.

N° 8. — A. Pichler : Ueber die Darstellung der Zahlen als Summen arithm. Reihen. — Dr Erwin Dintzl : Arithmetisch-analytische Probleme. — H. Schwendenwein : Der Wechselschnitt beim schiefen Kreiskegel.

N° 10. — Aus dem Leben Petzvals.

N° 11. — E. Czuber : Die Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht vom österreichischen Standpunkte.

N° 9 et 12. — (Pas de mathématiques).

2. Livres nouveaux:

F. Amodeo. — **Lezioni di Geometria proiettiva** dettate nella R. Università di Napoli. Terza Edizione. — 1 vol. gr. in-8°, 456 p. ; prix : 12 lires; L. Pierro, Naples.

W.-W. Rouse Ball. — **Histoire des Mathématiques.** Edition française revue et augmentée, traduite de la troisième édition anglaise par L. Freund. T. I. — 1 vol. gr. in-8°, 422 p. ; Hermann, Paris.

E. Borel. — **Géométrie** premier et second cycles (Cours de Mathématiques rédigés conformément aux nouveaux programmes.) — 1 vol. in-18°, 383 p. ; prix : 3 fr. ; A. Colin, Paris.

O. Th. Bürklen. — **Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der**

Ebene. (Mit 32 Figuren.) *(Sammlung Göschen.)* — 1 vol. cart. in-16°; 196 p.; prix: Mk. 0,80 ; G. J. Göschen, Leipzig.

P. D. Chwolson. — **Traité de Physique.** Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande par C. Davaux. Edition revue et considérablement augmentée par l'Auteur suivie de Notes sur la Physique théorique par E. et F. Cosserat, *Tome* 1er. Premier fascicule, in-8°; 407 p. Introduction, Mécanique, Méthodes et Instruments de mesure avec 219 fig. dans le texte. Prix: 16 fr. A. Hermann, Paris.

A. Grévy. — **Géométrie théorique et pratique.** Deuxième édition. — 1 vol. cart. in-16°, 472 p.; prix: 3 fr. 50; Vuibert & Nony, Paris.

J. Horn. — **Gewöhnliche Differentialgleichungen** beliebiger Ordnung. *(Sammlung Schubert.)* — 1 vol. p. in-8°, 391 p.; prix 10 Mk.; G. J. Göschen, Leipzig

G Lejeune-Dirichlet. — **Vorlesungen über die Lehre** von den einfachen und mehrfachen **bestimmten Integralen,** herausgegeben von G. Arendt. — 1 vol. br. gr. in-8°, XXXIII, 476 p.; prix: 12 Mk.; Vieweg & Sohn, Braunschweig.

H. Müller & J. Plath. — **Lehrbuch der Mathematik** zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. 1 vol. in-8°, cart. 236 p.; prix: 4 Mk.; B. E. Teubner, Leipzig.

H. Müller & J. Plath. — **Sammlung von Aufgaben** zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen aus Realgymnasium. — 1 vol. in-8°, cart 259 p.; prix: 4 Mk.; B. E. Teubner, Leipzig.

G. Peano. — **Formulario mathematico,** editio V. Fasciculo 1: Logica mathematica. Arithmetica. Algebra. Geometria. Limites. Calculo differentiale. — 1 vol. in-8°, 304 p.: prix: 12 L.; Fratelli Bocca, Turin.

Fr. Rogel. — **Das Rechnen mit Vorteil.** Eine gemeinfassliche durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. — 1 vol. in-8°, 38 p.; prix: Mk. 0,80 : B. G. Teubner, Leipzig.

H. Schubert. — **Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis.** — 1 vol. in-16°, 218 p.; prix: 4 Mk.; G.-J. Göschen, Leipzig.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. — Dritter Jahrgang. — 1 vol. in-8°, 85 p.; prix: Mk. 2.80; B.-G. Teubner, Leipzig.

O. Staude. — **Analytische Geometrie** des Punktes, der Geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Uebungen über analytische Geometrie. — 1 vol. in-8°, 447 p. avec 387 fig. dans le texte ; prix: 14 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

F. G. Teixeira. — **Tratado de las Curvas especiales notables.** — 1 vol. gr. in-4°. 633 p.; Imprenta de la « Gaceta de Madrid » Madrid.

G. Vivanti. — **Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen,** Deutsch herausgegeben von A. Gutzmer. — 1 vol. cart. in-8°, 512 p.; prix: 12 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Vonderlinn. — **Parallelperspektive.** Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. (Sammlung Göschen.) — 1 vol. cart. in-16° avec 121 fig.; prix: Mk. 0,80; G.-J. Göschen, Leipzig.

H. Wieleitner. — **Theorie der ebenen algebraischen Kurven** höherer Ordnung. *(Sammlung Schubert.)* — 1 vol. cart. 313 p.; prix: 10 Mk.; G.-J. Göschen, Leipzig.

W. Wien. — **Ueber Elektronen.** Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Meran. — 1 vol. in-8°, 28 p.; prix: I Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

GIUSTO BELLAVITIS

1803-1880

GIUSTO BELLAVITIS
SA CORRESPONDANCE SCIENTIFIQUE

Le 6 novembre 1905, il y a eu exactement vingt-cinq ans que cessait de vivre dans la ville de Trezze, près Bassano, *le comte Giusto Bellavitis*. Admirable comme savant et comme citoyen, il a légué son nom à une théorie qui fut l'orgueil de sa vie, *la théorie des équipollences*. Rendre un hommage à sa mémoire est pour moi un devoir agréable à remplir, comme Italien et comme admirateur de sa doctrine. En publiant de lui des lettres[1] ou des fragments de lettres, pour les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*, je dirai préalablement quelques mots de sa vie si bien remplie.

---

[1] En avril 1901, j'envoyais à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* une question qui, sous le numéro 2137, a été insérée à la page 189 du tome VIII. Immédiatement après je recevais de M. le Professeur C.-A. Laisant, avec qui j'étais depuis quelque temps en relations amicales, un paquet de lettres, et le billet suivant : — « Vers la fin de l'année 1869, sur la prière de Hoüel, avec qui j'étais en correspondance, G. Bellavitis m'envoya deux de ses Mémoires. Comme je ne lisais pas un mot d'italien à cette époque, je lui répondis en le remerciant et lui exprimant mon regret de ne pouvoir le comprendre. De là sa première lettre où il me prodiguait avec une rare bienveillance des conseils qui me permirent, au bout de quelques semaines, de comprendre couramment un Mémoire mathématique italien. Notre correspondance, interrompue par les événements des fatales années 1870-71, fut ensuite reprise d'une façon régulière et se prolongea jusqu'à sa mort. J'ai conservé précieusement ses lettres et je suis heureux de les confier à mon ami M. Alasia pour la publication de la correspondance d'un grand géomètre, qui fut aussi un homme de grand cœur. On y trouvera la marque des qualités d'ingéniosité, de bon sens, de clarté, qui caractérisent l'esprit inventif de Bellavitis et la preuve surabondante de l'affectueuse bienveillance qu'il montrait aux plus humbles. »

Je publie deux de ces lettres et des fragments pris dans quelques-unes des autres, ayant un caractère trop familier pour être publiées dans leur entier.

Quelques mois après, exactement le 11 juillet 1902, M. Gabriel Torelli, le savant professeur de l'Université de Palerme, applaudissant à ma tentative, m'envoyait trois lettres qu'il possédait, l'une adressée à lui-même et les deux autres à deux jeunes mathématiciens qui appartenaient à une « Association des conférences mathématiques » fondée à Naples. Elles sont d'un grand intérêt scientifique et je les traduis intégralement. On les trouvera plus loin.

Bellavitis eut une correspondance active et très agréable avec de nombreux mathématiciens italiens et étrangers, parmi lesquels plusieurs ont malheureusement disparu, ce qui a rendu très pénible la recherche des lettres. Celles adressées à M. Buoncompagni, par exemple, ont été vendues à un inconnu par un marchand de livres d'occasion de la place S. Pietro in Vincoli, à Rome ; j'ai pu vérifier le fait moi-même ; celles adressées à M. Tortolini sont en possession de M. J. Halle, libraire à Munich, et en vente à un prix assez élevé ainsi que la correspondance de M. Tortolini lui-même avec plusieurs mathématiciens italiens. M. le professeur Barbarin, du Lycée de Bordeaux, a eu la bonté de se charger de la recherche des lettres adressées à Hoüel et il s'est mis en communication avec la famille de celui-ci : il est probable qu'il réussira. Les lettres adressées à M. Emmanuel Fergola, de l'Observatoire Royal de Naples, sont peut-être égarées ; c'est la crainte de ce savant astronome. Que sera-t-il advenu de la correspondance qui était entre les mains de MM. Cremona, Chelini, Casorati, Crelle, Terquem, Brioschi, Beltrami, Genocchi, Massalongo, Matteucci, Dorna, Fusinieri, Battaglini, Pegorini, etc ? Je poursuivrai mes recherches, dans l'espoir d'une réussite satisfaisante.

Bellavitis mérite une place des plus honorables parmi ceux qui par eux-mêmes et par leurs œuvres, peuvent servir de modèles à la jeunesse : il dut tout à lui, bien peu aux autres. — Né le 22 novembre 1803, à Bassano, village situé à 40 km. de Padoue, d'une noble mais très pauvre famille, il fut obligé d'abandonner les écoles, à peine adolescent, pour se placer comme copiste à la mairie de son pays natal ; à l'âge de 19 ans, de copiste il devint secrétaire ; il garda cette charge, trop modeste pour ses mérites et son talent, mais qui pourtant lui donnait le moyen de vivre, jusqu'à l'approche de sa quarantième année. — Mais ce n'était pas seulement dans l'ingrat travail de sa charge qu'il limitait son activité. Son père avait recherché lui aussi un soulagement à ses fatigues quotidiennes et aux persécutions de l'adversité dans l'étude des mathématiques : il partagea avec son fils ce qu'il avait appris par lui-même, et ce fut la seule richesse qu'il put lui laisser en héritage. Aussi dans les dernières années de sa vie G. Bellavitis répétait avec fierté qu'il n'avait eu que deux maîtres : son père et lui-même. Les heures de bureau accomplies, il courait vers sa modeste petite chambre, et là il s'adonnait pendant de longues heures à l'étude de sa science favorite, au moyen de livres qui ordinairement lui avaient été prêtés et que parfois il copiait, n'ayant pas la possibilité d'en acheter un exemplaire. En attendant, il avait commencé à publier les résultats de ses études, qui dès l'abord méritèrent l'attention des savants, par leur originalité et par la grande étendue des connaissances qu'ils dévoilaient chez l'auteur ; mais celui-ci continuait à être le modeste secrétaire de la mairie de Bassano. Dans une lettre à M. Laisant, datée du 27 décembre 1872, il complète lui-même ainsi sa biographie : « ...*Comme j'avais fait toutes mes études par moi-même et comme je n'avais pas suivi les cours officiels, il semblait que la carrière de l'instruction publique dut m'être fermée ; mais lorsque l'Institut Venitien fut rétabli par l'Empereur Ferdinand, j'y fus agrégé en 1840. Ce fait, l'amitié de quelques-uns et ma fortune constante me firent nommer (1842) Professeur de mathématiques au Lycée de Vicence ; ensuite, en 1845*[1], *Professeur de Géométrie descriptive à l'Université de Padoue, et après l'unification italienne (1867) je changeai cette chaire pour celle d'Algèbre complémentaire et Géométrie analytique. J'eus plusieurs amis, morts pour la plupart, à ma grande affliction. D'un caractère toujours gai, aimant les discussions sans jamais me passionner, libre-penseur, libéral, un peu républicain de sentiments. sincères et franc, je ne pouvais pas être agréable à la domination étrangère ; mais néanmoins je n'en souffris aucune persécution. Ces provinces libérées, beaucoup par ma fortune habituelle et peut-être*

[1] A cette époque, il obtint, sans examens et sans demande de sa part, le doctorat en mathématiques.

aussi parce qu'on jugeait que beaucoup de Professeurs n'avaient guère de sentiments italiens (après on découvrit que les autres étaient plus libéraux que moi), je fus par le Gouvernement nommé Sénateur; j'allai plusieurs fois à Florence[1] *et à Rome, mais l'école et ma famille m'attiraient bientôt à Padoue. Ici la vie m'est très agréable : mes concitoyens me nommèrent et jusqu'à présent me conservent conseiller municipal.* » — Dans sa modestie, Bellavitis ne manqua jamais d'attribuer à la fortune bienveillante ce qu'il ne devait qu'à sa tenace volonté, à son puissant esprit. Ennemi des louanges exagérées il voulut rédiger lui-même l'inscription[2] du marbre que, selon l'usage commun, ses parents auraient placé sur son tombeau ; et quand, en 1878, il prévoyait sa fin prochaine, il voulut écrire lui-même la lettre de faire-part de sa mort, en y mettant de sa main l'adresse de ses amis et laissant naturellement la date en blanc. A quelques-uns cela paraîtra peut-être un acte original ; mais cet acte montre assurément combien, en suivant la religion du vrai et du devoir, on affronte avec intrépidité le problème de l'au-delà[3].

L'activité scientifique de Bellavitis ne s'est pas limitée seulement au champ mathématique, il a voulu s'occuper aussi de météorologie, de chimie, d'histoire naturelle, d'économie, de géographie, de philosophie et même de littérature[4]. Certainement il n'a pas pu montrer dans ces questions la même compétence qu'il apportait dans les choses mathématiques ; mais dans ces écrits divers on rencontre une note toute particulière qui démontre la sûreté de jugement et la pénétration d'esprit du grand géomètre italien.

Sa « *Théorie des figures inverses* » parut en 1836 : c'est un travail de grand mérite et qui fut loué par tous les géomètres ; il y traite, par la méthode des équipollences dont il avait publié des

---

[1] Capitale de l'Italie jusqu'à la prise de Rome, en 1870.

[2] « *Si mon fils voulait conserver mon nom inscrit sur une pierre, je le prie de la faire murer en quelque endroit de* NOTRE, *c'est-à-dire, de* SA *maison, où elle pourrait être lue avec profit par quelques-uns de nos descendants ; hors de là, toute mémoire n'a pas de raison d'être.* »

Giusto Bellavitis
Naquit à Bassano (1803)
De Ernest et de Jeanne Navarini.
L'amour de l'étude
et d'heureuses circonstances
le firent
Professeur à Vicence (1842), à Padoue (1845–18...)
et Sénateur du Royaume d'Italie (1866)
Il fut conseiller municipal (1866-18...)
Il écrivit sur les mathématiques
et inventa la méthode des équipollences.
Epoux et père affectueux
il vécut heureux.

[3] G. Torelli. — *Commémoration de G. Bellavitis* à l'Académie Pontonienne de Naples.

[4] Les écrits de Bellavitis surpassent le nombre de 200.

essais depuis 1833, la transformation que Plücker avait établie depuis deux ans seulement, et il en donne des applications nouvelles et très importantes suggérant en même temps un beau principe de représentation. Mais son travail n'eut ni la publicité ni le succès qu'il méritait, et le principe de représentation développé par lui entra un peu plus tard dans le domaine géométrique, sous le couvert des noms de Thomson, de Liouville et de Möbius. Deux ans plus tard, il publiait l'« *Essai de géométrie dérivée,* » où il exposait à la jeunesse italienne les doctrines de Poncelet, de Steiner et de Chasles qui avaient ramené la géométrie synthétique à une forme dont la simplicité et la fécondité sont très remarquables.

Il consacra une attention toute particulière aux question qui de son temps constituaient les sujets préférés des mathématiciens: observateur éclairé et profond, il retrouvait dans les recherches des ses prédécesseurs et de ses contemporains des lacunes qu'il était utile de combler. Ce fut ainsi que de l'étude des coefficients dans les développements des « *potestés* »[1], il put déduire une longue succession d'intéressantes propriétés des nombres Bernoulliens et Eulériens, établissant des méthodes pour les calculer avec grande facilité et donnant de nombreux développements en séries, où ces nombres figuraient.

Mais ses recherches sur les imaginaires forment la plus belle page de son œuvre scientifique; adversaire implacable de l'introduction de ces quantités dans l'algèbre, il a toujours vaillamment combattu les méthodes par lesquelles les différents auteurs en exposaient la théorie, soutenant que les imaginaires devaient seulement être considérées comme des quantités géométriques. Cette aversion est certainement exagérée; elle ne peut trouver sa justification que dans la manière peu rigoureuse dont la théorie de ces quantités était exposée, même dans les plus célèbres traités; mais cette disposition a certainement contribué à féconder dans son esprit la méthode des équipollences, qui a été l'orgueil de toute sa vie. — *Les développements et les applications de la méthode des équipollences,* — dit-il dans une lettre à M. Laisant (28—VI—1873), *je les ai écrits en 1832 chez celle qui depuis a été ma femme chérie, pendant qu'elle m'accompagnait, travaillant ou chantant; vous voyez combien à cette méthode, je suis lié par de très chers souvenirs.* » Le travail de l'esprit et la poésie du cœur, deux rayons divins qui ne devaient cesser d'éclairer toute sa vie!

Mais pourquoi, demandera-t-on, cette méthode ne reçut-elle pas l'accueil que l'auteur espérait? — Le célèbre Hamilton [2] avait

---

[1] *Potesté* d'exposant positif exprime le produit $x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$, et *potesté* d'exposant négatif, la fraction $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}$.

[2] Né à Dublin le 3 août 1805, et mort dans cette même ville le 2 septembre 1865.

édifié, presque en même temps que Bellavitis annonçait les applications de sa méthode, un système d'imaginaires auxquelles il avait donné le nom de *quaternions ;* ses nombreux travaux, presque tous publiés dans le « *Philosophical Magazine* » sont ceux qui parurent quelques années après, en 1853, à Dublin en un volume de près de 900 pages, sous le nom de « *Lectures on quaternions* ». — Les quaternions et les équipollences sont deux algorithmes qui ont une commune ressemblance avec l'agorithme algébrique et une signification essentiellement géométrique. Mais alors que la méthode des équipollences est l'un des moyens les plus simples et directs de représentation des relations en grandeur et position, elle perd beaucoup de son mérite lorsqu'on l'applique aux figures de l'espace ; cela au contraire n'arrive pas pour la méthode des quaternions qui est donc plus générale. Bellavitis s'était pleinement rendu compte du défaut de généralité de sa méthode, car il en parle dans plusieurs de ses lettres ; mais il ne s'est jamais lassé de montrer tous les avantages qu'on pouvait en tirer, et il l'a appliquée à un très grand nombre de questions de géométrie et de mécanique qu'il publiait sous le nom de « *Revue des journaux* ». Son Mémoire capital sur cette méthode[1] est la « *Sposizione del metodo delle équipollenze* », inséré dans le volume pour 1854 des « *Mémoires de la Société italienne des sciences* », et qui ensuite fut traduit en français par M. C.-A. Laisant et en langue bohême par M. Zahradnik. Mais cette méthode, à peine publiée, a eu le malheur de se trouver, sans parler des quaternions, en présence d'une autre très puissante elle aussi, le *Calcul barycentrique* de Möbius. Bellavitis en plus d'une occasion reproche aux géomètres italiens d'avoir fait trop peu attention à la méthode inventée par lui, et il écrit[2] à M. Laisant, lorsque celui-ci allait commencer la traduction de sa « *Sposizione* » :

« *Je vous suis grandement obligé pour la peine que vous vous*

---

[1] En outre, il a publié sur les équipollences les travaux suivants :

Sur certaines applications d'une nouvelle méthode de géométrie analytique, dans la revue « Le Poligraphe » de Verone, juin 1833, t. XIII, pag. 53-61.

Essai d'une nouvelle méthode de géométrie analytique (Calcul des équipollences). — Annales dites de *Fusinieri*, 1835, in-4°, t. V, pag. 244-259.

Mémoire sur la méthode des équipollences. — Mêmes Annales, 1837, t. VII, 79 pages.

Solutions graphiques de certaines questions de géométrie recherchées par la méthode des équipollences. — Mémoires de l'Institut vénitien, 1843, in-4°, t. I, pag. 225-267.

Calcul des quaternions et ses relations avec la méthode des équipollences. — Actes du même Institut, 1858, t. III, et Mémoires de la Société italienne des Sciences, 1858, in-4°, t. I, 83 pages.

Exposition des nouvelles méthodes de la géométrie analytique. — Mémoires du même Institut, 1860, 159 pages.

Eléments de géométrie et de trigonométrie et de géométrie analytique, avec l'addition de l'exposition de la méthode des équipollences. — Padoue. 1862, 196 pages.

Revue des Journaux. — Actes du même Institut, 1859-1873.

Considérations sur la mathématique pure. — Mémoires du même Institut, 1867-1872.

[2] Lettre datée de Padoue, 27 décembre 1872.

donnez afin de faire connaître en France ma méthode des équipollences. Je vous avoue que depuis quarante ans j'ai la conviction que sous un nom ou un autre les principes de la méthode finiront par être adoptés, et cela pour les raisons que vous aussi avez justement indiquées. Mais je manque de persévérance et je fus aussi un peu infortuné. En Italie, personne n'a fait attention à mes idées, et, si après quelques années on en adopta quelques unes, on préféra les attribuer plutôt aux allemands. Quand Cauchy adopta et loua les idées de Saint Venant, je pris finalement la décision de lui écrire que j'avais employé et publié, moi aussi, des idées semblables bien longtemps auparavant; mais peu après, Cauchy mourut. J'envoyais aussi plusieurs mémoires à l'Académie des Sciences (de l'Institut de France), mais tandis que dans les comptes-rendus on annonçait tout au long les titres de tous les mémoires sur la trisection de l'angle, des miens on annonça le titre d'un seul en ajoutant « et plusieurs autres »!

..... M. Hoüel est pour moi un ami très cher et vraiment affectionné: il a beaucoup fait pour les équipollences, mais toutefois il ne considère pas la chose à mon point de vue. Observez la dernière partie de son CALCUL INFINITÉSIMAL : *il y considère les quantités dites* COMPLEXES *comme des termes algèbriques; et ensuite il en fait application à la géométrie; au contraire, le calcul de ces quantités et les quantités elles-mêmes sont essentiellement géométriques. Il faut rompre avec les anciennes idées des imaginaristes et rester dans le vrai champ géométrique; on ne doit pas se faire scrupule d'adopter quelques nouveaux mots et les deux signes* $\underline{\Omega}$ *et* ɜ. *MM. Bourget et Darboux, eux aussi, ont pour moi de la bienveillance, mais je ne saurais les importuner à ce propos*[1] *: faites donc vous-même ce que vous pouvez et ce que vous trouvez de mieux. Si vous vouliez bien me favoriser de quelques notes sur les équipollences, je serais très heureux de les publier dans mes* « REVUES » *(comme je l'ai fait pour des solutions que m'a envoyées M. Emile Français) et cela fera du bien aux équipollences en Italie vis-à-vis des nombreux mathématiciens qui n'estiment que les choses étrangères. Vous pouvez publier aussi ces mêmes travaux, s'ils y sont accueillis, dans vos Revues, mais il faudra que vous vous donniez la peine d'expliquer en détail les principes de la méthode, car il ne faut pas espérer qu'on se rappelle le mémoire où M. Hoüel les exposait.* »

A propos de l'origine de sa méthode, M. Bellavitis écrivait encore la lettre suivante à M. Laisant qui, ayant complété la traduction de la « *Sposizione* », lui en communiquait la préface :

---

[1] C'est-à-dire pour leur demander d'insérer dans les Revues françaises les traductions de ses Mémoires.

Padoue, 29-VI 1873.

Mon cher ami,

Je vous dois les plus grandes obligations pour la manière très favorable suivant laquelle vous présentez ma méthode des équipollences. Je m'aperçois que si, dès le commencement, je m'étais adressé aux mathématiciens français, la méthode ne serait pas tombée dans l'oubli où les Italiens l'ont laissée. J'envoyai, il y a bien longtemps, un écrit en langue française à Poncelet, mais je n'en reçus aucune réponse ; je m'adressai à Cauchy (qui approuvait et développait les idées de Saint Venant, comme je vous l'ai déjà indiqué, mais sa fin prématurée l'empêcha de s'occuper de moi. Je n'eus pas même de réponse de M. Möbius, bien que sous un certain point de vue, les équipollences puissent être considérées comme une généralisation de son calcul barycentrique ; plus tard, il adopta d'autres idées qui m'appartenaient, mais il ne me cita jamais : c'est la difficulté de la langue !...

A propos du grand génie que fut Cauchy et observant la date de ses « EXERCICES D'ANALYSE », *il vient d'abord à la pensée que c'est lui qui a été l'inventeur des fondements de la méthode des équipollences. Dans une note de mon* « ESSAI SUR L'ALGÈBRE DES INVARIANTS » *j'écrivais : M. Cauchy, dans un post-scriptum à l'un de ses Mémoires* (Mém. de l'Ac. d. Scienc. de l'Inst. de France, 1836, t. XXII, pag. 131) *expose plusieurs des principes fondamentaux adoptés également par moi dans cet* « ESSAI » *et il déclare comment, après mûre réflexion, il trouve favorable de substituer à la théorie des* IMAGINAIRES CONSIDÉRÉS COMME DES SYMBOLES LA THÉORIE DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES *exposée par Saint Venant dans son Mémoire inséré dans les Comptes Rendus pour 1845, t. XVI,* pag. 620. *Maintenant, on pourra ajouter ces autres citations : Comptes-Rendus, 3-IX-1849, t. XXIX, où Cauchy donne l'histoire de la représentation géométrique des imaginaires et dit qu'il lui semble que le meilleur parti est d'abandonner l'usage de* $\sqrt{-1}$ *et de le remplacer par la théorie des quantités géométriques :* « EXERCICES D'ANALYSE », 1847, t. IV, pag. 157-180. *Ces citations viennent apporter l'appui, non seulement du raisonnement, mais aussi d'une autorité indiscutée, à mon avis, que les imaginaires ne peuvent se justifier dans l'algèbre, mais que la géométrie présente un objet réel auquel on peut appliquer un calcul assujetti aux mêmes règles que le calcul algèbrique et qui l'embrasse comme cas particulier. Donc, toutes les fois que le signe* ꝫ *s'évanouit, on a une vérité sur les quantités algèbriques.*

Vous pouvez aussi remarquer ce qui suit ; bien qu'il soit probable que la première idée sur les équipollences soit née en moi en observant la manière par laquelle Buée et Argand PRÉTENDAIENT

REPRÉSENTER LES IMAGINAIRES, *toutefois, je nie absolument qu'il soit possible de représenter ce qui est impossible et absurde ; au contraire, par un simple signe* ℑ *on peut représenter le rapport très réel de deux droites perpendiculaires ; la méthode des équipollences est une théorie géométrique qui subsiste en elle-même et qui a, par dessus tout, une signification géométrique : en outre, elle est le seul fondement d'un calcul qui embrasse le calcul algébrique. Je voudrais vous tirer de votre point de vue que la théorie des imaginaires et sa représentation possèdent les deux avantages auxquels vous faites allusion, pour vous amener au mien ; je voudrais aussi voir substituer l'ordre logique à l'ordre historique. Je vois que Mourey s'est également laissé guider par le dernier point de vue plutôt que par le premier ; par le mien plus que par celui où vous vous placez.* »

Il faut remarquer la variété des sujets auxquels M. Bellavitis touchait successivement dans sa correspondance, pas tous géométriques : dans une autre lettre à M. Laisant, datée de décembre 1874, par exemple, il commence à lui annoncer l'envoi d'un discours sur la logique en ajoutant que c'est son testament philosophique et que probablement il sera aussi son testament mathé-mathique : il parle encore des solutions de deux questions par les équipollences et après, rompant soudainement, il saute à un nouveau sujet : « *J'espère que vous resterez toujours dans la foi orthodoxe : nier la théorie des parallèles c'est nier toute la géométrie, nier la seule chose dont nous sommes pleinement convaincus : il n'est pas possible de croire qu'il y a des vérités géométriques démontrées rigoureusement et de les admettre comme conséquences nécessaires des définitions : tout dépend de notre connaissance du monde matériel. Nous savons bien peu de chose sur la géométrie à deux dimensions ; très peu sur celle à trois ; voudrions-nous échafauder des théories fantastiques sur une chimère dont nous ne pouvons nous former aucune idée ?* » Au milieu de ces considérations géométriques, s'intercalent, comme dans certaines autres lettres, des considérations sur l'actualité politique ; il parle, comme s'il s'agissait encore de géométrie, des chances d'un Napoléon IV par la volonté du peuple ou d'un Henri V par droit divin ; de la régence de l'Espagnole, de l'ascension au pouvoir d'un Rouher, connu chez nous par son fameux « *Jamais à Rome* » ; des grandes sympathies des Italiens pour la France, de la fortune de l'Italie qui, en grande partie, a été due au caractère et aux paroles de l'empereur d'Autriche, son plus grand ennemi. Selon lui, le grand bien que les Français ont fait à l'Italie « on ne peut se passer de l'attribuer aux deux Napoléon » ; il dit que « Thiers fut toujours hostile aux Italiens », etc. C'est ainsi qu'il se reposait des considérations mathématiques ! Même quand il ne s'occupait que de sa science préférée, il ne s'arrêtait jamais sur un même sujet ; mais il en touchait au contraire plusieurs; comme exemple, je rapporte, en raison de l'intérêt des questions dont il s'agit, les passages suivants d'une lettre que, deux mois seulement avant sa mort, il adressait à M. Laisant :

« ..... *J'ai parlé moi aussi des centres harmoniques de plusieurs points par rapport à un point fixe. Par exemple, par rapport à un point G et à une conique, la polaire est le lieu des centres harmoniques des points d'intersection de cette courbe avec une droite menée par G, et cela aussi quand les intersections sont représentées par des points imaginaires communs à la droite et à la conique. Peut-être ce théorème pourra-t-il s'appliquer aux courbes d'ordre supérieur au deuxième.*

Le théorème cité par M. Collignon (pag. 44) *était connu de Newton. L'équipollence* $\mathrm{FM} \mathrel{\underline{\Omega}} \varphi^2 - \mathrm{x} + 2\varphi\vartheta$ *représente une parabole (duplicatrice de la droite),* $\mathrm{FA} \mathrel{\underline{\Omega}} -1$ *en donne le sommet, et si* φ *indique le temps, elle exprime le mouvement d'un corps qui tombe (car* $\mathrm{d}^2\mathrm{M}$ *est constant). Le point* N, *où la directrice est rencontrée par la normale en* M *est donnée par*

$$\mathrm{FN} \mathrel{\underline{\Omega}} \varphi^2 - 1 + 2\varphi\vartheta + (\varphi^2+1)(\varphi\vartheta - 1) \mathrel{\underline{\Omega}} -2 + \varphi(\varphi^2+3)\vartheta.$$

Le point S *donné par* $\mathrm{FS} \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{1}{4}\mathrm{FN}$ *est le centre du cercle* AFM : *Newton avait observé que si* S *est animé d'un mouvement vers le centre d'attraction* F, *en désignant par* d *les dérivées par rapport au temps* t *donné par* $\varphi^3 + 3\varphi = \mathrm{t}$, *on a*

$$d\mathrm{M} \mathrel{\underline{\Omega}} 2(\varphi + \vartheta)d\varphi. \qquad d^2\mathrm{M} \mathrel{\underline{\Omega}} 2(\varphi + \vartheta)d^2\varphi + 2d\varphi^2,$$

et à cause de

$$3(\varphi^2 + 1)d\varphi = 1, \qquad 3(\varphi^2 + 1)d^2\varphi + \vartheta\varphi d\varphi^2 = o,$$

on obtient aisément par substitution

$$d^2\mathrm{M} \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{2}{9(\varphi^2+1)^2} - \frac{4\varphi(\varphi+\vartheta)}{9(\varphi^2+1)^2} \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{-2\varphi^4 + 2 - 4\varphi\vartheta}{9(\varphi^2+1)^3} \mathrel{\underline{\Omega}} -\frac{2}{9}\cdot\frac{\mathrm{FM}}{9r^3\mathrm{FM}},$$

formule qui représente l'attraction en rapport inverse du carré de la distance FM. *Au moyen du centre mobile on peut aisément marquer sur la parabole la position de* M *à chaque instant.*

Les recherches de M. Lucas (pag. 25, 35, 36) *qui se rapportent aux tissus sont pour moi complètement neuves.*

J'avais des doutes sur l'absolue généralité du théorème de Chasles sur les caractéristiques : je verrai très volontiers ce que M. Halphen y a substitué. »

Voici maintenant les trois lettres que M. G. Torelli, comme je l'ai dit plus haut, a bien voulu m'envoyer; je saisis cette occasion pour lui renouveler mes remerciements.

I. *Aux jeunes mathématiciens appartenant à l'Association des conférences mathématiques*; *Naples.*

Vous avez voulu m'agréger à votre Société et je vous ai remercié par une lettre datée du 19 du mois passé ; je voudrais profiter de votre politesse pour venir converser avec vous ; mais pardonnerez-vous à un vieillard le tort d'étudier des choses déjà répétées souvent pour vous entretenir de sujets peu intéressants ?

Des formules se présentent fréquemment qui semblent neuves seulement pour avoir été signalées sous une autre forme. J'ai déjà parlé de l'utilité de la considération particulière des coefficients du développement des *potestés* (facultés ou factorielles)

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\ \ldots\ldots\ (x+n-1)$$

en puissances, et réciproquement des puissances en « potestés » : je désigne ces coefficients par la notation $(n)_r$, en sorte que j'ai

$$[x]^n = x^n + (n)_1 x^{n-1} + (n)_2 x^{n-2} + \ldots,$$

$$x^n = [x]^n - (1-n)_1 [x]^{n-1} + (2-n)_2 [x]^{n-2} - \ldots$$

Nous avons par exemple,

$$[x]^3 = x^3 + 3x^2 + 2x\ ,$$

$$[x]^{-3} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = x^{-3} + (-3)_1 x^{-4} + (-3)_2 x^{-5} \ldots$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4} + \frac{25}{x^5} + \frac{90}{x^6} + \cdots$$

$$x^3 = [x]^{-3} - 3[x] + x\ ,$$

$$x^{-3} = [x]^{-3} - (4)_1[x]^{-4} + (5)_2[x]^{-5} - \ldots$$

$$= [x]^{-3} - 6[x]^{-4} + 35[x]^{-5} - 225[x]^{-6} + 1624[x]^{-7} - \ldots$$

Voici la table des coefficients $(n)_r$ qui se calcule par la relation

$$(n+1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1}\ :$$

n	$r=1$	2	3	4	5	6	7	8
-5	15	140	1050	6951	42525			
-4	10	65	350	1701	7770	34105	145750	
-3	6	25	90	301	966	3025	9330	28501
-2	3	7	15	31	63	127	255	511
-1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$
2	1	$\frac{-5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{-1}{240}$
3	3	2	$\frac{-3}{4}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-4}{315}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{5040}$
4	6	11	6	$\frac{-251}{120}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{-221}{2520}$	$\frac{-11}{420}$	$\frac{199}{5040}$
5	10	35	50	24	$\frac{-475}{60}$	$\frac{863}{504}$	$\frac{-95}{252}$	$\frac{-47}{720}$
6	15	85	225	274	120	$\frac{-19087}{504}$	$\frac{1375}{168}$	$\frac{-9829}{5040}$
7	21	175	735	1624	1764	720	$\frac{-5257}{24}$	$\frac{33953}{720}$
8			1960	6769	13132	13068	5040	$\frac{-1070017}{720}$
9					67284	118124	109584	40320

Comme on a

$$(n)_1 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (n)_2 = \frac{(3n-1)n(n-1)(n-2)}{2.3.4},$$

$$(n)_3 = \frac{n(n-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}, \ldots$$

pour $r+1>n>-1$, on a aussi $(n)_r=0$; mais si nous supprimons dans ces expressions le facteur qui les annule, nous obtenons d'autres coefficients que je vais indiquer par $\frac{1}{o}(n)_r$, et qui sont les termes fractionnaires de la table précédente. Ils se calculent à partir de

$$\frac{1}{o}(1)_2 = \frac{1}{12}\,, \quad \frac{1}{o}(1)_4 = \frac{-1}{120}\,, \quad \frac{1}{o}(1)_6 = \frac{1}{252}\,, \quad \frac{1}{o}(1)_8 = \frac{-1}{240}\,,$$

$$\frac{1}{o}(1)_{10} = \frac{1}{132}\,, \quad \frac{1}{o}(1)_{12} = \frac{-691}{32720}\,.$$

et ils dépendent des nombres Bernoulliens.

Ces coefficients donnent bien des développements en série, comme,

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^n = 1 + \frac{(n)_1}{[1-n]^1}x + \frac{(n)_2}{[1-n]^2}x^2 + \ldots..$$

$$+ \frac{(n)_{n-1}}{[1-n]^{n-1}}x^{n-1} + \frac{(n)_n}{[1-n]^{n-1}o}x^n + \frac{(n)_{n+1}}{[1-n]^{n+1}}x^{n+1} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^n = 1 + \frac{(-n)_1}{[1+n]^1}x + \frac{(-n)}{[1+n]^2}x^2 + \text{etc.}$$

Par exemple,

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{2.1}x^2 - \frac{3}{2.1.4}x^3 + \frac{19}{2.1.1.120}x^4 - \ldots$$

$$\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^n = 1 - \frac{(1+n)_1}{[1+n]^1}x + \frac{(2+n)_2}{[1+n]^2}x^2 - \frac{(3+n)_3}{[1+n]^3}x^3 + \ldots$$

$$\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^n = 1 + \frac{(1-n)_1}{[n-1]^1}x + \frac{(2-n)_2}{[n-2]^2}x^2 + \ldots..$$

$$+ \frac{(-1)_{n-1}}{[1]^{n-1}}x^{n-1} + \frac{(o)_n}{[o]^n}x^n + \frac{(1)_{n+1}}{[-1]^{n+1}}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Il est facile d'apercevoir que $(n)_r$ est la somme des produits r à r des nombres 1, 2, 3, ..., $n - 1$, et que $(n)_r$ est la somme des produits r à r des nombres *égaux ou non* 1, 2, 3, ..., n : à ce propos les notations usitées dans le *Journal de Mathématiques* (de M. Battaglini) sont,

$$S_{r,i} = (i+1)_r \;, \qquad \sigma_{r,i} = (1, 2, 3 \ldots, i)^r = (-i)_r \;.$$

Ainsi la *Quest.* 56 du t. IV (page. 344) de cette Revue se réduit à une des formules précédentes : M. Sylvester ajoute que $(n)_r$ est divisible par chacun des nombres premiers qui sont en même temps $> (r+1)$, $> (n-r-1)$ et $< (n-1)$: il est exact aussi, que $(-n)_r$ est divisible par tous les nombres premiers qui sont en même temps $> (r+1)$, $> (n-1)$, et $< (n+r-1)$ Quest. 53, IV, pag. 319). Par exemple, $(-5)_3 = 1050$ est divisible par 5 et par 7. Je n'en vois pas la démonstration.

Il n'y a pas lieu ici de parler des nombres Bernoulliens car il est plus opportun de considérer les $\frac{1}{o}(1)_r$ compris dans la table qui précède, ou bien les $b_2 = 1$, $b_4 = 2$, $b_6 = 16$, $b_8 = 272$, $b_{10} = 7936$, $b_{12} = 353792$ pour lesquels M. Trudi donne la formule

$$b_{2n} = [1]^{2n-1} - 4(\overset{n}{N}_{n-1} + \overset{n}{N}_{n-3} + \overset{n}{N}_{n-5} + \ldots) \quad .$$

Il faudrait rechercher s'il existe une autre formule analogue pour les nombres $b_3 = 1$, $b_5 = 5$, $b_7 = 61$, $b_9 = 1385$, $b_{11} = 50521$, $b_{13} = 2702765$, etc.

Entre les nombres $(n)_r$ existent plusieurs relations : les suivantes sont des cas particuliers :

$$(n)_r - (n)_{r-1}(r-n+1)_1 + (n)_{r-2}(r-n+1)_2 - \ldots \pm (r-n+1)_r = n-r]^r \ ;$$

pour $n = 5$, $r = 3$ on a,

$$50 - 35 + 10 - 1 = 24 = [2]^3 \ ;$$

$$(n)_r - (n)_{r-1}(r-n)_1 + (n)_{r-2}(r-n)_2 - \ldots\ldots \pm (r-n)_r = o \ ;$$

$$50 - 35 \,.\, 3 + 10 \,.\, 7 - 1 \,.\, 15 = 0 \ ;$$

$$(n)_r - (n-1)_{r-1}(1-n)_1 + (n-2)_{r-2}(2-n)_2 - \ldots\ldots \pm (r-n_r = o \ ;$$

$$50 - 11 \,.\, 10 + 3 \,.\, 25 - 15 = 0 \ ;$$

la dernière de ces relations est un cas particulier de

$$\frac{(n)_r}{[-n]^r} + \frac{(n)_{r-1}(m+1)_1}{[1-r]^{r-1}[-m]^1} + \frac{(n-2)_{r-1}(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}[-m-1]^2} + \ldots$$

$$+ \frac{(m+r)_r}{[1-m-r]^r} = \frac{(m+n)_r}{[1-m-n]^r} \ ,$$

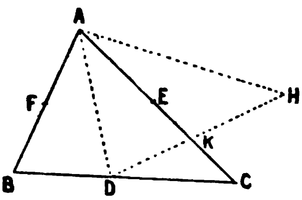
qui présente des particularités quand on y comprend quelques-uns des $\frac{1}{o}(n)_r$.

Il n'y a pas de doute que la Quest. 48 peut se démontrer aisément ; néanmoins, par la méthode des équipollences expliquée dans mes « *Eléments de Géométrie* » dont j'ai l'honneur de vous envoyer un exemplaire, on peut en donner une démonstration directe et sans autres considérations géométriques que celles qui sont le fondement de la méthode. Si D, E, F sont les milieux des côtés BC, CA, AB, on a,

$$\mathrm{AD} \;\Omega\; \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{AC}) \ , \quad \mathrm{BE} \;\Omega\; \frac{1}{2}(\mathrm{BA} + \mathrm{BC}) \ , \quad \mathrm{CF} \;\Omega\; \frac{1}{2}(\mathrm{CA} + \mathrm{CB}) \ ,$$

et il en résulte (car $AB + BA \mathrel{\underline{\Omega}} o$, etc.) :

$$AD + BE + CF \mathrel{\underline{\Omega}} 0 ,$$



ainsi nous voyons qu'il existe un triangle dont les côtés sont équipollents (c'est-à-dire égaux et parallèles) aux droites AD, BE, CF. C'est l'un des points fondamentaux de la méthode, que la surface du triangle dont les côtés sont AB, etc. est donnée par

$$\frac{\vartheta}{4}(AB \,.\, \dot{y}AC - \dot{y}AB \,.\, AC) \,.$$

De même la surface du triangle dont deux côtés sont équipollents à DA, BE, est donnée par

$$\frac{\vartheta}{4}\left\{\frac{1}{2}(-AB - AC) \,.\, \frac{1}{2}(-\dot{y}AB + \dot{y}BC) + \frac{1}{2}(\dot{y}AB + \dot{y}AC) \,.\, \frac{1}{2}(-AB + BC)\right\}$$

$$\mathrel{\underline{\Omega}} \frac{\vartheta}{16}\left\{(AB + AC)(2\dot{y}AB - \dot{y}AC) + (\dot{y}AB + \dot{y}AC)(AC - 2AB)\right\}$$

$$\mathrel{\underline{\Omega}} \frac{\vartheta}{16}(-2 \,.\, AB \,.\, \dot{y}AC + 3 \,.\, AC \,.\, \dot{y}AB) \,,$$

dont la surface est les $\frac{3}{4}$ de celle de ABC.

Dans le triangle ADH dont les côtés sont AD, $DH \mathrel{\underline{\Omega}} BE$, $HA \mathrel{\underline{\Omega}} CF$, la droite passant par le milieu de DH est,

$$AK \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{1}{2}(AD + AH) \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{1}{2}(AD - CF) \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{1}{4}(AB + AC + AC + BC) \mathrel{\underline{\Omega}} \frac{3}{4}AC \;;$$

il en résulte qu'avec les médianes du triangle ADH on formerait un triangle semblable à ABC.

Supposons maintenant que plus généralement D soit un point de BC donné par $CD \mathrel{\underline{\Omega}} l.CB$, d'où $AD \mathrel{\underline{\Omega}} l.\,AB + (1-l)\,AC$; de même soit $AE \mathrel{\underline{\Omega}} m.\,AD$; donc,

$$BE \mathrel{\underline{\Omega}} m \,.\, BC + (1 - m)BA \,, \qquad BF \mathrel{\underline{\Omega}} n \,.\, BA \,,$$

et aussi, comme conséquence,

$$CF \mathrel{\underline{\Omega}} n \,.\, CA + (1 - n)CB \,.$$

Pour que les trois droites AD, BE, CF soient équipollentes aux côtés d'un triangle, il faut que $AD + BE + CF \mathrel{\underline{\Omega}} 0$, c'est-à-dire,

$$l.AB + (1-l)AC + m(AC - AB) + (m-1)AB + n.AC + (1-n)(AB - AC) \mathrel{\underline{\Omega}} 0 \,,$$

ce qui exige que $l-m+m-1+1-n=0$, $1-l+m-n-1+n=0$, ou $l=m=n$.

On trouve ensuite par le calcul même, que le triangle qui a des côtés équipollents aux droites AD, BC, CF, a pour surface (n^2+1-n) ABC. Pour $n=\frac{1}{2}$ on est dans le cas examiné ci-dessus.

Padoue, 7 juillet 1867.

II. *Aux jeunes mathématiciens appartenant à l'Association des conférences mathématiques ; Naples.*

Comme je vous l'ai dit, certaines choses reviennent sous les yeux avec des noms différents : c'est ce qui arrive pour les séries de Moivre et d'Euler. Posant

$$\text{(A)}\quad (x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)=x^n-A_1x^{n-1}+\ldots.\pm A_n\ ,$$

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des fonctions symétriques des n quantités $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$; et posant

$$\text{(C)}\quad \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)}=x^{-n}+\frac{C_1}{x^{n+1}}+\frac{C_2}{x^{n+2}}+\ldots.\ ,$$

les termes de la série récourrente $1, C_1, C_2, \ldots.$ seront nommés fonctions symétriques *complètes :* par opposition nous nommerons $A_1, A_2, \ldots.$ fonctions symétriques *simples.* On établira ainsi une disposition uniforme pour calculer les $A_1, A_2, \ldots.,\ \Sigma a,\ \Sigma a^2, \ldots..,\ C_1, C_2, \ldots..$

Les fonctions symétriques de trois quantités seulement $c_1=10$, $c_2=69$, $c_3=410$ étant données, on détermine les fonctions simples correspondantes A_1, A_2, A_3 (c'est-à-dire la table de récourrence) en observant que

$$(1+C_1t+C_2t^2+\ldots.)(1-A_1t+A_2t^2-A_3t^3)=1\quad ;$$

nous écrirons dans une première ligne les nombres $1, C_1, C_2, C_3$ et, au-dessous, de nouveaux nombres, de manière que dans chaque colonne la somme soit $=0$, et que les nombres de chaque ligne soient proportionnels à ceux de la première ligne : ainsi,

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1 & +\ 10 & +\ \ 69 & +\ 410 & +\ 2261 & +\ 11970 & , \\
 & -\ 10 & -\ 100 & -\ 690 & -\ 4100 & -\ 22610 & , \\
 & & +\ \ 31 & +\ 310 & +\ 2139 & +\ 12710 & , \\
 & & & -\ \ 30 & -\ \ 300 & -\ \ 2070 & ,
\end{array}$$

et les nombres de la ligne oblique avec les signes alternés nous donneront les fonctions symétriques simples, $A_1 = 10$, $A_2 = 31$, $A_3 = 30$. Ensuite, poursuivant le calcul de la 5^e colonne nous verrons que le premier nombre sera $2261 = C_4$, et après avoir écrit -22610, nous trouverons $11970 = C_5$, etc.

Quand on connait les fonctions symétriques simples $A_1 = 10$, $A_2 = 31$, $A_3 = 30$, si on demande de déterminer les sommes Σa, Σa^2, Σa^3, etc. des puissances des a_1, a_2,..., on écrira dans une *ligne initiale* les nombres $1, -A_1, +A2, -A_3$,.... qui multipliés par 0, 1, 2, 3 formeront la première ligne : les nombres des autres lignes s'écriront de manière que dans chaque colonne la somme soit $= 0$, et que les nombres des 2^e, 3^e,... lignes soient proportionnels à ceux de la ligne initiale

$$
\begin{array}{rrrrrr}
1 & -\ 10 & +\ 31 & -\ 30 & & \\
\hline
 & -\ 10 & +\ 63 & -\ 90 & & \\
 & +\ 10 & -\ 100 & +\ 310 & -\ 300 & \\
 & & +\ 38 & -\ 380 & +\ 1178 & -\ 1140 \ldots. \\
 & & & +\ 160 & -\ 1600 & +\ 4960 \ldots. \\
 & & & & 722 & -\ 7220 \ldots. \\
 & & & & & +\ 3400 \ldots. \\
 & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

les sommes $\Sigma a = 10$, $\Sigma a^2 = 38$, $\Sigma a^3 = 160$,....., se liront dans la ligne oblique. Cette disposition de calcul montre que, si au contraire, les données étaient les sommes Σa, Σa^2, Σa^3,....., on pourrait aisément retrouver les fonctions symétriques simples $A_1 = 10$, $A_2 = 31$, $A_3 = 30$.

La même disposition de calcul sert pour passer des fonctions symétriques complètes 10, 69, 410, 2261,.... aux sommes des puissances, 10, 38, 160, 722, 3400,..., et réciproquement. Comme exemple, j'écris dans une ligne oblique les sommes 10, 38, 160, 722, 3400.... au-dessus de 10 j'écris -10 à cause de la règle ordinaire qui exige que la somme de chaque colonne soit $= 0$; j'écris dans la ligne initiale, après 1, le 10 qui est la valeur de -10 divisé par -1. Dans la deuxième ligne je pose $+100$, à cause de l'autre règle, qui veut que les nombres de toutes les lignes, la première exceptée, soient proportionnels à ceux de la ligne initiale : au-dessus de $+100$ j'écrirai (à cause de la première règle) -138, qui divisé par -2 donnera le nombre $+69$ de la ligne initiale.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
1 & +\ 10 & +\ 69 & +\ 410 & +\ 2261 & +\ \ldots. \\
\hline
 & -\ 10 & -\ 138 & -\ 1230 & -\ 9044 & -\ \ldots. \\
 & 10 & +\ 100 & +\ 690 & +\ 4100 & +\ \ldots. \\
 & & 38 & +\ 380 & +\ 2622 & +\ \ldots. \\
 & & & 160 & +\ 1600 & +\ \ldots. \\
 & & & & 722 & +\ \ldots. \\
 & & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Procédant de la même manière on trouvera toutes les fonctions symétriques complètes de la ligne initiale $1 + 10 + 69 + \ldots\ldots$ Si celles-ci étaient connues, on formerait la ligne initiale en les multipliant par $0, -1, -2, -3, \ldots$, et par l'algorithme expliqué on aurait les $\Sigma a = 10$, $\Sigma a^2 = 38$, $\Sigma a^3 = 160$. Ce sont des avertissements élémentaires mais très utiles dans le calcul numérique, et qu'on ne doit jamais négliger.

Dans le cas particulier de $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots,$ $a_n = n$ les fonctions symétriques simples ou complètes sont les coefficients des potestés d'exposant positif ou négatif développées en puissances, ou,

$$A_1 = (n+1)_1 \ , \quad A_r = (n+1)_r \ , \quad C_1 = (-n)_1 \ , \quad C_r = (-n)_r \ .$$

Ainsi pour $n = 3$ (voyez la table précédente), soit de $A_1 = (4)_1 = 6$, $(4)_2 = 11$, $(4)_3 = 6$; soit de $C_1 = (-3)_1 = 6$, $C_2 = (-3)_2 = 25$, $C_3 = (-3)_3 = 90$, on déduira $\Sigma a = 6$, $\Sigma a^2 = 14$, $\Sigma a^3 = 36$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
\underline{1} & \underline{-6} & \underline{+11} & \underline{-6} & & \\
 & -6 & +22 & -18 & & \\
 & +6 & -36 & +66 & -36 & \\
 & & +14 & -84 & +154 & \\
 & & & +36 & -216 & \\
 & & & & +98 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
\underline{1} & \underline{+6} & \underline{+25} & \underline{+90} & \underline{+301} \\
 & -6 & -50 & -270 & -1204 \\
 & +6 & +36 & +150 & +540 \\
 & & +14 & +84 & +350 \\
 & & & +36 & +216 \\
 & & & & +98
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrl}
1 & +6 & +25 & +90 & +301 & +\ldots \\
 & -6 & -36 & -150 & -540 & \ldots \\
 & & +11 & +66 & +275 & \ldots \\
 & & & -6 & -36 & \ldots
\end{array}$$

La formule (C) et ses analogues donnent dans le cas actuel les relations fondamentales,

$$(-n)_r = (1-n)_r + n(-n)_{r-1} \ , \qquad (n+1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1} \ .$$

Les quatre formules dont, dans la lettre précédente, j'ai donné des cas particuliers, sont

$$(1) \quad \frac{(n)_r}{[1-n]^r} + \frac{(n)_{r-1}(m)_1}{[1-n]^{r-1}[1-m]^1} + \frac{(n)_{r-2}(m)_2}{[1-n]^{r-2}[1-m]^2} + \ldots + \frac{(m)_r}{[1-m]^2} = \frac{(m+n)_r}{[1-m+n]^r} \ ,$$

$$(2) \qquad \frac{(n)_r}{[1-n]^r} + \frac{(n-1)_{r-1}(m)_1}{[1-n]^{r-1}[-m]^1} + \ldots + \frac{(m)_r}{[-m]^r} = \frac{(m+n)_r}{[-m-n]^r} \ ,$$

$$(3) \quad \frac{(n)_r}{[-n]^r} + \frac{(n-1)_{r-1}(m+1)_1}{[1-n]^{r-1}[-m-1]^1} + \frac{(n-2)_{r-2}(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}[-m-1]^2} + \ldots + \frac{(m+r)_r}{[-m-r]^r} = \frac{(m+n)_r}{[-m-n]^r} \ ,$$

$$(4) \quad \frac{(n)_r}{[-n]^r} + \frac{(n-1)_{r-1}(m+1)_1}{[1-n]^{r-1}[-m]^1} + \frac{(n-2)_{r-2}(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}[-m-1]^2} + \ldots + \frac{(m+r)_r}{[1-m-r]^r} = \frac{(m+n)_r}{[1-m-n]^r} ;$$

elles donnent quatre expressions différentes de $(m+n)_r$.

Si dans (1) on pose $m = -1$ et si on change n en $1 - n$, on a une formule, donnée par M. Torelli;

$$\frac{(1-n)_r}{[n]^r} + \frac{(1-n)_{r-1}}{[n]^{r-2}.2} + \frac{(1-n)_{r-2}}{[n]^{r-2}.2.3} + \ldots + \frac{1}{[2]^r} = \frac{(-n)_r}{[1+n]^r} .$$

Au moyen de la relation

$$[t+a]^n = [t]^n + n[t]^{n-1}a + \binom{(2)}{n}[t]^{n-2}[a]^2 + \ldots + [a]^n ,$$

(le symbole $\binom{(2)}{n}$ équivaut à $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ etc.) on aura :

$$[t+a]^n = [t]^n + ((n)_1 + na)t^{n-1} + \left((n)_2 + n(n-1)_1 a + \binom{(2)}{n}[a]^2\right)t^{n-2}$$
$$+ \left((n)_3 + n(n-1)_2 a + \binom{(2)}{n}(n-2)_2[a]^2 + \binom{(3)}{n}[a]^3\right)t^{n-3} + \ldots$$

formule qui nous donne l'expression de chaque fonction symétrique simple des n quantités a, $a+1$, $a+2, \ldots, a+n-1$, au moyen des potestés des (a): si on développe ces potestés en puissances, on obtient au moyen de (3), les expressions des fonctions symétriques des puissances des a, c'est-à-dire,

$$[t+a]^n = t^n + \left\{(n)_1 + na\right\}t^{n-1} + \left\{(n)_2 + (n-1)(n)_1 a + \binom{(2)}{n}a^2\right\}t^{n-2}$$
$$+ \left\{(n)_3 + (n-2)(n)_2 a + \binom{(2)}{n-1}(n)_1 a^2 + \binom{(3)}{n}a^3\right\}t^{n-3}$$
$$+ \left\{(n)_4 + (n-3)(n)_3 a + \binom{(2)}{n-2}(n)_2 a^2 + \binom{(3)}{n-1}(n)_1 a^3 + \binom{(4)}{n}a^4\right\}t^{n-4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces dernières expressions contiennent, en outre des coefficients binômes $\binom{(i)}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}$, les seules fonctions simples $(n)_r$ des $(n-1)$ quantités $1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Je pense que de cette manière on pourra démontrer les expressions des fonctions symétriques complètes des a, $a+1$, $a+2, \ldots$

Il resterait à démontrer plusieurs autres relations entre les coefficients $(n)_r$, comme,

$$(n)_r + (n)_{r-1}(r-n+1) + (n)_{r-2}(r-n+1)_2 + \ldots + (r-n+1)_r = \frac{[1-n]^r[1-n]^r}{[1]^r} ;$$

$$(n)_r - (n)_{r-1}(-n)_1 + (n)_{r-2}(-n)_2 - \ldots \pm (-n)_r = [-n]^r ;$$

$$(n)_r - (n-1)_{r-1}(2-n)_1 + (n-2)_{r-2}(3-n)_2 - \ldots \pm (r+1-n)_r = \binom{(r)}{n-1} .$$

Si dans la première de ces relations nous faisons $n = 3$, $r = 6$, tous les termes seront nuls, mais si nous supprimons le facteur qui les annule, nous obtiendrons encore (consultez la table de la lettre précédente pour les valeurs

$$\frac{1}{o}(3)_6 = \frac{-4}{315}, \quad \frac{1}{o}(3)_5 = \frac{-1}{40}, \quad \frac{1}{o}(3)_4 = \frac{19}{120}, \quad \frac{1}{o}(3)_3 = \frac{-3}{4}, \quad (3)_2 = 2,$$

$$(3)_1 = 3, \quad (4)_1 = 6, \quad (4)_2 = 11, \quad (4)_3 = 6, \quad \frac{1}{o}(4)_4 = \frac{-251}{120},$$

$$\left.\frac{1}{o}(4)_5 = \frac{9}{20}, \quad \frac{1}{o}(4)_6 = \frac{-221}{2520}\right):$$

$$\frac{-4}{315} + \frac{-1}{40}.6 + \frac{19}{120}.11 + \frac{-3}{4}.6 - 2.\frac{-251}{120} - 3.\frac{9}{20} - \frac{-221}{2520} = o,$$

ayant eu soin de changer de signes les trois derniers termes qui contiennent le facteur nul dans le deuxième facteur $(r-n+1)_s$ avant de faire ce changement dans le premier $(n)_{r-s}$. On pourra consulter à ce propos une note que j'ai insérée dans les « *Annales de M. Tortolini* », t. IV, pag. 108, Rome, 1853.

Padoue, 15 juillet 1867.

III. *A M. Gabriel Torelli, Naples.*

Padoue, 2 septembre 1867.

Mon ami très estimé,

La meilleure marche à suivre pour maintenir la correspondance c'est de répondre aussitôt qu'on a lu la demande : c'est ce que je vais faire pour vous démontrer au moins par mon empressement le plaisir que j'éprouve à entretenir avec vous et les autres jeunes mathématiciens de l'Association une libre correspondance scientifique.

Sans le démontrer ici, il est certain que la formule qui donne $(n)_r$ contient au numérateur les facteurs $n(n-1)(n-2)....(n-r)$, et vous l'observez aussi en disant que $(n)_r$ est divisible par

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots.(r+1)}.$$

D'ailleurs, même sans recourir à cette formule, nous avons une infinité de manières de calculer les Bernoulliens, et de ceux-ci dépend la première ligne de la table de ma première lettre, car,

$$\frac{1}{o}(o)_r = rB_{r-1}.$$

La première ligne étant écrite, les autres s'en déduisent au moyen de la relation

$$n(n)_r + (n)_{r+1} = (n+1)_{r+1} \quad .$$

Le meilleur titre des Bernoulliens est celui d'être vieux, car les coefficients $\frac{1}{o}(o)_r = \frac{1}{o}(1)_r$ font partie d'une table bien plus utile.

Par exemple, les coefficients de $\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^3$ se trouvent dans la ligne

$$3\ ,\quad 2\ .\quad \Big|\quad -\frac{3}{4}\ ,\quad \frac{19}{120}\ ,\quad \frac{-1}{140}\ ,\ \ldots\ldots$$

Les trois premiers termes du développement sont

$$1 + \frac{(3)_1}{[-2]^1}x + \frac{(3)_2}{[-2]^2}x^2 = 1 + \frac{3}{-2}x + \frac{2}{2\,.\,1}x^2 \ :$$

le numérateur $(3)_3$ s'annule; mais comme dans le dénominateur nous avons les facteurs $(-2)\,(-1)\,(0)$, en supprimant haut et bas le 0, il reste,

$$\frac{\frac{1}{o}(3)_3}{(-2)(-1)}x^3 = \frac{-\frac{3}{4}}{2}x^3 \quad ,$$

et, continuant, on a,

$$\frac{\frac{1}{o}(3)_4}{(-2)(-1)(1)}x^4 = \frac{\frac{19}{120}}{2}x^4 \ , \text{ et encore, } \quad \frac{\frac{1}{o}(3)_5}{(-2)(-1)1\,.\,2}x^5 = \frac{-\frac{1}{40}}{2\,.\,2}x^5 \ , \quad \text{etc.}$$

Ce passage des $(n)_r$ aux $\frac{1}{o}(n)_r$ se présente dans les développements de $\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^n$ pour (n) entier et positif.

Possédant les tables des $(n)_r$ et des $\frac{1}{o}(n)_r$, on a des occasions très fréquentes de les employer. Du reste ces développements sont connus.

La formule que vous écrivez

$$\frac{1}{o}(r)_{r+n} = (r)_{r-1}\frac{\mathrm{B}n}{n+1} \quad ,$$

se réduit à

$$\frac{1}{o}(r)_{r+n} = (r)_{r-1}\frac{1}{o}(1)_n + (r)_{r-2}\frac{1}{o}(1)_{n+1} + \ldots.$$

On a par exemple

$$\frac{1}{o}(3)_4 = (3)_2\frac{1}{o}(1)_1 + (3)_1\frac{1}{o}(1)_2 + \frac{1}{o}(1)_3 = \frac{-2}{2} + \frac{3}{12} \quad .$$

Il y a certainement un grand nombre de relations de ce genre. J'ai vu dans votre Mémoire la démonstration que je demandais : je vous fais observer que $(-4)_2 = 65$ n'est pas divisible par $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ et par conséquent $(-n)_r$ n'est pas divisible par

$$\frac{(n+r)(n+r-1)\,....\,(n+1)n}{1.2.3\,....\,(r+1)}.$$

Je ne peux pas comprendre que pour l'étude de la mathématique, on pense, en Italie, à abandonner Naples, où on trouve aussi une école d'Ingénieurs. Naples est pour la mathématique le Paris de l'Italie. L'Institut technique de Milan me paraît bon et je ne peux penser qu'on cherche à le supprimer ou à le réduire. Celui de Turin sera bon, et peut-être pour un jeune homme sera-t-il plus approprié que celui de Milan ; mais mon opinion est lancée avec peu de fondement et vous ne devez pas en tenir compte. Je le répète, pour étudier les mathématiques, le meilleur est de rester à Naples.

...Votre bien dévoué

G. Bellavitis.

Ces quelques lettres que j'ai reproduites presque intégralement montrent suffisamment combien est intéressante la correspondance de ce savant et fécond mathématicien qui s'est appelé *Giusto Bellavitis*.

C. Alasia (Tempio).

UNE LEÇON SUR LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

Cette leçon sur la géométrie de l'ajustage est la troisième d'un enseignement d'initiation.

Résumons d'abord sommairement les idées et les faits qui la précèdent.

Dans une première leçon ont été exposés les faits primitifs de la géométrie, faits que la raison accepte et qui dérivent, à n'en pas douter, des expériences des muscles et des yeux de nos ancêtres, répétées par nos propres organes et affirmées sous les vocables de *principes* ou de *postulats.*

L'expérience que nous avons vécue, dans notre contact répété avec les corps solides nous a suggéré la notion de *corps rigides,* amorphes d'ailleurs et possédant un *ensemble* de points, mais déterminés dans leurs situations par rapport aux corps rigides voisins par les situations de *certains* de leurs points.

Par exemple, on peut *clouer* un corps rigide par *deux* de ses points sur un autre corps rigide, à l'égard duquel le premier se déplace ; ce dernier, par rapport au premier, joue le rôle d'espace.

L'expérience nous suggère qu'on peut toujours lier alors au premier corps rigide d'autres points formant *une ligne* et qui, *immobiles,* resteront communs au premier corps rigide et au second; alors, le premier corps rigide ne pourra plus prendre qu'une sorte de *déplacement,* en sorte que si on lui impose la condition de passer *d'une position à une autre* sans jamais repasser par les positions intermédiaires *avant* de revenir à sa position *de départ* on définira d'une manière complète un seul déplacement possible en deux sens différents; naturellement on ne considère ici que l'ordre des situations rencontrées et non pas *le plus ou moins de rapidité* dans leurs successions; ce déplacement est une *rotation.*

La ligne des points fixes, commune au corps en mouvement et à l'espace environnant est une *droite* ou encore un *axe de rotation.*

Les propriétés suivantes complètent la définition de la droite.

1° Après superposition préalable de deux couples convenables de leurs points, deux droites peuvent être superposées l'une sur l'autre de deux manières différentes.

2° Toute droite n'est prolongeable que d'une seule manière ; *et tout point de la droite est accessible par un cheminement fini* sur la droite.

3° Toute droite est définie en situation par les situations de deux de ses points, pourvu toutefois que ces deux points, appartiennent à une portion de droite *déjà existante* et dont *l'étendue* ne dépasse pas une certaine portion assignable de droite, que nous nommerons *la distance réduite.*

Dans la géométrie de la droite ouverte, on verra plus loin que la distance réduite est infinie.

4° Si A et B sont deux points *suffisamment* rapprochés d'un même point O, ces deux points sont aussi *joignables* par une portion définie de droite moindre que la distance réduite et que nous appellerons AB, et si on considère alors les droites que l'on peut définir par la jonction de O aux différents points de la portion AB, ces différentes portions de droite moindres que la *distance réduite* formeront un ensemble de points, que l'on nomme une *trame triangulaire;* la propriété essentielle d'une trame triangulaire est de rester inaltérée par la permutation des rôles joués par les points O, A, B.

On définit ainsi *l'intérieur du triangle* AOB ou un *morceau* de plan ; et on en déduit, tout au moins dans un domaine *suffisamment réduit* la distinction des deux régions d'une trame à l'égard d'une droite joignant deux points de la trame.

5° L'extension de la trame triangulaire autour d'un point O, dans une trame plus étendue, à l'intérieur de laquelle se trouve le point O donne la notion des angles plans dont la propriété essentielle sera de pouvoir se reproduire par *glissement* et *renversement.*

6° La rotation d'une trame autour d'une droite de cette trame passant par O épuise tous les points de l'espace qui peuvent être *dans le voisinage* du point O ; en d'autres termes, la position d'un point sur une droite étant définie par un seul renseignement *quantitatif*, la position d'un point d'une trame sera définie par 2 renseignements quantitatifs, et enfin la position d'un point de l'espace sera définie par 3 renseignements quantitatifs.

En d'autres termes la droite est un ensemble à *une dimension*, la trame est un ensemble à 2 dimensions, et l'espace est un ensemble à 3 dimensions.

7° Si deux trames ou plans ont un point O commun ils ont une droite commune passant par ce point.

Avec ces premières données, la deuxième leçon de la géométrie naturelle construit la théorie de l'angle droit, les cas d'égalité des triangles quelconques et des triangles rectangles formés dans le voisinage d'un point O, et enfin les propriétés essentielles de l'angle trièdre et des angles polyèdres. Après avoir rappelé ces propriétés classiques des trames triangulaires, nous allons nous servir de celles-ci comme de véritables ponts jetés d'une figure à l'autre et obtenir la notion *des deux déplacements fondamentaux d'un solide.*
Sans insister ici sur les détails de démonstrations connues, nous soulignerons au contraire les idées propres à la géométrie nouvelle.

Théorème I. Si une droite passant par un point O d'un plan P est perpendiculaire à deux droites distinctes menées par O dans ce plan elle est perpendiculaire à toutes les droites issues de O dans ce plan.

(Démonstration bien connue).

Définition; une telle droite est dite perpendiculaire au plan P.

Théorèmes II: 1° Pour mener d'un point I situé hors d'un plan P une droite perpendiculaire à ce plan il suffit de projeter I en H sur une droite XY du plan P, de mener dans P et par H la perpendiculaire HZ à XY puis de projeter I en O sur HZ; O est dit la projection de I sur P.

2° Réciproquement pour projeter un point I sur une droite

XY de P il suffit de projeter I sur le plan P en O puis de projeter O sur XY.

(Démonstrations connues),

Corrollaires: 1° par un point I on peut toujours mener une perpendiculaire au plan P et une seule; tout au moins si le point I est dans un suffisant voisinage d'un point du plan.

2° Par un point O d'un plan on peut toujours élever une droite perpendiculaire à ce plan et une seule.

3° Par un point O d'une droite on peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite et un seul.

4° Quand une droite coupe un plan P en O les projections de ses points sur ce plan forment une droite et la perpendiculaire à cette projection menée par O dans le plan P est perpendiculaire au plan qui contient la droite et sa projection (plan projetant).

Remarque. — La démonstration connue des corollaires 2° et 3° des théorèmes II repose sur le postulat 7 énoncé plus haut; il est intéressant d'observer que ce postulat 7 peut être remplacé par ce postulat équivalent:

« Qand un solide tourne autour d'une droite, tous les demi-
« plans du solide qui passent par cette droite et qui sont
« entraînés dans le mouvement du solide se rabattent *en un*
« *même instant* sur les prolongements respectifs de leurs
« primitives situations. »

Adoptons en effet ce postulat, ou *principe du demi-tour* et proposons nous d'en déduire le postulat 7.

Soit OI une droite perpendiculaire au plan P menée par le point O de ce plan; soient OA et OB deux droites distinctes du plan P; concevons l'angle AÔB partagé en 3 parties égales par les droites OC et OD intermédiaires; considérons un solide lié à OA, OC et OI; faisons tourner ce solide autour de OC de manière que l'angle AÔC se renverse sur l'angle COD: d'après ce postulat du demi-tour, la droite OI après ce renversement est venue sur le prolongement de sa position primitive; donnons ensuite au solide une rotation autour de OD de manière que l'angle COD se renverse sur l'angle DOB, la droite OI reprend alors sa situation primitive.

Si donc *une autre droite* OJ perpendiculaire au plan P et issue de O existait les deux déplacements considérés la rétabliraient elle aussi dans sa situation primitive; dès lors le déplacement qui finalement a fait glisser $A\hat{O}C$ sur l'angle $D\hat{O}B$ aurait laissé immobiles les deux droites OI et OJ ce qui est impossible d'après les autres postulats.

Donc par le point O on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P; on en conclut immédiatement que par un point d'une droite on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à la droite; et de là enfin on conclut que si deux plans ont un point commun ils ont en commun toute une droite qui passe par ce point, c'est-à-dire précisément le postulat 7.

Inversement, la théorie du dièdre nous montrera tout à l'heure que le postulat 7 fournit à son tour le principe du demi-tour.

Définitions. — Nous appelons *angle dièdre* la figure formée par l'ensemble de deux demi-plans réunis par une droite commune qui limite les deux demi-plans considérés. Cette droite commune se nomme l'*arête* du dièdre ; les demi-plans que nous n'envisagerons d'ailleurs que dans le voisinage de l'arête se nomment les *faces* du dièdre. Si par un point de l'arête on mène dans les deux faces respectivement deux droites perpendiculaires à l'arête, on forme dans un plan perpendiculaire à cette arête un angle plan que nous nommerons : *un angle rectiligne.*

Théorème III. — Tous les angles rectilignes d'un dièdre sont égaux.

Nous partagerons la démonstration en 2 parties :

1° Si un angle rectiligne d'un dièdre est droit, tous les angles rectilignes sont droits.

2° Deux angles rectilignes quelconques d'un même dièdre sont égaux.

La première proposition est une conséquence du corollaire 4 des théorèmes II :

En effet soit O H la projection de I H sur le plan P ; la droite J H menée dans le plan O I H perpendiculairement à O H est (Th. II, corol. 4) perpendiculaire au plan P, en sorte que O H est aussi la projection de O J.

Le plan qui projette à la fois sur P les deux droites O J et

I H forme avec le plan P un dièdre dont les deux angles rectilignes I O U et J H X sont droits, d'après les théorèmes 2.

Enfin la seconde proposition résulte de la remarque fondamentale suivante :

Considérons deux dièdres *adjacents* c'est-à-dire ayant même arête et séparés par une face commune ; en deux points O et O′ de l'arête formons des angles rectilignes $\sphericalangle$ A et $\sphericalangle$ B en O, $\sphericalangle$ A′ et $\sphericalangle$ B′ en O′, les angles rectilignes $\sphericalangle$ A et $\sphericalangle$ B seront dans le même rapport que les angles rectilignes $\sphericalangle$ A′ et $\sphericalangle$ B′.

La démonstration s'achève immédiatement par la considération d'une commune mesure entre les deux rectilignes de même sommet et par les rotations successives qui font glisser sur O chaque partie aliquote sur la suivante.

Cette remarque rapprochée de la 1re partie de la démonstration établit la seconde partie du théorème 3.

Définition. — Nous appellerons mesure de l'angle dièdre, la valeur commune de ses angles rectilignes.

Théorème IV. — Quand une figure plane faisant partie d'un solide glisse dans son plan P en conservant un point fixe O, ce mouvement équivaut à une rotation autour de la perpendiculaire élevée de O sur le plan P. Ce théorème est une simple conséquence des corollaires des théorèmes II. Mais la forme de cette conséquence est importante à considérer.

Corollaire. — En rapprochant ce théorème du théorème 3 nous voyons que dans une rotation tous les plans passant par l'axe de rotation tournent du même angle ; et en particulier nous retrouvons le principe du demi-tour déduit du postulat 7.

Théorème V. — Etant donnée une droite A B de l'espace cette droite est l'axe de deux mouvements simples pour un solide.

1° Une rotation autour de la droite.

2° Un glissement simple du solide, dans lequel tous les plans du solide qui passent par A B ne font que glisser sur eux-mêmes en même temps que la droite A B du solide glisse sur elle même.

Ce dernier mouvement s'appelle une *translation*, la droite de l'espace sur laquelle glisse alors la droite du solide se nomme *l'axe de la translation.*

La première partie de ce théorème est évidente, la seconde est une conséquence de l'égalité des angles rectilignes d'un dièdre.

La leçon donnée à des débutants peut se terminer ici ; à des élèves plus mûrs qui révisent on peut donner les compléments qui suivent :

Droite ouverte ou droite fermée ; Symétrie.

Après cet exposé des conséquences des postulats déjà exposés il nous reste à spécialiser les modes de jonction de points par des droites.

En cheminant sur une droite D à partir d'un point O, nous avons admis qu'on rencontrait d'abord et sur une étendue finie, des points qui ne sont *joignables* à O que par une seule droite.

Dès lors, de deux choses l'une : ou tous les points de D auront la même propriété et il en sera de même de toutes les droites de l'espace, ou bien en cheminant dans un certain sens sur D, on rencontrera tôt ou tard et pour la première fois un point O′ joignable à O par une seconde droite D′. En rabattant le plan P des deux droites D′ et D autour de D′ nous trouverons une seconde droite D″ égale à D qui joindra O et O′, mais alors on peut aussi amener D″ sur D par une rotation convenable autour d'une perpendiculaire à P élevée de O ; mais alors O′ n'ayant pas bougé par cette rotation appartient à l'axe de cette rotation , ainsi la perpendiculaire $\triangle$ au plan P en O recoupe le plan en O′) le plan de cette perpendiculaire et de la droite D étant rabattu autour de $\triangle$ nous montre alors que la droite D est fermée et que les points O et O′ la partagent en portions égales.

En désignant alors par L le demi-tour de la droite on voit que toute droite est le lieu des points équidistants de $\frac{L}{2}$ de l'un des deux points où se coupent les perpendiculaires à la droite menées dans l'un des plans passant par la droite, ces points sont les pôles de la droite dans le plan considéré. Si un point M d'un plan n'est pas le pôle d'une droite D de ce plan, il y a alors deux distances réduites du point M à la droite ; mais l'une ou l'autre de ces distances étant prolongée d'une longueur égale fournit un même point M′, en d'autres termes si les distances d'un point à une droite fermée sont au nombre de 4, ce point n'a cependant qu'un seul symétrique par rapport à la droite.

Dans cette géométrie de la droite périodique ou fermée sur elle même il convient de ne donner le nom de triangle qu'aux triangles propres c'est-à-dire à ceux dont les côtés sont moindres que L et leurs angles opposés moindres que 2 droits. L'existence de ces triangles sera assurée par l'étude des angles trièdres faite d'abord dans un *voisinage suffisant* du sommet puis par l'étude de la sphère ; la théorie du dièdre faite dans cette leçon nous montre qu'alors deux triangles sphériques qui sont les images sphériques d'un même trièdre ont les mêmes angles ; comme dans la géométrie de la droite fermée le plan est une variété de sphère, la remarque faite sur les triangles propres est justifiée.

Ces dernières considérations qui anticipent sur la quatrième leçon de la géométrie de l'ajustage n'ont dans la géométrie de la droite fermée d'autre intérêt que celui de préparer pour cette géométrie la formation des propriétés métriques et la mesure des étendues qui constitue l'étude du second livre de la géométrie naturelle.

Nous exposerons, pour terminer, les lois de la symétrie, en nous limitant pour abréger à la géométrie de la droite ouverte.

LOI DE LA SYMÉTRIE

Définitions. — Nous appellerons point symétrique d'un point donné M par rapport à un plan P le point M′ obtenu en menant de M une droite perpendiculaire sur P et la prolongeant d'une longueur égale.

De même le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point M″ obtenu en joignant M à O par une droite que l'on prolonge d'une quantité égale au delà de O.

On définira de même les figures symétriques d'une figure, ensemble de points.

Théorème VI. — Soit O un point d'un plan P et soit F une figure ensemble de points soit F′ la figure symétrique de F par rapport à P et F″ la figure symétrique de F par rapport au plan P les figures F′ et F″ sont superposables.

Démonstration. — Soit M′ le symétrique d'un point M de F par rapport à P et M″ le point symétrique de F par rapport au point O soit H le pied de la perpendiculaire menée de M sur P; O M = O M′ (obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire O H.)

La droite O H est donc bissectrice de l'angle M O M′ ; dans le triangle isocèle O M′ M″ la droite qui joint le sommet O au milieu I de la base M′ M″ est perpendiculaire à cette base en même temps que bissectrice de l'angle M″ O M′, mais les deux bissectrices des deux angles adjacents supplémentaires M″ O M′ et M′ O M sont perpendiculaires l'une sur l'autre ; d'ailleurs la droite qui, menée dans le plan projetant O M sur P est perpendiculaire à la projection O H, est perpendiculaire à P.

La droite O I est donc indépendante du point M choisi, donc les figures F″ et F′ coïncideront quand on donnera à l'une un déplacement de un demi-tour autour de O I.

Dernière remarque. — Toutes les propriétés qui précèdent, complètent avec la théorie du triangle plan et, avec celle des triangles sphériques envisagés sur une même sphère la partie de la géométrie qui est indépendante du postulatum d'Euclide.

La géométrie indépendante du postulatum d'Euclide peut être appelée la géométrie de l'ajustage, car elle est l'étude des propriétés de l'espace qui permettent la reproduction d'un solide donné.

Ce problème revient en effet à des assemblages de barres, à des réalisations de rotations, de translations d'axes déterminés et à la matérialisation d'au moins une trame.

Limitée à la géométrie de la droite ouverte cette géométrie de l'ajustage a déjà fait l'objet d'une partie de mon enseignement à l'école alsacienne, dès 1889.

Jules ANDRADE (Besançon).

Décembre 1905.

PROPRIÉTÉS CORRÉLATIVES DU PENTAGONE ET DU DÉCAGONE RÉGULIERS

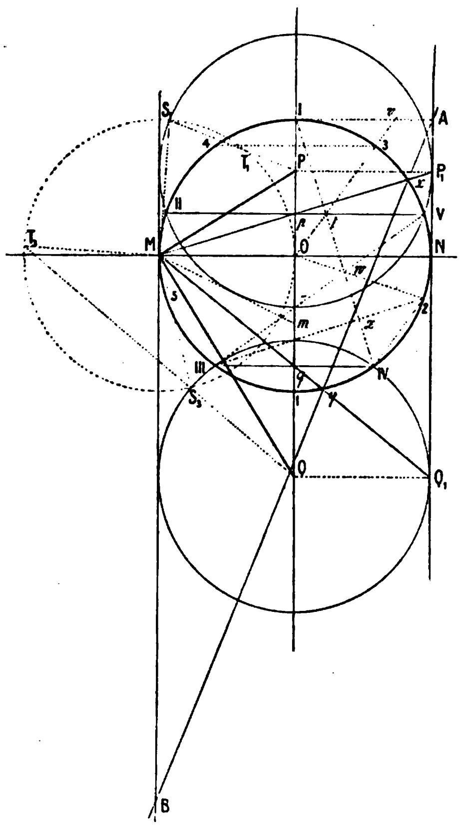
Les mathématiques ne sont, en général, envisagées par les élèves de nos collèges que comme une science dont l'étude offre beaucoup de difficultés mais fort peu d'attraits; et l'on voit souvent des jeunes gens incapables de progresser dans cette branche lors même qu'ils font preuve d'une grande facilité de compréhension et d'assimilation. La cause de cette répugnance provient peut-être du fait que dans l'enseignement la valeur éducative des mathématiques ne produit pas ses effets, qu'il est donné beaucoup trop de place à la reproduction passive d'énoncés et de démonstrations et que l'élève est pour ainsi dire enserré dans une discipline qui lui enlève la faculté de se développer par lui-même et de s'intéresser ainsi d'une manière plus active à cette partie des études secondaires. En lui accordant sous ce rapport plus de libertés et en lui permettant de se livrer à des recherches personnelles, on pourrait parvenir au but désiré. Le maître devrait surtout orienter ces recherches du côté de la géométrie, science qui, par son caractère parfaitement défini, peut procurer beaucoup de satisfaction à ceux qui l'étudient.

C'est dans le but de fournir un exemple à l'appui de cette manière de voir que l'auteur s'est proposé de montrer comment fonctionne le principe[1] des corrélations d'éléments analogues dans le pentagone et le décagone réguliers.

---

[1] Ce principe est à notre connaissance très peu observé dans l'enseignement bien qu'il soit souvent applicable avec fruit. Ainsi, s'agit-il de transformer un triangle donné en un triangle équilatéral de même surface, on construit des triangles équilatéraux sur les côtés a, b et c du triangle donné, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de ce dernier. Les points milieux de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes des triangles équilatéraux dont

Représentons par r (voir figure) le rayon du cercle, par s_1 le côté du décagone, par s_2 celui du pentagone, par s_3 celui du décagone étoilé, enfin par s_4 la diagonale du pentagone. On veut démontrer que s_1 et s_3 d'une part, s_2 et s_4 d'autre part jouent le même rôle dans les relations déduites de la figure.



Soient MN et I1 deux diamètres perpendiculaires ; IIV une corde parallèle au diamètre MN et représentant une diagonale du pentagone ; sa longueur est donc égale à s_4 ; elle est divisée en p par le rayon OI en deux parties égales ; les angles IIOP et OIIp valent respectivement 72° et 18°. Repliant le triangle IIOp autour de IIp on obtient le triangle isocèle OIIP, dans lequel OII $=$ PII $= r$; l'angle compris entre ces deux côtés est ainsi égal à 36°, de

---

nous représentons les côtés respectivement par D et d. En désignant par S la surface du triangle donné, nous avons les relations :

$$\frac{2}{3}\,S\sqrt{3} = D^2 - \frac{1}{6}\,(a + b^2 + c^2)\ ,$$

$$\frac{2}{3}\,S\sqrt{3} = \frac{1}{6}\,(a^2 + b^2 + c^2) - d^2\ ,$$

par addition de ces relations on a :

$$\frac{4}{3}\,S\sqrt{3} = D^2 - d^2\ , \quad \text{d'où} \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(D^2 - d^2)\ .$$

Pour le côté du triangle cherché, nous obtenons l'expression $s = \sqrt{D^2 - d^2}$ qu'il est facile de construire.

sorte que la base de ce triangle est le côté s_1 du décagone; d'où la relation :

$$s_1^2 + s_4^2 = 4r^2 . \qquad \text{I}$$

Soit encore de l'autre côté de MN la corde III IV parallèle à la droite MN et égale au côté s_2 du pentagone (comme on le remarque facilement les points I à V sont les différents sommets d'un pentagone régulier). Si l'on désigne par q l'intersection de III IV avec I1 et si l'on replie le triangle OIIIq autour du côté IIIq, on obtient le triangle isocèle OIIIQ dans lequel IIIO = IIIQ = r et l'angle OIIIQ mesure 108°. La base OQ de ce triangle est donc le côté s_3 du décagone étoilé et l'on en déduit :

$$s_3^2 + s_2^2 = 4r^2 . \qquad \text{II}$$

formule analogue à I.

On remarque également d'après la figure que l'angle 1IIP est égal à 4 × 18° c'est-à-dire à 72°; mais comme l'angle OPII a la même valeur, le triangle P1II est isocèle et l'on a :

$$\text{II1} = s_3 = r + s_1 . \qquad \text{III}$$

Les triangles OIIP et 1IIP ayant tous leurs angles respectivement égaux sont semblables; on en déduit :

$$s_1 : r = r : (r + s_1) , \qquad \text{IV}_a$$

et, en tenant compte de la relation III

$$(s_3 - r) : r = r : s_3 . \qquad \text{IV}_b$$

De ces deux dernières relations il résulte que :

$$(r - s_1) : s_1 = s_1 : r , \qquad \text{V}_a$$

$$s_3 : r = (r + s_3) : s_3 , \qquad \text{V}_b$$

ce qui donne pour s_1 et s_3 les valeurs :

$$s_1 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \text{et} \qquad s_3 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1) , \qquad \text{VI}$$

et par addition

$$\text{PQ} = s_1 + s_3 = r\sqrt{5} . \qquad \text{VII}$$

On pourrait obtenir directement cette valeur en considérant les relations III et IV_a ; la relation III donne :

$$r^2 = (s_2 - s_1)^2 = s_2^2 - 2s_2 s_1 + s_1^2$$

et avec IV_a

$$4r^2 = 4s_1 s_2 \ ,$$

d'où

$$5r^2 = (s_2 + s_1)^2 \ .$$

La considération de la figure nous conduit également au même résultat. En effet la proportion IV_a a montré[1] que les côtés de l'angle droit des triangles MOP et MOQ sont proportionnels ; ces triangles sont donc semblables, l'angle PMQ est droit et si m désigne le milieu du rayon O1, on a :

$$PQ = 2mM \ .$$

D'autre part dans le triangle OMm, on a :

$$s_1 + s_2 = PQ = r\sqrt{5} \ ,$$

puis, en tenant compte de la relation III on obtient

$$r\sqrt{5} = r + 2s_1 = 2s_2 - r \ .$$

La relation IV_a combinée avec III ou VII donne :

$$s_1^2 + s_2^2 = 3r^2 \ ,$$

$$s_1^2 - 3s_1 s_2 + s_2^2 = 0 \ . \qquad \text{VIII}$$

d'où

$$s_1 s_2 = r^2 \ . \qquad \text{IX}$$

Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles OMP, OMQ et PMQ conduit à la relation :

$$s_1^2 + s_2^2 + 2r^2 = 5r^2 \ ,$$

qui avec IX équivaut à VII

---

[1] La théorie de la puissance d'un point par rapport à un cercle nous conduit aussi à cette proportion. En effet, soit sur la circonférence O,5 le point diamétralement opposé à V, les angles 5IIIO et QIIIO sont respectivement égaux à 72° et 108°, les points Q,III et 5 sont donc situés en ligne droite et l'on a :

$$Q5 = QO = s_2 = r + s_1 \ .$$

Mais comme $Q1 = s_1$, il résulte que :

$$s_1(s_1 + 2r) = r(r + s_1) \text{ et } (s_2 - r)(s_2 + r) = s_2^2 - r^2 = r.s_2 \ . \text{ etc.}$$

Si l'on soustrait cette égalité de II, puis de I, on a :

$$s_2^2 - s_1^2 = r^2 \quad \text{et} \quad s_4^2 - s_3^2 = r^2 \,, \qquad \text{X}$$

relations qui mettent bien en évidence la correspondance qui existe entre les quantités s_1 et s_3 d'une part et s_2 et s_4 de l'autre. On voit maintenant d'une manière claire que PM et QM représentent le côté et la diagonale du pentagone régulier ; mais une voie purement géométrique peut de même nous l'indiquer. Traçons en effet de M, P et Q comme centres trois circonférences de rayon r ; puis, désignant par S_1 et S_3 les intersections des circonférences P et Q avec la circonférence M, menons les sécantes PS_1 et QS_3 et appelons T_1 et T_3 les secondes intersections de ces sécantes avec la circonférence M. Des égalités IV_a et IV_b on déduit :

$$S_1T_1 = s_1 \quad \text{et} \quad S_3T_3 = s_3 \; :$$

il en résulte que les angles S_1MT_1 et S_3MT_3 valent respectivement 36° et $3 \times 36° = 108°$; mais comme les côtés égaux des triangles isocèles S_1MP et S_3MQ ont pour longueur r et que les angles compris entre ces côtés valent 72° et 144°, il est ainsi prouvé que $PM = s_2$ et $QM = s_4$.

Des résultats obtenus jusqu'à maintenant, on peut concevoir, par l'emploi de deux compas, une construction du pentagone régulier, construction dans laquelle les points P et Q jouent un rôle symétrique ; ce procédé [1] conduit facilement et rapidement au but. Nous allons l'exposer très brièvement.

Après avoir tracé le cercle O et dans ce cercle les deux axes perpendiculaires MN et I1, on détermine le point m, milieu du rayon O1 ; on porte sur le diamètre I1 avec l'aide d'un second compas le segment mM de part et d'autre de m, ce qui donne les deux points P et Q ; puis, de P et Q comme centres on décrit deux circonférences de rayon r ; les inter-

---

[1] *Cette note était entre les mains de la Rédaction de cette Revue depuis un an, lorsqu'en novembre 1905 j'ai eu connaissance de la construction publiée par* M. H. Bodenstedt (Braunschweig) *dans le n° 3 des* Unterrichtsblätter für Mathem. u. Phys., t. X. *L'auteur désigne le procédé comme construction géométrographique et celle-ci ne diffère de la mienne qu'en ce qu'elle fournit les points* P *et* Q *de la division en moyenne et extrême raison par la méthode donnée dans la* Géométrographie de Lemoine, Scientia, § XLIII, 3. *Qu'il me soit permis d'ajouter que j'ai trouvé la construction ci-dessus d'une façon indépendante il y a déjà plusieurs années.*

sections de ces dernières avec la circonférence précédente nous donnent, avec le point I, les sommets du pentagone. Cette construction peut être facilement modifiée comme suit: on trace la tangente en N à la circonférence O, on projette sur cette droite les points P et Q en P_1 et Q_1 ; on relie ces derniers points avec M par deux droites qui coupent le diamètre I1 en p et q; les perpendiculaires à ce diamètre par les points p et q déterminent sur la circonférence les 4 sommets cherchés. Cette modification ne rend pas nécessaire l'emploi du second compas, et la simplicité du procédé n'est en rien atténuée; elle offre en outre une certaine liaison avec la construction élégante donnée par Staudt dans le « Journal de Crelle » (vol. 24) et qui outre le cercle O nécessiste seulement une équerre.

Désignons par x et y les intersections du cercle O avec les droites MP_1 et MQ_1 et prolongeons la corde xy jusqu'à ses rencontres en B et A avec les tangentes en M et N ; il est alors facile de voir que les droites NA et MB ont respectivement pour longueur r et $4r$. En effet: les angles AxP_1, BMy et AQ_1y sont égaux, les triangles AxP_1 et AQ_1y sont donc semblabes, d'où la proportion :

$$Ax : (AN + s_2) = AP_1 : Ay$$

et l'égalité

$$Ax \cdot Ay = \overline{AN}^2 = (AN - s_1)(AN + s_2) ,$$

ce qui donne

$$s_1 s_2 = (s_2 - s_1) AN ,$$

ou encore

$$s_1 (r + s_1) = r \cdot AN .$$

En comparant ce résultat avec la relation IV_a on a : $AN = r$.

Des triangles également semblables AxP_1 et BxM on déduit:

$$AP_1 : BM = xP_1 : xM ,$$

d'où

$$(r - s_1) : BM = xP_1 \cdot MP_1 : xM \cdot MP_1 = s_1^2 : 4r^2 .$$

Puis, tenant compte de la relation

$$s_1^2 = r(r - s_1)$$

déduite de IV_a on conclut que :

$$\mathrm{BM} = 4r \ .$$

Nous voyons par là qu'après avoir déterminé sur les tangentes en N et M les points A et B, on obtient les points x, y en coupant la circonférence O par la droite AB et les points Q_1, q, P_1, p en menant les droites My, Mx. La construction qui vient d'être exposée est celle qu'on emploie en général lorsqu'il s'agit de résoudre une équation du second degré à l'aide d'un cercle fixe et de la règle ; elle est également à la base de l'adjonction apportée par Staudt dans l'article cité plus haut à la méthode de Steiner et Poncelet pour la construction du polygone régulier de dix-sept côtés.

Dans le triangle rectangle MPQ, on a :

$$s_2^2 = s_1 \cdot r\sqrt{5} \quad \text{et} \quad s_4^2 = s_3 \cdot r\sqrt{5} \ , \qquad \text{XI}$$

puis, multipliant membre à membre ces égalités et tenant compte de IV_a, on obtient :

$$s_2 : s_4 = r^2\sqrt{5} \ , \qquad \text{XII}$$

relation analogue à IX.

Mais de X on déduit :

$$s_2^2 + s_4^2 = 5r^2 \ ,$$

de sorte qu'on a

$$s_2 + s_4 = r\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \ , \ s_4 - s_2 = r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \ , \ s_2^2 + s_4^2 = s_2 \cdot s_4 \cdot \sqrt{5} \ ; \qquad \text{XIII}$$

d'autre part les égalités XI montrent que :

$$s_4^2 - s_2^2 = r^2\sqrt{5} = s_2 \cdot s_4 = s_3^2 - s_1^2 \ , \qquad \text{XIV}$$

relation qui, jointe à la troisième des égalités XIII, donne :

$$s_4 = \frac{s_2}{2}(\sqrt{5} + 1) \ , \qquad s_2 = \frac{s_4}{2}(\sqrt{5} - 1) \ ; \qquad \text{XV}$$

on en déduit, à l'aide des relations XIV, les valeurs de s_2 et s_4 exprimées en fonction du rayon r. On a, par exemple :

$$s_4 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \ .$$

D'autre part XIII donne par addition :

$$s_4 = \frac{r}{2}(\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}) ,$$

ce qui fournit à l'élève un exemple de la décomposition d'un radical double en deux autres.

On voit par les expressions XV (comparées aux relations VI), comme aussi par la similitude des triangles III O1 et III IV I, que les longueurs s_2 et s_4 jouissent des mêmes propriétés que s_1 et r ou r et s_3 ; elles peuvent en conséquence servir à construire le pentagone régulier dont le côté est donné.

Si nous continuons nos recherches, nous voyons que, par division, les égalités XI donnent :

$$s_2^2 : s_4^2 = s_1 : s_3 = (\sqrt{5}-1) : (\sqrt{5}+1)$$

et de là

$$\left.\begin{aligned} s_4^2 &= s_2^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = s_2^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \ . \\ s_2^2 &= s_4^2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = s_4^2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \ ; \end{aligned}\right\} \qquad \text{XVI}$$

les formules XV sont ainsi confirmées.

La valeur $s_4 - s_2 = r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ représente la moitié du côté t_2 du pentagone circonscrit au cercle O. En effet, soit Iv ce demi-côté ; les angles Ivt et Itv du triangle Itv sont tous deux égaux à 54° ; les côtés opposés It et Iv sont donc égaux ; d'autre part :

$$t\,\mathrm{IV} = \mathrm{II\,III} = s_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{I\,IV} = s_4 \ ,$$

il s'en suit que :

$$\mathrm{I}t = s_4 - s_2 = \mathrm{I}v \ .$$

Si l'on désigne par w l'intersection des deux diagonales III V et I IV du pentagone, on a également :

$$\mathrm{I}v = w\mathrm{IV} \ , \quad \text{car} \quad \mathrm{I}w = \mathrm{II\,III} = s_2 \ . \quad \text{d'où} \quad w\mathrm{IV} = s_4 - s_2 \ ,$$

ainsi :

$$\mathrm{I}v = \mathrm{I}t = w\mathrm{IV} = s_4 - s_2 = \frac{s_2}{2}(\sqrt{5}+1) - s_2 = \frac{s_2}{2}(\sqrt{5}-1) \ .$$

Nous déduisons de là une nouvelle construction du pentagone régulier dont le côté s_2 est donné ; elle consiste à déterminer le point w, en construisant le triangle III IVw. Cette construction est alors susceptible d'une double interprétation suivant que la longueur donnée représente le côté s_2 du pentagone inscrit ou le côté t_2 du pentagone circonscrit. Dans le premier cas le segment obtenu wIV représente le demi-côté du pentagone circonscrit ; dans le second cas où $\frac{1}{2} t_2 =$ IVw est donné, on obtiendra le segment III IV, côté du pentagone inscrit. On remarque en outre que si 2 est le point milieu de l'arc IV V et z l'intersection de III 2 avec I IV, on a

$$2w = 2\,\mathrm{IV} = s_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{III}\,w = \mathrm{III\,IV} = s_2 .$$

La longueur IIIz exprime la distance des segments II III et I IV et, cette distance est la même que celle des segments III IV et II V ; elle a pour valeur

$$pq = \frac{\mathrm{PQ}}{2} = \frac{s_1 + s_2}{2} = s_2 - \frac{r}{2} .$$

On a aussi $z2 = \frac{r}{2}$ du fait que 2 III $= s_2$ et comme wIV $= s_4 - s_2$ il en résulte que

$$z\,\mathrm{IV} = \frac{s_4 - s_2}{2} \quad \text{et} \quad z\,\mathrm{I} = \frac{s_4 + s_2}{2} ;$$

la puissance du point z par rapport au cercle O a pour valeur

$$\frac{s_4^2 - s_2^2}{4} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5}$$

c'est encore la relation XIV.

Les triangles semblables IIpO et III IVz nous fournissent la démonstration géométrique de la seconde partie de la relation XIV ; on a en effet :

$$\frac{s_4}{2} : r = \frac{r\sqrt{5}}{2} : s_2 .$$

Les triangles semblables I III IV et III IVw permettent de trouver la valeur du segment Iq. En effet, on a :

$$\mathrm{I}q : s_4 = r\sqrt{5} : 2s_2 ,$$

d'où

$$\mathrm{I}q = \frac{r\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{s_4}{s_2} = \frac{r}{4}(5 + \sqrt{5}) .$$

Cette valeur peut être aussi directement déduite de la figure, dans laquelle

$$\mathrm{I}q = r + \frac{s_2}{2} = \frac{3r + s_1}{2} .$$

Il serait encore possible de comparer les triangles III OQ et I II V puis les triangles $2w$IV, O III IV et Ivt. Comme propriétés que les élèves pourraient démontrer, nous citons les suivantes :

1. Les points 4, P et V ainsi que les points 2, IV, Q sont situés en ligne droite.
2. Le prolongement de la diagonale du quadrilatère I 32w passe par le point Q.
3. Représentant par t_4 le côté du pentagone étoilé circonscrit au cercle O, on a la relation

$$\frac{t_4}{2} = s_2 + s_4 = r\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} .$$

4. Démontrer au moyen de la figure les proportions :

$$s_2 : s_3 = \sqrt{5} : \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} ;$$

$$s_4 : s_1 = \sqrt{5} : \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} .$$

On pourrait également demander de calculer les segments P3, P2, PV, PIV, QV et Q_8 .

Franz Redl (Brunn-Harland, Basse-Autriche).

(Traduction de Georges Bertrand, Genève).

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

Il y a différentes façons d'exposer la mécanique. On peut commencer par la statique, en faire une science indépendante; c'est ainsi qu'on procédait autrefois. Une autre méthode consiste à débuter par la dynamique, après avoir exposé, bien entendu, les éléments de Cinématique nécessaires.

Chacune de ces deux méthodes a ses avantages propres. Dans les phénomènes terrestres, dans les applications pratiques où les liaisons jouent un grand rôle, la première méthode parait préférable. La seconde au contraire paraît meilleure pour l'étude des phénomènes célestes, c'est pourquoi je nommerai cette dernière mécanique astronomique la première « mécanique terrestre. »

Dans la mécanique astronomique la notion de masse présente quelques difficultés ; dans l'exposé suivant je me suis efforcé de rendre naturelle l'introduction de cette notion.

I. Notion de point matériel. Un point matériel est un volume de matière dont les dimensions sont insensibles. Toutefois dans certaines questions on est amené à considérer comme points matériels des volumes qui ne sont pas très petits. C'est ainsi qu'en Astronomie on traite le plus souvent les astres comme des points.

II. Principe de l'inertie. *Si un point matériel est isolé, son mouvement est rectiligne et uniforme.* En d'autres termes son accélération est nulle. Ce principe paraît invérifiable ; on ne peut faire qu'un seul point matériel existe dans l'espace. Mais nous complétons le principe en admettant ce qui suit: « L'action d'un ou plusieurs points matériels sur un point matériel est insensible à de grandes distances. » Alors un point matériel très éloigné de tous les autres aura un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme. L'étude des mouvements propres des étoiles est d'accord avec ce principe. Comme les mouvements de Sirius et de Procyon paraissaient n'être pas d'accord avec lui, on en a conclu que chacun de ces deux astres avait un satellite. Plus tard l'observation a confirmé cette prévision.

III. Principe de l'action et de la réaction. Je n'énoncerai pas tout d'abord ce principe. Je vais montrer qu'il est une sorte de généralisation du principe de l'inertie. Les points matériels sont en réalité des systèmes matériels très-petits. Le principe de l'inertie s'appliquant ainsi à un système matériel très-petit doit s'appliquer à un système quelconque. Pour généraliser le principe, le plus naturel est d'adopter l'énoncé suivant :

Si un système de points matériels est isolé, (c'est-à-dire très éloigné de tout autre système) il existe un point G, *intérieur à tout volume convexe contenant le système, qui possède un mouvement rectiligne et uniforme.*

Je ne dis pas que G est invariablement lié au système, car si le système n'est pas lui-même invariable cela n'aurait aucun sens. J'admets toutefois que G ne dépend pas des vitesses des points du système. Je nommerai le point G, centre du système.

Les points matériels ne sont pas tous identiques entre eux ; deux petits volumes égaux, l'un de plomb l'autre de fer ne sont pas pareils. Je vais considérer d'abord des systèmes formés de points tous identiques entre eux, que je nommerai *homogènes*. En admettant un principe supplémentaire que j'énoncerai tout à l'heure je vais démontrer la proposition suivante. *Le centre d'un système homogène est son centre des moyennes distances.* On sait que le centre des moyennes distances de n points est un point dont les coordonnées s'obtiennent en prenant la moyenne arithmétique des n coordonnées de ces points

$$x = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}$$

et deux formules analogues pour y et z.

Supposons d'abord deux points A et B. Leur centre G, étant à l'intérieur de tout volume convexe contenant A et B doit se trouver sur la droite AB. Mais les points A et B étant identiques, G ne peut se trouver qu'au milieu de AB.

Considérons deux systèmes de points tous identiques entre eux soient G_1 et G_2 leurs centres. Si les deux systèmes ont le même nombre de points j'admettrai que le *centre du système total formé par la réunion de ces deux systèmes est encore le milieu de* $G_1 G_2$ comme si les deux systèmes étaient concentrés l'un en G_1 l'autre en G_2. C'est là le principe supplémentaire dont j'ai parlé tout à l'heure.

Revenons au théorème que nous voulons démontrer. Il est vrai pour deux points, nous l'avons vu. Supposons le vrai pour deux groupes ayant chacun n points identiques. Le point G_1 centre du premier groupe sera son centre de moyennes distances, de même le point G_2 centre du deuxième groupe. Le centre des $2n$ points sera alors le point G milieu de $G_1 G_2$. Or ce point G est bien le centre des moyennes distances des $2n$ points. (Si X est la moyenne arithmétique des abcisses des n premiers points, X' celle des n autres, la moyenne arithmétique des abscisses des $2n$ points sera $\frac{X + X'}{2}$.)

Si donc le théorème est vrai pour n points quelconques il est vrai pour $2n$; comme il est vrai pour 2, il est vrai pour 4 puis 8, 16, 32... etc., c'est-à-dire pour $2p$, p étant un entier quelconque.

Pour étendre le théorème à un autre nombre de points, je fais les deux remarques suivantes.

1° Si au centre d'un système on place un ou plusieurs points, cela n'empêche pas le centre d'occuper toujours cette même place. C'est si l'on veut un nouveau principe, mais il paraît évident.

2° Si au centre des moyennes distances on place un ou plusieurs points le centre des moyennes distances du système obtenu par l'adjonction de ces points ne change pas. (La moyenne arithmétique de plusieurs quantités n'est pas changée, si on adjoint d'autres quantités toutes égales à cette moyenne arithmétique).

Cela posé, démontrons le théorème pour 25 points. Le théorème est vrai pour 32 points ; soit G le centre des 25 points. Au point G plaçons 7 points identiques aux premiers. Cela fera 32 points, et le point G sera le centre de ces 32 points. Le théorème étant vrai pour ces 32 points, G est leur centre des moyennes distances. D'après la remarque précédente, c'est donc aussi le centre des moyennes distances des 25 points primitifs.

La proposition est ainsi complètement démontrée.

Supposons maintenant des points identiques entre eux dont:

m_1 réunis en A_1 dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1.
m_2 A_2 x_2, y_2, z_2.

etc.

La moyenne arithmétique des abscisses sera alors :

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

en écrivant des formules analogues pour y et z, on aura les coordonnées du centre.

Lorsqu'on a ainsi m_1 points réunis en A_1 et m_2 réunis en A_2 tous identiques entre eux, on dira que les *masses* des points A_1 et A_2 sont proportionnelles à m_1 et m_2. Nous avons ainsi la notion de *masse*. Nous admettons alors que les points *non identiques* A_1 et A_2 peuvent être remplacés par un certain nombre de points identiques condensés en A_1, et un certain nombre condensés en A_2. Le rapport des deux nombres de points sera le rapport des *masses* des points matériels A_1 et A_2. Le point G centre du système, dont les coordonnées sont calculées ci-dessus, possède alors, lorsque le système est isolé, un mouvement rectiligne et uniforme. Considérons maintenant deux points A et B seulement, de coordonnées x, y, z, x', y', z' et de masses m et m', soient X, Y les coordonnées du centre G.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{mx + m'x'}{m + m'} \\ Y &= \frac{my + m'y'}{m + m'} \\ Z &= \frac{mz + m'z'}{m + m'} \end{aligned}\right.$$

Soient γ et γ' les accélérations des deux points ; ce sont deux vecteurs dont les projections sur les axes sont les dérivées secondes par rapport au temps de $x, y, z; x', y', z'$. En prenant les dérivées secondes des deux membres des équations (1) et observant que le point G a une accélération nulle, on voit que les projections sur les axes de la somme géométrique des deux vecteurs $m\gamma$, $m'\gamma'$ est nulle, donc ces vecteurs sont égaux parallèles et de sens contraires.

Si nous appelons *Action* de B sur A, le vecteur égal à $m\gamma$, dirigé dans le sens de l'accélération γ, on voit par ce qui précède que l'action de A sur B et celle de B sur A sont deux vecteurs égaux et de directions contraires.

Si l'on admet que cette action ne doit pas dépendre des vitesses absolues de A et de B, mais seulement de leur vitesse relative et de leur distance, comme la vitesse relative est dirigée suivant AB, une simple raison de symétrie montre que l'action doit aussi être dirigée suivant AB, en sorte que:

L'action de B sur A et l'action de A sur B sont deux vecteurs égaux et directement opposés.

On peut encore remarquer que si l'action de A sur B n'était pas dirigée suivant AB, l'action de A sur B et celle de B sur A tendraient à faire tourner AB autour de G dans le même sens, ce mouvement de rotation irait ainsi en s'accélérant ce qui paraît choquant.

IV. Principe de composition. *On obtient l'accélération produite sur un point A par un système de points B C D E en faisant la somme géométrique des accélérations que produiraient les points B C D E séparément.* L'action étant le produit de la masse de A par son accélération, le même principe peut s'énoncer en remplaçant le mot *accélération* par le mot *action*.

Le produit d'une masse par l'accélération de cette masse est appelé *Force*.

Les principes que nous venons d'énoncer et d'expliquer ne sont nullement évidents. Leur démonstration est expérimentale, elle se fait comme il suit: Ajoutons à ces principes la loi de l'attraction universelle.

L'action de A sur B, dirigée suivant B A est proportionnelle au produit des masses de A et de B, et à l'inverse du carré de la distance AB.

Cette loi ajoutée aux autres permet de trouver le mouvement d'un système de points. Or: appliquée aux astres du système solaire elle donne des résultats conformes à l'observation. Une loi différente ne donnerait pas le même résultat, comme on le démontre. C'est donc l'observation des astres qui fournit la vérification des principes précédents. On pourrait prendre chaque principe séparément et montrer comment il est vérifié ; je ne le ferai pas, me bornant à remarquer que cette vérification est extrêmement précise. La même précision n'est pas atteinte dans la plupart des autres lois physiques.

J'ai exposé les principes de la mécanique astronomique un peu longuement, avec presqu'autant de détails que je l'aurais fait devant des élèves. Je ne recommencerai pas pour la mécanique terrestre. Je me bornerai à de courtes indications sur cette seconde façon d'exposer la mécanique.

Une force est ce qu'on mesure avec un dynamomètre. Un dynamomètre pouvant être tendu par un poids, un poids est une force. La direction de cette force est toujours celle de la pesanteur, mais si l'on suspend un poids à un cordon passant sur une poulie, et que l'autre extrémité de ce cordon soit attachée au dynamomètre, le dynamomètre fléchit comme si le poids y était directement appliqué. La direction de la force est changée non son intensité. *On peut donc produire une force de direction et d'intensité quelconque à l'aide d'un poids.* La statique des forces est identique à la statique des poids. On pourra vérifier à l'aide de poids les propositions de statique.

On peut alors exposer la statique comme le fait Poinsot ou de toute autre manière.

La statique étant exposée on passera à la dynamique des corps pesants. La masse d'un corps pourra être définie expérimentalement comme le quotient du poids par l'accélération.

On pourra poser ensuite le principe de d'Alembert. La force d'inertie d'un point est le produit de sa masse par l'accélération qu'il possède, elle est de sens contraire à cette accélération. Le principe de d'Alembert consiste dans l'équilibre entre les forces d'inertie et les forces directement appliquées.

Le principe de d'Alembert se vérifie dans le cas simple des systèmes pesants; dans d'autres cas il est une sorte de définition, car il y a des forces comme les frottements, la résistance de l'air, non mesurables statiquement. Ces forces sont définies de telle façon que le principe de d'Alembert demeure vérifié.

Il y a d'autres manières de faire. On peut par exemple exposer d'abord la statique, puis la dynamique astronomique indépendamment de la statique. Poser ensuite comme une sorte de postulat l'identité des deux notions de force. Par exemple si l'on mesure une attraction électrique statiquement, puis au moyen des oscillations d'un petit pendule, le postulat en question affirmera l'identité des deux valeurs obtenues.

J'arrête ici cette trop longue dissertation. Mon but principal était d'introduire d'une façon naturelle la notion de *masse* dans la mécanique astronomique.

J. RICHARD (Dijon).

APPLICATION DES MÉTHODES GÉOMÉTROGRAPHIQUES AU TRACÉ MÉCANIQUE DES COURBES PLANES

1. Nous nous proposons, dans cette courte note, de montrer comment on pourrait étendre les idées qui forment le fond de la Géométrographie au tracé des courbes planes au moyen de curvigraphes.

L'étude de chaque tracé comprendra deux parties:

1° Recherche du coefficient de simplicité du curvigraphe.

2° Simplicité et exactitude du tracé de la courbe, cette dernière partie comprenant le réglage du curvigraphe.

On doit supposer que les curvigraphes employés sont aussi grands ou aussi petits que l'exige le tracé.

La première partie nécessitera un nouveau symbole que nous appelerons « symbole cinématique ».

Lorsqu'un point décrit une droite (ou lorsqu'un curseur parcourt une tige) et réciproquement lorsqu'une droite doit passer par un point, on aura D_1

Lorsqu'une droite glisse sur une droite, on aura $2D_1$ car cela revient à faire glisser deux points de la première sur la seconde.

Nous obtiendrons pour chaque curvigraphe un symbole de la forme nD_1 ; n étant le coefficient de simplicité. Il est à remarquer que notre méthode ne s'applique pas aux systèmes de tiges articulées tels que le quadrilatère articulé.

Pour le tracé de la courbe, nous conserverons les symboles de M. Lemoine [1] et en plus de ceux-ci, le symbole L_n, exprimant le tracé d'une courbe plane du n^{ieme} ordre. Le coefficient de L_n entrera dans le coefficient de simplicité.

Examinons maintenant quelques tracés :

2. Tracé de l'ellipse au moyen du curvigraphe à ornières.

Ce curvigraphe se compose de deux ornières fixes rectangulaires. Un curseur A se meut sur l'une d'elle Ox et un curseur B sur l'autre Oy. Tout point de AB décrit une ellipse. Symbole $2D_1$, simplicité 2.

Tracer une ellipse, un demi-axe étant donné [2].

Tracer une droite	R_2.
Porter la distance donnée	$C_2 + C_3$
Placer le point O du curvigraphe à une extrémité du segment	C_1
Mettre un point de Ox (ou de Oy) sur la droite tracée	C_1
Mettre la pointe à tracer à la 2e extrémité du segment	C_1
Tracer l'ellipse	L_2.

Op. : $(R_2 + 3C_1 + C_2 + C_3 + L_2)$; simplicité : 7 ; exactitude : 4.

[1] Voir Lemoine, *La Géométrographie* (Scientia). Paris, Gauthier-Villars ; page 16.

[2] Nous supposons que pour donner une longueur, on donne l'écartement entre les deux pointes d'un compas.

Tracer une ellipse, les deux demi-axes étant donnés.

Tracer deux droites rectangulaires[1] OC, OD $4R_1 + 3R_2 + C_3$.

Porter, à partir de O, les longueurs données sur ces droites $2C_1 + 2C_3$.

Placer l'appareil $2C_1$

Placer le traceur en C, puis en D. $2C_1$

Tracer la courbe L_2.

Op. : $(4R_1 + 3R_2 + 6C_1 + 3C_3 + L_2)$; simplicité 17; exactitude 10.

3. Tracé de la conchoïde.

Le curvigraphe employé se compose d'une droite Ox tournant autour d'un de ses points O, d'une droite fixe AB et d'une droite CD glissant sur Ox de manière que l'une de ses extrémités C parcourt en même temps AB. D est la pointe à tracer. La distance CD est réglable à volonté. Le symbole est $3D_1$, simplicité : 3.

Tracer une conchoïde, O et AB étant placés, CD donné.

Par O, tracer une droite rencontrant AB en C', $R_1 + R_2$

A partir de C', porter C'D' sur OC' $C_1 + C_3$

Placer le point O et la droite AB du curvigraphe $3C_1$

Placer le point C du curvigraphe en C' C_1

Placer D en D' C_1

Tracer la courbe L_4.

Op. : $(R_1 + R_2 + 6C_1 + C_3 + L_4)$; simplicité, 10; exactitude 7.

4. Tracé du limaçon de Pascal,

Le curvigraphe employé est analogue. C, au lieu de décrire AB, est lié d'une manière invariable à un point A tel que AC = AO. Symbole $2D_1$, simplicité : 2.

Tracer le limaçon de Pascal connaissant AO et CD.

Tracer un cercle de rayon AO et de centre A' C_3.

Tracer une sécante O'C', O' étant sur la circonférence R_2.

Porter sur O'C' la longueur C'D' où partir de C' $C_1 + C_3$.

Placer le curvigraphe (O en O' et A en A') $2C_1$.

Faire coïncider C avec C' C_1

Faire coïncider D avec D' C_1

Tracer le limaçon. L_4.

---

[1] LEMOINE, loc. cit., page 19.

Op. : $(R_2 + 5C_1 + 2C_3 + L_4)$; simplicité 9 ; exactitude 5.

On voit, par ces exemples, en quoi consisterait l'étude du tracé mécanique des courbes.

5. Nous terminerons par ces trois remarques :

a) Le symbole E de l'équerre est équivalent à $2D_1$.

b) Lorsque deux droites se meuvent dans un plan et qu'elles doivent faire constamment entre elles un angle ω, on a recours à une équerre dont l'un des angles est égal à ω.

c) Le symbole D_1 peut être généralisé. Si une courbe du n^{me} ordre glisse sur une courbe semblable, on aura mD_n, m étant déterminé par la Géométrie.

Décembre 1905.

L. Godeaux (Ath, Belgique).

SUR LA MÉTHODE D'ENSEIGNEMENT EN AMÉRIQUE

En Amérique l'heure durant laquelle le maître entre en contact avec sa classe est communément appelée « la récitation ». William James, de l'Université de Harvard, parlant de la « Méthode de récitation américaine », la met en contraste avec les cours allemands et écossais et le système anglais des « Tutors ». Une « récitation » américaine typique d'autrefois, soit par exemple pour l'algèbre, peut se décrire comme suit : lorsque la classe est réunie, le maître s'informe des progrès que les élèves ont faits dans la préparation de leur leçon, et, le cas échéant, il en explique brièvement quelques-unes des difficultés. Il assigne ensuite à chacun un problème pris dans le manuel en usage. Dès que quelques élèves ont terminé on commence les explications ; chaque élève ira à son tour à la planche noire et expliquera sa solution de problème. Peut-être trouvera-t-on assez de temps à la fin de l'heure pour donner quelques explications sur la leçon suivante ; mais souvent le temps manque et l'on s'en remet au manuel pour les solutions et les explications types. Ainsi le point saillant de l'ouvrage accompli pendant l'heure est la récitation par l'élève, soit de vive-voix, soit écrite, de ce qu'il a appris avant de venir en classe. Cette forme de récitation n'est plus aujourd'hui d'un usage absolument général ; elle a subi des transformations sur certains points.

D'après la méthode allemande, le maître doit en premier lieu étudier un nouveau sujet avec sa classe, il développe et étend ses questions en exigeant des explications sur tous les points de la leçon, jusque dans les détails les plus minimes[1]. Une fois que le sujet est bien compris, il fait l'objet d'un devoir écrit, puis, dans la leçon suivante, l'élève est soumis à une interrogation permettant de voir si le sujet a été bien compris et retenu.

Dans le système anglais, le manuel est strictement suivi. Lorsque l'élève tombe sur quelque chose qu'il ne peut pas comprendre, il consulte son « Tutor » privé qui lui aide à surmonter l'obstacle, après quoi il continue comme auparavant.

En France, dit M. James Pierpont[2], la méthode de conférences ou de cours est en usage à partir de la classe III ou pour les élèves de 14 ans et plus.

La méthode américaine a obtenu de bons résultats. Du moment où l'on s'en remet complètement aux manuels, ces livres doivent être rédigés avec le plus grand soin. On a souvent reconnu que les livres de classe américains sont les meilleurs du monde, tant au point de vue méthodique qu'à celui de l'exécution. Ceci ne veut pas dire qu'ils soient supérieurs aux autres au point de vue purement scientifique. Les ouvrages anglais, surtout ceux qui sont en usage dans les Collèges (gymnases), n'ont pas la même valeur pédagogique ; leur classification laisse souvent à désirer et leurs explications sont souvent trop condensées.

---

[1] Voir *Mathematics in Schools of Prussia*, par YOUNG.
[2] Voir *Bulletin of the American Mathematical Society*, Mars 1900, p. 229.

La méthode allemande essaie de présenter le travail sous une forme facile à comprendre, même pour les élèves les moins doués, tandis que le plan anglais à l'avantage de faciliter beaucoup les progrès pour ceux qui le sont davantage. La méthode américaine ne paraît pas s'occuper plutôt des intérêts de ceux qui ont du talent que de ceux qui n'en ont pas; elle se met à la portée du plus grand nombre.

En considérant la chose sous un autre point de vue, nous pouvons dire que les formes allemande et française placent le maître au centre de la classe, tandis que d'après la méthode américaine, les élèves prennent tour à tour cette place. La méthode française est l'enseignement didactique, la méthode anglaise celle d'un laboratoire, la méthode américaine se concentre dans le manuel, et la méthode allemande est nettement socratique.

Chacune de ces méthodes présente des avantages spéciaux ainsi que des défauts; chacune est applicable au cours des études suivant les degrés et les sujets. Il s'agit surtout que l'élève se forme de bonne heure à acquérir des connaissances et apprenne à se contrôler lui-même; vers la fin, lorsqu'il tend à se spécialiser, son but n'est plus tant d'apprendre à acquérir des connaissances, que plutôt et rapidement d'acquérir ces connaissances elles-mêmes et l'habileté de s'en servir. Dans l'entraînement judicieux d'un individu, on peut établir les trois degrés suivants : 1. Un stage de développement à l'aide de l'enseignement oral ; 2. Un stage ultérieur à l'aide des manuels ; 3. Un stage où les cours proprement dits et les conférences jouent le principal rôle. Ces degrés semblent correspondre aux formes de présentation allemande, anglaise ou américaine, française (pour les classes avancées) ou écossaises.

L'absence ou le déplacement d'un de ces trois degrés ne sera-t-il pas préjudiciable à l'élève ? Il est évident que ces différentes méthodes peuvent se superposer ou encore s'harmoniser les unes et les autres, et dans certains cas être mises en pratique au cours d'une même leçon. Elles pourraient aussi être combinées de différentes manières et produire une grande variété dans la méthode de l'enseignement. En Amérique nous possédons à présent différentes variétés, quoique, comme nous l'avons déjà mentionné, la majorité des maîtres appliquent les méthodes basées plus ou moins fidèlement sur l'ancienne conception de la « récitation ». Il y a des maîtres qui font des conférences sur des points très difficiles, examinent l'élève sur le devoir assigné dans le manuel, et développent, au moyen de questions, des sujets plus avancés. D'autres basent l'étude et la critique sur une préparation écrite apportée en classe. Quelques-uns seulement ont recours à la méthode de laboratoire. Une forme de « récitation » qui ne manque pas de mérite est celle qui consiste à appeler un seul élève à la planche noire pour la résolution graphique et orale d'un problème ; le maître aide et examine celui qui travaille au tableau tout en questionnant et en cherchant à obtenir des suggestions de la part des autres élèves.

Nous terminons ce bref exposé en insistant sur les avantages que présente la connaissance des méthodes en usage dans les autres pays. La comparaison des différentes méthodes sert à provoquer une saine émulation parmi les membres du corps enseignant. Dans cet ordre d'idées les associations de maîtres de mathématiques sont appelées à jouer un rôle très utile [1].

Joseph V. Collins (Stevens Point, Wis., Etats-Unis).

---

[1] Nous pouvons ajouter que durant les quatre ou cinq dernières années il s'est manifesté un réveil parmi les maîtres de mathématiques aux Etats-Unis. Plus d'une douzaine d'associations locales se sont organisées dans différentes parties du pays, et, en juillet 1905, des mesures furent prises pour réunir ces sociétés locales en une fédération nationale.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article sur le mouvement de la Terre.

Lettre de M. STUYVAERT (Gand).

LA TERRE TOURNE. — Un article très intéressant publié dans l'*Enseignement mathématique* (p. 450-457), du 15 novembre 1905 apporte encore quelques arguments en faveur du mouvement de la Terre, une question pourtant définitivement résolue, et sur laquelle on est presque confus de devoir revenir. Seulement on est bien obligé d'en parler, parce que l'on voit, un peu partout, et en Belgique plus qu'ailleurs, une certaine catégorie de personnes exploiter avec insistance un passage d'un livre récent de M. Poincaré, et invoquer cette grande autorité pour mettre en doute le mouvement de la Terre.

La reprise des expériences de Foucault sur le pendule a donné une autre occasion de se montrer aux partisans de l'immobilité du globe. Lorsqu'ils sont en présence de ce phénomème, ou de tout autre analogue, expliqué par la rotation terrestre, les immobilistes disent : « Cette expérience et les raisonnements qui l'accom-
« pagnent prouvent la rotation de la Terre... ou celle du reste de
« l'Univers, ce qui revient au même,... voir M. Poincaré. »

Leur attitude est habile mais peu scientifique : habile, parce qu'ils n'ont jamais à contester qu'un seul fait et une seule explication à la fois ; peu scientifique, parce qu'ils se confinent dans la négative.

S'ils sont sincères, ils doivent quitter cette position défensive et baser, sur l'hypothèse du repos absolu du globe, une mécanique, une physique, une astronomie nouvelles, et rendre compte, non pas d'un seul fait, mais de tous les phénomènes observés, pendule de Foucault, déviation des graves, force centrifuge, mouvements des corps célestes, etc., etc.

Qu'on n'allègue pas la plus grande commodité de l'hypothèse d'une Terre mobile. Car nous vivrions dans un monde bien étrange si les faits d'observation s'expliquaient moins bien par la vérité que par une hypothèse diamétralement opposée.

Il y a plus : celui qui se croit en possession de la vérité doit la prendre pour base de ses théories, quoi qu'il puisse lui en coûter; il doit avoir le courage de passer par des calculs pénibles, ne fut-ce que pour prouver la possibilité de la chose.

On dira peut-être que dans l'hypothèse de l'immobilité terrestre, l'énoncé des lois de la nature devient d'une complication telle qu'elle équivaut en pratique à l'impossibilité, mais que ce n'est pas encore une raison suffisante d'affirmer la rotation du globe. Soit, mais c'est encore moins une raison de la nier.

Lettre de M. Andrault (Grenoble).

La relativité du mouvement de la terre. — Il y a sans doute des relativistes de tout ordre et de toute condition. M. Richard lui-même, si je l'ai bien compris, est en quelque manière relativiste, puisqu'il accorde que nous ne pouvons connaître que des mouvements relatifs.

Mais c'est un relativiste, hanté par l'absolu :

Non seulement il gratifie d'absolus les mouvements relatifs à certain repère, mais pour lui, une écrémeuse tournant dans l'Univers et l'Univers tournant autour de l'écrémeuse sont deux hypothèses *distinctes*, ce qui suppose la croyance en un espace absolu.

Comment d'ailleurs sait-il que dans la seconde hypothèse, les choses seraient autres que dans la première ? Comment, si l'Univers ne lui est pas donné deux fois, peut-il faire la différence ? Comment saura-t-il même qu'un objet tourne ?

L'espace absolu est par nature inaccessible. Comme le Dieu de Pascal, « n'ayant ni portes ni bornes, il n'a nul rapport avec nous : « nous sommes donc incapables de connaître ni ce qu'il est, ni s'il « est. »

Je connais un relativiste. Quand vous l'interrogez sur la *réalité* du mouvement d'un corps, il vous envoie poliment chez le métaphysicien d'à côté.

« La question n'est pas de mon ressort, dit-il, *pas plus que celle « de la réalité de l'espace, du temps ou du monde qui nous entoure.* « Les sciences d'observation n'impliquent rien de pareil : On peut « s'occuper de sensations associées sans postuler la réalité des « objets extérieurs. Elles ont pour limite ce qu'on peut voir, en- « tendre ou sentir et comparer ».

« Chacun son métier : Pour moi *ce qui est incomparable est in- « compréhensible.* Un mouvement réel, existant en soi et par soi « est un non sens ; *le mouvement n'est pas dans les corps, il est « dans leurs relations.* »

Et si pour en venir à un objet plus précis, vous lui faites remarquer qu'à la suite de ses observations télescopiques, Galilée fut conduit à affirmer la rotation de la terre *indépendemment de tout repère*, il répond :

« Je vous l'ai dit, je n'entends rien à ce langage. Les observa-

« tions de Galilée l'ont conduit à placer la terre au rang des pla-« nètes; voilà le fait. Pour ne pas le méconnaître, il lui fallut rap-« porter les mouvements de tous ces corps à un système de réfé-« rence *ne laissant à la terre aucun rôle privilégié ;* par conséquent « à un repère à l'égard duquel *il devait dire que la terre tourne.* « C'est précisément ce que réalisait le système de Copernic et ce « qui décida de son succès. »

« Que Galilée ait prétendu en même temps affirmer quelque « chose sur les réalités métaphysiques, il est impossible d'en dou-« ter, sous peine de ne rien comprendre à son calvaire. C'est ce « qui l'explique sans le justifier. Bien d'autres ont mêlé physique « et méthaphysique : pour moi, *la crainte de ce mélange est le com-« mencement de la sagesse.* »

« Remarquez maintenant que *la rotation de la terre est à l'ori-« gine de notre dynamique.* Cette dernière est fille de l'astrono-« mie ; ses invérifiables principes découlent de l'interprétation « copernicienne. S'ils n'en sont pas tout à fait descendus, c'est du « moins en vue du ciel copernicien qu'ils ont été construits et « ajustés. *La rotation étant dans les prémisses, il n'est pas étonnant « qu'on la retrouve dans les conclusions.* »

« Pour connaître l'exacte portée des généralisations que nous « pouvons faire, à partir d'expériences mécaniques particulières, « *raisonnons donc comme si la dynamique n'existait pas.* »

« Vous avez étudié je suppose, les figures d'équilibre d'une « masse fluide en rotation. Vos expériences sont *assez grossières,* « pour que leurs résultats puissent être indifféremment rapportés « à un repère terrestre ou à un tièdre stellaire. Parmi tous les re-« pères possibles, n'en serait-il pas un faisant dépendre d'une « même loi la forme de la terre et celle de vos fluides ? »

« Coïncidence remarquable : le repère de Galilée vous donne « satisfaction. »

« Vous partez d'*observations grossières* sur l'invariabilité du plan « d'oscillation d'un pendule, et vous vous proposez de faire ren-« trer dans l'ordre l'expérience de Foucault. Nouvelle coïnci-« dence :

« le même repère vous donne satisfaction [1]. »

« Son importance va donc croissant.

« Vous la multiplierez par d'autres généralisations du même « ordre, et plus encore par des généralisations d'ordre différent. »

« Partant d'expériences sur la vitesse de la lumière vous cher-« chez par exemple quel devrait être le mouvement relatif de « l'éther et de la terre pour que l'aberration ait les caractères que

---

[1] On ne peut dire : « Les phénomèhes qui accompagnent la rotation d'un objet se pro-« duisent tous pour la terre, donc la terre tourne, « car cela n'aurait de sens qu'en pré-« cisant le repère ».

« que nous lui connaissons. Résultat : On peut supposer l'éther « lié au repère de Galilée. »

« Ainsi donc, au degré d'approximation de nos expériences, *il « existe un système de référence par lequel s'établissent des rapports « étroits et inattendus entre les phénomènes les plus divers.* »

« *Un pareil repère n'a rien de commun avec l'espace absolu.* Il « est accessible, et tire même son importance de la richesse de ses « relations. »

« Son rôle physique, quoique plus vaste est comparable au rôle « chimique de l'air. Il n'y a pas plus de mobilité réelle, absolue, « que de combustibilité réelle, absolue. L'hydrogène brûle en « présence de l'air comme l'air brûle en présence de l'hydrogène ; « de même, la terre est en mouvement à l'égard du repère comme « le repère est en mouvement à l'égard de la terre. Demander si « c'est la terre qui tourne ou bien le repère, c'est demander si « c'est l'hydrogène qui se combine ou bien l'air. »

« *Affirmer cela, ce n'est pas plus méconnaître l'importance du « repère que méconnaître l'importance de l'air :* C'est en quelque « sorte avancer que Galilée a été le Lavoisier de la physique. »

« Et quand je dis que la terre tourne, mon affirmation *relative*, « est plus riche de tous les rapports qu'elle éveille par le repère « qu'elle implique que si elle était absolue, c'est-à-dire isolée. »

« Mais cette richesse, j'en conviens, n'est pas sensible aux yeux « du vulgaire. Elle ne se découvre pas au seuil de la science, mais « à mesure qu'on en gravit les degrés ; elle n'éclate splendide qu'à « son couronnement. »

G. ANDRAULT (Grenoble).

Lettre de M. J. RICHARD, (Dijon).

RÉPONSE A M. ANDRAULT. — Je me suis, je crois, mal fait comprendre, lorsque j'ai parlé du mouvement absolu. Je n'ai jamais prétendu que nous avions en nous-même la notion du mouvement absolu, pas plus que nous n'avons la notion de corps solide invariable ou de distance de deux points. La notion de mouvement absolu est une notion EXPÉRIMENTALE.

Les lois de la dynamique ne sauraient être les mêmes, si l'on prend pour définir le mouvement un système de repères ou un un autre. Or il existe un système de repères c'est-à-dire un système d'axes et une horloge, possédant les propriétés suivantes :

1° Le mouvement d'un point matériel isolé (c'est-à-dire très éloigné de tout corps pouvant agir sur lui) est rectiligne et uniforme.

2° Le mouvement des points matériels non isolés (par rapport à ce système d'axes et cette horloge) est conforme à la loi de Newton.

3° Par rapport à ce système d'axes la propagation de la lumière se fait avec une vitesse constante, la même dans toutes les directions.

Tout ceci est affaire d'observations astronomiques. Comme je ne veux pas écrire une dizaine de pages, je demande qu'on m'accorde que tout ceci est démontré.

J'insiste sur deux points cependant: 1° Ces observations ne sont pas grossières, elles sont multiples et s'accordent toutes entre elles.

2° Quelque précision qu'aient ces observations elles n'ont pas une précision infinie. Mais aucune vérité concrète, relative au monde extérieur n'est susceptible d'une précision infinie.

Or j'appelle mouvement absolu le mouvement par rapport au système d'axes possédant les propriétés précédentes. J'ai aussi bien le droit d'appeler ce mouvement « absolu » que M. Cayley a eu le droit dans sa géométrie non Euclidienne d'appeler absolu certaine surface du second degré. Les mots n'ont que le sens qu'on leur donne.

La thèse du mouvement absolu, et du temps absolu est justifiée par le seul fait de l'existence d'un système de repères possédant des propriétés spéciales. C'est une vérité *expérimentale*.

Je ne sais pas si Galilée a voulu mettre dans son système quelque métaphysique. Je crois que son principal argument est celui-ci: Si la terre ne tourne pas tout tourne autour d'elle; à part les quelques astres ayant un mouvement propre, tout le système tourne autour de la terre comme un corps solide. Comment expliquer cette extraordinaire solidarité de tous les corps; ceux-ci ne paraissent pourtant pas liés entre eux. L'explication est simple si c'est la terre qui tourne. L'idée métaphysique de Galilée, si idée métaphysique il y a, est l'idée de cause.

Je crois, du reste, être bien près d'être d'accord avec Monsieur Andrault. Précisions la divergence. Monsieur Andrault dit: « Il existe un repère par lequel s'établissent des rapports étroits et inattendus entre les phénomènes les plus divers.

Un pareil repère n'a rien de commun avec l'espace absolu. »

Désignons ce repère par A, l'espace absolu par B.

Monsieur Andrault dit: « A existe, il est distinct de B. »

Moi je dis: « A existe: B n'est pas défini; je le définis par la proposition $B = A$. »

Je conteste la comparaison de la mobilité avec la combustibilité. Lorsque de l'oxygène et de l'hydrogène se combinent, ils jouent un rôle en quelque sorte symétrique. Il n'y a pas symétrie entre la terre et le reste de l'univers. Si la terre tourne, le reste restant fixe, les distances mutuelles des astres ne varieront pas. Si l'univers tourne, la terre restant fixe, il y a une infinité de mouvements possibles, et celui dans lequel les apparences sont les mêmes que si la terre tournait n'est qu'un cas particulier extrêmement peu probable à priori. C'est l'argument cité plus haut que je suppose avoir été celui de Galilée.

Je termine ici ces explications, plus longues que je n'aurais voulu les faire. Je dois dire en terminant que Monsieur Méray, après avoir lu mon article sur le mouvement absolu m'a déclaré être d'accord avec moi sur ce sujet, et m'a autorisé à le dire.

Les relativistes se réclament de M. Poincaré. Dans son ouvrage sur la valeur de la Science, M. Poincaré s'est expliqué à ce sujet. L'idée générale qui domine dans ses ouvrages philosophiques est qu'il y a dans toutes nos affirmations des hypothèses adoptées par nous pour leur commodité. Mais si dire que la terre tourne est une convention commode, dire que la terre est plus grosse qu'une bille de de billard, ou que la distance de Paris à Londres est supérieure à un mètre, n'est aussi qu'une convention commode. La rotation de la terre n'a donc rien de plus conventionnel que nos affirmations les plus usuelles.

CHRONIQUE

Une distinction bien méritée.

Le *Journal officiel* de la République française, du 18 février 1906, a enregistré la nomination de M. Emile Lemoine, mathématicien français, comme chevalier de la Légion d'honneur. C'est une mesure à laquelle applaudiront les savants du monde entier, et qui honore grandement le gouvernement qui l'a prise.

Il est presque de règle, en France, que les décorations sont attribuées à des fonctionnaires comptant un nombre d'années de service déterminé, ou à des personnages en situation de rendre des services politiques. Il s'ensuit qu'elles sont prodiguées, et que malgré cela, il est fort rare qu'elles soient obtenues par ceux qui en sont le plus dignes, s'ils ne rentrent pas dans les catégories prévues.

Or, M. Lemoine n'occupe aucune situation officielle; il n'appartient pas à l'enseignement public, n'est pas membre de l'Institut. Il s'est borné à produire des travaux, comme la Géométrie du triangle, la Géométrographie, révélant un esprit d'invention exceptionnel, qui ont attiré l'attention de tous les mathématiciens, et qui ont pénétré dans l'enseignement, dans beaucoup de pays (pas en France, bien entendu).

Il fallait donc un certain courage au Ministre de l'Instruction publique pour oser attribuer, par exception, une croix de chevalier à un homme dont le seul titre était de l'avoir cent fois méritée. Ce courage, il l'a eu, et il faut lui en être reconnaissant.

Pour M. Lemoine, c'est une distinction qui n'ajoute rien à sa valeur, et qu'il aurait dû obtenir depuis longtemps. Elle aura cependant pour lui le caractère d'une récompense venant dans sa vieillesse couronner une vie de travail, passionnément consacrée à la science.

A cette occasion, il pourra constater aussi les témoignages de sympathie non seulement de ses amis personnels, qui sont nombreux, mais aussi des amis de la science mathématique.

L'*Enseignement mathématique* aurait voulu s'inscrire au premier rang parmi ceux-ci ; malheureusement, la date de sa publication lui a imposé à peu près un mois de retard. Mais pour être tardif, nos hommages n'en sont pas moins sincères.

LA RÉDACTION.

Cours de vacances à l'Université de Gœttingue.

L'Université de Gœttingue organise des cours de vacances destinés aux maîtres de l'enseignement secondaire supérieur. Ces cours, qui auront lieu du 19 avril au 1er mai 1906, seront consacrés aux objets suivants :

MM. KLEIN et BEHRENDSEN feront une étude approfondie des plans d'études des sciences mathématiques et physiques, élaborés par la commission d'enseignement de la Société des naturalistes et médecins allemands [1].

M. BEHRENDSEN traitera de la polarisation de la lumière à l'école secondaire supérieure ; M. PRANDTL, de la théorie de la résistance et de l'hydraulique ; M. RUNGE, de la construction de la surface de la sphère à l'aide de la projection stéréographique ; M. SIMON, *a)* des courants alternatifs, *b)* des méthodes graphiques en électrotechnique ; M. VOIGT, des récents problèmes de la spectroscopie ; M. WAGNER, des projections cartographiques les plus importantes en géographie et de leurs limites d'erreurs.

---

[1] Voir *L'Ens. math.* du 15 janvier 1906, 8me année, p. 5-25 et p. 57—65.

Association suisse des maîtres de mathématiques;
conférence de M. E. Egli (Lucerne).

Comme suite à notre compte rendu de la 5e réunion annuelle des maîtres de mathématiques des écoles moyennes suisses, nous donnons ci-après un résumé de la conférence de M. E. Egli. recteur du Gymnase de Lucerne, *sur l'enseignement de la Géométrie descriptive*.

M. Egli estime que dans l'enseignement secondaire supérieur la Géométrie descriptive ne doit être envisagée ni comme une branche auxiliaire du dessin technique, ni comme science des constructions graphiques dans le sens, par exemple, de cours professionnels complémentaires. En raison de *sa valeur formelle,* elle doit être considérée comme Géométrie dans l'espace par excellence. Comme telle, outre qu'elle habituera l'élève à se représenter des figures dans l'espace et par suite à raisonner directement sur celles-ci, elle devra reprendre et résoudre complètement par la construction exacte les problèmes élémentaires de stéréométrie, qui jusqu'à ce point n'étaient introduits que par des croquis en perspective. Autant que possible on fera exécuter par l'élève des *modèles* correspondant à ces constructions, afin de développer chez lui un certain *sentiment de responsabilité* de ses travaux; cet exercice est un bon contrepoids au travail exclusivement cérébral; il contribue à former l'*habileté manuelle* et aide par là à la formation d'hommes *pratiques et utiles*.

Après avoir donné les moyens de représenter et de construire, la Géométrie descriptive servira à introduire l'élève dans de nouveaux domaines qui sortent essentiellement du cadre des manuels de stéréométrie (p. ex.: projections du cercle, de la surface de la sphère, sections planes de cônes et cylindres, intersections de ces surfaces). Mais suivant le principe pédagogique de la concentration de Herbart, elle devra toujours tenir compte des points de contact qui la relient à d'autres branches des mathématiques et choisir les applications que d'autres spécialités peuvent lui offrir (cosmographie, physique, cristallographie, dessin technique, ombre; consulter à ce sujet E. Fiedler, *die darstellende Geometrie im mathematischen Unterricht.* Programme de l'école cantonale de Zürich, 1898).

Pour l'enseignement de la Geométrie descriptive, on se servira tout d'abord d'*un seul* plan de projections. L'indétermination des objets représentés s'élimine par l'emploi d'un deuxième plan parallèle au premier et dont on se donne une fois pour toutes la distance fixe à celui-ci. Le *point isolé* est déterminé par sa projection et sa cote laquelle est indiquée de préférence par le « cercle de référence » *(Distanzkreis)*[1]. La méthode est celle des projections orthogonales.

L'emploi d'un seul plan de projections suffit pour une quantité de problèmes ; il est conforme à la nécessité pédagogique de passer graduellement du simple au compliqué, du facile au difficile. Au point de vue graphique, le procédé a la plus grande analogie avec la méthode des plans cotés. Les passages à la projection parallèle oblique (perspective cavalière), à l'axonométrie, à la projection centrale s'effectuent tout naturellement et avec une grande unité de point de vue. L'introduction de nouveaux plans de projections est particulièrement aisée, notamment de plans donnant des vues en élévation et de profil. L'élève se trouve ainsi amené à la Géométrie descriptive de Monge dont il s'approprie les propositions spéciales, sans aucune difficulté, parce qu'elles se présentent alors à lui tout naturellement.

Université d'Uppsal ; thèses.

Thèses soutenues à l'Université d'Uppsal (Suède) pendant les années 1903 à 1905 (inclusivement) :

B. Lindgren : Sur « Le cas d'exception de M. Picard » dans la théorie des fonctions entières. (Le 28 nov. 1903). — F. Lundberg : I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen (Représentation approximative de la fonction des probabilités). — II. Aterförsäkring af Kollektivrisker (Réassurance des risques collectifs). (Le 7 nov. 1903). — G. Tegengren : Bestämning af ett enkelt sammanhängande Minimalytstycke (Détermination d'une surface simple continue). (Le 12 septembre 1904). — H. v. Zeipel : Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps. (Le 28 mai 1904). — S. Johansson : Ueber die Uniformisirung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzhal Windungspunkte. (Le 3 mai 1905).

Nominations et distinctions.

M. Boquet est nommé astronome titulaire à l'Observatoire de Paris.

M. Boulanger, maître de conférences, est nommé professeur de mécanique à l'Université de Lille.

M. F. W. Dyson, de l'Observatoire de Greenwich, est nommé professeur d'astronomie à l'Université d'Edimbourg.

---

[1] Voir W. Fiedler, *Geometrische Mitteilungen : IV. Neue elementare Projectionsmethode.* Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 24. Jahrgang.

M. Fuchs est admis à l'Ecole technique sup. de Berlin en qualité de privat-docent pour les mathématiques.

M. A. S. Gale, de New-Haven, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Rochester (E.-U.)

M. W. J. Hussey, de l'Observatoire Like, est nommé professeur d'astronomie à l'Université de Michigan et directeur de l'Observatoire d'Annarbies (E.-U.).

M. F. Klein est nommè docteur honoraire ès sciences techniques de l'Ecole techn. de Munich.

M. Reissner, privat-docent, est nommé professeur de mécanique à l'Ecole techn. sup. de Berlin.

M. O. S. Stetson est nommé professeur adjoint à l'Université de Syracuse (E.-U.)

M. C. J. de La Vallée-Poussin, professeur à l'Université de Louvain, a obtenu le prix décennal de mathématiques de l'Académie royale de Belgique.

M. E. Zermelo, privat-docent, est nommé professeur à l'Université de Gœttingue.

Nécrologie.

C.-J. Joly. — On annonce la mort de M. Ch.-J. Joly, astronome et professeur à l'Université de Dublin. Ses travaux appartiennent, pour la plupart, au domaine de l'analyse vectorielle d'après Hamilton. Joly n'était âgé que de 41 ans; sa mort prématurée est une perte sérieuse pour la science.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'été 1906.

Berne; *Université*. — Graf : Kugelfunktn. mit Repet., 3; Bessel'sche Funktn. m. Repet., 3 ; bestimmte Integrale mit Repet., 3 ; Diff. u. Integralrechn., 2; Differenzialgleign., 2 ; Renten- u. Versich.-rechnung, 2 ; math. Seminar, 2. — Ott : Differentialrechn., 2 ; analyt. Geometrie d. Ebene I, 2. — Huber : Bahnbestimmung d. Planeten u. Kometen, 2 ; Th. d. ellipt. Integrale m. Anwendgn. a. d. Geometrie, 2. — Benteli : Elem. d. darst. Geometrie, 4 ; prakt. Geometrie, 3 — Moser : Versicherung verbundener Leben ; math. versicherungswiss. Seminar, 2. — Pexider : Niedere Zahlenth., 3 : Elem. d. Mengenlehre, 1 ; Elem. d. anal. Zahlenth., 2 ; das Primzahlproblem., 1. — CRELIER : Synth. Geom. d. Raumes, 2 ; Geometrie des Dreiecks, 2 ; Exercices de Géométrie, 2

Darmstadt ; *technische Hochschule*. Mathem. Wissenschaften. — DINGELDEY : Elem. d. höh. Math. I f. Ing., Masch. u. Elektr. — FENNER : Geodäsie ; Ausgleich.-Rechnung nach der Meth. d. kleinsten Quadrate ; Geodät. Ueb. ; Ausarb. d. geodät. Vermessungen. — GRÆFE : Repetit. der Elem.-Math. ; Höhere Math. f. Arch., Chem., Elektrochem. u. Geom. ; Höh. Math. II. — GUNDELFINGER : Höh. Math. I f. Ing., Masch. u. Elektr. — HENNEBERG : Techn. Mech. I ; Reine Kinematik. — PFARR : Hydraulik. — SCHEFFERS : Einleit in d. Funktionentheorie ; Darst. Geom. I. — WIENER : Darst. Geom. I ; Geometr. Form u. Form. d. Kunst ; Arbeiten in math. Institut. — GAST : Astronom. Orts- u. Zeitbestimm. ; Ueb. im Zahlenrechnen. — MEISEL : Grundzüge d. Karten-Projektionslehre ; Populäre Astronomie. — SCHLINK : Repet. d. Mech. ; Ausgew. Kap. d. Statik.

Freiburg (Baden) ; *Universität*. — LUROTH : Integralrechn., 5 ; Trigonometrie, 2 ; Seminar. — STICKELBERGER : Analyt. Mechanik, 5 ; Fouriersche Reihen u. Integrale, 2 ; Seminar. — LŒWY : Th. u. Anwendungen d. Determinanten, 4 ; Ueber die Grundlagen d. Geometrie, 2 ; Uebgn. zur Versicherungsmathematik. — WEINGARTEN : Ausgew. Kapitel aus der Th. elastischer Körper, 2. — SEITH : Darst. Geometrie, 2 ; Uebgn.

Genève ; *Université*. — CAILLER : Calcul diff. et intégral, 3, Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3, Exercices, 2 ; Conférences d'analyse supérieure, 2. — FEHR : Algèbre, théorie des équations, 2 ; Géométrie descriptive et projective, 2 ; Exercices d'algèbre et de géométrie, 2 ; Séminaire de géom. sup., 1. — GAUTIER : Astronomie sphérique, 2 ; Météorologie dynamique, 2. — MIRIMANOFF : Introd. à la théorie de Maxwell. — R. DE SAUSSURE : Géométrie du mouvement, 2 ; Mécanique des fluides, 1.

Greifswald ; *Universität*. — THOMÉ : Th. der analyt., besonders der ellipt. Funktionen I, 4 ; Differentialgeometrie, 2 ; Seminar. — ENGEL : Analyt. Mechanik I, 4 ; Analyt. Geometrie der Ebene u. des Raumes, 4 ; Differentialvarianten, 1 ; Seminar. — VAHLEN : Integralrechn., 4 ; Uebgn., 1 ; Determinanten, 1. — STARKE : Mathem. Ergänzungen u. Uebgn. zur Experimentalphysik der Erde, 1. — SCHREIBER : Uebgn. im Demonstrieren physikalischer Apparate. — BERG : Theoretisch-physikalische Uebgn. ; Geschichte der Physik im Zeitalter Newtons.

Halle ; *Universität*. — CANTOR : Zahlentheorie, 4 ; Seminar. — WANGERIN : Differentialgeometrie, 5 ; Bestimmte Integrale u. Differentialgln, 4 ; Ausgew. Kapitel der Potentialtheorie, 1 ; Seminar. — GUTZMER : Differentialrechn. mit Ubgn., 5 ; Funktionenth., 4 ; Ausgew. Kapitel der anal. Mechanik, 1 ; Seminar. — EBERHARD : Algebra I, 4 ; Analyt. Geometrie der Kegelschnitte, 2 ; Uebgn., 1. — BERNSTEIN : Geschichtliche Uebersicht über die Hauptgebiete der reinen Mathematik, 2 ; Versicherungsmathematik, 2. — BUCHHOLZ : Ausgew. Kapitel der theoretischen Astronomie u. Physik, 2 ; Prakt. Uebgn. in geogr. Ortbestimmung, 3. — WALTER : Niedere Geodäsie mit Uebgn.

Heidelberg ; *Universität*. — KŒNIGSBERGER : Diff. u. Integralr., 4 ; Th. d. Linien u. Fläche, 4 ; math. Sem., 2. — M. CANTOR : Anal. Geom. d. Ebene, 4 ; Arithm. u. Algebra (für Kameralisten), 3. — KŒHLER : Darst. Geom. m. Uebgn., 4. — BŒHM : Elementarmathematik, 3-4 ; Uebgn., 1-2. — VALENTINER : Sphär. Astronomie, 3 ; Elem. d. Astronomie in geschichtl. Entwicklung, 1.

Jena; *Universität.* — Haussner: Diff. u. integralr. I, mit Uebgn., 5; Analyt. Geom. d. Ebene, 4; Teilung u. Quadratur des Kreises, 2; math. Seminar, 1. — Thomæ: Ellipt. Funktionen, 4; math. Geographie, 3. — Frege: Analyt. Mechanik. — Rau: Mechanik I mit Graphostatik, 3; Uebgn., 3. — Knopf: Zeit u. Ortsbest. mit prakt. Uebgn., 4; Bestimmung d. Bahnen d. Himmelskörpes, 4; Interpolationsrechn., 2.

Kolozsvar (Hongrie); *Université.* — Schlesinger: Intégrales définies et introduction à la théorie des fonctions, 3; Equations différentielles linéaires, II, 3; Exercices, 1; Séminaire, 1. — Valyi: Théorie élémentaire des fonctions, 4; Théorie des invariants, 2; Exercices, 1; Séminaire, 1. — Fejér: Calcul des variations II, 2; Théorie des courbes gauches et des surfaces, 3. — Klug. — Géométrie descriptive I, 3; II, 2; Exercices, 3. — Farkas: Théorie des forces, 4; Mécanique analytique, 3; Séminaire, 2.

Königsberg; *Universität.* — Meyer: Analyt. Geometrie der Ebene, 3; Einl. in die höhere Geometrie, 4; Seminar. — Schœnfliess: Funktionentheorie, 5; Seminar. — Saalschütz: Determinanten, 2; Differentialrechn., Uebgn. — Battermann: Astronomisch-geogr. Ortsbestimmung, 3; Uebgn. Cohn: Bestimmung der Bahnen der Himmelskörper, 3; Einf. in die neueren Theorien der Himmelsmechanik, 2. — Volkmann: Elastizitätstheorie, 4; Seminar.

Leipzig; *Universität.* — Neumann: Anwendgn. d. Diff.- u. Integralr., 4; math. Sem., 1. — Bruno: Himml. Mechanik, 2; Sem. f. wiss. Rechnen, 2; Prakt. Uebgn. in der Sternwarte, mit Prof. Peter. — A. Mayer: Höhere analyt. Dynamik, 5; Uebgn., 1. — Hölder: Anw. d. ellipt. Funktionen, 3; ausgew. Kapitel aus d. Th. der ellipt. Modulfunktn., 2; math. Sem., 1. — Rohn: Höhere Kurven, 4; Determinanten, 2: math. Sem., 1. — Peter: Bahnverbesserungen u. spez. Störungen, 2; prakt. Uebgn. (mit Prof. Bruns). — Hausdorff: Gewöhnl. Differentialgleichgn., 4; Uebgn. 1. — Liebmann: analyt. Geom. d. Ebene, 4; Uebgn., 1; Einf. i. d. algebr. Analysis.

Paris; *Faculté des Sciences.* — E. Picard: Analyse supérieure et algèbre supérieure: Quelques travaux récents relatifs à la détermination des intégrales des équations différentielles par diverses conditions aux limites (2 leçons par semaine). — Goursat: Calcul différentiel et calcul intégral: Equations différentielles et équations aux dérivées partielles (1 leçon). — Raffy: Application de l'analyse à la géométrie; des équations aux dérivées partielles et de leurs applications géométriques en vue du certificat de calcul différentiel et intégral (2 leçons, à partir du 1er mai). — P. Painlevé: Mécanique rationnelle: Les lois générales du mouvement des systèmes, la mécanique analytique, l'Hydroststique et l'Hydrodynamique (2 leçons). — P. Appell: Mathématiques générales: Eléments de mécanique (1 leçon). — Andoyer: Astronomie physique: Ensemble des matières du certificat d'études supérieures d'astronomie (2 leçons). — Boussinesq: Physique mathématique et calcul des probabilités: Les ondes d'oscillation (houle et clapotis de la mer) et les ondes produites à la surface d'une eau tranquille par l'imersion d'un solide ou par une impulsion superficielle (2 leçons). — G. Kœnigs: Mécanique physique et expérimentale; Théorie de l'élasticité; Etude cinématique et dynamique des machines (2 leçons). — E. Borel: Théorie des fonctions: Théorie générale des fonctions entières et son application à diverses fonctions particulières (1 leçon). — *Conférences:* — Andoyer: Astronomie (1 leçon). — Borel: Mécanique (1 leçon). — Raffy:

Calcul différentiel et intégral (2 leçons). — HADAMARD : Mécanique (1 leçon). — BLUTEL : Mathématiques générales (1 leçon). — SERVANT : Mécanique physique (1 leçon).

Würzburg ; *Universität.* — PRYM : Integralrechn., 6. Im Proseminar : *a)* Uebgn. z. höh. Analysis f. Fortgeschrittene (gemeinsam mit dem Assistenten), 2 ; *b)* Uebgn. z. Integralrechn, 2. – Im Seminar : Ausgew. Kapitel d. Funktionth., 2. — SELLING : Analyt. Mechanik, 4 ; Sphärische Astron., 2. — CANTOR : Kinetische Theorie und Bewegung der Gase, 4. -- ROST : Analyt. und synth. Geometrie d. Kegelschnitte, 4 ; Anw. d. Infinitesimalanalysis auf die Th. d. ebenen Kurven, 4 ; Th. d. Raumkurven und d. Flächen, 4 ; Nichteuklidische Geometrie, 2 ; Im Proseminar (gemeinsam mit dem Assistenten) : *a)* Uebgn aus der sphär. Trigonometrie, 2 ; *b)* Algebr. Analysis, 2 ; Im Seminar : Anw. der ellipt. Funktionen auf Geometrie und Mechanik, 2.

Zürich ; *Ecole polytechnique.* Section normale des sciences mathématiques. — HIRSCH : Integralrechn., 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2 ; part. Differentialgleichgn., 4. — FRANEL : Calcul intégral, 4 ; Repet., 1 ; Exerc., 2. — HERZOG : Mechanik I, 6 ; Repet , Uebgn., 2. — W. FIEDLER : Darst. Geom., 2 ; Repet., 1 ; Uebgn., 4 ; Elem. d. projektiven Koordinantengeometrie, 2. — LACOMBE : Géométrie descriptive, 2 ; Repet., 1 ; Exerc., 2 : Géométrie réglée, 1. — GEISER : Ausgew. Partien d. analyt. Geometrie, 2 ; Ebene Kurven, 2. — HURWITZ : Funktionenth., 5 : Uebgn , 1. — GEISER u. HURWITZ : Math. Seminar, 2. — REBSTEIN : Versicherungsmathematik, 2. — RUDIO : Geschichte d. Geometrie vor Euklid, 1. — ROSENMUND : Vermessungskunde, 4 ; Uebgn., 3. — WOLFER : Geogr. Ortsbestimmung, 3 ; Uebgn. im astron. Beobachten, 3 ; Einl. in die Astrophysik.

BEYEL : Kegelschnitte, 2 ; Axonometrie u. Perspektive, 2. — DUMAS : Algèbre, 3. — J. KELLER : Repet. der Integralr. m. Uebgn., 2. — KRAFT : Geometr. Kalkül, 2.

Zürich ; *Universität.* — BURKHARDT : Algebr. Analysis, 4 ; Mathem. Theorie dissipativer Erscheinungen, 4 ; Seminar, 2. — WEILER : Anal. Geometrie II, 4 ; Darst. Geometrie II, 4 : Synthet. Geometrie, 2. — GUBLER : Die Hauptsätze der Differential und Integralrechnung, 2 ; Polit. Aritmetik, 2 ; Inhalt und Methode des geometr. Unterrichts in der Mittelschule, 1. — WOLFER : Geograph. Ortsbestimmung, 3 ; Uebungen im astron. Beobachten ; Einleitung in die Astrophysik, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. XVIIIe cahier avec 34 figures dans le texte. — 1 vol. gr. 8°, 196 p.; prix : 6 marcs. B.-G. Teubner, Leipzig, 1905.

Ce fascicule comprend trois travaux : 1° Aristote et les mathématiques, par J.-L. HEIBERG ; 2° Etudes sur l'histoire des mathématiques, en particulier de l'enseignement mathématique à l'université de Göttingue au XVIIIe siècle, par C.-H. Müller ; 3° Le principe des vitesses virtuelles, ses démonstrations et l'impossibilité de baser sa réciproque sur la notion d' « équilibre d'un système de masses », par R. Lindt.

Le *premier mémoire* nous fait connaître, parmi les œuvres d'Aristote, les parties qui traitent de questions mathématiques. On ne saurait méconnaître son importance pour la genèse des éléments d'Euclide, car, à côté de définitions et démonstrations équivalentes à celles de celui-ci, on en trouve fréquemment chez Aristote qui sont essentiellement différentes.

Le *deuxième travail* (primitivement thèse de doctorat) débute par une introduction « sur le caractère et le domaine de la recherche historique en mathématique », dans laquelle l'auteur défend l'idée que les mathématiques appliquées et les méthodes d'enseignement méritent une place plus importante dans les travaux historiques futurs. Puis il met immédiatement ses idées en pratique en donnant comme exemple un exposé de l'enseignement mathématique à l'université de Göttingen au dix-huitième siècle ; c'est une très bonne image non seulement de celui-ci mais de ses rapports avec les idées philosophiques, religieuses et humanistes de ce temps. Nous y faisons, entre autres, une connaissance plus intime avec la personnalité intéressante à plus d'un point de vue de A.-G. Kästner.

Le dernier mémoire est une étude sur les diverses preuves du principe des vitesses virtuelles ; il en ressort que les tentatives antérieures d'en établir rigoureusement la réciproque ont échoué grâce à la notion équivoque et peu claire d' « équilibre d'un système de masses » ; on voit ensuite comment on peut éliminer cette notion en la remplaçant par celle d' « équilibre d'un système de forces appliquées à un système matériel ».

H. Suter (Zurich).

P. Appell et J. Chappuis. — **Leçons de Mécanique élémentaire,** conformément aux programmes du 31 mai 1902. *Ire partie*, à l'usage des Classes de Première C D, in-16°, 177 p., prix : 2 fr. 75 ; *IIme partie*, à l'usage des Classes de Mathématiques A B, in-16°, 306 p., prix : 4 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

P. Appell. — **Cours de Mécanique** à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales. 2me édition, entièrement refondue. — 1 vol. in-8° de 495 p., avec 186 figures ; prix : 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

En France l'enseignement de la Mécanique commence, dans les classes de Première C D, par des généralités sur les vecteurs et les premières notions de Cinématique. L'année suivante, dans la classe de Mathématiques, les élèves étudient les éléments de Cinématique, de Statique et de Dynamique. Enfin, dans la classe de Mathématiques spéciales, ils font une étude plus approfondie de ces éléments.

C'est à ces divers degrés que sont destinés ces deux manuels. Ecrites par un mathématicien avec la collaboration d'un physicien les *Leçons* répondent bien à ce que l'on est en droit d'exiger : dans l'enseignement secondaire supérieur. Les auteurs ont compris que dans un premier enseignement les éléments de Mécanique ne doivent pas être présentés sous une forme purement abstraite, mais qu'ils doivent rester en contact avec l'expérience et l'observation.

La première partie des *Leçons* débute par un chapitre consacré aux notions géométriques relatives aux vecteurs, aux projections et aux moments. Le reste de l'Ouvrage traite des premières notions de Cinématique : mouvement, temps ; cinématique du point ; mouvements élémentaires d'un système invariable ou corps solide.

Dans la seconde partie on trouve d'abord les applications de la cinématique aux engrenages et aux systèmes articulés. Puis viennent, accompagnées de nombreux exercices, l'étude des forces appliquées à un point matériel (ch. II), la statique des corps solides libres (ch. III), l'équilibre des corps solides non libres ; les machines simples (ch. IV) et enfin les premières notions de Dynamique (ch. V).

Ces *Leçons de Mécanique élémentaire* fournissent à l'élève un ensemble de premières notions qui lui seront souvent d'une grande utilité, même s'il arrête là ses études. Elles l'initient, entre autres, aux notions de travail et de force vive et à leur application à l'étude des machines simples.

Le *Cours de Mécanique*, destiné aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales, constitue un second cycle dont les points de départ et d'arrivée sont les mêmes que dans les *Leçons*. Mais il s'adresse à des élèves qui sont déjà familiarisés avec les notions de dérivées, d'intégrales et d'équations différentielles. A la suite des modifications et des développements apportés au programme [1] de Mécanique, l'auteur a été amené à remanier et à compléter la première édition. On sait que dans ce nouveau programme on tient compte, plus que par le passé, des notions qui jouent un rôle fondamental dans les applications industrielles. Il est recommandé, en outre, de faire résoudre des exemples numériques et des problèmes familiers d'équilibre et de mouvement. « On devra éviter l'abus de l'appareil analytique, des axes de coordonnées, et exercer les élèves à raisonner directement sur chaque question ». L'auteur a tenu compte de toutes ces conditions, et cela lui était d'autant plus facile qu'il est précisément l'un des principaux inspirateurs du nouveau programme.

Il n'est guère besoin d'ajouter qu'on ne peut que louer la précision et la clarté de ces manuels. H. FEHR.

E. BOREL. — **Géométrie,** premier et second cycles (Cours de Mathématiques rédigés conformément aux nouveaux programmes). — 1 vol. in-18°, 383 p.; prix : 3 fr. ; A. Colin, Paris.

Ce volume fait partie du Cours de Mathématiques rédigé conformément aux nouveaux programmes du 27 juillet 1905, cours dont M. Borel a entrepris la publication.

Le présent ouvrage fait naître des réflexions nombreuses se traduisant en bloc par un sentiment de soulagement accompagné d'une nuance de regret personnel, le tout pouvant se traduire par cette exclamation : « Si l'on avait toujours appris la géométrie comme cela ! ».

Voilà longtemps que le danger des abstractions euclidiennes est montré (faut-il rappeler le nom de M. Méray), on sait maintenant que, puisque malgré tout, les vérités géométriques sont d'ordre expérimental, il n'y a pas d'avantage à dissimuler cette origine et cependant la force des traditions est telle que bien des professeurs hésitaient à sortir de l'ornière classique par crainte de critiques aussi pédantesques qu'imméritées. Espérons que l'autorité de savants comme M. Borel contribuera beaucoup à la diffusion des méthodes intuitives.

---

[1] Programme du 27 juillet 1904; reproduit dans cette Revue dans les nos de nov. 1904 et de janvier 1905.

Le livre commence par une introduction nous présentant la géométrie de l'école primaire, on pourrait presque dire la géométrie de l'enfant quelque jeune qu'il soit. Elle est limitée au maniement de la règle, de l'équerre, du compas, aux polygones les plus simples avec lesquels on fait simplement connaissance. Des formules sont de suite données pour l'évaluation des aires et des volumes usuels ; il y est parlé de la conservation de la *forme* des figures changeant de dimension. C'est une introduction pratique, sans démonstrations autres que celles qui proviennent de remarques évidentes.

Dans la première partie les notions fondamentales si délicates sont abordées de la façon la plus heureuse. La droite est définie à l'image d'un fil tendu. La théorie des parallèles est fondée sur l'idée de translation d'un plan glissant sur lui-même. Tout ce qui concerne les angles est déduit de l'idée de rotation d'un plan glissant sur lui-même, tel la face latérale d'une meule, car M. Borel n'a pas craint ces images tangibles. Les polygones réguliers donnent lieu de même à des remarques intéressantes sur les assemblages de tels polygones constitués par des carrelages ou des vitraux.

Dans la seconde partie la géométrie dans l'espace est abordée dans le même esprit. La translation du tiroir d'une table sur le fond duquel on a tracé une droite quelconque ou dans lequel on a placé un livre dans une position quelconque, nous montre tout ce qu'il y a d'essentiel dans la théorie des plans et des droites parallèles. Le plan en rotation, non plus comme la face de la meule invoquée plus haut, mais comme une porte tournant autour de l'axe de ses charnières, nous conduit aux plans perpendiculaires. Les corps ronds sont présentés comme susceptibles d'être fabriqués *au tour*.

La si importante notion de symétrie est étudiée avec détail, la cristallographie étant finalement mise à contribution pour illustrer matériellement diverses formes symétriques se rencontrant dans les polyèdres.

La troisième partie commence par la théorie de la similitude, présentée, comme nous l'avons déjà vu dans l'introduction, en temps qu'idée intuitive toute naturelle. Deux figures semblables ont la même forme, non les mêmes dimensions et M. Borel remarque très justement qu'admettre l'existence de telles figures revient à admettre le postulatum d'Euclide. N'y aurait-il pas par suite avantage, au moins au point de vue de la simplicité, à postuler l'idée de similitude ? Après les lignes proportionnelles nous tombons immédiatement dans la trigonométrie considérée comme un simple chapitre de géométrie. Cela tient en quelques pages et combien cela remplace avantageusement le traité de trigonométrie que le commençant feuilletait avec une respectueuse terreur dès qu'il y voyait seulement le nom des fonctions trigonométriques, symboles hiéroglyphiques qui, à son idée, devaient représenter quelque chose de bien au-dessus des plus hautes difficultés de l'Algèbre et de la Géométrie.

Remarquons encore dans cette partie — je ne puis évidemment tout citer — ce qui a trait aux polygones réguliers. Il y a, là aussi, un heureux mélange de trigonométrie et de géométrie et des calculs aisés nous donnent des résultats qu'on ne trouve parfois sur les figures qu'avec beaucoup trop d'ingéniosité. Même chose pour les volumes. Le tronc de pyramide n'est pas décomposé en trois pyramides, son volume résulte des trois égalités

$$h = h_1 - h_2, \qquad S_2 h_1^2 = S_1 h_2^2, \qquad 3V = S_1 h_1 - S_2 h_2$$

entre lesquelles on élimine h_1 et h_2.

Des compléments sont consacrés à l'ellipse, à la parabole, à la cissoïde. Des notions d'arpentage terminent l'Ouvrage. Souhaitons que ce dernier ait tout le succès qu'il mérite. A. Buhl (Montpellier).

A. Grévy. — **Géométrie théorique et pratique.** Deuxième édition. — 1 vol. cart. in-16°, 472 p.; prix: 3 fr. 50; Vuibert & Nony, Paris.

Voici un volume qui se rapproche du précédent par beaucoup de points. L'inspiration notamment en est tout aussi heureuse. Il y a cependant entre les deux ouvrages une différence essentielle de destination.

Celui de M. Borel est rédigé, comme nous l'avons dit, conformément à un programme bien déterminé, celui de M. Grévy, au contraire, dès la première ligne de la préface nous avertit qu'il ne correspond à aucun programme. C'est comme une revue des idées géométriques nouvelles, tout au moins au point de vue pédagogique, revue dans laquelle on trouvera matière à l'enseignement habituel, et de plus à une foule de réflexions, de remarques curieuses et intéressantes dont on a généralement le tort de se priver comptant que, malgré leur simplicité, leur révélation appartient à des branches plus élevées de la Science.

Pour ce qui est des principes du début c'est bien entendu la méthode intuitive qui sert, l'auteur indiquant lui-même qu'il a suivi les vues de M. Méray. Là aussi la droite est définie par le fil tendu, le cercle par le compas. Les deux plans glissant l'un sur l'autre qui interviennent dans la théorie des parallèles ont leur introduction pratiquement justifiée par le rappel du procédé employé par les menuisiers pour tracer les parallèles, par l'usage de l'outil nommé *trusquin*.

Le théorème si simple relatif à la somme des angles d'un triangle nous fournit *immédiatement* une application inattendue pour beaucoup à savoir la trisection de l'angle au moyen d'un instrument à glissières. Cela résulte immédiatement du fait de mener par un point A extérieur à un cercle de centre O deux transversales AOA′ et ABC de telle sorte que AB soit égal au rayon BO. Alors l'angle en A est le tiers de COA′.

Combien d'élèves ont appris plus tard — car ceci cesse d'être tout à fait élémentaire — l'impossibilité de la trisection de l'angle par la règle et le compas et ont ignoré les propriétés les plus simples des systèmes articulés. A propos des polygones M. Grévy nous montre des losanges articulés, des mortaises trapèzoïdales et aussi des carrelages.

La seconde partie du volume est consacrée aux aires planes. Remarquons par exemple que l'aire du polygone régulier conserve la même expression si le polygone, cessant d'être régulier, est simplement circonscriptible.

A propos des polygones équivalents on démontre le théorème de Pythagore de la façon qui est en effet la plus naturelle puisqu'elle montre effectivement le carré construit sur l'hypoténuse du triangle rectangle comme décomposable en parties s'appliquant exactement sur les carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Au début de la troisième partie qui traite des lignes proportionnelles nous retrouvons des considérations analogues qui éclaireraient vivement la notion du rapport incommensurable de deux longueurs. Nous *voyons* ainsi que le carré construit sur la diagonale d'un premier carré a une aire double, ce qui explique bien le sens arithmétique du rapport $\sqrt{2}$.

Mentionnons aussi ici l'introduction très simple des lignes trigonométriques et cela à propos de l'étude des projections. Viennent ensuite l'homothétie et les divers procédés de transformation des figures. L'instrument de la transformation homothétique est le panthographe, celui de l'inversion est l'inverseur Peaucellier et enfin voici d'autres courbes toujours très simples à construire mécaniquement : la conchoïde de Nicomède, la strophoïde, le limaçon de Pascal, la cissoïde et les coniques.

Le reste du volume est consacré à la géométrie dans l'espace et ici M. Grévy donne presque tout au début les notions fondamentales de la géométrie cotée. On a ainsi un procédé rigoureux pour se représenter les figures de l'espace, ce qui n'empêche pas, bien entendu, de les voir en perspective ordinaire et, comme précisément la géométrie cotée intervient pour des représentations qui ne sont jamais bien compliquées, on s'initiera à ses procédés sans aucune peine.

A propos de l'évaluation des volumes M. Grévy juge probablement superflu de s'encombrer de formules compliquées. Il nous montre par exemple comment on évalue le volume d'un tronc de pyramide mais en raisonnant directement sur les données et en cherchant séparément et de façon parfaitement explicite les hauteurs des pyramides dont la différence des volumes est le volume cherché. Signalons aussi l'étude des ombres faite partout après celle des solides considérés.

Une troisième partie est consacrée au dessin géométrique, au levé des plans, au nivellement, voire même aux cartes géographiques. Le volume se termine par une délicieuse petite note sur quelques relations arithmétiques. On y évalue *de visu*, en assemblant des petits carrés, la somme des *n* premiers nombres entiers, la somme des petits carrés, la somme des *n* premiers nombres impairs. Espérons que cette ingéniosité fera beaucoup d'esprits ingénieux.

A. Buhl (Montpellier).

J. Classen. — **Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes.** Mit 61 Figuren. 1 vol. in-12, 249 p.; prix : 4 Mk. G.-J. Göschen, Leipzig.

Les brillants phénomènes et les hypothèses sur la nature de la lumière ont été toujours l'objet de leçons, de conférences des plus illustres physiciens. Parmi les plus célèbres citons celles de Tyndall, traduites en français par Moigno (*La lumière*, 1875), de Stokes, traduites en allemand (*Das Licht;* zwölf Vorles. 1883-1885), de lord Kelvin.

Les leçons professées à Hambourg dans l'hiver 1904-1905, par M. Classen, ont un autre but, car elles ne se proposent pas seulement d'exposer la théorie de la lumière, mais, surtout, les relations des phénomènes optiques et électriques ; elles ont donc pour objet ce que l'on nomme aujourd'hui la théorie électromagnétique de la lumière. Les connaissances très bornées en physique et en mathématique des auditeurs, rendaient bien difficile la tâche de M. Classen ; mais il a su très brillamment vaincre toutes les difficultés.

Cependant la tentative de M. Classen n'est pas nouvelle. M. Garbasso, dans un remarquable cours à l'Université de Turin en 1895 (*Quindici lezioni su la luce considerata come fenomeno elettromagnetico*, Milano 1897) s'est proposé le même but que M. Classen. Mais tandis que dans la brillante exposition de M. Garbasso les phénomènes et les expériences de l'optique sont développés en même temps que celles de l'optique des oscillations électriques (suivant l'expression de M. Righi), M. Classen suit une méthode toute différente ; car il commence par exposer, dans les six premières leçons, les expériences bien connues sur la réflexion, la réfraction simple et double, les interférences, la diffraction, la polarisation et les éléments fondamentaux de la théorie élastique de la lumière. D'ailleurs, l'auteur n'insiste pas sur les explications théoriques ; il lui suffit seulement de fixer les principaux caractères d'oscillation, de périodicité, régularité des phénomènes étudiés, il dit quelques mots sur le principe de Huygens et montre quelques-unes des difficultés de la théorie des ondulations et de l'éther.

Dans la septième leçon, il prouve comment l'électricité est capable d'un mouvement oscillatoire ; ici, il a, sans doute supposé chez ses auditeurs des connaissances un peu étendues sur l'électricité. Dès lors M. Classen, dans les leçons suivantes montre que les nouvelles oscillations possèdent les mêmes propriétés que les oscillations lumineuses.

A la fin de son cours, M. Classen pose une question : Pouvons-nous affirmer la possibilité des oscillations électriques de la petitesse des oscillations lumineuses, ou bien cette condition de petitesse ne soulève-t-elle pas des difficultés analogues à celles que l'on a rencontrées dans la théorie élastique ?

La réponse est assez claire. Ce serait contraire à l'esprit scientifique de dire que la Physique, avec ses nouvelles découvertes, a prouvé que les rayons lumineux sont produits par des oscillations électriques ; on peut dire seulement que l'hypothèse, d'après laquelle la lumière et les oscillations électriques sont de la même nature, fournit à la science actuelle une base nouvelle pour la solution de ses plus importants problèmes, de même que, pendant un demi-siècle, elle a utilisé la théorie élastique de la lumière.

R. Marcolongo (Messine).

M. Doll et P. Nestle. — **Lehrbuch der praktischen Geometrie.** Mit 145 fig.; 2te erweiterte u. umgearbeitete Auflage. — 1 vol. in-8°, 164 p.; prix : 3 Mk. B. G. Teubner, Leipzig.

Dans ce volume se trouvent réunies les notions essentielles de Géodésie élémentaire indispensables aux architectes et aux géomètres et à leurs aides dans les divers travaux sur le terrain. Il comprend donc l'arpentage, le levé de plans, la mesure des surfaces, le nivellement, la détermination des profils et le piquetage d'arcs de cercle.

L'auteur présente avec soin et beaucoup de détails la description et la vérification des instruments de nivellement. Par contre nous avons relevé un certain nombre de fautes d'impression et d'incorrections : p. 16 (ligne 14 depuis le bas) on lit « vertical » au lieu de « normal » ; p. 29 (ligne 13 depuis le bas) $x = 1 : 100000$ au lieu de $x = 100000$; p. 31, $J = 743{,}82$ au lieu de $734{,}82$; p. 32 (ligne 6) on trouve 3 fois $\#$ au lieu de $\|$; p. 36 (ligne 6 depuis le bas) il manque le facteur r dans $2R\pi\,(n_1\text{-}n_2)$; p. 52 l'auteur écrit « Kromglas » au lieu de « Crownglas » ; p. 113 (ligne 13 depuis le bas), 1 : 50000 au lieu de 1 : 5000 ; p. 122 (ligne 3) on lit : $\sin\gamma = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\gamma}}{2}$ au lieu de $\sqrt{\frac{1 - \cos 2\gamma}{2}}$; p. 123 (ligne 15) le premier B doit être remplacé par E ; p. 125 (ligne 1 depuis le bas) il faut supprimer x dans $xr \sin\gamma$.

Ce manuel rendra de bons services dans les écoles élémentaires d'Architecture.

Ern. Kaller (Vienne).

G. Lejeune-Dirichlet. — **Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen,** herausgegeben von G. Arendt. — 1 vol. br. gr. in-8°, XXXIII — 476 p.; prix : 12 Mk.; Vieweg & Sohn, Braunschweig.

L'éloge de Dirichlet n'est plus à faire et le public mathématique de tout pays accueillera certainement avec faveur les leçons que M. Arendt — un ancien élève de l'illustre maître — reproduit aujourd'hui dans leur forme originale et authentique.

Est-ce à dire qu'il faille considérer ce volume comme un livre à la hauteur des exigences modernes. En aucune façon, l'année même, 1854, où Dirichlet professait à Berlin le cours dont il s'agit ici, Riemann dans un célèbre mémoire étendait à des fonctions discontinues dans tout intervalle la notion d'intégrale et sa définition, actuellement dépassée, n'est plus qu'un cas particulier de celle que M. Lebesgue a donnée dans sa remarquable thèse en 1902.

Dirichlet ne s'occupe, pour ainsi dire, que d'intégrales au sens de Cauchy, mais ses méthodes sont si parfaites, ses points de vue si personnels que tout en attirant l'attention sur les points les plus délicats il instruit toujours sans jamais lasser le lecteur. S'il est loin d'ailleurs de toucher à toutes les questions, il ne quitte jamais un sujet sans l'avoir en quelque sorte épuisé.

L'ouvrage se divise en deux parties, de longueurs très inégales, la première consacrée aux intégrales proprement dites comprend les quatre cinquièmes du volume. Dans celle-ci après avoir donné la définition de l'intégrale des fonctions continues entre des limites finies et montré comment se généralise cette notion, Dirichlet fait une étude des intégrales eulériennes et autres actuellement classiques. Il passe ensuite aux intégrales doubles, mais s'en tient pour l'aire des surfaces gauches à la définition justement critiquée par MM. Schwarz et Peano, ce qui n'enlève rien à l'intérêt du chapitre relatif à l'aire d'une surface ellipsoïdale quelconque.

Dans le but de bien éclaircir la théorie des intégrales triples Dirichlet traite enfin d'une manière très complète le problème de l'attraction exercée par la masse d'un ellipsoïde sur un point matériel quelconque. Les résultats essentiels obtenus jusqu'à lui sont, tout d'abord, exposés avec le plus grand soin, puis sa solution personnelle, des plus élégantes, grâce à l'introduction de son facteur de discontinuité.

Ce facteur joue encore un rôle dans le chapitre qui termine cette première partie. Dirichlet l'utilise pour le calcul de certains volumes, de certains moments d'inertie, comme aussi pour la réduction d'une certaine intégrale multiple à des fonctions gamma.

La seconde partie de l'ouvrage comporte des applications touchant de près à la théorie des fonctions. On y rencontre entre autres, une étude sur les valeurs asymptotiques des factoriels infinis, une étude sur la série hypergéométrique.

Les lignes qui précèdent ne donnent qu'un aperçu trop sommaire de la richesse des leçons que nous venons d'analyser ; celles-ci valent la peine d'être lues avec soin et grande attention. Ceux qui apprennent se féliciteront de les avoir approfondies, ceux qui savent d'y avoir rencontré nombreux sujets de réflexions.

G. Dumas (Zurich).

E.-T. Whittaker. — **A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies**; with an Introduction to the Problem of three Bodies. 1 vol. relié, in-8°, XIII, 414 p, University Press, Cambridge ; Clay & Sons, Londres, 1904.

Dans la Préface à son excellente *Dynamique analytique* (1878), Mathieu a écrit : « Quand la seconde édition de la Mécanique analytique de Lagrange

« parut au commencement de ce siècle, elle était une œuvre accomplie ; « mais Poisson, Hamilton, Jacobi et d'autres géomètres ont apporté depuis. « sur cette matière, des travaux importants. »

Plus de vingt-cinq ans se sont écoulés et la publication de Mathieu a rapidement vieilli. Si les problèmes posés par les grands géomètres de la première moitié du XVIII^{me} siècle ne sont pas encore résolus, si quelques théories ont perdu de leur importance, d'autres ont apporté un nouveau jour sur bien des questions, et de nombreux travaux, notamment ceux de M. Poincaré, ont considérablement enrichi les théories de la Dynamique analytique.

M. Whittaker s'est proposé de pousser aussi loin que possible l'étude analytique du mouvement des systèmes dynamiques avec un nombre fini de degrés de liberté et de présenter un tableau complet de l'état actuel de cette branche de la Mécanique générale. Nous pensons qu'il a pleinement atteint son but. Disons pourtant, avec l'auteur, que son livre, qui fait dignement suite à l'*Analytical Statics* du Routh, a subi en général l'heureuse influence des excellents ouvrages de ce dernier.

Le domaine à explorer était immense et, presque toujours, l'auteur a bien choisi les choses les plus importantes, les démonstrations les plus simples ; et le lecteur ne doit pas chercher ailleurs tout ce qu'il lui faut pour bien comprendre les théories exposées : car il trouve dans l'ouvrage même un exposé sommaire des éléments indispensables des théories d'Analyse utilisées dans les diverses applications. C'est ainsi que l'on trouvera la théorie de la transformation simultanée de deux formes quadratiques à la forme canonique, dans la théorie des vibrations des systèmes dynamiques ; les propriétés les plus importantes de la transformation spéciale de contact et du dernier multiplicateur de Jacobi dans la théorie de la transformation des équations de la dynamique ; etc.

Les applications simples, variées et intéressantes se succèdent à chaque page, et à la fin de chaque chapitre, suivant l'usage adopté dans les livres anglais, on trouve de nombreux exercices, proposés dans les examens d'Angleterre ou extraits de mémoires originaux.

Après ces caractères généraux, disons quelque chose sur la distribution des matières si riches et si abondantes contenues dans ce volume.

A l'exception d'un seul chapitre (le premier) qui résume les théorèmes et les formules les plus connues de la Cinématique d'un système rigide, et qui n'est certainement pas un des meilleurs du livre[1], l'*Analytical Dynamics* peut se partager en trois parties.

La première partie comprend « à peu près » tout ce qu'on a coutume d'exposer dans un cours élémentaire de Mécanique. Les équations de Lagrange y jouent un rôle prépondérant et une large part est faite aux méthodes d'intégration qui, par les auteurs anglais, sont nommées de « *l'ignoration of coordinates* ». C'est à ces méthodes que l'auteur réduit la recherche des intégrales bien connues des aires et des mouvements du centre de masse. On y trouve naturellement tous les problèmes résolubles par quadratures, de la Dynamique d'un point et des systèmes rigides avec

[1] Par exemple le théorème de Chasles (art. 5) n'est pas démontré d'une manière complète ; la considération d'un couple de rotations est aussi incomplète (art. 4). Le théorème sur la composition de deux rotations, que l'auteur démontre également d'après M. Burnside, est attribué à Hamilton, qui lui a seulement donné la forme reproduite dans le texte : mais le théorème a été donné depuis bien longtemps par Rodrigues. (Journ. de Mathém. 5 [1840], p. 380).

un, deux, trois degrés de liberté ; leur discussion et leur résolution est toujours achevée par les fonctions de Weierstrass : on doit aussi mentionner un chapitre, des plus intéressants, sur la théorie des vibrations; un autre sur la Dynamique des systèmes non holonomes. L'auteur, qui dans la définition des systèmes holonomes (p. 33) a suivi Hertz (*Prinz. d. Mech.* 123), à propos des deux conditions linéaires auxquelles satisfont les variations des cinq paramètres définissant la position d'une sphère qui roule sans glisser sur un plan (système non holonome), aurait dû ajouter la condition indispensable que ces relations ne sont pas intégrables [1].

La deuxième partie est, à notre avis, la plus intéressante. Elle commence par l'exposition des principes de Hamilton et de Gauss (ce dernier dans la forme que lui a donné Hertz) et du principe de la moindre action (Chap. IX). Le principe de Gauss méritait peut-être de plus grands développements, surtout d'après l'exposition magistrale faite par M. Boltzmann dans ses *Vorl. üb. die Princip. d. Mech.* 1. Th. § 65. La démonstration du *minimum* de l'intégrale qui représente l'action est fondée, comme il est connu (Darboux, *Théor. d. surf.* II) sur la remarquable expression de Lipschitz de l'énergie cinétique. L'auteur suit une méthode bien simple, mais qui ne nous semble pas à l'abri de toute objection. Le chapitre suivant est dédié aux systèmes hamiltoniens et à leurs *invariants intégraux*. La théorie des invariants intégraux d'un système d'équations diff. du premier ordre, fondée par M. Poincaré, a été l'objet, dans ces dernières années, de recherches nombreuses, entre autres d'un mémoire très important de M. De Donder (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, XV (1901), XVI (1902). M. Appell, dans le 2me volume de son grand Traité, a fait aussi un court exposé de la théorie en vue des applications à la Mécanique et à Hydrodynamique. L'exposition de M. Whittaker n'est pas étendue ; elle se borne, d'une part, à l'étude des systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui possèdent un invariant intégral relatif et qui ont, par conséquent, la forme hamiltonienne ; elle donne, d'autre part, la détermination, d'après M. Poincaré, d'un invariant intégral dont l'ordre est égal à celui du système, détermination qui exige la connaissance du dernier multiplicateur du système.

Le succès des méthodes d'intégration des problèmes de la Dynamique est dû à la transformation et à la réduction à des systèmes avec un plus petit nombre de degrés de liberté ; de là la nécessité d'une étude approfondie de la théorie de la transformation des équations de la Dynamique (Chap. XI). D'ailleurs, la transformation des systèmes canoniques est étroitement liée à la transformation spéciale de contact, dont l'auteur étudie les propriétés les plus élémentaires. En effet, pendant le cours du mouvement, un système dynamique subit une transformation infinitésimale de contact ; le problème de l'intégration se réduit à un problème de transformation et toute la théorie se résume dans le théorème fondamental que les transformations de contact sont les seules qui conservent la forme hamiltonienne aux équations du mouvement. Dans tout ce chapitre, si nous ne nous trompons pas, l'auteur a mis à profit les recherches de Lie, Darboux, Poincaré, De Donder et Morera.

---

[1] La remarque générale se trouve seulement dans une note à la page 210. Dans cette partie, l'auteur attribue à M. de Sparre (Exer. 29, p. 169) le théorème que l'herpolhodie de Poinsot n'a pas de point d'inflexion. Ce théorème est de M. Hess (*Das Rollen u. s. w.* Münich, 1880).

La recherche de la forme nouvelle du système canonique, exige la considération du premier système différentiel relatif à une forme pfaffienne ; de là, en quelques lignes et de la manière la plus naturelle, on trouve l'équation de Hamilton et le théorème célèbre de Jacobi, qui est fondamental pour tout le chap. XII sur les propriétés des intégrales des systèmes dynamiques. Toute intégrale complète de l'équation de Hamilton définit une transformation de contact et le problème de l'intégration est le même que celui de la recherche des transformations de contact qui transforment le système canonique en lui-même. Les propriétés des intégrales en involution conduisent au beau théorème de Liouville sur l'intégration d'un système dont on connait n intégrales en involution.

Très à propos, l'auteur expose un beau théorème de M. Levi-Civita sur la manière de déduire des solutions particulières d'un système canonique dont on connaît des intégrales ou des relations invariantes. M. Bungatti en a donné une démonstration bien simple. L'auteur aurait dû mentionner la belle application que M. Levi-Civita a fait de son théorème à l'étude des mouvements permanents (au sens de M. Routh) d'un corps rigide, surtout dans le cas de la Kovalevskij [1]. Viennent ensuite les problèmes dynamiques qui admettent des intégrales d'une forme déterminée. Le cas d'une intégrale linéaire dans les composantes des vitesses a été considéré par M. Korkine et M. Pennachietti ; il a été aussi l'objet des recherches de M. Cerruti, qui, pour le cas d'un point libre ou mobile sur une surface, a donné des théorèmes bien élégants, qui auraient très bien figuré dans le livre de M. Whittaker *(Collect. math. in honor. D. Chelini, 1881)*. Les problèmes qui admettent des intégrales quadratiques dans les vitesses, outre celui des forces vives, ne sont pas encore étudiés en général ; l'auteur se borne à rappeler un élégant théorème de M. Stäckel (généralisé par MM. Goursat et Bungatti). Le problème, cependant, a été résolu, pour $n = 3$, par M. Di Pirro *(Ann. Matem. 24 (2), 1896)*, et M. Painlevé a fait connaître une classe remarquable de problèmes en question.

La dernière partie, enfin, est une introduction aux recherches modernes sur le problème des trois corps. On verra certainement avec plaisir l'élégance et la simplicité avec laquelle M. Whittaker, en suivant en partie M. Poincaré, a su exposer, en quelques pages, en s'aidant de la transformation de contact, les recherches de Lagrange et de Jacobi sur la réduction du système hamiltonien du 18^{me} ordre, relatif au problème des trois corps, à un du 6^{me}, dernière limite à laquelle, jusqu'à présent, on soit arrivé.

Les trois derniers chapitres sont consacrés aux objets suivants : le théorème de M. Bruns, d'après lequel il n'y a d'autres intégrales algébriques distinctes de celles bien connues ; celui de M. Poincaré, qui montre qu'il n'y a pas d'intégrales d'une certaine forme (et que l'auteur expose seulement pour le cas du problème restreint) ; l'étude de la forme et de la disposition des orbites des systèmes hamiltoniens et des solutions périodiques et de leur stabilité ; la théorie des exposants caractéristiques de M. Poincaré ; et enfin une méthode, dûe à l'auteur, pour l'intégration de tout problème dynamique par des séries trigonométriques.

Malheureusement les indications bibliographiques font presque entière-

---

[1] M. Viterbi vient de faire la même application au mouvement d'un corps dans un liquide indéfini lorsqu'ont lieu les intégrales de Clebsch ou de Liapounoff ou de Stekloff. (*Atti Ist. Veneto*, 62, 1902-903).

ment défaut dans le beau livre ; c'est une lacune que l'on ne saurait assez souhaiter de voir disparaître dans un ouvrage qui rendra certainement de grands services à tous ceux qui aiment à s'orienter dans les théories les plus modernes de la Dynamique analytique.

R. Marcolongo (Messine).

La Revue du Mois. — Revue mensuelle dirigée par M. Em. Borel, 1re année 1906 ; prix de l'abonnement annuel : Paris, 20 fr. ; Union postale, 25 fr. ; prix du fascicule : 2 fr. 25 ; Librairie Le Soudier, Paris.

En fondant ce nouveau périodique la Rédaction a pensé qu'en raison du nombre et de l'importance des questions qui peuvent être traitées par méthode scientifique, il serait utile d'avoir une publication dont cette méthode serait le principe. Elle se propose de former une revue dont le but essentiel est de contribuer au développement des idées générales par l'exposition et l'étude critique des résultats nouvellement acquis. Mais ce but ne peut être atteint que si la publication est une revue de libre discussion, aussi la Rédaction annonce-t-elle qu'elle admettra « à s'exprimer en pleine indépendance toutes les opinions à base scientifique ».

Les deux premiers fascicules présentent une remarquable variété dans les articles, à tel point que toute personne instruite les lira avec grand intérêt et beaucoup de profit. Nos lecteurs en jugeront par la liste ci-dessous des mémoires insérés dans ces deux numéros :

No 1. — Vito Volterra : Les mathématiques dans les sciences biologiques et sociales. — Alf. Croiset : L'enseignement laïque de la morale. — G. Darboux : La vie et l'œuvre de Charles Hermite. — Emile Bourgeois : Au seuil de l'alliance franco-russe, I. — E. Metchnikoff : La mort naturelle dans le règne animal. — Et. Fournol : La codification du travail. — *** : Le haut commandement dans l'armée française.

No 2. — G. Bonnier : Entre les cryptogames et les plantes à fleurs. — Luc. Levy : Examens et examinateurs. — A. Charrin : Les oscillations de l'état physiologique. — Em. Bourgeois : Au seuil de l'alliance franco-russe, II. — A. Job : Le mécanisme de l'oxydation. — H. Hauser : La géographie humaine et l'histoire économique. — Noël Bernard : Un préjugé dans l'enseignement des sciences naturelles. — Perellos : L'instruction technique dans la marine.

Chaque numéro contient, en outre, une chronique scientifique et de la bibliographie.

Bien qu'il ne s'agisse pas d'une revue purement mathématique, nous avons cru utile, dans cette première annonce, de reproduire les sommaires des premiers fascicules. Avec de tels articles et ceux que l'on annonce pour les prochains numéros, la *Revue du Mois* est assurée de vivre et de trouver un excellent accueil dans tous les pays.

H. Fehr.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W.-Fr. Meyer, E. Jahnke. Dritte Reihe ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Band 9. — K. Cwojdzinski : Distanzrelationen zwischen Punkten und Geraden der Ebene sowie Punkten und Geraden im Raume. — F. Eckhardt : Der Gauss-Lemoinesche Punkt im Kreisviereck. — I. Edalji : Hyperbolic Functions. — E. Gehrcke : Ueber elektrische Wellen. — M. Grossmann : Metrische Eigenschaften reziproker Bündel. — R. Güntsche : Beiträge zur Geometrographie III. — W. Kapteyn : Sur l'équation différentielle de Monge. — J. Kraus : Ueber die Algorithmen von der Form $\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = ka_\lambda$. — R. Krause : Ueber ,senäre Raumkollineationen. — L. Matthiessen : Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten mittels Determinanten. — P. Milau : Beitrag zur Untersuchung des erkenntnisstheoretischen Wertes der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen. — G.-A. Miller : The groups generated by two operators which have a common square. — Th. Reye : Ueber Tetraeder deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren. — E Riecke : Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. — L. Saalschütz : Zur Bildung der symetrischen Funktionen — Zur Lehre von den quadratischen Resten. — O. Spiess : Ueber eine Eigenschaft der binären quadratichen Formen. — O. Staude : Ueber die Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung. — F. G. Teixeira : Sur quelques intégrales définies. — Jan de Vries : Zur Einführung in die normalen Koordinaten. — W. Westphal : Ueber die wichtigsten Beziehungen zwischen elektrischen und optischen Konstanten, insbesondere über den von Hagen und Rubens nachgewiesenen Zusammenhang des Reflexionsvermögens mit dem elektrischen Leitvermögen.

Rezensionen. — Vermischte Aufgaben. — Sitzungsberichte der Berliner Mathem. Gesellschaft.

Bulletin de la Société française de Philosophie, publié par MM. X. Léon : et A. Lalande. 5me année 1905. Librairie Arm. Colin, Paris.

N° 4. — Hartmann : Matière et mouvement. — Discussion : Hadamard. Painlevé, Perrin.

Nos 6 et 7. — Ces deux numéros sont consacrés au *vocabulaire philosophique* (lettre *E* jusqu'à *extrinsèque*).

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 302. Rendiconti 1905, Rome.

Vol. XIV (1er semestre). — M. Abraham · Sopra une applicazione del metodo di Riemann alla integrazione delle equazioni differenziali della teoria degli elettroni. — G. Lauricella : Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato. — Id. : Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche. — L. Orlando : Integrazione di Δ_4 fra due piani paralleli. — Id. : Sopra alcune funzioni ausiliarie. — L. Bianchi : Sulle superficie deformate per flessione dell'iperboloide rotondo ad una falda. — A. CAPELLI : Sull'arbitrarietà delle caratteristische nelle formule di addizione delle funzioni ϑ di una variabile. — ID.: Sulle formule generali di addizione e sulle funzioni ϑ di più argomenti. — G. CASTELNUOVO : Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare. — J. CIPOLLA : Sul numero dei punti di Weierstrass fra loro distinti di una curva algebrica di genere p. — G. FUBINI : Nuova applicazioni dei metodi di Riemann e Picard alla teoria di alcune equazioni alle derivate parziali. — ID. : Sulle coppie di varietà geodicamente applicabil. — E. LEVI : Sui gruppi di movimenti. — F. LEVI-CIVITA : Sulla ricercá di soluzioni particolari dei sistemi differenziali. — E. PASCAL : Ricerche sulla sestica binaria. — ID. : La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia. — A. TAGLIAFERRI : Sulle superficie W applicabili sopra superficie di rotazione. — G. VERONESE : La geometria non archimedea. Una questione di priorità. — G. VITALI : Un contributo all'analisi delle funzioni. — V. VOLTERRA : Un teorema sulla teoria dell'elasticità. — ID. : Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi. — ID. : Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi. — ID. : Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici. — O. TEDONE : Sul problema dell'equilibrio elastico di un elissoide di rotazione. — ID. : Sull'equilibrio elastico di un corpo limitato da un cono di rotazione. — P. PIZZETTI : Relazioni fra i momenti d'inerzia di un corpo del quale la funzione potenziale è simmetrica intorno ad un asse.

(2me semestre.) — L. BIANCHI : Sulla deformazione dei paraboloidi. — A. CAPELLI : Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti. — C. A. DELL'AGNOLA : Sulle funzioni intiere trascendenti. — A. DEL RE : Sulle focali di Minding. — A. FERRARI : Intorno allo spezzamento delle linee parallele alle curve piane algebriche. — G. FUBINI : Sulle coppie di varieta geodeticamente applicabili. — C. Z. GIAMBELLI : Le varietà reppresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari proiettivi di forme. — E. E. LEVI : Sui gruppi transitivi dello spazio ad n dimensioni. — F. LEVI-CIVITA : Sulle funzioni di due o più variabili complesse. — S. PINCHERLE : Sulle equaioni funzionali lineari. — G. RICCI : Sui gruppi di movimenti rigidi negli iper spazii. — V. VOLTERRA : Sulle distorsioni generate da tagli uniformi. — G. ALMANSI : Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito. — G. A. MAGGI : Sull'interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell'elasticità.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXXIII, 1905. Sorbonne, Paris.

Fasc. 3 et 4. — Comptes rendus des séances. — ANDRÉ (D.) : Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque. — DE MONTCHEUIL : Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. — AUTONNE : Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à n — I dimensions. — RÉMOUNDOS (G.) : Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes. — GOURSAT (E.) : Sur le problème de Monge. — SUCHAR (P. J.) : Sur une transformation réciproque en mécanique. — LUCAS (FÉLIX) : Sur la généralisation du rapport anharmonique. — LANDAU (E.) : Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. — DE SÉGUIER (E.) : Sur certains groupes d'ordre $p^m q^n$. — LANDAU (E.) : Sur quelques théorèmes de M. Petrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques. — Correspondance.

2. Livres nouveaux:

Fed. Amodeo. — **Vita matematica napoletana.** Studio storico. biografico, bibliografico. Parte Prima. — 1 vol. gr. in-8°, 216 p. ; prix: 10 L.; Franc. Giannini e figli, Naples.

A. Arnaudeau. — **Tables des Intérêts composés.** Annuités et Amortissements pour des taux variant de dixième en dixièmes et des époques variant de 100 à 400, suivant les taux. — 1 vol. in-4° de XI-[15]-125 pages; prix: 10 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

J. Boussinesq. — **Théorie analytique de la chaleur.** Tome II. — 1 vol. gr. in-8° de XXXII-625 p.; prix : 18 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

U. Broggi. — **Matematica Attuariale.** Teoria Statistica della Mortalità. Matematica delle Assicurazioni sulla vita. *(Manuali Hœpli).* — 1 vol. cart. 346 p. ; prix : 3 L. 50 ; U. Hœpli, Milan.

G. Darboux. — **Notice historique sur Charles Hermite.** — 1 fasc. gr. in-4°, 54 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

K. Dœhlemann. — **Projektive Geometrie** in synthetischer Behandlung. Mit 91 Fig. ; 3te vermehrte u. verbesserte Auflage. *(Sammlung Göschen).* — 1 vol. cart. 181 p., prix: 80 Pf.; G. J. Gœschen, Leipzig.

L. Couturat. — **Les Principes des Mathématiques,** avec un appendice sur la Philosophie des mathématiques de Kant. *(Bibliothèque de Philosophie contemporaine).* — 1 vol. in-8°, 311 p.; prix : 5 fr.; Félix Alcan, Paris.

Ch. Fassbinder. — **Théorie et pratique des approximations numériques.** — 1 vol. in-8°, de VI-90 p.; prix: 3 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Al. Gouilly. — **Traité de Mécanique élémentaire** limité aux matières du programme de l'Université pour les classes spéciales (1904) et adopté en 1905 pour le concours d'admission à l'Ecole Centrale. — 1 vol. in-8°, de 204 p.; Croville-Morant, Paris ; Georg & Cie, Genève.

C.-A. Laisant. — **Initiation mathématique,** ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance. — 1 vol. in-12° de VIII-167 pages avec 97 fig. ; prix : 2 fr. ; Hachette, Paris ; Georg & Cie, Genève.

Ernest Lebon. — **Tables de caractéristiques relatives à la base 2310 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à 30030.** Publication honorée d'une subvention de l'Association française pour l'Avancement des Sciences. — 1 vol. gr. in-8°, 20 tableaux ; Delalain, Paris.

E. Mahler. — **Ebene Geometrie.** Mit. 110 Fig. Vierte, verbesserte Auflage. *(Sammlung Göschen).* — 1 vol. 166 p.; prix : 80 Pf.; G. J. Gœschen, Leipzig.

R. de Saussure. — **Théorie géométrique du mouvement des corps.** Fin de la 1re partie et commencement de la 2e partie : *La Géométrie des feuillets.* — 1 fasc. de 109 p.; Librairie Kündig, Genève.

Dav.-Eug. Smith. — **A Portfolio of Portraits of Eminent Mathematicians.** Part. II. — The open Court Publishing Company, Chicago.

J. Tannery. — **Leçons d'Algèbre et d'Analyse** à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales (ouvrage conforme au programme du 27 juillet 1904) — 2 vol. gr. in-8°. *Tome* I, VII-423 p., avec 35 fig. et 166 exercices ; 12 fr. *Tome* II, 636 p., avec 104 fig. et 238 exercices ; 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

MÉTHODE EXPÉRIMENTALE DANS LA SCIENCE DES NOMBRES ET PRINCIPAUX RÉSULTATS OBTENUS

Parmi les nombreux cas d'emploi de la méthode expérimentale dans la littérature mathématique de l'antiquité, arrêtons-nous sur un cas exposé dans le papyrus Rhind[1] qui consiste dans l'application simultanée de la méthode expérimentale et d'une forme particulière de cette méthode, à savoir la méthode du calcul successif de l'inconnue cherchée en s'appuyant sur les conditions du problème. Placé dans l'édition Eisenlohr sous le n° 40, c'est le 2^{me} problème de la section insérée à la fin du XIV^{me} tableau. Complété pour la clarté de l'exposition par des mots placés entre parenthèses, l'exposé du problème et de sa solution se présentent de la manière suivante :

« 100 pains en 5 personnes. La 7^{me} partie de la part des trois premières personnes (est égale à la part entière) des deux dernières. Quelles sont les différentes parts ? »

23

$17\frac{1}{2}$

différence $5\frac{1}{2}$ fais comme il arrive

12

$6\frac{1}{2}$

1 total 60

$\frac{2}{3}$ 40

---

[1] Le papyrus Rhind est une œuvre mathématique égyptienne, trouvée par l'égyptologue anglais Rhind et écrite en l'an 1700 avant J.-C. par l'écrivain AHMÈS. Il se trouve actuellement au British Museum. Une traduction allemande en a paru sous le titre : *August Eisenlohr. Ein mathematisches Handbuch der alten Ægypter* (Erster Band. Commentar, 4°. Zweiter Band, Tafeln In-fol.). Leipzig, 1877.

Multiplie $1\frac{2}{3}$ par 23, cela donne maintenant $38\frac{1}{3}$

$17\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{6}$
12	20
$6\frac{1}{2}$	$10\frac{2}{3}\frac{1}{6}$
1 total 60	$1\frac{2}{3}$ total 100 ».

L'objet du problème — former une progression arithmétique de 5 termes dont la somme soit égale à 100 et telle que la somme des deux plus petits nombres soit égale au 7^{me} de la somme des trois autres — n'est pas exprimée d'une manière suffisamment claire.

Mais la solution suivante ne laisse aucun doute sur cet objet. Elle se compose de deux parties. Dans la première, comme cela se présente constamment dans le papyrus Rhind, on se donne la raison $\left(5\frac{1}{2}\right)$ de la progression cherchée, sans aucune autre explication que ces mots *fais comme cela arrive* (mache wie geschieht) et on constate que cette progression satisfait à la condition du problème relative au rapport de la somme de deux des nombres à celle des trois autres. Seulement la somme de cinq termes de la progression est égale à 60, nombre inférieur au nombre donné 100. Cela montre que dans la méthode des essais on avait seulement en vue la seconde des deux conditions, la première restant provisoirement de côté.

En toute vraisemblance on a dû considérer tout d'abord la progression formée par les nombres entiers

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ .$$

Or le rapport de la somme des deux premiers à la somme des 3 derniers est égal à $\frac{1}{4}$, il est plus petit que le rapport donné $\frac{1}{7}$. Considérons de même les progressions

$$\begin{array}{rrrrr} 1\ , & 3\ , & 5\ , & 7\ , & 9 \\ 1\ , & 4\ , & 7\ , & 10\ , & 13 \\ 1\ , & 5\ , & 9\ , & 13\ , & 17 \\ 1\ , & 6\ , & 11\ , & 16\ , & 21 \end{array}$$

dans lesquelles le rapport considéré a respectivement pour valeur $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{7}{48}$. Or ce dernier diffère très peu de $\frac{1}{7}$ $\left(\text{la différence est } \frac{1}{336}\right)$ On est donc conduit à augmenter la raison non plus de 1 comme on l'avait fait jusqu'ici mais de $\frac{1}{2}$, et on a la progression

$$1 \quad 6\frac{1}{2} \quad 12 \quad 17\frac{1}{2} \quad 23\ ,$$

et cette fois le rapport est exactement égal à $\frac{1}{7}$.

La seconde condition est remplie, mais non la première car la somme totale est 60 au lieu de 100.

La 2me partie de la solution commence en cherchant la différence entre 100 et 60, soit 40. Ici, la méthode des essais n'intervient plus. Il s'agit de modifier les nombres trouvés, sans détruire le rapport de la somme des deux premières à celle des deux dernières, de façon à augmenter la somme totale de 40. Or le rapport de 40 à 60 est égal à $\frac{2}{3}$; il faudra donc multiplier les nombres de la progression trouvée par $1\frac{2}{3}$, et le problème sera entièrement résolu.

En comparant les deux parties de la solution du problème, sous le rapport de l'exposition, il est impossible de ne pas remarquer entre elles une différence essentielle. Dans la première — on donne sans aucune indication la raison de la progression et cette progression elle-même, comme nous l'avons remarqué plus haut. Dans la seconde — toute la suite du calcul est expliquée avec détail. On peut expliquer cette différence par le point de vue duquel on étudiait la question. Sous le rapport du calcul, la seconde partie seule est résolue. Dans la première, un résultat défini a paru sur le seuil de la conscience ; le reste est demeuré plus bas que ce seuil.

Ainsi dans l'ancienne Egypte la formation du papyrus Rind s'est accomplie plus ou moins clairement pour la conscience, de même que chez les calculateurs extraordinaires de notre temps quand ils appliquaient la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème.

L'emploi de la méthode des essais s'est fait inconsciemment, de sorte que cette méthode n'a pas tardé à se reflèter sur la forme même de l'exposition des solutions acquises par elle. Ces résolutions comme il est possible de le voir par le cas examiné, ont suivi immédiatement l'énoncé comme il arrive. Après la résolution, est placée la vérification dont les détails contrastent singulièrement avec le laconisme de l'exposition.

Comme exemple de la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème on peut citer dans la littérature mathématique de l'antiquité la *règle de fausse position* (regula falsi simplicis positionis). Dans *Liber Abbaci* de Leonard de Pise se rencontre le problème suivant, résolu par cette règle :

Déterminer la hauteur d'un arbre sachant que la partie souterraine égale à 21 empans, constitue le $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ de sa hauteur.

Il est naturel de prendre pour hauteur le nombre 12 qui est à la fois divisible par 3 et par 4. En essayant ce nombre, on trouve que la partie souterraine est égale à 7 empans $\left(\frac{1}{4}\times 12+\frac{1}{3}\times 12=7\right)$. Donc le nombre 12 est inexact. Mais comme 7 est le $\frac{1}{3}$ de 21, le nombre cherché est 12×3 ou 36.

Ce problème et les problèmes semblables ont conduit les calculateurs à l'idée de la proportionnalité des grandeurs. C'est d'ailleurs ainsi qu'est résolu le problème dans Leonard de Pise, en utilisant la proportion $\frac{7}{21}=\frac{12}{x}$, ce qui donne la valeur de x, $x=\frac{21.12}{7}$.

Le lien créé par l'étude de la proportionnalité entre la méthode des essais et la méthode de l'expression du nombre en d'autres nombres est devenu plus étroit dans une des méthodes de la résolution des problèmes par la *règle de deux fausses positions*. Si après la résolution par la méthode des essais de chaque problème, on compare les différences entre la véritable grandeur de l'inconnue et chacun des essais, ou ce qui revient au même, si l'on compare les erreurs des essais avec les erreurs dévoilées par la vérification, il est alors possible de découvrir la proportionnalité qui existe entre eux. Si ensuite on prend deux de ces essais, et si on forme avec eux une proportion entre les grandeurs susdites, il sera facile d'établir un schéma de règle de deux fausses positions, exprimant l'inconnue cherchée en fonction d'autres nombres.

Pour éclaircir ces considérations générales par un exemple, examinons un problème inséré dans les manuscrits russes du XVII[e] siècle :

Trouver un nombre tel que si on le multiplie par 14, et si on divise le produit par $4\frac{2}{3}$ on obtienne 18.

Si on essaie successivement 10, 9, 8, 7, 6, en vérifiant on reconnaît que les erreurs commises sont respectivement 12, 9, 6, 3, 0; ce qui montre que 6 est le nombre cherché.

Ayant pris ensuite la différence entre ce nombre et chacun des essais, et les ayant comparés avec les erreurs correspondantes, nous obtenons les rapports égaux

$$\frac{12}{4} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} :$$

d'où l'on conclut qu'il y a proportionnalité entre les différences et les erreurs.

Si ensuite on prend en particulier la proportion formée par les deux derniers rapports, et si on l'écrit sous la forme

$$\frac{6}{8 - \boxed{6}} = \frac{3}{7 - \boxed{6}} ,$$

$\boxed{6}$ désignant l'inconnue cherchée, on obtient le schéma suivant de résolution

$$\boxed{6} = \frac{6 . 7 - 3 . 8}{6 - 3} ,$$

trouvé probablement par les Hindous et étant passé ensuite chez les Arabes et en Europe.

Et ceci peut se généraliser pour tous les autres problèmes de même genre. Si l'on désigne par z_1 et z_2 deux essais, par

φ_1 et φ_2 les erreurs correspondantes, obtenues par la vérification, l'inconnue x sera donnée par la formule

$$\frac{\varphi_1}{x - z_1} = \frac{\varphi_2}{x - z_2}$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\varphi_1 z_2 - \varphi_2 z_1}{\varphi_1 - \varphi_2} .$$

Outre cette forme de la règle de deux fausses positions, utilisée plus tard, il en existait une autre, qui semblablement à la règle d'une seule fausse position, apparaît comme le résultat direct de la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème.

Si en appliquant la règle de deux fausses positions, on fait deux essais différant d'une unité, la différence des erreurs est constante; et il est facile de voir que cette constante est le coefficient de l'inconnue dans l'équation qui conduit à la solution du problème. En effet, soit l'équation

$$ax + b = o .$$

Remplaçons x par deux nombres z_1 et $z_1 \pm 1$ différant de 1, les erreurs φ_1 et φ_2 sont définies par les égalités

$$az_1 + b = \varphi_1$$

$$a(z_1 \pm 1) + b = \varphi_2 ,$$

d'où

$$\pm a = \varphi_1 - \varphi_2$$

De là, il résulte que pour calculer le nombre des unités dont doit être modifié le nombre essayé pour avoir l'inconnue, il suffit de connaître combien de fois l'erreur contient le nombre constant qui représente la modification de l'erreur pour deux essais différant d'une unité. En ce qui concerne ce nombre constant, il peut être déterminé immédiatement en faisant deux essais différant d'une unité, ou moins rapidement en faisant tout autre essai. Alors le nombre constant cherché est le quotient de la division de la différence des erreurs par la différence des nombres essayés.

C'est ce qu'on peut représenter de la manière suivante

$$z_1 - \frac{\varphi_1}{a} = x$$

$$z_2 - \frac{\varphi_2}{a} = x$$

$$x = \frac{az_1 - \varphi_1}{a}$$

$$x = \frac{az_2 - \varphi_2}{a}$$

$$az_1 - \varphi_1 = az_2 - \varphi_2$$

$$a(z_1 - z_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$a = \frac{\varphi^1 - \varphi^2}{z_1 - z_2}.$$

Appliquons ces deux méthodes au problème considéré plus haut. En prenant les deux essais 10 et 9 qui diffèrent d'une unité, le nombre contact est la différence des erreurs correspondantes $12 - 9 = 3$; si l'on prend les deux essais 10 et 7, auxquels correspondent les erreurs 12 et 3, la constante est donnée par le quotient $\frac{12-3}{10-7} = 3$. Divisons maintenant l'erreur 12 (correspondant à l'essai 10) par la constante 3, nous obtenons $\frac{12}{3} = 4$, et en retranchant ce quotient de l'essai 10, nous avons le nombre cherché $10 - 4 = 6$.

Cette façon d'opérer, sans utiliser les proportions a été beaucoup plus ancienne que l'autre. Ce n'est que plus tard qu'a été mise en pratique la troisième méthode, qui conduit d'ailleurs aux mêmes calculs. Désignons en effet par z_1 et z_2 deux essais quelconques, par φ_1 et φ_2 les erreurs correspondantes, et par V le nombre dont doit être modifié l'essai z_1 pour donner la solution. En appliquant la règle ancienne des deux fausses positions on est conduit au calcul suivant

$$V = \varphi_1 : \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{z_1 - z_2} = \frac{\varphi_1 (z_1 - z_2)}{\varphi_1 - \varphi_2};$$

c'est ce que donne immédiatement la proportion

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{z_1 - z_2} = \frac{\varphi_1}{V}.$$

Cette troisième méthode a été exposée dans les traités arithmétiques des XVII^e et XVIII^e siècles.

L'application des règles de une et de deux fausses positions à la résolution d'équations non seulement du 1er degré, mais encore du 2^{me} et 3^{me} degré a été transmise à l'Europe par les Arabes et s'est propagée dans le cours non seulement du moyen âge mais aussi des temps modernes jusqu'au commencement du XIX^e siècle. De l'Europe occidentale, ces méthodes sont passées en Russie d'abord dans les manuscrits arithmétiques du XVII^e siècle, et ensuite dans l'*Arithmétique* de Magnitsky et dans d'autres traités arithmétiques imprimés au XVIII^e siècle et au premier quart du XIX^e siècle.

On les retrouve dans l'un d'eux, imprimé pour la première fois en 1794 « Arithmétique élémentaire à l'usage des enfants » de *Michel Memorsky*, et elles se sont maintenues dans l'enseignement grâce à la diffusion de ce traité qui a eu de nombreuses éditions dans tout le cours du 19^e siècle et qui en a encore de nos jours.

Les problèmes résolus par la règle de deux fausses positions dans les manuscrits arithmétiques russes du 17^e siècle se rapportant à une équation du 1er degré à une inconnue, et à des systèmes d'équations du 1er degré à 2, 3 et 4 inconnues.

Les illustres auteurs de la littérature mathématique à l'heure actuelle semblent ignorer l'histoire de leur objet et ne pas comprendre les besoins des élèves de l'école populaire, car ils ont supprimé complètement dans leur enseignement la règle des fausses positions. Sous ce rapport ils doivent être placés plus bas que l'illustre auteur, très connu au 18^e siècle, *Kourganoff* qui dans son arithmétique disait : « Bien que par l'invention de l'algèbre, la règle des fausses positions n'est pas nécessaire, néanmoins, cette méthode a été exposée ici pour ceux qui ignorent l'algèbre ou pour ceux qui ne désirent pas la connaître, attendu qu'on peut s'en passer dans les calculs ordinaires (édition de 1776, p. 200). D'ailleurs le succès sans exemple en Russie du livre de Memorsky qui a surpassé le succès de tous les traités d'arithmétique, et qui seul consacre un chapitre à l'exposition de la règle des fausses positions n'est-il pas une éclatante leçon pour tous ceux qui feignent d'ignorer les véritables besoins des écoliers?

Outre l'étude de la proportionnalité, autre découverte importante acquise à la science par la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème, on employa dans la nouvelle algèbre un procédé pour résoudre les équations du 1er degré à une inconnue. Le papyrus de Rhind nous offre un tableau très clair du développement de ce procédé qui consiste dans la division du terme connu de l'équation par le coefficient de l'inconnue. Les quatre premiers problèmes des Hau s'occupent de la détermination de l'inconnue connaissant la somme de cette inconnue et d'une de ses parties. Comme ils se résolvent tous de la même manière, nous prendrons le N° 24 de l'édition de Eisenlohr.

Tas. Sa 7e partie et son entier font 19.

* . 7	. 8	* $\frac{1}{4}$ 2	* .	$2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$	
* $\frac{1}{7}$ 1	* . .16	* $\frac{1}{8}$ 1	* . .	$4\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	
	$\frac{1}{2}$ 4		* 4	$9\,\frac{1}{2}$	
			$\frac{1}{7}$	$2\,\frac{1}{4}\;\frac{1}{8}$	ensemble 19.

Fais, comme il arrive, inconnue $16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$

La première des quatre colonnes représente la description du problème en essayant le nombre 7, qui paraît le plus commode. La deuxième et la troisième sont consacrées à la division de 19 par 8 et la quatrième à la multiplication de la fraction trouvée par 7.

La vérification montre que le nombre essayé 7 ne convient pas; le calcul a dû conduire le calculateur égyptien à des considérations semblables à celles qui ont trouvé place dans le problème exposé plus haut de Léonard de Pise sur la règle de fausse position. Puisque le nombre donné 19 est la somme de l'inconnue et de sa septième partie, la diminution de ce nombre jusqu'à 8 ne peut provenir que de la diminution dans le même rapport de l'inconnue elle-même. Or le quotient de 19 par 8 est représenté par le nombre fractionnaire $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Par conséquent l'essai 7 est le résultat de la diminution de l'inconnu dans le rapport $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, et par suite, pour avoir l'inconnue il faut multiplier 7 par $2\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ c'est ce qu'indique la quatrième colonne.

Nous trouvons des problèmes du même genre, mais un peu plus compliqués dans les nos 31-34 de l'édition Eisenlohr. Il s'agit de déterminer l'inconnue connaissant la somme de cette inconnue et de plusieurs de ses parties.

Par exemple, voici le problème N° 34.

Tas. Son $\frac{1}{2}$, son $\frac{1}{4}$, son entier : tout cela donne 10.

$*\ .\ 1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$	$\frac{1}{2}$
$..\ 3\,\frac{1}{2}$	$*\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{14}$	1
$*\ 4\ 7$		
$*\ \frac{1}{7}\,\frac{1}{4}$	ensemble inconnue	$5\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{14}$

Commencement de la vérification :

$*\ .\ 5\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$		
$*\ \frac{1}{2}\ \ 2\,\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}$		
$*\ \frac{1}{4}\ \ 1\,\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{28}\ \frac{1}{56}$	ensemble $9\,\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{8}$ reste $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{7}\ \ \frac{1}{14}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}\ \frac{1}{28}\ \frac{1}{56}$	$\frac{1}{4}$: 14	
8 4 4 2 2 1	$\frac{1}{8}$ 7 ensemble 21.	

L'exposition de la solution du problème paraît beaucoup plus courte que précédemment. Les deux colonnes qui la composent comprennent une seule opération, la division de 10 par $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$; dont le résultat est l'inconnue cherchée. La vérification qui suit ne s'occupe plus de l'essai, mais de la solution elle-même.

Nous voyons apparaître ici l'unité comme nombre essayé, et non seulement dans ce problème, mais dans les trois autres qui l'accompagnent et qui sont du même genre. Grâce à cet emploi, les opérations qui déterminent l'inconnue sont beaucoup plus simples, puisqu'une seule division suffit. Cependant les calculateurs égyptiens ne paraissent pas avoir eu une idée très nette des avantages que présentait l'emploi de l'unité, puisque dans les solutions de problèmes analogues, ils ont fait des essais différents de l'unité.

En connaissant la solution des problèmes du deuxième groupe Eisenlohr et Kantor ont été conduits à considérer ce groupe comme un recueil de problèmes relatif à la résolution d'équation du 1[er] degré à une inconnue, suivant les méthodes de l'algèbre moderne ; et la solution des problèmes du deuxième groupe n'a pas suffi à les retenir dans cette erreur, qui d'aillenrs n'a pas passé inaperçue. Elle a été signalée par un orientaliste français Léon Rode dans un travail. « Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur égyptien (papyrus Rhind) » paru en 1882 dans le Journal Asiatique de Paris. D'après ses propres paroles, il a été conduit à la découverte de l'erreur de Eisenlohr et de Kantor, » « après une étude très approfondie des chiffres et des explications qui les accompagnent quelquefois » (p. 5). Il ne faut donc pas considérer les solutions de ces problèmes comme résolutions d'équations dans le sens de l'algèbre moderne, mais comme de simples « applications du procédé de la fausse position » (p. 6).

L'importance et les avantages de l'emploi de l'unité comme nombre à essayer ont été remarqués seulement par les Egyptiens, parmi tous les peuples civilisés de l'antiquité. Aussi après plus de 2000 ans, nous trouvons dans les œuvres mathématiques de l'Inde (12e siècle après J.-C.) des problèmes du même genre que ceux du papyrus Rhind, qui sont résolus en essayant des nombres quelconques. Dans le livre de Siddhantaçiroman par Bhâskara on trouve, par exemple, le problème suivant :

On multiplie un certain nombre par 5; on retranche le $\frac{1}{3}$ du produit, on divise le reste par 10 et au quotient on ajoute successivement le $\frac{1}{3}$, la $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ du premier nombre. On trouve 68. Quel est le certain nombre?

La solution est obtenue par le procédé utilisé dans le premier des deux problèmes considérés plus haut du papyrus de Rhind.

Ayant pris pour essai le nombre 3, et ayant calculé le résultat de la vérification par les conditions du problème, l'auteur indien trouve la valeur de l'inconnue 48 en divisant le nombre donné 68 par le résultat de la vérification $\frac{17}{4}$, et en multipliant le nombre trouvé 16 par l'essai 3.

C'est par cette méthode qu'opéraient les mathématiciens arabes quand ils n'utilisaient pas la règle des deux fausses positions. Ainsi dans un ouvrage du moyen âge composé d'après les sources arabes ou emprunté directement à ces sources « Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit » se trouve le problème suivant :

Si d'un certain nombre on retranche son tiers et son quart il reste 8. Quel est ce nombre ?

L'auteur donne la solution suivante :

Prends 12 pour nombre inconnu, en enlevant le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ il reste 5, ensuite demande-toi par quoi il faut multilier 5 pour avoir 12? cela donnne $2\frac{2}{5}$, et ensuite multiplie $2\frac{2}{5}$ par 8, et tu obtiens $19\frac{1}{5}$.

Cette solution diffère de la solution donnée plus haut du premier problème du papyrus Rhind par la transposition des moyens dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, on a désigné a le résultat de la vérification de l'essai, b le nombre donné et c l'essai lui-même.

D'une manière claire ou confuse la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème devait reposer sur les considérations suivantes :

Chaque nombre doit être le même nombre de fois plus grand ou plus petit que le nombre qu'on en déduit par les conditions du problème. Donc, autant de fois l'essai 12 surpasse le nombre 5, autant de fois l'inconnue cherchée devra surpasser le nombre 8. Il faut donc pour avoir l'inconnue multiplier 8 par le nombre $2\frac{2}{5}$ que donne la division de 12 par 5.

Dans l'Europe occidentale le développement du procédé employé en algèbre moderne pour la résolution de l'équation du premier degré à une inconnue s'est déduit de la méthode des essais par cette voie de généralisation dans laquelle se sont avancé les mathématiciens de l'Europe occidentale. Ceux-ci ont été conduits tout naturellement à remplacer les essais numériques et définis par des essais indéterminés, figurés d'un manière symbolique, et ensuite la découverte de Viete et venue généraliser le procédé, en permettant de résoudre les équations du 1er degré et du degré supérieur à une ou plusieurs inconnues.

Les opérations que l'on faisait jadis sur les essais furent étendus à des symboles plus généraux. Cette extension, en algèbre élémentaire, donna naissance aux méthodes de substitution et de comparaison dans la résolution des équations, et au procédé trouvé par les Hindous et Baschet de Meziriac pour la résolution des équations indéterminées au premier degré.

Si, comme beaucoup le font, on forme le domaine de l'algèbre à la seule théorie des équations, alors, en nous appuyant sur l'historique que nous venons de présenter de l'origine des moyens employés dans l'algèbre moderne pour former et résoudre les équations du premier degré à une inconnue, nous pouvons dire avec certitude que l'algèbre est déduite de la méthode des essais, ou d'une manière plus précise de la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème.

V. BOBYNIN (Moscou).

(Traduction de M. E. Papelier, Orléans.)

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE

LA THÉORIE DES ROTATIONS ET LE NIVEAU A BULLE

THÉORÈME I. (Principe des deux demi-tours). — Soient OV_1 et OV_2 deux axes concourants. Pour déplacer un solide par un demi-tour sur l'axe OV_1, on peut déplacer le solide par un demi-tour sur l'axe OV_2 suivi d'une rotation égale à 2 fois l'angle V_2OV_1 exécutée autour d'une perpendiculaire au plan des axes.

Remarque. La démonstration est immédiate; on peut aussi regarder cette proposition comme un cas particulier de la combinaison de deux rotations successives finies.

Soit à composer ces deux mouvements d'une figure sphérique : 1° une rotation λ_2 exécutée autour du pôle P_2; 2° une rotation λ_1 exécutée autour du pôle P_1.

On construit un triangle sphérique de base P_2P_1 dont le côté $\overrightarrow{P_2M}$ issu du pôle de la première rotation, est sur l'arc de grand cercle obtenu en faisant tourner l'arc $\overrightarrow{P_2P_1}$ autour de P_2 de l'angle $-\frac{1}{2}\lambda_2$ et dont le côté P_1M issu du pôle P_1 est sur l'arc de grand cercle obtenu en faisant tourner l'arc $\overrightarrow{P_1P_2}$ de l'angle $+\frac{1}{2}\lambda_1$ autour de P_1.

M est le pôle de la rotation équivalente aux deux rotations successives et son amplitude est l'angle extérieur $\sphericalangle xMP_1$

Mx étant le prolongement de l'arc P_2M.

Théorème II. (Principe des deux quarts de tour). — Soient dans l'espace deux axes concourants OV_1 et OV_2 et donnons à un solide le déplacement de un quart de tour sur OV_1. Ce déplacement peut être obtenu par un quart de tour sur OV_2, suivi 1° d'une rotation V_2OV_1 autour d'une perpendiculaire au plan V_1OV_2 et 2° d'une rotation de même amplitude autour d'une perpendiculaire à OV_1 menée par O dans le plan V_1OV_2.

La démonstration se fait immédiatement en considérant le solide comme défini par deux demi-barres assemblées, dont les positions initiales seraient précisément OV_2 et OV_1.

Théorème III. — Soient P et Q deux points d'une surface sphérique dont la distance angulaire est i (mesurée avec l'unité trigonométrique des angles).

Une rotation j' d'une figure sphérique autour du pôle Q peut être remplacée par une rotation j autour du pôle P suivie d'une rotation j'' autour d'un point H situé sur l'arc de grand cercle dont P est le pôle.

Or le triangle PQH nous donne :

$$\sin\frac{1}{2}\,Oj' = \frac{\sin\frac{1}{2}\,j}{\sin HQ} = \frac{\sin\frac{1}{2}\,j''}{\sin i}\ .$$

Supposons maintenant les angles i et j fort petits :
on aura $j' = j$, à des quantités près de l'ordre de ji^2 ;
sensiblement $[j' = j + \frac{1}{2}\,mji^2]$;
m étant voisin de 1.
et, ... $j'' = ij' = ij$, à des quantités près de l'ordre de $ij'i^2$.

* * *

Application des théorèmes précédents au problème suivant : Rendre vertical l'axe de pivotement d'un solide, par exemple un théodolite.

On suppose que l'on dispose d'un niveau à bulle, porté par l'instrument. Le niveau à bulle consiste essentiellement en une surface en verre, de révolution et de très petite courbure méridienne :

$$\frac{1}{200^{m}} \text{ ou } \frac{1}{400^{m}} .$$

L'intérieur de cette surface est remplie d'éther dont une bulle de vapeur se place symétriquement dans un plan méridien vertical; le milieu de cette bulle définit un point du solide de verre où la tangente à la méridienne de la fiole est horizontale.

Le niveau est toujours placé de manière que l'axe de révolution de la surface graduée de la fiole soit *à peu près* horizontal, l'axe de la fiole constitue *la base* du niveau.

Supposons *le niveau* du théodolite ayant sa base *à peu près* parallèle à la droite OA qui joint le pied O de l'axe à une vis A du trépied de l'instrument. L'axe étant placé, *à l'œil,* à peu près vertical, supposons d'abord que l'on donne à l'appareil une rotation exacte d'un demi-tour autour de son axe et cherchons à prévoir le déplacement qui va en résulter pour la bulle.

Soit OV_3 l'axe de l'instrument, OV_2 sa projection sur le plan vertical mené par OA et soit OV_1 la verticale menée par O soit $\sphericalangle V_1 OV_2 = i$ et $\sphericalangle V_2 OV_3 = k$.

D'après le théorème I le demi-tour sur OV_3 est remplaçable par un demi-tour sur OV_2, suivi d'une rotation $2\,k$ autour de la droite Ox perpendiculaire au plan $V_2 OV_3$, c'est-à-dire presque parallèle à OA. La tangente à la méridienne de la fiole en la première position de l'appareil fait un angle α très petit avec l'axe Ox et cette tangente par la rotation $2k$ va faire avec sa direction primitive un angle β dont la moitié a pour sinus

$$\sin\alpha \sin k \qquad \text{c'est-à-dire que sensiblement } \beta = 2k\alpha .$$

Voyons maintenant l'effet du demi-tour sur OV_2 ; ce dernier peut être remplacé par un demi-tour sur OV_1 et par une rotation d'amplitude $2i$ autour de l'horizontale perpendiculaire au plan vertical OA. Celle-ci aura pour effet de déplacer la division d'arrêt de la bulle presque dans le même plan méridien de la fiole et d'un angle égal à $2i$; si donc le demi-tour effectuée on agit sur la vis A de manière à ramener la bulle de la moitié de son déplacement, on redressera la droite de OV_2 vers OV_1, *et très sensiblement de l'angle i.* D'après le théorème III, nous pouvons en effet très sensiblement remplacer la rotation $2k$ autour de Ox : 1° par une rotation sensiblement égale autour de l'axe de la fiole, rotation qui change le plan méridien de la fiole sans changer les rangs des divisions tangentes à la bulle, et 2° par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la fiole et sensiblement égal à $2\gamma k$, γ étant l'angle de l'axe de la fiole et de Ox, ce qui produira un déplaeement d'orientation de l'ordre de γk, lequel est négligeable *si l'une ou l'autre des quantités γ ou k est comparable à i.*

Supposons que la rotation réalisée autour de OV_3 ne soit pas exactement de 1 demi-tour, mais un demi-tour plus une petite rotation résiduelle δ.

Soit l l'angle $V_3 OV_1$, la rotation résiduelle δ sur OV_3 peut être remplacée par une rotation sensiblement égale à l autour de OV_1 et par une rotation sensiblement égale δl autour d'une horizontale ; celle-ci sera négligeable si δ ou l est de l'ordre de i ou ce qui revient au même si k ou δ est de l'ordre de i (car $l < i + k$).

La correction i ayant été effectuée, comme on l'a dit, pour ce qui est de sa valeur principalc par la vis A, on achève de produire le retour de la bulle à sa position médiane en agissant sur la vis propre du niveau, ce qui a pour effet de rendre en cette position l'axe de la fiole horizontal. La projection de l'axe sur le plan vertical OA est alors verticale.

Pour achever le réglage de l'axe de l'appareil, on fait tourner l'appareil autour de son axe, de 1 quart de tour. Supposons d'abord que cette rotation exécutée sur OW_2 soit exactement de 1 quart de tour, elle équivaut à 1 quart de tour sur OV_1 suivi 1° d'une rotation K autour de OA et 2° d'une rotation K autour d'une droite OY^1 située dans le plan OV_1 perpendiculaire à OW_2. le quart de tour sur OV_1 ne déplace pas la bulle. la première rotation K déplace la bulle de l'angle K, la deuxième rotation K autour de OY^1 qui est l'axe de la fiole, modifie le méridien central de la bulle, mais sans modifier les divisions tangentes extrêmes, la première rotation sur OA déplace la bulle de l'angle K.

On la ramène à sa position primitive, en agissant sur les vis B et C, mais en sens inverse et de quantités égales pour laisser la direction OA invariable.

Si enfin le quart de tour n'est pas rigoureusement exact et s'il comporte une petite rotation résiduelle ε autour de OW_2, celle-ci peut être remplacée par une rotation ε autour de OV_1 et par une rotation εK autour d'une horizontale voisine de OY, dont l'effet est négligeable vis-à-vis de l'effet principal K.

La première est d'ailleurs sans action sur la bulle.

On voit comment la théorie élémentaire des rotations fait claire et précise la méthode opératoire du réglage des appareils de positions à axe vertical.

Jules Andrade (Besançon).

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES

Les mathématiciens recherchent avec raison la précision et la rigueur des termes. Dans cette voie, il peut être intéressant d'appeler leur attention sur un langage impropre consacré par l'usage, mais qu'il est aisé d'améliorer comme je vais l'expliquer.

On adopte en général, pour les séries, les énoncés suivants :

Définition. — *Une série convergente est dite* absolument convergente *si la série des modules de ses termes est aussi convergente. La série proposée est* semi-convergente *si la série des modules est divergente.*

Théorème. — *On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre des termes. On peut altérer arbitrairement la valeur d'une série semi-convergente en changeant l'ordre de ses termes.*

L'énoncé du théorème, juste dans le fond, est mauvais dans la forme ; car, dans deux sens opposés, il comporte les idées fausses que voici :

Une somme dépend de l'ordre de ses parties.

La série absolument convergente ne change pas de valeur quand on rejette indéfiniment son premier terme au delà du terme de rang n auquel on s'arrête dans la suite des évaluations approchées de la série.

De bons auteurs[1], il faut le dire à leur louange, prennent soin de commenter le texte pour en préciser la signification de façon à écarter ces fausses interprétations. Il n'en est pas moins vrai que l'énoncé demeure défectueux et leur souci d'en expliquer les termes est une preuve suffisante de sa défectuosité.

Je propose le texte que voici :

THÉORÈME. — *Si une série est absolument convergente, on peut choisir arbitrairement, parmi les termes qui suivent le rang* n, *des termes en nombre quelconque et à des places quelconques; la somme des termes choisis tend toujours vers zéro quand* n *croît indéfiniment.*

Si la série est semi-convergente, on peut altérer arbitrairement la somme des n *premiers termes de la série en y ajoutant des termes convenablement choisis parmi ceux qui suivent le rang* n[2].

Le nouveau texte, ne prêtant pas à l'équivoque, ne réclame aucun éclaircissement. Ayant au fond la même signification que le texte ancien, il admet la même démonstration et les mêmes applications. Toutefois, respectant mieux dans la forme la réalité des faits, il entraîne plus de simplicité et de clarté dans les explications.

On le voit, le changement que je préconise comporte un bien faible dérangement aux usages. Par contre, il me paraît avoir l'avantage notable d'éviter des confusions possibles et un effort parasite pour la traduction d'un texte incorrect en

[1] TANNERY, *Introduction à l'étude des fontions*, 1886 ; p. 54 à 56.
NIEWENGLOWSKI, *Cours d'algèbre*, 1891 ; t. I, p. 292 et 293.

[2] S'il s'agit d'une série à termes réels, on peut par cette altération donner à la série telle valeur que l'on veut. Si la série a ses termes imaginaires, on peut donner, par exemple à la partie réelle de la série, telle valeur que l'on veut.

une idée juste. Il n'est peut-être pas inopportun de rappeler ici que les membres de la Société mathématique de France ont connu sur ce sujet les scrupules d'un de leurs anciens confrères. Malheureusement, l'auteur s'obstinait à voir dans l'incorrection du langage une idée fausse de Cauchy. Par son manque de mesure et de perpicacité, il a sans doute éloigné ses auditeurs d'une observation qui avait quelque chose de juste.

E. CARVALLO (Paris).

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Quand on veut donner aux élèves, antérieurement à toute notion sur les dérivées, l'exemple du développement d'une fonction en série entière, on recourt tout naturellement à l'identité.

$$(1) \qquad (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

(pour $x < 1$), qui résulte, soit de la théorie de la division, soit des progressions géométriques. Je me propose de généraliser cet exemple, et j'attache une certaine importance à cette généralisation, à cause de l'application dont elle est susceptible, et par laquelle je terminerai cet article. Pour le moment je veux montrer comment la formule (1) entraîne, comme conséquence, la formule suivante

$$(2) \qquad (1-x)^{-m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots$$
$$+ \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!}x^p + \dots$$

pour toutes les valeurs entières de m.

Soient, en effet, deux séries entières

$$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$
$$T = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

convergentes pour une même valeur de x. Je dis que le produit ST est égal à la somme de la série

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} (a_0b_p + a_1b_{p-1} + \dots + a_pb_0)x^p,$$

dont la convergence résultera de la démonstration ci-après. Désignons par S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série S, par T_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série T, posons

$$S = S_n + \alpha\,, \qquad T = T_n + \beta$$

et observons que

$$ST = S_nT_n + \alpha T_n + \beta S_n + \alpha\beta\,.$$

Nous en déduisons que, n croissant au delà de toute limite S_nT_n a pour limite ST.

Mais

$$S_nT_n = \sum_{p=0}^{p=n} (a_0b_p + a_1b_{p-1} + \dots + a_pb_0)x^p.$$

Donc le second membre de cette égalité a pour limite ST.

Admettons maintenant que l'égalité (2) soit vraie pour une certaine valeur de m et proposons-nous de démontrer qu'elle est vraie pour la valeur suivante. A cet effet, multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre. Nous trouvons :

$$(1-x)^{-(m+1)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p\,!}\right) x^p$$

et il reste à démontrer que le coefficient de x^p est égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p\,!}.$$

Soit donc

$$A_{m,p} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p\,!}.$$

On trouve, successivement

$$A_{m,p} = A_{m,p-1}\left(1+\frac{m}{p}\right) = A_{m,p-1} + A_{m-1,p}.$$

De même

$$\begin{aligned}
A_{m,p-1} &= A_{m,p-2} + A_{m-1,p-1},\\
A_{m,p-2} &= A_{m,p-3} + A_{m-1,p-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
A_{m,2} &= A_{m,1} + A_{m-1,2},\\
A_{m,1} &= m + 1
\end{aligned}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, et supprimant les termes communs aux deux membres de l'égalité résultante, on trouve

$$A_{m,p} = A_{m-1,p-1} + A_{m-1,p-2} + \dots + A_{m-1,2} + \frac{m}{1} + 1,$$

ou bien :

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p\,!} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p\,!}.$$

c. q. f. d.

Application. Il résulte de ce qui précède que pour toute valeur de m, entière et positive, le nombre

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$$

est égal à la somme de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3} + \dots$$

Or le terme général de cette série, savoir

$$\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p\,!}\cdot\frac{1}{m^p}$$

est égal à

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\dots\left(1+\frac{p-1}{m}\right)}{p\,!}.$$

On en conclut

$$(3)\qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} > 1+\sum_1^{\infty}\frac{1}{p\,!}=e\,.$$

D'autre part :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\sum_{p=1}^{p=m}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{p\,!} < e\,.$$

J'aurai donc démontré que, m croissant au delà de toute limite, les deux nombres

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$$

ont pour limite e, si je fais voir que leur différence a pour limite zéro. Or

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m;$$

et, en vertu de l'identité :

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\dots+a^{m-1}),$$

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{m(m-1)}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}+\right.$$

$$\left.\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-2}\left(1+\frac{1}{m}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\right]$$

On en conclut :

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\frac{1}{m(m-1)}\,m\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}<\frac{e}{m-1}\,;$$

et cette inégalité démontre la proposition.

V. Jamet (Marseille).

P. S. — Au moment de corriger l'épreuve, je m'aperçois que la dernière partie de ce travail est susceptible d'une grande simplification. En effet, la relation (3) entraîne la suivante :

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{-(m+1)}>e$$

ou bien

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}>e\,.$$

Mais :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\,.$$

Donc :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\,;$$

donc

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\frac{e}{m}\,,$$

et l'on est conduit à la même conclusion que ci-dessus.

SUR LES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ORDONNÉS

Au moment où la théorie des ensembles tend à constituer le fondement même des mathématiques, il ne paraîtra peut-être pas sans intérêt de rechercher s'il ne serait pas avantageux de modifier légèrement le point de vue auquel s'est placé G. Cantor pour l'exposé des éléments de la théorie des ensembles ordonnés. Cet exposé gagnerait à notre avis, une allure plus naturelle si l'on rapportait la notion d'ordre, qui en est la base, à la notion plus générale d'inclusion.

Pour effectuer cette transposition, il suffit de remarquer qu'il est équivalent de dire qu'un élément déterminé m_1 d'un ensemble M précède un autre élément déterminé m_2 ou que l'ensemble des éléments qui précèdent m_1 est inclus dans l'ensemble des éléments qui précèdent m_2. Il résulte de cette remarque que « ordonner un ensemble M, c'est définir des « ensembles formés d'éléments de M (ou *sous-ensembles* de « M), tels que deux quelconques de ces ensembles donnent « toujours lieu à une relation d'inclusion ».

Soit S un ensemble de sous-ensembles de M satisfaisant à la condition qui vient d'être énoncée (ces sous-ensembles seront dits les *termes* de S). A tout élément m de M correspond un ensemble $G(m)$ (évidemment fonction de m) formé de tous les éléments qui appartiennent à l'un au moins des termes de S n'admettant pas m comme élément; on peut également distinguer l'ensemble $F(m)$ formé par les éléments de M qui appartiennent aux mêmes termes de S que m. Enfin on peut en outre considérer l'ensemble $G'(m)$ composé des ensembles $G(m)$ et $F(m)$. Ces divers ensembles sont parfaitement définis; car chacune des qualités qui les caractérisent appartient ou n'appartient pas à tout élément déterminé de M. L'ensemble $F(m)$ correspond à l'idée de *coupure*, qui ne saurait être conçue en dehors de l'idée d'ordre : les ensembles $G(m)$ ou $G'(m)$ représentent la *grandeur*, à laquelle donne lieu toute relation d'ordre.

Si l'on exprime par le signe [1] $<$ la relation d'inclusion sans identité d'un ensemble dans un autre, on démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments déterminés m_1 et m_2 de M soient tels qu'il existe un terme au moins de S admettant m_1 et non pas m_2 est :

$$G(m_1) < G(m_2) \quad \text{ou} \quad G'(m_1) < G'(m_2) .$$

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments m_1 et m_2 appartiennent aux mêmes termes de S consiste dans l'identité de $G(m_1)$ et $G(m_2)$ ou bien encore de $G'(m_1)$ et $G'(m_2)$.

La relation exprimée dans la théorie de l'ordre par les mots « compris entre » est évidemment directement applicable. Les ensembles $G(m)$ et $G'(m)$ sont toujours des termes de la suite [2] S si celle-ci est *partout disjointe*, c'est-à-dire si les termes compris entre deux quelconques des termes de S sont en nombre fini (sans exclusion du nombre zéro). Dans le cas où la suite S est *partout compacte*, c'est-à-dire où deux termes quelconques en comprennent toujours d'autres, $G(m)$ et $G'(m)$ ne peuvent pas faire partie à la fois de cette suite ; mais ces derniers ensembles n'en sont pas moins parfaitement définis.

Si l'on appelle *champ* d'une suite d'ensembles l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à l'un au moins des termes de cette suite, il est clair que toute suite d'ensembles, même dépourvue de dernier terme, donne lieu à un champ, et l'on obtient ainsi la définition la plus naturelle de la limite d'une suite sans dernier terme ; la notion de limite se trouve ainsi établie d'une manière plus générale et surtout plus directe que par la méthode habituelle, et il

[1] La signification habituelle de ce signe n'est qu'un cas particulier de celle-ci par suite de l'équivalence des idées d'ordre et d'inclusion.

[2] Nous dirons, pour abréger le discours, que des ensembles tels que deux quelconques d'entr'eux donnent toujours lieu à une relation d'inclusion forment une *suite*.

suffit de *démontrer* la propriété qui, dans cette méthode, sert de définition. On se trouve ensuite naturellement amené à la considération des notions introduites par G. Cantor: ensembles enchaînés, parfaits, etc., en adjoignant au besoin, aux termes de la suite S, d'autres ensembles dont chacun doit posséder la propriété de contenir les ensembles $G'(m)$ relatifs à tous ses éléments. G. Combebiac (Bourges).

SUR UNE EXTENSION POSSIBLE DE LA NOTION DE VRAIE VALEUR

Toute collection de faits analytiques conduit à un essai de coordination et cet essai peut quelquefois aboutir à l'établissement d'une théorie. C'est ainsi que des faits analytiques relatifs aux séries divergentes ont conduit tout récemment d'illustres mathématiciens à poser les premiers fondements d'une théorie des séries divergentes.

Je me propose de montrer, dans cette note, comment quelques faits analytiques semblent indiquer une *extension possible de la notion de vraie valeur.*

I.—Prenons d'abord le problème ordinaire de la vraie valeur.

Considérons une fonction définie par une certaine expression analytique $F(x)$. Il peut arriver que pour une certaine valeur $x = a$, de la variable, l'expression analytique $F(x)$ cesse d'avoir un sens: la fonction n'est donc pas définie au point $x = a$. Pour la définir on regarde si l'expression analytique $F(x)$ tend vers une valeur limite lorsque x tend vers a. Si cette valeur existe et si elle est égale à A on convient de poser, par définition,

$$F(a) = A$$

et c'est ce nombre A qu'on appelle *vraie valeur* de $F(x)$ au point $x = a$.

On voit donc que pour définir la fonction considérée au point $x = a$, on lui impose la condition d'être *continue* en ce point. C'est sur cette convention que repose la notion ordinaire de vraie valeur.

Considérons maintenant un cas moins simple : une fonction est définie, dans un certain intervalle (x', x'') par une expression analytique qui cesse d'avoir un sens pour une certaine valeur a de la variable ; mais l'expression analytique qui définit la fonction ne tend vers aucune limite déterminée lorsque x tend vers a. Il n'est donc pas possible de définir la fonction au point a par la *vraie valeur* ordinaire, parce que cette vraie valeur n'existe pas.

Mais, au lieu d'imposer à la fonction la condition d'être *continue* au point a (ce qui ne réussit pas dans le cas actuel) on peut lui imposer la condition d'être, dans l'intervalle $x' < a < x''$ une *fonction dérivée*. Si cela réussit, la fonction ne peut avoir, au point a, qu'une valeur A bien déterminée et l'on pose, par définition,

$$F(a) = A$$

On peut continuer à appeler le nombre A vraie valeur de la fonction au point a, ou plutôt *vraie valeur généralisée.*

Il n'y a là qu'une convention, mais si l'on peut montrer que cette convention est utile, alors elle est aussi légitime que la convention ordinaire sur laquelle repose la notion commune de vraie valeur.

II. — Je vais donner seulement deux exemples, mais on peut les multiplier à volonté.

Considérons la fonction $f(t) = \sin \frac{1}{t}$, qui est indéterminée au point $t = 0$. On démontre facilement que $\sin \frac{1}{t}$ est une fonction dérivée et alors on a $f(0) = 0$. Ce sera, par définition, la vraie valeur de $\sin \frac{1}{t}$ au point $t = 0$.

Cela admis, la transformée de $\sin \frac{1}{t}$, en posant $t = \frac{1}{x}$, est $\sin x$. On en déduit la convention suivante : pour $x = \infty$ on a $\sin \infty = 0$. Et, l'on peut facilement montrer qu'on a aussi $\cos \alpha x = 0$, $\sin \alpha x = 0$ pour $x = \infty$, α étant un nombre fixe quelconque.

Voici maintenant deux faits analytiques qui légitiment cette convention.

(1°). — On a

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{a^2 + \alpha^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos \alpha x dx = \frac{a}{a^2 + \alpha^2},$$

avec $a > o$.

Supposons maintenant $a = o$: il vient,

$$(1) \qquad \int_0^\infty \sin \alpha x dx = \frac{1}{\alpha}, \qquad \int_0^\infty \cos \alpha x dx = 0.$$

Mais

$$\int \sin \alpha x dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}, \qquad \int \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}.$$

En comparant avec (1) on voit que

$$\cos \infty = 0, \quad \sin \infty = 0,$$

ce qui s'accorde avec notre convention.

Cet exemple est pris dans le *Traité de Calcul intégral* de Todhunter.

(2°). — Considérons maintenant avec M. Picard *(Traité d'Analyse* : I, 32 ; 1re édition) l'intégrale :

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx,$$

où nous supposons $\alpha > 0$; le changement de variable $\alpha . x = y$ ramène cette intégrale à la suivante

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy.$$

L'intégrale (2) ne dépend donc pas de α. En effet, si nous la dérivons par rapport à α nous trouvons

$$\int_0^\infty \cos \alpha x dx$$

et cette intégrale est nulle d'après notre convention.

III. — Le principe qui doit servir de guide pour légitimer cette extension de la notion de vraie valeur est le même que celui qui a servi pour édifier la théorie des séries divergentes. Je le copie, en ne changeant que quelques mots dans le livre de M. Borel *sur les séries divergentes :*

Faire correspondre à une expression analytique F (x), *en un point d'indétermination, une valeur telle que la substitution de cette valeur à* F (x), *dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.*

Une conséquence immédiate, qu'on tire de ce principe, c'est que la notion généralisée doit comprendre comme cas particulier la notion ordinaire.

Une autre remarque essentielle et qui s'impose par les faits analytiques eux-mêmes c'est que certaines opérations qu'on peut effectuer, dans les conditions ordinaires, cessent d'être légitimes avec la notion généralisée. Cela devait naturellement arriver puisque cela arrive dans toute extension : c'est ainsi, par exemple, que par l'introduction des variables complexes, les propriétés exprimées par des *inégalités* cessent, soit d'avoir un sens, soit d'être vraies lorsqu'on ne suppose plus les variables réelles.

Quelles sont, après l'introduction de la notion de vraie valeur généralisée, les opérations du calcul algébrique et du calcul intégral qui continuent à être légitimes ?

Voilà la question essentielle. Je n'ai pas l'intention de l'aborder ici ; mais je crois avoir montré par ce qui précède, qu'elle mérite d'être examinée.

D. Pompeiu (Jassy, Roumanie).

Note de la Rédaction. — Nous rappelons, à propos de cet article, que la *Rédaction* laisse toute liberté aux auteurs, dont la responsabilité scientifique seule est engagée. Cet essai d'une extension de la notion de vraie valeur nous a paru intéressant, mais il y aurait lieu de faire certaines réserves, principalement pour ce qui concerne $\cos \infty$ et $\sin \infty$.

SUR L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE CERTAINS DÉTERMINANTS

Si les éléments

$$a_{ij} \ (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

du déterminant

$$A = | a_{ij} |$$

sont des variables ou des indéterminées indépendantes, ce déterminant est une forme entière rationnelle IRRÉDUCTIBLE *de ces indéterminées*[1].

Si les éléments

$$b_{ij} \ (i = j = 1, 2, \dots, n)$$

du déterminant symétrique

$$B = | b_{ij} |,$$

où $b_{ij} = b_{ji}$, sont des indéterminées indépendantes, ce déterminant est une forme entière rationnelle IRRÉDUCTIBLE *de ces indéterminées.*

On peut démontrer ces deux théorèmes, dont le premier est classique, en même temps de la manière suivante :

Si A ou B était décomposable, toute forme du degré n provenant de A ou de B en remplaçant quelques indéterminées par les nombres zéro ou un (ou autres nombres entiers ra-

[1] Nous disons avec M. JULES KÖNIG d'une forme (c'est-à-dire d'une polynome) qu'elle est *entière et rationnelle*, si ses cœfficients sont des nombres entiers rationnels. Une forme entière rationnelle du degré zéro est un nombre entier rationnel. Une forme entière rationnelle est *irréductible*, si, elle ne se décompose pas en un produit de deux formes entières rationnelles différentes toutes deux de $+1$ et de -1.

tionnels) sera aussi décomposable. Donc dans ce cas le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{vmatrix},$$

où les indéterminées laissées dans la diagonale principale sont désignées par $x_1, x_2, \dots, x_n$, devrait être décomposable. Mais pour, $n = 1$ et 2, les formes

$$D_1 = x_1 \quad D_2 = x_1 x_2 - 1$$

sont évidemment irréductibles, et à tout autre cas s'applique la conclusion de $n - 1$ à n.

On a

$$D_n = x_n D_{n-1} - D_{n-2}$$

où les déterminants D_{n-1} et D_{n-2} semblables à D_n ne contiennent pas x_n. Par conséquent la forme D_n linéaire en x_n en peut se décomposer que si D_{n-1} et D_{n-2} avaient un facteur commun différent de l'unité positive ou négative. Mais c'est impossible parceque D_{n-1} et D_{n-2} sont deux formes différentes supposées irréductibles.

Jos. Kürschak (Budapest).

CONSIDÉRATIONS SUR L'ASTRONOMIE, SA PLACE INSUFFISANTE DANS LES DIVERS DEGRÉS DE L'ENSEIGNEMENT

Dans la classification des sciences l'Astronomie occupe une place toute particulière. Si l'on envisage l'objet étudié, l'Astronomie se range parmi les sciences naturelles. Le physicien en effet fait naître ou modifie les phénomènes qu'il étudie, le naturaliste au contraire observe les phénomènes se produisant d'eux-mêmes. Or s'il existe des phénomènes que l'homme ne peut ni faire naître, ni modifier d'aucune manière, ce sont à coup sûr les phénomènes célestes.

Par sa méthode au contraire l'Astronomie est toute mathématique. L'Analyse, la Géométrie, la Mécanique, le Calcul des probabilités y trouvent leurs plus belles applications.

Les connaissances des anciens relatives aux astres étaient très limitées, par contre l'aspect de la voûte étoilée était, semble-t-il, plus familier au grand nombre que chez les modernes. Les poètes anciens, Virgile, Ovide, par exemple, font preuve d'une connaisance des constellations à laquelle les poètes modernes sont en général loin d'atteindre.

Ces derniers font souvent preuve d'ignorance et même d'un certain dédain pour la connaissance du ciel. Le seul mérite scientifique de Boileau est de s'être moqué de l'Astronomie en faisant rimer axe avec parallaxe.

Mais prenons La Fontaine, le seul des poètes français de cette époque qui ait vu de la poésie dans la nature. Lisez la fable où le renard aperçoit la lune au fond d'un puits et la prend pour un fromage. Elle témoigne d'une rare ignorance. D'abord la lune pour être vue ainsi doit être à peu près au zénith, chose impossible en nos régions ; de plus, d'après la fable, elle s'y trouve encore deux jours après, et :

> « Le temps qui toujours marche avait pendant deux nuits
> *Echancré* selon l'ordinaire
> De l'astre au front d'argent la face circulaire ».

Or, deux nuits après la pleine lune, l'astre n'est nullement échancré.

Au dix-neuvième siècle, les poëtes et littérateurs ne sont pas plus avancés en Astronomie. Lamartine fait lever Vénus le soir, Musset fait commencer le printemps au mois de Mai.

Dans une petite comédie récente, un personnage regardant dans une cheminée aperçoit la lune au bout. La lune au zénith de Paris !

Cependant de telles absurdités ne choquent personne. Celà prouve que les notions astronomiques les plus simples sont peu répandues. Cependant d'excellents ouvrages de lecture attrayante mettent cette science à la portée de tous.

Mais du moins ceux qui étudient les sciences, les élèves des lycées, des universités connaissent-ils l'Astronomie ? La réponse est certainement celle-ci. Ils la connaissent fort peu.

Dans les programmes de l'enseignement secondaire la Cosmographie tient une faible place. En 1902 pourtant des réformes importantes furent introduites dans l'enseignement scientifique. La Cosmographie en profita, mais pour peu de temps. Par une modification récente des programmes son importance fut de nouveau diminuée.

Cette diminution ne me semble pas logique. L'esprit des nouveaux programmes est de donner à l'enseignement mathématique un caractère plus concret. On veut faire voir en la mathématique non pas une science purement idéale ayant pour objet de pures conceptions de l'esprit, mais une science ayant pour objet la réalité concrète s'appliquant à tout ce qui nous entoure, servant à accroître notre connaissance du monde extérieur.

Rien de mieux que cette conception. Si les problèmes abstraits ont de l'intérêt pour le savant, le concret seul intéresse l'élève. Or c'est là le véritable problème de l'enseignement. Il s'agit, pour que l'enseignement soit fructueux, d'intéresser l'élève.

Mais ne convient-il pas, dès lors, d'attribuer plus d'importance aux applications concrètes des mathématiques [1]. La Cosmographie, même assez élémentaire, fournit d'intéressantes applications. La construction des cadrans solaires n'est pas bien compliquée. On pourrait avec avantage en trigonométrie remplacer certains développements peu utiles par la

[1] Les applications élémentaires à la Géographie mathématique et à l'Astronomie occupent une très bonne place dans les nouveaux programmes allemands (1902). Consulter, entre autres, les recueils de A. SCHÜLKE, *Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, u. Stereometrie*, Leipzig, 1902, et de SCHUSTER, *Geometrische Aufgaben u. Lehrbuch der Geometrie*, II. *Trigonometrie*, Leipzig, 1903. Voir aussi, dans les *Neue Beiträge zur Frage des math. u. phys. Unterrichts*, publiés par KLEIN u. RIECKE, l'article de K. SCHWARZSCHILD sur les observations astronomiques que l'on peut faire à l'aide de moyens tout à fait élémentaires. (NOTE DE LA RÉDACTION.)

démonstration des trois formules du « Groupe de Gauss » en trigonométrie sphérique. On indiquerait aux élèves la manière de se servir de ces formules, et on leur laisserait le soin de démontrer eux-mêmes les formules donnant les angles en fonction des côtés.

Dans ces conditions les exercices de calcul logarithmique au lieu de porter sur des problèmes de pure fantaisie deviendraient tout à fait réels. Voici des exemples :

1° Questions relatives au lever et coucher des astres.

2° Distance de deux points dont on connaît la latitude et la longitude.

3° Calculer l'azimuth d'un mur, connaissant l'heure où l'ombre de ce mur ne se projette ni d'un côté ni de l'autre.

4° De Dijon on aperçoit le Mont-Blanc. On donne les latitudes et longitudes des deux points. Dans quelle direction faut-il braquer une lunette à Dijon pour que le Mont-Blanc soit dans le champ ?

5° De Marseille on aperçoit le Canigou lorsque le soleil se couche derrière ; à quelles époques de l'année le phénomène se produit-il ?

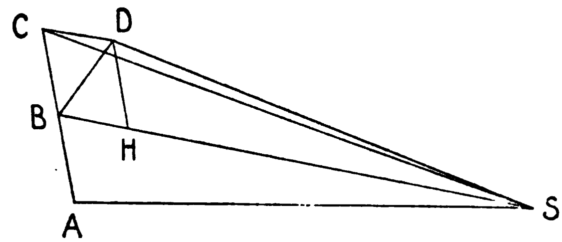
Il est possible d'aller plus loin, et de donner à des élèves n'ayant que les connaissances exigées à la seconde partie du Baccalauréat, quelques notions de Mécanique céleste.

J'ai trouvé dans les œuvres de Voltaire une démonstration de la loi des aires. Cette démonstration due probablement à Newton, est d'une remarquable simplicité. Je la reproduis ici en abrégeant le plus possible.

Supposons le point A attiré vers le point S. La force d'attraction agit d'une manière continue ; on suppose pour la démonstration qu'elle agisse en quelque sorte par saccades à intervalles de temps égaux à ϑ, ϑ étant très petit.

Pendant un premier intervalle de temps ϑ, le mobile parcourt le petit segment AB. Si la force n'agissait pas, pendant un second intervalle ϑ, le mobile parcourrait un second segment $BC = AB$ dans le prolongement de AB. Mais l'attraction de S donne en B une impulsion, et amènerait le point de B en H si la vitesse acquise n'existait pas. Pour avoir la véritable position du mobile au bout du second intervalle de temps, on n'a qu'à composer les déplacements BH et BC, on construit le parallélogramme BHDC. BD est le déplacement résultant. Le point vient donc en D.

Or les deux triangles BSD, BSC sont équivalents : ils ont même base BS et même hauteur, la distance de CD à BS, d'autre part BSC et BSA sont équivalents, ils ont même base AB = CD et même hauteur, la distance de S à la droite ABC.



Donc l'aire ASB est égale à l'aire BSD. Les aires décrites par le rayon vecteur pendant les intervalles égaux à ϑ sont donc égales.

C'est le principe des aires.

Il ne me semble pas facile d'aller plus loin, et de déduire les autres lois de Kepler de la loi de l'attraction, par des procédés élémentaires. Mais on peut faire l'inverse.

Voici une manière de procéder.

J'établis d'abord deux formules fournissant deux expressions de la vitesse aréolaire soient FM et FM′ les rayons vecteurs aux époques t et $t + \vartheta$, et soit α leur angle. L'aire parcourue est comprise entre les deux secteurs circulaires de rayons FM et FM′ et tous deux d'angle α, c'est-à-dire entre $\frac{1}{2} \alpha \, . \, \overline{FM}^2$ et $\frac{1}{2} \alpha \, \overline{FM'}^2$

En divisant par ϑ chacune de ces deux expressions, et faisant tendre ϑ vers O, on voit que leur limite commune est

$$A = \frac{1}{2} \omega . \overline{MF}^2 ,$$

ω désignant la limite de $\alpha : \vartheta$, c'est-à-dire la vitesse angulaire de rotation du rayon MF. Telle est une première expression de la vitesse aréolaire.

On en a une seconde en remarquant que l'aire du triangle FMM' est égale à $\frac{1}{2}$ MM' $\times$ h (h est la hauteur issue de F), en divisant par ϑ, remarquant que $\frac{\text{MM}'}{\vartheta}$ a pour limite la vitesse v du point M, et h a pour limite la distance p du point F à la tangente en M, on voit que la vitesse aréolaire est

$$A = \frac{1}{2} pv .$$

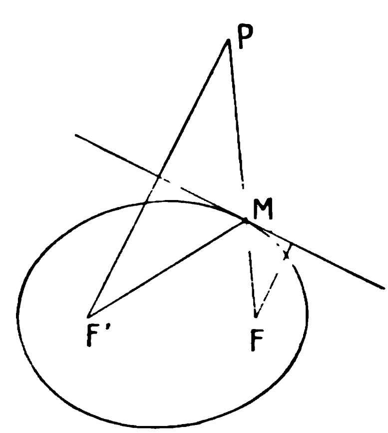
Considérons une ellipse de foyer F, parcourue par un mobile M, de façon que la vitesse aréolaire du rayon vecteur FM soit constante. Si T désigne le temps employé par le mobile pour parcourir l'ellipse, a et b les demi-axes de cette ellipse, l'aire de l'ellipse étant πab, la vitesse aréolaire est :

$$A = \frac{\pi ab}{T} . \tag{1}$$

Nous allons chercher l'accélération du point M. Soit F' le second foyer, p la distance du foyer F à la tangente en M, et p' la distance du foyer F' à cette même tangente. On sait que :

$$pp' = b^2 .$$

Soit P le symétrique de F' par rapport à cette même tangente, on sait que FP $= 2a$.



D'autre part

$$F'P = 2p' .$$

or

$$p' = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2 v}{2A} .$$

donc

$$F'P = \frac{b^2 v}{A} = kv . \quad \left(k = \frac{b^2}{A}\right)$$

ainsi F'P représente la vitesse multipliée par le facteur constant k, et tournée d'ailleurs d'un angle droit, puisque F'P est perpendiculaire à la tangente en M. Le lieu de P représente donc l'hodographe transformé par une homothétie de rapport k, et une rotation d'un angle droit. La vitesse du point P est donc égale à l'accélération γ cherchée multipliée par k et *tournée d'un angle droit.*

P décrivant un cercle de centre F et de rayon $2a$, la vitesse du point P est perpendiculaire à FP. Donc l'accélération qui s'obtient en faisant tourner cette vitesse d'un angle droit est dirigée suivant PF ou suivant MF.

Ainsi l'accélération est dirigée vers F. Pour l'avoir en grandeur, désignons par ω la vitesse angulaire de MF ou de PF. La vitesse de P est ωFP ou $2a\omega$. Mais on vient de voir que cette vitesse est $k\gamma$. Donc :

$$k\gamma = 2a\omega .$$

D'ailleurs on a l'expression de la vitesse aréolaire

$$A = \frac{1}{2}\,\overline{MF}^2 . \omega ;$$

de ces deux équations on déduit

$$k\gamma = \frac{4Aa}{\overline{MF}^2} ;$$

remplaçons k par sa valeur $\frac{b^2}{A}$

$$\gamma = \frac{4A^2a}{b^2\,\overline{MF}^2} ;$$

enfin remplaçons A par sa valeur (1), on a

$$\gamma = \frac{4\pi^2a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\overline{MF}^2} .$$

γ est donc *en raison inverse du carré de la distance.* En outre, d'après la troisième loi de Kepler, le coefficient $\frac{4\pi^2a^3}{T^2}$ *est le même pour toutes les planètes.*

On pourra aussi étudier le mouvement d'une planète sur son orbite et établir l'équation de Kepler. L'aire du secteur elliptique parcourue par le rayon vecteur s'évalue facilement, en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle.

Beaucoup d'autres problèmes susceptibles d'une solution simple se présentent en Astronomie. Ainsi l'étude des étoiles doubles conduit au problème de Géométrie suivant. Une ellipse inconnue a son foyer en un point donné A d'un plan P et se projette sur le plan P suivant une ellipse connue. Déterminer l'ellipse inconnue, en grandeur et en position.

J'ai envisagé l'Astronomie dans l'enseignement secondaire. Voyons maintenant le rôle joué par cette science dans l'enseignement supérieur.

Je ne m'étendrai pas beaucoup sur ce point. Les conditions de la licence mathématique ont en effet changé. Le grade de licencié comporte un certificat d'Astronomie. Il est à croire que depuis ces conditions nouvelles les études astronomiques sont moins sacrifiées qu'autrefois dans l'enseignement supérieur. Ignorant s'il en est réellement ainsi, je ne puis qu'être très bref.

Il est certain que de mon temps, vers 1886, on faisait bien peu d'Astronomie. L'année scolaire est, on le sait, divisée en deux semestres, dont le dernier, en dépit de son nom n'a que quatre mois. Pendant ces quatre mois, nous suivions deux fois la semaine un cours d'Astronomie.

Le Professeur, M. Ossian Bonnet, dont le nom est connu de tout mathématicien, faisait un cours très détaillé. Il traitait en premier lieu les questions préliminaires indispensables. Trigonométrie sphérique, développements en série, géométrie infinitésimale sur la sphère, réfraction atmosphérique par une méthode fort intéressante. Quand toutes ces questions étaient traitées et que l'on allait aborder l'Astronomie proprement dite, la fin de l'année arrivait.

J'ai donc fait sur cette science intéressante des études tout à fait incomplètes. Je me suis depuis efforcé de combler cette lacune dans mon esprit. J'ignore si actuellement l'étude de l'Astronomie dans les Facultés est moins délaissée qu'autrefois. Cette science, comme toutes les applications des mathématiques aux sciences naturelles présente pour le mathématicien un grand intérêt. Trop souvent en Analyse, surtout dans les parties les plus abstraites, les problèmes proposés sont très artificiels. Ils ont l'air d'être inventés tout exprès pour être résolubles, et le sont souvent en effet. Dans l'application des mathématiques aux phénomènes naturels, le problème est posé par la nature. Il ne s'agit pas de modifier l'énoncé de façon à avoir une solution simple. Si on le fait ce ne peut être que comme méthode pour parvenir aux cas naturels. C'est ainsi que dans le problème des trois corps on peut chercher les solutions périodiques.

Hermite, dans son cours, se plaisait à faire remarquer que les plus belles questions d'Analyse ont leur origine dans l'étude de la nature. La Série de Fourier, les polynomes de Legendre, les fonctions de Lamé, de Bessel, en sont des exemples frappants. C'est par l'étude du pendule que Greenhill aborde la théorie des fonctions elliptiques. Il y aurait donc profit pour l'étudiant, après avoir suivi un cours d'Analyse, où les choses seraient présentées d'une façon abstraite, nécessaire à la rigueur, à faire l'application de cette Analyse à des questions concrètes; et parmi celles-ci les questions d'Astronomie se présentent tout d'abord.

Je termine ici ce plaidoyer en faveur de l'Astronomie. J'ai voulu montrer combien cette science est négligée aux différents degrés de l'enseignement, et combien elle mérite peu de l'être.

J. Richard (Dijon).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — IV

Questions 4 et 5.

4. — Avez-vous conservé un souvenir précis de votre manière de travailler lorsque vous poursuiviez vos études, alors que le but était plutôt de s'assimiler les richesses d'autrui que de vous livrer à des recherches personnelles ? Avez-vous sur ce point quelques renseignements intéressants à fournir ?

5. — Une fois les études mathématiques usuelles (correspondant par exemple au programme de la licence mathématique ou de l'agrégation ou de deux licences) terminées, dans quel sens avez-vous cru devoir orienter vos études ? Avez-vous d'abord cherché à acquérir une instruction générale très étendue sur plusieurs points de la science avant de produire ou de publier quelque chose de sérieux ? Avez-vous au contraire cherché à approfondir d'abord un point particulier en n'étudiant à peu près que ce qui était indispensable dans ce but; et n'est-ce qu'ensuite que vous vous êtes étendu peu à peu ? Et si vous avez employé d'autres méthodes pouvez-vous les indiquer sommairement. Quelle est celle que vous préférez ?

Rép. I (France). — 4. Je travaillais au hasard des questions qui, tour à tour, m'attiraient; je n'ai jamais bien su un « Cours », n'ayant pu prendre sur moi de m'en assimiler les détails oiseux ou lourds, et si je n'ai jamais échoué à un examen, si jamais je n'ai fait ce qui s'appelle « en préparer un », jamais non plus je

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-393 ; n° 6, p. 472-478, 1905 ; 8e année, n° 1, p. 43-48, 1906.

n'en ai subi avec quelque éclat. Je conseille à la jeunesse de ne pas m'imiter, de bien s'assimiler les cours, à condition toutefois que programmes et professeurs veuillent bien les expurger *impitoyablement* de toutes choses inutiles, ce qui malheureusement n'est presque jamais le cas.

5. Je n'ai jamais choisi les questions qu'au hasard de mes goûts et de l'intérêt que ces questions m'ont successivement présenté. Je n'ai presque rien lû et *le regrette*. Je conseille aux autres de lire tant qu'ils pourront pendant leur jeunesse, mais en étant guidés de manière à éviter l'innombrable quantité d'écrits qui n'apprennent rien. Ch. Méray.

Rép. IV (Autriche). — 5. Je me suis efforcé à connaître le plus possible de branches mathématiques, afin d'éviter de donner à mes études un caractère unilatéral. Encore maintenant, une fois un travail personnel terminé, j'étudie pour changer un ouvrage sur un sujet qui m'est moins familier. Zindler.

Rép. V (Italie). — 4 et 5. Dès l'âge de 16 ans, lors de mon entrée dans les études universitaires, je pris l'habitude de lire et d'étudier dans toutes les directions, auteurs classiques et auteurs... de moindre valeur. Je voulais m'emparer *de tout* ce que l'on a fait en mathématiques! *En même temps* je voulais faire des recherches pour mon compte. (...)

Rép. VI (Allemagne). — 4. Je m'occupe de préférence de recherches personnelles. Lorsque je lis les travaux d'autres auteurs, je me borne souvent à lire les résultats et je cherche à les établir ensuite moi-même.

5. Je publiai déjà au 3^{me} semestre de mes études un mémoire de géométrie pure. Plus tard après avoir appronfondi mes études analytiques avec Weierstrass et Kronecker, je fus conduit uniquement par intérêt géométrique aux recherches de Riemann et de Lie et je pus me servir avec succès des moyens analytiques. (...)

Rép. IX (France). — 4. Je n'ai jamais eu de goût pour le métier d'écolier que j'ai très mal fait et que je ferais encore très mal. J'aime comprendre et creuser, je ne m'occupe pas d'apprendre. Quand je cesse de chercher, j'oublie.

5. Je n'ai employé de parti pris aucune méthode. J'ai seulement voulu élucider l'enseignement que j'ai reçu et avoir la réponse aux questions non résolues. J'ai travaillé, non pas pour savoir et me faire une carrière plus brillante, mais par simple curiosité. (...)

Rép. XIII (Angleterre). — 4. J'ai toujours été porté vers les recherches personnelles aussi bien pendant ma période d'étudiant qu'après. Quand on a trouvé quelque chose par soi-même dans une branche quelconque, on pénètre beaucoup mieux dans les travaux des autres. L'un des principaux attraits des mathématiques est de réaliser par ses efforts personnels les difficultés d'un sujet et ensuite de chercher de quelle manière on peut les vaincre. (...)

Rép. XVII (Allemagne). — 4. Déjà comme étudiant je discernais facilement les choses essentielles dans une étude difficile et je les condensais en un exposé rapide.

5. Je me suis d'abord dirigé du côté de recherches spéciales et ce n'est que plus tard que j'ai élargi le domaine de mes connaissances. (...)

Rép. XVIII (Italie). — 4. J'ai toujours lu, peu de livres, mais des bons. Je les étudiais complètement et je reviens souvent aux points qui sont restés obscurs.

5. L'un et l'autre, c'est-à-dire que tout en cherchant à acquérir une instruction générale, je fixai aussi mon intention sur des points particuliers qui m'attiraient davantage et au sujet desquels je me sentais capable de produire. (...)

Rép. XIX (Allemagne). — Lorsque j'étais étudiant je n'ai à mon regret, pas travaillé d'une manière systématique, comme cela serait désirable pour une culture rationnelle. Je n'ai jamais éprouvé beaucoup de plaisir à étudier des ouvrages d'une certaine étendue; une fois que je possédais les bases des branches spéciales; je cherchais à continuer par mes propres moyens. Il en résultat nécessairement des lacunes et des détours inévitables (...)

Rép. XXI (Allemagne). — 4 et 5. J'avais toujours des doutes sur ce que je lisais ou j'entendais, tant que je n'avais pas obtenus les résultats par une voie personnelle. Je considérais toujours d'abord des cas particuliers et afin de bien comprendre la véritable signification d'un théorème, et ce ne fut qu'ensuite que je cherchais la démonstration générale. Ludw. Boltzmann.

Rép. XXII (Etats-Unis). — 5. Après avoir acquis des connaissances générales en mathématiques, j'ai préféré entreprendre un sujet particulier et l'étudier à fond. E.-B. Escott.

Rép. XXIII (France). — 5. Une fois la licence prise en sortant de l'École polytechnique, j'ai commencé par travailler pour mon agrément, des problèmes d'Algèbre ou de Géométrie analytique surtout, avec une tendance continuelle à les généraliser. Je n'étudiais guère dans les livres que ce qui m'était nécessaire pour les résoudre. J'ai tâché ensuite de procéder à une revision générale des cours classiques d'Analyse et de Mécanique analytique. Plus tard, sous l'impulsion de Houël et de Bellavitis, je me suis adonné à une étude très attentive et approfondie de tout ce qui avait été fait sur les équipollences et les quaternions. Mais en résumé l'étude dans les livres m'a toujours été très pénible. Il me semble qu'en principe il vaut mieux chercher par soi-même, sauf à contrôler et compléter ses résultats par des lectures ultérieures. Pour cela cependant un premier bagage général est nécessaire.

C.-A. LAISANT.

Rép. XXVI (France). — 4. Je ne muris une question qu'en y réfléchissant en me promenant seul.

5. Après l'agrégation j'ai passé beaucoup de temps à étudier l'Hydrodynamique, sur laquelle je n'ai rien publié. J'ai abandonné cette étude parce que les fluides parfaits m'ont semblé trop loin de la réalité. Depuis j'ai étudié toutes espèces de choses; mais surtout la Géométrie. Lorsqu'il paraît un ouvrage semblant contenir des choses intéressantes et nouvelles, je l'achète, de sorte que mon genre d'étude dépend un peu de ce qui se fait ailleurs.

J. RICHARD.

Rép. XXVII (Hollande). — 4. J'ai toujours éprouvé le besoin de remanier un mémoire ou un livre selon mon goût personnel. Avant de m'attacher à l'étude d'une question, je lis par ci par là des chapitres isolés se rattachant à celle-ci.

5. Depuis ma promotion (1881) je me suis toujours d'abord orienté dans un domaine, puis j'ai cherché à produire du nouveau, ce qui m'a presque toujours réussi. Mais j'ai toujours ressenti la nécessité de changer assez souvent de sujet.

Jean DE VRIES.

Rép. XXX (Norvège[1]). — 4. Tout d'abord je parcours rapidement la matière pour me faire une idée d'ensemble; je l'étudie ensuite d'une façon plus ou moins complète suivant que j'en ai besoin ou non pour mes recherches personnelles.

5. Comme étudiant j'ai déjà publié quelques travaux; mais, les examens terminés, j'ai cherché à acquérir une instruction aussi étendue que possible dans toutes les branches mathématiques.

STÖRMER.

Rép. XXXII (Autriche). — 4. Ma coutume a toujours été d'interrompre les études par des recherches personnelles souvent de nature différente; aussi j'étais rarement fidèle à un sujet unique; il est probable que de ces variations dans les sujets provenaient quelques suggestions ou rafraichissements de l'esprit, mais je ne me souviens plus des détails.

LERCH.

Rép. XXXIII (France). — 4. Pour m'assimiler une théorie il me faut confronter plusieurs auteurs. Je rédige les parties les plus difficiles lorsque je les ai comprises et que j'ai refait les calculs.

5. Grand danger de ne pas lire — au moins il faut *parcourir* pour voir où l'on en est. De plus en plus grand danger *d'écrire trop*, à moins d'être Abel ou Galois.

R. D'ADHÉMAR.

[1] C'est par erreur que dans le n° de Janvier 1906, page 45, la Rép. XXX porte l'indication « Suède ».

Rép. XXXV (France). — 4. Je cherchais — et je cherche toujours — à bien saisir des idées directrices et à condenser les résultats.

5. J'ai d'abord cherché à acquérir une connaissance plus approfondie de l'Analyse générale. (...)

Rép. XXXVI (Suisse). — 4. J'ai toujours eu beaucoup de plaisir à suivre mon propre chemin et à démontrer d'une manière différente ce que je trouvais chez d'autres.

Je m'efforçais toujours à m'intéresser à l'ensemble d'une branche mathématique avant d'approfondir l'un de ses points particuliers. Je n'ai jamais eu de goût pour la spécialisation étroite bien que j'en reconnaisse l'utilité. Chr. BEYEL.

Rép. XXXVII (France). — 5. Si l'on désire faire avancer la science sur une branche particulière, il vaut mieux étudier à fond et bien s'assimiler un très petit nombre de mémoires, que de vouloir connaître tout ce qui a été publié sur cette branche, ce qui souvent exigerait un temps très long. Quand ces études ont suggéré quelque idée, on peut chercher s'il y a des travaux faits dans le même sens, par des analyses de mémoires, et étudier ceux qui paraissent se rapporter aux études dont le sujet sera de plus en plus restreint. E. FABRY.

Rép. XXXIX (Grèce). — 4. Comme étudiant je n'avais pas un plan déterminé pour mes heures de travail. Quand à la manière de travailler, j'ai trouvé que j'apprenais bien mieux en cherchant à expliquer le sujet à un autre étudiant en mathématiques. Je ne lisais pas *très* longtemps mais bien par intervalles assez courts.

5. La méthode que je préfère est celle-ci : apprendre d'abord l'indispensable de chaque branche de la science, afin d'en acquérir une idée générale assez nette, mais sans me perdre dans le monde des détails ; commencer ensuite l'étude des questions spéciales. Rien ne stimule l'émulation et le zèle pour le travail que la satisfaction de se voir soi-même capable de trouver de nouvelles vérités. N. HATZIDAKIS.

Rép. XLI (Ecosse). — 5. J'ai fait mes études absolument seul, mon principal objet étant l'Astronomie. J'ai étudié au fur et à mesure ce dont j'avais directement besoin pour comprendre les ouvrages de Tisserand, Hansen, Hill, etc. Lorsque j'essayai d'apprendre des sujets qui ne m'étaient pas nécessaires, je les oubliais facilement. (...)

Rép. XLII (Italie). — 5. J'ai dû d'abord recommencer mes études, puis, à l'occasion, je m'arrêtais à un cas particulier dont j'étudiais d'abord toute la bibliographie, puis je poursuivais mes recherches sans plus m'occuper des autres. AMODEO.

Rép. XLIII (France). — 4 et 5. J'ai lu a fond : 1° à l'Ecole polytechnique, plusieurs traités d'Analyse et divers ouvrages ;

j'y refis en quaternions les applications géométriques du cours de Bertrand ; je crois que tout cela était en partie inutile ; 2° après, sur le conseil de M. Jordan, je lus l'*Algèbre supérieure* de Serret, la *Zahlentheorie* de Dirichlet-Dedekind, la *Kreistheilung* de Bachmann, du Gauss probablement, le *Traité des substitutions* de M. Jordan et ses travaux sur les substitutions, des choses variées d'une part; d'autre part, à l'Ecole des Ponts et Chaussées, divers articles ou livres se rapportant à mes cours d'Hydraulique et de Résistance des matériaux ; je commençais l'étude de l'*Essai* sur la théorie des eaux courantes de M. Boussinesq. Je prenais toujours des notes manuscrites assez complètes, quand les livres ne m'appartenaient pas (ceci me faisait en même temps faire des calculs) pour le cas où je ne pourrais plus tard avoir à ma disposition une bibliothèque. Ainsi j'ai fait une traduction manuscrite de la *Zahlentheorie* de Dirichlet-Dedekind, traduction que j'ai failli publier.

Après, j'ai cherché immédiatement à me mettre au courant complètement de la théorie des substitutions, et j'ai préparé ma thèse de doctorat à Montauban, où j'étais ingénieur des Ponts et Chaussées, pensant que c'était la première chose à faire ; ma thèse me fit mettre au courant de l'Hydrodynamique de Kirchoff. J'ai habité ensuite Toulouse, ville de Faculté des Sciences ; je pus me mettre au courant de la théorie des nombres. J'avais autrefois, en spéciales, essayé une démonstration de $x^3 + y^3 \neq z^3$, à la suite de lectures de Mémoires de l'*Association française pour l'Avancement des Sciences*, dont mon père était membre. Mais, ce qui m'y fit revenir, ce fut une question de mon chef de bureau à Montauban sur $x^m + y^m \neq z^m$, qui se trouve au pied de la statue de Fermat, à Beaumont de Lomagne, près Montauban, où il est né. J'ai lu, par exemple, tout Kummer, la théorie des nombres de Legendre, ce qu'a fait Cauchy, du Liouville, etc., en passant à l'occasion, bien entendu. J'attaquai également les *Transformationsgruppen* de Lie et d'autres choses. Enfin plus tard, je me suis étendu de côté et d'autres, en particulier dans la théorie des fonctions.

J'ai fait ma licence ès sciences mathémathiques en novembre, à ma sortie de l'Ecole polytechnique, mon doctorat ès sciences six ans après. Ed. MAILLET.

Rép. XLV (France). — 4. Il m'a toujours été très pénible d'apprendre ; je préférais chercher moi-même et trouver à ma manière la solution des questions exposées dans les cours.

5. Je ne suis pas érudit. Je préfère étudier des questions neuves plutôt que d'étendre mon érudition. R. DE MONTESSUS.

Rép. XLVI (Espagne). — 4. Mes études universitaires une fois terminées, j'écrivis dans un gros volume toutes mes pensées sur l'enchaînement des idées mathématiques, la comparaison des diverses méthodes d'exposition des auteurs que je connaissais, la formation des concepts mathématiques au point de vue de la logique et en cherchant la genèse des idées.

5. Au lieu d'approfondir des points particuliers, j'ai cherché à obtenir le moyen d'acquérir de la variété dans les connaissances avec l'idée que leur enchaînement produit souvent la connaissance d'autres vérités. J'ai suivi l'idée de Dalembert : *Avancez et la foi vous viendra* ; conquérir les hauteurs et après approfondir et vaincre des difficultés. Z. G. de GALDEANO.

Rép. XLVIII (Hollande). — 4 et 5. J'ai commencé par des études dans les travaux des autres. Le goût des recherches personnelles s'est développé par l'étude et j'ai toujours combiné des recherches personnelles avec l'étude. CARDINAAL.

Rép. XLIX (France). — Une fois la période d'examens et concours terminée, je me suis naturellement laissé entraîner vers les questions qui me plaisaient, en étudiant tout ce qui pouvait s'y rapporter. Cela a toujours été la tradition et la méthode de travail des Normaliens, et une fois sortis de l'Ecole, entre camarades devenus collègues d'un même lycée, nous continuions à nous « pousser des colles »; deux ou trois d'entre elles ont été certainement le point de départ de mes travaux personnels sur le sujet spécial de la Géométrie non-euclidienne, travaux souvent laissés de côté, souvent repris, mais jamais perdus de vue. P. BARBARIN.

Rép. L (Etats-Unis). — 4. Je m'efforçais de lire avec suite en ayant recours, pour les sujets particuliers, aux meilleures autorités.

5. J'ai cherché à acquérir des connaissances aussi étendues que possible avant de publier ; plus d'une fois cela m'a empêché de publier. Mon enseignement m'a souvent suggéré d'intéressantes idées. E.-W. DAVIS.

Rép. LVII (Etats-Unis). — 4. J'ai suivi les études des autres plutôt que de m'engager dans des recherches personnelles, et cela à mon grand regret. Je conseillerais aux étudiants de s'initier de bonne heure aux recherches. Edw. P. THOMPSON.

Rép. LVIII (Italie). — 4. Quand j'étudie je préfère approfondir pour mon compte la question que je traite et même, lorsque je sais qu'un autre a déjà traité le même sujet ou un sujet analogue, je préfère toujours y arriver par mes seules forces et par une méthode personnelle et comparer ensuite mes résultats sur ceux qu'un autre peut avoir trouvé.

Quand je prends connaissance des travaux d'autrui je ne m'arrête presque jamais aux détails, mais je commence presque toujours par les conclusions que je cherche à retrouver pour mon propre compte d'une autre façon. C'est là une méthode que je recommande à tous mes élèves, mais je m'aperçois qu'ils ne sont pas tous capables de la suivre.

5. — Une fois mes études générales de mathématiques pures achevées (études vers lesquelles je me suis senti attiré par la magistrale influence du professeur Guis. Battaglini de l'Université de Naples) je portai tout de suite mon attention sur des sujets particuliers (th. de formes algébriques, th. de fonctions abéliennes, etc) et je cherchai à faire des travaux sur ces questions.

Il me semble que lorsqu'on a étudié pendant plusieurs années des sujets nombreux et variés, on doit éprouver le besoin de s'arrêter, ne serait-ce que pour peu de temps, dans un domaine spécial. Si l'on attend pour produire quelque chose qu'on se soit formé une culture plus étendue, cela revient, la plupart du temps, à poursuivre un but qui s'éloigne toujours davantage et qui s'agrandit en s'éloignant. On reste accablé et le sceptiscisme qui en résulte parfois fait considérer comme inutiles les efforts qui, dans l'enthousiasme des premières années, pouvaient paraître intéressants. J'ai vu presque toujours que les jeunes gens qui ne produisent pas tout de suite en se laissant tromper à la chimère d'une culture très étendue (et cette chimère, chose curieuse à dire est quelquefois l'effet de la paresse) ne produisent jamais ou produisent très péniblement. Ern. PASCAL.

Rép. LXVI (Etats-Unis). — 5. J'ai d'abord cherché à obtenir un coup d'œil d'ensemble des mathématiques, y compris la Mécanique et la Philosophie. V. SNYDER.

Rép. LXVIII (Etats-Unis). — 5. J'ai spécialisé immédiatement L. CONANT.

Rép. LXIX (Italie). — Mes études terminées (par le doctorat) je sentis la nécessité de compléter ma culture générale. Les cours de nos universités roulent souvent sur des sujets très particuliers, il n'y a pas de programme déterminé, aussi omet-on souvent d'enseigner d'abord les notions indispensables aux étudiants. C'est uniquement par un besoin de mon esprit que je fais des recherches mathématiques et non dans l'idée d'être utile à la science ou de publier des travaux. (...)

Rép. LXX (Etats-Unis). — 5. Sauf un petit travail sur la théorie des groupes, j'avais surtout en vue l'élargissement de mes connaissances. John. W. YOUNG.

Rép. LXXI (Etats-Unis). — 5. Je n'ai pas cherché à étendre beaucoup mes connaissances, mais je me suis efforcé à spécialiser petit à petit. (...)

Rép. LXXII (Etats-Unis). — 4. Pour bien comprendre un sujet il faut que je développe la théorie par moi-même, en suivant la méthode d'un traité ou d'un article que j'ai lu plutôt hâtivement, à titre de préparation.

5. Je crois qu'il est bon de commencer les travaux originaux de bonne heure (même en s'exerçant sur des sujets qui ne sont pas

nouveaux ou sans grande importance) tout en développant peu à peu ses connaissances générales. (...)

Rép. LXXV (France). — 4. Je pensais ; je prenais une idée ; je la suivais, en me promenant; tout en obéissant aux multiples et matérielles obligations de la vie, je la murissais et quand j'avais aperçu quelque chose pouvant donner lieu à l'exploitation de l'idée, je me mettais à la planche, la craie en main. Les longues insomnies du soir m'ont été souvent profitables; mais, je dois ajouter que le sommeil a parfois détruit d'une façon absolue ce que je croyais avoir créé le soir; je veux dire que je n'ai pas toujours retrouvé le lendemain la pensée du soir.

5. A l'exception de la surface de Steiner que j'avais étudié à fond parce que j'avais l'idée d'en faire le sujet d'une thèse de doctorat, je n'ai jamais cru utile de faire des études *a priori* sur un sujet adopté. Je crois qu'il est préférable de chercher une voie, et une fois engagé, de se documenter pour savoir si l'on a mis la main sur une idée originale et susceptible d'être poursuivie avec les éléments nouveaux obtenus. G. de LONGCHAMPS.

Rép. LXXVII (Etats-Unis). — 4. J'ai toujours préféré résoudre autant que possible chaque question par moi-même.

5. Mes connaissances mathématiques se sont beaucoup développées par suite des exigences des problèmes dont je m'occupais. MOULTON.

Rép. LXXVIII (Italie). — 4. L'étude et la lecture des livres et des périodiques me causent une grande fatigue. Je lis donc très peu, je réfléchis beaucoup et il m'arrive assez souvent d'écrire. Si je n'avais pas la satisfaction de voir mes écrits publiés, je n'écrirais rien.

5. Je confonds facilement au bout de peu de temps ce que j'ai écris avec ce que j'apprends chez les autres, pourvu, bien entendu, qu'il ne s'agisse pas de théorèmes fondamentaux et de résultats absolument nouveaux. Si l'on me posait des questions sur les recherches que j'ai publiées, je devrais d'abord me préparer comme pour une chose étudiée depuis longtemps. (...)

Rép. LXXXI (Hollande). — 5. L'idée d'une question me vient à la promenade, ou en lisant un livre ou un mémoire mathématique ou technique, ou encore dans une lecture littéraire. Quelquefois je m'efforce de la développer immédiatement, mais le plus souvent je la garde en mémoire et j'y pense de temps à autre. Je développe les grands contours en promenade ou en voyage ; souvent des années se passent avant que je mette un seul mot sur le papier, Quelquefois j'ai écrit un mémoire dans un délai de quelques mois, les derniers de l'année. F. J VAES.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE.

Règle mnémonique pour retenir les analogies de Delambre.

(Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE).

« ... En interrogeant les élèves sur l'Astronomie, je me suis aperçu de la difficulté qu'ils ont, en général, à écrire de mémoire au tableau les analogies de Delambre dont le secours est indispensable pour la résolution logarithmique des triangles sphériques. J'ai été ainsi amené à leur proposer la règle suivante :

Les analogies de Delambre rentrent toutes dans la forme

$$f\left(\frac{A}{2}\right)\varphi\left(\frac{b \pm c}{2}\right) = \varphi\left(\frac{a}{2}\right)\psi\left(\frac{B \pm C}{2}\right)$$

où f, φ, ψ sont des *sin* et *cos*. En outre :

1° f et ψ sont toujours différents ;

2° on a, sous φ, le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que f est *sin* ou *cos* ;

3° on a, sous ψ le même signe que sous φ, ou non, suivant que ψ est le même que φ, ou non.

Cela permet d'écrire sans hésitation :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}.\text{»}$$

Remarque. — La très intéressante observation de M. D'OCAGNE peut se résumer symboliquement, d'une façon encore plus concise.

Si on assimile, dans chacun des membres, les signes sin et $+$, cos et $-$, $+$ et $+$, $-$ et $-$, chaque relation est caractérisée, dans le premier membre, par trois signes α, β, γ et dans le second par α', β', γ'.

On a toujours $\gamma = \alpha$, c'est-à-dire que le symbole du premier membre est $\alpha\beta\alpha$; et dès lors, celui du second $(\alpha'\beta'\gamma')$ est $\beta - \alpha - \beta$.

Si on écrit trois fois α, β et si on change le signe du dernier groupe

$$\alpha\beta \quad \alpha\beta \quad -\alpha-\beta,$$

il suffit de diviser cette suite en deux moitiés

$$(\alpha\,\beta\,\alpha) \quad (\beta - \alpha - \beta)$$

pour obtenir les deux symboles caractérisant l'une quelconque des quatre relations. C.-A. L.

Un théorème sur la Géométrie moderne.

Voici un théorème de Géométrie moderne qui, je crois, est nouveau.

Théorème. — Etant donnés deux triangles perspectifs ABC et A′B′C′, tels que les sommets A′, B′, C′ soient situés un à un sur les côtés du triangle ABC, on a

$$\frac{\mathrm{BX.CY.AZ}}{\mathrm{CX.AY.BZ}} \cdot \frac{\mathrm{B'X'.\ C'Y'.\ A'Z'}}{\mathrm{C'X'.\ A'Y'.\ B'Z'}} = 1,$$

X, X′ étant les points d'intersection avec BC et B′C′ d'une droite passant par A.
Y, Y′ » » » » CA et C′A′ » » B,
Z, Z′ » » » » AB et A′B′ » » C.

Démonstration. — Soit D le point d'intersection des droites AX et BB′. Si l'on considère AX comme transversale par rapport aux triangles BB′C, C′BB′, on a

$$1 = \frac{\mathrm{BX.CA.B'D}}{\mathrm{CX.B'A.BD}}, \qquad 1 = \frac{\mathrm{BD.B'X.C'A}}{\mathrm{B'D.C'X.BA}},$$

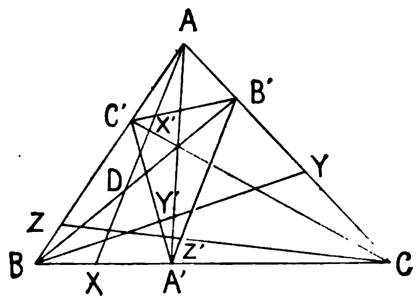
d'où l'on déduit

$$(\alpha) \qquad 1 = -\frac{\mathrm{AC'.CA.BX.B'X'}}{\mathrm{AB'.AB.CX.C'X'}}.$$

On a de la même manière

$$(\beta) \qquad 1 = -\frac{\mathrm{BA'.AB.CY.C'Y'}}{\mathrm{BC'.BC.AY.A'Y'}},$$

$$(\gamma) \qquad 1 = -\frac{\mathrm{CB'.BC.AZ.A'Z'}}{\mathrm{CA'.CA.BZ.B'Z'}}.$$



En multipliant membre à membre on obtient

$$1 = -\frac{AC'.BA'.CB'}{BC'.CA'.AB'} \cdot \frac{CA.AB.BC}{AB.BC.CA} \cdot \frac{BX.CY.AZ}{CX.AY.BZ} \cdot \frac{BX'.CY'.A'Z'}{C'X'.A'Y'.B'Z'}$$

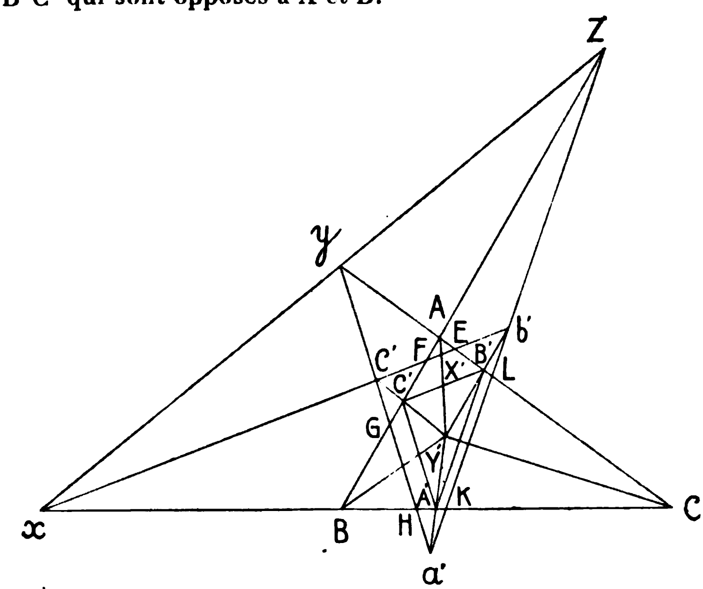
$$= (-1)(-1)(+1)\frac{BX.CY.AZ}{CX.AY.BZ} \cdot \frac{B'X'.C'Y'.A'Z'}{C'X'.A'Y'.B'Z'}$$

$$= \frac{BX.CY.AZ}{CX.AY.BZ} \cdot \frac{B'X'.C'Y'.A'Z'}{C'X'.A'Y'.B'Z'}.$$

Corollaires. — I. Quand AX, BY, CZ sont des droites concourantes, il en est de même de A'X', B'Y', C'Z', et inversement.

II. Quand X, Y, Z sont collinéaires, X', Y', Z' le sont aussi, et inversement.

III. Le triangle ABC et un autre triangle $a'b'c'$ homothétique à A'B'C' sont perspectifs ; inversement le triangle A'B'C' et un autre triangle abc homothétique à ABC sont perspectifs. Dans les deux cas le centre d'homothétie est le point d'intersection de AX' avec BY', X' et Y' étant les points milieux des côtés du triangle A'B'C' qui sont opposés à A et B.



En effet, soient x, y, z les points d'intersection des côtés correspondants des deux triangles $a'b'c'$ et A'B'C', on a

$$b'E = c'F, \quad c'G = a'H, \quad a'K = b'L,$$

E, F étant les points d'intersection de $b'c'$ avec CA et AB ; de même pour G et H, K et L.

Si nous envisageons les côtés du triangle ABC comme transversales du triangle $a'b'c'$, nous pouvons écrire

$$\frac{b'x}{c'x} = \frac{b'K.c'H}{a'K.c'H}, \quad \frac{c'y}{a'y} = \frac{c'E.b'L}{b'E.a'L} = \frac{c'E.a'K}{b'E.b'K},$$

$$\frac{a'z}{b'z} = \frac{a'G.c'F}{c'a.b'F} = \frac{c'H.b'E}{a'H.c'E}.$$

Ces relations donnent

$$\frac{b'x.c'y.a'z}{c'x.a'y.a'z} = 1,$$

d'où il résulte que les points x, y, z sont collinéaires.

On démontrerait de la même manière la seconde partie du corollaire.

Y. Sawayama (Tokio).

A propos de la rotation de la Terre[1].

Lettre de M. G. Combebiac (Bourges).

Dans cette question j'en discerne deux à traiter successivement et dont la première est celle-ci : la rotation constitue-t-elle, pour les corps, une qualité objective ?

Si le doute est permis lorsqu'on se cantonne dans le domaine cinématique, on peut, semble-t-il, affirmer que l'état dynamique d'un corps permet de définir la rotation dont il peut être animé (direction de l'axe et intensité). Donc, dans notre conception actuelle de la dynamique, la rotation absolue constitue bien une qualité objective des corps ; en d'autres termes, nos conceptions dynamiques comportent, bon gré mal gré, la notion de ce qu'on a appelé l'espace absolu. Aussi le relativiste dont M. Andrault nous a communiqué les très intéressantes réflexions ne manque-t-il pas de nous affirmer que « la rotation de la terre est à l'origine de notre dynamique ». Il faut reconnaître que l'argument vise bien le cœur de la question ; seulement il ne cadre pas avec les faits, car, s'il ne parait pas impossible de soutenir que la dynamique est d'origine exclusivement terrestre (en Astronomie, on observe des mouvements et non pas des forces), ses lois sont en revanche d'une nature telle qu'elles excluent toute dépendance avec la rotation de la terre et avec celle d'un système quelconque de repères. Il est en effet facile de se rendre compte que, si l'on n'avait observé que des mouvements relatifs, l'intervention de la force

[1] Voir l'*Enseignement Mathématique* du 15 mars, 1904, p. 150-155.

centrifuge et, le cas échéant, de celle de Coriolis aurait conduit, non pas à admettre des lois différentes pour la dynamique, mais bien à introduire des forces d'une nature inconnue et dont la science continuerait à rechercher l'explication, comme c'est encore le cas pour la gravité universelle. Bref, il n'est pas possible d'attribuer une signification sensée à cette proposition : les lois dynamiques sont relatives à un système de référence déterminé.

Bien loin que des explications différentes soient admissibles pour un même phénomène, ce qui est au contraire surprenant, c'est l'existence, pour tout phénomène, d'une explication, en égard aux conditions que l'esprit exige de celle-ci ; la croyance à cette existence (la foi en la raison) ne sera pleinement justifiée que lorsqu'elle aura, elle aussi, trouvé son explication. Seule d'ailleurs, la science peut donner satisfaction à cet égard, au risque d'augmenter son domaine aux dépens de celui que prétend se réserver sa rivale, la métaphysique.

Au surplus, les partisans de la relativité scientifique disposent d'un moyen d'éclairer leur lanterne, c'est de se donner la peine, ainsi que les y invite fort judicieusement M. Stuyvaert, d'illustrer leur théorie par un exemple concret en édifiant, à côté de l'explication *la plus commode* d'un fait déterminé (pleinement élucidé), une autre explication choisie parmi celles moins commodes et prétendues aussi exactes dont on nous a jusqu'à présent entretenus sans nous les montrer. Mais ils s'apercevront alors que ces explications présentent, en plus de leur incommodité, un autre défaut, celui de n'être pas des explications.

Un mot encore : toute question ayant une signification précise relève nécessairement de la science, tout autre question doit disparaitre ; que reste-t-il alors dans le champ de la métaphysique ?

Note additive : J'ajouterai, pour préciser ma pensée, que même en n'observant que des mouvements relatifs, on est conduit à la notion du mouvement absolu. C'est l'idée que j'examinerai dans une courte note sur la loi de l'inertie.

Lettre de M. Andrault (Grenoble).

1. La Relativité des forces centrifuges. — A l'encontre de certains pseudo- absolutistes, M. Combebiac peut parler des relativistes en général, comme s'il ne l'était pas. Son affirmation, « qu'il « n'est pas possible d'attribuer une signification sensée à cette « proposition : les lois dynamiques sont relatives à un système de « référence déterminé » le classe sans ambiguité.

A la lettre, il se fonde, pour la justifier sur ce que nous aurions observé autre chose que des mouvements relatifs. Je lui demanderais où ? quand ? comment ? si je ne supposais que la plume, en cet endroit, a dépassé sa pensée et qu'il ne faille lire « Si les mou-« vements, que nous avons observés, n'étaient que relatifs l'inter-« vention des forces centrifuges aurait conduit, etc. » Je crois donc être interprète fidèle, en disant que c'est l'existence des forces centrifuges qui l'amène à penser que la rotation est dans les corps, et par suite, que les principes ne se rapportent à aucun repère déterminé, mais à un espace absolu devenu nécessaire.

En est-il ainsi ? toute la question est alors de savoir si les forces centrifuges ne dépendent que du corps auquel nous les attribuons. Consultons l'expérience à ce sujet :

Lorsqu'un corps tourne relativement à certains repères, il est soumis à l'action de forces dites forces centrifuges ; voilà ce qu'elle nous apprend. Mais *cela n'est pas vrai pour tous les repères.*

Quand donc on énonce la loi exprimant sous quelles conditions naissent et grandissent les forces centrifuges, on ne peut sans la fausser faire abstraction des repères. Et l'on ne peut pas davantage les omettre dans un raisonnement sans en altérer la portée. C'est ce que mon honorable contradicteur me paraît avoir méconnu : *Les forces centrifuges sont relatives comme le sont les mouvements.* Je n'ajoute pas « comme le sont toutes nos connaissances » parce que cela n'est pas dans la question. Mais si toutes nos affirmations sont de même nature, je ne vois pas de plus bel exemple à invoquer, pour établir qu'elles sont toutes relatives, que celui du mouvement en général, des rotations en particulier. Et alors, *si expliquer un phénomène, c'est en pénétrer l'essence et la réalité absolue, nous n'expliquons rien.* M. Combebiac, qu'est-ce qu'une explication ? La théorie suivante qui n'a pas été imaginée à votre intention est-elle une explication ?

2. Théorie fallacieuse des marées : La terre satellite de la lune. Certains partisans du mouvement absolu s'égayent aux dépens des relativistes en leur faisant dire des sottises, par exemple que la terre ne tourne pas. A ceux-là je dédie ce court monologue.

« Bien des personnes éprouvent des difficultés singulières à « comprendre la théorie des marées. C'est qu'elles ne peuvent se « défaire de cette ancienne croyance que la lune tourne autour de « la terre. Il est bien clair en effet, que si la terre était immobile, « la lune en attirant les eaux de l'Océan les soulèverait de son côté, « et de celui-là seulement. Admettre que tout en les attirant, elle « les soulève du côté opposé, c'est ce qui paraît à chacun d'une « absurdité palpable. Mais qu'au contraire, on considère que c'est « la terre qui circule autour de la lune : Dans cette chute inces-« sante, les eaux tournées vers la lune, plus fortement attirées que « le reste, prennent une avance et font saillie de ce côté : les eaux « opposées, moins fortement attirées, restent en arrière et font « une bosse de l'autre côté. La double haute mer journalière s'ex-« plique sans difficulté. »

« De nos deux hypothèses, la première est donc à rejeter : Ce « n'est pas la lune qui est satellite de la terre, mais la terre satel- « lite de la lune. »

Raisonnement sophistique dira-t-on ? Peut-être, mais pas plus que beaucoup d'autres ayant cours, qui doivent aussi leur apparente validité, à cette illusion que se mouvoir est une locution ayant une signification par elle-même ; raisonnement qui, et tout cas, n'est trompeur que dans une conception absolutiste, puisqu'il suppose distinctes, les deux hypothèses mises en jeu.

CHRONIQUE

G. Oltramare.

L'Enseignement mathématique doit un hommage particulier à la mémoire de l'un de ses membres du Comité de Patronage, M. G. Oltramare, décédé à Genève, le 10 avril dernier, dans sa quatre-vingt-dixième année. Professeur honoraire de l'Université de Genève et doyen des mathématiciens suisses, M. Oltramare avait, en effet, été l'un des premiers, à accepter à faire partie de ce Comité, et, depuis, avait constamment témoigné son intérêt à ce journal.

Nous consacrerons prochainement une Notice à sa vie et à ses travaux.

La Rédaction.

Comité de Patronage de « l'Enseignement mathématique. »

M. G. Oltramare a été remplacé dans le Comité de Patronage par M. le professeur J. Franel, Directeur de l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich. L'appui que nous apporte le savant professeur nous sera très précieux, et nous le remercions bien sincèrement d'avoir bien voulu nous honorer de son acceptation.

La Rédaction.

Les Mathématiques au 44e Congrès des Sociétés Savantes de Paris et des Départements, Paris, avril 1906.

Résumé des Communications faites à la sous-Section des Mathématiques, dans la séance du mercredi matin 18 avril, sous la présidence de MM. P. Appell, *Doyen de la Faculté des Sciences de Paris, Membre de l'Institut et* G. Darboux, *Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.*

M. Fassbinder, professeur à Paris. — *Sur l'existence de certaines intégrales de l'équation $\Delta u + c(x, y)u = 0$ et d'autres équations d'ordre supérieur.*

1. — M. Emile Picard a depuis longtemps établi l'existence d'intégrales de l'équation ci-dessus ayant la forme

$$u = \frac{P(x,y)}{x^2 + y^2} + Q(x,y) \log (x^2 + y^2) \ ,$$

P et Q désignant deux fonctions holomorphes de x et de y.

Plus généralement, cette même équation admet des intégrales de la forme

$$u = \frac{P(x,y)}{(x^2 + y^2)^n} + Q(x,y) \log (x^2 + y^2) \ ,$$

dépendant de $2n + 1$ constantes arbitraires.

Pour le montrer, utilisons le changement de variables

$$x + iy = \xi \ , \qquad x - iy = \eta \ ,$$

déjà employé par M. Hedrick. Il ramène l'équation et l'intégrale aux formes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cu = 0 \ ,$$

$$u = \frac{G_0}{(xy)^n} + G \log xy \ .$$

La substitution donne les équations

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + cG = 0 \ ,$$

$$(0) \qquad n\left(nG_0 - \Sigma x \frac{\partial G_0}{\partial x}\right) + xy\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y} + cG_0\right) + (xy)^n \Sigma x \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \ .$$

En exprimant que le premier terme de l'équation (0) est divisible par xy, on trouve, p_0 et q_0 étant deux constantes arbitraires,

$$G_0 = p_0 x^n + q_0 y^n + xyG_1$$

et l'équation (o) devient

$$(1)\qquad (n-1)\left[(n-1)G_1 - \Sigma x\,\frac{\partial G_1}{\partial x}\right] + c(p_0 x^n + q_0 y^n) + xy\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x\,\partial y} + cG_1\right) + (xy)^{n-1}\,\Sigma x\,\frac{\partial G}{\partial x} = 0\ .$$

On raisonne sur cette équation comme sur l'équation (o), et ainsi de suite.

Finalement on trouve une intégrale de la forme

$$u = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} (xy)^k [x^{n-k} P_k(x) + y^{n-k} Q_k(y)]}{(xy)^n} + G \log xy\ ,$$

P_k et Q_k contenant chacune une constante arbitraire, ainsi que G. Il suffit de revenir aux variables réelles.

2. — La même méthode permet d'établir, pour l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + cu = 0$$

l'existence d'intégrales ayant la forme

$$u = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} (xyz)^k [(yz)^{n-k} P_k(y,z) + (zx)^{n-k} Q_k(z,x) + (xy)^{n-k} R_k(x,y)]}{(xyz)^n} + G \log xyz,$$

où entrent $3n + 3$ fonctions arbitraires et une constante également arbitraire.

3. — Enfin, pour l'équation tout à fait générale

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots\ldots \partial x_m} + cu = 0\ ,$$

c étant une fonction holomorphe des m variables $x_1, x_2, \ldots x_m$, on établira de même l'existence d'intégrales de la forme

$$u = \frac{G_0(x_1, x_2, \ldots x_m)}{(x_1 x_2 \ldots x_m)^n} + G(x_1, x_2, \ldots x_m) \log x_1 x_2 \ldots x_m\ ,$$

n étant égal à 0 ou à 1. Mais il est à prévoir qu'il peut être quelconque.

M. Marque, Professeur au lycée de Tulle. — L'Auteur expose les résultats principaux d'un Mémoire *sur la théorie du mouvement d'un véhicule automoteur muni du différentiel de Pecqueur,* *et sur les inconvénients qui résultent de l'emploi de cet organe.* Il indique le principe d'un autre dispositif, très avantageux surtout pour le transport des poids lourds et des vitesses moyennes. Ce dispositif, fondé sur l'emploi de courroies et de cônes lisses, présenterait les avantages du différentiel sans en avoir les inconvénients, et se prêterait aisément en outre aux changements de vitesse. (*Journal officiel* du 10 avril 1906.)

M. E. LEBON, Professeur au lycée Charlemagne. — *Sur la construction d'une Table de caractéristiques relatives à la base de 30030 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à 901800900.* (Réponse à la première question du Programme du Congrès : *Méthodes permettant de reconnaître si un très grand nombre est premier).*

Cette Table occuperait une surface environ 10 fois plus petite que celle qu'occuperait l'ensemble des tables qui existent et de celles que l'on construisait jusqu'à 901800900, en adoptant la disposition des Tables de Burckhardt, de Dase, de Rosenberg et de Glaisher. Elle permettrait de reconnaître rapidement si un nombre est premier ou composé, et, avec une table de restes, de résoudre instantanément ce problème [1]. (*Journal officiel* du 10 avril 1906).

E. LEBON (Paris).

La 9me réunion des maîtres des écoles moyennes austro-allemandes ; Vienne, 9-11 avril, 1906.

A trois ans d'intervalle les professeurs des écoles moyennes de l'Autriche viennent de se réunir de nouveau, à Vienne, en une série de séances plénières et de séances de sections. Nous conformant au but de cette *Revue*, nous nous bornerons à rendre compte ici de la séance de la section des mathématiques.

Après quelques mots d'ouverture de M. H. JANUSCHKE, Directeur d'Ecole réale et membre du comité d'organisation, l'assemblée a composé son comité comme suit : MM. Aloïs HÖFLER, Professeur à l'Université de Prague, président ; Fr. SCHIFFNER, Directeur d'Ecole réale (Vienne), vice-président ; Prof. K. FROSTL (Vienne) et Prof. L. TESAR (Olmütz), secrétaires. L'ordre du jour comprenait trois conférences qui ont réunis de nombreux auditeurs.

[1] La théorie générale des Tables analogues à celle dont M. E. LEBON propose la construction dans son Mémoire se trouve dans un Manuscrit qu'il a envoyé le 3 juillet 1905 aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris ; cette théorie, les propriétés, non encore signalées des progressions arithmétiques employées et permettant de simplifier le calcul des caractéristiques, des exemples de ce calcul, sont exposés dans les Comptes Rendus de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne (1905 et 1906), de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences (1905), de l'Académie Royale des Lincei (1906). Le présent Mémoire sera publié *in-extenso* dans le « Bulletin de la Société Philomathique de Paris ». — H. F.

Les deux premières étaient consacrées à une question qui est actuellement à l'ordre du jour dans divers pays. Il s'agit de *l'introduction du calcul infinitésimal dans les écoles moyennes* [1].

M. le D[r] ZAHRADNICEK expose la question dans son ensemble; M. le Prof. A. HÖFLER examine ensuite les propositions faites dans le même sens par le société « Deutsche Mittelschule » à Prague. Ces deux conférences donnent lieu à une intéressante discussion à laquelle prennent part MM. D[r] Ignaz WALLENTIN, Prof. Ant. NEUMANN, Prof. Ludw VOLDERAUER, Prof. A. HÖFLER, Prof. Ed. SCHUSCIK; elle se termine par l'adoption, à l'unanimité, des deux propositions suivantes qui résultent d'une fusion des propositions à peu près analogues formulées par les deux conférenciers:

« I : Il est désirable que l'on applique à nos établissements la « réforme préconisée et adoptée par les savants et pédagogues de « l'empire allemand et par les sociétés autrichiennes de l'ensei- « gnement moyen, d'autant plus que l'enseignement réal autri- « chien, ainsi que cela a été reconnu à plusieurs reprises en Alle- « magne, a toujours été en grand progrès depuis le projet d'or- « ganisation de 1849. »

« II. Il y a lieu de prier l'Administration supérieure de l'Instruc- « tion publique de bien vouloir autoriser des maîtres bien qualifiés, « qui sont persuadés de la nécessité d'une réforme, à faire des « essais dans le sens indiqué par la Commission nommée par les « deux sociétés viennoises « *Mittelschule*[2] » et « *Realschule*. » Les « observations qu'ils fourniront devront être prises en considéra- « tion le plus possible dans l'élaboration d'un nouveau programme « et des manuels. »

Il y a tout lieu de croire que ces propositions seront accueillies favorablement, et l'on entrevoit ainsi avec plaisir la possibilité de l'introduction, dans les écoles moyennes autrichiennes, des notions fondamentales du Calcul infinitésimal combiné avec la pénétration de la notion de fonction à travers tout l'enseignement de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

La troisième conférence avait pour objet l'*utilisation des projections obliques*. Le conférencier, M. le Prof. Th. HARTWIG, expose les idées qui l'ont conduit à publier son récent abrégé de stéréométrie constructive. Il regrette que dans les manuels de Mathématiques, de Physique, de Minéralogie, etc., on ne fournisse aucune indication sur les principes et les conventions d'après lesquels on a établi les figures. Il montre ensuite comment ces constructions

---

[1] Voir *Oesterreichische Mittelschule*, XIX, Hölder, Vienne, p. 36-54, 142-152, 298-306, 389-396 et *Jahresbericht der I. Staatsrealschule im II. Bezirke in Wien für* 1904-05, p. 78-115.

[2] Voir les *Vorschläge zu einer zeitgemässen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an österreichischen Gymnasien und Realschulen ;* ces propositions ont été reproduites par la *Zeitsch. f. math. u. naturw. Unterricht*, XXXVII.

peuvent être expliquées et exécutées dans le premier enseignement des écoles moyennes en se basant sur des considérations analogues à celles qu'utilise Holzmüller.

Ern. KALLER (Vienne).

Nominations et distinctions.

M. E. BORTOLOTTI, prof. extraord., est nommé professeur ordinaire à l'Université de Modena.

M. DAUBLEBSKY VON STERNECK, prof. extraord., est nommé prof. ord. à l'Université de Czernowitz, Autr.

M. DULAC, maître de conférences, est nommé professeur-adjoint de mathématiques à l'Université de Grenoble.

M. FUBINI, de l'Université de Catania, est nommé prof. adj. d'analyse à l'Université de Gênes.

M. GMEINER, prof. ord. à l'Université allem. de Prague, est nommé prof. ord. à l'Université d'Innsbruck, en remplacement de M. Stolz, décédé.

M. HAGEN, directeur de l'Observatoire de Georgetown, est nommé directeur de l'Observatoire du Vatican.

M. G. HUBER, prof. extraord., est nommé professeur ordinaire à l'Université de Berne.

M. W. I. HUSSEY, de l'Observatoire Lick, est nommé professeur à l'Université de Michigan.

M. Ernest LEBON a obtenu une Médaille d'argent à l'Exposition internationale de Liège, pour l'ensemble de ses Publications mathématiques.

M. M. d'OCAGNE, prof. à l'Ecole des Ponts et chaussées, est nommé prof. de Géométrie au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris, en remplacement de M. Rouché, qui prend sa retraite.

M. E. T. WHITTAKER, à Cambridge, est nommé professeur d'Astronomie au Trinity College à Dublin et Astronome royal d'Irlande.

M. E. B. WILSON, est nommé prof. extraord. à la Yale University (E.-U.)

M. C. v. WISSELINGH, à Amsterdam, est nommé professeur à l'Université de Groningue.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : MM. M. GROSSMANN, à l'Université de Bâle; G. WALLENBERG, à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg; F. HARTOGS, à l'Université de Munich; M. VANECEK, à l'Ecole technique sup. tchèque de Prague.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'été 1906.

(Suite).

Berlin; *Universität.* — SCHWARZ: Elementargeometrische Behandlung einiger Aufgaben des Maximums, 2; Th. d. analyt. Funktionen II, 4; Über krumme Flächen und Kurven doppelter Krümmung, 4; Seminar; Kolloquien. — FROBENIUS: Th. d. Determinanten, 4; Seminar. — SCHOTTKY: Diff.-rechnung, 4; Übgn. dazu; Abelsche u. Thetafunktionen, 2; Seminar. — HETTNER; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. — KNOBLAUCH: Anw. d. ellipt. Funktionen, 4; Analyt. Geometrie, 4; Th. d. Strahlensysteme, 1. — LANDAU: Über den Picardschen Satz, 2. — SCHUR: Integralrechnung, 4; Übgn. dazu. — LEHMANN-FILHÉS; Analyt. Mechanik, 4. — FÖRSTER: Geschichte der alten Astronomie, 2. — Theorie und Kritik der Zeitmessung, 2; Fehlertheorie im Lichte der Astronomie, 1 — BAUSCHINGER: Mechanik des Himmels, neuere Theorien, 3; Einrichtung und Gebrauch der Planetentafeln. — STRUVE: Sphär. Astronomie I, 2; Übgn. — MARCUSE: Theorie und Anwendung astron. Instrumente; Einf. in die astron. Geographie und Erdphysik. — RISTENPART: Gemeinverständliche Himmelskunde; Einf. in die astron. Chronologie. — SCHEINER; Über die Temperatur der Sonne; Astrophysikalisches Kolloquium. — HELMERT: Gradmessungen; Theorie der Kartenprojektionen. — NEESEN: Grundlagen der Ballistik, 2. — WEINSTEIN: Kinetische Gastheorie, 2. — VALENTINER: Vektorentheorie mit Anwendung in der theor. Physik, 1. — GRÜNEISEN: Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten, 1. — MEYER: Ausgew. Kapitel der techn. Mechanik, 2. — v. IHERING: Maschinenkunde mit Übungen, 4.

Bonn; *Universität.* — STUDY: Analyt. Geometrie II (Projektive Geometrie), 3; Einl. in die Invariantenth, 3; Sem. — KOWALEWSKI: Einf. in die Zahlenth., 2; Diff.-rechn. und Elemente d. Integralrechn., 4; Übgn. dazu: Kritische Übersicht über die neueren Ergebnisse der Mengenlehre, 1; Sem. — LONDON: Darst. Geometrie mit Zeichenübgn., 4; Th. der ellipt. Funktionen, 4; Sem. KÜSTNER: Theorie u. Praxis d. astron. Instrumente, 3; Astron. Kolloquium. — MÖNNICHMEYER: Geogr. Ortsbestimmungen, 2. — LORBERG: Kinetische Gastheorie, 3; Mechanik, 4.

Göttingen; *Universität.* — KLEIN: Funktionsth. 4; Math. Seminar (mit Prof. Hilbert und Minkowski), 2. — HILBERT: Diff. u. Integralrechn. I (mit Dr. CARATHÉODORY), 4; Mechanik der Kontinua 4; Mathem.-phys. Seminar (mit Prof. KLEIN und MINKOWSKI), 2. — SCHWARZSCHILD: Allgemeine Astronomie, 3: Populäre Astronomie, 1; Astron. Kolloquium, 1. — MINKOWSKI:

Algebra, 4; Kugel-und verwandte Funktionen, 2; Math. Seminar (mit Prof. Klein und Hilbert), 2. — C. Runge: Differentialgleichgn., 6; Math. Seminar, graphische Statik, 2. — Brendel: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4; Versicherungsrechnung, 2; Uebgn. im Seminar f. Versicherungswissenschaft, 2. — Ambronn: Sphär. Astronomie, 3; Astron. Uebungen f. Anfänger, 4-5; Astron. Uebungen f. Fortgeschrittene täglich. — Prandtl: Math.-physikalisches Seminar, Graphische Statik, 2. — Zermelo: Partielle Diff.-gleichgn. der Physik, 4. — Abraham: Potentialth., 4. — Herglotz: Analyt. Geometrie, 4. — Carathéodory: Variationsrechnung, 4.

München; *Universität*. — Lindemann: Integralrechn., 5; Th. d. Substitutionen u. d. höh. alg. Gleichungen, 4; Mechanik deformb. Körper, 2; Seminar (analyt. Mechanik). — v. Seeliger: Th. d. Figur d. Himmelskörper, 3; prakt. Uebgn. mit Anding. — Voss: Elem. Einf. in. d. Th. d. Diff.-gleign, 4; Analyt. Geom. d. Raumes, 5; math. Sem. — Pringsheim: Best. Integrale, 4, Anw. d. ellipt. Funkionen, 2. — Dœhlemann: Darst. Geom. II, 3; Uebgn, 2; synth. Geom. II, 4; das Imaginäre i. d. Geom., 1. — Anding: Ausgleichungrechn., 2; Astron. Praktikum, mit v. Seeliger. — v. Weber: Determinanten mit Anw. 4; Diff.-rechn. 4; Uebgn. 2. — Korn: Funktionenth. mit phys. Anwendgn. 4. — Bruma: Elem. d. höh. Mathem., 4. — Hartogs: Ausgew. Kap. aus d. Funktionenth. 4.

Oxford; *University*. — Lecture List for Easter and Trinity Terms, 1906 (à partir du 23 avril). — W. Esson: Comparison of Analytic and Synthetic methods in the Theory of Conics, 2; Informal Instruction in Geometry, 1. — E. B. Elliot: A First Course on the Theory of Functions, 3. — A. E. H. Love: Waves and Sound, 2. — A. L. Dixon: Calculus of Variations, 1. — H. T. Gerrans: Line Geometry, 2. — A. E. Jolliffe: Higher Analytical Plane Geometry, 2. — P. J. Kirkby: Higher Plane Curves, 2. — J. W. Russel: A Course of Rigid Dynamics (two dimensions), 2. — R F. McNeile: Algebra, 2. — C. E: Haselfoot: Series and Continued Fractions, 2. — A. L. Pedder: Spherical Trigonometry, 1. — C. H. Sampson: Solid Geometry, 2. — C. H. Thompson: Differential Equations, 2.

Strassburg; *Universität*. — Reye: Einl. in die synth. Geometrie, 2; techn. Mechanik, 4; math. Sem., 2. — Becker: Ausgew. Kapitel aus der Sphär. u. prakt. Astronomie, 2; Bahnbestimmung d. Doppelst., 1 Astr. Kolloquium; Astr. Beobachtungen. — Weber · Bestimmte Integrale u. Einl. in die Funktionenth., 4; höh: Zahlenth, 3; math. Sem. mit Wellstein, Timerding u. Epstein, 2. — Simon: Gesch. d. Mathem. im Mittelalter, 2. — Wellstein: Einl. in die Invariantenth., 2; Encykl. d. Elem.-Mathematik II Geometrie; Sem. — Timerding: Analyt. Geom. d. Raumes, 3; Einl. in die angew. Mathem., 3; Wahrscheinlk.-rechn, 1; Sem. — Epstein: Ell. Funktionen, 2; Sem. — Wirtz: Th. der Finsternisse, 1; Photometrie d. Gestirne, 1.

Wien; *Universität*. — G. v. Escherich: Diff. u. Integralrechn. (auch für Naturhistoriker und Versicherungsmathematiker), 5; Uebgn. hierzu; Proseminar für Mathematik; Seminar für Mathematik. — Mertens: Zahlenth. (Forts.), 5; Uebgn. im math. Seminar, 2; Uebgn. im math. Proseminar; Wahrscheinlichkeitsrechn., 3. — Wirtinger: Th. der Diff. glgn. II, 5; Math. Seminar; Math. Proseminar. — Kohn: Analyt. Geometrie, 4. Uebgn.; Algebr. Kurven, 2. — Tauber: Versicherungsmathematik (Forts.), 6. — Blaschke: Einf. in die math. Statistik, II. Teil, 3. — Plemelj: Einf. in die Th. der ellipt. Funktionen (Forts.), 2. — Grünwald: Quaternionen und andere hyperkomplexe Zahlensysteme (m. geometrischen Anwendungen). — Hahn : Theor. Arithmetik, 3. — Weiss: Prakt. Astronomie, 4. — v. Hepperger : Astrophysik, 3; Theorie der speziellen Störungen, 2. — Schram : Die Zeitrechnungen verschiedener Völker und die Umrechnung fremder Daten (mit besonderer Rücksicht auf Historiker), 2. — Herz: Die Störungen der Rotationsachse der Erde, 2. — Prey : Photogrammetrie, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Paul Bachmann. — **Zahlentheorie.** Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. *Fünfter Teil:* Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. — 1 vol. relié in-8°, XXII, 548 p. ; prix 16 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'ouvrage de M. Bachmann est consacré à la théorie générale des nombres et des corps algébriques. Cette belle théorie, dont Kummer, Dedekind et Kronecker ont été les fondateurs, a pris depuis une quinzaine d'années un développement extraordinaire. Enseignée dans un certain nombre d'Universités d'Allemagne, elle est très bien connue de la jeune génération des géomètres d'Outre Rhin. Aussi existe t-il en Allemagne des ouvrages excellents sur la matière, parmi lesquels je citerai en première ligne la « Zahlentheorie » de M. Dedekind, l'Algèbre de M. H. Weber (2e volume) et surtout la « Theorie der algebraischen Zahlkörper » de M. Hilbert, connue sous le nom de « Zahlbericht ». Ce dernier ouvrage, qui résume les résultats principaux acquis à la science avant 1896, servira pendant longtemps encore de guide aux chercheurs, mais il n'est pas toujours facile à lire. M. Hilbert n'a pu dans ce Rapport entrer dans les détails de toutes les démonstrations. L'ouvrage de M. Bachmann au contraire ne saurait arrêter un commençant. Ce que M. Hilbert se borne à indiquer, M. Bachmann l'explique longuement. Son livre pourrait donc servir de commentaire aux deux premières parties du Zahlbericht, de commentaire et de complément, car M. Bachmann nous fait connaître aussi quelques uns des résultats publiés depuis 1896.

Son livre contient douze chapitres et un appendice. Dans le premier chapitre nous trouvons d'abord les définitions des notions fondamentales. M. Bachmann nous explique ce qu'on entend par nombre et corps algébrique, domaine de rationalité et d'intégrité, « Unterkörper » et « Oberkörper » etc. Laissant de côté les corps algébriques quelconques, l'auteur nous fait connaître les propriétés essentielles des corps finis qui seuls présentent un intérêt réel. De nouvelles notions s'introduisent alors : celles de base, de norme, de discriminant etc., qui sont d'une si grande importance dans l'étude des propriétés arithmétiques des nombres algébriques. En suivant toujours la route tracée par M. Dedekind, l'auteur expose dans le 2e chapitre les principes de la théorie des modules et des « Ordnung » de Dedekind (« Ring » d'après

M. Hilbert.) Après cette étude préparatoire il serait facile d'aborder la théorie des idéaux de Dedekind. Mais M. Bachmann ouvre une parenthèse, et le chapitre suivant, consacré à la théorie des congruences, est destiné surtout à servir d'introduction à l'étude des méthodes de Kronecker et des recherches de M. Hensel que l'auteur nous fera connaître dans le 7e chapitre.

Après cette excursion dans un domaine connexe, nous reprenons l'étude de la théorie de Dedekind. Nous voici en possession d'une notion nouvelle, celle d'idéal, et nous pouvons enfin aborder l'Arithmétique des nombres algébriques entiers. Cette belle théorie peut être comparée, en se servant d'une expression due à M. Hilbert, à un édifice puissant soutenu par trois piliers : le théorème sur la décomposition univoque des nombres algébriques entiers en facteurs premiers (idéaux), le théorème sur l'existence des unités complexes et le théorème sur la détermination transcendante du nombre des classes.

Le premier de ces théorèmes, avec les nombreuses conséquences qui en découlent, est démontré dans le chapitre 6, la théorie des unités complexes basée sur le deuxième théorème est exposée dans le chapitre 8, enfin le problème si difficile de la détermination du nombre des classes est traité dans le chapitre 9.

Ces chapitres contiennent des développements curieux. Dans le chapitre 6, par exemple, nous trouvons une analyse détaillée des démonstrations si intéressantes du premier théorème fondamental qui ont été données par M. Dedekind et M. Hurwitz (celle de M. Hilbert a trouvé place dans un chapitre différent consacré aux corps de Galois.)

Les autres chapitres du livre de M. Bachmann ne présentent pas un intérêt moindre.

Nous avons déjà dit que le 7e chapitre est consacré aux méthodes de Kronecker et aux recherches de M. Hensel. Ces recherches peuvent être rattachées aux célèbres travaux de Kummer. Dans le domaine particulier étudié par Kummer il existe, comme M. Bachmann l'a très bien expliqué dans un autre volume de sa « Zahlentheorie », une corrélation étroite entre la décomposition d'un nombre premier p en facteurs idéaux et la décomposition d'une certaine équation en facteurs irréductibles mod. p. M. Bachmann nous montre, et c'est en cela que consiste le résultat principal dû à M. Hensel, qu'il en est de même dans le cas général d'un corps quelconque, pourvu que les équations particulières soient remplacées par l'équation fondamentale de Kronecker, équation qui contient les fameuses indéterminées de Kronecker.

Un autre chapitre (le 10e) est consacré aux formes décomposables Quels sont les rapports entre la théorie de ces formes et celle des nombres algébriques entiers? A quoi correspond dans cette dernière théorie une classe de formes équivalentes etc. ? Telles sont les questions traitées par M. Bachmann dans le chapitre 10. Elles jouent un rôle important dans certaines recherches d'analyse et de théorie des nombres et en particulier dans l'étude des problèmes relatifs à la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques.

Il nous reste à dire quelques mots des derniers chapitres du livre consacrés aux travaux de M. Hilbert sur les corps relatifs et les corps de Galois et aux recherches plus récentes de M. Hensel. On connaît l'importance de la théorie des corps relatifs. M. Bachmann en fait connaître les points principaux dans le chapitre 11 ; et dans le chapitre suivant nous trouvons la belle théorie des corps de Galois qui offre un exemple nouveau des relations étroites existant entre l'arithmétique des idéaux et la théorie de la résolution algébrique des équations. M. Bachmann met très bien en lumière l'importance de ce fait dû à M. Hilbert.

Quant aux recherches récentes de M. Hensel, il est à regretter que M. Bachmann se soit contenté d'un aperçu et de quelques courtes indications qui ne sauraient donner au lecteur une idée suffisamment complète de la théorie nouvelle de M Hensel. Il est vrai que le volume de M. Bachmann contient déjà bien des choses, il rendra donc des services réels et nous croyons qu'on le lira avec fruit et avec plaisir. Les commençants y puiseront les principes d'une théorie importante et belle ; et quant à ceux qui connaissent déjà les traités de M. Hilbert ou de M. Weber, ils trouveront dans le livre de M. Bachmann des indications précieuses et des éclaircissements utiles

D. Mirimanoff (Genève.)

W.-W. Rouse Ball. — **Histoire des Mathémathiques.** Edition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par *L. Freund*. T. I. — 1 vol. gr. in-8°, 422 p. ; Hermann, Paris.

Ce premier volume contient la traduction des quinze premiers chapitres de l'ouvrage anglais. « A short account of the history ot mathematics » de Rouse Ball (3e édit. Londres 1901), et embrasse l'histoire des mathématiques depuis les temps les plus anciens jusqu'à Newton. Ainsi que l'a déjà remarqué G. Eneström dans une analyse de l'édition anglaise (*Biblioth. mathém.* 1902 p. 244 et suiv.) R. Ball a eu beaucoup moins en vue le développement des idées mathématiques qu'un exposé biographique et bibliographique de la matière. Il s'en suit que la plupart des chapitres laissent à désirer, en ce qui concerne l'exposition de la science mathématique et particulièrement ses points caractéristiques ; c'est le cas en premier lieu de la période florissante de la géométrie grecque : on ne retire qu'une bien vague idée de ses méthodes de démonstration et de sa manière de manier l'infiniment petit (méthode d'exhaustion) ; de même des mathématiques des Indiens et des Arabes : l'analyse indéterminée pour les premiers, la trigonométrie pour les derniers auraient mérité mieux ; tout ce que nous apprenons de la trigonométrie arabe est que Albattani a établi la relation du cosinus de la trigonométrie sphérique et que Aboulwafa a découvert la variation de la lune, deux assertions également inexactes. Il est à ce propos très regrettable que pour n'avoir pas tenu compte de travaux récents parus notamment dans la *Bibl. mathem.* et les *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* beaucoup d'inexactitudes se soient glissées dans l'ouvrage, inexactitudes qui, malheureusement, n'ont été rectifiées par le traducteur que dans la minorité des cas ; par exemple, des vingt cinq remarques que G. Eneström (loc. cit.) fait à propos du texte anglais, six seulement ont été prises en considération dans la traduction française. Pour ce qui concerne les mathématiques modernes au XVIIe siècle, nous devons reconnaître que l'auteur a traité cette période, d'une façon bien supérieure à l'Antiquité et au Moyen-Age.

On pourrait aussi critiquer l'orthographe défectueuse des noms arabes. A la vérité, la faute principale incombe ici à R. Ball ; mais même les noms que celui-ci à écrits justes n'ont pas été rendus correctement par le traducteur. car un Français ne peut adopter simplement la méthode anglaise de transcription sans qu'il en résulte une prononciation parfaitement fausse. Ainsi R. Ball écrit correctement (en négligeant toutefois de marquer la voyelle longue) : Albuzjani, mais à tort : Alkarismi, Alkayami, Alkarki. Ces noms doiveut être transcrits en français : Albouzdjani, Alkhouarizmi ou Alkhwarizmi, Alkhayyami, Alkarkhi. Au lieu des noms du Moyen-âge Albategni, Alhazen et Arzachel, on pourrait bien écrire aujourd'hui Albattani, Alhasan ibn al-Haitam et Alzarkali. Le traducteur aurait d'ailleurs pu trouver l'orthographe française des noms arabes dans la publication de l'algèbre d'Alkhayyami par Woepcke (Paris 1851), ouvrage qu'il doit cependant bien connaître s'il s'occupe d'histoire des mathématiques.

G. Eneström a corrigé seulement une partie minime des indications fausses de R. Ball, il s'en trouve dans l'ouvrage un nombre beaucoup plus considérable ; qu'on nous permette de citer encore ici les plus importantes :

P. 36. Hippias d'Elée est incorrect, le sophiste Hippias n'est pas originaire d'Elée (Elea) dans la Basse Italie, comme Xénophane et Zénon, mais d'Elis (ou Elide) dans le Péloponèse; la même erreur a été commise par G. Loria. (Le scienze esatte nell' antica Grecia, I. p. 64-66) qui l'appelle Ippia d'Elex au lieu de Ippia d'Elide.

P. 42-43. Pour avoir ignoré les récents mémoires de F. Rudio dans la Bibl. math. (3e Folge, 3n Band, 1902, p. 7-62), tout l'exposé des quadratures de l'Hippocrate est erroné.

P. 77. IV a. L'œuvre mécanique d'Archimède étudiée ici aurait été mieux introduite par le titre connu « l'équilibre des surfaces planes » que par « mécanique ».

P. 82. « Nous possédons des copies des commentaires faits sur l'ensemble de l'ouvrage (d'Apollonius) par Pappus et Entocius » n'est pas exact : de Pappus nous possédons un certain nombres de lemmes concernant les trois premiers livres et d'Entocius seulement les commentaires sur les quatre premiers livres des sections coniques d'Apollonius.

P. 92. Que le théorème de Ptolémée se trouve dans le sixième livre des éléments d'Euclide est probablement une faute d'impression : il se trouve dans le premier livre de l'Almageste (édition de Heiberg, p. 37 etc.)

P. 93. Le traducteur ne cite de la publication des œuvres d'Héron que le premier volume de 1899, il ignore encore les deux suivants parus en 1900 et 1903.

P. 150. L'Université de Prague n'a pas été fondée au 13e siècle mais en 1347 ; parmi celles du 14e siècle ne sont pas mentionnées celles d'Heidelberg, de Cologne et d'Erfurt. Le chapitre sur la « création des premières universités au Moyen-âge » contient d'ailleurs maintes inexactitudes.

P. 155. Le récit de l'invasion des Aryens est complètement erroné ; celle-ci n'eut pas lieu au 5e ou au 6e siècle, mais environ 2000 à 1500 ans avant J.-C. voire, même plus tôt d'après certains historiens.

P. 158. A propos de l'équation $nx^2 + 1 = y^2$, il aurait été plus intéressant de voir comment Brahmagupta et Bhaskara la résolvaient en nombres entiers au lieu de donner la solution en fractions rationnelles ; car celle-ci n'est pas le grand progrès des mathématiciens indiens mais bien la solution en nombres entiers (dite « méthode cyclique ») que Lagrange a retrouvée seulement en 1767.

P. 165. Nous ne savons pas où l'auteur a appris qu'Alkhouarizmi a été en Afghanistan et peut-être aussi en Inde ; nous n'avons en tout cas connaissance d'aucune source qui mentionne ceci.

P. 166 et 167. Le système de numération décimale arabe ou indien n'a pas été apporté en Occident par l'Algèbre de Khouarizmi, mais bien par son Arithmétique.

P. 170 et 171. Qui était Abd-al-Gehl (un géomètre vers 1100), c'est ce que j'ignore ; est-ce peut-être Ibn Abdaldjalil ou Aboul-Djoud ?

P. 173. Il n'est pas exact qu'Arzachel ait émis l'idée du mouvement elliptique des planètes.

P. 187. Il est dit ici que l'ouvrage sur lequel est basée la plus grande partie de la célébrité d'Oresme traite de monnaies et de change commercial. Nous avouons ne connaître d'Oresme aucun ouvrage de ce genre.

Nous pourrions allonger encore beaucoup cette liste de fautes ; mais nous terminons ici par la remarque que le traducteur aurait bien fait d'accorder à son travail une dernière revision, afin de pouvoir le compléter par une liste de fautes d'impression, liste qui certes n'aurait pas été superflue, car la quantité de celles-ci n'est pas des moindres. Qu'on me permette de citer comme pièces à conviction du fait que la traduction a été exécutée un peu superficiellement les détails suivants : Pour les renvois à des pages précédentes ou suivantes, on a redonné simplement les numéros de l'édition anglaise quoiqu'ils ne correspondent pas à ceux de la traduction française (p. exemple, p. 111, note 1 on indique p. 111-112 au lieu de 115-116) ; p. 158, M. Freund traduit « ape » (= singe) par « ascète » (!)

On peut enfin reprocher à l'auteur, en partie aussi au traducteur, les nombreuses citations incorrectes ou tout au moins incomplètes de titres de publications ; par exemple p. 13 : Hankel, Geschichte der Mathematik, au lieu de : Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.

L'ouvrage se termine par cinq Notes (p. 327-412) :

I. Sur Viète considéré comme géomètre d'après Michel Chasles. — Analyse des ouvrages originaux de Napier relatifs à l'invention des logarithmes, par Biot. — III. Sur Kepler, d'après Michel Chasles et Joseph Bertrand. — IV. Développement des principes de la Dynamique. Travaux de Galilée et Hughens, par Mach, traduction Emile Bertrand. — V. Sur les origines de la statique. Préface de l'ouvrage de Pierre Duhem.

H. SUTER, (Zurich.)

ETTORE BORTOLOTTI. — **Aritmetica generale ed Algebra per la 1ª classe liceale,** in conformità dei programmi governativi, 11 nov. 1904. — 1 vol. in-8°, 120 p. ; prix : L. 1,50 ; Soc. editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati & C°, Roma-Milano.

Conformément à son titre, cet Ouvrage comprend deux parties : I Arithmétique générale (les cinq premières opérations sur des nombres positifs et négatifs et sur des polynomes) ; II Algèbre (les équations des premier et deuxième degrés, les progressions et les logarithmes.)

La première renferme l'exposé des propriétés des opérations tirées d'un petit nombre de définitions et de principes fondamentaux ; il est accompagné d'exercices faciles.

Dans la deuxième partie les équations du premier degré donnent lieu à 70 exemples très intéressants et bien choisis. Les équations du second degré sont précédées, à titre d'introduction, de l'extraction de la racine carrée. La forme de résolution est fort bien déduite elle est suivie de 24 exemples d'application. Viennent un chapitre consacré aux progressions arithmétiques et géométriques, puis l'étude des logarithmes introduits sur la remarque suivante (p. 105) : « *Deux progressions, toutes deux croissantes, l'une géométrique et l'autre arithmétique, constituent un* SYSTÈME DE LOGARITHMES, *si la première contient parmi ses termes l'unité et l'autre le zéro et si, à partir de ces*

termes on associe deux à deux les termes correspondant à un même rang, c'est-à-dire si l'on pose :

$$\log q^n = nd .$$

Il est regrettable que la table de logarithmes à 3 décimales (p. 113) contiennent des erreurs dans le dernier chiffre.

Dans les applications on trouve le problème des intérêts composés suivi de six jolis petits problèmes.

Nous avons eu beaucoup de plaisir à examiner cet excellent petit manuel.

Ern. KALLER (Vienne.)

R. GANS. — **Einführung in die Vektoranalysis** mit Anvendungen auf die mathematiche Physik. — 1 vol. cart. in-8°, 100 p. ; prix : 2 Mk. 80 B.-G. Teubner, Leipzig.

E. JAHNKE. — **Vorlesungen über die Vektorenrechnung** mit Anvendungen auf die Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. — I vol. cart. in-8°, 235 p. ; prix : 5 Mk. 60 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Les idées de Möbins, de Bellavitis, de Grassmann et de Hamilton sur le rôle utile du calcul géométrique finissent peu à peu par triompher. Elles ont permis d'introduire d'importantes simplifications non seulement dans plusieurs domaines de la Géométrie, mais aussi en Mécanique et en Physique. C'est surtout dans ces deux dernières branches que l'emploi des méthodes vectorielles a pris, depuis quelques années, un développement très réjouissant. Aujourd'hui il n'est guère possible de lire dans ces domaines certains mémoires et traités fondamentaux, sans connaître quelques notions du Calcul vectoriel.

En attendant que ses notions essentielles soient introduites dans les cours et les manuels de Géométrie analytique, l'Analyse vectorielle fait l'objet de cours spéciaux dans quelques universités et écoles polytechniques. Elle a donné lieu à plusieurs ouvrages élémentaires auxquels viennent s'ajouter aujourd'hui ceux de M. Gans et de M. Jahnke.

Dan son *Introduction à l'Analyse vectorielle et son application à la Physique mathématique*, M. Gans présente d'abord les opérations élémentaires, puis les opérateurs différentiels. On lira avec intérêt les applications aux théorèmes de Stokes et de Green, à la notion de potentiel, à l'Hydrodynamique et à la Statique.

Les *Leçons de Calcul vectoriel* de M. Jahnke sont beaucoup plus développées : elles insistent davantage non seulement sur les propriétés du calcul vectoriel proprement dit, mais aussi sur le calcul géométrique d'une manière générale. Ces leçons contiennent aussi les applications fondamentales à la Mécanique et à la Physique, mais on y trouve encore des applications fort intéressantes aux domaines les plus divers de la Géométrie. Elles se recommandent tout particulièrement à ceux qui désirent approfondir les méthodes du calcul géométrique. H. F.

Œuvres de Laguerre publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. Ch. HERMITE, H. POINCARÉ et E. ROUCHÉ. Tome II : Géométrie. — Vol. in-8 de IV-715 pages ; prix : 22 fr. ; Gauthier-Villars ; Paris.

« Edmond Laguerre fut, en Mathématiques, un des esprits les plus originaux de notre temps. Il s'est successivement attaché aux sujets les plus variés et sur chacun d'eux il a répandu les idées les plus neuves et les plus fécondes, traçant des voies auxquelles nul avant lui n'avait songé. »

« Peu soucieux de la renommée, il a semé ses découvertes en une foule de courtes notes éparses en divers recueils, sans se préoccuper de faire ressortir aux yeux du public l'ampleur et l'unité de son œuvre. »

« En outre, sauf en ce qui concerne la doctrine des imaginaires, à laquelle il a, en 1870, consacré quelques conférences libres, il n'a jamais eu occasion d'exposer publiquement ses idées personnelles. »

« Cette double circonstance explique comment celles-ci sont loin de jouir de la notoriété que devrait leur valoir leur importance intrinsèque et comment des Ouvrages didactiques, pourtant excellents, publiés sur les branches de la Science qu'a le plus enrichies Laguerre, mentionnent à peine ses admirables travaux. »

« On peut donc affirmer que la réunion des Œuvres de Laguerre réserve de véritables surprises au public mathématique qui se trouvera, pour la première fois, à même de les juger dans leur ensemble et dans mesurer toute la portée ».

C'est en effet ce que l'on a constaté après l'apparition du premier volume, paru il y a dejà plusieurs années. On sait qu'il contient les recherches sur l'Algèbre et le Calcul intégral et qu'il débute par une Notice sur la vie et les travaux de Laguerre par M. Poincaré.

Le Tome II renferme l'œuvre géométrique ; on y trouve plus de quatre-vingt Mémoires, dont les trois premiers, consacrés à la théorie des foyers, ont été publiés dans les *Nouvelles Annales* des années 1852 et 1853, alors que, candidat à l'Ecole polytechnique Laguerre était encore élève de l'Institution Barbet. Il est impossible de donner un aperçu même très succinct de ces Mémoires qui se répartissent sur les domaines les plus divers de la Géométrie. Laguerre abordait avec une égale facilité les questions de Géométrie synthétique et les applications de l'Algèbre à la Géométrie. Nous rappellerons cependant ses intéressantes recherches sur la Géométrie de direction et ses nombreuses Notes sur les surfaces algébriques et sur la Géométrie infinitésimale.

H. F.

ERNEST LEBON. — **Table des Caractéristiques** relatives à la base 2310 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à 30030. — 1 fasc. in-8°, 20 tableaux ; Delalain frères, Paris.

Cette *Table de Caractéristiques* permet de résoudre très rapidement le problème suivant : Un nombre étant donné reconnaître s'il est premier ou composé, et dans le second cas, trouver ses facteurs premiers. M. LEBON l'a construite en s'appuyant sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques. Dans le présent opuscule l'auteur a du se limiter aux nombres inférieurs à 30030. On trouvera d'abord un exposé très élémentaire de la théorie de la construction de cette Table dont l'emploi est des plus faciles. Grâce à leur disposition à la fois simple et ingénieuse, ces tableaux sont appelés à jouer un rôle très utile, mais, ils devraient être continuées. La Table de base 30030, analogue à celle-ci, permettrait d'aller jusqu'au nombre 510510; la Table de base 510510 servirait à son tour pour les nombres inférieurs à 9699690, etc.

Nous croyons que de telles Tables rendraient de grands services et nous espérons, qu'encouragé par le succès de cet essai, M. Lebon continuera cette publication. [1] H. F.

Ed. Maillet. — **Essais d'hydraulique souterraine et fluviale.** — 1 vol. gr. in-8° de VI — 218 pages avec tableaux numériques ; prix : 11 fr. ; A. Hermann, Paris.

Le présent volume cause à première inspection un bien légitime étonnement. Ouvert au hasard il peut nous montrer des pages tellement remplies de symboles analytiques qu'on ne doute pas d'être en présence de méthodes relevant de la Physique mathématique. Ailleurs, il nous montre les résultats numériques, des débits soigneusement calculés pour des sources n'ayant aucun caractère fictif. Traiter analytiquement le régime des sources et des nappes d'eau et obtenir des résultats concordant avec les observations ou mieux encore permettant de prévoir celles-ci, voilà qui est bien fait pour déconcerter beaucoup d'esprits. C'est cependant ce qui se trouve dans le présent ouvrage. Certes, ces questions ne sont pas absolument nouvelles et le régime des sources alimentant Paris est une question tellement capitale quant à l'hygiène de la grande ville que les ingénieurs ont dû mettre beaucoup de science à faire des observations et des prévisions. C'est ainsi que depuis plus de trente ans certaines lois à apparences assez rigoureuses ont été formulées, telles que celles de Dausse sur les profits qu'une nappe souterraine tire de certaines pluies.

D'autre part et dans un ordre d'idées beaucoup plus abstrait, M. Boussinesq a fait des théories mathématiques entre lesquelles et les précédentes M. Maillet semble avoir établi un admirable trait d'union.

Et comme il est rare qu'un ingénieur descendant jusqu'aux côtés pratiques des questions soit en même temps un géomètre de grande valeur à qui des points récents de la théorie des fonctions doivent beaucoup on comprend tout l'intérêt et toute l'originalité du présent ouvrage.

D'ailleurs on y pénètre sans peine. Les méthodes graphiques y sont mises continuellement à contribution. Ainsi, tout au début, nous envisageons des généralités sur le débit des nappes. Au temps t_0 nous avons un débit Q_0, au temps t_1, un débit Q_1 quantités entre lesquelles une intégration très simple nous donne une relations de la forme.

$$t_1 - t_0 = \varphi_1 (Q_0) - \varphi_1 (Q_1) .$$

Portant les Q_0 en abscisses, les Q_1 en ordonnées on a une courbe pour chaque valeur de $t_1 - t_0$. On voit sans peine que toutes ces courbes se déduisent de l'une d'entre elles par une construction géométrique simple. Dans le cas où le débit varie exponentiellement les courbes précédentes sont des droites passant par l'origine. Dans le chapitre suivant ces considérations sont reprises d'une manière légèrement différente et nous envisageons aussi les cas très intéressants où le débit est inversement proportionnel au carré d'une fonction linéaire du temps ce qui parait se rapprocher du régime d'une des sources de la Vanne située à Armentières.

Dans le chapitre IV s'introduisent les considérations véritablement savantes. On part ici d'une équation aux dérivées partielles du second ordre dont on connaît quelques solutions exactes données par M. Boussinesq et c'est

[1] Voir, dans le présent n°, le compte rendu du 44° Congrès des Soc. Savantes, Paris, 1906.

ici aussi que la question capitale de la *stabilité* est envisagée. Il est très important en effet de savoir si après une perturbation brusquement apportée au régime d'une source, par exemple après une pluie soudaine, la source manifestera un dérèglement prolongé où reprendra au contraire presque immédiatement le régime normal. Il faut signaler ici la propagation des ondes dans les nappes souterraines qui donne lieu à une analyse très remarquable. Dans tous les cas où les nappes sont insérées entre un fond et une voûte de formes bien déterminées M. Maillet arrive à des résultats analytiques d'une élégance surprenante. Il considère surtout les cas où ces surfaces sont planes ou paraboliques et il peut alors terminer ses opérations qui présentent parfois de curieuses analogies avec d'autres problèmes de physique mathématique (Emploi de l'équation de Riccati, des fonctions de Bessel, etc...)

La prévision des bas débits des cours d'eau et des sources termine la partie théorique. Je ne puis ici donner idée de la partie pratique qui achève le volume ; si ce n'est en disant qu'elle justifie la première et qu'elle témoigne encore une fois de l'esprit pratique et consciencieux de l'auteur. Son volume et les récents mémoires de M. Boussinesq font faire un grand pas à la science pure et à de nombreuses questions d'hydraulique et d'hydrographie. A. Buhl (Montpellier.)

H. Poincaré. — **Leçons de Mécanique Céleste** professées à la Sorbonne. Tome I. — Théorie générale des perturbations planétaires. — 1 vol. in-8° de VI-368 p. ; prix : 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

M. Poincaré nous indique très nettement dans sa préface quel est le caractère des leçons qu'il publie aujourd'hui. Elles ne font double emploi ni avec les *Nouvelles Méthodes de la Mécanique Céleste*, ni avec le Traité de Tisserand. Ce sont les leçons faites à la Sorbonne par l'illustre professeur ; elles partent des principes mêmes de la Mécanique analytique et étudient le problème des trois corps en restant beaucoup plus près des considérations astronomiques proprement dites que les *Nouvelles Méthodes* qui, elles, sont surtout caractérisées par une minutieuse discussion analytique de résultats dans lesquels l'astronome ne voyait guère que le caractère formel. En parcourant les présentes pages on éprouve encore une sensation très différente de celle éprouvée en parcourant Tisserand.

Les créateurs de la Mécanique Céleste, à commencer par Laplace, n'eurent pas à leur disposition de puissants et uniformes moyens d'investigation.

Que l'on compare par exemple la théorie de la Lune du savant précité et sa théorie des perturbations planétaires. On aura pendant très longtemps l'illusion que l'on étudie des choses totalement différentes. Le premier moyen véritablement général devait être fourni par les équations canoniques d'Hamilton et Jacobi qui permirent tout d'abord de dégager le caractère si simple en principe de la fameuse méthode de la variation des constantes arbitraires. Le grand mérite du Traité de Tisserand est de dévoiler cela tout de suite. Du présent ouvrage de M. Poincaré, dans un ordre d'idées analogue, on peut dire plus encore : il est le triomphe de la canonisation des équations. Elles apparaissent tout de suite au premier paragraphe, à la première page ; les transformations qui n'altèrent pas la forme canonique sont étudiées immédiatement ensuite, les théorèmes généraux y relatifs tels ceux de Jacobi et de Poisson nous mettent à même de manier les instruments à peu près uniques à l'aide desquels nous allons aborder le redoutable problème des trois corps.

M. Poincaré nous en montre rapidement les intégrales élémentaires connues, élimine le centre de gravité, les nœuds et montre aussi comment on est conduit à étudier tout d'abord le problème restreint, c'est-à-dire le cas où l'un des corps a une masse assez petite pour ne pas troubler sensiblement le mouvement képlérien des deux autres. La théorie de la Lune se rapproche de ce problème restreint car, fortement troublée elle-même, elle ne peut guère troubler le mouvement képlérien du Soleil autour du centre de gravité du système qu'elle forme avec la Terre. D'ailleurs on peut encore un peu simplifier les choses en supposant circulaires les orbites non troublées. Mais avant de développer complètement ce problème et d'aborder les vues si originales de l'auteur nous revoyons en quatre chapitres le mouvement elliptique non troublé puis les orbites osculatrices d'un mouvement troublé. C'est d'abord la méthode de Jacobi qui sert et elle introduit naturellement des constantes canoniques que l'on fait varier ensuite ; ici l'usage habile des *crochets de Jacobi* nous montre immédiatement les résultats qui dans l'ouvrage de Tisserand par exemple, n'apparaissent qu'après des calculs plus longs. Et c'est ici aussi que nous pouvons nous rendre compte de progrès très grands. Passer des éléments canoniques aux éléments elliptiques a, e, φ, π, ϑ, ε c'est détruire malheureusement le caractère canonique des équations et c'est pourquoi M. Poincaré nous propose d'autres systèmes de variables n'ayant pas cet inconvénient. Il s'ensuit naturellement de grandes différences dans les développements terminaux des éléments, mais des calculs devant lesquels l'imagination recule tant ils semblent menacer de devenir inextricables restent ici élégants et faciles à suivre. Le regretté Callandreau n'a-t-il pas dit quelque part que M. Poincaré avait traité ces questions avec une facilité qui déconcerte absolument ?

Revenons au problème restreint. On sait qu'il admet une intégrale importante et célèbre dite *intégrale de Jacobi*. Cela se met tout de suite en évidence par un choix heureux d'éléments canoniques avec lesquels la fonction caractéristique du système d'équation ne contient pas le temps. Il s'ensuit qu'elle est constante et c'est le cas d'un problème de Dynamique admettant l'intégrale des forces vives. Il y a quelque chose d'absolument analogue dans la théorie des perturbations séculaires que M. Poincaré traite ensuite. La question de la stabilité apparaît encore sous un jour excessivement simple, les éléments figurant dans des formes quadratiques à termes tous positifs et qui doivent rester constantes. Dans ces conditions la variation des éléments en question est évidemment limitée.

Au fond la question la plus importante de toutes est de faire disparaître des développements terminaux les termes séculaires, c'est-à-dire ces termes qui menacent de croître indéfiniment avec le temps. Dès qu'ils s'aperçurent de leur existence, les créateurs de la Mécanique Céleste eurent bien l'intuition que ces termes n'avaient pas d'existence objective dans le système planétaire et que c'était la méthode de calcul qui les introduisait ; ce ne fut cependant pas une chose aisée que de se débarrasser de cet encombrant apanage.

Un immense mérite revient à Delaunay car cet illustre et patient esprit, dans sa théorie de la Lune, donne une méthode précise pour empêcher le temps de sortir des fonctions sinus et cosinus, mais il fallait la persévérance qui lui fut spéciale pour ne pas reculer devant la solution effroyablement longue qu'il imaginait. M. Poincaré, continuateur de Delaunay, a perfectionné ces méthodes. A coup sûr on peut se demander si la nouvelle analyse n'entraînerait pas aussi de grandes longueurs lors ds ses applications numériques mais nous voyons maintenant les choses d'assez haut et d'une façon assez simple pour nous rendre compte du fait que là où la longueur subsiste il est dans la nature des choses qu'il en soit ainsi.

Dans les derniers chapitres du livre, nous revenons sur le cas général du problème des trois corps et le souci qui domine est précisément de démontrer que là encore on peut débarrasser les développements des termes séculaires tout comme dans les cas plus simples étudiés précédemment. Delaunay dont je parlais plus haut a été invoqué par M. Poincaré pour terminer ce bel ouvrage où les astronomes pourront se familiariser avec beaucoup de méthodes encore imparfaitement connues par beaucoup d'entre eux et où les analystes pourront trouver de féconds sujets de méditation tout en s'apercevant que beaucoup de concepts de pure analyse pourront être appliqués par eux aux besoins de la Mécanique Céleste.

A. Buhl (Montpellier).

G. Scheffers. — **Lehrbuch der Mathematik** für Studierende der Naturwissenchaften und der Technik mit 344 Figuren — 1 vol. gr. in-8°, 682 p.; prix : 16 mk. ; Veit & C°, Leipzig.

En raison de l'importance croissante que prennent les mathématiques dans les sciences les plus diverses, on demande de plus en plus aux établissements supérieurs de mieux adapter leur enseignement mathématique aux exigences actuelles des autres branches scientifiques. Plusieurs universités ont compris qu'à côté des cours et des conférences destinés aux étudiants en mathématiques, il y avait lieu d'organiser un enseignement s'adressant plus particulièrement à ceux qui ne cherchent dans mathématiques qu'un simple instrument auxiliaire. C'est à ce public, de plus en plus nombreux, qu'est destiné le bel Ouvrage de M. Scheffers.

D'une forme très élémentaire au début, n'exigeant que des connaissances tout à fait rudimentaires, ce traité conduit l'étudiant à des applications d'un caractère très élevé. La marche, bien ordonnée, est très lente, surtout dans la première moitié de l'ouvrage ; elle est originale par le groupement des matières et par les applications bien choisies et fort intéressantes.

L'auteur part de la mesure des grandeurs, des notions de fonctions et de coordonnées et donne des exemples très variés de la représentation graphique. La notion de dérivée et la différentiation d'expressions algébriques fait l'objet d'une étude très approfondie avec des nombreux problèmes pratiques. Viennent ensuite les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires. Les dérivées d'ordre supérieur sont suivies de leurs applications géométriques et cinématiques (courbure, mouvement rectiligne, mouvement curviligne.) Dans le chapitre consacré à l'étude des fonctions on trouve les formules d'interpolation, puis une très belle étude du théorème de Taylor et de ses applications. L'étude de la série de Fourier, placée à la suite des méthodes d'intégration, sera bien accueillie des physiciens. Du reste, qu'il s'agisse de ces derniers, ou d'une manière générale des étudiants des diverses branches scientifiques, tous trouveront dans cet Ouvrage de nombreuses applications bien approfondies, qui les initiera à l'emploi du Calcul différentiel et intégral dans les sciences appliquées.

Il suffira, pour faire ressortir le caractère de ce volume, de signaler les intéressants développements qui accompagnent l'étude de la fonction exponentielle ; on oublie trop souvent de faire remarquer aux étudiants pourquoi cette fonction e^x intervient constamment dans les applications les plus diverses et l'on se borne, le plus souvent, au problème des intérêts composés. Après l'étude du paragraphe consacré à la fonction exponentielle et à la croissance organique, les lecteurs de l'Ouvrage de M. Scheffers en auront une idée très nette.

Le volume se termine par plusieurs tables numériques et par une table analytique des matières.

Il faut remercier M. Scheffers d'avoir entrepris la publication de ce Traité, qui est appelé à rendre de grands services à une catégorie très importante d'étudiants. H. Fehr.

H. Schubert. — **Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis.** — 2 vol. in-16°, 239 et 218 p.; prix 4 Mk. le volume; G.-J. Göschen, Leipzig.

Donner une analyse de ces deux intéressants petits volumes est plutôt difficile. L'on est d'un bout à l'autre charmé par l'ingéniosité de l'auteur, en même temps qu'un peu étonné de la diversité des sujets traités.

Dans son premier volume, après avoir indiqué une méthode d'une extrême simplicité pour le calcul des valeurs approchées des logarithmes, M. Schubert s'occupe entre autres de la construction du polygone régulier de dix-sept côtés, des équations de la division du cercle, du nombre des images réfléchies par deux miroirs plans, d'une certaine inconséquence commise dans l'établissement des mesures absolues, etc. Le livre se termine par un chapitre consacré au problème d'Apollonius et autres questions analogues.

Le second volume comprend tout d'abord une étude relative aux triangles et pyramides de Héron, autrement dit relative à des figures géométriques limitées par des droites et dont certains éléments essentiels, tels que côtés, surface par exemple, volume s'il y a lieu, etc. — sont exprimables en nombres entiers. Un autre chapitre se rapporte aux fractions continues de l'arithmétique, puis le recueil s'achève sur une seconde méthode permettant de trouver facilement la valeur d'un logarithme.

M. Schubert se proposait de donner à ceux qui enseignent le moyen de traiter certaines questions pour elles-mêmes. Nous pensons qu'il a fait mieux encore, puisqu'il rend ainsi service à tous ceux qui, sans être mathématiciens de profession, aiment à s'occuper des problèmes intéressants auxquels conduit notre belle science. G. Dumas (Zurich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, publicados sob a Direcçào de F. Gomes Teixeira. – vol. I. Impremsa da Universidade, Coimbra.

Les Annales de l'Académie polytechnique de Porto, dont nous signalons ici le premier fascicule, seront consacrées aux sciences mathématiques pures et appliquées, la Physique, la Chimie, les sciences naturelles et les sciences sociales. Elles remplacent, pour ce qui concerne les mathématiques, le *Jornal de Sciencias Mathematicas et Astronomicas,* qui cesse de paraitre. M. Gomes Teixeira, notre distingué collaborateur, qui dirigeait le *Jornal,* prend la direction des *Annaes.*

Voici le sommaire des nos 1 et 2: Teixeira: Sobre una questào entre Monteiro da Rocha e Anastacio da Cunha. — Nielsen: Sur les séries neumanniennes de fonctions sphériques. — Ferreira da Silva: A obra scientifica e a vida do chimico portugnez Roberto Duarte Silva. — Carqueja: O capitalismo e as suas origens em Portugal. — E. Jahnke: Sur une transformation d'un classe d'opérations différentielles binômes. — I. B. d'Almeida Arez: Nota sobre os coefficientes das formulas de Waring. — P. H. Schoute: Application d'un théorème connu sur la multiplication de deux matrices à la Géométrie polydimensionale.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. Tome XXIX. 1905. Paris, Gauthier-Villars.

Août-décembre 1905. — E. Estanave: Construction de surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution défini par M. Darboux. — Lebesgue: Remarques sur la définition de l'intégrale. — Zoretti: Sur un thorème de la théorie des fonctions analytiques. — Marotte: L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne. — Lelieuvre: Sur quelques questions concernant les fonctions elliptiques. — Comptes rendus et analyses. — Revue des publications mathématiques.

Bulletin of the American Mathematical Society, New-York. Vol. XII.

No 1 (octobre 1905). — Charlotte Angas Scott: The Elementary Treatment of Conics by Means of the Regulus. — E. J. Townsend: Arzelà's Condition for the Continuity of a Function defined by a series of Continuous Functions. — W. H. Bussey: Galois Field Tables for $p^n \leqq 169$.

No 2 (novembre 1905). — F. N. Cole: The Twelfth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — Ida May Schottenfels: A set of Generators for Ternary Linear Groups. — Saul Epsteen: Note on the Structure of Hypercomplex Number Systems. — Ed. Kasner: A Geometric Property of the Trajectories of Dynamics. — G. A. Miller: On the possible Numbers of Operators of Order 2 in a Group of Order 2^m. — W. A. Manning: On the Arithmetic Nature of the Coefficients in Groups of Finite Monomial Linear Substitutions.

N° 3 (décembre 1905). — F. N. Cole : The October Meeting of the American Mathematical Society. — G. A. Miller : The september Meeting of the San Francisco Section. — C. A. Noble : Note on Loxodromes. — Shorter Notices. — Notes. — New Publications.

Bolletino di Bibliografia e Storia delle Science matematiche, publicato per cura di Gino Loria. Anno VIII, 1905. C. Clausen, Torino.

R. Marcolongo : Notizie sul « Discorso matematico » e sulla vita di Giulio Mozzi. — R. Bonola : Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti. — G. Loria : Unicuique suum. — G. Vacca : Sulla matematica degli antiche cinesi.

Bolletino di Matematica. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno IV. Bologna.

Nos 5 à 12. — Sforza : La teoria delle parallele dal punto di vista didattico. — Bindoni : A proposito di un articolo del prof. Loria sulla divisibilità dei numeri. — Biasi : Sulla divisibilità dei numeri. — Pizzarello : Alterazione e uguaglianza delle frazioni. — Neppi Modona : Sul principio di polarità. — Sibirani : Un problema di geometria elementare. — Natucci : Sulla scelta del Metodo per la teoria dei numeri irrazionali. — Id. : Alcune considerazioni sulla teoria delle proporzioni in geometria elementare. — Ciamberlini : Su alcune proposizioni relative alla simiglianza geometrica. — Bonola : Intorno ad una proprietà del parallelogramma. — Scarpis : Intorno alla soluzione di un Problema da Meccanica. — Bassi : Relazioni metriche nel tetraedro. — Bindoni : Sulla scelta del metodo per la teoria dei numeri irrazionali. — Composto : Sulle equazioni di 3° grado. — Galvani : Una applicazione geometrica della numerazione binaria. — Tognoli : Una nuova soluzione del problema di Malfatti. — Cantoni : Sulla risoluzione grafica delle equazioni di 2° grado. — Marletta : Sulla condizione d'irriducibilità delle frazioni ordinarie. — Mancinelli : Osservazioni relative alla ricerca della radice quadrata e cubica di un numero intero a meno di un'unità. — Natucci : La riforma nell' insegnamento dell' aritmetica razionale.
Corrispondenza. — Rivista bibliografica.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Herausgegeben von K. Hensel. Georg Reimer, Berlin.

Bd. CXXIX. Hefte 3 u. 4. — F. Mertens : Ein Beweis des Satzes, dass jede Klasse von ganzzahligen primitiven binären quadratischen Formen des Hauptgeschlechts durch Duplikation entsteht. — A. Hurwitz : Ueber eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen. — W. Wirtinger : Ueber eine besondere Dirichletsche Reihe. — H. Minkowski : Diskontinuitätsbereich für arithmetische Æquivalenz. — E. Picard : Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. — L. Schlesinger : Ueber die Lösungen gewisser linearer Differenzialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte. — E. Steinitz : Ueber die Anziehung hyperboloidischer Schalen.
Bd. CXXX. Hefte 3 u. 4. — H. Stahl : Die Abelschen Funktionen von drei Variabeln. — R. Fueter : Die Theorie der Zahlstrahlen. — St. Jolles : Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Komplexe. — E. Picard : De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée. — L. Kœnigsberger : Ueber die Eisensteinschen Satz von

dem Charakter der Koeffizienten der Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen. — ST. JOLLES : Zur synthetischen Theorie der Raumkurven III. Grades k^3 und den Kongruenz C^3_3 ihrer Schmiegungsstrahlen. Kubische Raumkurven und biquadratische Regelflächen, die bezüglich k^3 autoconjugiert sind. — E. STEINITZ : Ueber ein merkwürdiges Polyeder von einseitiger Gesamtfläche. — Inhaltsverzeichnis der Bände 121-130.

Mathesis, Recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Gand, Hoste ; Paris, Gauthier-Villars. Série 3. Tome V. 1905.

. Juillet-décembre 1905. — E. WEBER : Sur quelques coniques associées au triangle. — E. BARISIEN : Exercices de calcul intégral. — H. TSURNICHI : Questions d'arithmétique. — ED. WASTEELS : Sur une transformation des figures sphériques. — V. JERABEK : Podaire de l'hypocycloide de Steiner par rapport à un point de rebroussement. — A. AUBRY : Théorie de l'équation de Pell. — GUSTAVE GÉRARD : Sur l'hélicoïde développable. — V. REYER : Sur une généralisation du théorème de Pascal. — J. NEUBERG : Proposition sur les quatrièmes puissances des côtés d'un triangle.

Bibliographie. — Notes mathématiques. — Solutions de questions proposées. — Questions proposées.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. LAISANT, C. BOURLET et R. BRICARD. 4e série. T. V. Gauthier-Villars, Paris.

Septembre-décembre 1905. — G. LERY : Nouvelles démonstrations du théorème de d'Alembert. — ID. : Première démonstration. — ETIENNE POMEY : Deuxième démonstration. — SALON CHASSIOTIS : Notes sur les courbes gauches. — LANCELOT : Détermination d'une courbe algébrique gauche. — V. JAMET : Sur une propriété de la parabole. — G. FONTENÉ : Décomposition d'une correspondance tangentielle entre deux courbes unicursales. — STUYVAERT : Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques. — UN ABONNÉ : Sur un lieu connu. — STUYVAERT : Quadrilatères de Steiner dans certaines courbes et surfaces algébriques. — G. FONTENÉ : Extension du théorème de Feuerbach. — P. LÉVY : Sur les séries semi-convergentes. — C.-A. LAISANT : Sur les sommes des puissances semblables des racines ; formules de Newton. — A. AURIC : Résolution graphique de l'équation $X^2 - pX + q = o$, p et q étant quelconques. — G. FONTENÉ : Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés. — MAURICE FRÉCHET : Sur deux suites remarquables de polynomes et de courbes. — J. JUHEL-RÉNOY : Sur la projection orthogonale d'un cercle. — V. RETALI : Sur une propriété de la strophoïde. — PIERRE SICARD : Solution de la question d'Analyse du concours d'agrégation de 1905. — Certificats de calcul différentiel et intégral, etc. — Solutions de questions proposées. — Questions.

Nyt Tidsskrift for Matematik, revue dirigée par C. JUEL et V. TRIER ; série A, 16me année ; série B, 16me année ; 1905. L. Jorgensens, Copenhague.

Pædagogisches Archiv. Monatsheft für Erziehung und Unterricht an Hoch. Mittel- und Volksschulen, herausgegeben von Prof. Dr L. FREYTAG : 47. Jahrg., 1905 ; Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secundario : Diretto dal Prof. G. LAZZERI. Serie III. Raffaelo Giusti. Livorno.

Vol. II. Fasc. V et VI (Mars-Juin 1905). — POINCARÉ : Le definizioni generali in matematica. — F. SIRIRANI : Sul luogo di un punto univocamente coordinato ad una coppia di punti mobili. — M. Cipolla : Teoria dei numeri complessi ad N unità (v. fasc. III-IV). — G. Ascoli : Sopra la rappresentazione delle proiettività nello spazio a tre dimensioni. — A. Bindoni : Metodo indiretto per la ricerca dei massimi e minimi di una funzione di variabile reale. — F. Mancinelli : Il concetto di angolo in Goniometria. — G. Marletta : Principi di geometria euclidea. — A. Borriero : Sulla congruenza e simmetria delle figure. — G. Candido : Su d'un applicazione delle funzioni U_n, V_n di Lucas. — Piccole note.

Vol. III. Fasc. I. (Juillet et Août 1905). — M. Pieri : Sulla definizione staudtiana dell' omografia tra forme semplici reali. — G. Lazzeri : Sulla determinazione degli assintoti delle curve algebriche. — M. Cipolla : Intorno alle differenze di O^9 e alle indentità aritmetiche. — G. Sadun : Un teorema sul « modulo principale » di una funzione. — G, Sannia : Equazioni le cui radici formano una progressione geometrica. — F. Sibirani : Sulla definizione di area di una superficie curva.

Prace Matematyczno-Fizyczne, przez S. Dicksteina. T. XVI. 1905.

St. Kalinowski : Sur le phénomène du retard dans la double réfraction électrique et dans la rotation magnétique du plan de polarisation dans les liquides. — E. Stephansen : Eine Bemerkung zur Theorie der linearen Differenzengleichungssysteme mit constanten Coefficienten. — A. Guldberg : Ueber lineare homogene Differenzengleichungen derselben Art. — Al. Laparewicz : Application des formes binaires quadratiques à la décomposition des nombres en facteurs premiers. — S. Kepinski : Sur les vibrations transversales des verges élastiques. — G. A. Miller : Theorems relating to quotient-groups. — Wl. Gorczynski : Sur les méthodes de déduction de la loi de Kirchhoff. — W. Biernacki : Sur les miroires produits par la désintégration galvanique du fer. — W. Biernacki : Sur un analysateur à pénombre et son application à l'étude de la lumière elliptiquement polarisée. — G. Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Traduit par S. Dickstein. — R. Merecki : L'influence de la variable activité du soleil sur les mouvements apériodiques de l'atmophère terrestre.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 3

Fasc. 4-7. — W. Burnside · On the Complete Reduction of any Transitive Permutation-Group ; and on the Arithmetical Nature of the Coefficients in its Irreducible Components. — E. W. Barnes : The Maclaurin Sum-Formula. — Id. : The Asymptotic Expansion of Integral Functions of Finite Non-zero Order. — W. H. Bussey : Generational Relations for the Abstract Group simply isomorphic with the Group LF [2, p^n]. — P. W. Wood : On the Reducibility of Covariants of Binary Quantics of Infinite Order. Part II. — Id. : Alternative Expressions for Perpetuant Type Forms. — T. J. I'A. Bromwich : Theorems on the Logarithmic Potential. — W. H. Young : Ordinary Inner Limiting Sets in the Plane or Higher Space. — G. H. Hardy : A Method for determining the Behaviour of certain Classes of Power Series near a Singular Point of the Circle of Convergence. — J. A. H. Johnston : The Intersection of two Conic Sections. — J. M. Hill, L. N. Filon and H. W. Chapman : On the Projection of two Triangles on to the same Triangle. — W. Burnside : On the Condition of Reducibility of any Group of Linear Substitutions. — G. H. Hardy : On a Class of Analytic Functions. — W. H. Young : Linear Content of a Plane Set of Points.

2. Livres nouveaux:

R. Bonola. — **La Geometria non euclidea,** esposizione storico-critica del suo sviluppo. — 1. vol. in-8°, 214 p.; prix : 5 L.; Zanichelli, Bologna.

H. Bruns. — **Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre.** — 1 vol. in-8° relié, 310 + 18 p.; prix : 8 Mk. 40; B.-G. Teubner, Leipzig.

Catalogue international de la littérature scientifique, publié par une Commission internationale sous la direction de H. Forster Morley. Deuxième et troisième années. Fascicules A : *Mathématiques.* — 2 vol. in-8°, 263 et 228 p.; prix : 18 fr. 75 le volume; Gauthier-Villars, Paris.

C.-C. Dassen. — **Tratado elemental de Aritmética.** — 1 vol. in-12, 548 p.; Hermanos, Buenos-Aires.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. — Tome I, quatrième volume; Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses. Fasc. 1. — B. G. Teubner, Leipzig; Gauthier-Villars, Paris.

J.-A. Fleming. — **Elektrische Wellen-Telegraphie,** deutsch von E. Aschkinass. — 1 vol. cart 185 p.; prix : 5 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Gutzmer. — **Reformvorschläge für den mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterricht** entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher u. Aerzte, nebst einem allgemeinen Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission. — 1 fasc. in-8°, 48 p.; prix : 1 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

Osk. Lesser. — **Die Infinitesimalrechnung** im Unterrichte der *Prima.* Mit 30 Fig. — 1 vol. cart. in-8°, 121 pag.; prix : 2 Mk.; O. Salle, Berlin.

N. Nielsen. — **Handbuch der Theorie der Gammafunktion.** — 1 vol. in-8°, relié, 326 p.; prix : 12 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

Salv. Pincherle. — **Lezioni di Algebra complementare.** Analisi algebrica. — 1 vol. in-8°, 366 p.; prix : 10 Lires, Zanichelli, Bologne.

J. Pionchon. — **Trigonométrie rectiligne et sphérique.** — 1 vol. gr. in-8°, 146 p. *(Bibliothèque de l'Elève-ingénieur)*; prix : 5 fr.; Gratier et Rey, Grenoble; Gauthier-Villars, Paris.

E. Schröder. — **Vorlesungen über Algebra der Logik** (Exakte Logik). *Zweiter Band* herausgegeben von Eug. Müller. — 1 vol. in-8°, XXXII + 206 p.; prix : 8 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

M. Simon. — **Methodik der elementaren Arithmetik** in Verbindung mit algebraischer Analysis. — 1 vol. cart. in-8°, 108 p.; prix : 3 Mk. 20; B.-G. Teubner, Leipzig.

J. Thomae. — **Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene.** — 1 vol. cart. in-8°, 184 p.; prix : 3 Mk. 60; B.-G. Teubner, Leipzig.

G. Vivanti. — **Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.** Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers, Deutsch herausgegeben von A. Gutzmer. — 1 vol. in-8°, relié, 512 p.; prix : 12 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

K. Zindler. — **Liniengeometrie** mit Anwendungen. II Band. — 1 vol. cart. in-8°, 252 p. *(Sammlung Schubert)* prix : 8 Mk.; G.-J. Goeschen, Leipzig.

LES FONCTIONS ANGULAIRES
DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

I. — Quelques remarques sur la continuité.

Définition. — Un triangle sphérique dont aucun côté ne dépasse un quadrant est dit un triangle sphérique *réduit*.

Lemme 1. Dans un triangle sphérique réduit tout angle extérieur du triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

Lemme 2. — Dans un triangle sphérique réduit la bissectrice d'un angle intérieur partage le côté opposé en deux segments dont l'ordre d'inégalité est le même que celui des côtés contigus à ces segments.

Ce lemme est une conséquence du précédent et de la considération du triangle symétrique du proposé par rapport au plan de l'arc de grand cercle bissecteur.

Théorème 1. — Dans tout triangle sphérique réduit, dont les deux côtés de l'angle droit sont suffisamment inégaux et suffisamment réduits, le rapport du plus petit y de ces côtés au plus grand x de ces côtés est un nombre comparable au nombre qui mesure l'angle $\widehat{C}$, opposé au côté y, lorsqu'on prend l'angle droit pour unité.

En d'autres termes, on aura à la fois

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} = \frac{y}{x}\cdot m\,; \\ &\frac{y}{x} = \frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}}\cdot m'\,; \end{aligned}\right. \qquad m \text{ et } m' \text{ désignant deux nombres finis.}$$

Démonstration. — Considérons un triangle sphérique ABC rectangle en A, dont AB est le côté le plus petit, soit $\widehat{C}$

l'angle aigu opposé à ce côté ; sur AC portons $AD_1 = AB$, et joignons B et D_1, par un arc de grand cercle ; portons $D_1D_2 = BD_1$, et joignons B et D_2 par un arc de grand cercle ; et ainsi de suite ; soit D_n le dernier point obtenu sur AC dans cette opération avant de franchir le point C.

Nommons u_1 la valeur commune des angles de sommets B et D_1 dans le triangle isocèle AD_1B ; nommons de même u_2 la valeur commune des angles de sommets B et D_2 dans le triangle isocèle BD_1D_2 ; et ainsi de suite. La considération de l'excès sphérique dans ces triangles successifs nous donne

$$u_n > \frac{u_1}{2^{n-1}} > \frac{1^{\text{droit}}}{2^n},$$

et par suite

$$\widehat{ABD_n} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n > u_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

ainsi donc :

$$(1)\qquad (1^{\text{dr.}} > \widehat{CBA} > 2u_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Notons en passant cette *conséquence :*

L'angle aigu d'un triangle sphérique rectangle et isocèle dont les deux cotés de l'angle droit tendent vers zéro a pour limite la moitié d'un droit.

Soit P le pôle de l'arc de grandeur AC, répétons à la suite l'angle $\widehat{C}$ autant de fois : q, qu'il est possible, dans l'angle droit $\widehat{ACP}$; les bases opposées au sommet C et situées sur AP dans ces triangles successifs vont en croissant ainsi que les aires de ces triangles ; soit

$$\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} \times q\ ,$$

on a :

$$\text{aire ABC} < \frac{\text{aire CQA}}{q},$$

c'est-à-dire en prenant l'aire du triangle trirectangle comme unité :

$$\text{aire ABC} < \text{aire CQA} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}}.$$

ou

$$(2) \qquad \text{aire ABC} < \frac{\text{arc BC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\varepsilon}{\left(1-\frac{\varepsilon}{q}\right)^{\text{[illegible]}}}$$

ε désignant un nombre positif < 1

l'entier q sera supposé > 1.

D'ailleurs nous avons pour tirer parti de (2)

$$\text{aire } ABD_k < \text{aire ABC}$$

donc en vertu de (2)

$$u_k - \widehat{ABD_k} - 1^d < \frac{u_k}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}.$$

ou, à fortiori :

$$u_n\left[1 - \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}\right] - 2u_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1^d < 0.$$

$$(3) \qquad u_n\left[1 - \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}\right] < 1^d - 2u_1 - \frac{2u_1}{2^n} < \frac{2u_1}{2^n}.$$

Or nous avons

$$x < 2^{n-1} y.$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n} < 2 \cdot \frac{y}{x}.$$

donc en substituant dans (3) nous aurons cette limitation de u_n

$$u_n < 4u_1 \frac{y}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}}.$$

et à fortiori

$$\widehat{BCA} < 4u_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \frac{x}{1 \text{ quadrant}}} \cdot \frac{y}{x}.$$

et si

$$\frac{x}{1 \text{ quadrant}} < \frac{1}{3},$$

$$\widehat{BCA} < 12u_1 \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Nous allons maintenant limiter le rapport $\frac{y}{x}$ par l'angle C. Sur AB prenons $AD = AC = x$; et portons sur AB à partir de A, $AB = y$, autant de fois, soit r, que possible dans AD ; $AE = (r + 1)y > AD$ soit C''_0 l'angle ECA; et soit C_0 l'angle DCA;

$$ry < x < (r + 1)y$$

et en vertu d'une remarque précédente :

$$\widehat{C''_0} < (r + 1)\widehat{C},$$

et à fortiori :

$$\widehat{C_0} < \left(\frac{x}{y} + 1\right)\widehat{C},$$

d'où

$$\frac{y}{x + y} < \frac{\widehat{C}}{C_0},$$

ce qui donne

$$\frac{y}{x} < \frac{\widehat{C}}{C_0 - C}$$

Théorème 2. — Extension du théorème précédent aux triangles plans. Dans la géométrie de la droite fermée, le plan est une variété de la sphère et la méthode précédente s'applique alors sans modification. Nous n'avons alors qu'à envisager le cas de la droite ouverte ; or, en laissant de côté le cas classique d'Euclide, on sait que dans la géométrie de la droite ouverte la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits d'une quantité qu'on appelle le déficit du triangle.

Répétons alors la construction indiquée plus haut des points successifs D_1, D_2,..., D_n situées sur AC et conservons les notations employées, nous aurons ici, en introduisant $x' = \mathrm{BC}$,

$$x' < 2^{n+1} y\ ;$$

et

$$\widehat{\mathrm{C}} < u_n < 1^{\mathrm{droit}} \cdot \frac{1}{2^n} < 1^{\mathrm{droit}} \cdot \frac{2y}{x'} < \frac{2y}{x - y}\ ,$$

ou

$$\frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1^{\mathrm{droit}}} < \frac{2y}{y - x}\ .$$

Telle est la limitation de l'angle C par le rapport $\frac{y}{x}$; quant à la limitation du rapport $\frac{y}{x}$ par l'angle C elle ne souffre aucune modification.

Remarque. — Les théorèmes précédents nous seront surtout utiles en considérant des triangles rectangles dont le plus grand côté de l'angle droit sera variable en tendant vers zéro, c'est-à-dire infiniment petit.

On peut alors comme conséquence directe de ces théorèmes énoncer ce résultat : si y est infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de x, l'angle C est infiniment petit avec x et réciproquement.

De là encore les conséquences importantes qui suivent, mais dont la démonstration est facile et intuitive :

Théorème 3. — Dans un cercle *donné* la corde qui est vue du centre sous un angle infiniment petit est un infiniment petit de même ordre et elle fait un angle infiniment petit avec la perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

Théorème 4. — Dans un triangle rectangle (sphérique ou plan) dont le côté de l'angle droit x est fini et dont l'autre côté y est infiniment petit, l'excès de l'hypoténuse z sur le côté x est avec y dans un rapport qui est infiniment petit.

Théorème 5. — Sur le plan (ou sur la sphère) la longueur d'un arc de cercle peut être définie comme la limite du périmètre d'une ligne brisée inscrite dont les côtés tendent simultanément vers zéro. (Remarque ; sur la sphère les éléments de la ligne brisée sont évaluées angulairement par leurs angles au centre de la sphère).

THÉORÈME 6. — La longueur L d'un arc de cercle dont l'angle au centre est α, est déterminé, est une fonction *continue* du rayon r de l'arc et l'on peut écrire

$$L = \alpha R(r) \text{ , la fonction R est continue.} \tag{5}$$

THÉORÈME 7. — Ce théorème s'applique aussi sur la sphère, en évaluant angulairement les longueurs d'arcs de grand cercle et l'on a

$$l = \alpha\psi(r) \text{ , } l \text{ et } r \text{ étant évaluées angulairement.} \tag{6}$$

REMARQUE. — Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde tend vers l'unité.

II. Rotations finies autour d'axes concourants. Rotations relatives.

THÉORÈME 8. — Quand un solide éprouve un déplacement autour d'un point fixe, ce déplacement peut être obtenu par une rotation convenable autour d'un axe convenable passant par ce point fixe.

THÉORÈME 9. — Quand un solide fixé par un point O éprouve une rotation α_1 autour d'un axe U_1 passant par ce point ; puis une rotation α_2 autour d'un axe U_2 passant par ce point, le déplacement final du solide peut être obtenu par une rotation unique α_3 autour d'un axe U_3 passant par ce même point.

En représentant les axes par leurs images sphériques *orientées*, sur une sphère de centre O la combinaison des déplacements successifs (1) et (2) est définie comme il suit (toutes les rotations ne dépassant pas un demi-tour) : Par le premier pôle P_1 menons un demi-arc de grand cercle P_1x faisant avec le demi-arc de grand cercle $\overrightarrow{P_1P_2}$ un angle égal à la rotation $-\frac{1}{2}\alpha_1$; par le second pôle P_2 menons un demi-arc de grand cercle P_2y faisant avec le demi-arc de grand cercle $\overrightarrow{P_2P_1}$ l'angle $+\frac{1}{2}\alpha_2$.

Ces deux demi-arcs de grand cercle se coupent au point P_3 et l'angle de $\overrightarrow{P_3P_2}$ avec le prolongement de $\overrightarrow{P_1P_3}$ est égal à $+\frac{1}{2}\alpha_3$.

Définition des rotations relatives autour d'un point fixe. — Soient U_1, U_2, U_3,.... des droites concourantes envisagées dans l'ordre précité ; considérons un premier solide S_1 animé d'une rotation continue α_1 autour de U_1, puis, par rapport à ce solide S_1, considérons un second solide S_2 en mouvement relatif de rotation continue et décrivant α_2 par rapport à une droite de S_1 qui coïncidait avec U_2 à l'époque t ; nous supposons que les rotations continues et simultanées α_1 et α_2 demeurent dans un rapport constant donné, on pourra poser par exemple $\alpha_1 = \omega_1 (t' - t)$, $\alpha_2 = \omega_2 (t' - t)$,
les constantes ω_1 et ω_2 seront alors les vitesses angulaires des deux rotations relatives considérées.

On considérera de même un troisième solide se détachant du solide S_2 par une rotation continue α_3, à vitesse constante ω_3 autour d'une droite de S_2 qui à l'époque t coïncidait avec U_3 et ainsi de suite.

Nous définissons ainsi par des emboîtements successifs de solides le mouvement d'un dernier solide S_n en mouvement relatif de rotation continue par rapport au solide précédent S_{n-1}, cette rotation s'exécutant autour d'une droite de S_{n-1}, qui coïncidait avec U_n à l'époque t. Le temps t ne joue ici que le rôle d'une variable indépendante.

A l'égard de ces mouvements on a les théorèmes suivants :

Théorème 10. — Dans un mouvement de rotation uniforme chaque point d'un solide possède une vitesse à l'époque t, c'est-à-dire que si on envisage le déplacement MM' d'un point du corps durant le temps $dt = t' - t$, la direction MM' *émanée* de M tend vers une direction limite lorsque dt tend vers zéro et en même temps le rapport $\frac{MM'}{dt}$ tend vers une valeur limite appelée *vitesse actuelle*.

Théorème 11. — Quand un solide pivote sur un point fixe, si deux points particuliers du solide ont l'un et l'autre une vitesse actuelle, tous les autres points du solide ont aussi une vitesse actuelle ; celle-ci est la même que si le solide allait à partir de l'époque t continuer à tourner d'une rotation uniforme autour d'un axe convenable ; ce théorème est une conséquence des théorèmes 8 et 10.

Les théorèmes précédents rapprochés de la notion des mouvements relatifs de pivotement et des lemmes de continuité conduisent à cette conséquence importante.

THÉORÈME 12. — La combinaison de deux mouvements relatifs de rotation sur un même point pivot est au point de vue de la distribution des vitesses dans le dernier solide en mouvement, *indépendante de l'ordre dans lequel on a envisagé les droites* U_1 U_2 *pour définir le mouvement combiné;* et la distribution des vitesses est la même que si le solide tournait avec une vitesse ω_3 autour d'un axe dont le pôle p_3 sur une sphère concentrique au pivot et sur l'arc p_1 p_2 qui joint les pôles séparés définis à l'époque t; de plus en faisant $x = p_1 p_3$, $y = p_3 p_2$, $z = x + y$, on aura

$$\frac{\omega_1}{\psi(y)} = \frac{\omega_2}{\psi(x)} = \frac{\omega_3}{\psi(z)} . \tag{7}$$

COROLLAIRE. — Si donc on considère les *vecteurs* ou segments représentatifs des rotations ω_1, ω_2, ω_3 portés sur ces axes, *il existe une opération qui permet de déduire le troisième vecteur au moyen des deux premiers,* et le vecteur ω_3 est dans le plan des deux premiers.

THÉORÈME 13. — Lorsqu'un point M d'un solide éprouve par une rotation donnée un déplacement infiniment petit du premier ordre de M en M′, un point m voisin de M par un écart d'ordre supérieur au premier viendra en m' et l'écart M′m' sera infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

THÉORÈME 14. — La combinaison de n rotations relatives concourantes définies plus haut est, au point de vue de la distribution des vitesses à l'époque t, indépendante de l'ordre qui a présidé à l'emboîtement des mouvements successifs.

COROLLAIRE. — Il existe une opération vectorielle définissant le vecteur *résultant* de plusieurs vecteurs donnés concourants, et cette opération jouit des propriétés suivantes :

1. L'opération est invariante (conséquence du théorème 9);
2. L'opération se réduit à l'addition algébrique des segments si les vecteurs sont portés par une même droite ;
3. L'opération est commutative (indépendante de l'ordre) ;

4. L'opération est associative (plusieurs vecteurs composants sont remplaçables par leur vecteur résultant);

5. L'opération est continue;

6. L'ensemble de deux vecteurs n'est équivalent à zéro que si ces vecteurs, portés par une même droite, sont égaux et contraires.

III. — Composition des vecteurs.

Composition des vecteurs concourants d'un plan.

Nous allons indiquer l'interprétation analytique des faits qui précèdent. Soit F un vecteur, d'intensité f, émanant de O_1 et défini dans un plan en *direction autour de ce point* par l'angle *orienté* α que sa direction fait avec une droite OX.

Il résulte des propriétés de l'opération de composition des vecteurs que ce vecteur peut être décomposé en deux vecteurs X et Y agissant suivant Ox et Oy et que

$$X = f.g(\alpha) \ . \quad Y = f.h(\alpha) \ ,$$

g et h désignant deux fonctions *continues* de l'angle α.

L'invariance donne de suite les propriétés :

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(-\alpha) = g(\alpha) \ , \quad h(-\alpha) = -h(\alpha) \ , \\ g(\alpha + 1^{dr}) = -h(\alpha) \ , \\ h(\alpha + 1^{dr}) = h(\alpha) \ , \end{array} \right.$$

enfin l'associativité et l'invariance combinées, nous donnent après une rotation arbitraire du système des axes de repère:

$$\text{(E)} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u+v) = g(u)g(v) - h(u)h(v) \ , \\ h(u+v) = h(u)g(v) + h(v)g(u) \ . \end{array} \right.$$

Les propriétés (I) et (E) nous donnent de suite l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{c} g(u+v) + g(u-v) = 2g(u)g(v) \ . \\ \text{que nous associerons à la condition de continuité} \\ g(0) = 1 \ . \end{array} \right.$$

Nous aurons d'ailleurs ici la condition supplémentaire $g(1^{\text{droit}}) = 0$. (8 bis). Or, j'ai démontré *(Bull. Soc. Mathém. de France,* Année 1900) que toute fonction g continue, solution de (8) *doit admettre une fonction dérivée* et que les seules solutions continues de (8) sont alors :

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ou bien} & g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3\ldots 2n} \equiv \cos \frac{u}{k}\,, \\ \text{ou bien} & g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3\ldots 2n} \equiv \cos \text{hyp}\, \frac{u}{k}\,, \\ \text{ou bien} & g(u) = 1\,. \end{array} \right.$$

Dans le cas qui nous occupe nous avons la condition supplémentaire $g(1^{\text{dr}}) = 0$ et le premier type de solution convient seul ici ; la constante k dépend du choix de l'unité d'angle. k sera égal à 1 si on adopte une unité d'angle dans laquelle l'angle droit sera représenté par la plus petite racine $\frac{\pi}{2}$ de l'équation :

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} = 0\,.$$

Composition des vecteurs concourants dans l'espace. — En décomposant un vecteur suivant les 3 arêtes d'un trièdre tri-rectangle, on voit qu'on peut effectuer cette décomposition, en apparence de trois manières différentes, et en exprimant que ces trois modes sont : 1° compatibles, 2° uniques ; d'après le 6$^{\text{me}}$ caractère de la composition on obtient *les relations fondamentales* qui existent entre les six éléments d'un triangle sphérique.

Pour compléter l'étude du système (8), j'ajoute que si l'on pose

$$H(\alpha) = \int_0^\alpha g(z)\,dz\,,$$

on aura, en laissant de côté le cas de $g(z) = 1$, et après un choix convenable de la variable z,

$$g(\alpha+\beta)=g(\alpha)g(\beta)-\varepsilon H(\alpha)H(\beta)\ ,$$
$$H(\alpha+\beta)=g(\alpha)H(\beta)+g(\beta)H(\alpha)\ ,$$

$\varepsilon=1$ si $g(\alpha)=\cos\alpha$, et en ce cas $H(\alpha)=\sin\alpha$;
$(\varepsilon=-1)$ si $g(\alpha)=\cos\operatorname{hyp}\alpha$, et en ce cas $H(\alpha)=\sin\operatorname{hyp}\alpha$.

Composition des vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite et agissant d'un même côté. — Si on considère 2 rotations successives autour d'axes perpendiculaires à un plan P et dirigés d'un même côté de ce plan, on voit que si elles sont suffisamment petites, elles sont remplaçables par une rotation unique perpendiculaire à ce plan ; cette circonstance va remplacer ici le rôle joué par le théorème 9 pour les vecteurs concourants. De là et par les lemmes déjà utilisés on conclut que :

Deux vecteurs d'égale intensité p, tous deux situés dans un même plan, perpendiculaires à une même droite de ce plan, et tirant d'un même côté de cette droite, admettent un vecteur résultant perpendiculaire à la même droite et de plus l'intensité de ce vecteur résultant a pour valeur $2\,p$ S (x) ; x désignant la demi-distance des points où les vecteurs composants coupent la perpendiculaire commune, et S désignant une fonction continue.

De plus, en considérant 2 paires de tels vecteurs dont les pieds sur leur perpendiculaire commune sont distribués sur cette droite symétriquement par rapport à un même point, on voit que le caractère continu et le caractère associatif de la composition se traduisent encore par les conditions :

$$(11)\quad \begin{cases} S(x+y)+S(x-y)=2S(x)S(y)\ , \\ S(0)=1\ . \end{cases}$$

Mais, cette fois la condition supplémentaire $g\,(1^{\text{droit}})=o$ de la composition des vecteurs concourants n'a plus son analogue ; en sorte que nous avons ici le choix entre les trois solutions du problème 8, c'est-à-dire entre les trois déterminations :

$$(11)\quad \begin{cases} \text{ou} \quad S(x)=1\ . \\ \text{ou} \quad S(x)=\cos\dfrac{x}{k}\ , \\ \text{ou} \quad S(x)=\cos\operatorname{hyp}\dfrac{x}{k}\ , \end{cases}$$

ce qui nous indique que la géométrie de l'ajustage va alors bifurquer en trois variétés dont la géométrie d'Euclide est un cas particulier.

La composition dans un plan de deux vecteurs inégaux perpendiculaires de même sens sur une même droite s'obtient d'ailleurs immédiatement en introduisant la fonction R (r) de l'équation 5 ; il suffit de comparer les vitesses des pieds A et B des deux vecteurs ω_1 et ω_2 dans les mouvements composants et dans le mouvement résultant, soit C situé entre A et B le pied du vecteur résultant ω_3 ; en faisant A C $= x$, C B $= y$.

Nous aurons de suite :

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)} .$$

Comparons ce résultat qui concerne les vecteurs vitesses de rotations à celui que fournit l'emploi de la fonction S ; notre argument de comparaison sera la généralisation d'une méthode indiquée par Archimède. En effet, introduisons la fonction H, définie plus haut ; soit C′ un point intermédiaire entre A et B sur AB et soient C′A $= x'$, C′B $= y'$, D le symétrique de C′ par rapport au pied A, E le symétrique de C′ par rapport au pied B.

Par le rôle de la fonction H ou par sa forme analytique déjà indiquée, nous voyons que cette fonction est croissante dans la géométrie de la droite ouverte, de même cette fonction est croissante tant que la valeur de la variable n'atteint pas le quart du tour de la droite, dans la géométrie de la droite fermée, or on peut s'assurer en prenant la distance A B moindre qu'un demi-tour de droite qu'il n'existe entre A et B qu'un point C′ tel que

$$\frac{\omega_1}{H(x')} = \frac{\omega_2}{H(y')} .$$

Supposons le point C′ ainsi déterminé, nous pourrons poser :

$$\omega_1 = 2q\int_0^{x'} S(t)\,dt = 2qH(x') .$$

$$\omega_2 = 2q\int_0^{y'} S(t)\,dt = 2qH(y')\ ,$$

on peut alors considérer le vecteur ω_1 comme le vecteur résultant d'une infinité de paires de vecteurs chargeant uniformément le segment C'D avec la densité de charge q par unité de longueur et en même temps le vecteur ω_2 sera le résultat d'une charge de vecteurs infiniment petits chargeant le vecteur C' E avec la même densité de charge ; le vecteur résultant de ω_1 et de ω_2 sera donc un vecteur ω_3 perpendiculaire à AB et dont le pied C″ est au milieu de DE ; ce vecteur ω_3 est alors déterminé par la relation :

$$\omega_3 = 2q\int_0^{x'+y'} S(t)\,dt = 2qH(x'+y')\ ,$$

d'ailleurs, si x'' et y'' sont les distances du point C″ à A et B, on a évidemment ;

$$x'' = y'\ , \quad y'' = x'\ ,$$

en sorte que nous avons

$$\frac{\omega_1}{H(y'')} = \frac{\omega_2}{H(x'')} \qquad \text{avec la condition } x'' + y'' = AB = s\ ,$$

comme nous avions tout à l'heure

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} \qquad \text{avec la condition } x + y = s\ ,$$

mais de plus le point C″ est le pied de vecteur résultant de ω_1 et de ω_2 comme le point C est le pied du vecteur résultant des deux mêmes ; donc C et C″ se confondent et nous concluons avec $x'' = x$, et $y'' = y$

$$\frac{R(y)}{R(x)} = \frac{H(y)}{H(x)}\ ,$$

et comme x et y peuvent être pris quelconques avec ω_1 et ω_2, il en résulte que les fonctions $R(x)$ et $H(x)$ sont proportionnelles l'une à l'autre.

La formule d'addition de la fonction H est donc applicable à la fonction R et nous avons alors comme conséquence des proportions

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)} ,$$

la relation

$$\omega_3 = \omega_1 S(x) + \omega_2 S(y) .$$

Remarque. — Le raisonnement précédent eut pu s'appliquer mot pour mot, par l'emploi d'une sphère, aux vecteurs concourants et nous aurions trouvé alors pour la fonction analogue de $R(x)$ sur la sphère $\psi(\alpha)$ la même proportionnalité :

$$\psi(\alpha) = h(\alpha) . m = \sin\alpha . m$$
$$R(x) = H(x) . m' .$$

Il reste à déterminer la constante m' car m est évidemment égal à 1.

Pour y parvenir exprimons que la vitesse d'un point situé sur le vecteur ω_3 résultant des vecteurs qui représentent les vitesses des rotations concourantes ω_1 et ω_2 est nul ; en nommant x et y les distances d'un point de ω_3 aux droites ω_1 et ω_2 qui font avec ω_1 et ω_2 les angles α_1 et α_2 nous aurons:

$$\frac{R(x)}{\sin\alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin\alpha_2} ,$$

car

$$\omega_1 R(x) = \omega_2 R(y)$$

et par la composition des vecteurs concourants

$$\omega_1 \sin\alpha_1 = \omega_2 \sin\alpha_2 ,$$

puisque

$$\omega_1 H(\alpha_1) = \omega_2 H(\alpha_2)$$

par la méthode d'Archimède.

Rapprochons ce résultat du théorème fondamental sur le dièdre.

Considérons une droite OA qui tourne d'un angle infiniment petit autour d'un axe OI, soit OA' la position infiniment voisine de OA ; AA' est la corde d'un arc de cercle de centre I ; soit de même B un autre point de OA qui vient en B′ par la même rotation, BB′ est la corde d'un arc de cercle de centre J situé sur l'axe OI et d'après la propriété du dièdre, les angles AOA′ et BOB′ angles rectilignes d'un même dièdre sont égaux.

D'autre part, dans le triangle isocèle AOA′, et lorsque la rotation considérée tend vers zéro, on a :

$$\text{Lim}\ \frac{\text{AA}'}{\text{angle AOA}'} = \text{R}(\text{OA})\ , \quad \text{Lim}\ \frac{\text{AA}'}{\text{angle AIA}'} = \text{R}(\text{AI})\ ;$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre

$$\text{Lim}\ \frac{\text{angle AIA}'}{\text{angle AOA}'} = \frac{\text{R}(\text{OA})}{\text{R}(\text{OI})} = \frac{\text{R}(\text{OB})}{\text{R}(\text{OI})}\ , \ \text{puisque}\ \widehat{\text{AIA}'} = \widehat{\text{BJB}'}.$$

Ainsi donc le rapport $\frac{\text{R}(\text{OI})}{\text{R}(\text{OA})}$ est une simple fonction de l'angle $\alpha = \text{AOI}$; désignons cette fonction par $f(\widehat{\text{AOI}})$.

En rapprochant ce résultat de la proportion tout à l'heure obtenue, savoir

$$\frac{\text{R}(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{\text{R}(y)}{\sin \alpha_2}$$

nous aurons :

$$\frac{f(\alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{f(\alpha_2)}{\sin \alpha_2}\ ,$$

c'est-à-dire $f(\alpha) = \sin \alpha . n$, n étant constant.

Or, pour $\alpha = 1^{\text{droit}}$, $f(\alpha) = 1$, comme $\sin \alpha$: donc $n = 1$.

Démontrons enfin que $m' = 1$, c'est-à-dire, en écartant le cas euclidien, qu'une fois l'unité de longueur droite adoptée de manière que

$$\text{S}(x) = \begin{cases} \text{soit} & \cos x \\ \text{soit} & \cos \text{hyp.}\ x \end{cases}$$

on aura

$$\text{R}(x) = \text{H}(x) = \int_0^x \text{S}(z)\, dz\ .$$

il n'y a d'ailleurs besoin de démontrer le théorème que dans la géométrie de la droite ouverte. Pour celà considérons sur une sphère déterminée un petit cercle de la sphère dont 2 rayons sphériques PA et PB issus du pôle P font entre eux l'angle α, soit l la longueur de l'arc de ce petit cercle intercepté, si r est le rayon de la sphère, on a :

$$\frac{l}{R(r)} = \sin\left(\frac{AP}{R(r)}\right)\alpha.$$

Si les rayons AP et PB deviennent infiniment petits on pourra donc écrire en vertu des résultats déjà acquis :

$$\mathrm{Lim}\ \frac{l}{\text{corde AP}} = \alpha .$$

Or si on projette la figure sur le plan du petit cercle, si P'A est la projection de la corde AP, on a :

$$\mathrm{Lim}\ \frac{\text{corde PA}}{P'A} = 1 , \quad \text{donc aussi}, \quad \mathrm{Lim}\ \frac{l}{P'A} = \alpha ;$$

or

$$l = H(P'A) . \alpha . m' ,$$

et comme $\frac{H(P'A)}{PA'}$ a pour limite 1 quand P'A tend vers zéro, on a

$$\mathrm{Lim}\ \frac{l}{P'A} = \alpha . m' ,$$

d'où, en comparant les deux limites de $\frac{l}{P'A}$, on conclut $m' = 1$.

Remarque. — Dans la géométrie de la droite ouverte et dans un triangle plan qui a deux côtés infiniments petits le déficit de la somme des angles à 2 angles droits est infiniment petit.

IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.

L'étude déjà faite d'un système de rotations relatives autour d'axes concourants fournit un lemme important qui nous permettra d'aller plus loin.

Lemme Fondamental. — Soient U_1 et U_2 deux droites actuellement données et ne se coupant pas ; considérons un premier corps solide S_1 animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1, considérons la droite Δ_2 de ce solide qui coïncidait avec U_2 à l'époque t, et envisageons par rapport au solide S_1 un second solide S_2 tournant sur S_1 avec une vitesse angulaire constante ω_2 ; soit un certain point du solide S_2, défini par sa position A à l'époque t; à l'époque t ce point coïncide avec un certain point du solide S_1 qui à l'époque t' sera venu en B, si on donne alors au point B la rotation relative qu'il doit éprouver autour de la position de Δ_2 à l'époque t' avec vitesse angulaire ω_2 le point B vient en C; C sera la position à l'époque t' occupée par le point du solide S_2 qui était en A à l'époque t.

Dautre part, considérons le vecteur issu de A qui représente la vitesse linéaire due à une rotation de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1; considérons encore le vecteur issu de B qui représente la vitesse linéaire *qu'aurait* le point A s'il tournait autour de U_2 avec la vitesse angulaire ω_2; formons le vecteur *résultant* de ces deux vecteurs concourants et multiplions le par la durée $t' - t$, nous obtenons ainsi un vecteur A D; *je dis que l'extrémité D de ce vecteur sera séparée du point C par un écart infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de* $t' - t$.

Démonstration. — Observons d'abord que si Ω_3 est le vecteur résultant de deux vecteurs concourants en O, Ω_1 et Ω_2 et que si M est un point de la perpendiculaire élevée de M au plan des trois vecteurs Ω la vitesse v_3 de M due à la rotation Ω_3 sera un vecteur égal au vecteur résultant des deux vecteurs v_1 et v_2 qui représenteraient les vitesses linéaires qui seraient dues aux rotations isolées Ω_1 et Ω_2. (Conséquence des résultats déjà acquis et de l'invariance de l'opération vectorielle; soit alors $dt = t' - t$ une durée infiniment petite; du mode d'équivalence des vecteurs concourants interprétés par des vitesses de rotation on conclut que le vecteur $V_3\, dt$ est la limite de la droite qui ferme le contour de deux vecteurs successifs MN et NN', lorsque ce contour se modifie à tout instant de la durée dt de la manière suivante:

N est la position occupée à l'époque $t + dt$ par un point de S_1 qui était en M à l'époque t; le segment NN' est la corde d'un déplacement relatif de S_2 par rapport à S_1, et tournant autour d'une droite Δ_2. Cette corde variable est-elle même entraînée avec le solide S_1 pendant que le point de départ N de cette corde décrit d'un mouvement continu l'arc dont M N est la corde dans la rotation Ω_1; or pendant le déplacement de S_1 nous pouvons envisager les segments NM et NN′ comme issus du point mobile N et *repèrés* par rapport à un trièdre de sommet N et qui serait invariablement lié au solide S_1 ; or la droite NM issue de N et ainsi *repèrée* TEND vers une droite déterminée de S_1 qui est la tangente en N à l'arc M N, et de même la droite NN′ issue de N et ainsi repèrée tend vers une droite déterminée de S_1 perpendiculaire au plan de N et de la droite Δ_2 qui à l'époque t porte Ω_2 ; ces deux droites limites coïncident d'ailleurs à l'époque t avec les vecteurs distincts V_1 et $-V_2$; on conclut de là aisément par nos lemmes de continuité que :

1. le plan MNM′ qui pivote sur M fait un angle infiniment petit avec le plan des vecteurs V_1 et V_2 ;

2. l'angle que fait la droite $\overrightarrow{NN'}$ avec le vecteur $\overrightarrow{NM}$ est infiniment peu différent du supplément de l'angle de V_2 et de V_1 ;

3. l'écart entre le point N′ et l'extrémité du vecteur $V_3\,dt$ est infiniment petit du second ordre ;

4. l'extrémité du vecteur $V_3\,dt$ et le point où vient l'extrémité du vecteur $V_2\,dt$ par une translation $V_1\,dt$ d'axe V_1 sont séparés par un écart infiniment petit du second ordre.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme.

Nous prendrons comme vecteurs V_1 et V_2 les vitesses linéaires dues aux rotations isolées ω_1 sur U_1 et ω_2 sur U_2.

Ces vecteurs V_1 et V_2 peuvent être réalisés comme vitesses linéaires dues à deux rotations concourantes Ω_1 et Ω_2 en un point O de la perpendiculaire élevée de M au plan de V_1 et de V_2. D'autre part en considérant les positions relatives de S_1 tournant autour de U_1 puis de δ_2 tournant autour de Δ_2 nous voyons que les cordes $M\nu$ et $\nu\nu'$ de ces deux déplacements relatifs peuvent encore être repèrées par rapport à un trièdre de sommet ν lié au solide S_1, or bien que ce contour variable $M\nu\nu'$ soit différent du contour variable MNN′ envisagé tout à l'heure, il possède, dans ses déplacements de pivotement sur ν dans S_1 et de pivotement sur M dans l'espace fixe, les propriétés suivantes :

1. la droite $M\nu$ pivotant sur M tend vers la droite du vecteur V_1 ;

2. La corde $\nu\nu'$ pivotant sur ν dans S_1 tend vers une droite de S_1 qui à l'époque t est dirigée suivant la droite qui porte le vecteur V_2 ;

3. enfin par les lemmes de continuité le plan de contour $M\nu\nu'$ et le plan de V_1 et V_2 font un angle infiniment petit;

4. par les mêmes lemmes le point ν' est à un écart du second ordre du point où vient l'extrémité du vecteur $V_2\,dt$ subissant la translation dont l'axe est $\overline{V_1\,dt}$ et dont l'étendue centrale est $V_1\,dt$ donc enfin le vecteur $\frac{\overrightarrow{M\nu'}}{dt}$ issu de M a pour valeur limite le vecteur V_3 issu de M. C. Q. F. D.

Remarque. — Le cas où les vecteurs V_1 et V_2 seraient dans un même plan exigerait une légère modification de la démonstration.

Corollaire. — Le vecteur $\lim. \frac{M\nu'}{dt} = V_3$ est indépendant de l'ordre dans lequel sont envisagés les vecteurs ω_1 et ω_2 portés par U_1 et par U_2 donc:

Théorème 15. — Dans le mouvement qui résulte de deux rotations relatives autour de deux axes donnés à l'époque t tout point du second solide défini par sa position à l'époque t a une vitesse indépendante de l'ordre des emboitements des solides entraînés.

Théorème 16. — Le théorème précédent se généralise de lui-même pour le cas de n rotations relatives quelconques.

Théorème 17. — La vitesse linéaire d'un point du solide S_n défini par sa position à l'époque t est le vecteur résultant des vecteurs qui représentent pour les mêmes points les vitesses linéaires dues aux rotations *isolées* ω_1, ω_2,... portées par les axes U_1 U_2,... etc.

Définition des systèmes de vecteurs équivalents. — Le système des vecteurs vitesses de rotation, $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_n$, portés par les droites U_1, $U_2 \ldots$, U_n définit donc, dans une composition de mouvements relatifs, *une distribution des vitesses* qui à l'époque t est indépendante de l'ordre dans lequel sont envisagés ces vecteurs, tout vecteur ω_i peut d'ailleurs, sans changer *la distribution des vitesses* dans l'espace envisagé à l'époque t, être décomposé en vecteurs concourants, en l'un quelconque des points de la droite qui porte ce vecteur.

Enfin, par la nature même des vecteurs vitesses de rotation, une paire de deux vecteurs égaux et contraires, portés par une même droite, mais non immédiatement appliqués au même point, forment, au point de vue de la distribution des vitesses un ensemble équivalent à zéro, c'est-à-dire un ensemble *en équilibre;* une telle paire se nomme *paire de vecteurs mutuels*. Nous pouvons donc enfin énoncer le théorème intéressant que voici :

THÉORÈME 18. — Il existe des systèmes de vecteurs *équivalents* et cette équivalence jouit des propriétés suivantes :

1. Tout système de vecteurs reste équivalent à lui-même quand on lui ajoute ou lui retranche un nombre quelconque de paires de systèmes de deux vecteurs mutuels;

2. un système de vecteurs concourants équivaut toujours à un vecteur résultant déterminé comme nous l'avons vu ;

3. Un système de deux vecteurs ne peut équivaloir à zéro, (c'est-à-dire produire une distribution de vitesses nulles) que si ces vecteurs forment une paire de vecteurs mutuels.

Ces propriétés vont nous permettre d'achever la trigonométrie plane.

V. — Réduction de Poinsot et Trigonométrie plane.

Soient V un vecteur, et O un point particulier de l'espace d'ailleurs quelconque, soit H le pied d'une perpendiculaire abaissée de O sur V, et soit H′ le point symétrique de H par rapport au point O. Considérons le vecteur V comme appliqué en H ; remplaçons d'abord le vecteur V_H par les vecteurs $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$, $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$, puis appliquons au point H′ deux vecteurs $W_{H'}$ et $-W_{H'}$, perpendiculaires à OH dans le plan (O, V_H) et égaux respectivement à $\frac{1}{2}V_H$ et à $-\frac{1}{2}V_H$; c'est permis puisque $W_{H'}$ et $-W_{H'}$ s'équilibrent. Soit x la distance OH.

Les vecteurs $\left(\frac{1}{2} V\right)_H$ et $+ W_{H'}$ se composent en un vecteur unique passant par O perpendiculaire à OH et égal à $V.S(x)$; et il reste un groupe de deux vecteurs, perpendiculaires aux extrémités d'une même droite, égaux, et de sens opposés c'est *ce que nous nommerons un couple;* la droite menée par O perpendiculaire au plan du couple est dite l'axe du couple; si sur l'axe du couple on porte le produit $2VR(x)$ dans un sens pour lequel la rotation que suscite l'idée du couple soit orientée par une convention choisie une fois pour toutes (rotation droite, gauche par exemple); ce segment se nomme *le moment du couple; x* est le bras de levier du couple.

Moyennant ces définitions la transformation précédente peut ainsi s'énoncer :

Théorème 19. — Tout vecteur V équivaut à un certain vecteur passant par O et à un couple dont l'axe passe aussi par le point O.

Théorème 20. — Deux couples de même axe et de sens contraire équivalent à zéro si leurs vecteurs perpendiculaires à une même droite sont en raison inverse des fonctions R de leurs bras leviers.

Démonstration. — Soient P_1, Q_1 les vecteurs du premier couple appliqués aux points respectifs A_1 et B_1 soient P_2, Q_2 les vecteurs du second couple appliqué respectivement aux points A_2 et B_2. A_2 et A_1 sont d'un même côté de O, mais P_1 et P_2 sont perpendiculaires à OD_1 et de sens contraires, les vecteurs P_1 et P_2 ont un vecteur résultant $\mathfrak{T}$ passant par O car si x et y sont les demi bras de levier des deux couples on a, par hypothèse :

$$\frac{P_1}{R(y)} = \frac{P_2}{R(x)} = \frac{\mathfrak{T}}{R(x+y)},$$

or, par un demi tour exécuté autour de l'axe commun de leurs couples le vecteur $\mathfrak{T}$ résultant de P_1 et de P_2 se change dans le vecteur $\mathfrak{T}'$ résultant de Q_1 et de Q_2; mais $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, égaux et directement contraires, s'équilibrent.

Théorème 21. — Deux couples qui ont même moment sont équivalents.

Théorème 22. — Si plusieurs couples ont des axes concourants, ces couples se composent en un seul dont le moment est un vecteur résultant des moments des couples composants.

Théorème 23. — Un système quelconque de vecteurs peut toujours se réduire à un vecteur unique passant par O et à un couple dont l'axe passe par O ; et le système proposé ne peut équivaloir à zéro que si ces deux derniers éléments se réduisent *séparément* à zéro l'un et l'autre.

Ceci est une conséquence de la réduction même et du caractère (3) de l'équivalence.

Telle est la réduction que nous appelons la réduction de Poinsot ; Poinsot le premier la fit connaître dans la géométrie d'Euclide.

Théorème 24. *La réduction de Poinsot renferme la trigonométrie plane.*

Démonstration. — Considérons un vecteur porté par la droite A B, et soit C un troisième point quelconque de l'espace ; si nous exprimons que le vecteur V dirigé de B vers A dans le triangle A B C fournit dans la réduction de Poinsot les mêmes éléments, lorsque ce vecteur successivement considéré comme appliqué en A puis en B, est préalablement décomposé sur son point d'application en deux vecteurs dont l'un est sur la droite qui réunit ce point d'application au point C et dont l'autre est perpendiculaire à cette droite ; soit B l'angle du triangle A B C qui a son sommet en B, soit A l'angle du triangle qui a son sommet en A, soit enfin C l'angle du triangle qui a son sommet en C, l'identité des deux réductions de Poinsot, ci-dessus mentionnées, nous donne, en désignant par a, b, c les côtes du triangle :

$$(e)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin A\ R(b) = \sin B . R(a)\ , \\ S(b) \sin A = \sin B \cos C S(a) + \sin C \cos B\ , \\ \cos A = \sin B \sin C S(a) - \cos B \cos C\ . \end{array} \right.$$

Ce système e ne change pas par la permutation du groupe (a, A) avec le groupe (b, B) ; de plus en vertu des identités

$$S^2(x) - \varepsilon R^2(x) = 1\ , \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ ,$$

les trois équations *e* se réduisent aux deux dernières du groupe.

Ces groupes peuvent être permutés, mais ils se réduisent en définitive à trois relations, par exemple aux trois suivantes :

$$S(a) = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$S(b) = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$S(c) = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \,.\, \sin B}.$$

Le cas de $S(x) \equiv 1$ donne la géométrie d'Euclide, mais dans ce cas particulier les trois relations précédentes se réduisent à une et il faut grouper autrement les relations si on veut obtenir un groupe de 3 relations essentielles.

Mais dans tous les cas la réduction de Poinsot a fourni la trigonométrie plane, comme l'étude du pivotement sphérique nous avait donné, après la composition des rotations concourantes, les formules de la trigonométrie sphérique.

V. — Statique et Cinématique réunies.

Bien que seule l'interprétation des vecteurs comme axes et vitesses de rotations relatives nous ait conduits à démontrer l'existence de systèmes équivalents de vecteurs, la méthode employée montre que tout mode d'équivalence entre divers systèmes de vecteurs, qui satisfait aux conditions logiques énoncées plus haut, entraîne 3 types possibles pour les relations métriques dans l'espace ; mais, une fois adopté le type d'espace, après particularisation des propriétés métriques, il n'y a plus qu'un mode possible d'équivalence entre les divers systèmes de vecteurs.

Ainsi donc les *vecteurs forces* se réduisent et se composent *exactement comme les vecteurs vitesses de rotations.*

Voici des conséquences intéressantes de ces faits :

Nous avons vu plus haut que les moments des couples de vecteurs possèdent à leur tour les propriétés essentielles de vecteurs simples; mais ces vecteurs d'un nouveau genre admettant aussi des couples, il y aura lieu de se demander ce que représentent *ces couples de couples* par rapport aux vecteurs du premier genre.

Voici la réponse très simple à cette question, réponse dont la justification s'apercevra d'une manière intuitive par la théorie des vecteurs perpendiculaires à une même droite. Ainsi donc:

Théorème 25. — ε désignant un nombre égal à 1 dans la géométrie de la droite ouverte non euclidienne égal à — 1 dans la géométrie de la droite fermée, égal à zéro dans la géométrie d'Euclide, et si on prend comme mesure du moment le double produit du vecteur multiplié par la fonction R du demi bras de levier, un couple de moments, dont le moment nouveau est μ équivaut à un vecteur V porté sur l'axe du couple du second genre et l'on a

$$\mu = - \varepsilon V ,$$

en sorte que dans l'espace d'Euclide un couple de couples équivaut à zéro.

Remarque. — Ce théorème fournit en Statique non euclidienne une détermination très simple *de l'axe central* d'un système de vecteurs.

VI. — La notion du travail et le moment mutuel de deux systèmes de vecteurs.

On a vu que la vitesse de tout point d'un solide animé de diverses rotations relatives est un vecteur égal au vecteur résultant des vecteurs qui représentent les vitesses dues aux rotations isolées; considérons alors deux systèmes de vecteurs S et S', faisons représenter à l'un d'eux un système de forces, et à l'autre un système de rotations relatives et considérons le déplacement infiniment petit Σ d'un solide qui résulte de ces rotations relatives pendant le temps dt soit F une des forces de S; soit $v\,dt$ le déplacement infiniment petit de son point d'application, le travail de la force F par rapport à ce déplacement est

$$\Sigma F v dt \cos(\widehat{F, V}) = \mu dt \ ;$$

ce travail est encore égal à la somme des produits des rotations par *le moment* de chaque force par rapport à l'axe de cette rotation, cette somme étant multipliée par dt; cette seconde définition devra donc être indépendante des rôles attribués aux deux groupes de vecteurs; μ s'appelle le moment du groupe des deux systèmes de vecteurs.

Théorème 26. — Le moment d'un groupe de deux systèmes de vecteurs demeure invariable quand on remplace l'un ou l'autre des systèmes par un système équivalent.

Dernière remarque. — Pour terminer cette genèse cinématique de la géométrie naturelle il resterait à établir que tout mouvement continu quelconque d'un solide dont *trois points* formant triangle ont à un moment donné des vitesses, possède à ce même moment une distribution générale de vitesses; la démonstration est facile, et doit précéder c'est-à-dire dominer l'emploi d'aucun système de coordonnées spécialisé.

Mais je m'arrête ici, mon but était de préciser avec une rigueur complète le rôle des fonctions angulaires dans la géométrie naturelle. Ce rôle éclairé par l'idée d'Archimède et l'idée de Poinsot, nous conduit avec la plus grande simplicité à ce résultat : qu'il existe trois structures possibles de l'espace et trois seulement, compatibles avec la symétrie et les déplacements des solides.

Jules Andrade (Besançon).

CONSÉQUENCES DIVERSES D'UNE FORMULE D'ALGÈBRE

LEURS INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES

M. F. Meyer a fait, à la section de pédagogie du Congrès de Heidelberg, en 1904, une très intéressante communication *(Ueber das Wesen mathematischer Beweise)*, dont l'idée fondamentale est la suivante : l'accroissement des connaissances mathématiques réside souvent dans un nouvel arrangement de choses déjà connues. Parmi les exemples nombreux et très instructifs qu'il donne, nous avons remarqué celui qui concerne le ***théorème de Ptolémée***, au sujet duquel nous avions eu il y a longtemps des idées analogues ; nous nous permettons de développer ici ces idées parce qu'elles diffèrent de celles de M. F. Meyer par le point de départ et la direction.

M. F. Meyer a eu le bon goût de ne pas pousser son système jusqu'à la formule paradoxale : *tout est dans tout*. Son travail d'ailleurs prouve assez qu'il peut y avoir du nouveau en mathématiques; et il est surtout important au point de vue de la pédagogie. Rien n'est plus utile, pour donner de l'unité et de la continuité à l'enseignement, et pour soulager la mémoire des élèves, que de rapprocher les théories nouvelles, ou présentées comme telles, de toutes les vérités antérieures qui s'y rattachent.

Le théorème d'algèbre d'où nous partons est le suivant.

Si $f(x) = 0$ *est une équation de degré* n *ayant l'unité pour coefficient du terme* x^n *et dont les racines* $a, b, c, \dots k$ *sont distinctes ; si en outre* $F(x) = Px^{n-1} + \dots$ *est un polynome entier de degré* $n - 1$, *on a la relation*

$$(1) \qquad \sum \frac{F(x)}{f'(x)} = P\,,$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les racines de $f(x) = 0$.
Si $F(x)$ *est de degré inférieur à* $n - 1$, *on a*

$$\sum \frac{F(x)}{f'(x)} = 0 \tag{2}$$

et, en particulier, on a toujours

$$\sum \frac{1}{f'(x)} = 0\,. \tag{3}$$

La démonstration n'est pas bien difficile (voir par exemple SERRET, *Algèbre supérieure*); mais encore elle suppose la notion de dérivée d'un polynome entier. Supposons le théorème établi, peu importe de quelle manière ; nous le rattacherons plus tard à des notions très élémentaires.

A présent, on a

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)\,,$$

d'où successivement,

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\ldots(x-k) + (x-a)(x-c)\ldots(x-k) + \ldots$$
$$f'(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-k)$$

etc.

L'équation (3) conduit alors à l'énoncé :

Etant donnés n *nombres différents, si l'on retranche de chacun d'eux les* $n - 1$ *autres, les inverses des produits de ces différences ont une somme nulle.*

Dans les égalités (1) et (2), si l'on suppose $P = 1$ et si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ les racines de $F(x) = 0$ on obtient les énoncés suivants.

Etant donnés n *nombres différents* a, b, c, ... k *et* $n - 1$ *nombres, différents ou non,* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$; *si de l'un quelconque* h *des nombres de la première série on soustrait tous les autres et qu'on multiplie les restes entre eux ; si du même nombre* h, *on soustrait tous les nombres de la seconde série et qu'on multiplie les restes entre eux ; les fractions ayant pour dénominateur le premier produit et pour numérateur le second ont une somme égale à l'unité. Cette somme est nulle si les quantités* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ *sont en nombre plus petit que* $n - 1$.

Si sur une droite on a n points A, B, C... K dont les abscisses, à partir d'une origine commune, sont a, b, c..., k, on a, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{BA} = a - b\ .$$

D'après ce qui précède, les inverses des produits des segments de la droite ayant pour extrémité un des points et pour origine les n-1 autres ont une somme algébrique nulle.

Il en est de même si dans la fraction ayant pour dénominateur AH. BH. CH,.. KH on remplace au numérateur l'unité par le produit des segments MH. NH...., M, N,... étant des points, distincts ou confondus, de la droite, en nombre moindre que n-1. Si ces points M, N,... sont en nombre n-1 la somme des fractions est égale à l'unité.

Il va sans dire que les points peuvent être pris sur une courbe pourvu que leurs distances respectives soient mesurées le long de cette courbe.

Si la première série comprend trois points, on a

$$\frac{1}{\mathrm{BA.CA}} + \frac{1}{\mathrm{AB.CB}} + \frac{1}{\mathrm{AC.BC}} = 0\ , \tag{4}$$

ou

$$\mathrm{BC} + \mathrm{CA} + \mathrm{AB} = 0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{BA.CA}} + \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AB.CB}} + \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC.BC}} = 0\ , \tag{5}$$

ou

$$\mathrm{DA.BC} + \mathrm{DB.CA} + \mathrm{DC.AB} = 0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{DA.EA}}{\mathrm{BA.CA}} + \frac{\mathrm{DB.EB}}{\mathrm{AB.CB}} + \frac{\mathrm{DC.EC}}{\mathrm{AB.BC}} = 1\ , \tag{6}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{DA}}^2}{\mathrm{BA.CA}} + \frac{\overline{\mathrm{DB}}^2}{\mathrm{AB.CB}} + \frac{\overline{\mathrm{DC}}^2}{\mathrm{AC.BC}} = 1\ . \tag{7}$$

La relation (5) est connue sous le nom d'*Identité de Pappus;* elle est identique comme forme à celle qui traduit le *Théorème de Ptolémée* suivant lequel le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit est égal à la somme des produits des côtés opposés du quadrilatère. M. F. Meyer a montré, et nous ferons voir aussi, que l'analogie de ces deux propositions n'est pas seulement formelle.

Si dans les dénominateurs des fractions doivent figurer quatre lettres A, B, C, D, on a une série d'identités dont voici un exemple

$$\frac{1}{\mathrm{BA.CA.DA}} + \frac{1}{\mathrm{AB.CB.DB}} + \frac{1}{\mathrm{AC.BC.DC}} + \frac{1}{\mathrm{AD.BD.CD}} + 0 \,.$$

d'où après quelques transformations,

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AB.BC} + \mathrm{AD.CD}}{\mathrm{AB.AD} + \mathrm{BC.CD}} \,.$$

Cette relation entre quatre points en ligne droite s'écrit comme la relation donnant le rapport des diagonales du quadrilatère inscrit dans un cercle ; pour abréger nous appellerons cette identité le *rapport des diagonales*.

En faisant figurer aux dénominateurs des fractions 5 lettres, 6 lettres, etc. on peut écrire des identités en nombre indéfini. Mais toutes doivent être des combinaisons d'identités du type (4).

En effet, soient pour fixer les idées, x_1, x_2, x_3 les distances de trois points d'une droite à un quatrième et a, b les distances du premier au second et au troisième, de sorte que l'on ait par exemple

$$x_1 = a + x_2 \,,$$
$$x_1 = b + x_3 \,.$$

Si l'on pouvait avoir une troisième identité entre ces cinq distances, qui ne fût pas une conséquence des deux relations écrites, les quantités x_1, x_2, x_3 seraient déterminées, ce qui est absurde puisque le quatrième point est quelconque.

Ainsi se trouve ramené à des opérations d'une extrême simplicité, et conformément aux vues de M. F. Meyer, le théorème d'algèbre signalé au début de notre travail.

Par exemple l'*identité de Pappus* se démontre en multipliant membre à membre les identités

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} \,, \qquad \mathrm{DA} = \mathrm{DC} + \mathrm{CA} \,,$$

et en opérant une petite transformation dans le résultat ; on pourrait s'exercer à construire de la même manière les autres identités.

Le *théorème de Ptolémée* relatif au quadrilatère inscrit, et le théorème du *rapport des diagonales*, si on les suppose établis, d'une façon quelconque pour un cercle de rayon *r*, restent vrais lorsque ce rayon croit indéfiniment et par suite existent pour des segments d'une droite. Inversement les identités (5) et (8) ayant été démontrées pour des points en ligne droite, on peut en déduire les propriétés du quadrilatère inscrit, soit par les formules trigonométriques qu'utilise M. F. Meyer, soit par le procédé un peu différent que voici.

Les formules (5) et (8) s'appliquent à des arcs de cercle comptés dans un même sens, et, comme elles sont homogènes, aux moitiés de ces arcs, si donc on les démontre pour les sinus de ces moités, elles seront établies pour les cordes des arcs.

En posant

$$\text{arc } AB = 2\alpha\ ,\quad BC = 2\beta\ .\quad CD = 2\gamma\ ,$$

d'où

$$\text{arc } AC = 2(\alpha + \beta)\ ,\quad AD = 2(\alpha + \beta + \gamma)\ .\quad BD = 2(\beta + \gamma)\ .$$

la démonstration consiste à établir les identités suivantes

$$\sin\alpha \sin\gamma + \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)\ ,$$

$$\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \sin\beta + \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin\gamma}{\sin\alpha\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin\beta\sin\gamma}\ ,$$

dont la vérification directe n'est pas bien pénible.

Comme nous l'avons dit pour le théorème de Ptolémée et le rapport des diagonales, toute relation existant toujours entre cordes d'un cercle est vraie aussi pour les arcs soustendus comptés dans le même sens et par suite pour des points en ligne droite. Mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple la relation

$$AB + BC + CA = 0,$$

vraie pour trois points en ligne droite, ne l'est plus pour trois cordes. On peut rechercher un moyen, autre que celui des formules trigonométriques ci-dessus, de transporter sur le cercle les formules existant entre points en ligne droite et de distinguer lesquelles de ces formules se transportent sans altération. Une communication verbale de M. DEMOULIN nous a suggéré l'idée d'essayer la méthode par rayons vecteurs réciproques.

Soit d une droite ayant pour transformée un cercle c, soient k^2 la puissance de l'inversion et P le pôle situé sur la circonférence c; M, M' et N, N' étant deux couples de points correspondants, savoir M et N sur la droite et M', N' sur le cercle, les triangles semblables PMN, PN'M' donnent

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{PM}{PN'} \frac{PM.PN}{k^2} = \frac{k^2}{PM'.PN'} \cdot$$

d'où

$$MN = M'N' \frac{PM.PN}{k^2} = M'N' \frac{k^2}{PM'\ PN'} \cdot$$

Si le segment MN intervient dans une des identités étudiées ci-dessus, identité que l'on peut écrire en abrégé

$$\sum \pi (MN) = 0 \,. \tag{9}$$

et où l'on suppose que tous les segments tels que MN soient orientés dans le même sens, on pourra remplacer MN par sa valeur en fonction de M'N' et faire sortir les facteurs k à cause de l'homogénéité; on aura

$$\sum \pi (M'N'.\ PM.PN) = \sum \pi \left(\frac{M'N'}{PM'.\ PN'}\right) = 0 \,. \tag{10}$$

Pour que la relation (9) entre segments MN de droite, se transforme en la même relation entre cordes M'N', il faut que dans tous les termes de l'identité (10), le produit PM. PN.... soit le même, ou que, dans la relation (9) chaque lettre M, N,.... intervienne le même nombre de fois dans chaque terme.

Or une relation du type (4)

$$\frac{1}{BA.CA\ldots} + \ldots = 0$$

ne peut satisfaire à cette condition puisque, après cette disparition des dénominateurs, A ne figure pas dans le premier terme.

Une relation du type (5) ou (6),

$$\frac{HA.IA\ldots}{BA.CA\ldots} + \ldots = 0 .$$

renferme H une fois dans chaque terme, donc doit aussi contenir A une fois dans chaque terme, ce qui exige que chaque numérateur n'ait qu'un segment ; alors les termes à partir du second ont A une fois au dénominateur ; comme, après disparition des dénominateurs. A doit figurer une fois au numérateur, il s'ensuit que les lettres B, C,... doivent être au nombre de deux et la seule relation de ce type qui se transporte sans altération par vecteurs réciproques est l'identité de Pappus.

Il faut encore considérer les identités du type (7),

$$\frac{(HA)^r(IA)^s\ldots}{BA.CA\ldots} + \ldots = 0 ;$$

on voit comme plus haut que l'on ne peut avoir qu'une des lettres H, I,... au numérateur et que les lettres B, C,... doivent être en nombre $r+1$; donc toutes les relations telles que

$$(11) \qquad \frac{(HA)^r}{BA.CA\ldots} + \ldots = 0 ,$$

où les lettres A, B, C,... sont en nombre $r+2$ se transportent sans changement sur le cercle par rayons vecteurs réciproques ; la plus simple de ces identités est

$$(12) \qquad (HA)^2 BC.BD.CD - (HB)^2 AC.AD.CD + (HC)^2 AB.AD.BD - (HD)^2 AB.BC.AC = 0 .$$

Chose curieuse, l'identité du rapport des diagonales, bien qu'elle soit vraie pour la droite et pour les cordes du cercle, ne se transporte pas directement par vecteurs réciproques. C'est qu'il y a des relations qui se transforment sur le cercle en d'autres, où intervient le pôle de la transformation, ou en d'autres où ce pôle n'intervient pas mais où il a une relation particulière avec la droite.

C'est ainsi que la relation

$$BA + AC + CB = 0$$

se transforme dans l'identité du *théorème de Ptolémée* pour le quadrilatère PA'B'C' et c'est même, comme nous le fait observer M. Demoulin, une démonstration connue et très simple de ce *théorème*, surtout si l'on a aussi en vue la réciproque.

De même ce sera la relation (12), qui, moyennant une position spéciale de P, nous donnera le *rapport des diagonales* dans le cercle. Elevons, au point H de la droite ABCDH, une perpendiculaire de longueur quelconque HP et prenons l'extrémité P pour pôle de l'inversion ; nous aurons sur la droite, la relation (8) qui peut s'écrire en abrégé

$$\text{BC.BD.CD} + \ldots = 0 \; ; \tag{13}$$

en la multipliant par $(\text{HP})^2$ et en ajoutant la relation (12), on obtient, à cause des triangles rectangles HPA, HPB...,

$$(\text{PA})^2\,\text{BC.BD.CD} + \ldots = 0 \, .$$

Appliquons l'inversion :

$$(\text{PA})^2.\text{B'C'.B'D'.C'D'}.(\text{PB})^2(\text{PC})^2(\text{PD})^2 + \ldots = 0 \, .$$

A cause du facteur $(\text{PA})^2(\text{PB})^2(\text{PC})^2(\text{PD})^2$ commun à tous les termes on obtient la relation

$$\text{B'C'.B'D'.C'D'} + \ldots = 0 \, ,$$

qui est précisément le *rapport des diagonales* dans le cercle,

M. F. Meyer remarque que l'identité de Pappus est la même que l'identité entre coordonnées plückériennes d'une droite de l'espace et l'identité entre deux valeurs du rapport anharmonique de quatre points. On peut ajouter que l'identité de Pappus, et quelques autres relations signalées ci-dessus, conduisent à des identités entre déterminants à deux lignes, identités utiles dans la théorie des formes binaires.

En effet, rapportons les points de la droite AB à deux origines ou points fondamentaux O, O' et appelons comme d'habitude coordonnées d'un point A deux quantités proportionnelles aux segments OA et OA' multipliées par des constantes arbitraires mais fixes; de sorte que si a_1, a_2 sont les coordonnées de A, b_1 et b_2 celles de B, etc., on a

$$\begin{matrix} \rho a_1 = h.\text{OA} \, , & \rho' b_1 = h.\text{OB} \\ \rho a_2 = k.\text{AO'} \, , & \rho' b_2 = k.\text{BO'} \end{matrix} \, , \quad \text{etc.,}$$

h et k étant deux constantes fixes pour tous les points de la droite, tandis que ρ. ρ',... peuvent varier d'un point à l'autre. On prouve alors facilement que l'on a

$$AB = \frac{\rho\rho'}{hk.OO'}(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{\rho\rho'}{hk.OO'}(ab) .$$

En substituant dans l'*identité de Pappus* qui contient chaque lettre A, B, C, D une fois dans chaque terme, on fait disparaître le facteur commun $\rho\rho'\rho''\rho'''$ et l'on a l'identité fondamentale de la théorie des formes binaires,

$$(da)(bc) + (db)(ca) + (dc)(ab) = 0 .$$

Mais toutes les identités du type (11) ont chaque lettre le même nombre de fois dans chaque terme et fournissent donc des identités analogues entre déterminants à deux lignes.

Ainsi toute identité entre points en ligne droite qui se transporte sur le cercle par vecteurs réciproques donne aussi une identité entre déterminants à deux lignes.

M. Stuyvaert (Gand).

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE CORIOLIS

1. $\overline{v_a}$, $\overline{v_r}$ et $\overline{v_e}$ représentant les vitesses absolue, relative et d'entraînement d'un point mobile, on a

$$\overline{v_a} = \overline{v_e} + \overline{v_r} ,$$

et, le signe D indiquant la dérivée géométrique prise dans l'observatoire absolu :

$$D\overline{v_a} = D\overline{v_e} + D\overline{v_r}$$

Il reste à chercher les significations des trois termes compris dans cette égalité.

2. $D\overline{v_a}$ est l'accélération absolue $\overline{j_a}$ du mobile.

3. (fig. 1). A est la position du mobile à l'instant t. A l'instant $t + \Delta t$ le mobile est venu en C et le point A de l'observatoire relatif en B ; le mouvement d'entraînement est défini à l'instant t par la vitesse $\overline{v_e}$ du point A et la rotation $\overline{\omega}$ passant par A, qui deviennent $\overline{v'}$ et $\overline{\omega'}$ à l'instant $t + \Delta t$.

L'accélération d'entraînement $\overline{j_e}$ est celle du point A de l'observatoire relatif ;

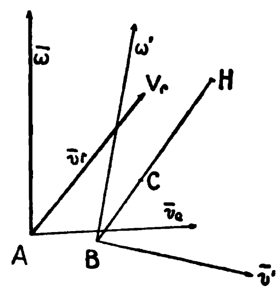


Fig. 1.

$$\overline{j_e} = \lim \frac{\overline{v'} - \overline{v_e}}{\Delta t} .$$

La vitesse d'entraînement $\overline{v'_e}$ à l'instant $t + \Delta t$ est celle du point C de l'observatoire relatif :

$$\overline{v'_e} = \overline{v'} + \mathrm{Mom}_C\, \overline{\omega'} .$$

La dérivée géométrique de la vitesse d'entraînement est

$$D\overline{v_e} = \lim \frac{\overline{v'_e} - \overline{v_e}}{\Delta t} = \lim \frac{\overline{v'} - \overline{v_e}}{\Delta t} + \lim \frac{1}{\Delta t}\, \mathrm{Mom}_C\, \overline{\omega'} .$$

Prolongeons BC jusqu'en H, tel que BH $= \frac{1}{\Delta t}$ BC, nous aurons

$$D\overline{v_e} = \overline{j_e} + \lim \mathrm{Mom}_H\, \overline{\omega'} .$$

le vecteur moment continuant à avoir C pour origine. Or la limite de $\overline{\omega'}$ est $\overline{\omega}$, celle de C est A et celle de H est l'extrémité V_r de la vitesse relative. Il vient donc :

$$D\overline{v_e} = \overline{j_e} + \mathrm{Mom}_{V_r}\, \overline{\omega} .$$

4. (fig. 2). A l'instant t l'observateur absolu mène par un point fixe O_1 un vecteur $\overline{O_1H_1} = \overline{v_r}$ et l'observateur relatif mène un vecteur égal $\overline{OV_r}$, mais le mouvement d'entraînement déplace ce dernier vecteur qui se trouve en O'H' à

l'instant $t + \Delta t$, auquel les deux observateurs mènent des vecteurs $\overline{O_1 I_1}$ et $\overline{O'I'}$ équipollents à la nouvelle vitesse relative. Par définition

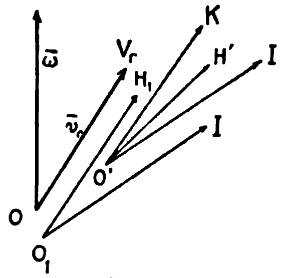


Fig. 2.

$$D\overline{v_r} = \lim \frac{\overline{H_1 I_1}}{\Delta t} \qquad \overline{j_r} = \lim \frac{\overline{H'I'}}{\Delta t}$$

Menons $\overline{O'K} = \overline{O_1 H_1}$; il vient

$$\frac{\overline{H_1 I_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{KI'}}{\Delta t} = \frac{\overline{KH'}}{\Delta t} + \frac{\overline{H'I'}}{\Delta t} .$$

Passons à la limite en remarquant que $\lim \frac{\overline{KH'}}{\Delta t}$ n'est autre que la vitesse du point V_r dans le mouvement de rotation de l'observatoire relatif autour de O, c'est-à-dire $\mathrm{Mom}_{V_r} \bar{\omega}$; nous aurons

$$D\overline{v_r} = \mathrm{Mom}_{V_r} \bar{\omega} + \overline{j_r} .$$

5. Par conséquent

$$\overline{j_a} = \overline{j_e} + \overline{j_r} + 2\, \mathrm{Mom}_{V_r} \bar{\omega} .$$

Mars 1906.

Emile Bertrand (Bruxelles).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — V

Questions 6, 7, 8*a*, 8*b*, et 9.[2]

6. — *Avez-vous cherché à vous rendre compte de la genèse des vérités, découvertes par vous, auxquelles vous attachez le plus de prix ?*

7. — *Quelle est, selon vous, la part du hasard ou de l'inspiration dans les découvertes mathématiques ? Cette part est-elle aussi grande toujours qu'elle le paraît ?*

8. — a) *Avez-vous remarqué parfois que des découvertes ou des solutions, sur un sujet complètement étranger à vos recherches du moment, vous aient apparu, alors qu'elles correspondaient à des recherches antérieures infructueuses ?*

b) *Vous arrive-t-il de calculer ou de résoudre des problèmes en rêve ? ou de voir surgir toutes prêtes, en vous réveillant le matin, des solutions ou des découvertes soit complètement inattendues, soit vainement poursuivies la veille ou les jours précédents ?*

9. — *Estimez-vous que vos principales découvertes aient été le résultat d'un travail voulu, dirigé dans un sens précis, ou bien se soient présentées à votre esprit spontanément pour ainsi dire ?*

Ces cinq questions ayant trait à la façon dont les découver-

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905 ; 8e année, n° 1, p. 43-48, n° 3, p. 217-225, 1906.

[2] L'étude de cette partie de l'Enquête (questions 6 à 9) a été faite par M. Th. FLOURNOY, professeur de psychologie à l'Université de Genève.

tes ou les idées nouvelles naissent dans l'esprit des mathématiciens, il est naturel de les réunir et de grouper en un même article les réponses qu'elles ont suscitées. A quelques exceptions près, ces réponses sont d'un bien regrettable laconisme. C'est le point faible des questionnaires très étendus, qu'ils découragent beaucoup de gens plus qu'ils ne les stimulent. On dirait que chaque individu ne dispose, pour répondre à une enquête, que d'une certaine dose de bonne volonté ou d'attention, d'où un résultat fort différent selon que cette dose est appelée à se concentrer en profondeur sur un seul objet ou à se disperser sur un grand nombre de questions très diverses. On en trouve un exemple frappant en comparant notre enquête avec celle entreprise il y a peu d'années par M. Maillet sur les rêves et phénomènes d'inspiration chez les mathématiciens [1]. Le formulaire de ce savant ne comprenait que deux questions très détaillées (voir *Intermédiaire des Mathématiciens*, octobre 1902, p. 263). Il obtint environ 80 réponses, dont on peut dire que les trois quarts constituent des observations de valeur, vraiment instructives ; ce qui fait un dossier infiniment plus important que ce que nous avons recueilli d'utilisable, sur ces mêmes points, dans la présente enquête, d'une extension presque identique (puisque 84 personnes y ont répondu) mais où les demandes concernant le rêve et l'inspiration sont à la fois beaucoup plus sommaires que celles de M. Maillet, et noyées au milieu d'une trentaine d'autres questions. L'idéal serait sans doute de faire autant d'enquêtes différentes et séparées qu'il y a de problèmes à élucider, et surtout d'interviewer à fond chaque répondant, oralement ou par correspondance, pour l'obliger à développer et à bien préciser sa pensée. Mais le moyen, en pratique et dans un temps limité, de faire face à une telle tâche et d'éviter réellement la lassitude des enquêteurs et des enquêtés !! — Quoi qu'il en soit, voici à quoi nous arrivons en

[1] Voir *Les Rêves et l'Inspiration mathématiques (Enquête et résultats)*, par M. Edmond MAILLET, ingénieur des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'Ecole polytechnique. (Extrait du Bulletin de la Société philomathique, 1905.) Brochure de 44 p. Nous sommes heureux de cette occasion d'attirer l'attention tant des mathématiciens que des psychologues sur ce travail intéressant et trop peu connu, qui mériterait bien d'être réédité à part en l'enrichissant encore des autres articles de M. Maillet sur le même sujet et des nouvelles réponses qu'il a pu recevoir depuis lors.

triant au mieux nos réponses, parfois bien vagues ou chevauchant les unes sur les autres.

Question 6. — Il n'y a guère qu'un quart des personnes (23 sur 84), qui aient répondu avec quelque détail à cette question (laquelle, il faut le reconnaître, n'était pas formulée de manière à provoquer activement les longs récits). Les autres se sont abstenues (37), ou ont répondu non (15), ou se sont contentées d'un oui sans autre explication (6), ou enfin se sont méprises (3 ; croyant qu'on leur demandait leur opinion sur la valeur de leurs découvertes, l'une a répondu qu'elle ne leur attribuait aucune importance, l'autre qu'elle n'osait se prononcer, la dernière qu'elle estimait le plus les résultats présentant le caractère de la simplicité). Des 23 réponses un peu détaillées, les unes retracent les incidents particuliers, lectures, visites, etc., qui ont guidé l'auteur dans tel ou tel de ses travaux (p. ex. n^{os} XXVIII, XXXI) ; d'autres esquissent en gros les étapes psychologiques ou les processus logiques de toute recherche, intuition, démonstration, généralisation, etc. (ex. VI, IX, XXXIX, LXXXI) ; mais, sauf un ou deux cas développés avec plus d'ampleur (surtout XLIII), ces indications éparses sont trop insuffisantes pour qu'on en puisse rien tirer de général.

Question 7. — Ici les deux tiers (57) de nos documents renferment des réponses, qui sont loin de s'accorder. Leur variété déconcertante provient assurément en partie de la diversité des expériences personnelles suivant les individus, mais en partie aussi de ce que la question posée emploie les mots de *hasard* et d'*inspiration* dans leur sens courant très élastique, d'où la porte ouverte à toutes les divergences d'interprétation. Ainsi s'explique sans doute que le rôle du hasard puisse être jugé tantôt considérable, tantôt insignifiant ou même nul, selon qu'on pense au hasard des rencontres *extérieures* (conversations, lectures, etc.), ou au hasard *interne* du cours des idées, lequel naturellement n'est fortuit qu'en apparence et se ramène en réalité soit à l'effet du travail antérieur, soit au facteur imprévisible de l' « inspiration ». Ce dernier terme à son tour peut aussi être entendu de bien des façons. Il y aurait à ce propos une jolie collection de définitions à tirer de nos documents sur ce que c'est que l'inspiration, à savoir par exemple : les idées s'efforçant d'entrer dans le monde (X) ; une fonction mystique propre à chaque personnalité (XXXVI) ; le processus mental, impossible à retracer, par lequel, de l'observation d'une série de phénomènes, jaillit l'intuition de leur loi (XIII) ; la faculté de combler les lacunes d'un domaine en y réfléchissant (XIV) ; une sorte de fluorescence des impressions antérieures (XXXII) ; un pressentiment instinctif de vérités ou de méthodes nouvelles (III, XLIX) ; l'imagination (LXXV) ; un travail d'incubation cérébrale inconsciente (XXIII) ; etc. Le seul point sur lequel toutes nos réponses paraissent unanimes, en ce sens qu'il est expressément mentionné dans un bon nombre (15), qu'on le devine entre les lignes dans d'autres, et qu'aucune n'y contredit, — c'est la nécessité de l'étude, de la réflexion, de la patience, bref du travail soutenu pour préparer ou parfaire les dons du hasard ou de l'inspiration (voir p. ex. : I, XXVIII, XXXVIII, etc.).

Question 8 a. — 56 réponses, dont les trois quarts sont affirmatives. Quelques répondants ont indiqué les circonstances spéciales où cette éclosion soudaine d'idées lumineuses, vainement cherchées auparavant, les a particulièrement frappés : à la promenade ; dans la rue ; dans le train ; le jour de l'expulsion d'un taenia ; à propos d'une lecture tout à fait étrangère (5 personnes, p. ex. n° V) ; ou au contraire plus ou moins apparentée (3 personnes, p. ex. LIX) au sujet de leurs recherches ; après des jours et des semaines d'intervalle, etc.

Question 8 b. — Cette question du rêve et du sommeil a provoqué 69 réponses, dont un quart (18) complètement négatives. Des 51 répondants affirmatifs, 45 entrent dans quelques détails, la plupart pour mentionner, comme ayant été parfois propice à leurs travaux mathématiques, l'état de veille au lit, soit le soir avant de s'endormir (état hypnagogique, par ex. n^{os} IV, XXX), soit pendant des insomnies nocturnes, soit surtout (22 personnes) le matin immédiatement après le réveil. Ce dernier moment semble bien être, en effet, chez beaucoup de gens, une époque privilégiée où le cerveau, restauré par le repos de la nuit, fonctionne avec une lucidité, une aisance, une promptitude tout particulières, et fournit souvent des idées utiles ou des solutions vainement cherchées la veille. — Quant aux rêves mathématiques, on ne les trouve signalés que par 15 personnes, et ils sont généralement sans valeur : le dormeur a beau avoir le sentiment d'y faire des découvertes magnifiques, au réveil cette illusion s'évanouit, et il constate l'absurdité ou la niaiserie des raisonnements qui l'avaient émerveillé pendant le songe (p. ex. XXVI, LXXV). Sept documents seulement font allusion à des rêves utiles ; mais deux sont bien vagues et incertains (XLVII, LXIV) ; dans un autre, il s'agit d'un récit de seconde main ne concernant pas le signataire lui-même, mais sa mère (LV) ; dans un autre encore, les rêves semblent n'avoir été que des souvenirs de choses déjà connues du sujet (XXXII); il ne reste que trois répondants qui affirment avec quelque précision avoir obtenu en songe des solutions sinon bien importantes, du moins vraiment justes et neuves pour eux (n^{os} XXIII, LII et LXIII [1]). En somme ces résultats, s'ils sont favorables à la fécondité inventive des premiers moments après le réveil, ne le sont guère à celle du rêve, sauf de bien rares exceptions. Notre enquête confirme ainsi, dans les limites restreintes de son étendue, les conclusions de M. Maillet, qui a trouvé l'inspiration mathématique beaucoup plus fréquente au réveil que pendant le rêve.

Question 9. — Cette question paraît avoir un peu fait double emploi avec la question 7, en ce que dans l'esprit de beaucoup de gens le hasard, la spontanéité, l'inspiration, se confondent et s'opposent en bloc, comme le facteur imprévisible et *involontaire,* au facteur *volontaire* : travail, réflexion suivie, étude assidue, tension vers un but précis, etc. Aussi les résultats sont-ils fort analogues. Les deux tiers (56) de nos documents répondent à la demande 9, et ils peuvent se classer en trois groupes. Un petit nombre seulement (11) insistent sur la spontanéité de leurs découvertes ; encore faut-il noter que la plupart d'entre eux ajoutent que le travail y a aussi eu sa part (p. ex. : III). Un second groupe (15) tient la balance

---

[1] Ces deux derniers figurent déjà dans l'enquête de Maillet, loc. cit., n^{os} LV et LVII.

égale entre les deux facteurs, soit qu'à leurs yeux le travail et la spontanéité coopèrent toujours, ou qu'ils se partagent les cas particuliers (XXXI). La majorité enfin (30) attribue au travail voulu et dirigé le rôle prépondérant, voire même exclusif (3 personnes, p. ex. IX), dans leurs découvertes mathématiques, ce qui est d'accord avec la tendance générale des réponses à la demande 7.

Voici, pour illustrer ces résumés statistiques, un choix des passages les plus intéressants et caractéristiques de nos documents sur les points en question.

Rép. I (France). — 7. Le hasard, l'inspiration, produisent toutes les découvertes, mais à condition que l'on ait beaucoup cherché dans leur sens ou dans de très voisins. MÉRAY.

Rép. II (France). — 8*b*. Oui, dès le collège, et assez souvent dans la vie quand un travail me passionnait et me forçait à m'opiniâtrer.

9. Spiritus flat ubi vult !! et quum vult ! AUDEBRAND.

Rép. III (Angleterre). — 7. Il y a partout des matières de recherche en abondance pour qui sait les trouver. Le hasard peut jouer un rôle occasionnellement, mais c'est l'inspiration que je considère comme le facteur de toute importance, en entendant par là cette intuition où l'on aperçoit d'un seul coup la façon dont il faut résoudre un problème avant d'effectuer ce travail de résolution.

8. Je me suis levé une fois au milieu de la nuit pour résoudre des problèmes que je n'avais pas pu résoudre auparavant. Ordinairement les solutions me viennent pendant la journée, lorsque je suis occupé à quelque chose de tout à fait différent.

9. Tout à fait spontanément, mais cependant en connexion avec les travaux qui m'ont occupé auparavant. BRYAN.

Rép. IV (Autriche). — 8*b*. En général il est rare que je me souvienne d'avoir rêvé de mathématiques ; et quand cela m'est arrivé, les idées venues en tête se sont toujours trouvées illusoires et même absurdes. Par contre, j'ai quelquefois eu, immédiatement avant de m'endormir, de bonnes idées et spécialement une grande vivacité d'imagination géométrique. ZINDLER.

Rép. V (Italie). — 8*a*. Il m'est arrivé plusieurs fois que la solution d'une difficulté qui m'avait empêché de poursuivre une recherche m'est venue à la suite d'une lecture, même sur un sujet tout à fait différent.

9. Le plus souvent, résultat d'un travail voulu. (...)

Rép. VI (Allemagne). — 6. Pour un très grand nombre de résultats nouveaux trouvés par moi, je les ai d'abord devinés et n'en ai trouvé la démonstration qu'ensuite.

7. Je n'ai pas l'impression que le hasard joue un bien grand rôle.

8*b*. Je ne crois pas qu'on puisse trouver *en rêve* la solution d'un problème mathématique. Par contre il m'est souvent arrivé qu'une solution cherchée en vain dans mon cabinet de travail se soit subitement présentée à la promenade ou pendant quelque autre occupation n'absorbant pas complètement l'esprit. (...)

Rép. VII (Allemagne). — 7. Je crois que les individus diffèrent totalement à ce point de vue, et qu'il n'y a que les mathématiciens d'une très grande puissance d'invention qui puissent répondre là-dessus.

8. Il m'est arrivé de rester pendant des semaines sur un problème que j'ai fini par abandonner, et dont la solution a jailli devant mes yeux pendant la nuit au bout d'environ deux ans où je n'avait plus pensé consciemment à ce problème.

Mor. Cantor.

Rép. VIII (Angleterre). – 8*a*. Quand je suis au lit, pendant l'obscurité où tous les membres sont en repos et où je puis donner toutes mes forces à la pensée, l'inspiration me vient. Cette méthode est la plus féconde, mais elle nuit beaucoup à la santé par la privation de sommeil. (...)

Rép. IX (France). — 6. A force de penser à une question, je finis par en avoir un sens assez juste, mais un peu obscur par suite peut-être en partie de la fatigue dûe à cette pensée obstinée. Puis, après un repos dû par exemple à une bonne nuit, l'intelligence plus reposée et plus vigoureuse voit la vérité se dégager dans un énoncé net et précis. La démonstration n'est plus qu'une affaire de mise en ordre et de patience.

7. Je ne connais pas le hasard dans la découverte ou la recherche ; mais cela tient peut-être à mon genre de recherches, qui a toujours été d'élucider des sujets plutôt que d'aller à l'aventure dans un terrain tout à fait neuf.

8*b*. Le rêve ne m'a jamais rien donné de bon ; le réveil, oui, à cause, je crois, du repos. C'est surtout la pensée au lit le matin qui a été fructueuse.

9. Jamais les choses ne se sont présentées spontanément à moi, mais seulement après réflexion suivie. (...)

Rép. X (Irlande). — 7. Je pense que les idées s'efforcent d'entrer dans le monde. Souvent elles viennent à plusieurs individus à la fois dans divers pays, sont négligées par les uns et s'imposent à d'autres.

9. Le résultat d'un travail voulu. Genese.

Rép. XIII (Angleterre). — 7. Les vérités mathématiques se découvrent souvent par intuition, mais jamais, je puis dire, par pure inspiration. Il faut d'abord avoir observé quelque série de phénomènes pour arriver intuitivement, c'est-à-dire par un processus de pensée qu'on est incapable de retracer, au théorème ou à la loi impliqués dans ces phénomènes. (...)

Rép. XIV (Angleterre). — 7. L'inspiration est simplement la capacité de combler les lacunes dans un champ que l'esprit conçoit vivement, et elle résulte d'une réflexion pénétrante. (...)

Rép. XV (Allemagne). — 9. Ceux de mes travaux auxquels j'accorde le plus de valeur sont nés d'idées fortuites, que j'ai ensuite serrées de plus près. (...)

Rép. XVI (Belgique). — 7. La part du hasard et de l'inspiration est très faible. Stuyvaert.

Rép. XVII (Allemagne). — 8*b*. Je ne rêve jamais de mon activité de mathématicien ou d'écrivain, pas même quand je travaille fiévreusement des journées entières. Mais il m'arrive souvent de comprendre tout à coup le matin quelque chose qui avait résisté à tous mes efforts la veille. (...)

Rép. XVIII (Italie). — 7. Je crois la part du hasard très petite, celle de l'inspiration très grande, en ce sens que, quand on possède beaucoup de vérités mathématiques, une idée heureuse, née dans l'esprit, sans qu'on sache comment, fait apercevoir des liaisons auparavant cachées et découvrir de nouveaux théorèmes.

9. Les vérités que j'ai trouvées me sont apparues le plus souvent comme nées dans mon esprit. (...)

Rép. XIX (Allemagne). — 8*b*. J'ai souvent en rêve des représentations mathématiques, mais jamais assez nettes pour que je puisse les reproduire à l'état de veille. Par contre j'ai souvent eu au réveil des idées neuves et très utiles. (...)

Rép. XX (France). — 6. Non, mais je puis dire que l'intuition ou la divination y a été pour beaucoup.

7. Pour moi, en mathématique le hasard est l'assemblage de toutes les combinaisons et associations d'idées qui se présentent à l'esprit. Le jeu de l'imagination éveille des rapprochements qui souvent mettent sur la voie du résultat désiré. Brocard.

Rép. XXI (Autriche). — 7, 8, 9. Je crois avoir trouvé tous mes résultats non par hasard, mais par réflexion assidue dans une direction déterminée. Par contre ce n'est pas volontairement et de force que j'ai obtenu mes meilleures idées, mais elles me sont venues, lorsque tout était préparé par la réflexion, après un certain temps de repos, souvent des jours et même des semaines. Elles ne me sont jamais venues en rêve; cependant leur arrivée a été si peu consciente qu'il m'a souvent été impossible d'en assigner plus tard le moment précis ; souvent aussi c'était à la lecture d'autres écrits apparentés, mais cependant très différents.

L. Boltzmann.

Rép. XXIII (France). — 6. 7. Les rares propositions nouvelles que j'ai pu établir m'ont semblé le plus souvent résulter, sinon du hasard, du moins d'un travail inconscient, sorte d'incubation cérébrale. On a longtemps travaillé une question sans rien trouver. Tout d'un coup, et parfois lorsqu'on a laissé la question de côté, la lumière surgit, la vision nette se fait, sans qu'on puisse dire pourquoi.

8*a*. Oui, et ceci se relie étroitement à la question précédente.

8*b*. Souvent j'ai rêvé mathématique. *Une fois* j'ai trouvé en rêve la solution d'un problème d'ailleurs très simple, mais que je cherchais infructueusement depuis plus de 15 jours. Je ne crois pas que le rêve mathématique puisse être fécond, mais il me semble que la réflexion dans le demi-sommeil peut préparer très heureusement l'incubation cérébrale.

9. Toute découverte me paraît être le résultat d'un travail voulu, mais souvent très antérieur, si bien qu'on n'en a pas toujours conscience ; et on peut de bonne foi attribuer ainsi à l'inspiration spontanée ce qui provient de la méditation patiente.

C.-A. Laisant.

Rép. XXVI (France). — 8*b*. Oui, mais très péniblement et une seule fois. Je m'étais demandé en dormant si toute fonction était la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. J'ai en rêve trouvé très péniblement l'identité $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. En me réveillant j'ai vu que ma question était naïve, tandis qu'en rêve elle m'avait paru très sérieuse. J. Richard.

Rép. XXVII (France). — 7. L'inspiration seule peut amener à des résultats vraiment intéressants et nouveaux. Weill.

Rép. XXVIII (France). — 6. Ayant fait de la métrique en coordonnée trilinéaires, dans l'ouvrage de Painvin surtout, m'étant d'autre part occupé de géométrie non-euclidienne, j'ai eu un jour l'idée de la métrique que j'ai nommée *aninvolutive*

7. L'inspiration est le fruit de la réflexion ; quand on a beaucoup pensé à une chose, on est préparé à profiter des hasards heureux qui peuvent se rencontrer touchant cette chose. Il faut ensuite une longue patience.

9. Travail voulu, effort. Fontené.

Rép. XXX (Norvège). — 8*a*. C'est surtout après le coucher, dans l'obscurité, que je pense le plus clairement. Les détails secondaires s'effacent alors, et les points principaux surgissent.

STÖRMER.

Rép. XXXI (Allemagne). — 6. Mes découvertes se rattachaient la plupart du temps à des leçons, où à la lecture de travaux étrangers, ou à des recherches expérimentales.

7. Le hasard joue aussi toujours un rôle. Dans mon *Harmonielehre* tout le travail a été précédé d'une sorte d' « inspiration ».

9. Il y a eu « travail voulu » dans mes ouvrages de *Thermomechanik* et de *Perspective*, et « spontanéité » dans ceux sur l'*Harmonielehre* et l'*Electricité*. V. von OETTINGEN.

Rép. XXXII (Autriche). — 7. J'ai été servi tout ensemble par l'inspiration et le hasard, qui ne me paraissent être qu'une sorte de fluorescence des impressions antérieures.

8*b*. Encore étudiant, j'ai rêvé une construction stéréométrique que j'avais oubliée. J'ai eu plus tard d'autres rêves mathématiques, mais peu nombreux et fantaisistes. Je me rappelle cependant un rêve très vif que j'ai eu trois fois, à des époques très différentes et sous la même forme : je voyais un livre allemand où se trouvaient des théorèmes d'une beauté et d'une élégance suprême, concernant certaines intégrales analogues aux fonctions sphériques. J'attribue ce rêve à quelques impressions reçues et que le sommeil avait exagérées.

9. Je dois beaucoup aux inspirations spontanées, bien qu'elles aient été généralement imparfaites au début. Ma méthode de travail ressemble d'ailleurs à celle du romancier Balzac ; il me faut toujours corriger mon style et écrire presque calligraphiquement ; c'est ainsi que je parviens à perfectionner et enrichir le sujet.

LERCH.

Rép. XXXV (France). — 8 *a*. Il me semble que oui ; cela tient à ce que certaines questions restent en quelque sorte à l'affût sans même qu'on y pense.

9. J'ai toujours cherché méthodiquement les problèmes que j'ai résolus. Mais pour cette résolution, et quelquefois pour la pensée même de cette recherche, des idées sont nées de rapprochements inattendus. (...)

Rép. XXXVI (Suisse). — 7. Il est très difficile de répondre à cette question, parce qu'en travaillant nous vivons toujours dans une espèce de nébulosité [*Fluidum*] scientifique qui nous empêche de juger facilement quelles impressions nous avons emmagasinées consciemment ou inconsciemment. Je crois cependant qu'à la découverte de tout résultat ou théorème de valeur coopère une certaine loi ou fonction mystérieuse, propre à chaque individu [*ein gewisses der Persönlichkeit eigentümliches* (*mysptisches*) *Form-*

gesetz], et qu'on peut désigner du nom d'inspiration. Pour moi il n'y a pas de hasard.

BEYEL.

Rép. XXXVIII (Allemagne). — 6, 7, 9. Il y a pour commencer réflexion consciencieuse et scrupuleuse ; mais le *dernier* pas est toujours un don qui arrive comme une inspiration.

WERNICKE.

Rép. XXXIX (Grèce). — 6. Certainement. Les points que j'ai moi-même cherchés, je les ai examinés à tous les points de vue et sous tous les rapports possibles. La genèse, je crois qu'elle consiste la plupart du temps dans la généralisation, ou plutôt la *tendance* à la généralisation qui s'empare de nous.

7. Le hasard a aussi sa part, surtout dans les résultats et notamment en ce qui concerne leur *élégance:* maintes fois on travaille longtemps et péniblement pour n'aboutir qu'à des résultats dépourvus d'élégance ou de concision. Mais par contre, le choix rationnel et intelligent des questions à traiter, et une certaine expérience qu'on n'acquiert qu'avec le temps et l'habitude, peuvent bien souvent annuler, ou du moins rendre insignifiante. la part du hasard. L'inspiration contribue aussi ; mais quelquefois, non dirigée, elle nous égare.

N. HATZIDAKIS.

Rép. XLI (Ecosse). — 7. L'inspiration et le hasard jouent tous deux un rôle ; mais ce qui vaut encore mieux, c'est l'application continue.

(...

Rép. XLII (Italie). — 7. Ni hasard ni inspiration. Les découvertes ne sont que le fruit de l'étude continue.

8 *b*. Quand un sujet m'a fortement préoccupé, mon cerveau continue à travailler pendant le sommeil et plus d'une fois j'ai trouvé des solutions en dormant. Mais la plupart du temps je n'ai eu en dormant qu'un tourment inutile, croyant obtenir des résultats qui, une fois réveillé, se trouvaient faux.

9. Les deux cas se présentent.

AMODEO.

Rép. XLIII (France). — 6 et 7. Dans les débuts, j'ai tâtonné pas mal. J'avais à ma disposition deux procédés d'investigation : Ou bien chercher à résoudre des problèmes posés ou faciles à poser; c'est je crois souvent le plus difficile. Ou bien, au contraire, imaginer de nouveaux sujets d'étude, même généraux, et y découvrir ce que je pourrais. Pour ce second procédé, qui ne correspond pas, je crois, à une faculté exercée dans l'enseignement, j'ai eu à faire une véritable école : mais c'est d'après moi le plus fécond. Il y a d'ailleurs très souvent des cas mixtes. Au cours de mes lectures, je prenais des notes sur les idées de sujet d'études qu'elles pourraient me suggérer. Exemple : un auteur ne traite qu'un cas d'une question, un cas particulier, etc. ; généraliser ; j'aime beaucoup généraliser, et étendre, par analogie ou non. Mon premier mémoire du Journal de Math. « Sur les isomorphes holoédriques, etc., 1895 » est une généralisation d'un mémoire de M. Netto : il n'avait traité qu'un cas particulier étendu, j'ai traité le cas général. C'est en généralisant le théorème de Fermat sur les nombres polygones et la méthode de Cauchy corrélative et un théorème de Liouville, et m'aidant (influence du hasard) d'une identité simple d'Oltramare lue dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, que j'ai obtenu mes extensions du théorème Fermat sur les nombres polygones (J. de Math., 1896).

Quant à mes recherches sur la théorie des fonctions, elles ont pour origine, outre des lectures antérieures, une visite à Hermite et à M. Haton de la Goupillière. J'ai tiré de ce qu'ils me dirent la conclusion que je devais varier davantage mes productions, et je me suis fait cette suggestion : je vais laisser de côté tout ce que j'ai fait antérieurement, tout livre connu, toute idée ayant trait à ce qui s'est fait à ma connaissance, et je vais trouver quelque chose, par ex. sur les solutions des équations différentielles, rationnelles en x, y, y′ y″,... Je crois que la première idée nettement utile, l'idée de la méthode, m'est venue en chemin de fer du côté d'Arcueil (patrie de Cauchy !). C'est ainsi — et aussi, il faut bien le dire, un peu grâce à l'influence des lectures antérieures agissant inconsciemment — que j'ai abouti à mon mémoire du Journal de Math. (1902, p. 19).

Je conclurai : la volonté et l'inspiration jouent très souvent un rôle pour le choix du sujet et la découverte, qui sont rarement étrangers aux lectures antérieures, dont ils sont un prolongement plus ou moins net. Mais il peut avoir des exceptions, au moins en apparence, quand on a fait beaucoup de lectures et qu'on étudie plusieurs branches des mathématiques. Dans ce cas encore le hasard peut décider de la branche où se fera la découverte ; mais c'est réellement un hasard bien préparé et qui ne mérite guère ce nom.

9. Voir 6 et 7. Chez moi la volonté doit jouer un rôle capital. Au surplus, quand j'ai négligé quelque temps un sujet, il me faut quelques heures d'entraînement pour pouvoir m'en occuper sérieusement. MAILLET.

Rép. XLIV. (Italie). — 86. Parfois le matin, à peine réveillé, j'ai résolu les questions qui m'avaient semblé insurmontables le jour précédent.

9. Mes principales découvertes se sont présentées à moi spontanément. MARLETTA.

Rép. XLVI (Espagne). — 8. Quelquefois je suis sorti de mon lit pour écrire un aperçu des idées qui m'étaient soudainement venues, afin de les développer le jour suivant, parce que, sans cette précaution de les noter immédiatement, je les oublie, comme le montre le fait suivant : ayant trouvé une fois une petite démonstration, très importante, pour simplifier une théorie, avec deux figures, j'envoyai le tout à l'imprimerie ; mais par mégarde on perdit ma démonstration, et je ne pus la reconstituer malgré les figures. G. de GALDEANO.

Rép. XLVII (Suisse). — 8 *a*. Une fois seulement je me souviens de m'être levé, aussitôt réveillé, pour fixer une idée qui m'était venue en rêve, mais je ne sais plus de quoi il s'agissait.

GUBLER.

Rép. XLIX (France). — 7. Le hasard a certainement joué un rôle, comme en toutes découvertes, mais l'inspiration ou mieux l'obstination de l'esprit a fait bien davantage. Le mathématicien qui est sur la trace d'une vérité nouvelle en est parfaitement averti par une sorte d'instinct qui ne trompe guère, et comme la patience est sa vertu dominante, il recommencera les essais jusqu'à ce qu'il soit certain d'avoir réussi ou de faire fausse route.

8 *b*. Non en rêve, mais dans l'état tranquille qui précède ou qui suit le sommeil, souvent en promenade solitaire. BARBARIN.

Rép. L (Etats-Unis). — 7. Je crois que l'inspiration joue une grande part mais je me rends toutefois bien compte qu'il est bien difficile, sinon impossible de dire comment on a trouvé ses idées. Par exemple j'ai retrouvé une découverte, que je croyais avoir faite, dans des livres que j'avais lus auparavant.

8 *b*. Pas consciemment ; mais plus d'une fois je me suis réveillé avec des idées claires sur un sujet qui m'avait préoccupé peut-être la veille, peut-être plusieurs jours avant. Je conseille aux étudiants de se poser les problèmes devant l'esprit aussi tôt que possible afin que ce travail cérébral inconscient puisse s'y exercer. — 9. A peu près la moitié de chaque. DAVIS.

Rép. LII (France). — 7. Je crois à l'inspiration chez un petit nombre de grands esprits ; à un plus grand nombre pour lesquels le génie est une longue patience ; à une très faible influence du hasard pur, mais à l'importance des hasards heureux qui se présentent à quelques esprits perspicaces et profonds. Bien entendu, je dis cela au point de vue général.

8 *b*. J'ai envoyé à M. Maillet un rêve qui m'avait, sur un sujet bien humble d'ailleurs, fourni une solution bizarre [voir Maillet *loc. cit.*, n° IV]. Ce fut d'ailleurs mon seul rêve utile, bien que souvent le cauchemar mathématique me fatiguât.

9. Travail voulu et personnel, mais sur des pistes rencontrées spontanément en général. HATON de la GOUPILLIÈRE.

Rép. LV (Etats-Unis). — 6. En fait chacun de mes nombreux mémoires est né en se rattachant à un mémoire antérieur d'un autre auteur ou de moi-même. Dans l'introduction de chaque mémoire, j'ai essayé d'expliquer la genèse de sa conception.

7. Il m'est rarement arrivé de faire une découverte par hasard, ou de trouver un résultat essentiellement différent de ce que je prévoyais. Presque toujours j'ai eu par intuition un sentiment assez défini du résultat final, tandis que les détails de la démonstration formelle m'ont coûté beaucoup de travail ; dans quelque cas la preuve explicite s'est fait attendre un an ou deux, et parfois je n'ai trouvé la clef de la démonstration que par hasard ou par une inspiration soudaine.

8. Seulement rarement. Il m'est arrivé de trouver dans la rue ou ailleurs la clef d'une démonstration que j'avais longtemps cherchée en vain. Quant aux rêves, ils sont chez moi rares et de la valeur de la grandeur du cercle ! Voici toutefois un cas dont je puis garantir l'authenticité : Ma mère et sa sœur, qui à l'école étaient rivales en géométrie, avaient vainement passé une longue soirée sur un problème. Pendant la nuit, ma mère y rêva et commença à développer à haute voix la solution de ce problème ; ma tante, l'entendant, se leva et en prit note ; le lendemain matin, à la leçon, elle se trouvait avoir la solution juste, qui manquait à ma mère ! L.-E. Dickson.

Rép. LVII (Etats-Unis). — 7. Je pense que la chance ou l'inspiration peuvent mener à découvrir des vérités, mais il est probable que cela n'a guère lieu qu'après une étude serrée et prolongée du sujet, comme dans le cas de Newton découvrant les lois de la gravitation.

8 *a*. Oui. A certains moments favorables, quand on est engagé dans d'autres sujets, on a de soudaines inspirations sur les sujets qu'on a sérieusement étudiés auparavant.

8 *b*. Je ne me souviens pas d'avoir résolu un problème ou une difficulté quelconque en rêve, mais j'ai souvent trouvé que le travail aboutit facilement le matin après le repos de la nuit, alors qu'on n'avait pas pu obtenir de résultats la veille quand on avait l'esprit fatigué.

9. Je pense que le travail volontaire et systématiquement poursuivi dans une direction déterminée conduit aux meilleurs résultats ; mais il arrive aussi qu'on obtient spontanément des résultats d'une manière frappante. E. P. Thompson.

Rép. LIX (Allemagne). — 7. Je crois que le hasard ne fait trouver de nouvelles vérités que lorsqu'on s'est complètement plongé dans une question par un travail acharné, de sorte qu'on ne peut pas attribuer de rôle spécial au hasard comme tel.

8 *a*. *Oui*, dans des recherches voisines ; *non* pour des sujets complétement hétérogènes.

8 *b*. Je n'ai jamais rencontré de solution en rêve ; mais immédiatement après le réveil, encore au lit, j'ai quelquefois trouvé la solution de problèmes qui m'avaient vainement occupé la veille ou pendant plusieurs jours.

9. En partie voulu, en partie spontané. TAFELMACHER.

Rép. LXIII (Suisse). — 8 *b*. Il m'est arrivé très souvent de résoudre des problèmes en rêve ; pas de voir les calculs, mais de voir la marche générale, et, sans voir les calculs, d'avoir la solution exacte ; le matin je me souviens de la solution et vaguement du raisonnement, mais en quelques instants le tout est retrouvé. Ceci quand j'ai cherché infructueusement le soir avant de me coucher. (...)

Rép. LXIV (Etats-Unis). — 8 *b*. Je pense qu'il m'est arrivé une ou deux fois seulement de résoudre un problème en rêve ; mais très souvent en m'éveillant le matin il me vient une solution quand j'ai travaillé sans rien trouver le jour précédent. RIETZ.

Rép. LXX (Etats-Unis). — 7. Difficile de répondre. Cela dépend de la définition de hasard et inspiration. Je pense que la chance arrive à ceux qui sont le mieux préparés ; l'inspiration rend probablement compte de l'intention de la majorité des *nouvelles méthodes*.

8*b*. Je me suis souvent couché avec un problème non résolu sur lequel j'avais beaucoup travaillé dans la soirée, et je me suis réveillé avec une nouvelle méthode d'attaque qui s'est trouvée bonne.

9. J'ai des exemples des deux dans mon expérience très limitée. YOUNG.

Rép. LXXII (Etats-Unis). — 7. Cela dépend entièrement des individus. Pour moi, qui n'ai pas une brillante intuition, les résultats sont surtout dus au travail patient et persévérant et aux tentatives répétées.

8*b*. Non, quoique des idées utiles me viennent souvent la nuit, pendant que je suis réveillé, ou le matin avant de me lever. (...)

Rép. LXXV (France). — 7. La part du hasard ? Infiniment petite. L'inspiration ? Je ne comprends pas bien ce nom. Mais si l'on remplaçait ce mot inspiration par « imagination » je répondrais qu'il faut aux mathématiciens (par où j'entends non les « professeurs » mais les « inventeurs », c'est-à-dire ceux qui ajoutent au passé une chose petite ou grande, peu importe) une qualité primordiale très intense, la qualité d'imagination. Les nouveautés, *même* (on pourrait peut-être dire *surtout*) les plus élémentaires, exigent dans le cerveau humain un très grand effort d'imagination ;

à ce point de vue, elles méritent peut-être plus d'est' leur en accorde généralement.

8*a*. J'ai surtout observé que par une pente insensil· vais des choses déjà vues, et même des choses qui p· sonnelles, que j'avais trouvées, que j'avais complèter et que le travail cérébral, par un mouvement circula riode, remettait devant moi comme une vérité nouv· des très modestes travaux que je puis revendique. absolu que j'ai le souvenir très précis de théorème vu, très justement je crois, attribuer dans des not et dont j'avais perdu toute notion. Ceci doit être ayant peu produit, le fait semble prouver combie susceptibles d'oublier nos propres œuvres et pa retrouver des choses déjà faites par nous-mêmes.

8*b*. [Ici l'auteur renvoie à sa réponse publiée pa *cit.*, p. 30, n° LV. On y voit qu'il a souvent des tiques, où il obtient des résultats qui lui seml pendant le rêve, mais qui se trouvent sans valeur continue en en donnant un nouvel exemple inté·

Il est très rare que mes rêves mathématiques n· tachés d'erreurs de raisonnement. Voici un fait cis, à l'appui de cette opinion qui s'applique prol coup d'autres personnes. Je rêvais de l'inscripti· réguliers et je me disais dans ce rêve : Puisque l· polygone dont le côté soustend l'arc de 18°, co avec la règle et le compas inscrire le polygone ‹ donc trouver la corde qui soustend l'arc de 1°. tais-je à moi-même dans le rêve, n'a-t-on pas temps une remarque aussi simple! Je subis ensı meil qui me donna une conscience très nette du de faire et me permit de le fixer en ma mémo demi-sommeil, je me donnai le commandemeı tout cela à mon réveil. Cette confusion entre le tés est sans doute peu croyable ; je certifie p· commise et que, dans ce rêve et même dans ce ne voyais absolument que la différence des chill

G.

Rép. LXXVI (France). — 9. Les résultats que toujours été la conséquence d'une méthode opi.

Rép. LXXVIII (Italie). — Quand une rech· tueuse, je ne l'abandonne qu'après avoir essay· de réussite, mais une fois abandonnée je ne m Les solutions que j'ai cru trouver dans l'état de toujours trouvées fausses. Je crois en revanche que, si avec les connaissances que je possède, je suis en état de résoudre une question donnée, il me suffit d'y penser intensément pendant quelque temps pour en trouver la solution après un bon sommeil.

(...)

Rép. LXXXI (Hollande). — 6. Le plus souvent, les vérités nouvelles m'apparaissent pendant que je dessine une figure sur le papier ou en pensée, ou que je songe au sujet à développer. En général la preuve ne tarde pas à venir; je ne me souviens que d'une seule vérité géométrique qui, ayant jailli pendant le tracé de la figure, me coûta trois ans pour la démonstration.

7. Le hasard peut donner une direction aux recherches, l'étude et la persévérance peuvent accumuler les faits et les résultats, mais c'est seulement l'inspiration qui peut faire envisager une question mathématique à un point de vue général, condition si nécessaire pour l'avancement de la science.

8*a*. Des propositions ou des questions dont je cherche la solution me reviennent à la mémoire quand je ne m'y attends pas, évoquées par la vue ou la pensée de choses qui souvent ne se rattachent que de loin, ou pas du tout, à mes recherches.

8*b*. Jamais en rêve. Quelquefois en réfléchissant au lit, avant le sommeil, une solution surgit par le fait du calme et de la solitude. Mais je n'aime pas cela, parce que cela me coûte une partie du sommeil qui m'est nécessaire. Le lendemain, au plus tard, je puis sans peine noter ces solutions, etc.

9. Voulu. J.-V. Vaes.

Rép. LXXXII (Suisse). — 7 et 9. J'estime que cette part est nulle et qu'en réalité les idées nouvelles, les découvertes, résultent d'un travail de réflexion très suivi.

8*a*. Des solutions qui me paraissaient difficiles d'obtenir se sont souvent présentées comme très simples après avoir abandonné les recherches pendant quelque temps (jours ou semaines).

8*b*. Oui, j'ai souvent rêvé mathématiques; en général les raisonnements étaient sans lien et il s'agissait de choses connues, par exemple de questions se rapportant à une leçon faite dans la journée ou à faire le lendemain; ce n'était jamais des raisonnements nouveaux. Il m'est arrivé de penser aux mathématiques le matin à moitié réveillé, et de voir dans une forme très simple des questions qui m'avaient paru difficiles à la fin de la soirée précédente. [Réponse déjà publiée par Maillet, *loc. cit.*, n° XXVIII.]

Fehr.

Rép. LXXXIII (France). — 7. Le hasard peut jouer un certain rôle si, étudiant deux sujets différents, l'un d'eux suggère une solution pour l'autre. Je crois aussi à l'inspiration entendue en ce sens qu'après avoir réfléchi un certain temps sur un problème, les différentes remarques qu'on a faites mentalement viennent se fondre subitement et donner la méthode cherchée.

8*b*. Pas immédiatement après le sommeil. Il m'arrive de rouler dans ma tête des équations ou des problèmes auxquels j'ai réfléchi la veille; mais c'est plutôt une sorte d'obsession momentanée (sans résultat) dans l'instant qui précède le réveil, et je cherche à éviter cela en changeant de sujet avant de m'endormir.

(...)

Rép. LXXXIV (Suisse) — 7. Elle est très grande.

8*a*. Oui.

8*b*. J'ai souvent poursuivi en rêve des solutions qui se sont toujours trouvées être fausses le lendemain au réveil,

9. Mes découvertes ont toujours été le résultat d'un travail voulu.

OLTRAMARE.

Ces documents, tout disparates et insuffisants qu'ils soient, pourraient peut-être se résumer en disant: Les découvertes mathématiques — petites ou grandes, et quel que soit leur contenu (nouveaux sujets de recherches, intuitions de méthodes ou de marches à suivre, pressentiments de vérités et de solutions non encore démontrées, etc.) — les découvertes ne naissent jamais par génération spontanée. Elles supposent toujours un terrain ensemencé de connaissances préalables, et bien préparé par un travail à la fois conscient et subconscient. D'autre part, toute découverte, par sa nouveauté même et son originalité, tranche forcément avec ce qui précède, et paraît d'autant plus surprenante qu'elle jaillit plus inopinément d'une incubation latente plus prolongée. On comprend donc que, suivant les cas et les individus, ce soit tantôt son caractère imprévu, tantôt sa dépendance du travail volontaire antérieur, qui frappe davantage son auteur lorsqu'il y réfléchit rétrospectivement. De là tant de variétés d'appréciation, et l'égale vérité de ces deux aphorismes célèbres, contradictoires en apparence, mais exprimant les deux faces indissolublement liées, quoique d'un relief souvent très inégal, d'un même processus: le génie, c'est l'inspiration; le génie, c'est une longue patience.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos de la rotation de la Terre[1].

Lettre de M. J. Richard (Dijon).

Permettez-moi de revenir encore sur la question du mouvement de la terre.

I. Je ne comprends pas du tout la théorie fallacieuse des marées de M. Andrault. *Expliquer* les marées, c'est montrer que ce phénomène est une conséquence d'une *loi plus générale* antérieurement admise, celle de l'attraction universelle. Cette loi les explique effectivement, et montre en même temps que la terre et la lune tournent autour de leur centre de gravité commun, pendant que ce point tourne autour du soleil.

II. La lettre publiée par M. Combebiac dans le précédent numéro (p. 229-230) contient des idées très justes. Si la terre ne tournait pas, pour que les phénomènes soient les mêmes que si elle tournait il faudrait supposer des forces réelles remplaçant les forces centrifuges composées. On ne pourrait pas *expliquer* l'existence de ces forces bizarres. Ces forces entraîneraient vers leur droite, dans l'hémisphère nord, vers leur gauche dans l'hémisphère sud, les objets qui se déplacent. Cela rompt la symétrie entre la droite et la gauche, cela fait que dans l'espace il y a une direction, celle de l'axe du monde possédant des propriétés particulières, de sorte que, en voulant rétablir la relativité du mouvement, *on supprime la relativité de l'espace.*

III. Par rapport à l'univers visible, la terre est un astre tout petit; elle n'a aucune importance. Les habitants des planètes qui circulent autour de Véga, s'ils ont les mêmes notions astronomiques que nous, ne se doutent pas de son existence, et désignent le soleil par un simple numéro ou une lettre de leur alphabet. C'est donc une idée folle de prendre pour axes de coordonnées des axes liés à la terre, et de les supposer fixes. Imaginez, un fou se persuadant que tout se meut, que lui seul est immobile; bien

[1] Voir *L'Enseignement mathématique,* 8e année, p. 150-155, p. 229-232.

mieux, comme le corps du fou n'est pas un solide invariable, supposez que ce fou croie en l'immobilité de son œil droit, tous les déplacements observés par rapport à cet œil sont pour lui absolus; son œil droit est le corps alpha.

L'œil droit du fou en question a environ 2 cc. de diamètre soit 1 cc. de rayon; le rayon de la terre est environ 700 millions de fois plus grand. Mais le rayon de la terre est contenu plus de 20 milliards de fois dans la distance de la terre à Véga. Le fou qui croit que son œil est immobile n'est donc pas plus illogique que celui qui fait de la terre le corps alpha.

Je n'insisterai pas sur l'impossibilité pour le fou en question de se construire une dynamique. Cette impossibilité de prendre pour système d'axes fixes des axes liés à l'œil d'une personne prouve bien que tous les trièdres de référence ne s'équivalent pas.

IV. Nous observons l'univers qui nous est extérieur ; les lois de son mouvement sont objectives, ce n'est pas nous qui les faisons. Ces lois nous montrent l'existence d'un trièdre de référence qu'il est nécessaire de supposer fixe. Il faut donc accepter ce fait. Que cela puisse choquer les gens s'imaginant avoir en l'esprit les données nécessaires pour expliquer l'univers, celà est naturel. Mais ceux qui croient l'expérience et l'observation nécessaires à la connaissance des choses ne trouvent là rien d'extraordinaire.

Lettre de M. G. Combebiac (Bourges).

I. Réponse à M. Andrault. — Je méconnais en effet formellement, ainsi que le constate M. Andrault, le fait que *les forces centrifuges sont relatives comme le sont les mouvements,* attendu que j'ignore ce que l'on peut bien entendre par la relativité (par rapport à quoi ?) d'une force, fût-elle centrifuge. Il n'est pas douteux, au contraire, que la force centrifuge due à la rotation de la terre — évitons les généralités insaisissables — ne puisse être différenciée, individualisée au moyen de l'expérience et indépendamment de toute observation de mouvement. La loi qui la régit met nécessairement et exclusivement en cause une droite passant par le centre de la terre et invariablement liée à celle-ci (dans le domaine d'approximation qui comporte ces manières de s'exprimer). Dans ces conditions, on est autorisé à qualifier non pas d'incommode mais bien de contraire au *bon sens* la mise en cause d'un système de repères défini par rapport à des corps manifestement *étrangers au phénomène* et en outre indépendants entr'eux comme le sont les étoiles fixes. C'est que la science n'est pas unique ment fondée sur les observations scientifiques ; elle doit rester inébranlablement attachée au bon sens, ce sol compact et résistant formé d'innombrables particules qui sont le résidu de l'expérience journalière, c'est-à-dire de l'activité mentale elle-même sous sa forme consciente ou subconsciente.

M. Andrault signale aussi que la théorie des marées peut être établie indifféremment en supposant fixe soit la terre soit la lune; cela nous enseigne que certains phénomènes dépendent seulement du mouvement relatif de deux corps, et aussi que l'on doit être circonspect en inférant d'un fait à sa cause (la cause consiste ici en un mouvement relatif). Les juges d'instruction n'ignorent pas qu'un même fait peut admettre diverses causes.

Il n'en est pas moins vrai qu'en disant que le chat trouvé mort sur la voie publique est tombé de telle gouttière, on exprime un fait objectif, par conséquent vrai ou faux, et que ce fait constitue aussi une explication, car il a pour effet de rattacher le fait observé à des qualités *générales* de la matière, jouant ainsi le même rôle que la rotation de la terre par rapport à la force centrifuge terrestre.

Je conviens d'ailleurs bien volontiers que j'ignore si cette explication du phénomène m'en fait *pénétrer l'essence et la réalité absolue*, ces expressions n'éveillant en moi que l'écho de lointaines dissertations sur des sujets confus et mal définis — idéalisme, réalisme,... — que la science peut, sans rien perdre, abandonner à sa rivale, la métaphysique,.. jusqu'à ce qu'elle soit en mesure de démontrer, par suite du développement de la psychologie, que les conceptions dont elles émanent sont purement et simplement inconsistantes.

II. Sur la loi de l'inertie[1]. — L'impossibilité d'observer autre chose que des mouvements relatifs a conduit Carl Neumann[2] à émettre l'idée que la loi de l'inertie s'applique aux mouvements relatifs des corps par rapport à un système indéformable de repères auquel il a donné la dénomination de corps *Alpha*.

Dans cette conception, la loi ordinaire de l'inertie doit se présenter comme un cas particulier d'une loi plus générale régissant tous les mouvements relatifs; cette loi est évidemment exprimée par l'équation vectorielle :

$$F = mJ_r + mJ_e + mJ_c ,$$

où F désigne la force appliquée au point matériel mobile, J_r l'accélération relative de celui-ci par rapport à un système rigide A, J_e l'accélération, par rapport au corps Alpha, du point de A qui coïncide, à l'instant considéré, avec le point matériel, enfin J_c l'accélération de Coriolis. Ces deux derniers vecteurs dépendent

[1] Voir *L'Ens. Math.* du 15 mai 1906; p. 229-232.

[2] Carl Neumann. — *Ueber die Principien der Galilei-newton'schen Theorie.* Leipzig, 1870.

essentiellement du mouvement relatif de A par rapport à Alpha et s'annulent lorsque A définit le même système indéformable que Alpha. Telle est la forme que doit prendre la loi de l'inertie dans la conception de Carl Neumann. Elle fait intervenir, en plus des éléments du mouvement relatif qu'elle régit, le mouvement de A par rapport à Alpha, et cette intervention cesse précisément lorsqu'elle aurait sa raison d'être, c'est-à-dire lorsque les corps A et Alpha définissent le même système de repères. En outre la loi, dans sa nouvelle forme, n'admet plus un déplacement d'ensemble sans déformation de tous les corps mis en cause ; le corps Alpha en effet ne doit pas suivre les autres dans un tel déplacement et cette circonstance suffit à faire ressortir le caractère artificiel de son intervention. Ainsi, les conditions dans lesquelles interviendrait le corps Alpha dans les lois du mouvement relatif de deux corps sont franchement contraires à notre conception de la causalité physique, conception qui résulte, elle aussi, de l'expérience plus ou moins consciente en attendant qu'elle se présente comme une nécessité logique.

On voit donc que la loi d'inertie relative au corps Alpha ne présente pas les caractères d'une loi naturelle, contrairement à ce qui a lieu pour la loi de Galilée-Newton ; elle ne saurait, dans ces conditions, satisfaire le physicien. Il est à prévoir qu'on me demandera ce qu'on doit entendre par les caractères d'une loi naturelle. Si je pouvais répondre à cette question, je n'attendrais pas qu'elle fût posée. Mais ces caractères, quelque imprécis qu'ils soient en l'état actuel de nos connaissances, existent ; la preuve, c'est que les raisons exposées ci-dessus sont de nature, si je ne m'abuse, à ruiner l'idée du corps Alpha dans l'esprit de beaucoup de physiciens et dans celui de quelques mathématiciens. Je conclus : notre conception actuelle de la Dynamique implique, bon gré mal gré, la notion du mouvement absolu.

La mesure du temps, qui intervient dans la loi de l'inertie, donne lieu à des remarques de même nature, mais peut-être plus caractéristiques que celles qui viennent d'être développées au sujet du système de repères.

La loi de l'inertie est indépendante du choix de l'unité de temps, mais elle implique le choix d'une horloge, c'est-à-dire une notion de l'égalité de temps. On peut établir cette notion au moyen d'une simple définition, en décrétant, par exemple, la constance du jour sidéral (passons sur les difficultés que soulève la subdivision de cette unité). Mais on ferait ainsi abstraction de l'intuition causale d'après laquelle deux phénomènes déterminés par des circonstances physiques identiques doivent avoir des durées égales entre elles ou même, le cas échéant, s'accomplir dans *le même* temps. (Si l'on m'oppose l'impossibilité de définir l'identité de circonstances physiques, je répondrai qu'il suffit que la notion de cette identité soit indépendante de l'idée de temps, et c'est ce qui est manifestement réalisé). L'égalité de temps constitue donc une notion physique indépendante de tout concept astronomique, et c'est physiquement et non pas astronomiquement que devrait être définie l'horloge-étalon ; bien plus, si l'on venait à constater une diminution (mesurée à l'horloge astronomique) de la durée d'oscillation d'un pendule défini physiquement, on n'hésiterait pas à l'attribuer à une augmentation du jour sidéral, surtout si la comparaison statique de la pesanteur avec les forces élastiques, par exemple, montrait qu'aucun changement n'est survenu de ce côté. Il est manifeste d'ailleurs que cette conclusion serait choisie en raison de sa conformité avec l'intuition causale et non pas en raison de sa commodité ; on ne saurait oublier en effet que le phénomène du jour sidéral a pour *cause* la rotation de la terre. Ajoutons, dans le même ordre d'idées, que, si Copernic a estimé plus vraisemblable la rotation de la terre que celle du ciel, c'est uniquement parce que la solidarité impliquée par un pareil mouvement s'accorde avec la structure physique de la terre, tandis qu'on ne s'expliquerait pas un tel mouvement d'ensemble d'un système de corps indépendants entr'eux comme le sont les corps célestes.

La conclusion à tirer de ces considérations est la suivante : l'idée du mouvemeut absolu ainsi que celle de l'égalité de temps sont des notions objectives et ont l'une et l'autre leur raison d'être dans la *concordance* de faits en nombre infini ; la science ne saurait faire abstraction de l'intuition causale en faisant intervenir dans la loi ou dans l'explication d'un phénomène des cirsconstances dont il est manifestement *indépendant;* cette intuition causale (qu'il ne s'agit pas d'ailleurs de soustraire à la critique) a une valeur objective démontrée par la faculté de prévision qu'elle engendre ; elle a ses racines dans les connaissances continuellement et discrètement déposées par l'expérience en couches superposées dans lesquelles la pensée puise ses aliments essentiels. Cayley a pu dire que les mathématiques sont l'idéalisation du bon sens ; j'ajouterais volontiers que la science tout entière est le développement du bon sens, terme qui n'est lui-même que le nom vulgaire, mais excellent, de l'intuition causale.

« Sur la convergence absolue des séries » et « sur un développement en série entière ».

(*A propos des articles de MM.* Carvallo *et* Jamet).

Permettez-moi de vous adresser deux remarques au sujet des Notes publiées sous ces titres, dans le dernier n° de *l'Enseignement mathématique*, par MM. Carvallo et Jamet.

Page 194. — M. Carvallo, à propos de la vraie valeur d'une série absolument convergente, donne aux mots *changer l'ordre des termes* une signification qui, comme il le remarque, rend *mauvaise* la forme du théorème de Dirichlet. Mais le théorème est susceptible d'une interprétation juste, plus simple, je crois, que celle proposée par M. Carvallo. Elle est adoptée dans le Formulario mathematico, éditio V, p. 225, prop. 26-2.

$$u \varepsilon \mathrm{qf}\, N_0 \,.\, \Sigma(\mathrm{mod}\, u\,,\, N_0)\, \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, v \varepsilon (N_0 \mathrm{f} N_0)\, \mathrm{rcp}. \supset . \Sigma(uv\,,\, N_0) = \Sigma(u\,,\, N_0)\,.$$

« Si u est une quantité fonction des nombres 0, 1, 2..., c'est-à-dire si u est une succession, ou série de quantités, et si la somme des modules des u, étendue à tous les indices 0, 1, 2... est une quantité finie, c'est-à-dire, si la série des modules est convergente, et si v est une correspondance univoque et réciproque entre les nombres 0, 1, 2...., ou une permutation de cette suite infinie des nombres, alors la somme de la série permutée égale la somme de la série primitive. »

Les mots du langage ordinaire « changer l'ordre des termes » est remplacé par le symbole $v \varepsilon (N_0 \mathrm{f} N_0)$ rcp, qui élimine toute ambiguité.

Page 197. — Dans l'article de M. Jamet, il y aurait lieu d'ajouter une condition, pour mettre la multiplication des séries d'accord, par exemple, avec le Formulario, pag. 222, prop. 22-2, et pag. 225, prop. 27-1-2-3. Les propriétés que l'auteur démontre pour le nombre *e*, sont aussi démontrées d'une façon élémentaire dans le Formulario p. 241. G. PEANO (Turin).

A propos de « l'Initiation mathématique » de M. Laisant.

Lettre adressée à M. FEHR.

Monsieur et cher Collègue,

Je viens de lire très attentivement le petit volume de M. Laisant « Initiation mathématique ». Je le trouve extrêmement important pour la première initiation et d'un réel intérêt même pour les initiés.

Voilà un excellent ouvrage de vulgarisation mathématique dans le vrai sens du mot. Il contribuera sans doute à faire apprécier et aimer les mathématiques dans un milieu très étendu.

Parmi les nombreuses questions dont M. Laisant s'occupe dans son livre, on doit signaler notamment celles qu'on trouve de la page 62 à la page 93[1], devenues intéressantes par la manière dont

[1] Les aires. — Le pont aux ânes. — Divers casse-têtes. — Le cube en huit morceaux. — Les nombres triangulaires. — Les nombres carrés. — La somme des cubes. — Les puissances de 11. — Triangle et carré arithmétiques. — Les numérations diverses. — La numération binaire. — Les progressions par différence.

elles ont été exposées. La méthode suivie dans les démonstrations, soit par sa simplicité, soit surtout pour bien parler aux yeux [1], mériterait d'être généralisée et adoptée dans les livres destinés à l'enseignement élémentaire.

Le petit ouvrage de M. Laisant retiendra, je l'espère, l'attention des professeurs, et provoquera un échange de vues qui permettra sans doute de fournir quelques généralisations et extensions à d'autres questions et problèmes.

Capitaine R. Guimarães,
membre de l'Acad. des sciences de Lisbonne.

Questions et remarques diverses.

Vues stéréoscopiques pour l'enseignement de la Géométrie. — Quelque lecteur pourrait-il nous renseigner sur ce que l'on possède [2] en fait de dessins stéréoscopiques pour l'enseignement des diverses branches de la Géométrie. Au moment où l'on cherche à développer chez les élèves l'intuition de l'espace, quelques dessins bien appropriés rendraient de grands services. Ces dessins seraient mis en circulation dans la classe avec l'appareil à main qui est déjà en usage pour d'autres branches d'enseignement.

L'Enseignement mathématique publierait éventuellement un certain nombre de planches à titre de modèles.

H. Fehr.

CHRONIQUE

La 15me réunion de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

La réunion de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles a eu lieu cette année, à l'occasion des vacances de Pentecôte, dans une petite ville universitaire de Bavière à *Erlangen*. Le choix de cette ville a permis de grouper d'une façon très intime les représentants des différentes parties de l'Empire allemand.

---

[1] Voir pp. 67-68, 69-70, 71-72, etc.

[2] Le *Katalog mathem. u. phys. Modelle, Apparate u. Instrumente*, publié par W. Dyck, à l'occasion de l'exposition organisée par la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, (Munich. 1892) mentionne une collection de dessins de J. Schlotke, exposée par l'Institut mathem. de l'Ecole techn. sup. de Munich. — Mentionnons aussi la conférence faite à l'Association suisse des maîtres de mathématiques, en 1903, par M. Stiner (Winterthour) ; elle n'a pas été publiée mais nous apprenons que M. Stiner prépare une publication sur cette question.

Nous devons nous borner, dans ce court compte rendu, à donner un aperçu des travaux concernant spécialement l'enseignement mathématique. La place nous manque pour parler des autres travaux, ainsi que des réunions familières et des excursions scientifiques.

La première séance générale a été ouverte à l'Aula de l'Université par M. le Prof. F. PIETZKER (Nordhausen), président de l'Association. Après les divers discours de bienvenue prononcés par les représentants du Gouvernement, de la Ville et de l'Université, M. J. DUCRUE (Munich) fait une conférence sur *la propédeutique géométrique*. Il montre en quoi consiste l'enseignement préparatoire à la Géométrie indroduit depuis quelques années dans la 4[me] classe des gymnases bavarois; puis il donne quelques développements sur les bases et l'organisation de son propre cours en accompagnant son exposé de démonstrations qu'il a l'habitude de faire à ses élèves et des dessins qu'ils ont exécutés. Il n'est guère possible de décrire en quelques lignes ces intéressantes démonstrations qui utilisent, entr'autres, des tiges de bois et des fils élastiques blancs tendus devant le tableau noir.

Dans sa communication sur les *notions de nombres et d'ensembles*, M. WIELEITNER (Speyer) examine quelles sont les notions et propositions de la théorie des ensembles qui ont une importance immédiate pour l'enseignement des écoles moyennes, et tout particulièrement pour celui de la Géométrie. Il insiste d'abord sur la différence entre les deux espèces d'ensembles infinis, les ensembles dénombrables et ceux qui sont équivalents à un continu; viennent ensuite la différence entre les règles des opérations sur les nombres finis et les nombres infinis, la puissance égale des ensembles infinis de dimensions différentes, puis enfin la définition exacte de la notion de *dimension*.

Nous ne pouvons signaler que par leur titre les belles communications présentées à la 2[me] séance générale par M. E. WIEDEMANN sur les *expériences physiques chez les anciens*, notamment chez les Arabes et M. H. HESS, *sur les problèmes modernes de la théorie des glaciers*.

Dans la 3[me] séance M. PIETZKER présente un rapport sur l'accueil fait dans les milieux de l'enseignement aux *réformes proposées*[1] par la Commission de la société des naturalistes et médecins allemands et dont il a été question à plusieurs reprises dans cette Revue. Sur la proposition de M. H. SCHOTTEN (Halle), l'assemblée adopte la résolution par laquelle elle déclare appuyer les propositions de la dite commission. D[r]. H. WIELEITNER (Speyer).

[1] Voir les *Reformvorschläge f. d. mathem. u. naturw. Unterricht* entworfen von der *Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte*. Prix : 1 Mk.; Teubner, Leipzig.

Nominations et distinctions.

M. L. Boltzmann (Vienne) a obtenu le prix Pierre W. Müller consistant en une médaille d'or et en une somme de 9000 marks.

M. L. Burmester, de l'Ecole technique sup. de Munich, est nommé membre extraordinaire de l'Académie des sciences de Munich; l'Ecole technique de Hanovre lui a décerné le diplôme de Docteur honoraire en raison de ses travaux remarquables dans le domaine de la Cinématique.

M. S. Epsteen est nommé professeur extraord. de Mathématiques à l'Université de Colorado (E.-U.)

M. C. N. Haskin est nommé professeur extraord. de Mathématiques à l'Université de l'Illinois (E.-U.)

M. F. Jung passe en qualité de privat-docent, de l'Ecole technique sup. de Prague à celle de Vienne.

M. Ernest Lebon est nommé membre honoraire de l'Académie de Metz.

M. G. A. Miller est nommé professeur extraord. à l'Université de l'Illinois (E.-U.)

M. J. A. Miller est nommé professeur ordinaire à l'Université de Wisconsin (E.-U.)

M. N. N. Saltykow de l'Institut polytechnique de Kief, est nommé professeur extraord. de Mathématiques pures à l'Université de Charkow.

M. W. A. Stekloff de l'Université de Charkow, est nommé professeur ord. à l'Université de St. Petersbourg en remplacement de M. Markoff qui prend sa retraite.

M. E. B. Van Vleck est nommé professeur de Mathématiques à l'Université de Wisconsin (E.-U.)

Conservatoire des Arts et Métiers de Paris. — M. M. d'Ocagne a été, non pas nommé, mais présenté par le Conseil de l'Ecole pour la chaire de Géométrie descriptive. D'autre part, l'Académie des sciences a décidé de présenter en première ligne M. d'Ocagne, en seconde ligne M. C. Bourlet et en troisième ligne Lucien Lévy.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents:

MM. G. Z. Giambelli, pour la Géométrie projective, à l'Université de Gènes; L. Hanni, pour les Mathématiques, à l'Université de Vienne; Schellfisch, id., à l'Université de Munster; Erh. Schmid, id., à l'Université de Bonn.

Smith's-Prizes de l'Université de Cambridge. — Les Smith's-Prizes de l'année courante ont été attribués aux mémoires suivants: « The geometric interpretation of apolaric binary forms », par M. C. F. Russel. « A problem in tidal evolution suggested by the motion of Saturn's ninth satellite », par M. F. J. Stratton.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

ANGLETERRE

Oxford; *University*. — Mathematics Lecture List for Michaelmas Term, begin 15 oct. 1906. — W. Esson: Analytic Geometry of Plane Curves, 2; Synthetic Geometry of Plane Curves, 1. — E. B. Elliot: Sequences and Series, 2; Elementary Theory of Number, 1. — A. E. H. Love: Hydrodynamics, 2; Problems in Applied Mathematics, 1. — H. H. Turner: Elementary Mathematical Astronomy. - H. C. Plummer: Pratical Work. — C. E. Haselfoot: Theory of Equations, 1. — C. Leudesdorf: Projective Geometry (elementary), 3. — A. E. Joliffe: Analytical Geometry, 2. — J. W. Russell: Differential Calculus, 2. — R. F. McNeile: Curve Tracing, 1. — A. L. Pedder: Problems in Pure Mathematics, 1. — C. H. Sampson: Higher Solid Geometry, 2. — J. E. Campbell: Differential Equations, 2. — C. H. Thompson: Integral Calculus, 2 — E. H. Hayes: Analytical Statics, 3. — A. L. Dixon: Hydrostatics, 1. — H. T. Gerrans: Tridimensional Rigid Dynamics, 2. — P. J. Kirkby: Attractions and Electrostatics, 2.

AUTRICHE-HONGRIE

Kolozsvar (Hongrie); *Université* (sem. d'hiver 1906-07). — Schlesinger: Calcul différentiel et intégral, 4; Groupes discontinus, 3; Exercices, 1; Séminaire (avec Fejér), 2. — Valyi: Algèbre supérieure, 5; Théorie des nombres, 2; Exercices, 1; Séminaire, 1. — Fejér: Équations différentielles du domaine réel, 3, — Klug: Géometrie descriptive, I, 2; II, 2; Géométrie projective, 2; Exercices, 3. — Tangl: Optique géométrique, 2. — Farkas: Théorie des vecteurs, 3; Transformations de l'énergie, 4; Séminaire, 2.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1906-1907.

University of Chicago. — The following advanced courses in mathematics are announced for the summer quarter. June 19 - September 1. — Prof. O. Bolza: Elliptic functions, 4; Functions of a real variable, 4. — Prof. H. Maschke: Projective geometry, 4. — Prof. H. E. Slaught: Elliptic integrals, 4; Analytic geometry, 5. — Prof. L. E. Dickson: Algebraic analysis, 4; Theory of substitutions, 4. — Dr A. C. Lunn: Integral calculus, 5; General Seminar, 2. — Mr N. J. Lennes: Pedagogy of mathematics, 4.

Cornell University (Ithaca, New-York). — Prof. L. A. Wait : Advanced analytic geometry, 3; Differential calculus, II, 2. — Prof. G. W. Jones : Algebra and imaginaries, 3. — Prof. J. McMahon : Mechanics and hydrodynamics, 2 ; Fourier's series and spherical harmonics, 3. — Prof. J. H. Tanner : Theory of equations, 2. — Prof. J. I. Hutchinson : Projective geometry, 3 ; Seminar in automorphic functions, 2. — Prof. V. Snyder : Algebraic plane curves, 3 ; Definite integrals, 2. — Prof. W. B. Fite : Theory of functions of a complex variable, 3; Theory of groups, 2 (first half year); Theory of assemblages, 2 (second half year).

Johns Hopkins University (Baltimore). — Prof. F. Morley : Projective geometry, 2 ; Dynamics, 2 (first half year) ; Theory of functions, 2 (second half year) ; Classic authors, 1. — Dr. A. Cohen : Elementary theory of functions, 2 ; Differential equations, 3 (first half year) ; Theory of numbers, 3 (second half year). — Dr. A. B. Coble : Theory of correspondence, 2.

Indiana University (Bloomington). — Prof. R. J. Aley : Differential equation, 5 ; Theory of numbers, 6. — Prof. C. S. Davisson : Modern analytic geometry, 4 ; Theory of surfaces, 4 ; Fourier's series, 3. — Prof. D. A. Rothrock : Calculus, II, 6 ; Calculus of variations, 6 ; Functions defined by differential equations, 4. — Prof. U. S. Hanna : Groups of substitutions, 3 ; Galois's theory of equations, 3.

(Summer term, June 21-September 7, 1906). — Prof. S. C. Davisson : Higher plane curves, 5. — Prof. D. A. Rothrock : Calculus of variations, 6. — Prof. U. S. Hanna : Theory of numbers, 3.

University of Pennsylvania. — Summer session, 1906. Thirty lectures in each course, July 5 to August 16. — Prof. G. E. Fisher : Invariants and covariants. — Prof. J. I. Schwatt : Definite integrals. — Prof. G. H. Hallett : Theory of abstract groups. — Dr. F. H. Safford : Differential equations.

University of Wisconsin. — Summer session. Prof. C. S. Slichter : History of mathematics, 2; Differential equations, 5. — Prof. G. A. Bliss : Elliptic functions in the Jacobi form, 5 ; Calculus of variations, 3.

Yale University (New Haven, Conn.). — Prof. J. Pierpont : Advanced mechanics, 2; Advanced theory of functions, 2 ; Theory of functions of a real variable, 2. — Prof. P. F. Smith : Advanced analytic geometry, 2; Foundations of geometry, 1. — Prof. H. E. Hawkes : Linear associative algebra, 2 ; Teachers course in geometry, 2. — Prof. M. Mason : Calculus of variation, 2 ; Differential equations of physics, 2. — Prof. E. B. Wilson : Advanced calculus; 2 ; Thermodynamics, 2. — Dr. W. A. Granville : Differential geometry, 2. — Dr. L. E. Hewes : Differential equations. 1 ; Geometric transformations, 2. — Mr. E. L. Taylor : Scientific computation, 1. — Prof. W. B. Beebe : Celestial mechanics, 2. — Prof. F. E. Beach : Vector analysis, 1 ; (first half year).

BIBLIOGRAPHIE

A. Arnaudeau. — **Tables des Intérêts composés.** — Annuités et Amortissements pour des taux variant de dixième en dixièmes et des époques variant de 100 à 400, suivant les taux; 1 volume in-4, de XI-[15]-125 pages; prix : 10 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Les nouvelles Tables d'intérêt composé calculées par M. Arnaudeau fournissent, pour 65 taux d'intérêt différents, les données suivantes : la valeur de 1 fr. placé à intérêts composés après un certain nombre d'années ou de mois; la valeur actuelle de 1 fr. payable après un certain nombre d'années; la valeur actuelle d'un certain nombre d'annuités de 1 fr. payables à la fin de chaque année; l'annuité par laquelle on peut amortir un capital de 1 fr. au bout d'un certain nombre d'années.

Ces Tables sont donc de nature à rendre les mêmes services que les Tables existantes; mais elles présentent, en outre, une particularité sur laquelle nous désirons appeler l'attention à cause de son importance pratique. L'auteur, au lieu de conserver la graduation traditionnelle des taux d'intérêt par $^1/_4$, $^1/_8$ ou $^1/_{16}$ pour 100 (suivant le caractère plus ou moins usuel des taux considérés) a adopté un intervalle uniforme de $^1/_{10}$ pour 100 pour toute l'échelle des taux. Le taux le plus bas des Tables étant 0,5 pour 100, les suivants sont 0,6, 0,7 et ainsi de suite, sans aucune lacune, jusqu'au taux le plus élevé, 6,4 pour 100. Il résulte de cette uniformité dans les intervalles que l'interpolation, c'est-à-dire la détermination d'un résultat correspondant à un taux non mentionné dans les Tables, se trouve grandement facilitée et qu'on peut appliquer à cet effet la formule de Newton, en utilisant un ordre de différences en rapport avec l'approximation que l'on désire obtenir.

A. Fuhrmann. — **Aufgaben aus der analytischen Mechanik.** I. Dritte Auflage. — 1 vol. de XII, 206 pages; prix : M. 3.; Teubner, Leipzig.

On sait combien M. Fuhrmann a déployé d'ingéniosité pour présenter d'innombrables et élégants problèmes comme applications immédiates des théories de la Mécanique. D'ailleurs, dans la préface du petit volume d'aujourd'hui, il nous rappelle l'opinion de Schlömilch lui-même d'après laquelle le langage des sciences exactes était comparé à une langue étrangère qu'il s'agissait d'apprendre. Dans ce cas — c'est toujours Schlömilch qui parle — on ne se contente pas d'un apprentissage théorique, il faut savoir se tirer d'affaire pratiquement et ce n'est qu'en causant qu'on apprend à converser. De même en mathématiques. Résolvons donc des problèmes et ce sera la meilleure façon de nous rendre compte de la portée des théories. Ce dont il faut alors remercier M. Fuhrmann c'est d'avoir collectionné et inventé des problèmes ayant tous une rare élégance.

Le présent volume a trait à la statique et à l'attraction. L'équilibre d'un point matériel libre puis assujetti à rester sur des lignes ou des surfaces données, offre des considérations curieuses et certains de ces problèmes ont été reproduits en France à titre d'exercices, notamment dans le grand traité de M. P. Appell. Rappelons par exemple le pont-levis continuellement en équilibre avec son contrepoids si ce dernier décrit une certaine courbe à déterminer. Remarquons aussi quelques cas d'équilibre d'un point sur une courbe gauche. La détermination des centres de gravité tient à elle seule une grande partie de l'ouvrage. Signalons surtout le cas des corps limités par des surfaces de révolution ou par des surfaces cylindriques. La statique des systèmes de points et des corps solides est suivie d'applications du principe des vitesses virtuelles. L'attraction donne lieu à trois catégories de problèmes suivant que l'on envisage l'action des lignes, des surfaces ou des corps à trois dimensions.

Enfin il est tout à fait remarquable que ce recueil de problèmes soit accompagné de renseignements bibliographiques extrêmement riches ; les noms de certains auteurs témoignent à eux seuls de l'importance des sujets traités. A. Buhl (Montpellier.)

Al. Gouilly, Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Traité de mécanique élémentaire** limité aux matières du programme de l'Université pour la classe de mathématiques spéciales (1904) et adopté en 1906 pour le concours d'admission de l'Ecole centrale. — 1 vol. in-8°, XVI, 204 p. ; prix : 5 fr. ; Croville-Morant, Paris ; Georg & C^{ie}. Genève.

Comme conséquence des remaniements récemment apportés en France dans les programmes universitaires, les ouvrages d'enseignement font une plus grande part à l'expérience dans l'introduction des concepts et aux besoins de la pratique dans le choix des applications traitées. L'ouvrage de M. Gouilly accuse peut-être encore davantage cette double tendance, en raison sans doute de la profession de son auteur. Il se distingue aussi par des innovations heureuses dans les méthodes d'exposition et les démonstrations; on doit y signaler notamment le souci constant d'éviter que la conception de la force se confonde avec celle d'une flèche tracée sur le tableau noir, c'est-à-dire de distinguer nettement les propriétés des forces de celles des vecteurs géométriques. C'est ainsi qu'à la notion habituelle de l'équivalence des systèmes de forces se substitue très raisonnablement l'équivalence des systèmes de vecteurs et, en conséquence, la notion inutile de corps rigide disparaît du domaine proprement mécanique. La théorie des machines simples acquiert dès lors une allure nouvelle plus apte à développer le sentiment de la réalité.

Les matières traitées sont celles du programme visé dans le titre et se suivent dans l'ordre généralement adopté, savoir : vecteurs concourants, cinématique du point géométrique, cinématique des figures géométriques (figures invariables), mécanique du point matériel, systèmes de points matériels, théorie des systèmes quelconques de vecteurs, conditions d'équilibre d'un système matériel, machines simples.

En tête de l'ouvrage sont reproduits divers articles dans lesquels l'auteur avait déjà exposé ses vues personnelles sur l'enseignement de la mécanique; deux de ces articles ont été publiés dans l'*Enseignement mathématique* en janvier et mars 1904. G. Combebiac (Bourges.)

C.-A. Laisant. — **Initiation mathématique.** — Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance. — 1 vol. gr. in-16, 167 p. ; 2 fr. ; Georg et C°, Genève ; Hachette et C°, Paris.

Ce nouvel Ouvrage de M. Laisant est consacré au grand problème de l'initiation première mathématique. Il contient le développement des principes exposés dans une conférence faite en 1899 à l'Institut psycho-physiologique. Ces principes sont ceux de « toute saine pédagogie »; ils sont applicables non seulement à l'éducation des petits enfants, mais aussi à l'enseignement secondaire.

« Attachez-vous — dit M. Laisant — à intéresser, à amuser l'enfant, ne lui faites rien apprendre par cœur. Rendez son travail attrayant. Donnez à l'enfant l'illusion que c'est lui-même qui découvre la vérité. Remplacez la méthode didactique par des leçons de choses. En procédant de cette façon, il est possible de faire entrer dans l'esprit de l'enfant, *sous forme de jeu,* les premières notions sur l'Arithmétique, l'Algèbre et la Géométrie et « à 11 ans, s'il est d'intelligence moyenne, il saura et comprendra mieux les mathémathiques que les neuf dixièmes de nos bacheliers ».

Mais pour arriver à ce résultat, il ne suffit pas de connaître les principes si justes que je viens de rappeler, il faut encore savoir les appliquer. Le livre de M. Laisant fournit à cet égard des indications précieuses dont l'éducateur pourra s'inspirer.

Ce qu'on doit d'abord développer chez l'enfant, c'est la faculté du dessin. Lorsqu'il aura appris à tracer régulièrement les bâtons, on lui apprendra à les compter. On se servira en même temps d'autres objets, tels que des haricots, des jetons, etc, et on donnera ainsi à l'enfant la notion des nombres, — jusqu'à 10 d'abord, jusqu'à 100 ensuite, en groupant les allumettes ou les haricots en paquets de dix. On lui fera construire la table d'addition et à l'aide de cette table et de ces paquets d'allumettes, il tracera des exemples d'addition et de soustraction sur les nombres inférieurs à 100 et plus tard sur des nombres quelconques qu'il apprendra à construire d'une manière analogue en groupant les paquets (dizaines) en fagots (centaines), les fagots en boîtes, etc. C'est en jouant qu'il apprendra ainsi la numération écrite et même les premières notions d'algèbre; il suffira pour cela de traduire les deux premières opérations par des bâtons ou des segments portés de gauche à droite et de droite à gauche.

C'est par des procédés semblables (construction de table, dessin, exemples amusants) que l'enfant apprendra la multiplication, la division et les propriétés les plus simples des fractions.

Je tiens à faire remarquer en passant que des méthodes analogues à celles de M. Laisant sont adoptées depuis plusieurs années dans un grand nombre d'établissements primaires et secondaires de Russie et que les résultats obtenus ont été excellents.

Les mêmes principes sont applicables à l'initiation première géométrique. Au lieu de donner à l'enfant les démonstrations classiques, on se bornera, comme le dit si bien M. Laisant dans sa conférence de 1899, « à lui faire *sentir* les choses, d'une façon assez claire et assez nette pour que cela équivaille, au point de vue de sa satisfaction de conscience, à une démonstration absolument rigoureuse. »

C'est ici que le dessin nous sera particulièrement utile. A l'aide de figures que l'enfant tracera lui-même on pourra l'initier aux propriétés les plus simples des lignes, des angles, des corps. Il sera même possible de lui faire comprendre le fameux théorème de Pythagore, car il existe de ce théorème une démonstration intuitive qui peut être lue sur les figures, — c'est celle qui se trouve dans un ouvrage de Bhascara. C'est aussi à l'aide de figures et de constructions qui parlent aux yeux, que M. Laisant, en imitant en cela les anciens, obtient non seulement les expressions $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ etc., mais encore les sommes des carrés et des cubes des n premiers nombres entiers. Mais je ne saurais énumérer tous les résultats qu'on obtient ainsi en jouant, au moyen de constructions toujours amusantes.

Je voudrais maintenant attirer l'attention sur une notion importante qu'on devrait, d'après M. Laisant, donner dès le début de l'initiation mathématique, — c'est la notion de la numération et de différents systémes de numération. Les applications et les exemples ne manquent pas et M. Laisant en donne plusieurs bien faits pour intéresser les enfants.

Nous avons déjà souligné le rôle joué par le dessin, les figures et les constructions. Il faudra habituer l'enfant petit à petit à se servir du compas et du rapporteur. Il pourra alors exécuter des tracés plus précis et en particulier des graphiques qui lui permettront d'une part de trouver la solution d'une foule de problèmes intéressants et utiles et d'autre part le prépareront à bien comprendre les principes de la Géométrie analytique.

Dans cet enseignement essentiellement objectif, les questions amusantes servent de moyen pédagogique. Le livre de M. Laisant contient un choix varié d'exemples, — jeux, paradoxes, problèmes plaisants, bien faits pour attirer l'attention et la curiosité des enfants. Je citerai en première ligne les exemples suivants : les grains de blé sur l'échiquier, la maison à bon marché, un dîner cérémonieux. On arrive ainsi à faire pénétrer dans le cerveau de l'enfant une foule de choses importantes et utiles. Il est à souhaiter que tous les éducatenrs s'inspirent des principes si justes que M. Laisant expose avec tant de lucidité dans son petit livre sur l'initiation mathématique.

D. Mirimanoff (Genève).

H. Müller u. J. Plath. — **I. Lehrbuch der Mathematik. II. Sammlung von Aufgaben**. Zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrerprüfung und auf das Abiturientenexamen am Gymnasium. Für den Selbstunterricht. — 2 vol. in-8°; 4 mk. le volume; B. G. Teubner, Leipzig.

M. H. Müller, professeur au Gymnase « Kaiserin Augusta » à Charlottenbourg-Berlin, a publié ces dernières années, en collaboration avec plusieurs collègues compétents, une série d'excellents recueils qui méritent d'être connus de tous les professeurs. L'exposé, à la fois clair et précis, est présenté avec soin sans développements inutiles; il tient largement compte du principe de la concentration des différentes branches. Ces qualités sont du reste reconnues par tous ceux qui ont eu à examiner les volumes parus.

Les manuels Müller possèdent plusieurs éditions appropriées aux besoins des différentes catégories d'écoles moyennes. Il y a les manuels adaptés A) aux gymnases et aux progymnases; B) aux Ecoles réales; C) aux séminaires et écoles normales; D) aux écoles supérieures de jeunes filles.

Les deux volumes que nous avons sous les yeux forment une suite de l'édition C. L'auteur, M. Plath, examine les matières destinées aux examens des maîtres des écoles moyennes. En Prusse, on nomme « Ecole moyenne » les classes qui se rattachent directement à l'école primaire sans fournir la préparation à l'université. L'ouvrage s'adresse aux maîtres primaires qui se préparent à passer dans ces écoles moyennes, mais il convient aussi à la préparation des examens de maturité des écoles réales. Le recueil d'exercices est extrêmement riche et il correspond pas à pas au manuel. Celui-ci comprend six parties : 1° les compléments de planimétrie (similitude, divisions et faisceaux harmoniques); 2° Algèbre (puissances, racines, nombres complexes, équations quadratiques, maxima et minima, progressions, binome, etc.); 3° Trigonométrie plane et sphérique; 4° Compléments de Stéréométrie (entre autres la projection des cartes;) 5° et 6° Géométrie analytique.

Le présent Ouvrage, comme d'ailleurs toute la collection Müller, peut être vivement recommandé. On trouvera un exposé détaillé des différents volumes dans la brochure de 36 pages distribuée gratuitement par la maison Teubner. C. Brandenberger (Zurich).

Maurice d'Ocagne. — **Le Calcul simplifié** par les procédés mécaniques et graphiques. 2e édition entièrement refondue et considérablement augmentée. — 1 vol. cart. in-8°, 228 p.; 5 fr.; Gauthier-Villars.

Voici un ouvrage qui engagera sans doute quelques professeurs à interrompre de temps à autre le cours régulier des leçons conformes aux programmes par des digressions à la fois intéressantes et utiles. Quelques causeries sur les procédés si ingénieux que l'on possède pour simplifier le calcul numérique seraient certainement les bienvenues et elles permettraient de présenter un aperçu du principe et du fonctionnement des machines à calculer, des caisses enregistreuses, des instruments logarithmiques, des nomogrammes, etc., que l'élève a l'occasion de voir en dehors de l'Ecole.

Cet ouvrage en donne un excellent exposé; il forme une deuxième édition, entièrement refondue et considérablement augmentée, du petit opuscule publié par M. d'Ocagne il y a une dizaine d'années. On y trouve l'historique rapide et la description sommaire, faits à un point de vue très général, des divers procédés qui ont été imaginés en vue de simplifier le calcul numérique. L'auteur vise uniquement les calculs immédiatement réductibles aux opérations fondamentales de l'arithmétique et à la résolution numérique des équations; il divise les divers modes de simplification en six groupes.

Sous le titre d'*instruments arithmétiques*, sont réunis les appareils qui permettent d'effectuer manuellement les opérations sans le secours d'aucun mécanisme tels que ressorts, cames, etc. Ils comprennent des additionneurs, des multiplicateurs et les réglettes de Grenailles.

Les *machines arithmétiques* font l'objet d'un intéressant exposé qui débute par la description de la machine conçue d'une façon si hardie par Blaise Pascal. Sont étudiés ensuite les *instruments et machines logarithmiques*. Ce paragraphe est précédé d'une note sur l'histoire des logarithmes rédigée d'après des notes du Lieutenant-Colonel Bertrand; on y cherche en vain le nom de J. Burgi, qui doit être cité à côté de Néper dans l'invention des logarithmes. Puis viennent les *tables numériques* ou *barêmes*, le *calcul par le trait* et le *calcul nomographique*.

On sait la part que l'on doit à l'auteur de ce volume dans les progrès de la Nomographie et on lira sans doute avec intérêt son exposé des types de nomogrammes les plus courants qui constituent un instrument mathématique des plus précieux. H. Fehr.

Edm. Schulze und F. Pahl.— **Mathematische Aufgaben**. Ausgabe für Gymnasien. I. Teil: *Aufgaben aus der Planimetrie und Arithmetik für die Unterstufe* (Quarta bis Untersekunda einschl.) von Prof. Dr. Edm. Schulze. — 1 vol. in-8°, VIII-196 p.; Dürr, Leipzig.

Cette première partie du Recueil de MM. Schulze et Pahl contient les exercices et problèmes relatifs à la Géométrie, l'Arithmétique et l'Algèbre des classes IV à II des gymnases prussiens.

Les auteurs ne paraissent pas accepter sans discussions les demandes toujours plus énergiques en faveur des applications pratiques dans l'enseignement mathématique. Dans l'introduction ils insistent du moins pour qu'on ne néglige pas les mathématiques *pures*. Les problèmes empruntés à la physique sont cependant nombreux et bien choisis. Les notes qui accompagnent quelques problèmes permettent d'écarter certaines difficultés et d'utiliser le recueil sans le secours d'un traité.

L'ouvrage renferme 1083 numéros, dont plusieurs contiennent jusqu'à 24 exemples. C'est dire qu'il s'agit d'une collection remarquablement riche.

ERN. KALLER (Vienne).

DAV.-EUG. SMITH. — **A Portfolio of Portraits of Eminent Mathematicians.** Part. II. — Douze portraits sur papier japon, 5 doll. ; sur pap. plat., 3 doll. ; the Open Court Publishing Company, Chicago.

Cette seconde série des portraits de mathématiciens publiés par M. D.-E. Smith est consacrée aux mathémathiciens suivants : Pascal, Jean et Jacques Bernoulli, Gauss, Lagrange. L'Hopital, Cavalieri, Euler, Monge, Laplace, Tartaglia, Barrow. Chaque portrait est accompagné d'une courte notice biographique et bibliographique.

Nous saisissons cette occasion pour signaler à nouveau cette belle collection à tous les mathématiciens et tout particulièrement aux professeurs de l'enseignement secondaire supérieur.

C.-O. TUCKEY. — **Examples in Arithmetic** with some notes on method. — 1 vol. XII. 251 p., avec solutions (39 p.) ; 3 sh ; George Bell & Sons ; Londres.

Dans le présent recueil d'exercices, l'auteur cherche à tenir compte des deux tendances ci-après suivant lesquelles on se propose de réformer l'enseignement mathématique : 1) éviter les difficultés purement artificielles et abréger les parties élémentaires de manière à gagner du temps pour les parties supérieures ; 2) lier entre elles d'une façon plus intime des branches que l'on avait l'habitude de séparer strictement. A cet effet, il a placé à la fin, sous le titre de problèmes à examiner, les questions qui présentent des difficultés pour le commençant ; il fait un usage constant du papier quadrillé au millimètre de manière à tirer parti de bonne heure des procédés graphiques en Arithmétique. Une partie est spécialement consacrée à des questions empruntées à la Physique. Dans la seconde partie du volume on trouve les logarithmes et quelques notions de trigonométrie avec les tables.

Dès les premiers chapitres, l'auteur a su illustrer le texte à l'aide d'exemples d'un grand intérêt pour les élèves ; à citer par exemple les carrés magiques, les questions empruntées à la statistique, à la vie sociale, à la Géographie mathématique et à la Chronologie, les calculs de surfaces et de volumes. La notion de coordonnées donne lieu à des applications fort bien choisies et fournissant la représentation graphique de lois physiques.

Les lecteurs du continent seront frappés de voir les nombreuses complications auxquelles conduit le système anglais des poids, mesures et monnaies, et ils ne manqueront pas de reconnaître plus que jamais les avantages considérables du système métrique (v. p. 6-12, 86-92, 213-215).

A signaler les courtes indications concernant les obligations et actions (« Stocks and Shares ») et les variations de leurs cours (p. 135-6), puis, d'autre part, celles qui sont relatives à l'établissement de formules et à la recherche des causes d'erreur numériques.

Les exercices comprennent 2894 numéros dont plusieurs contiennent 10 problèmes différents ; ils sont d'une remarquable variété. Leurs solutions, placées à la fin du volume, embrassent 39 pages très serrées.

Il n'est guère besoin d'ajouter que l'Ouvrage est imprimé avec ce soin spécial qui caractérise les grands éditeurs anglais.

ERNEST KALLER (Vienne).

H. WEBER & J. WELLSTEIN. — **Encyklopädie der Elementar-Mathematik.** Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. II. **Elemente der Geometrie.** — 1 vol. cart. grand in-8°, XII. 604 p. ; 12 Mk ; Teubner, Leipzig.

Ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le dire en rendant compte du premier volume (*L'Ens. math.*, 6e année, p. 160-162), cet Ouvrage est destiné à la fois aux professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et aux étudiants qui se préparent à la carrière de l'enseignement. Ce n'est pas une *encyclopédie* au sens habituel de ce terme. Comme il l'a annoncé d'autre part, M. Weber a emprunté le titre de l'ouvrage au cours qu'il a l'habitude de professer aux étudiants en mathématiques dans le but d'attirer leur attention sur les principes fondamentaux des mathématiques. Envisagé à ce point de vue, ce second volume, qui est consacré à la *Géométrie élémentaire*, atteint parfaitement ce but. L'ouvrage est divisé en *trois parties :* I. Les fondements de la Géométrie ; II. la Trigonométrie ; III. la Géométrie analytique et la Stéréométrie.

La première partie, rédigée par M. Wellstein, débute par un très bel exposé critique des notions fondamentales de la Géométrie. Elle donne un excellent aperçu des fondements des diverses branches de la Géométrie : Géométrie naturelle et Géométrie d'approximation, Analyses situs, Metagéométrie; la Géométrie euclidienne et les géométries non-euclidiennes; Géométrie projective, Planimétrie.

La Trigonométrie plane est présentée sous une forme très condensée, mais très claire, par M. H. Weber. Elle est suivie des principes de Trigonométrie sphérique rédigée par M. W. Jacobsthal. La méthode est basée sur la notion de groupe, suivant le point de vue adopté par Study.

Dans la troisième partie, M. Weber examine successivement les notions essentielles de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions et de stéréométrie. Celle-ci comprend un intéressant chapitre intitulé : Groupes de rotations et polyèdres réguliers. H. FEHR.

H. WIELEITNER. — **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung** (*Sammlung Schubert*). — 1 vol., 313 p. : 10 Mk. ; Gœschen, Leipzig.

La très intéressante et très utile *collection Schubert*, s'est enrichie d'un volume consacré aux courbes planes d'ordre supérieur, dû à la plume de M. le Dr H. Wieleitner, (Spire). Adoptant la méthode mixte, qui consiste à mêler, quand cela est indiqué, les considération de pure géométrie aux calculs de géométrie analytique, l'auteur a pu donner sous un petit volume, les résultats essentiels relatifs aux courbes planes d'ordre supérieur à 2. L'emploi de plusieurs instruments, permet toujours plus de concision, souvent plus de clarté ou d'élégance et donne, dans les recherches le moyen de monter plus haut ou de creuser plus profond.

Les exemples choisis pour illustrer les théories, le sont excellemment et sont en outre, traités avec soins. Peut-être cependant, pourrait-on en désirer un autre au chapitre II pour mettre en lumière les avantages de la méthode de Czuber pour les enveloppes, car, avec l'exemple choisi, la méthode ordinaire conduit a un calcul encore plus court.

Dans les cinq premiers chapitres les courbes sont étudiées au point de vue des propriétés polaires; le troisième est consacré à la Hessienne, à la steinerienne et au principe de correspondance de Chasles, le quatrième aux formules de Plücker et le cinquième à l'établissement de la notion de genre et à la représentation de deux courbes de même genre l'une sur l'autre.

Au chapitre VI, l'auteur considère, au contraire les courbes au point de vue des formes qu'elles peuvent affecter ; il y fait usage du *triangle* et du *polygone analytiques*, applique ces notions à la détermination des asymptotes rectilignes et curvilignes et donne un court aperçu de la méthode de Puiseux pour l'étude des points singuliers.

Le chapitre VII est consacré à l'exposé des principaux résultats obtenus par Cayley, Nœther et Brill, Halphen relativement aux singularités d'ordre élevé.

L'étude de la transformation des courbes fait l'objet du chapitre VIII. Pour la démonstration de l'équivalence de toute transformation crémonienne à une série de transformations du 2^{me} degré, l'auteur renvoie au livre de K. Dœhlemann (même collection) et explique la transformation quadratique à l'étude des quartiques rationnelles, puis passe à l'examen sommaire de la transformation par rayons vecteurs réciproques et des différentes formes de quartiques bicirculaires rationnelles.

Il consacre le chapitre IX à la correspondance sur les courbes rationnelles ou non rationnelles, à l'établissement de la formule de Cayley-Brill; le chapitre X à l'étude des systèmes de points d'intersection des courbes.

Le chapitre XI contient des applications du théorème sur les systèmes de points d'intersection, en particulier à la courbe générale du 3^{me} ordre, une courte étude des quartiques de Lüroth, du mode de génération de Chasles et de la théorie des restes de Sylvester.

L'ensemble des théories générales est appliqué dans le chapitre XII, aux courbes du 3^{me} ordre, à la recherche de la disposition des points d'inflexion, des polaires harmoniques, de la Hessienne, de la Cayleyenne ; l'auteur y donne une classification publiée d'abord en 1904-1905 par Kölmel et termine par l'exposé du mode de génération de Grassmann.

Dans le chapitre XIII, ces mêmes théories sont appliquées aux courbes du 4^{me} ordre. Après avoir étudié avec détail, en vue de ce qui suivra, deux exemples particuliers, l'auteur donne les résultats essentiels relatifs aux tangentes doubles et aux systèmes qu'elles forment entre elles.

Relativement à la possibilité de ramener l'équation générale à la forme $U.W - W^2 = 0$, l'auteur se borne à remarquer que le nombre des paramètres disponibles est plus que suffisant.

Salmon (V. Courbes Planes) se contente aussi de cette preuve qu'il semble difficile, mais cependant désirable de rendre plus rigoureuse. Le même auteur, en effet, en une autre circonstance (Géom. à 3 dimensions) remarque que le fait que l'équation $aX^3 + bY^3 + cZ^3 + dT^3 + eU^3 = 0$ contient 19 paramètres ne suffit pas pour que l'on puisse affirmer que l'équation générale de la surface du 3^{me} ordre est réductible à cette forme.

Quoi qu'il en soit, le chapitre, qui contient les grandes lignes d'une classification des quartiques et qui se termine par quelques considérations sur les courbes de 4^{me} classe est intéressant et le résumé très bien fait.

Le chapitre XIV et dernier contient les résultats les plus essentiels relatifs aux faisceaux et aux réseaux de courbes, aux systèmes non linéaires, à la théorie des caractéristiques de Chasles et au principe de la conservation du nombre de H. Schubert.

Au sujet de ce dernier principe, il cite les réserves à faire, indiquées, paraît-il, par Kohn et Study, comme il aurait pu mentionner celles de Halphen, relativement à la formule de Chasles pour les caractéristiques.

Malgré ces réserves, ces principes sont féconds et sont de précieux moyens de recherche. En particulier le *Kalkül der abzählenden Geometrie* de H. Schubert n'en restera pas moins une œuvre aussi utile qu'elle est originale et fortement pensée.

En résumé, l'ouvrage de M. H. Wieleitner, par un ensemble de précieuses qualités, est destiné à rendre des services et aux étudiants et aux professeurs.

On doit au même auteur un consciencieux travail bibliographique sur les courbes algébriques, intitulé *Bibliographie der höheren algebr. Kurven* (58 p., Gœschen, Leipzig), pour la période 1890-1904, et où il ne semble pas qu'un travail de quelque importance ait pu être omis.

F. Dumont (Annecy).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXX. Beijer, Stockholm.

Fasc. 1 et 2. — René Baire : Sur la représentation des fonctions discontinues. — Giulio Bisconcini : Sur le problème des trois corps. — Fr. W. Meyer : Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel. — V. Bjerknes : Recherche sur les champs de forces hydrodynamiques. — H. von Koch : Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. — J. L. W. V. Jensen : Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. — Edmund Landau : Ueber einen Satz von Herrn Phragmén.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 30e année. Louvain, 1906.

2e fascicule. — De Sparre : Note au sujet du mouvement des corps à la surface de la terre dans la chute libre.

Annali di Matematica. — Directeurs : L. Bianchi, O. Dini, G. Jung, C. Segre. Série III. T. XII. Rebeschini di Turati e C., Milan.

E. Almansi : Sopra una delle esperienze del Plateau. — L. Bianchi : Complementi alle ricerche sulle superfici isoterme. — Fr. Severi : Il teorema d'Abel sulle superfici algebriche. — P. Burgatti : Sugl'integrali primi dell'equazioni del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso. — Niels Nielsen : Sur les séries de fonctions de Stirling. — Luther Pfahler Eisenhart : Surfaces analogous to the Surfaces of Bianchi. — Ed. Maillet : Sur les équations indéterminées $x^\lambda + y^\lambda = c\,z^\lambda$. — U. Dini : Studii sulle equazioni differenziali lineari ; loro integrali normali. — L. Bianchi : Teoria delle trasformazioni delle superfici applicabili sui parabolidi. — G. Fubini : Sulle costruzioni dei campi fondamentali di un gruppo discontinuo.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschr. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften, herausgegeben von G. Eneström. 3. Folge. Band 3, Teubner, Leipzig.

Heft 3. — P. Tannery : Un traité grec d'Arithmétique antérieur à Euclide. — Björnbo : Die mathem. S. Marcohandschriften in Florenz, 2 ; Gerhard von Cremonas Uebersetzung von Alkwarizmis 'Algebra und von Euklids Elementen. — K. Hunroth : Zu Albrecht-Dürers Näherungskonstruktionen regelmässiger Vieleke. — Alf. Pringsheim : Ueber ein Eulersches Konvergenskriterium. — Zeuthen : L'œuvre de P. Tannery comme historien des mathématiques.

Bulletin de la Société Française de Philosophie, publié par X. Léon et André Lalande. 6e année. Ann. Colin, Paris.

No 3. — Le contenu essentiel des principes de thermodynamique, thèse de M. Perrin; discussion; MM. Lalande, Painlevé, Sorel.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXIV.

Fasc. 1 et 2. — Fontené : Sur une configuration remarquable dans l'espace. — Bricard : Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques. — Boutroux : Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un. — Lecornu : Sur l'herpolhodie. — De Sparre : Note au sujet du valet de menuisier. — Hadamard : Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles. — Potron : Sur une formule générale d'interpolation. — Combebiac : Sur l'application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel — Hadamard : Sur les transformations ponctuelles. — Goursat : Remarques sur quelques théorèmes d'existence. — De Sparre : Note au sujet du frottement de glissement.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — 1906, premier semestre, T. CXLII — Gauthier-Villars, Paris.

2 Janvier. — C. Guichard : Sur la déformation des quadriques. — Auric : Théorèmes sur les fonctions entières. — Lerch : Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat.

8 janvier. — Hadamard : Sur les transformations planes. — Stekloff : Sur le mouvement non stationnaire d'une ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement.

15 Janvier. — E. Goursat : Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles. — E. Merlin : Sur une famille de réseaux conjugués à une même congruence. — G. Zemplin : Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz.

22 Janvier. — A. Korn : Sur un théorème relatif aux dérivées secondes du potentiel.

29 Janvier. — C. Guichard : Sur certains systèmes de cercles et de sphères qui se présentent dans la déformation des quadriques. — Gambier : Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme.

5 Février. — Holmgren : Sur un problème du Calcul des variations. — P. Duhem : Sur les quasi-ondes de choc. — A. Korn : Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les déplacements des points de la surface sont donnés.

12 Février. — Ed. Maillet : Sur les fonctions entières. — L. Remy : Sur

un hessien hyperelliptique. — P. Duhem : Quelques lemnes relatifs aux quasi-ondes de choc. — A. Boulanger : Extinction de l'onde solitaire propagée le long d'un tube élastique horizontal. — E. H. Amagat : Sur la pression interne des fluides et l'équation de Clausius.

19 Février. — Hatt : Détermination simultanée de deux points au moyen de constructions graphiques à grande échelle.

26 Février. — P. Boutroux : Sur l'indétermination d'une fonction d'une variable au voisinage d'une singularité transcendante. — Fejer : Sur la série de Fourier. — Dulac : Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point de critique. — Fatou : Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à coefficient et à indéterminées conjuguées. — P. Duhem : Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc — Banachiewitz : Sur un cas particulier du problème des *n* corps. — Boussinesq : Propagation autour du centre dans un milieu homogène et isotrope. — Fredholm : Sur la théorie des spectres. — Korn : Sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface est en repos.

5 Mars. — G. Humbert : Sur quelques conséquences arithmétiques de la théorie des fonctions abéliennes. — L. Bianchi : Sur la déformation des quadriques. — S. Bernstein : Sur les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique. — Boussinesq : Propagation du mouvement autour d'un centre, dans un milieu élastique, homogène et isotrope.

12 Mars. — P. Duhem : Sur les quasi-ondes du choc. — Boussinesq : Propagation du mouvement (v. plus haut). — Esclangon : Observations de la comète 1906 b.

19 Mars. — V. Volterra : Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions. — J. Inhel-Rénoy : Sur les affixes des racines d'un polynome de degré *n* et du polynome dérivé. — Boggio : Nouvelle résolution du problème de l'induction magnétique pour une sphère isotrope.

26 Mars. — E. Goursat : Sur la théorie des caractéristiques. — G. Tarry : Sur un carré magique. — L. Zoretti : Sur les ensembles discontinus. — P. Fatou : Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables. — L. Rémy : Sur les surfaces hyperelliptiques définies par les fonctions intermédiaires singulières. — P. Duhem : Sur les quasi-ondes de choc.

2 Avril. — E. Maillet : Sur les fonctions hypertranscendantes. — P. H. Schoute : La réduction analytique d'un système quelconque de forces en E*m*. — Jouguet : Sur l'accélération des ondes de choc planes.

9 Avril. — J. Clairin : Sur les transformations des systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre. — E. Picard : Sur quelques problèmes de physique mathématique se rattachant à l'Equation de M. Fredholm.

16 Avril. — (Pas de mathématiques).

23 Avril. — E. Fabry : Courbes algébriques à torsion constante. — Taber : Sur les groupes réductibles de transformations linéaires et homogènes. — G. Léry : Sur l'équation de Laplace à deux variables.

30 Avril. — C. Guichard : Sur les variétés doublement infinies de points d'une quadrique de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan. — M. d'Ocagne : Sur un théorème de J. Clark.

7 Mai. — A. Buhl : Sur la généralisation des séries trigonométriques. — L. Schlesinger : Sur certaines séries asymptotiques. — Jouguet : Sur l'accélération des ondes de choc sphériques.

14 Mai. — E. Guyou : Sur un effet singulier de frottement. — P. Vielle et R. Liouville : Influence des vitesses sur la loi de déformation des métaux. H. de la Goupillière : Centre de gravité de systèmes discontinus.

21 Mai. — Haton de la Goupillière : Lieu géométrique de centres de gravité.

28 Mai. — Autonne : Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité. — Bourget : Sur une classe particulière de fonctions Θ. — Haton de la Goupillière : Centres de gravité de systèmes spiraloïdes.

5 Juin. — G. B. Guccia : Un théorème sur les courbes algébriques planes d'ordre n.

11 Juin. — M. Lerch : Sur le problème du cylindre elliptique.

18 juin. — Tzitzéica : Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales. — Gambier : Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. — G. Lery : Sur l'équation de Laplace à deux variables.

25 juin. — E. Picard : Sur le problème généralisé de Dirichlet et l'équation de M. Fredholm. — Tzitzéica : (v. plus haut.) — G.-B. Guccia : Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre n. — Gambier : Sur les équations différentielles du deuxième ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est uniforme.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Direttore G.-B. Guccia.

T. XX. — Enriques : Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero. — Pannelli : Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica. — de Franchis : Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve. — Castelnuovo : Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo. — Enriques : Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse. — Nobile : Sullo studio intrinseco delle curve di caccia. — Sannia : Transformazione di Combescure ed altre analoghe per le curve storte. — Severi : Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare. — Boggio : Sulle funzioni di Green d'ordine m. — Vitali : Sulle funzioni ad integrale nullo. — d'Adhémar : Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique. Étude de l'intégrale près d'une frontière caractéristique. — Pannelli : Sulle reti di superficie algebriche. — Levi-Civita : Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella construzioni dei cavi.

Berzolari : Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli. — Brusotti : Teoremi sulle piramidi di $n+1$ vertici dello spazio ad n dimensioni. — Burgatti : Sugli integrali singolari delle equazioni a derivate ordinarie del second'ordine. — Gebbia : Sulla integrabilità delle condizioni di rotolamento di un corpo solido sopra un altro, e su qualche questione geometrica che vi è connessa. — Aguglia : Sulla superficie luogo di un punto in cui le superficie di tre fasci toccano una medesima retta. — De Franchis : Sugl'integrali di Picard relativi ad una superficie doppia. — Barbieri (A.) : Alcuni teoremi sulle funzioni semicontinue, e sulle funzioni di una variabile, limiti di funzioni di due variabili reali. — Pisati : Sulla estensione del metodo di Laplace alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili indipendenti.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par X. Léon. Arm. Colin, Paris.

13me année. No 4. — P. Boutroux : Correspondance mathématique et relation logique.

No 6. — Poincaré : Les mathématiques et la logique. — Russell : Sur la relation des mathématiques à la logistique.

14me année. No 1. — Poincaré : Les mathématiques et la logique (fin). — E. Lechalas : Note sur le nombre des dimensions de l'espace.

No 2. — M. Pieri : Sur la comptabilité des axiomes de l'Arithmétique. — L. Couturat : Pour la Logistique (Réponse à M. Poincaré).

No 3. — M. Poincaré : Le mathématique et la Logique. — L. Couturat : La Logique et la philosophie contemporaine.

Revue générale des Sciences pures et appliquées dirigée par L. Olivier 17me année, 1906 ; Arm. Colin, Paris

No 1 (15 janvier). — P. Duhem : L'hystérèsis magnétique, I l'aimantation dans un champ qui varie très lentement.

No 2 (30 janvier). — P. Duhem : L'hystérèsis magnétique, II l'aimantation dans un champ qui varie très rapidement. — G. Mihlaud : Descartes et la Géométrie analytique.

No 4 (28 février). — H. Bouasse : Les gammes musicales au point de vue des physiciens.

No 6 (30 mars). — Th. Moreux : Revue annuelle d'Astronomie.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par P.-H. Schoute, D.-E. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn, J. Cardinaal. T. XIII, 2me partie, octobre 1904-août 1905. Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1905.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. — Dritter Jahrgang. — 1 vol. in-8o, 85 p. ; prix : Mk. 2.80 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

C. Cranz : Entgegnung auf den Vortrag des Herren F. Kötter vom 24 Juni 1903. — G. Hauck : Ueber angewandte Mathematik. — G. Hessenberg : Ueber die kritische Mathematik. — A. Kneser : Die Fouriersche Reihe und die angenäherte Darstellung periodischer Funktionen durch endliche trigonometrische Reihen. — J. Knoblauch : Der Gaussche Satz vom Krümmungsmass. — F. Kötter : Die Kreiselwirkung der Räderpaare bei Regelmässiger Bewegung des Wagens in kreisförmigen Bahnen. — M Koppe : Die Neperschen Logarithmen sind mit dem natürlichen im wesentlichen identisch. — E. Lampe : Elementare Bemerkungen über geometrische Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima. — R. Müller : Ueber konjugierte Parallelstrahlen eines polaren Feldes. — H. Reissner : Ueber die Stabilität der Biegung. — R. Rothe : Ueber die geodäsische Abbildung zweier Flächen aufeinander. — P Schafheitlin : Ueber den Verlauf der Besselschen Funktionen. — M. Zacharias : Ueber ähnliche Punktreihen und ebene Systeme. P. Zühlke : Ueber die geodäsischen Linien auf Kegelflächen.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von F. Pietzker. XI. Jahrgang, 1905. Otto Salle, Berlin.

No 1. — Dr Fritz Walther : Mechanik und Turnen. — O. Lesser : Wie verteilen sich die freien Eckpunkte aller pythagoreischen Dreiecke über die Ebene, wenn die Dreiecke mit einer Kathete über einer festen Geraden stehen, und allen der auf dieser Geraden liegende Hypotenusenendpunkt gemeinsam ist? — Dr Ernest Schultz : Ueber den einleitenden geometrischen Unterricht in Quarta. — G. Holzmüller : Vorschlag zum kinematischen Modell eines besonderen Gelenkvierecks.

No 2. — G. Kewitsch : Höhere Analysis in der Schule. — Dr Th. Adrian : Nachtrag zu den n-Formeln. — G. Holzmüller : Ueber das bicentrische Viereck.

No 3. — F. Pietzker : Die Person des Lehrers im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. — K. Dunker : Forderungen für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht und seine Vertreter. — O. Lesser : Rationale Zahlen in der Ebene und im Raum.

No 4. — H. Dressler : Zur Entwickelungsgeschichte einer angewandten Gleichungsaufgabe. — G. Holzmüller : Bemerkungen über Geometrographie.

No 5. — Dr A. Höfler : Philosophische Elemente in allen Unterrichtsfächern, philosophische Propädentik als eigenes Fach.

No 6. — G. Holzmüller : Zur vorläufigen Orientierung über die Elektronentheorie. — Dr zur Kammer : Die Summenformel anstatt des Integrals für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. 52. Band, 1905. B.-G. Teubner, Leipzig.

Felix Bernstein : Ueber eine neue geometrisch-mechanische Erzeugnissweise des Kreises und der sphärischen Kegelchnitte. — Felix Biske : Korrektionsspiegel zu parabolischen Reflektoren. — Katoptrisches Okular. — Karl Dœhlemann : Die Perspektive der Brüder van Eyck. — Anton Grünwald : Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrade. — G. Herglotz : Ueber die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte. — G. Holtsmark : Ueber eine Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Grössen, welche sich nicht rein zufällig ändern. — J. Horn : Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. — Alfons-Vincenz. Leon : Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel. — Berichtung dazu. — Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Holkugel, die von innen erwärmt werden, unter Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes. — K. Mack : Tangentenkonstruktion mit Hilfe des Spiegellineals. — Ludwig Matthiessen : Mathematische Theorie der Spiegelung in abwickelbaren Flächen. — A. G. M. Mitchell : The lubrication of plane surfaces. — Richard von Mises : Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven. — B. J. W. Reuser : Die vorteilhafteste Pfeilhöhe eines gleichmässig belasteten symetrische Dreigelenkbogens mit kreisförmiger Mittellinie. — C. Runge : Numerische Berechnung der Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordung. — Ueber die Zerlegung einer empirischen Funktion in Sinuswellen. — Rudolf Schimmack : Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen. — Ludwig Schleiermacher : Zur Massenberechnung im Wegbau. — J. Schnöckel : Graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate. — Eduard Selling : Neue Rechenmaschine. — A. Timpe : Probleme der Spannnungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. — E. Weinnold : Ueber kinematische Erzeugung von Regelflächen 4. Ordnung. — Th Weitbrecht : Ueber die elastische Deformation eines kreisförmigen Ringes. — S. Wellisch : Ueber das natürliche Erhaltungsprinzip. — Ferdinand Wittenbauer : Die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse.

Zeitschrift für mathematischen u. naturw. Unterricht, herausgegeben von Dr H. Schotten. — 36. Jahrgang, 1905 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 4 à 8. — O. Lesser : I. Kurven und Evoluten. — F. Ludwig : Weitere Abschnitte aus der Biometrie. — J. Sterba : Elementare Bahnbestimmung eines Planeten. — Karl Bochow : Einfachste Berechnung des regelmässigen 20-Ecks — J.-H. Keppler : Ein oftmals wiederholter Trugschluss. — O. Richter : Zur Orthogonalprojektion des Würfels. — Weist : Zur steorometrischen Veranschaulichung. — Th. Meyer : Zur Berechnung der pythagoreischen Zahlen. — K. Hagge : Der Satz des Ptolemäus. — W. Janisch : Zur Lehre von der Proportionalität der Linien am Kreise. — F. Frischauf : Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. — A. Pleskot : Bemerkung zur Lösung der unbestimmten Gleichungen. — G. Lony : Ueber die Formel $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$. — A. Wernicke : Neue naturphilosophische Bestrebungen. — E. Eckhardt : Der Crelle-Brocard-sche Winkel als besonderer Fall einer Aufgabe über das Kreisviereck. — K. Hagge: Zum goldenen Schnitt. — G. Lony : Der Apollonische Kreis als geometrischen Ort.

Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung, etc.

2. Livres nouveaux:

H.-B. Fine. — **A College Algebra.** — 1 vol. cart. 595 p. ; $^6/_6$ d. ; Ginn & Company, Boston, New-York, Chicago, London.

Alex Myller. — **Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung** in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen. (Inaugurat.-Dissertation), 36 p. ; Dietrich, Göttingen.

Dr G.-H. Niwenglowski. — **Les mathématiques et la médecine.** — 1 vol. in-8° broché, 70 p. ; 2 fr. H. Desforges, Paris.

Dr Prompt. — **Remarques sur le théorème de Fermat.** Deuxième tirage augmenté d'un appendice. — 1 broch. in-16, 48 p. ; Allier frères, Grenoble.

Walther Schmidt. — **Wie gewinnen wir für Behandlung des Funktionsbegriffs Platz im math. Unterricht ?** (Beilage zum Programm, Düren, Rhl. Realgymnasium 1906). — 1 broch. in-8°, 19 p. et 8 fig. ; Becker, Düren.

L. Tesar. — **Elemente der Differential-u. Integralrechung.** Hilfsbuch für den mathemath. Unterricht zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Mit. 83 Fig. — 1 vol. cart. in-8 ; 2 Mk. 80 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE A L'UNIVERSITÉ DE PARIS[1]

Un discours de M. P. APPELL, *doyen de la Faculté des Sciences.*

Mes premières paroles seront pour remercier, au nom de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, l'Université de Londres, de sa gracieuse invitation et de sa magnifique hospitalité. Tous mes collègues, présents et absents, ceux qui ont été assez heureux pour pouvoir accepter votre invitation, comme ceux que leur état de santé ou leur devoir professionnel ont retenus à Paris, me chargent d'exprimer de leur part leurs sentiments de vive admiration pour la science anglaise, de profonde et cordiale sympathie pour leurs collègues anglais.

Permettez-moi, Mesdames et Messieurs, de vous entretenir pendant quelques instants de notre Faculté, de ce que nous y faisons, de ce que nous voudrions y faire. Je ne m'arrêterai pas à vous parler de la situation matérielle de notre établissement, je m'attacherai à montrer comment nous comprenons notre devoir vis-à-vis de nos deux mille trois-cents étudiants.

Nous estimons que les Facultés des sciences ont une double mission à remplir. Elles doivent d'abord donner un enseignement scientifique général, en vue de la haute culture des esprits, en vue de la préparation à certaines carrières, comme les carrières de médecin, de professeur, d'ingénieur, dans lesquelles des connaissances scientifiques supérieures sont indispensables. Elles doivent ensuite, et c'est la plus

[1] M. P. Appell, membre de l'Institut, a bien voulu nous autoriser à reproduire le discours qu'il prononça le 7 juin dernier, à la réunion organisée par l'Université de Londres en l'honneur des Universités françaises et à laquelle ont pris part un grand nombre de représentants de l'enseignement supérieur français. (V. le compte rendu complet publié par la *Revue Internationale de l'Enseignement*, n° 6, 1906).

noble partie de leur tâche, faire progresser la Science elle-même par les travaux de leurs maîtres, à tous les degrés, et initier une élite d'étudiants aux méthodes d'invention et de découverte. Nous considérons cette fonction comme la fonction vitale de l'enseignement supérieur. Un établissement scientifique dont les professeurs se consacreraient uniquement à l'exposé de la Science que d'autres ont faites serait voué à une décadence rapide. Seuls les maîtres qui ont fait et qui font des travaux personnels, des recherches originales, comprennent et connaissent à fond les méthodes propres à chaque science, peuvent donner la vie à un enseignement, même élémentaire, et communiquer à leurs élèves cet esprit de curiosité scientifique, de recherche passionnée de la vérité, en dehors de tout profit et de toute application, qui constitue le véritable savant.

Pour répondre à cette double tâche, il s'est établi chez nous deux espèces de cours et de laboratoires. Dans les premiers, consacrés à l'enseignement général, les mêmes questions fondamentales doivent être traitées chaque année : il est évident en effet, que pour le professeur de calcul infinitésimal, de chimie générale, de géologie... il existe un certain nombre d'idées fondamentales qui doivent être développées soigneusement, il existe un certain nombre d'observations, d'expériences, de calculs que les étudiants doivent savoir faire et comprendre à fond. Ces cours sont donc, pour leur partie essentielle, à programme fixe.

Au contraire, dans les cours et les laboratoires institués en vue de la recherche scientifique, règne la liberté la plus complète : là, plus de programme, plus de procédés réguliers d'enseignement. Le professeur choisit librement son sujet, il le développe jusqu'au point où l'ont amené les recherches les plus récentes : il indique les faits acquis, les faits douteux, les directions dans lesquelles il estime qu'on doit conduire les recherches futures avec quelque espérance de succès.

Bien entendu, cette division des cours et des laboratoires en deux catégories, suivant qu'ils sont affectés à l'enseignement général ou aux recherches ne peut être rigoureusement réalisée qu'en mathématique où les parties élémentaires sont très étendues, nettement délimitées. Elle est beaucoup plus vague dans les sciences expérimentales, où des questions en apparence classiques peuvent donner lieu à des découvertes de premier ordre ; un exemple, entre bien d'autres, nous est fourni par les beaux travaux sur la composition de l'air dus à votre collègue Sir William Ramsay que nous sommes heureux de saluer ici. Aussi tenons-nous à ce que les enseignements généraux, même les plus élémentaires, soient donnés par les maîtres de la science, qui ont seuls l'autorité nécessaire pour supprimer les détails inutiles et présenter les éléments de façon à préparer les recherches futures.

Pendant longtemps, surtout avant la création des Universités, l'enseignement des Facultés des sciences a été trop théorique, trop verbal ; il comprenait trop de cours *ex cathedra* précieusement recueillis et appris par l'étudiant pour l'examen. Nous l'avons tourné et le tournons de plus en plus vers les réalités, en réduisant l'enseignement oral au strict nécessaire, et en développant au contraire, la vie dans le laboratoire, le contact avec les objets eux-mêmes dans leur réalité et leur complexité. A cet égard, l'idéal que nous poursuivons et que nous espérons atteindre un jour, serait d'avoir des laboratoires d'enseignement assez grands pour que tous les étudiants puissent, à toute heure, y travailler librement.

Voici maintenant quelques détails sur les diverses sciences, le degré de préparation des élèves qui nous viennent des lycées, et les mesures que nous avons prises pour assurer la transition entre les études du lycée et celles de la Faculté.

Les étudiants en mathématiques arrivent à l'Université très bien préparés : cela tient à l'existence de certaines écoles, l'Ecole Polytechnique dépendant du ministère de la Guerre, l'Ecole centrale des arts et manufactures dépendant du ministère du Commerce et de l'Industrie, l'Ecole normale supérieure qui fait partie de l'Université et qui doit former des professeurs pour les lycées. Ces trois écoles ne sont pas ouvertes comme les Universités : on y admet un nombre déterminé d'élèves à la suite d'un concours dont le programme comprend beaucoup de mathématiques, un peu de sciences physiques et pas du tout de sciences naturelles. Chaque année il se présente à ces écoles plus de 2000 candidats pour 500 places environ; la lutte est difficile: pour être admis les jeunes gens travaillent beaucoup, travaillent souvent avec excès pendant deux années en moyenne. Les élèves reçus à l'Ecole Normale, une vingtaine à peu près, deviennent d'excellents étudiants pour la Faculté. A côté d'eux, parmi les candidats qui, s'étant préparés aux trois écoles n'ont pas réussi, il s'en trouve un grand nombre qui viennent à l'Université continuer des études scientifiques. Ces jeunes gens très entraînés au raisonnement et au calcul mathématique se portent en majorité vers les cours de mathématiques; ils suivent avec facilité les enseignements généraux de calcul infinitésimal et de mécanique rationnelle : ils se spécialisent ensuite, les uns pour aborder les parties élevées des mathématiques, les autres pour s'occuper de mathématiques appliquées, comme l'astronomie ou la mécanique expérimentale.

L'enseignement des parties élevées des mathématiques, en vue des recherches, est très fortement organisé : il comprend les cours de géométrie supérieure, de mécanique céleste, d'analyse supérieure, de théorie des fonctions, de physique mathématique et de calcul des probabilités. Dans ces cours, comme je l'ai dit, le professeur est entièrement libre et conduit ses auditeurs, vers les travaux des recherches; il est puissamment secondé par les maîtres de conférences de l'Ecole Normale qui, surveillant chacun les progrès d'un petit groupe de quatre ou cinq élèves, ont une action directe sur eux, les connaissent personnellement et les dirigent suivant leurs aptitudes particulières.

Cette méthode de travail est déjà ancienne : elle nous a valu, il y a une trentaine d'années, un précieux encouragement de la part de vos grands mathématiciens Cayley et Sylvester qui s'étaient informés auprès de leur collègue Hermite des détails d'une organisation dont ils jugeaient favorablement les résultats.

Quant aux mathématiciens qui se tournent vers les applications, nous nous efforçons de les assujettir à des exercices pratiques, à des applications et des observations réelles. Pour l'astronomie, nous avons trouvé une solution satisfaisante en envoyant les étudiants dans un observatoire très pratique ayant servi autrefois à former des officiers de marine en vue de missions scientifiques. Pour la mécanique appliquée, nous sommes encore loin du but ; à l'époque où le général Poncelet occupait la chaire, il n'existait aucun laboratoire : on se bornait à montrer aux élèves une collection de modèles. Depuis dix ans, nous avons un laboratoire avec quelques bonnes machines ; nous l'agrandirons sous peu de façon à pouvoir y installer de véritables machines industrielles, à faire étudier aux élèves la résistance des matériaux et à leur permettre de poursuivre des expériences sur les questions si délicates et encore si obscures relatives au frottement, à la résistance des milieux, à l'hydrodynamique et à l'aérodynamique.

Dans les sciences physiques, les étudiants, sauf ceux qui viennent de la préparation aux grandes écoles, ne connaissent pas assez de mathématiques pour suivre avec fruit un enseignement élevé de la physique. Nous avons, pour ces élèves, créé à la faculté un enseignement préparatoire portant sur l'analyse infinitésimale, la géométrie analytique, la mécanique rationnelle : cet enseignement qui remonte à trois ans seulement répond à un besoin si urgent qu'il est suivi par plus de deux cents élèves. Je ne veux pas entrer ici dans le détail des cours de physique et de chimie : je rappelle seulement qu'en 1904 une chaire et un laboratoire de recherches physiques ont été créés pour le physicien Curie qui vient de nous être enlevé si tragiquement par un affreux accident ; M^me^ Curie qui a secondé son mari dans ses dernières recherches a été, sur la proposition unanime de la Faculté, appelée à sa succession, pour qu'elle puisse autant que possible, continuer l'œuvre entreprise en commun ; elle me rappelait récemment avec émotion et reconnaissance, que les premiers encouragements, les premiers appuis scientifiques reçus par Curie, il y a vingt ans, après ses découvertes initiales, quand il était un modeste préparateur, lui étaient venus de votre illustre compatriote, le grand physicien lord Kelvin.

Les étudiants en sciences naturelles nous viennent du lycée avec une préparation bien insuffisante, et il ne peut pas en être autrement si l'on ne veut pas charger davantage les programmes du baccalauréat, déjà beaucoup trop lourds ; nous avons institué pour eux une année d'études préparatoires pendant laquelle ils entendent chaque matin des cours de physique, de chimie et de sciences naturelles et exécutent chaque après midi des manipulations, des dissections, des exercices pratiques très nombreux, très variés et surveillés avec soin. Ces études préparatoires sont obligatoires pour les futurs étudiants en médecine qui y trouvent un enseignement scientifique élevé d'un caractère très expérimental. Elles ont été suivies cette année par 500 élèves. Pour les travaux de recherches en sciences naturelles, une grande ville comme Paris ne peut pas offrir de ressources suffisantes : aussi, la Faculté possède-t-elle, outre les laboratoires de Paris, un laboratoire de botanique dans la forêt de Fontainebleau, et trois laboratoires de zoologie maritime, l'un à Wimereux, près Boulogne, l'autre à Roscoff, en Bretagne, le troisième à Banyuls, sur la Méditerranée, près de l'Espagne.

Mais je dois me borner à cette vue d'ensemble, ayant déjà retenu bien longtemps votre attention. J'ai à m'excuser d'avoir employé à votre égard la méthode que je critiquais tout à l'heure et que nous cherchons à faire disparaître : je vous ai décrit *in abstracto*, d'une façon purement verbale, les divers organes de notre Faculté. Je ne demande pas mieux que de réparer cette faute et de compléter ma démonstration. Il suffit pour cela que vous vouliez bien venir à Paris visiter notre Faculté qui sera très heureuse et honorée de vous recevoir.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Avant propos. — Les théories mathématiques s'éclairent singulièrement quand on les examine d'un point de vue convenablement élevé. Toutefois les méthodes analytiques modernes, assimilables à des instruments d'une haute perfection, demandent comme tels, une grande dextérité dans leur maniement. D'un autre côté, l'esprit n'est complètement satisfait que quand il est parvenu à établir ces mêmes théories, en n'utilisant que les propriétés *strictement nécessaires* à leur démonstration. Aussi les exemples sont nombreux, de vérités mathématiques trouvées d'abord comme corollaires de propriétés très générales et démontrées ensuite par leurs auteurs d'une manière tout élémentaire.

Si l'habitude de voir de haut élargit l'esprit et prépare les découvertes, voir de près ne lui est pas moins nécessaire, en l'accoutumant à s'assurer à mesure de l'entière rigueur de chaque nouvelle déduction. En outre, bien des théories, même très élémentaires, qu'on croyait comprendre, vues de plus près, doivent être reprises à partir du début, et souvent même par une autre voie. Ces considérations témoignent de l'utilité de monographies n'empruntant leurs principes qu'au sujet lui-même, et d'ailleurs exposées aussi élémentairement et aussi complètement que possible.

La théorie des fonctions exponentielles, beaucoup moins utile dans les applications que celle des fonctions circulaires, a en théorie une valeur égale; et, à ce point de vue, elle demanderait d'être traitée de même d'une manière élémentaire. Or elle peut l'être d'une manière on ne saurait plus simple, par la méthode archimédienne des doubles inégalités de plus en plus approchées, en partant de la *seule* connaissance de cette inégalité, due également à Archimède.

$$(1+x)^n > 1 + nx \,, \quad (n, \text{ ent. pos. }, x > -1)$$

et de laquelle on déduit aisément la relation fondamentale

$$\frac{1}{1-mz} > (1+z)^m > 1 + mz \,, \quad \left(m, \text{ rat. et } > 1 \,, -\frac{1}{m} < z < \frac{1}{m}\right).$$

Cette théorie ainsi exposée, est une introduction naturelle à la théorie des séries et à celle du calcul infinitésimal, au lieu d'en être un simple corollaire. On obtient ainsi, — *directement* et beaucoup plus rapidement que par les méthodes générales — : une définition *claire* et *rigoureuse* des symboles e^x et Lx ; nombre d'exercices sur les approximations algébriques et numériques ; la démonstration très simple de divers théorèmes ou formules de Neper, Briggs, Kepler, Gregory, Mercator, Halley, Stirling, Euler, Lagrange, de Stainville, Cauchy, Realis, Underfinger, Catalan, Schlömilch, Laisant, Cesàro, etc. ; enfin les séries logarithmiques, exponentielles et binomiales. Il y a lieu de remarquer que pour ces dernières, les conditions de convergence, si délicates à étudier avec les méthodes artificielles ordinaires s'introduisent ici, pour ainsi dire d'elles-mêmes.

1. Désignons par m un nombre rationnel supérieur à l'unité, et par z un nombre quelconque compris entre $-\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m}$; on a (P. M. 1900, p. 406) :

$$(1) \qquad \frac{1}{1-mz} > (1+z)^m > 1 + mz \,.$$

2. Les deux expressions suivantes, où on a : $-m < x < m$,

$$(\alpha) \quad (m, x) = \left(\frac{m+x}{m}\right)^m, \qquad (\beta) \quad (-m, x) = \left(\frac{m}{m-x}\right)^m,$$

tendent vers une même limite à mesure que m tend vers l'infini. En effet pour $a > 1$, on a :

$$\left(1 \pm \frac{x}{am}\right)^a > 1 \pm \frac{x}{m} \,,$$

d'où, en élevant à la puissance m et dédoublant.

$$(ma, x) > (m, x) \,, \quad (-ma, x) < (-m, x) \,.$$

Si m augmente constamment, la valeur de (α) augmente de plus en plus, tandis que celle de (β) diminue. D'ailleurs leur rapport $\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^m$, toujours inférieur à 1, est, d'après (1), toujours supérieur à $1-\frac{x^2}{m}$, et tend donc vers l'unité. Par suite, en appelant $f(x)$ la limite commune de (m, x) et de $(-m, x)$, on a :

$$(m, x) < f(x) < (-m, x)\;;$$

et, si on appelle e la limite particulière correspondant à $x = 1$, c'est-à-dire si on pose $f(1) = e$,

$$e = \lim\,(m, 1) = \lim\,(-m, 1) \tag{2}$$

$$(m, 1) < e < (-m, 1) \tag{3}$$

Cette limite est d'ailleurs finie, car pour $m = 2$, (2) par exemple, devient $2{,}25 < e < 4$.

3. Les quantités (m, x), (m, y), $(m, x+y)$ tendant en même temps vers des limites finies, on peut poser

$$\frac{f(x)\,f(y)}{f(x+y)} = \lim \frac{(m, x)\,(m, y)}{(m, x+y)} = \lim \left[1 + \frac{xy}{m(m+x+y)}\right]^m$$

La partie entre crochets a une valeur supérieure à 1, et, d'après (1), inférieure à un nombre qui tend vers l'unité, quand m tend vers l'infini. On peut donc écrire

$$f(x)\,f(y) = f(x+y) \tag{4}$$

d'où aisément

$$f(0) = 1\;,\quad f(x)\,f(-x) = 1\;,\quad f(x)^n = f(nx)\;,\quad f\left(\frac{x}{n}\right)^n = f(x)$$

et enfin

$$f(x)^{\pm\frac{p}{q}} = f\left(\pm\frac{px}{q}\right)$$

ce qui donne, en faisant $x = 1$, et pour toute valeur rationnelle positive ou négative de ξ.

$$e^\xi = f(\xi) = \lim\,(m, \xi)$$

4. Cette relation n'a de sens, au point de vue du calcul habituel, que si ξ est commensurable. C'est pourquoi il vaut mieux définir le symbole e^x comme désignant la fonction $f(x) = \lim(m, x)$; cette fonction, appelée *exponentielle de x* définit donc un ensemble d'opérations en nombre infini, lequel peut se réduire en *exponentiation* positive et une négative, si x est rationnel.

Ainsi, x désignant un nombre quelconque, on posera d'après cette définition

$$e^x = \lim(m, x) = \lim(-m, x) \tag{5}$$

$$(m, x) < e^x < (-m, x) \tag{6}$$

$$e^x e^y = e^{x+y} \tag{7}$$

La relation (5) a été remarquée, pour la première fois, par Halley (P. T. 1695) et la relation (6) par J. de Stainville (*Mél. d'Anal.* Paris 1815). Les relations (4) et (7) font voir que la fonction e^x est toujours croissante et continue.

5. Posons $e^x = y$; x est dit le *logarithme népérien* de y, ce qui s'indique par la notation $x = \mathrm{L}y$. De là les relations

$$\mathrm{L}1 = 0\,,\quad \mathrm{L}e = 1\,,\quad \mathrm{L}(ab) = \mathrm{L}a + \mathrm{L}b\,,\quad \mathrm{L}(a^m) = m\mathrm{L}a\,. \tag{8}$$

6. De (6) on tire a fortiori, à cause de (1)

$$\frac{1}{1-x} > e^x > 1 + x \qquad (-1 < x < 1)$$

ou, si l'on veut, avec Cauchy (*anal. alg.* Paris, 1821).

$$e^{\pm x} > 1 \pm x \qquad (0 < x < 1) \tag{9}$$

Cor. I. Faisons $x = \mathrm{L}y$, il viendra cette relation de Neper (*Mir. log. constr.* Edinburg, 1617),

$$y - 1 > \mathrm{L}y > \frac{y-1}{y} \tag{10}$$

qui devient, en changeant y en $1 + z$ et en $1 + \frac{1}{z}$,

$$z > \mathrm{L}(1 + z) > \frac{z}{1+z} \tag{11}$$

$$\frac{z}{1-z} > \mathrm{L}\,\frac{1}{1-z} > z \tag{12}$$

II. De (9) on tire, en changeant x en $\frac{x}{m}$,

$$m\left(\sqrt[m]{e^x}-1\right) > x > m\left(1-\sqrt[m]{e^{-x}}\right) \tag{13}$$

7. Posons pour abréger

$$\mathrm{C}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{S}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{T}x = \frac{\mathrm{S}x}{\mathrm{C}x},$$

on aura

$$\mathrm{C}^2x - \mathrm{S}^2x = 1, \quad \mathrm{S}x = 2\mathrm{S}\,\frac{x}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{x}{2}, \quad \mathrm{C}x = \mathrm{C}^2\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}^2\,\frac{x}{2}$$

$$= 2\mathrm{C}^2\,\frac{x}{2} - 1 = 2\mathrm{S}^2\,\frac{x}{2} + 1$$

Or la relation (9) donne

$$e^x + e^{-x} > 2 \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C}x > 1, \quad \mathrm{S}x > 2\mathrm{S}\,\frac{x}{2} > 2\mathrm{T}\,\frac{x}{2} > \mathrm{T}x$$

$$4\mathrm{T}\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}x > 8\mathrm{T}\,\frac{x}{4} + 2\mathrm{S}\,\frac{x}{2}$$

Car cette dernière inégalité se réduit à $\mathrm{C}^2\,\frac{x}{4} > 1$. On peut ainsi écrire :

$$e^x - 1 > \mathrm{S}x > \frac{1}{3}\left(4\mathrm{T}\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}x\right) > 2\mathrm{T}\,\frac{x}{2} > 1 - e^{-x}.$$

Changeons x en $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \frac{x}{16}, \ldots$ et multiplions respectivement par 2, 4, 8, 16,... ; les deux membres extrêmes tendront vers la limite commune x, à cause de (13). Il en sera de même des seconds, troisièmes et quatrièmes membres. Or, comme on l'a vu plus haut, les seconds diminuent constamment ainsi que les troisièmes, tandis que les quatrièmes augmentent. On peut donc écrire :

$$\mathrm{S}x > \frac{1}{3}\left(4\mathrm{T}\,\frac{x}{2} + \mathrm{S}x\right) > x > 2\mathrm{T}\,\frac{x}{2} > \mathrm{T}x. \tag{14}$$

8. Changeons x en $\mathrm{L}\,(z + \sqrt{z^2+1})$, dans le premier et

le troisième membres de (14), et en L $\frac{2+z}{2-z}$ dans le troisième et le cinquième ; il viendra

$$(15) \qquad \frac{2+z}{2-z} > e^z > \sqrt{z^2+1}+z \qquad (2 > z > 0)$$

Cor. I. Prenons les inverses, il viendra

$$\frac{2-z}{2+z} > e^{-z} > \sqrt{z^2+1}-z\,, \qquad \text{(id)}$$

et de là, en retranchant,

$$(16) \qquad \frac{4z}{4-z^2} > \mathrm{S}z > z \qquad \text{(id)}$$

d'où, en élevant au carré et changeant z en $\frac{z}{2}$,

$$(17) \qquad 1+\left(\frac{8z}{16-z^2}\right)^2 > \mathrm{C}z > 1+\frac{z^2}{2} \qquad (4 > z > 0)$$

Ces deux dernières relations conduisent aux suivantes :

$$(18) \qquad z > \mathrm{T}z > \frac{(16-z^2)^2 z}{256+96z^2+z^4} \qquad (2 > z > 0)$$

$$(19) \quad \lim \frac{\mathrm{S}x}{x} = 1\,,\ \lim \frac{\mathrm{C}x-1}{x^2} = \frac{1}{2}\,,\ \lim \mathrm{C}x = 1\,,\ \lim \frac{\mathrm{T}x}{x} = 1 \quad (x=0)$$

II. Les identités

$$\mathrm{S}x = 2\mathrm{S}\frac{x}{2}\,\mathrm{C}\frac{x}{2}\,,\quad \frac{1}{\mathrm{T}x}-\frac{1}{2\mathrm{T}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{T}x\,,\quad \mathrm{C}^4\frac{x}{2}\left(1-\mathrm{T}^4\frac{x}{2}\right) = \mathrm{C}x$$

conduisent, en changeant successivement x en $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \frac{x}{16}, \ldots$ à ces formules

$$(20) \qquad \frac{\mathrm{S}x}{x} = \mathrm{C}\frac{x}{2}\,\mathrm{C}\frac{x}{4}\,\mathrm{C}\frac{x}{8}\ldots$$

$$(21) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}x}-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{T}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{T}\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\mathrm{T}\frac{x}{8}+\ldots$$

$$(22) \qquad \frac{x^2\mathrm{C}x}{\mathrm{S}^2x} = \left(1-\mathrm{T}^4\frac{x}{2}\right)\left(1-\mathrm{T}^4\frac{x}{4}\right)\left(1-\mathrm{T}^4\frac{x}{8}\right)\ldots$$

dont les deux premières sont bien connues (voir, par exemple l'*Essai* de M. Laisant, Paris 1873). On en trouvera d'autres du même genre, en traitant de même les identités.

$$(Cx + Sx)(Cx - Sx) = C^2x - S^2x, \quad S^2x - \left(2S\frac{x}{2}\right)^2 = \left(2S^2\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$S^2x - 2S^2\frac{x}{2} = 2CxS^2\frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{2S^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{S^2x} = \frac{1}{2SxTx}, \quad Tx - T\frac{x}{2} = \frac{T\frac{x}{2}}{Cx}, \quad \frac{1}{T\frac{x}{2}} - \frac{1}{Tx} = \frac{1}{Sx}, \ldots$$

III. A cause de la première inégalité (16), de la seconde (17) et de la suivante

$$(1 + a)(1 + b)\ldots > 1 + a + b + \ldots,$$

les formules (20), (21), (22) donnent celles-ci

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} & x + \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{16} + \ldots > Sx > x + \frac{x^3}{6} \\ & x > Tx > \frac{3x}{3 + x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} - \ldots \end{aligned}\right.$$

$$(24)\quad 1 > \frac{x^2 Cx}{S^2x} > 1 - \frac{x^4}{15}$$

et la dernière, cette autre très approchée,

$$(25)\quad \frac{Sx}{x} = \sqrt[3]{Cx}.$$

Ces relations sont utiles dans le calcul des *expressions hyperboliques* Sx, Cx, Tx.

9. Posons

$$\varphi(k) = 1 + \frac{k}{1}a + \frac{k}{1}\frac{k-1}{2}a^2 + \ldots + \frac{k}{1}\ldots\frac{k-k+1}{k}a^k,$$

$$\psi(k) = 1 + \frac{k}{1}a + \frac{k}{1}\frac{k+1}{2}a^2 + \ldots + \frac{k}{1}\ldots\frac{k+n-1}{n}a^n,$$

$$\chi(k) = 1 - \frac{k}{1}b + \frac{k}{1}\frac{k+1}{2}b^2 - \ldots - \frac{k}{1}\ldots\frac{k+2n}{2n+1}b^{2n+1};$$

il viendra $(1+a)\,\varphi(k)=\varphi(k+1)$; et, si $k<n$, $o<a<1$, $0<b<1$,

$$\psi(k)>(1-a)\,\varphi(k+1)\ ,\qquad \chi(k)>(1+b)\,\chi(k+1)\ .$$

Faisant $k=0, 1, 2,\dots n-1$ et multipliant, il vient, en posant $a=\frac{x}{n}$, $b=\pm\frac{x}{2n}$,

$$(\alpha)\qquad (n,x)=1+\frac{x}{1!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!}+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}\,.$$

$$(\beta)\qquad (-n,x)>1+\frac{x}{1!}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!}+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}\,.$$

$$(\gamma)\qquad (-2n,\pm x)>1\mp\frac{x}{1!}+\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{x^2}{2!}\mp\dots\mp\left(1+\frac{1}{2n}\right)\dots\left(1+\frac{2n-1}{2n+1}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Si x est positif, (α) et (β) donnent

$$(n,x)<1+\frac{x}{1!}+\dots+\frac{x^n}{n!}<(-n,x)$$

d'où

$$e^x=\lim\left(1+\frac{x}{1!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)\qquad (n=\infty)\tag{26}$$

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\qquad (\text{id.})\tag{27}$$

Le principe de cette démonstration est dû à de Stainville (l. cit.)

10. La formule (26) a lieu également pour x négatif. En effet, d'après (α) et (β), la valeur de l'expression

$$2\left[1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

est comprise entre celles des deux suivantes

$$(2n,x)+(2n,-x)\qquad\text{et}\qquad(2n,x)+(-2n,x)$$

qui tendent, l'une et l'autre, vers la limite $e^{x} + e^{x} = 2Cx$, quand n tend vers ∞. On a donc :

$$\text{(28)} \qquad Cx = \lim \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] \qquad (n = \infty)$$

d'où

$$\text{(29)} \qquad e^{-x} = \lim \left[1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] \qquad \text{(id.)}$$

$$\text{(30)} \qquad Sx = \lim \left[\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \qquad \text{(id.)}$$

11. De (12), on tire, en changeant successivement z en

$$\frac{x}{n}, \quad \frac{x}{n-x}, \quad \frac{x}{n-2x}, \quad \dots \quad \frac{x}{n-(n-1)x},$$

et additionnant, cette relation

$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1 - \frac{kx}{n}} > \mathrm{L}\, \frac{1}{1-x} > \frac{x}{n} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{kx}{n}},$$

d'où, en développant les quantités sous les signes Σ, et sommant à l'aide de la formule de Roberval[1],

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p+1} > \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} > \frac{1}{p+1},$$

il vient :

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) x^k > \mathrm{L}\, \frac{1}{1-x} > \sum_1^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{x^k}{k}$$

Les deux membres extrêmes diffèrent de

$$\sum_1^\infty \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right] \right\} x^k >$$

$$\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\left(1 - 1 + \frac{k}{n}\right)\right] x^k = \frac{2}{n}\, \frac{x}{1-x}$$

---

[1] Cette formule se déduit de la suivante

$$(p+1)\, n^p > \frac{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}{n-(n-1)} > (p+1)(n-1)^p$$

en y faisant successivement $n = 1, 2, 3, \dots n$, additionnant et réduisant.

et par suite ils tendent à se confondre quand n tend vers ∞. Or ils comprennent toujours la série $\sum_1^\infty \frac{x^k}{k}$ terme à terme, car on a

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}>\frac{1}{k}>\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

On peut ainsi poser

$$\text{(31)} \qquad L\,\frac{1}{1-x}=\sum_1^\infty \frac{x^k}{k} \qquad (0<x<1)$$

et de là

$$L\,(1+x)=L\,\frac{1}{1-x}-L\,\frac{1}{1-x^2}=\sum_1^\infty \frac{x^k}{k}-\sum_1^\infty \frac{x^{2k}}{2k}$$

ou bien

$$\text{(32)} \qquad L\,(1+x)=\lim\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\dots-\frac{x^{2n}}{2n}\right) \qquad (n=\infty,\ 0<x<1)$$

Cauchy *(Rés. Anal.* Turin, 1835) et Schlömilch (*Handb. der Anal.* Iena, 1873) ont démontré cette formule par des moyens analogues, mais leur marche est beaucoup moins élémentaire.

Les deux formules (31) et (32) peuvent se condenser en une seule, qu'on appelle *formule de Mercator* (*Log.* Londres, 1668) et qui est

$$\text{(33)} \qquad L\,(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots \qquad (x^2<1)$$

Cor. I. Les formules (31) et (32) donnent celle-ci, remarquée d'abord par Gregory (*Ex. geom.* Londres, 1668.)

$$\text{(34)} \qquad L\,\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)$$

et qui pour $x = \mathrm{T}y$, devient

$$\text{(35)} \qquad y=\frac{\mathrm{T}y}{1}+\frac{\mathrm{T}^3y}{3}+\frac{\mathrm{T}^5y}{5}+\dots$$

II. α désignant un nombre quelconque, on a, si $x^2<1$,

$$(1+x)^\alpha=e^{\alpha L(1+x)}=1+\frac{\alpha\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\dots\right)}{1\,!}+\frac{\alpha^2\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\dots\right)^2}{2\,!}+\dots$$

Le coefficient de x^n, dans le dernier membre, doit être une fonction entière de α, du degré n ; or ce coefficient devant se réduire à zéro, pour les valeurs 0, 1, 2, 3,... $n - 1$, de l'exposant α, et à l'unité, pour $\alpha = n$, il se confondra avec

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

On a donc la *formule du binome*,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha}{1}\,\frac{\alpha-1}{2}x^2 + \ldots \qquad (x^2 < 1) \tag{36}$$

Cette démonstration est due à Cauchy (l. cit.).

Exercices[1]

1. Soient z un nombre positif quelconque et μ un nombre rationnel tendant vers zéro ; on a :

$$\frac{z^{\mu}-1}{\mu} > \lim \frac{z^{\mu}-1}{\mu} = \lim \frac{z^{\mu}-1}{mz^{\mu}} > \frac{z^{\mu}-1}{\mu z^{\mu}} .$$

En désignant par L z la limite commune, on peut la définir par la relation

$$\mathrm{L}z = \lim m\left(\sqrt[m]{z}-1\right) = \lim m\left(1-\sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right) \quad \begin{matrix}(m=\infty).\\ \text{(Briggs)}\end{matrix}$$

De là, la relation

$$m\left(\sqrt[m]{z}-1\right) > \mathrm{L}z > m\left(1-\sqrt[m]{\frac{1}{z}}\right) \qquad \text{(Lagrange)} \tag{α}$$

En déduire la relation (10) et la troisième des relations (8).

2. 1° De la définition de e^x, déduire les formules suivantes :

$$e = 3\left(\frac{2.5^2}{3^2.6}\right)^1\left(\frac{6.9^2}{7^2.10}\right)^2\left(\frac{14.17^2}{15^2.18}\right)^4\left(\frac{30.33^2}{31^2.34}\right)^8\ldots$$

---

[1] Voir J. S. 1899-1900, *Th. de la f. log.* ; P. M. 1899, *Rem. sur la série log.* ; P. M. 1900, *Sur une id. d'Euler.*

$$e^2 = 16 \left(\frac{5^2.\,6.8}{4\,6.7^2}\right)^4 \left(\frac{9^2.14.16}{8.10.15^2}\right)^8 \left(\frac{17^2.30.32}{16.18.31^2}\right)^{16} \cdots$$

$$2{,}5 < e < 3\,, \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n\,! < \frac{n^n+1}{e^n-1}$$

$$e = \lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad (n = \infty) \quad \text{(Unferdinger)}$$

$$\lim \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n} = \frac{4}{e} \qquad \text{(id.)} \qquad \text{(Laisant)}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{\sqrt{C_{2,1}}}{2}\,\frac{\sqrt[4]{C_{4,2}}}{2}\,\frac{\sqrt[8]{C_{8,4}}}{2} \cdots = \frac{\sqrt[3]{C_{3,1}\,.\,C_{2,1}}}{3}\,\frac{\sqrt[3]{C_{9,3}\,.\,C_{6,3}}}{3}\,\frac{\sqrt[27]{C_{27,9}\,.\,C_{18,9}}}{3} \cdots$$

$$e = \frac{2}{1}\sqrt{\frac{4}{3}}\,\sqrt[4]{\frac{6.8}{5.7}}\,\sqrt[8]{\frac{10\,.\,12\,.\,14\,.\,16}{9\,.\,11\,.\,13\,.\,15}} \cdots \qquad \text{(Catalan)}$$

$$e^{\pm x} = \lim \left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^1 \left(1 \pm \frac{x}{2n}\right)^2 \cdots \left(1 \pm \frac{x}{nn}\right)^n \qquad (n = \infty)$$

$$\sqrt{e^x} = \lim \left(1 \pm \frac{x}{n^2}\right)\left(1 \pm \frac{2x}{n^2}\right) \cdots \left(1 \pm \frac{nx}{n^2}\right) \qquad \text{(id.)}$$

2° Dans un vase de contenance connue et plein de vin, on fait tomber un filet d'eau d'un débit connu. Combien restera-t-il de vin après un temps donné, en supposant que le mélange se fait instantanément ? (Terquem.)

3° Quelle est la valeur de l'intérêt composé d'une somme donnée, placée pendant un temps donné à un taux également connu ; les intérêts se capitalisant à chaque fraction infinitésimale du temps ? (Jacques Bernoulli.)

4° Quel doit être le profil générateur d'une tour ronde pleine, chargée à sa partie supérieure d'un poids P, formée d'une matière de densité p, et telle que, dans une section horizontale quelconque, la pression verticale par unité de surface soit constante ? (Poncelet.)

3. Démontrer les relations :

$$\lim \frac{x}{Lx} = \infty\,, \quad \lim L\sqrt[x]{x} = 0\,, \quad \lim \sqrt[x]{x} = 1 \qquad (x = \infty)$$

$$\lim \frac{1}{x^x} = 1 \ , \quad \lim x^x = 1 \qquad (x = 0)$$

4. Si la somme $x + y + \ldots$ tend vers une limite finie, il en est de même du produit $(1 + x)(1 + y)\ldots$ (Cauchy). Conséquence de (9.)

5. L'équation $e^x + x = 0$ n'a aucune racine réelle. (id.)

6. La fonction $\frac{e^x}{x^m}$ passe par un maximun pour $x = m$. (id.) On s'appuie sur la relation.

$$e^{1 \pm \frac{h}{m}} > e\left(1 \pm \frac{h}{m}\right)$$

7. La fonction $\sqrt[x]{x}$ passe par un maximum pour $x = e$ (Euler). On part de la relation.

$$e^{\pm \frac{h}{e}} > 1 \pm \frac{h}{e}$$

8. On a :

$$(\alpha) \qquad \frac{h}{x} > \mathrm{L}\,\frac{x+h}{x} > \frac{h}{x+h} \qquad \text{(Neper)}$$

$$(\beta) \qquad \frac{x(1+y)}{y} > \frac{\mathrm{L}(1+x)}{\mathrm{L}(1+y)} > \frac{x}{y(1+x)} \qquad \text{(Kepler)}$$

$$(\gamma) \qquad e^a > \frac{e^a - e^b}{a-b} > e^b \ . \quad m^a \mathrm{L}m > \frac{m^a - m^b}{a-b} > m^b \mathrm{L}m \qquad \text{(Realis)}$$

$$\lim \left(\frac{a\sqrt[m]{\alpha} + \ldots + c\sqrt[m]{\gamma}}{a + \ldots + c}\right)^m = \sqrt[a+\ldots+c]{\alpha^a \ldots \gamma^c} \qquad (m = \infty) \quad \text{(Laisant)}$$

$$\mathrm{L}n + 1 > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \mathrm{L}n + \frac{1}{n}$$

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots > \mathrm{L}\,\frac{1}{1-x} > x + x^3 + x^9 + x^{27} + \ldots$$

9. Substituer dans (11) les valeurs

$$z = \frac{1}{n} \, , \ \frac{1}{n-1} \, , \ \frac{2}{n+1} \, , \ \frac{1}{n^2-1} \, , \ \frac{4}{n^2-3n-2} \, , \ \frac{2n+3}{n(n+2)^2} \, ,$$

$$\frac{1440}{(n^2-64)(n^2-25)(n^2-49)} \, , \ \frac{6n^4-4n^2+1}{n^6(n^2-4)} \, ,$$

$$z = \sec\omega - 1\,, \quad -\sin^2\omega\,, \quad -\cos 2\omega\,. \quad \mathrm{tg}^2\omega\,, \quad -\mathrm{tg}^4\omega\,,$$

et en déduire des formules utilisables pour le calcul des logarithmes et des lignes trigonométriques.

10. Dans (11) faisons successivement

$$z = \frac{1}{kn}\,, \; \frac{1}{kn+1}\,, \ldots, \; \frac{1}{kn+k-1}\,;$$

en tirer deux limites de $\mathrm{L}\,\frac{n+1}{n}$. Apprécier l'erreur commise en prenant une de ces limites pour la valeur de $\mathrm{L}\,\frac{n+1}{n}$. (Cauchy).

11. Même question en substituant.

$$z = n\,\frac{2k+n}{k^2}\,, \; n\,\frac{2k+3n}{(n+k)^2}\,, \ldots \; n\,\frac{2k+kn-n^2}{(kn+k-n)^2}$$

12. Des relations de l'exercice 10, déduire la quadrature de l'hyperbole $xy = 1$ (Schlömilch).

13. Tirer le même résultat de la relation (α) de l'exercice 1.

14. Sur une droite AOLN, prenons AO égal à l'unité, et faisons mouvoir le point L uniformément, et le point N de manière que OL soit égal à L (AN). Si la vitesse du premier point est représentée par AO, celle du second l'est par AN (Neper.)

15. Considérons la série dont les deux premiers termes sont $\frac{z^2-1}{2z}$ et $2\,\frac{z-1}{z+1}$, et chacun des suivants alternativement moyen géométrique et moyen harmonique des deux qui le précèdent immédiatement. Les termes de la suite oscillent autour d'une limite finie, L z, dont ils se rapprochent de manière à en différer aussi peu qu'on veut. (Gregory.)

16. 1° De (14) déduire la relation suivante :

$$(\alpha) \qquad \frac{z^2-1}{2z} > \mathrm{L}z > 2\,\frac{z-1}{z+1} \qquad \text{(Kepler et Gregory)}$$

et de là

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^m > e^2 > \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^{m-\frac{1}{m}}$$

2° De (15) tirer la suivante :

$$\lim \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad (x = 0)\,,$$

de (14), celle-ci:

$$(\beta)\quad \frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+2}>\frac{12m^2+12m+1}{6m(m+1)(2m+1)}>\mathrm{L}\,\frac{m+1}{m}>\frac{2}{2m+1},$$

et de là

$$e^{\frac{2m+1}{2m+2}}>(m,1)>e^{\frac{2m}{2m+1}},\quad \frac{2m+1}{2m+2}\,e>(m,1)>\frac{2m}{2m+1}\,e\,.$$

17. De (16), (17) et (23), déduire cette inégalité

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\,.$$

18. De (β), exercice 16, on déduit

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)>\mathrm{L}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2m+1}{2}}-1>0$$

d'où, en appelant Σ la série obtenue en faisant $m=1, 2, 3,\ldots$ dans le second membre, et posant $e^{1-\Sigma}=c$, nombre d'ailleurs fini puisqu'on a:

$$\frac{1}{12}>\Sigma>0\,,\qquad \text{d'où}\qquad e>c>e^{\frac{11}{12}};$$

$$(\beta)\qquad ce^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}<n!<ce^{-n+\frac{1}{12n}}n^{n+\frac{1}{2}}\,.$$

On tire de là

$$c=2\lim\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\sqrt{\frac{1}{n}}\ [1]$$

La formule (β) est ce qu'on appelle la *formule de Stirling*. La démonstration indiquée est celle de M. Césaro (M. 1881), sauf l'origine de la relation (α).

19. Dans (α), exercice 16, faire

$$z=\sec\omega,\ 1+x,\ \frac{1}{1-x},\ 1+\frac{2}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ \frac{n^2}{n^2-1},\ \frac{(n^2-1)^2(n+2)}{(n+1)^3(n-2)},$$

[1] D'où, à cause de la formule de Wallis, $c=\sqrt{2\pi}$.

et faire servir les relations trouvées au calcul des logarithmes[1].

20. Représentons par $\mathrm{DF}(x)$ la limite du rapport de l'accroissement $\mathrm{F}(x \pm h) - \mathrm{F}(x)$ de la fonction $\mathrm{F}(x)$, à l'accroissement $\pm h$ de la variable, limite dont l'existence n'est d'ailleurs pas certaine a priori. On aura, à cause de (α) et (γ), exercice 8,

$$\mathrm{D}e^x = e^x\ , \quad \mathrm{D}m^x = m^x \mathrm{L}m\ , \quad \mathrm{DL}x = \frac{1}{x}\ .$$

21. Considérons les valeurs $\mathrm{F}(a)$, $\mathrm{F}(a+h)$, $\mathrm{F}(a+2h)$,... $\mathrm{F}(a+nh=b)$, de la fonction $\mathrm{F}(x)$, et désignons par la notation $\int_b^a \mathrm{F}(x)\,dx$, la limite, fixe ou indéterminée vers laquelle tend la somme

$$h\mathrm{F}(a) + h\mathrm{F}(a+h) + \ldots + h\mathrm{F}(b)$$

à mesure que h tend vers zéro, ou que n tend vers l'infini.

1° De (11) et de (12) on tirera, en faisant $z = \frac{h}{x}$ et effectuant la sommation,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \mathrm{L}\,\frac{b}{a}\ , \quad \text{d'où} \quad \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

ensuite

$$(x+h)\left[\mathrm{L}(x+h) - 1\right] - x(\mathrm{L}x - 1) > h\mathrm{L}x > x(\mathrm{L}x - 1) - (x-h)\left[\mathrm{L}(x-h) - 1\right]$$

d'où

$$\int_a^b \mathrm{L}x\,dx = b(\mathrm{L}b - 1) - a(\mathrm{L}a - 1)$$

ou simplement

$$\int \mathrm{L}x\,dx = x(\mathrm{L}x - 1)\ .$$

---

[1] Par exemple, la dernière transformation indiquée montre qu'en posant

$$\mathrm{L}\,\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} = \frac{4}{n(n^2-3)}\ ,$$

l'erreur est inférieure à $\frac{16}{(n^2-4)^5}$. Ainsi, connaissant L7, L8 et L10, on déduira de la sorte L11 avec huit décimales exactes. Le degré d'approximation croît rapidement avec n.

2° Les identités

$$\mathrm{LL}(x+h) - \mathrm{LL}x = \mathrm{L}\left[1 + \frac{\mathrm{L}\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\mathrm{L}x}\right], \quad \mathrm{L}\frac{x+h-1}{x+h+1} - \mathrm{L}\frac{x-1}{x+1}$$

$$= \mathrm{L}\left(1 + \frac{2h}{x^2+xh-h-1}\right).$$

$$\mathrm{L}\sqrt{(x+h)^2 \pm 1} - \mathrm{L}\sqrt{x^2 \pm 1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(1 + \frac{h^2+2hx}{x^2 \pm 1}\right)$$

conduisent à

$$\int \frac{dx}{x\mathrm{L}x} = \mathrm{LL}x, \quad \int \frac{dx}{x^2-1} = \mathrm{L}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \mathrm{L}\sqrt{x^2 \pm 1}.$$

3° Dans (α), exercice 16, faisons

$$z = \frac{x+h+\sqrt{(x+h)^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}},$$

on aura a fortiori

$$\frac{h}{\sqrt{x^2+1}} > \mathrm{L}z > \frac{h}{\sqrt{(x+h)^2+1}} \quad \text{d'où} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{L}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

4° De (11) on tire :

$$(x+h)^2\left[2\mathrm{L}(x+h)-1\right] - x^2(2\mathrm{L}x-1) > 4hx\mathrm{L}x > x^2(2\mathrm{L}x-1) - (x-h)^2\left[2\mathrm{L}(x-h)-1\right]$$

d'où

$$\int x\mathrm{L}x\,dx = \frac{x^2}{4}(2\mathrm{L}x-1)$$

5° On a :

$$h\alpha^a + h\alpha^{a+h} + \dots + h\alpha^b = \frac{\alpha^{b+h}-\alpha^a}{\frac{\alpha^h-1}{h}}$$

d'où, à cause de (γ), exercice 8,

$$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\mathrm{L}\alpha}, \quad \int_0^b e^x dx = e^b - 1.$$

Le principe de cette dernière démonstration est dû à Cauchy. Par des moyens analogues, Schlömilch a donné la valeur de $\int \frac{dx}{1+x}$. On pourrait en donner beaucoup d'autres, plus ou moins simplement.

22. De la formule (36) revenir à (35), à l'aide de (α), exercice 1.

23. Développer en séries les expressions suivantes :

$$L\frac{1}{1-x} - L(1+x) - \frac{x}{2} L\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{(Thompson)}$$

$$L\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{9}\left(4 + \frac{25}{5-3x^2}\right), \quad L\frac{1+3x}{1-3x} - 4L\frac{1+2x}{1-2x} + 5L\frac{1+x}{1-x}.$$

24. Appliquer la formule (34) aux expressions suivantes :

$$L\frac{(n+3)^2 n}{(n+1)^2(n+4)} \ \text{(Müller)} \qquad L\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} \ \text{(Borda)}$$

$$L\frac{(n+5)(n+3)^{10}(n+1)^5}{(n+4)^5(n+2)^{10}n} \ \text{(Callet)} \qquad L\frac{(n^2-49)(n^2-1)}{(n^2-25)^2} \ \text{(Secrétan)}$$

$$L\frac{(n^2-9)(n^2-16)}{(n^2-25)n^2} \ \text{(Haros)} \qquad L\frac{(n^2-64)(n^2-25)(n^2-9}{(n^2-49)^2n^2} \ \text{(Lavernède)}$$

$$L\frac{(n+6)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+5)^2n^2} \ \text{(Lavernède)}$$

$$L\frac{(n-9)(n+8)(n+7)(n-5)(n-1)}{(n+9)(n-8)(n-7)(n+5)(n+1)} \ \text{(id.)}$$

25. Posons.

$$F(x,n) = \frac{x}{n} + \frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \dots + \frac{x}{n+(n-1)x},$$

$$\Phi(x,n) = \frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \dots + \frac{x}{n+nx},$$

$$f(x,n) = n\left(\sqrt[n]{1+x} - 1\right), \quad \varphi(x,n) = n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{1+x}}\right);$$

De la relation (1) et de l'inégalité connue

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

on tire directement celles-ci :

$$x > F(x,n) > f(x,n) > F(x,\infty) = f(x,\infty) = \Phi(x,\infty) = .$$

$$= \varphi(x, \infty) > \varphi(x, n) > \Phi(x, n) > \frac{x}{1 + x}$$

$$[n, F(x, n)] > [\infty, F(x, \infty)] = 1 + x = [-\infty, \Phi(x, \infty)] > [-x, \Phi(x, n)]$$

$$\lim [F(x, n) + F(y, n) - F(x + y + xy, n)] = 0^{1} \qquad (n = \infty)$$

De plus si x est rationnel,

$$\lim (m, 1)^{F(x, n)} = 1 + x, \qquad \text{(id.)}$$

26. Considérons la série dont les deux premiers termes sont Cx, 1, et chacun des suivants alternativement moyen arithmétique et moyen géométrique des deux qui le précèdent immédiatement. Les termes de la suite tendent vers la limite $\frac{Sx}{x}$ (Gergonne).

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

EXEMPLE SIMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE N'AYANT PAS DE DÉRIVÉE POUR UNE INFINITÉ DE VALEURS DE LA VARIABLE

Lorsque le professeur explique à des débutants la notion de dérivée, il ne soulève pas devant eux la question de savoir si toute fonction continue a une dérivée. Il lui suffit de leur montrer que les fonctions qu'ils connaissent en ont une.

Mais, un peu plus tard, il devient peut-être temps de mettre en garde les élèves, qui faussement guidés par l'intuition, s'imagineraient que toute fonction continue a une dé-

---

[1] Cette relation s'obtient en cherchant l'expression de la limite de la quantité

$$[n, F(x, n)]\,[n, F(y, n)] - [n, F(x + y + xy, n)] .$$

On en tire, en écrivant par définition $F(a - 1, \infty) = La$,

$$La + Lb = L(ab) .$$

rivée, puisque toute courbe a une tangente et tout mouvement une vitesse. Il est vrai que, ce faisant, ils ne feraient que la même erreur qu'ont faite tous les mathématiciens pendant près de deux siècles ; et ainsi, leur faute serait, jusqu'à un certain point, légitime. Mais il est légitime aussi de chercher à la corriger.

Malheureusement, les exemples de fonctions continues sans dérivées que l'on trouve dans les ouvrages classiques ne sont pas simples [1], et il n'est pas à supposer que les élèves se les assimilent. On trouvera donc peut-être quelque intérêt à en rencontrer ici un tout élémentaire.

Soit a un nombre réel, compris entre 0 et 1.

Dans l'intervalle de 0 à 1, intercalons le nombre a qui divise cet intervalle dans le rapport $\frac{a}{1-a}$. Divisons chacun des deux intervalles formés dans le même rapport, nous intercalons ainsi le nombre a^2 dans le premier intervalle, et

$$a + a(1-a)$$

dans le second. Puis nous divisons dans le même rapport chacun des quatre intervalles formés, et ainsi de suite. On démontre facilement que les intervalles formés tendent tous vers zéro. (Car au bout de n opérations, chacun des intervalles formés est plus petit que le plus grand des deux nombres a^n, $(1-a^n)$. Les nombres

$$0, 1, a, a^2, a + a(1-a), \ldots\ldots$$

extrémités des intervalles ainsi formés forment un ensemble E. Cet ensemble contient une infinité d'éléments, *il y a une infinité d'éléments de E dans tout intervalle compris dans l'intervalle* [2] *de 0 à 1.*

---

[1] Voir par exemple : B. Niewenglowski. Cours d'algèbre, 2e éd., t. 2, p. 464, Paris, Armand Colin, 1902.

Je parle, bien entendu, de fonction continue, n'ayant pas de dérivée pour une *infinité* de valeurs de la variable. S'il ne s'agit que d'un exemple de fonction continue n'ayant par de dérivée pour *une* valeur de la variable, voici un exemple bien simple et bien connu : la fonction égale à $x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et à 0 pour $x = 0$ est continue pour $x = 0$ et n'a pas de dérivée pour cette valeur de la variable.

[2] L'ensemble E est *dense* dans l'intervalle de 0 à 1.

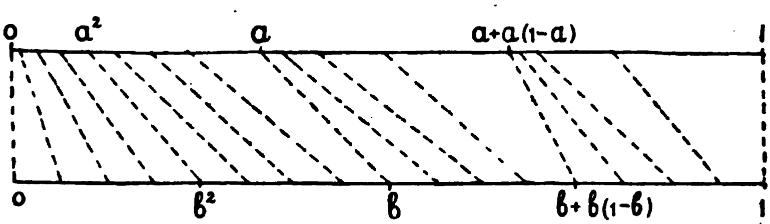
Recommençons maintenant les mêmes opérations, mais en partant d'un nombre b différent de a.

Ce qui donne un ensemble E'.

Au nombre

0	de l'ensemble E faisons correspondre le nombre	0	de l'ensemble E'
1	»	1	»
a	»	b	»
a^2	»	b^2	»
$a + a(1 - a)$	»	$b + b(1 - b)$	»

et ainsi de suite ; autrement dit, à tout élément de l'ensemble E, faisons correspondre celui de l'ensemble E' qui a été obtenu après le même nombre d'opérations. (Voir la figure sur laquelle on a supposé $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$).



Si l'on appelle x, un élément de E, et y l'élément correspondant de E' ; y est une fonction de x *définie pour toutes les valeurs de x qui font partie de E, et cette fonction est évidemment croissante.*

On en déduit une fonction de x, *définie pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.*

En effet soit x une telle valeur. Si elle fait partie de l'ensemble E, la valeur correspondante de y vient d'être définie. Sinon soit $x_n\, x'_n$ l'intervalle dans lequel se trouve x après n opérations. Considérons $y_n\, y'_n$ correspondant à $x_n\, x'_n$. Les extrémités y_n et y'_n se rapprochent indéfiniment quand n croit indéfiniment ; d'ailleurs y_n ne décroît jamais ; donc y_n et y'_n ont une limite commune y, c'est cette limite qui sera la valeur de la fonction correspondant à la valeur x de la variable.

Cette fonction est évidemment *croissante*.

Je dis qu'elle est *continue* pour toute valeur x de la variable.

En effet soit y la valeur correspondante de la fonction. Donnons-nous un nombre positif α, et considérons la subdivision poussée jusqu'à ce que $y - \alpha$, y, $y + \alpha$ ne soient plus dans le même intervalle. Soit alors $y_n\, y'_n$ l'intervalle dans lequel est y. On voit que si x ne sort pas de l'intervalle $x_n\, x'_n$, la valeur de y ne peut sortir de l'intervalle $y_n\, y'_n$; donc sa variation est plus petite que α ; donc la fonction y continue.

Nous allons maintenant montrer que *pour toutes les valeurs de x appartenant à l'ensemble E, la fonction y n'a pas de dérivée.*

Poussons la subdivision jusqu'au moment où x apparaît. Soit alors $x\, x'$ l'intervalle qui admet x comme extrémité *inférieure.*

Entre x et x' on intercale un nombre x''', entre x et x'' un nombre x''' et ainsi de suite.

Soient y, y', $y''\ldots$ les valeurs correspondantes de y. On a

$$\begin{array}{ll}
x'' - x = a(x' - x)\,, & y'' - y = b(y' - y)\,; \\
x''' - x = a(x'' - x) = a^2(x' - x)\,, & y''' - y = b(y'' - y) = b^2(y' - y)\,, \\
\ldots & \ldots \\
x^{(n)} - x = a^{n-1}(x' - x)\,, & y^{(n)} - y = b^{n-1}(y' - y)\,, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Donc

$$\frac{y'' - y}{x'' - x} = \frac{b}{a}\ \frac{y' - y}{x' - x}\,,$$

$$\frac{y''' - y}{x''' - x} = \left(\frac{b}{a}\right)^2\ \frac{y' - y}{x' - x}\,,$$

$$\ldots$$

$$\frac{y^{(n)} - y}{x^{(n)} - x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\ \frac{y' - y}{x' - x}\,.$$

Soit, pour fixer les idées, $b > a$. On voit que $\frac{y^{(n)} - y}{x^{(n)} - x}$ *croît indéfiniment quand x_n tend vers x.*

Cela suffit pour prouver que la fonction y n'a pas de dérivée pour cette valeur de x; car si elle en avait une le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devrait tendre vers une limite finie quand Δx tend vers zéro d'une manière quelconque.

Il est d'ailleurs facile de compléter le résultat précédent, en montrant que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croît indéfiniment quand Δx tend vers zéro par valeurs *positives quelconques*.

D'autre part quand Δx tend vers zéro par valeurs *négatives*, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tend vers zéro*.

Car si l'on considère les intervalles successifs dont x est l'extrémité supérieure, soient x_1', x_1'', x_1''',... leurs extrémités inférieures, on trouvera facilement

$$\frac{y - y_1^{(n)}}{x - x_1^{(n)}} = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{n-1} \frac{y - y_1'}{x - x_1'} .$$

Or l'hypothèse $b > a$ entraîne $1 - b < 1 - a$.

Donc cette expression tend vers zéro.

Une question qui se pose maintenant est de savoir si les propriétés précédentes subsistent quand x n'appartient pas à l'ensemble E. Cela n'est pas.

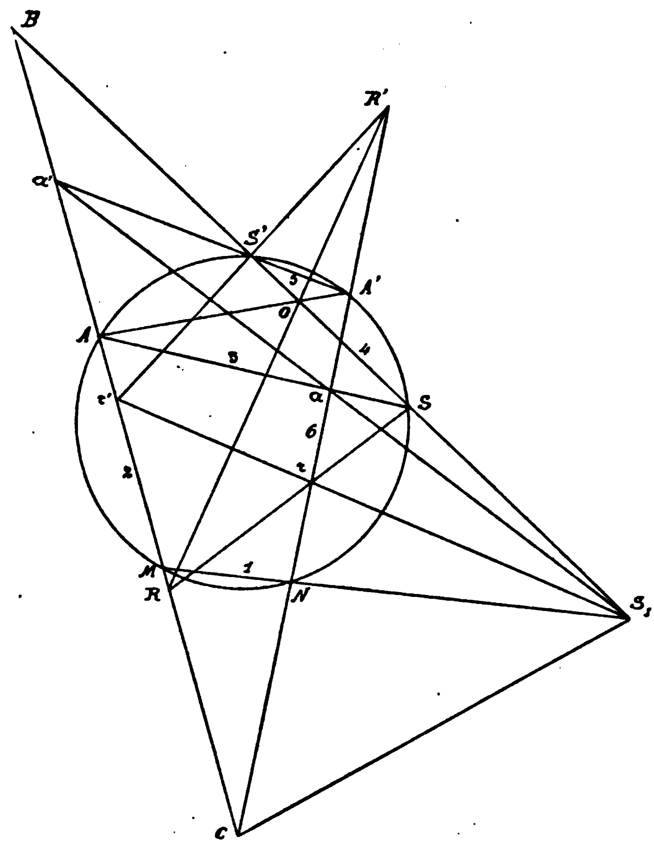
Dans ce cas la variation de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est plus compliquée et dépend en général de la façon dont Δx tend vers zéro. Nous réservons cette étude pour une autre occasion.

E. Cahen (Paris).

DÉMONSTRATION SYNTHÉTIQUE DE DEUX THÉORÈMES DE CARNOY

La mort récente de Joseph Carnoy, professeur de géométrie à l'Université de Louvain, me fait songer à publier une démonstration synthétique de deux théorèmes qui lui sont dus ; si je le fais, c'est bien moins pour cette démonstration synthétique que pour les théorèmes eux-mêmes, fort élégants et susceptibles de nombreuses applications à la construction des coniques.

I. — Soit (fig. 1) une conique avec trois sécantes la cou-



pant aux points A et M, A′ et N, S et S′. Considérons les deux premières comme deux ponctuelles projectives; pour en déterminer la projectivité, posons a priori A homologue de A′, B, intersection de A M et S S′, homologue de B′, intersection de A′ N et S S′, et enfin C, intersection de A M et A′ N correspondant à lui-même. Les deux ponctuelles sont donc aussi perspectives et les rayons joignant leurs points homologues se coupent tous au point O, intersection de AA' et BB'.

Mais, pour préciser cette correspondance, il nous faut chercher une loi qui donne les trois couples homologues qui viennent d'être posés. Je dis que cette loi consiste en ceci : mener par S_1 intersection de SS' et de MN, un rayon quelconque coupant AM et $A'N$ respectivement aux points r' et r; joindre Sr et $S'r'$ et obtenir R intersection de Sr avec AM, homologue de R', intersection de $S'r'$ avec $A'N$. En faisant coïncider le rayon quelconque $S_1 r r'$ avec SS' on obtient les points B et B' ; en le faisant coïncider avec $S_1 C$, on obtient l'élément uni C ; il reste à démontrer que, d'après cette loi, A correspond à A'.

Joignons AS et marquons a l'intersection de AS avec $A'N$; joignons $S_1 a$ et marquons a' l'intersection de $S_1 a$ avec AM ; tout revient à démontrer que $A'a'$ passe par S'. Nous voyons que la figure contient un hexagone, $NMASS'A'N$, inscrit dans la conique ; numérotons en les côtés en commençant par $NM = 1$. D'après le théorème de Pascal, a', intersection de 2 et 5, doit être en ligne droite avec les deux autres intersections a et S_1 ce qui achève la démonstration. Si maintenant nous considérons le quadrilatère $AA'MN$ et la position du centre de perspectivité O des deux ponctuelles, nous aurons le théorème suivant :

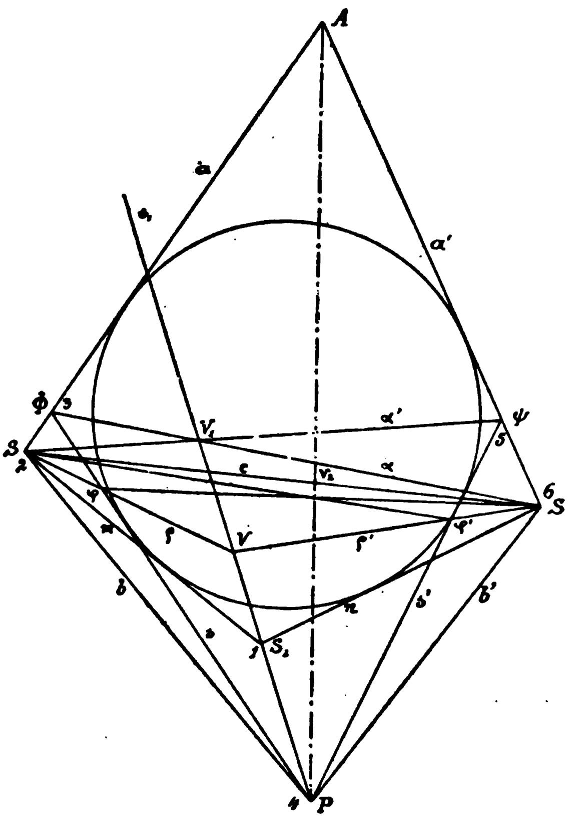
Etant donnés six points[1] d'une conique, on en prend quatre[2] pour les sommets d'un quadrilatère et on détermine les points[3] où la corde[4] des points restants rencontre deux côtés opposés[5]; les droites[6] menées par deux points[7] pris sur les autres côtés[8] en ligne droite avec l'un d'eux[9] et par les extrémités[10] de la corde[11], rencontrent ces mêmes côtés[12] en deux points[13] en ligne droite avec l'autre[14]. (Carnoy. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1879-80 ; *Cours de géométrie analytique*, tome I.)

Ou bien : *Etant donnés cinq points d'une conique, on en prend quatre pour les sommets d'un quadrilatère et l'on*

---

[1] $AA'MNSS'$; [2] $AA'MN$; [3] S_1 et O ; [4] SS' ; [5] MN et AA' ; [6] $r'S'$ et rS ; [7] r' et r ; [8] MA et NA' ; [9] S_1 ; [10] S' et S ; [11] SS' ; [12] NA' et MA ; [13] R' et R ; [14] O.

mène par le cinquième deux droites quelconques, la première rencontrant deux côtés opposés en deux points, la seconde rencontrant les autres côtés aussi en deux points : les droites qui joignent ces points combinés deux à deux forment avec chaque groupe de côtés opposés deux quadrilatè-



res tels que leurs diagonales se rencontrent sur la conique. (CARNOY, *loc. cit.*)

II. — Soit (fig. 2) une conique avec six tangentes a, m, a', n, s, s' dont quatre sont considérées deux par deux, a et m, a' et n, comme faisant partie de deux faisceaux projectifs de centres S et S'. Posons à priori a homologue de a', b, joignant S à P, intersection de s et s', homologue de b', joignant S' à

P, et enfin S S′ ou c élément uni des deux faisceaux; ceux-ci sont donc perspectifs, avec P A, où A est le point de rencontre de a et a', comme ponctuelle d'intersection.

Pour fixer cette perspectivité, il faut trouver une loi générale qui réponde aux trois exemples posés. Je dis qu'elle consiste en ceci: l'intersection de m et de n donne un point S_1 qui joint à P donne la droite s_1 ; prenons un point variable V sur s_1 et joignons $SV = \rho$ et $S'V = \rho'$; ρ coupe s en φ et ρ' coupe s' en φ' ; les rayons r et r' unissant respectivement S à φ' et S′ à φ seront homologues et se couperont en un point R de P A. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que cette loi donne les couples $(a\,a')$, $(b\,b')$, $(c\,c')$. La vérification en est aisée pour $(c\,c')$: il suffit de prendre V en V_2, intersection de c avec P A ; de même pour (bb') en faisant venir V en P. Il reste à démontrer que a est, d'après cette loi, l'homologue de a'.

Cherchons Φ, intersection de s et de a ; joignons $\Phi S' = \alpha$ et marquons V_1 l'intersection de $\Phi S'$ avec s_1 ; on voit facilement que, pour que la proposition soit exacte, les droites $SV_1 = \alpha'$, a' et s' doivent se couper en un même point Ψ.

Considérons l'hexagone $n\,m\,a\,s\,s'\,a'\,n$ circonscrit à la conique. D'après le théorème de Brianchon, en numérotant les sommets ($n\,m = 1$, etc.) les droites 14, 25, 36 doivent se couper en un même point; comme, par construction, ceci se vérifie en V_1, il faut bien que α' passe par Ψ et il est clair maintenant que a est l'homologue de a'. Enfin, si nous considérons le quadrilatère $m\,n\,a\,a'$ et la position de la ponctuelle d'intersection des deux faisceaux perspectifs, nous avons le théorème suivant:

Etant données six tangentes [1] à une conique, on en prend quatre [2] pour former un quadrilatère et par deux sommets opposés [3] on tire deux droites [4] passant par le point d'intersection [5] des deux autres [6]; si on mène par les autres sommets [7] deux droites [8] qui se coupent sur l'une d'elles [9], les lignes [10] qui joignent ces mêmes sommets [11] aux points [12] où ces droites [13] rencontrent les deux tangentes [14], se couperont sur l'autre [15]. (CARNOY, *loc. cit.*)

---

[1] $m\,n\,a\,a'\,s\,s'$; [2] $m\,n\,a\,a'$; [3] A et S_1 ; [4] P A et s_1 ; [5] P ; [6] s et s' ; [7] S et S′ ; [8] ρ et ρ' ; [9] s_1 en V; [10] r et r' ; [11] S et S′ ; [12] ρ' et ρ' ; [13] ρ' et ρ ; [14] s' et s ; [15] P A.

Ou bien: *Etant données cinq tangentes d'une conique, on en prend quatre pour former un quadrilatère, et on choisit à volonté deux points sur la cinquième tangente; on joint le premier à deux sommets opposés et le second aux deux autres sommets des quadrilataires; deux points d'intersection des droites ainsi obtenues et combinées deux à deux formeront avec chaque groupe des sommets opposés, deux quadrilatères tels que les droites réunissant les points de concours des côtés opposés de l'un avec les points analogues de l'autre seront des tangentes à la conique.* (Carnoy, *loc. cit.*)

M. Alliaume.

SUR LA GÉOMÉTROGRAPHIE DES COURBES PLANES

1. — La méthode que nous avons donnée [1] ne s'applique pas, comme nous l'avons du reste fait remarquer, aux curvigraphes sans glissement.

Nous nous proposons de combler cette lacune par l'emploi de plusieurs symboles cinématiques nouveaux.

Pour exprimer que deux droites tournent autour d'un point fixe sur chacune d'elles mais mobile par rapport à leur plan, nous utiliserons le symbole K_1.

Si l'une des droites et par conséquent le point sont fixes par rapport au plan des deux droites, le symbole deviendra K_2.

Le symbole de deux droites tournant autour d'un point fixe sera, on le voit aisément, égal à 2 K_2.

Un curvigraphe quelconque aura donc un symbole de la forme

$$(d_1 \mathrm{D}_1 + k_1 \mathrm{K}_1 + k_2 \mathrm{K}_2);$$

coefficient de simplicité : $d_1 + k_1 + k_2$.

[1] Application des méthodes géométrographiques au tracé mécanique des courbes planes. *L'Enseignement mathématique*, mars 1906, p. 143.

Les curvigraphes sans glissement renfermant moins de causes d'erreur, à cause de la difficulté de fabriquer de bonnes règles, nous prendrons d_1 comme cœfficient d'exactitude.

Nous allons donner quelques exemples.

2. — *Inverseur de Peaucellier*[1]. Soit ABCD un losange articulé, PBD un triangle isocèle également articulé, BD étant la base. Adjoignons-y un petit triangle isocèle de sommet R et de base AP.

Si P et R sont fixes, A décrit une circonférence et C une droite perpendiculaire à PR.

Symbole : $(4\,K_1 + 3\,K_2)$; Simplicité, 7 ; Exactitude o, [2].

Pour placer l'inverseur, la droite PR étant donnée en grandeur et en position, on a $2\,C_1$.

3. — *Contreparallélogramme.* Soient AB, CD les côtés non parallèles d'un trapèze isocèle, AC, BD étant les bases. La figure ABCD est un contreparallélogramme.

Si l'on fixe les sommets AB, le point de rencontre P des droites AD, BC, décrit une conique.

Symbole. $(2\,D_1 + 2\,K_1 + 2\,K_2)$; Simplicité: 6 ; Exactitude 2.

Pour placer l'appareil, on a $2\,C_1$.

4. — *Ellipsographe.* — Si deux droites égales, OO′ et O′A articulées sont telles que O reste fixe et que A décrive une droite OA, tout point de O′A décrit une ellipse, sauf les points qui se trouvent sur la circonférence O′ (OO′).

Symbole : $(D_1 + K_1 + K_2)$; Simplicité, 3; Exactitude, 1.

Pour placer l'appareil, on place d'abord O $\quad C_1$

on fait suivre à OB la direction du grand axe $\quad C_1$

On fait $OO' = O'A = a$. $\quad 2C_1$

5. *Parabolographe.* — L'appareil se compose d'une tringle fixe AB (directrice) et d'un losange CDEF articulé dont un point F est fixe (foyer) et dont un autre D glisse sur AB.

Un angle droit GDH a un côté DG qui glisse sur AB.

L'intersection H de DH et de CE décrit la parabole.

Symbole : $(8\,D_1 + 3\,K_1 + 2\,K_2)$; Simplicité 13; Exactitude 8.

---

[1] Voyez : NEUBERG. Sur quelques systèmes de tiges articulées, tracé mécanique des lignes. Liège, 1886.

[2] Il ne faut pas oublier qu'il s'agit, en réalité, du cœfficient d'inexactitude.

Pour placer l'appareil, on place F C_1
puis AB $2C_1$

Op : ($3\ C_1$).

6. *Compas conchoïdal.* — Dans l'inverseur ABCDP de Peaucellier, si A décrit une circonférence passant par P, C décrit une droite perpendiculaire à PO, O étant le centre de la circonférence passant par A et P.

Soit E le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur PO. Une barre rigide FF′ est invariablement liée à angle droit à PO en E, et l'on a EF = EF′. Si l'on fixe C, et que E décrit une ligne quelconque, F et F′ décrirons les conchoïdes.

Symbole ($5\ K_1 + 2\ K_2$) ; Simplicité 7.

En particulier, si E décrit une droite, F décrit la conchoïde de Nicomède, le symbole du curvigraphe devient ($1 D_1 + 5\ K_1 + 2\ K_2$), simplicité 8, exactitude 1.

Symbole de placement $3\ C_1$.

Si E est invariablement lié à un point fixe O′, les points F et F′ décriront un limaçon de Pascal ; le symbole est ($6\ K_1 + 3\ K_2$), simplicité 9.

Symbole de placement $2\ C_1$?

En général, si E parcourt une ligne plane algébrique d'ordre n, le symbole du curvigraphe sera ($D_n + 5\ K_1 + 2\ K_2$) ; simplicité 8, exactitude 1.

7. *Compas cissoïdal.* — Soit ABCDP un inverseur de Peaucellier.

Fixons le point A et faisons, au moyen d'une bride OP, parcourir au point P la circonférence O ($OA = c$).

Le point C décrit une cissoïdale.

Symbole: ($4\ K_1 + 3\ K_2$) ; simplicité, 7.

Symbole de placement, $2\ C_1$.

Soit p la puissance de l'inverseur ($p = PA \times PC$).

Si $$p = 4\ c^2,$$
le point C décrit la cissoïde de Dioclès.

Si $$p = 2\ c^2$$
le point C décrit une strophoïde.

Si $$p = c^2$$
le point C décrit la trisectrice de Maclaurin.

8. *Génération de Newton.* — On connaît la célèbre généra-

tion des coniques donnée par Newton et que Steiner qualifiait plaisamment de « machine à vapeur ». Si deux angles constants AOB′, A′O′B′ tournent autour de leur sommet et que B et B′ parcourent une même droite, l'intersection des côtés OA et O′A′ décrit une conique passant par A et A′. B et B′ décrivent une droite *d*. $3\,D_1$

L'intersection C de OA et de O′A′ décrit OA et OA′ $2D_1$

OA et O′A′ tournent autour de O et O′ $2\,K_2$

Symbole : $(5\,D_1 + 2\,K_2)$; Simplicité 7 ; Exactitude 5. Symbole de placement $2\,C_1$.

On voit que cette génération est loin d'être la plus simple[1].

Mai 1906.

L. Godeaux (Ath., Belgique.)

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE POUR DÉTERMINER LES ORBITES DES PLANÈTES ET DES COMÈTES.

Les méthodes de détermination des orbites donnent lieu à des calculs fort compliqués et dénués de symétrie. Il en est ainsi à cause de la nécessité d'adapter les formules au calcul numérique. Lorsqu'on veut seulement montrer en quoi consiste la méthode, il y a je crois avantage à procéder différemment. C'est ce que je vais faire pour la méthode donnée par Laplace.

Considérons un astre (planète ou comète) tournant autour du soleil.

Nous observons cet astre de la Terre. Il s'agit de déduire de ces observations les éléments de l'orbite.

Lorsqu'on a la position de l'astre à l'époque t, et sa vitesse en grandeur et direction, sa trajectoire est déterminée. Soit

[1] D'après notre critérium.

μ le coefficient d'attraction du soleil, V la vitesse de la planète, r sa distance au soleil, a le demi grand axe de son orbite; le théorème des forces vives donne:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

μ est connu, *parce qu'on suppose la masse de la planète négligeable par rapport à celle du soleil.*

V et r étant connus, cette formule donne a.

Le problème revient alors à déterminer une conique connaissant un foyer, une tangente et son point de contact, et la longueur de l'axe focal. C'est là un facile problème de Géométrie.

Pour déterminer l'orbite d'un astre il s'agit de trouver sa position et sa vitesse à une époque donnée, c'est-à-dire les 3 coordonnées x y z de l'astre, et les dérivées par rapport à t de ces 3 coordonnées, l'origine étant supposée le centre du soleil.

J'appelle r la distance de l'astre au soleil; ρ sa distance à la terre. Laplace appelle ρ la projection de cette distance sur le plan de l'écliptique, nous aurons plus de symétrie dans les calculs en nommant ρ cette distance elle même.

Le plan de xy est supposé être le plan de l'écliptique, en sorte que la terre est dans ce plan. Nous nommerons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la terre, R sa distance au soleil.

Considérons le vecteur joignant la terre à l'astre. Sa longueur est ρ; nommons u, v, w les cosinus directeurs de la direction. Tout ce qu'on peut observer de la terre, ce sont les valeurs de u, v, w à différentes époques. On pourra donc calculer u, v, w en fonction du temps, par l'une des méthodes d'interpolation connues; u, v, w étant connues en fonction de t, on connaîtra pour l'époque considérée les valeurs de u, v, w, de leurs dérivées u', v', w', de leurs dérivées secondes u'', v'', w'', et même des dérivées d'ordre supérieur si cela est nécessaire.

Lorsque w n'est pas identiquement nul, c'est-à-dire quand le plan de l'orbite n'est pas confondu avec celui de l'écliptique, il suffit de connaître les dérivées jusqu'au 2e ordre, comme on va le voir.

Les projections du vecteur ρ sont $x - x_0$, $y - y_0$ et z et aussi $u\rho$, $v\rho$, $w\rho$, on a donc

$$(1) \qquad x = x_0 + u\rho, \quad y = y_0 + v\rho \quad z = w\rho.$$

d'où en dérivant deux fois par rapport à t et représentant les dérivées par des lettres accentuées

$$(2) \qquad \begin{cases} x'' = x_0'' + u''\rho + 2u'\rho' + u\rho'', \\ y'' = y_0'' + v''\rho + 2v'\rho' + v\rho'', \\ z'' = w''\rho + 2w'\rho' + w\rho''. \end{cases}$$

D'ailleurs la loi de l'attraction universelle donne :

$$(3) \qquad x'' = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad y'' = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad y'' = -\frac{\mu z}{r^3},$$

et aussi :

$$(4) \qquad x_0'' = -\frac{\mu x_0}{R^3}, \quad y_0'' = -\frac{\mu y_0}{R^3},$$

après avoir dans les formules (3) remplacé x, y, z par leurs valeurs de tirées de (1) portons les valeurs de x'', y'', z'', x_0'', y_0'', z_0'' dans le système (2). Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho\left[u'' + \mu\frac{u}{r^3}\right] + 2\rho' u' + \rho'' u = \mu x_0 \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right], \\ \rho\left[v'' + \mu\frac{v}{r^3}\right] + 2\rho' v' + \rho'' v = \mu y_0 \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right], \\ \rho\left[v'' + \mu\frac{w}{r^3}\right] + 2\rho' w' + \rho'' w = 0. \end{cases}$$

On a ainsi 3 équations linéaires en ρ ρ' ρ''. Le déterminant des inconnues est :

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u'' & u' & u \\ v'' & v' & v \\ w'' & w' & w \end{vmatrix};$$

comme on le voit facilement, en retranchant de la 1[re] colonne les éléments de la 3[e] multipliés au préalable par $\frac{\mu}{r^3}$.

Ce déterminant ne peut être nul que s'il y a entre u, v, w une relation de la forme :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

C'est là une proposition bien connue, de la théorie des équations différentielles linéaires. Si cette relation avait lieu. c'est que la planète serait dans un plan fixe passant par le centre de la terre. Ceci ne peut avoir lieu que si la planète a une inclinaison nulle sur le plan de l'écliptique ; $w = 0$. [La détermination de l'orbite dans ce cas est compliquée ; elle exige au moins quatre observations. Les ouvrages que je connais traitant de ce sujet n'envisagent pas ce cas.]

Résolvons les équations (5) par rapport à ρ, on trouve

$$\rho = K\left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right], \tag{7}$$

en posant :

$$K = \frac{\mu}{\Delta}\left[x_0(wv' - vw') + y_0(uv' - vu')\right]. \tag{8}$$

L'équation (7) va nous permettre de calculer ρ.

Pour faire ce calcul, Laplace se sert du triangle S T P, c'est-à-dire du triangle ayant pour sommets le soleil, la terre et la planète.

L'angle en T est connu. Le vecteur TP a pour cosinus directeurs u, v, w, le vecteur TS a pour cosinus directeurs $-\frac{x_0}{R}$, $-\frac{y_0}{R}$, zéro ;

donc

$$\cos T = -\frac{ux_0}{R} - \frac{vy_0}{R}. \tag{8}$$

On a :

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos T. \tag{9}$$

L'équation (7) s'écrit :

$$r^3(K - \rho R^3) = KR^3 \tag{7 bis}$$

et élèvant au carré et remplaçant r^2 par sa valeur (9) on a une équation en ρ du 7° degré qu'il faut résoudre.

La méthode de Gauss est préférable; elle consiste à prendre pour inconnue l'angle en P du triangle TSP.

On a :

$$\rho = R\,\frac{\sin(P+T)}{\sin P}, \qquad r = R\,\frac{\sin T}{\sin P}.$$

en portant dans l'équation (7) on obtient une équation de la forme

$$\sin^4 P = \alpha \sin P + \beta \cos P,$$

α et β étant des constantes connues.

En posant $\frac{\beta}{\alpha} = tg\,\varphi$, $\alpha^2+\beta^2=s^2$, on a:

$$\sin^4 P = s \sin(P+\varphi). \tag{10}$$

On est ainsi ramené à la résolution de cette équation.

P étant connu, on calcule ρ; puis ρ étant connu, les équations (5) donnent $\frac{d\rho}{dt}$ ou ρ'; pour celà on multiple la 1re par u', la seconde par v', la troisième par w', et on ajoute.

On obtient ainsi, en observant que d'une part $u^2+v^2+w^2=1$, et que par suite $uu'+vv'+ww'=0$, et que, d'autre part, on a trouvé

$$\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} = \frac{\rho}{K}.$$

on obtient, dis-je, l'équation:

$$\rho(uu''+vv''+ww'') + 2\rho'(u'^2+v'^2+w'^2) = \frac{\mu\rho}{K}(u'x_0+v'y_0)$$

ρ étant connu, cette équation donne ρ'.

On trouve ensuite x, y, z à l'aide des formules (1) puisque ρ est connu. Par dérivations des mêmes formules on a les dérivées de x, y, z, puisque ρ' est connu.

On obtient donc bien la position et la vitesse de la planète à l'époque considérée.

Le problème est ainsi résolu.

J. Richard (Dijon).

GABRIEL OLTRAMARE

1816-1906

Bien que le professeur G. Oltramare comptait au nombre des nonagénaires de sa ville natale, la nouvelle de sa mort, survenue le 10 avril dernier, a surpris tous ses amis et ses anciens élèves. Il semblait que ce vénéré vieillard, demeuré si robuste de corps et d'esprit, devait rester encore longtemps au milieu de nous. Ce qui subsiste maintenant, c'est le souvenir de cette originale figure, et il ne s'effacera pas de la mémoire de ceux qui ont connu cet homme excellent et professeur éminent.

Gabriel Oltramare naquit à Genève le 19 juillet 1816 — il avait donc atteint sa quatre-vingt-dixième année, comme le mathématicien genevois Simon l'Huillier, l'un de ses prédécesseurs à l'ancienne Académie. Dès l'âge de dix ans, il montra des dispositions particulières pour les mathématiques. Après avoir passé successivement par le Collège et l'Académie, il partit pour Paris où il fit des études de mathématiques supérieures. Reçu licencié ès sciences mathématiques en Sorbonne, en 1840, il ne tarda pas à entrer en relations scientifiques avec plusieurs savants français, notamment avec Cauchy, Poisson et Arago. Il interrompit son séjour à Paris durant un an, en 1843, pour aller en Egypte où il était appelé à diriger l'éducation d'Achmel Pacha, fils d'Abraham Pacha.

Rentré à Genève en 1848, il était nommé, le 18 novembre de la même année, professeur de mathématiques supérieures à l'Académie. Il occupa cette chaire sans interruption jusqu'à la fin du semestre d'été 1900 et remplit pendant de nombreuses années les fonctions de Doyen de la Faculté des Sciences dont il fut un administrateur devoué.

Les travaux de G. Oltramare appartiennent principalement aux domaines de la théorie des nombres, de l'algèbre et de l'analyse supérieures ; on lui doit en outre des Notes d'Astronomie et de Météorologie. Ce sont d'abord des recherches sur le calcul des résidus ; elles ont été publiées dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris et dans les *Mémoires des Savants étrangers* en 1841. Puis viennent, de 1843 à 1856, une série de travaux d'un grand intérêt sur la théorie des nombres ; ils ont paru, pour la plupart, dans le *Journal de Crelle* et dans les *Mémoires de l'Institut national genevois*. Le plus important est sa « Note sur les relations qui existent entre les formes linéaires et les formes quadratiques des nombres premiers » (J. de Crelle, 1855). C'est une généralisation, par une méthode très originale, des résultats trouvés par Jacobi et Libri.

Un savant mathématicien et physicien a écrit dans cette Revue : « Je compte les heures que j'ai consacrées à la théorie des nombres parmi les plus belles de ma vie. » Oltramare pouvait en dire autant ; cette théorie, l'une des plus arides des mathématiques, était son sujet de prédilection. Jusqu'à ces dernières semaines il méditait toujours, au cours de ses longues promenades, sur quelque propriété des nombres qu'il s'empressait de communiquer à ceux de ses anciens élèves qui avaient le bonheur de le rencontrer.

En algèbre et en analyse supérieures, M. Oltramare laisse des recherches très remarquables, parmi lesquelles nous devons nous borner à signaler celles qui se rattachent à un calcul imaginé par lui en 1885, et auquel il attachait une grande importance.

Il s'agit d'une opération symbolique distributive, désignée par G *(généralisation)* et définie par les égalités

$$G(A + B) = GA + GB \; ; \quad Gu^{\alpha} v^{\beta} \ldots = \frac{\partial^{p} \Phi}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \ldots} \text{ avec } \alpha + \beta + \ldots = p .$$

Prenons, pour simplifier, le cas d'une seule variable ; l'extension au cas de n variables est facile. Soit $\varphi(x)$ une fonction développée en série d'exponentielles [1].

$$\varphi(x) = \Sigma f(u)\, e^{ux} .$$

[1] Voir *Encyklopädie der math. Wiss.* II A, 11, p. 772, article de M. PINCHERLE.

Oltramare envisage cette fonction comme résultat d'une opération G effectuée sur e^{ux}, soit

$$Ge^{ux} = \Sigma f(u)\, e^{ux} = \varphi(x) .$$

On en déduit

$$Gu^n e^{ux} = D^n \varphi(x) .$$

En partant de là, il établit, dans son *Calcul de Généralisation* une méthode qui, dans bien des cas, peut fournir un précieux auxiliaire, principalement dans la détermination des intégrales et dans l'intégration des équations différentielles. Il faut ajouter toutefois que les transformations introduites par Oltramare ne sont pas d'une irréprochable rigueur, si l'on se place au point de vue des méthodes en usage aujourd'hui, et qu'il y a donc lieu d'en préciser les conditions dans chaque cas particulier.

Toutes les recherches sur le Calcul de généralisation ont été publiées dans les *Mémoires de l'Institut national genevois* et dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences* (1885-1898). Développées et perfectionnées dans la suite, elles ont été réunies d'abord sous le titre d'*Essai sur le calcul de généralisation,* Genève 1893 ; (traduit en russe, St-Pétersbourg, 1895), puis, en une nouvelle édition, entièrement refondue, publiée à Paris en 1899.

Mentionnons encore le traité d'arithmétique qui a paru en 1872, sous le titre de *Leçons de calcul;* calcul numérique.

Mais Oltramare n'était pas seulement un mathématicien très distingué ; c'était aussi un excellent professeur, un maître dans toute l'acception du mot. La chaire qu'il occupa comprenait le calcul différentiel et intégral, l'Algèbre, la Géométrie analytique, la Géométrie descriptive et le calcul des probabilités. Doué d'une remarquable énergie, qu'il a du reste conservée jusqu'aux derniers jours de sa vie, il savait intéresser ses auditeurs par un enseignement vivant et leur inculquer une bonne méthode de travail. Il fut un ami paternel et bienveillant pour tous ses élèves, leur prodiguant les avis et les conseils.

Telle fut la vie du savant et du professeur ; vie vouée tout entière à la science, à l'amitié et au développement scientifique de ses étudiants. Ce fut une vie à la fois belle et heureuse, qui restera un noble exemple pour ses nombreux élèves. H. FEHR.

Liste des publications de Gabriel Oltramare

rangées par ordre chronologique.

1. Recherches sur le calcul des résidus. Paris, *C. R.*, 1841, t. 12 p. 953; t. 13, p. 296; Paris, *Mém. Sav. Etr.*, 1841.
2. Note concernant une seiche observée sur le lac de Genève. Paris, *C. R.*, 1841, t. 13, p. 829.
3. Recherches sur la théorie des nombres. Paris, 1843, in-8°, 15 p.
4. Considérations générales sur les racines des nombres premiers, 14 p. in-4°. *Journ. de Crelle*, 1853, t. 45, p. 303-316.
5. Résolutions des congruences du troisième degré. *Journ. de Crelle*, 1853, t. 45, p. 316-346.
6. Note sur les séries décroissantes dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. *Journ. de Crelle*, 1853, t. 49, p. 345-348.
7. Mémoire sur la résolution de l'équation indéterminée $ax + bky = z(x^2 + ky^2)$. *Journ. de Crelle*, 1855. t. 49, p. 142-150.
8. Note sur les relations qui existent entre les formes linéaires et les formes quadratiques des nombres premiers. *Journ. de Crelle*, 1855, t. 49, p. 151-160.
9. Mémoire sur la détermination des racines primitives des nombres premiers. *Journ. de Crelle*, 1855, t. 49, p. 161-186.
10. Mémoire sur quelques propositions du calcul des résidus. Genève, *Inst. nat.*, 1855, t. 4, 15 p.
11. Sur les nombres inférieurs et premiers à un nombre donné. Genève, *Inst. nat.*, 1856, t. 4, 10 p.
12. Sur les quantités infinies. Genève, *Inst. nat.*, 1856, t. 4, 34 p.
13. Note sur la fonction $G_m = \frac{1,2.3\ldots\ldots m}{(m+1\ldots\ldots 2m)}$, *Inst. nat.*, 1856, t. 4, 1 p.
14. Sur les séries mixto-périodiques. *Inst. nat.*, 1857, t. 5, 24 p.
15. Note sur les formules algébriques du second degré qui déterminent une suite de nombres premiers. *Inst. nat.*, 1857, t. 5.
16. Mémoires sur les fonctions discontinues. *Inst. nat.*, 1863, t. 9, 19 p.
17. Sur l'existence d'une loi de répartition analogue à la loi de Bode ou de Titius pour chacun des systèmes de satellites de

Jupiter, de Saturne et d'Uranus. Paris, *C. R.*, 1870, t. 70, p. 739.
18. Leçons de calcul. Arithmétique. Genève, 1872, in-8°, 152 p.
19. Sur la transformation des formes linéaires des nombres premiers en formes quadratiques, Paris, *C. R.*, 1878, t. 87, p. 734, Genève, *Inst. nat.*, 1879, t. 14, 66 p.
20. Notice sur la constitution des nuages et la formation de la grêle. Paris. *C. R.*, 1879, t. 88, p. 818. Genève, *Arch. Sc. ph.*, 1879, t. 1, p. 487-501.
21. De la suspension des nuages et de leur élévation dans l'atmosphère. Paris. *C. R.*, 1879, t. 88, p. 1265.
22. Explication du bolide de Genève du 7 juin 1879. Paris, *C. R.*, 1879, t. 88, p. 1319.
23. Note sur la série qui résulte du développement de $\frac{x}{e^x - 1}$. *Assoc. franç.* Paris, 1881, p. 117-127.
24. Mémoire sur la généralisation des identités. Genève, *Inst. nat.*, 1886, t. 16, 109 p.
25. Extraits de divers mémoires relatifs au calcul de généralisation, *Assoc. franç.*, Grenoble 1885 (1), p. 89, 92, 94; Paris, 1889 (2), p. 145; Toulouse, 1887 (5), p. 75, 285; Marseille, 1891 (2), p. 66.
26. Essai sur le calcul de généralisation. Genève, 1893, in-4, 132 p. (autographié), traduit en russe; Pétersbourg, 1895.
27. Note sur le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale complète des équations linéaires aux différences et différentielles partielles. *Assoc. franç.*, Bordeaux. 1895.
28. Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos yx \, dx}{(a^2 + b^2x)^n}$. *Assoc. franç.* Bordeaux, 1895.
29. Mémoire sur l'intégration des équations aux différences mêlées. *Assoc. franç.*, Bordeaux, 1895.
30. Calcul de généralisation. Paris, Hermann, 1899, in-8°, 191 p.

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS [1]

A propos des questions 6 à 9.

Lettre de M. Gino Loria (Gênes).

Dans la très intéressante enquête de l'*Enseignement mathématique* sur la méthode de travail des mathématiciens on a reproduit presqu'uniquement les opinions des savants vivants. Dans vos « observations finales », à la fin du Questionnaire, vous avez fait ressortir l'intérêt qu'il y aurait d'obtenir des renseignements sur les mathématiciens disparus. Il y aurait en effet à glaner bon nombre de renseignements utiles en cherchant dans la correspondance, dans les discours et même dans les ouvrages des grands géomètres morts, comme cela a du reste été fait pour la question 1. Permettez-moi donc d'apporter deux faits à l'appui de cette remarque. Je serais heureux que mon exemple fût suivi par d'autres et que l'on parvint ainsi à former un utile complément à cette importante enquête.

Lagrange. — Dans le beau volume de C.-A. Bjerknes, Niels-Henrik Abel (Paris, 1885) il y a (p. 174-176) des détails très intéressants sur la manière de travailler de Lagrange. Holmboe, le maître d'Abel, les avait trouvés dans le journal de Lindenau et Bohnenberger. En voici le principal passage :

« Je n'étudiais jamais dans le même temps qu'un seul ouvrage; mais s'il était bon, je le lisais jusqu'à la fin.

« Je ne me hérissais pas d'abord contre les difficultés, mais je

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905 ; 8e année, n° 1, p. 43-48, n° 3, p. 217-225, 293-310, 1906.

les lisais pour y revenir ensuite vingt fois s'il le fallait; si après tous ces efforts, je ne comprenais pas bien, je cherchais comment un autre géomètre avait traité ce point-là.

« Je ne quittais point le livre que j'avais choisi sans le savoir, et je passais tout ce que je savais bien quand je le rencontrais de nouveau.

« Je regardais comme assez inutile la lecture de grands traités d'analyse pure; il y passe à la fois un trop grand nombre de méthodes devant les yeux. C'est dans les ouvrages d'applications qu'il faut les étudier : on y juge de leur utilité, et on y apprend la manière de s'en servir, selon moi, c'est aux applications qu'il convient de donner son temps et sa peine; et il faut se borner en général à consulter les grands ouvrages sur le Calcul, à moins qu'on ne rencontre des méthodes inconnues ou curieuses par leurs usages analytiques.

« Dans mes lectures, je réfléchissais principalement sur ce qui pouvait avoir guidé mon auteur à telle ou telle transformation ou substitution et à l'avantage qui en résultait; après quoi je cherchais si telle autre n'eût pas mieux réussi, afin de me façonner à pratiquer habilement ce grand moyen d'analyse.

« Je lisais surtout la plume à la main, développant tous les calculs et m'exerçant sur toutes les questions que je rencontrais; et je regardais comme une excellente pratique celle de faire l'analyse des méthodes et même l'extrait des résultats quand l'ouvrage était important ou estimé.

« Dès mes premiers pas j'ai cherché à approfondir certains sujets pour avoir occasion d'inventer, et de me faire autant que possible des théories à moi sur les points essentiels, afin de les mieux graver dans ma tête, de me les rendre propres, et m'exercer à la composition.

« J'avais soin de revenir fréquemment aux considérations géométriques, que je crois très propres à donner au jugement de la force et de la netteté.

« Enfin je n'ai jamais cessé de me donner chaque jour une tâche pour le lendemain. L'esprit est paresseux; il faut prévenir sa lâcheté naturelle et le tenir en haleine pour en développer toutes les forces et les avoir prêtes au besoin; il n'y a que l'exercice pour cela. C'est encore une excellente habitude que celle de faire, autant qu'on peut, les mêmes choses aux mêmes heures, en réservant les plus difficiles pour le matin. »

HELMHOLTZ. — A l'occasion du dîner qu'on lui donna pour fêter sa 70me année, HELMHOLTZ a donné des détails extrêmement remarquables sur les conditions où il fit ses principales découvertes. C'est un passage bien beau que je transcris textuellement n'ayant pas le courage de le traduire, de peur de le gâter.

« Da ich aber ziemlich oft in die unbehagliche Lage kam, auf günstige Einfälle harren zu müssen, habe ich darüber, wann und wo sie mir kamen, einige Erfahrungen gewonnen, die vielleicht Anderen noch nützlich werden können. Sie schleichten oft genug still in den Gedankenkreis ein, ohne dass man gleich von Anfang ihre Bedeutung erkennt; später hilft dann zuweilen nur noch ein zufälliger Umstand, um zu erkennen, wann und unter welchen Umstände sie gekommen sind; sonst sind sie da, ohne dass man weiss woher. In anderen Fällen aber treten sie plötzlich ein, ohne Anstregung, wie eine Inspiration. So weit meine Erfahrung geht, kamen sie nie dem ermüdenden Gehirne und nicht am Schreibtisch. Ich musste immer erst mein Problem nach allen Seiten so viel hin- und hergewendet haben, dass ich alle seine Wendungen und Verwickelungen im Kopfe überschaute und sie frei ohne zu schreiben, durchlaufen konnte. Es dahin zu bringen, ist eine längere vorausgehende Arbeit meistens nicht möglich. Dann müsste, nachdem die davon herrührende Ermüdung vorübergegangen war, eine Stunde vollkommener körperliche Frische und ruhigen Wohlgefühls eintreten ehe die guten Einfälle kamen. Often waren sie wirklich des Morgens bei Aufwachen da. Besonders gern aber kamen sie bei gemächlichen Steige über waldige Berge in sonnigem Wetter. Die kleinsten Mengen alkoholischen Getränks aber schienen sie zu verscheuchen. (*Vorträge und Reden*, IV. Aufl. 1896, I. Bd., p. 15). »

Note de la rédaction. — *L'abondance des matières nous oblige à remettre à un prochain numéro la suite de la publication des résultats de l'Enquête.*

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Vues stéréoscopiques pour l'enseignement de la Géométrie.

1. — Dans une petite note, insérée dans le dernier numéro (p. 317), nous avons attiré l'attention des professeurs sur l'emploi du stéréoscope pour développer chez les élèves l'intuition de l'espace. Elle nous a valu de nombreuses lettres dans lesquelles nos correspondants insistent à leur tour sur le parti que l'on peut tirer de cet appareil; quelques-unes répondent en outre à notre demande

de renseignements sur ce qui a été édité dans ce domaine. Ce sont les lettres de MM. Berdellé (Rioz, Htę-Saône), Crelier (Bienne), Greenhill (Londres), Linsenmann (Munich), Prieur (Besançon), Saint-Loup (Vuillafans, Doubs), Stiner (Winterthour), F. J. Vaes (Rotterdam).

L'emploi du stéréoscope dans l'enseignement a déjà été préconisé à plusieurs reprises, en Allemagne et en France. Il existe même, depuis plus de quarante ans, des vues destinées à l'enseignement de la Géométrie et de la Cristallographie. Plusieurs de ces collections sont aujourd'hui épuisées et il est à désirer qu'il se fasse de nouvelles figures dans lesquelles on tiendrait compte des procédés modernes de reproduction et des besoins actuels des divers degrés de l'enseignement mathématique. Les résultats obtenus sont encourageants, ainsi que cela ressort des lettres que nous avons reçues, et il faut espérer que les essais se généraliseront de plus en plus. Cela est d'autant plus facile que les stéréoscopes à main se trouvent déjà en nombre suffisant dans beaucoup d'établissements scolaires. Nos lecteurs peuvent facilement se rendre compte *de visu* de ce que donne l'appareil en examinant les deux vues dont il est question dans la note ci-après de M. Stiner et dont un exemplaire a été encarté dans le présent numéro.

Voici maintenant un premier aperçu bibliographique. Nous le ferons suivre d'une description des principales collections.

2. — *Lettre de M. Stiner.* — On trouve des vues stéréoscopiques de figures géométriques dans les ouvrages suivants :

Wheatstone Ch., *Beiträge zur Physiologie des Gesichtssinnes*, I. Teil ; Ueber einige merkwürdige und bis jetzt unbeobachtete Erscheinungen beim Sehen mit beiden Augen. Uebersetzt von D^r A. Franz *Annalen der Physik und Chemie* von Poggendorf. I. Ergänzungsband, Leipzig 1842.

Helmholtz, *Handbuch der physiologischen Optik*, Leipzig 1856-66.

Steinhauser A., *Ueber die geometrische Construction der Stereoskopenbilder*, Graz 1870.

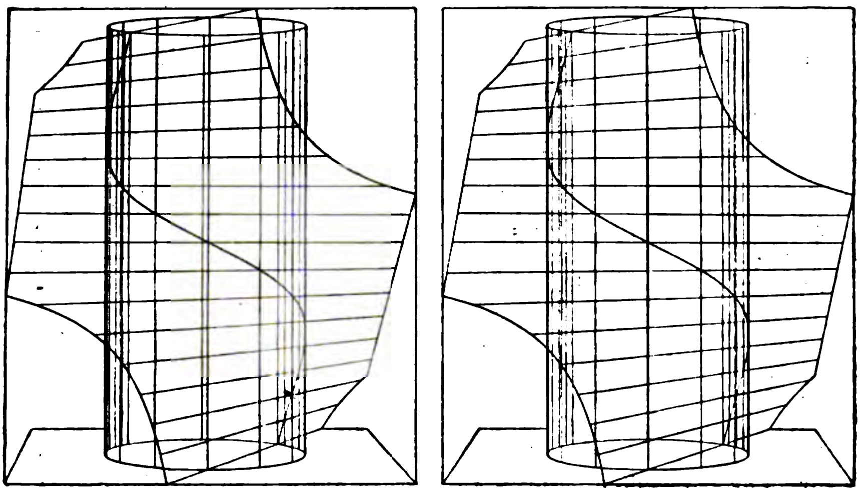
« En ce qui concerne plus particulièrement les publications destinées à l'enseignement, dans le sens de la question posée par M. le prof. Fehr, nous mentionnons :

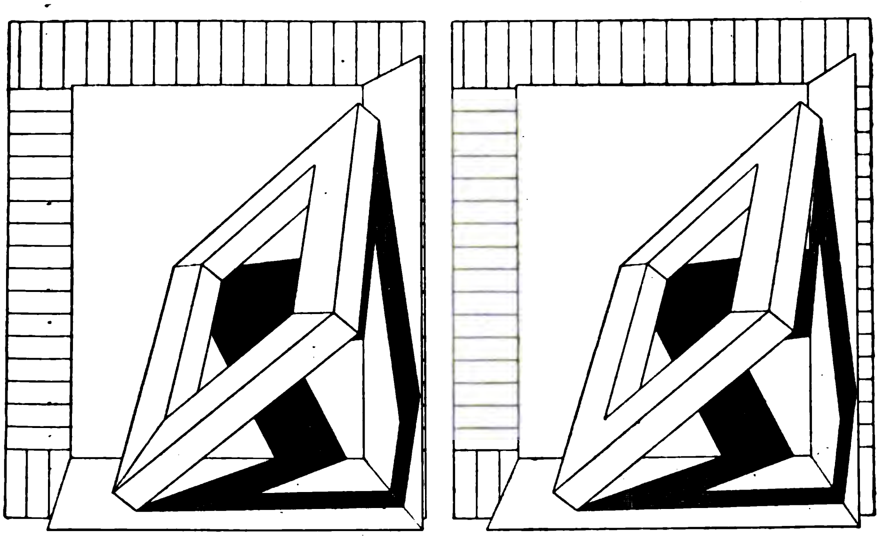
Eltzner C. H., *Das Stereoscop*, eine Sammlung von 28 Tafeln mathemat. Kristallkörper und Flächen stereoscopisch dargestellt, Leipzig 1864.

Brude A., *Stereoskopische Bilder aus der Stereometric.* Bezogen auf den Cubus und entnommen dem Werke desselben Verfassers: « Das Zeichnen der Stereometric, » Stuttgart 1872.

Steinhauser A., *Stereoskopische Wandtafeln*, Carl's Repertorium der Experimentalphysik Bd. XII, München 1877.

« Dans mon enseignement de Stéréométrie et de Géométrie descriptive au Technicum, j'emploie depuis un certain temps déjà, des vues stéréoscopiques établies les unes par construction, les autres d'après la photographie de modèles. J'en ai fait l'objet





d'une communication à la réunion annuelle de l'Association suisse des maîtres de mathémathique en 1903. Sur l'invitation de M. le prof. Fehr je présente ici deux exemples empruntés à la dite conférence. Une publication peu étendue est en ce moment en préparation.

« Les deux modèles sont construits pour une distance de 6,5 cm. entre les deux yeux, ceux-ci étant à une distance D = 24 cm. du plan de l'image. Ces vues peuvent donc être regardées sans stéréoscope ; on peut introduire une séparation de manière à ce que chaque œil ne voie qu'une image.

« Pour que les vues soient faciles à saisir et produisent l'effet voulu, il est indispensable que leur construction soit faite avec une grande exactitude et beaucoup de soin. A cet effet nous avons eu recours à un plan auxiliaire parallèle au plan de l'image et situé à une distance Da = 240 cm. Les perspectives obtenues sur ce plan sont des figures semblables à celles du plan D, le rapport de similitude était $^1/_{10}$; elles sont ensuite réduites aux dimensions définitives par le moyen de la photographie.

« Pour l'exemple ci-joint concernant *l'ombre portée par un cadre rectangulaire* sur des plans rectangulaires, avec les conventions usuelles, on a fait les hypothèses suivantes : horizon perspectif à 4,5 cm. au dessus du bord inférieur ; point de vue à droite, à 3 cm. à gauche du bord antérieur du troisième plan de projection, le premier et troisième plan étant limités par le plan auxiliaire Da : dimensions du cadre : longueur 45 cm., hauteur 60, largeur 9, épaisseur 4,5,

« L'autre modèle donne l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique avec la surface latérale d'un cylindre de révolution, l'intersection se décomposant en une génératrice commune et en une courbe gauche du 3^e ordre. Les valeurs 4,5^{cm} et 3^{cm} sont remplacées ici par 4 et 2 ; rayon du cylindre 15 cm., l'axe étant à 27,5 derrière Da ; les génératrices du paraboloïde sont dans des plans parallèles distants entre eux de 4 cm.

« Pour tout ce qui concerne la construction de vues stéréoscopiques de figures géométriques par le moyen de la photographie, on trouvera d'utiles indications dans l'ouvrage suivant: Steinhauser, A., Die theoretische Grundlage für die Herstellung der Stereoscopenbilder auf dem Wege der Photographie. Lechner, Vienne, 1897.

G. Stiner (Winterthour).

3. — *La Géométrie au stéréoscope*, par L. Saint-Loup, professeur de mathémathiques au Lycée Bonaparte, Paris, Hachette, 1886. — MM. Prieur (Besançon) et Berdellé (Rioz, Haute-Saône) nous signalent cet ouvrage, aujourd'hui épuisé, et qui consiste en un stéréoscope très rudimentaire avec 80 planches stéréoscopiques de Géométrie dans l'espace (n^{os} 1 à 40) et de Géométrie descriptive (n^{os} I à XL) ; le tout est accompagné d'une plaquette de 36 pages donnant les énoncés des théorèmes auxquels se rapportent les vues stéréoscopiques. M. Saint-Loup, qui est doyen hono-

raire de la Faculté de Clermont, ancien professeur aux Facultés de Strasbourg, de Poitiers et de Besançon, est maintenant en retraite aux environs de Besançon. « Il a fait dans cette ville, nous écrit M. Berdellé, plusieurs conférences pour la propagation de l'Espéranto. Je m'étonne qu'il n'ait pas eu l'idée de rééditer son ouvrage dans cette langue. Beaucoup de mathématiciens sont espérantistes ; pourquoi n'écrivent-ils pas dans cette langue, au moins, pour commencer, des traités très courts et très élémentaires. J'aurais déjà voulu le faire, mais le vocabulaire[1] m'en manque et j'ai éprouvé par expérience que je n'étais pas assez initié pour le former.

Si M. Saint-Loup réédite son ouvrage, il ferait bien d'y ajouter quelques planches pour illustrer les principes du stéréoscope et de la vision binoculaire.

4. — Collections Schlotke. — M. Schlotke, ancien directeur de l'Ecole industrielle et du Technicum de Hambourg, a publié, de 1870 à 1875, les trois collections suivantes :

I. *Stereoskopische Figuren.* Ein Anschauungsmittel zum Gebrauch beim Studium der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. Hambourg, Friederichsen et C^ie^., 1870. (*épuisé*).

II. *Die Hauptaufgaben der descriptiven Geometrie,* in stereoscopischen Figuren dargestellt. Hambourg 1871, prix : 2 M. 40.

III. *Krystallographie.* Stereoscopische Darstellung einer Reihe der wichtigsten Krystalle, der Combinationen derselben, etc.... Hambourg, 1873, prix : 4 M. 50.

I. Bien que la première série ne se trouve plus dans le commerce, nous croyons cependant devoir en donner un court aperçu d'après les indications qu'a bien voulu nous fournir M. Linsenmann, conservateur de la Collection mathématique de l'Ecole technique supérieure de Munich. Cette première série comprend 32 planches (8×16 cm^2) très bien dessinées et qui examinées au stéréoscope, donnent un excellent effet. Voici quelques exemples :

1) Une droite MN est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans le plan.

2) Soit la droite AB projetée sur le plan MN suivant AC ; toute droite DE située dans le plan MN et perpendiculaire à AC est perpendiculaire à AB. — *3)* Angle d'une droite et d'un plan. Démonstration de l'angle minimum... — *6)* Plus courte distance de deux droites. — *10)* Trièdre. Démonstration de la relation $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD > \sphericalangle BAD$. —... *13)* Trièdre et trièdre supplémentaire.—... *24)* Triangle sphérique. —... *28)* Cercles tracés sur la sphère terrestre. Axe et équateur. Longitude et latitude. — *29)* Cercles tracés sur la sphère céleste. Zénith, Nadir ; Axe, Azimut, etc... — *30)*

[1] Le vocabulaire a été établi par M. Bricard sous le titre : *Matematica Terminaro*, Paris, Hachette, 75 cent. (H. F.)

Equateur, écliptique, ascension droite, etc... — *31)* Horizon, Equateur, écliptique, etc...

Comme on le voit, cette collection contient d'excellents exemples, et ceux qui sont empruntés à la Géographie mathématique et à la Cosmographie ne sont pas les moins utiles.

II. — Nous avons sous les yeux les modèles destinés à l'enseignement de la *Géométrie descriptive* ; ils sont au nombre de 30 et embrassent l'ensemble du programme d'un enseignement élémentaire. La liste ci-dessous donne une idée du champ que l'on peut parcourir avec ces modèles.

1) Projection d'une droite sur 3 plans rectangulaires. — *2*) Vraie grandeur d'une droite AB par la rotation du plan projetant... *4*) Angle de deux droites. — ... *7*) *8*) et *9*) Intersection de deux plans. — ... *14*) Angle de deux plans. — ... *19*) *20*) et *21*) Intersection de polyèdres. — *22*) à *26*) Intersection de cônes et de cylindres. — *27*) Hyperboloïde de révolution ; plan tangent. — *28*) Paraboloïde hyperbolique. — *29*) Conoïde droit. — *30*) Voûte.

Les figures sont aussi très bien exécutées et, bien que la notation employée (les projections du point A sont a, a_1) ne soit plus en usage, elles peuvent encore rendre de bons services dans l'enseignement élémentaire.

III. — Signalons enfin la collection destinée à faciliter l'étude de la *Cristallographie* ; elle comprend 51 figures réparties sur 45 planches avec un court texte explicatif.

5. — Le stéréoscope a encore trouvé des applications fort intéressantes dans la *théorie des fonctions elliptiques*. M. Greenhill a présenté aux membres de la Société mathématique (voir *Bull. de la Soc. math.* XXIX, 1901), un « appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques ». Il s'agit d'exemples relatifs à la chaînette sphérique et à certaines courbes algébriques. Les figures au nombre de 14 ont été dessinées par Dewar et reproduites par la maison Amstrong et C° à Newcastle.

6. — Modèles Wiener. — M. Chr. Wiener a établi deux photographies stéréoscopiques du *modèle d'une surface du 3e ordre avec 27 droites*. Elles ont été éditées, 1869, avec un texte explicatif (8 p.), par la maison Teubner à Leipzig; prix : 2 M. 40.

7 et 8. — Mentionnons encore deux collections employées aux Etats-Unis et éditées l'une par la Maison Heath et C°, à Boston, l'autre par la Maison Underwood et Underwood à New-York. Nous comptons pouvoir les décrire dans un prochain numéro.

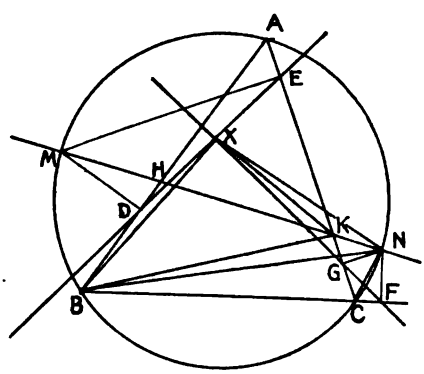
Nous y joindrons les notes et les renseignements bibliographiques que nos lecteurs voudront bien nous adresser.

H. Fehr.

Démonstration élémentaire d'un théorème sur le triangle.[1]

Il s'agit du théorème connu : *Etant donnés un triangle ABC et la circonférence circonscrite, les cercles déterminés par les pieds des perpendiculaires abaissées des points d'un même diamètre MN de cette circonférence sur les 3 côtés du triangle, passent par un point fixe.*

Les 2 lignes de Simson des deux extrémités M et N du diamètre sont 2 cercles particuliers parmi ceux que nous considérons. En vertu du théorème bien connu de Tucker, ces 2 lignes de Simson se coupent à angle droit sur la circonférence du cercle des neuf points du triangle donné. Par conséquent nous avons à prouver que le cercle passant par les pieds des 3 perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du diamètre MN sur les 3 côtés



passe par le point d'intersection X de ces lignes de Simson. Pour cette démonstration j'utiliserai 2 lemmes :

Lemme I. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur AB et AC, de sorte que DE est la ligne de Simson de M. De même, soient F et G les pieds des perpendiculaires abaissées de N sur BC prolongé et AC, de sorte que FG est la ligne de Simson de N. Représentons par X le point d'intersection de DE et FG. Les triangles MBN et EXG sont semblables.

Car, comme $\widehat{MBN}$ et $\widehat{CFN}$ sont égaux comme angles droits, et $\widehat{NMB} = \widehat{NCF}$, les triangles MBN et CFN sont semblables et comme

[1] Le manuscrit de cette note était déjà expédié à *la Rédaction* lorsque nous avons trouvé dans les *Nouv. Ann.* de nov. 1905, une démonstration moins élémentaire par M. FONTENÉ, p. 504-506. — T. HAYASHI.

$\widehat{CFN}$ et $\widehat{EXG}$ sont égaux comme angles droits, et $\widehat{CNF} = \widehat{CGF} = \widehat{LEG}$, les triangles CFN et EXG sont semblables.

Donc, les triangles MBN et EXG sont semblables.

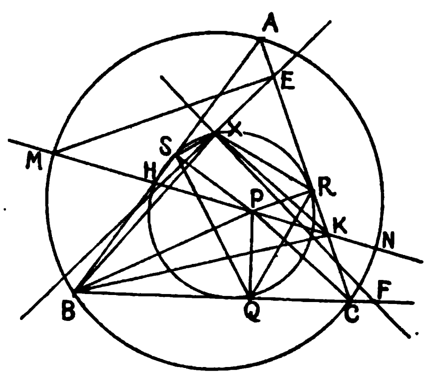
Lemme II. — Représentons par H et K les points d'intersection de MN avec AB et AC respectivement. Les triangles EMK et XBK sont semblables.

Car, puisque ME $\parallel$ NG, on a

$$\frac{KE}{KM} = \frac{KG}{KN} = \frac{EK + KG}{KM + KN} = \frac{EG}{MN} = \frac{EX}{MB} \text{ (Lemme I).}$$

Par suite : $\dfrac{KE}{EX} = \dfrac{KM}{MB}$ et $\widehat{KEX} = \widehat{KMB}$.

Donc les triangles KEX et KMB sont semblables.



Par suite : $\widehat{EKX} = \widehat{MKB}$.

D'où $\widehat{EKX} + \widehat{XKM} = \widehat{MKB} + \widehat{XKM}$,

C'est-à-dire $\widehat{EKM} = \widehat{XKB}$,

Et $\dfrac{KE}{KX} = \dfrac{KM}{KB}$; d'où $\dfrac{KE}{KM} = \dfrac{KX}{KB}$.

Par conséquent les triangles EMK et XBK sont semblables.

Démonstration du théorème. — Soit P un point quelconque situé entre H et K et soient PQ, PR, PS les perpendiculaires abaissées de P sur BC, CA, AB respectivement.

Puisque PR $\parallel$ ME et conséquemment les triangles EMK et RPK sont semblables, les triangles XBK et RPK sont semblables (Lemme II) ; d'où $\dfrac{KX}{KR} = \dfrac{KB}{KP}$ et $\widehat{XKR} = \widehat{BKP}$.

Donc les triangles XKR et BKP sont semblables.

Par suite : $\widehat{KRX} = \widehat{KPB}$; d'où $\widehat{XRA} = \widehat{HPB}$.

D'une manière analogue $\widehat{XSA} = \widehat{KPC}$.

En outre, puisque P, Q, C, R sont sur une même circonférence, $\widehat{PQR} = \widehat{PCR}$.

D'une manière analogue $\widehat{PQS} = \widehat{PBS}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\widehat{RQS} + \widehat{RXS} &= \widehat{PQR} + \widehat{PQS} + \widehat{XKA} + \widehat{XSA} + A,\\ &= \widehat{PCR} + \widehat{PBS} + \widehat{HPB} + \widehat{KPC} + A.\\ &= \widehat{BPC} + \widehat{HPB} + \widehat{KPC},\\ &= 2 \text{ angles droits.}\end{aligned}$$

Donc Q, R, X, S sont sur une même circonférence.

La démonstration dans le cas où P n'est pas situé entre H et K est très peu différente.

Ce qui précède a été suggéré par moi et complété par K. Kato.

T. Hayashi (Tokio).

La loi de « causation » et le postulatum d'Euclide.

I. — Si la géométrie, depuis Euclide, s'est constamment perdue dans la dialectique, et les combinaisons de mots masquant trop souvent la fausseté des raisonnements, c'est pour ne pas avoir mis à la base de son enseignement l'expérience directe, d'où découle la grande loi de la « causation ».

Il me faut bien créer ce mot de « causation » puisque la science latine n'a pas encore osé le faire, s'étant arrêtée à « causalité ». J'entends par loi de la causation, la loi expérimentale suivante :

« *Une même cause produit toujours les mêmes effets.* »

Nous vivons dans cette loi et elle est une des quelques grandes lois naturelles dont nous nous servons constamment, sans jamais la moindre hésitation, et sans pourtant oser franchement l'exprimer à la base de tout notre enseignement.

Je vais avoir cette franchise pour démontrer directement, et sans le secours des parallèles, que les trois angles d'un triangle valent deux droits.

Ainsi sera levé le doute que laisse planer, pour d'aucuns, sur la géométrie, le recours au postulatum d'Euclide, que nous démontrerons au lieu de l'admettre.

II. — 1re Proposition. — *Dans un même cercle, ou dans tous les cercles égaux, de mêmes angles au centre sous-tendent des arcs toujours les mêmes, et réciproquement.*

Cette proposition obéit à la loi de causation ; l'identité des cercles et des angles au centre, qui sont les causes, commande l'identité des arcs sous-tendus qui sont des effets.

Inversément la cause identique « arcs égaux » avec « cercles égaux » commande l'effet identique « angles au centre égaux ».

Il importe de remarquer que je n'ai pas parlé de la réciproque de la loi de causation ; je me suis gardé de dire que l'effet « arcs égaux » devait être engendré par des angles égaux dans des cercles égaux.

Car on ne peut dire qu'un effet donné ne peut être produit que par une cause unique.

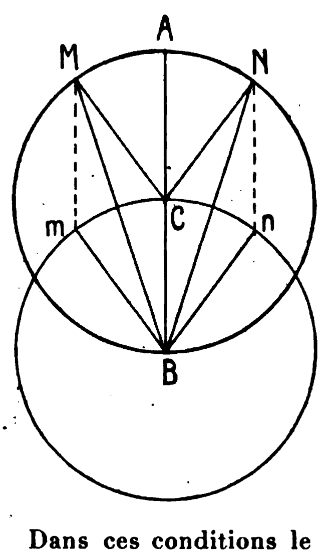
Si la loi de causation est absolue, sa réciproque ne l'est pas.

Remarquons encore que j'ai employé, à dessein, le mot identité comme plus expressif qu'égalité.

2me Proposition. — *Dans un cercle un angle au centre a pour mesure l'arc intercepté entre ses côtés.*

Cette proposition se démontre comme il est fait actuellement dans toutes les géométries.

3me Proposition. — *Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'angle interprété entre ses côtés.*



Soit un cercle de diamètre ACB.

a) Considérons d'abord un angle inscrit MBC dont un côté passe par le centre.

Prenons ensuite l'arc AN égal à l'arc AM et joignons NB ; l'angle ABN sera égal à l'angle ABM en vertu de la loi de causation.

Je vais faire voir que l'angle inscrit MBN est la moitié de l'angle au centre MCN.

Faisons glisser tout le cercle de diamètre ACB, dans le plan sur lequel il est tracé, de manière à ce que le centre C décrive le rayon CB et s'arrête en B.

Opérons ce glissement sans faire subir de rotation sur lui-même au cercle ACB.

Dans ces conditions le point A viendra en C, le point M en *m* et le point N en *n*, les trois points *m* C et *n* étant sur la circonfé-~~rence en~~ traits interrompus.

Je pourrais dire que la loi de causation provoque le parallélisme des droites Mm, AC et Nn ; je n'en ferai rien ; je me contenterai de dire que ces trois droites sont forcément égales, car elles sont les effets d'une même cause ; cette cause est le glissement du cercle, sans rotation sur lui-même.

Joignons Bm et Bn. L'angle au centre mBn est égal à MCN, puisque c'est ce dernier lui-même demeuré indéformé pendant tout le glissement du cercle.

Dès lors les triangles MBC et MBm sont égaux et isocèles; ils sont des effets d'une même cause; cette cause c'est l'égalité de leurs 3 côtés, MB commun, et MC = CB = Bm = Mm = le rayon du cercle.

Il en résulte l'égalité des angles mBM et CBM.

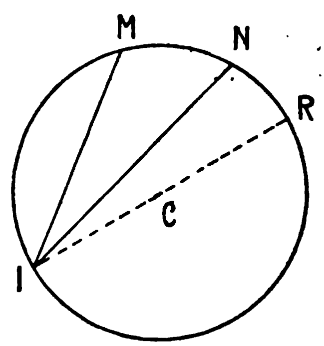
De même les triangles BCN et BNn sont égaux comme ayant les 3 côtés égaux, et l'on a les angles CBN et NBn égaux entre eux.

Comme l'angle ABM est égal à ABN, ainsi que nous l'avons constaté en débutant, il en résulte que l'on a, autour du point B, 4 angles égaux entre eux.

Donc l'angle inscrit MBN est égal à la moitié de l'angle mBn qui est lui-même égal à l'angle au centre MCN.

Donc aussi l'angle MBA (inscrit) est égal à la moitié de mBC ou de son égal MCA (au centre).

Il en résulte que l'angle inscrit MBA comme l'angle inscrit MBN ont pour mesure la moitié des arcs interceptés entre leurs côtés.



b) Considérons maintenant un angle inscrit quelconque MIN dont aucun côté ne passe par le centre de la circonférence.

Par le point I menons le diamètre ICR.

L'angle MIR et l'angle NIR, ayant un côté passant par le centre, ont pour mesures la moitié des arcs MR et NR.

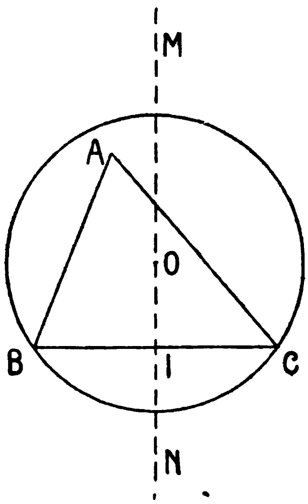
Donc leur différence, c'est-à-dire l'angle MIN, a pour mesure la moitié de la différence des arcs MR et NR, c'est-à-dire la moitié de l'arc MN.

4me PROPOSITION. — *Dans un triangle ABC la somme des 3 angles vaut 2 droits.*

Je puis élever au milieu I de BC, une perpendiculaire MIN.

En prenant un point quelconque O de cette perpendiculaire je puis, de O comme centre, avec OB = OC (causation) comme rayon, décrire une circonférence. Règle générale cette circonférence ne passera pas par A, troisième sommet du triangle. Supposons que notre circonférence ait le point A dans sa courbe.

Si on fait glisser le point O sur la droite MIN, et que dans chacune de ses positions on construise la circonférence passant par B et C, on voit que cette circonférence, partant de la position de O coïncidant avec I, s'enflera de façon *continue*, sans limite ; en fai-



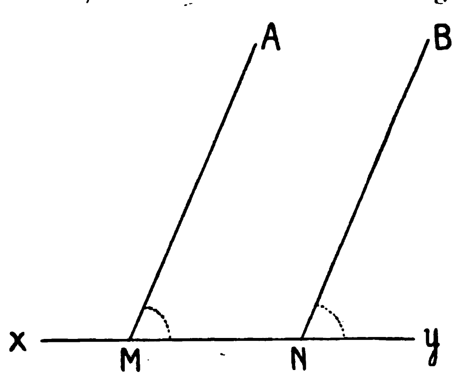
sant glisser O au dessus et en dessous de N, lac irconférence, dans son gonflement continu, couvrira tous les points du plan sans exception, et ne passera qu'une seule fois par chacun d'eux, exception faite pour B et C par lesquels passera toujours la circonférence extensible.

On VOIT ainsi qu'il existe toujousr une circonférence, *et une seule*, passant par A en même temps que par B et C.

Envisageons maintenant cette circonférence.

Les 3 angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle inscrit dans une circonférence ont pour mesure la moitié des arcs interceptés entre leurs côtés. A eux 3 ils interceptent toute la circonférence qui correspond à 4 angles droits (qu'on peut inscrire au centre si on veut). Donc la mesure des 3 angles du triangle quelconque ABC est la moitié de la circonférence, qui correspond à 2 droits.

c. q. f. d.



III. — J'aborde le *postulatum d'Euclide*.

Etant donné une droite XY, si en 2 points M et N de cette droite on construit 2 angles égaux, soit AMY = BNY, les deux droites MA et MB ne se rencontreront jamais.

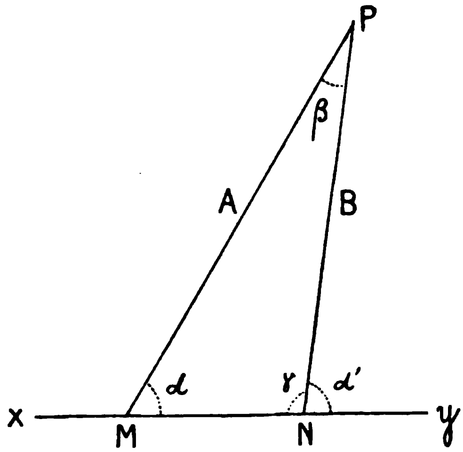
Supposons que les droites AM et BN puissent se rencontrer en un point P.

Dans le triangle MPN on aura :

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ droits.}$$

Mais $\gamma + \alpha' = 2$ droits, donc $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \alpha'$
D'où $\alpha + \beta = \alpha'$.

Mais encore $\alpha = \alpha'$ par construction.



Donc $\beta = 0$.
Donc les droites MA et NB ne se rencontrent pas.

c. q. f. d.

Commandant Lemaire (Bruxelles).

A propos de la rotation de la Terre [1].

Lettre de M. Andrault (Grenoble).

Réponse à M. Combebiac et à M. Richard.

Toute explication est une relation. — A voir l'importance que M. Combebiac attache à la possibilité d'une explication pour tout phénomène, j'avais pensé qu'il allait faire porter son effort sur ce point, et que cherchant à déterminer les conditions de validité d'une explication, il en arriverait à établir la nécessité de l'espace absolu. Maintenant j'ai lieu de croire, qu'il prend le terme dans son acception usuelle, vague et élastique. En ce sens, des explications, on en trouve toujours.

« J'ai ouï dire, écrit Condillac, qu'un physicien se félicitant « d'avoir un principe qui rendait raison de tous les phénomènes « de la chimie, osa communiquer ses idées à un habile chimiste. « Celui-ci ayant eu la complaisance de l'écouter, répondit qu'il ne « lui ferait qu'une difficulté, c'est que les faits étaient tout autres

[1] Voir *L'Enseig. math.* 8me année, pp. 150-155, 229-232, 311-315.

« qu'il ne les supposait. « Hé bien, reprit le physicien, apprenez-« les moi, afin que je les explique. »

Aussi ma réponse en cet endroit sera-t-elle brève.

1° Il y a des explications de toutes espèces, de bonnes, de mauvaises, de subtibles, de vagues, d'ingénieuses, de frivoles et même de fallacieuses « telle la théorie des marées » que j'ai précédemment exposée. Dans ces conditions, qu'il y en ait une de meilleure que les autres, c'est forcé; qu'elle leur soit de beaucoup supérieure, c'est remarquable; qu'elle soit d'une autre nature, c'est ce qu'il faudrait démontrer.

2° Qu'on explique par des faits ou par des lois, expliquer c'est toujours établir une relation entre deux ou plusieurs phénomènes. Toute explication comporte au moins deux bouts, l'expliquant et l'expliqué; elle est donc loin d'impliquer un absolu quel qu'il soit.

Toute force est une relation.— J'en dirai autant des forces. Elles sont comme les bâtons : il n'y en a pas qui n'aient qu'un seul bout. C'est au fond ce qu'exprime le principe de l'égalité entre l'action et la réaction. « Tout ce qui tire et presse est en même « temps tiré et pressé dit Newton. Si le cheval traîne la pierre « attachée par un cable, le cheval est arrêté par la pierre, car le « cable tendu; dans son effort pour se relâcher, attire également « le cheval vers la pierre, et la pierre vers le cheval. »

Si l'aimant attire le fer, le fer attire l'aimant; si le traîneau frotte sur la neige, la neige frotte sur le traîneau. Il n'est pas jusqu'à la pesanteur qui ne s'offre comme une relation entre deux termes, car, les corps en se dirigeant sur toute la surface de la terre vers le centre de celle-ci, indiquent en quelque sorte d'eux-mêmes que c'est du globe qu'émane la force qui les fait tomber, autrement dit que la pesanteur est une force qui s'exerce entre la terre et les corps.

Il peut être commode, et même parfois nécessaire de faire porter son attention sur un seul des bouts d'une force ; mais l'autre n'en existe pas moins, et fait partie intégrante de la notion de force telle que l'expérience journalière nous la fournit.

Dans les académies du moyen âge, on discutait, paraît-il, des problèmes dans le goût de celui-ci : « Etant donné un aveugle et « son chien, dire si c'est le chien qui tire l'aveugle, ou l'aveugle « qui retient le chien. » Voilà à quoi l'on risque de perdre son temps quand on sépare l'action de la réaction !

Les forces d'inertie s'exercent entre les corps et le repère de la dynamique. — Si toutes les forces sont des relations, pourquoi les forces centrifuges, et plus généralement les forces d'inertie feraient-elles exception ?

Elles se développent quand la vitesse d'un corps varie par rapport à un certain repère, et par rapport à celui-là seulement.

C'est ce qui m'avait fait écrire, au grand scandale de M. Combebiac, que les forces centrifuges sont relatives, comme le sont les mouvements.

J'ajoute maintenant : *les forces d'inertie sont des relations comme le sont les forces de toute espèce. Elles ont deux bouts; l'un est sur le corps, l'autre sur le repère.* J'y suis tout naturellement conduit, puisque le repère loin d'être étranger au phénomène y est intimement associé.

M. Combebiac ne s'étonnera donc plus — je l'espère du moins — de voir intervenir ce repère dans l'expression de la loi d'inertie, généralisée ou non.

Possibilité d'une explication des principes de la dynamique. — Et puisqu'aussi bien, nous touchons ici au cœur de la question, qu'il me soit permis de donner à ma pensée une forme plus concrète.

En fait, quel est le repère de la dynamique ? Peut-être le ciel étoilé, mais beaucoup plus probablement l'éther, ce milieu dans lequel tous les corps sont plongés, et dont ils sont imprégnés. Les forces d'inertie seraient donc, non des forces fictives comme on le dit souvent, mais des forces très réelles, s'exerçant entre l'éther et les corps dont la vitesse varie. On entrevoit ainsi la possibilité d'une explication des principes de la dynamique.

Chaque corps en se déplaçant dans l'éther produit un sillage analogue à celui que produit un bateau dans l'eau. Tant que le mouvement reste rectiligne et uniforme, le sillage reste le même, et grâce à des compensations tenant à la nature du milieu, celui-ci ne tend en rien à modifier le mouvement des corps. Mais, dès que la vitesse varie, il s'ensuit une perturbation, une déformation du sillage, entraînant une réaction sur le corps ; ce qui explique pourquoi une variation de vitesse ne peut jamais se produire que par l'intervention d'un agent extérieur.

Et, contrairement à l'opinion émise par M. Richard « l'existence de ces forces bizarres » entraînant les corps qui se déplacent par rapport à la terre se trouve expliquée. Et si leur existence rompt la symétrie entre la droite et la gauche, je ne vois pas comment M. Richard lui-même la rétablira : Le repère tourne par rapport à la terre — où s'il préfère, la terre tourne par rapport au repère, — et c'est cette rotation relative qui détruit la symétrie. Ni M. Richard, ni moi, n'y pouvons rien. Allons ! le relativisme a du bon ; il n'exclut pas l'explication, et je crois que jusqu'à nouvel ordre notre conception actuelle de la dynamique s'en accomode.

Le mouvement absolu est un fantôme créé par le langage. — Mais d'où procède donc cette croyance au mouvement absolu, croyance dont nous avons tant de mal à nous défaire ? Tout simplement du langage.

Nous avons, dès l'enfance, contracté l'habitude de parler du mouvement des corps, comme si ce mouvement leur appartenait en propre. Le langage n'en reste pas moins clair, puisqu'il est toujours sous entendu que le repère est la terre. Mais on ne le dit jamais, et l'omission du mot entraîne celle de la chose. Nous finissons par croire que le mouvement est réellement dans les corps, et que se mouvoir est une locution ayant une signification par elle-même. Ce serait méconnaître singulièrement l'influence du langage sur l'évolution de notre esprit que de s'en étonner.

Nous sommes ainsi amenés à nous poser à propos des corps célestes, de la terre, et même de tous les corps, des questions qui sous la forme qu'on leur donne n'ont de sens qu'à la condition que le repère puisse encore rester sous entendu, ce qui justement n'est plus le cas. Comme rien ne nous prévient que nous transportons les questions de cette forme en dehors de leur domaine de validité; nous nous attachons à les résoudre comme nous en avons résolu d'autres, et nous pensons pouvoir le faire avec le même succès. Habitués à triompher dans un domaine, sans nous rendre compte que c'est essentiellement le domaine du relatif, nous abordons sans sourciller, celui de la connaissance intime des choses, le domaine de l'absolu.

CHRONIQUE

Prix proposés par l'Académie royale de Belgique pour 1907.

Sciences mathématiques, pures et appliquées :

I. — Trouver en hauteur et en azimut les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale dans l'hypothèse de la non coïncidence des centres de gravité de l'écorce et des noyaux terrestres. (Prix : 800 francs).

II. — Entre les éléments de deux formes du second ordre (deux systèmes plans non superposés un système plan et une gerbe, deux gerbes de sommets différents) on établit une correspondance quadratique (« Verwandtschaft zweiten Grades » dans de sens de Reye. *Geometrie der Lage*, Vol. II. Chap. XII). Etudier les systèmes d'éléments qu'on déduit par jonction ou par intersection des couples d'éléments homologues des deux formes du second ordre. (Prix : 800 fr.)

Les manuscrits peuvent être écrit en français, flamand ou latin; ils doivent être anonyme avec devise et pli cacheté antenant le nom, et envoyé au secrétaire, Palais des Académies à Bruxelles, avant le 1er août 1907.

III. — Le *Prix Lagrange* (1200 fr.) sera décerné, en 1909, au meilleur travail mathématique ou expérimental sur la Terre (faisant avancer la connaissance mathématique de la Terre). La limite pour l'envoi des travaux est fixée au 31 décembre 1908.

89e Réunion de la Société helvétique des sciences naturelles; St-Gall, 1906.

Cette réunion, qui vient d'avoir lieu à St-Gall du 29 juillet au 1er août, était des plus intéressantes à tous les points de vue. Parmi les travaux présentés aux séances générales, nous mentionnons tout particulièrement la belle conférence de M. le Prof. Rosenmund (Zürich). On sait que le distingué professeur est l'auteur des travaux géodésiques du tunnel du Simplon. Il a parlé sur la mesure en longueur du tunnel au moyen des fils «d'invar». Nous avons pu admirer jusqu'à quel point l'exactitude mathématique peut être portée dans les travaux de cette envergure. L'écart moyen est $\frac{1}{1.000.000}$ de la longueur totale.

Dans les séances de section, les physiciens et les mathématiciens ont travaillé en commun. Voici la liste des sujets présentés:

1. Chappuis-Sarasin (Bâle): La valeur du litre d'après les nouvelles mesures. (en français)
2. Gruner (Berne): Sur les constantes de la radio-activité. (en allemand)
3. Mooser (St-Gall): Analyse des lois de Képler basée sur une cosmogonie théorique. (en allemand)
4. L. Crelier (Bienne): Géométrie synthétique des courbes supérieures. (en français)
5. T. Klingelfuss (Bâle): L'étincelle de fermeture dans les tubes Röntgen. — Sur un éclair particulier observé près de Bâle. (en allemand)
6. Mercanton (Lausanne): Photographies d'éclairs. — Magnétisme des argiles cuites. (en français)
7. Forel (Lausanne): Fata morgana. (en français)
8. Luc. de la Rive (Genève): Sur les électrons. (en français)
9. Kleiner (Zürich): Fusion du lithium. (en allemand)

Pour ce qui concerne spécialement les travaux mathématiques, nous pouvons ajouter que la conférence de M. Mooser a vivement intéressé l'auditoire d'autant plus que l'auteur est malheureusement aveugle. Les formules finales auxquelles il arrive pour la deuxième et la troisième loi de Képler sont les suivantes:

$$\text{II}^{e} \text{ loi :} \qquad up = vr\sqrt{\frac{1-2.e\cos\varphi}{1-2e\cos\varphi+e^2\cos^2\varphi}}$$

III^e loi : $$\frac{t^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{(1 - e^2)^3}{f(M + m)} .$$

Il résulterait de cette dernière que la troisième loi n'est pas exacte. Avant de pouvoir porter un jugement définitif il faut attendre un examen plus approfondi des bases adoptées par M. Mooser. On les trouvera dans un ouvrage que le conférencier fera paraître prochainement.

Le second travail mathématique a été présenté par l'auteur de ces lignes. La première partie paraîtra du reste dans *l'Enseignement mathématique*; la seconde sera publiée par les *Archives des sciences physiques et naturelles* de Genève.

L. Crelier, (Bienne).

Deuxième Congrès universel d'Esperanto, Genève, 28 août-6 septembre 1906.

Parmi les nombreux congrès qui ont eu lieu cette année, celui des espérantistes doit être compté au nombre de ceux qui offrent un intérêt et une importance particulièrement considérables, non seulement par sa grande portée sociale, mais aussi par les services qu'il rendra à la Science. L'expérience qui avait été faite l'an dernier à Boulogne vient d'être reprise à Genève avec un succès encore plus éclatant. Près de 1500 personnes, accourues des pays les plus divers, se sont entretenues pendant quelques jours de la manière la plus familière au moyen de la langue espéranto. Le public, qui était admis à la plupart des séances, a pu se rendre compte de la facilité avec laquelle les congressistes faisaient leurs conférences et leurs improvisations uniquement en espéranto. Sans doute la nécessité d'une langue auxiliaire internationale est aujourd'hui généralement reconnue et ce n'est guère que sa réalisation pratique qui pouvait laisser quelques doutes. Mais, après des expériences aussi concluantes que celle qui vient d'être répétée à Genève, ces doutes ne tarderont pas à disparaître.

Il n'y a pas lieu de donner ici un compte rendu détaillé du 2^e Congrès d'Esperanto. Nous nous bornerons à parler de la réunion des savants espérantistes. Il s'était constitué en effet une section parmi les membres cultivant les sciences mathématiques, physiques et naturelles. Cette *section scientifique* était présidée par M. le général Sébert, membre de l'Académie des Sciences de Paris. Après une discussion très intéressante, à laquelle ont pris part des savants de diverses nationalités, la section a adopté les deux vœux suivants :

1° *Que les savants utilisent constamment l'Esperanto pendant les congrès scientifiques internationaux.*

2° *Que les journaux internationaux acceptent des articles en Esperanto et ajoutent à chaque article en langue nationale un résumé en Esperanto.*

La Section scientifique a constitué un *Bureau international permanent* chargé plus particulièrement de suivre la rédaction des vocabulaires techniques spéciaux à chaque science, afin qu'il y ait une certaine unité de direction. Cette Commission sera présidée par M. le général Sébert; elle aura pour secrétaire M. Carlo Bourlet, professeur à l'Ecole des Arts et Métiers de Paris.

Ces décisions constituent un précieux encouragement pour les membres de la *Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale;* il faut espérer qu'ils aboutiront dans leurs démarches. Après l'imposante pétition réunie par la Délégation et le succès des congrès d'Esperanto, le moment paraît en effet venu où l'*Association des Académies* doit examiner la question d'une langue auxiliaire et de se prononcer sur le choix. H. Fehr.

Association suisse des maîtres de mathématiques.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Bâle*, le 20 octobre, sous la présidence de M. H. Fehr, professeur à l'Université de Genève. L'ordre du jour comprend les communications suivantes :

1° Les avantages que présente, dans l'enseignement des écoles moyennes, l'emploi de la division décimale de l'angle avec les logarithmes à quatre décimales (en allemand), par M. Otti (Aarau).

2° La mathématique pure et l'approximation (en français), par M. L. Kollros (Chaux-de-Fonds).

3° Sur certaines réformes dans l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles (en allemand), par M. R. Flatt (Bâle).

Ces communications seront suivies d'une discussion. Nous en rendrons compte dans notre prochain numéro.

Nominations et distinctions.

M. Alf. Ackermann, de la Maison Teubner, à Leipzig, a reçu le titre de docteur honoris causa de l'Université de Greifswald.

M. Carlo Bourlet est nommé professeur de Géométrie descriptive à l'Ecole des Arts et Métiers de Paris, en remplacement de M. Rouché, qui prend sa retraite.

M. E. W. Brown est nommé professeur de mathématiques à la Yale University, New Haven (E. U.).

MM. R. Castelnuovo et Cerruti, à Rome, et M. Capelli, à Naples, sont nommés membres du Reale Istituto Lombardo.

M. F. Enriques est nommé membre correspondant national de l'Académie dei Lyncei à Rome.

M. E. Kasner est nommé professeur extraord. à la Columbia University, New York (E. U.).

M. le Prof. Mertens (Vienne) obtient un prix de 5000 Mk. de l'Académie Royale des Sciences de Prusse pour ses travaux sur les équations cycliques.

M. P. Painlevé est nommé membre étranger de l'Académie dei Lyncei à Rome.

M. Picart, directeur de l'Observatoire, est chargé d'un cours d'Astronomie physique à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

M. H. Poincaré est nommé docteur honoris causa de l'Université de Dublin.

M. G. Scheffers, prof. de l'Ecole techn. sup. de Darmstadt, est nommé professeur ord. de Géométrie descriptive à l'Ecole techn. sup. de Charlottenbourg, en remplacement de G. Hauck, décédé.

M. S. E. Slocum, de l'Université de l'Illinois, est nommé professeur de mathém. appliquées à l'Université de Cincinnati (E. U.).

M. E. T. Whittaker, astronome, est nommé docteur honoris causa de l'Université de Dublin.

M. T. K. Whittemore est nommé professeur extraord. de mathématiques à la Havard University.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. Adler, pour la Géométrie descriptive, à l'Ecole techn. sup. de Vienne ; M. K. Bopp, pour les mathématiques, à l'Université de Heidelberg ; M. O. Perron, pour les mathématiques à l'Université de Munich.

Nécrologie.

G.-A. de Longchamps est décédé à Paris, le 9 juillet dernier, à l'âge de 64 ans.

D.-G. Lindhagen, astronome, secrétaire à l'Académie suédoise des Sciences est décédé à Stockholm à l'âge de 87 ans.

Maillard, professeur de mathématiques à la Faculté des Sciences de Poitiers.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1906-1907 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität.* — SCHWARZ : Differentialrechnung, 4; Uebungen; Synth. Geometrie, 4; Elementargeom. Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte; Seminar; Kolloquium. — FROBENIUS : Algebra, 4; Seminar. — SCHOTTKY : Integralrechn., 4; Uebungen; Allg. Funktionenth. 4, Seminar. — HETTNER : Bestimmte Integrale, 2. — KNOBLAUCH : Determinanten, 4; Krumme Flächen, 4; Raumkurven, 1. — SCHUR : Gewöhnliche Differentialglgn., 4. — LANDAU : Zahlentheorie, 4. — LEHMANN-FILHÉS : Analyt. Geometrie, 4. — FÖRSTER : Geschichte der mittelalterlichen Astronomie, 2; Kosmische Erkenntnis und psychische Probleme, 1; Theorie und Kritik der Raummessung, 2. — STRUVE : Sphär. Astronomie, 3; Uebgn. — BAUSCHINGER : Bahnbestimmung der Himmelskörper, 3; Uebungen. — RISTENPART : Th. der Finsternisse und Sternbedeckungen; Berechnung der Finsternisse von 1909. — SCHEINER : Einleitung in die Astrophysik II, 3; Astrophysikalisches Kolloquium. — HELMERT : Gradmessungen, 1; Methode der kleinsten Quadrate, 1. — MARCUSE : Allgemeine Himmelskunde mit Lichtbildern; Kolloquium über astronomische Geographie; Theorie und Praxis geographisch- und nautisch-astronomischer Ortsbestimmungen. — PLANCK : Allgemeine Mechanik, 4; Mathematisch-physikalische Uebungen. — NEESEN : Elementare Mechanik, 2. — WEINSTEIN : Mathematische Physik, 4. — VALENTINER : Kinetische Theorie der Gase, 2. — ASCHKINASS : Elemente der höh. Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. — GRÜNEISEN : Ueber Differentialgleichungen von Schwingungsvorgängen. — MEYER : Einführung in die moderne Maschinentechnik, 2; Exkursionen. — IHERING : Maschinenkunde mit Uebungen.

Bonn; *Universität.* — STUDY : Nicht-euklidische Geometrie, 4; Einl. in die analyt. Mechanik, 4, Seminar. — KOWALEWSKI : Infinitesimalrechnung II, 4; Uebungen; Th. der Fourierschen Reihen, 2; Geometrie der Zahlen, 2, Seminar. — LONDON : Elemente der analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 4; Uebungen: Darst. Geometrie II mit Zeichenübungen, 3; Seminar. — SCHMIDT : Einführung in die Algebra, 3; Determinanten, 2. — KÜSTNER : Th. der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 3; Topographie des Sonnensystems, 1. — MÖNNICHMEYER : Allgemeine Störungen, 2.

Breslau; *Universität.* — ROSANES : Uebgn. des math.-phys. Seminars, 1; Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Elem. der Theorie der Differentialgleichungen, 2. — STURM : Uebgn. des math.-phys. Seminars, 2; Zahlentheorie, 3; Geometrische Oerter höheren Grades, 3. — KNESER : Uebgn.

des math.-phys. Seminars, 2; Analyt. Mechanik, 4; Uebgn. über Mechanik, 2; Theorie der Fourier'sche Reihen und Integrale, 2 — Franz: Astron. Seminar, 2 (Planetenbahnrechnung); Astron. Kolloquium, 2; Mechanik des Himmels, II. Teil. Bewegung der Himmelskörper um ihren Schwerpunkt, 4; Theorie der Bahnrechnung der Planeten, 2. — Sackur: Einführung in die math. Behandlung der Chemie, 2.

Erlangen; *Universität.* — Gordan: Analyt. Geom. d. Ebene, 4; Zahlentheorie, 4; Uebgn. im math.-phys. Semin., 3.— Noether: Differential- und Integralrechnung I, 4; Bestimmte Integrale, u. Fourier'sche Reihen, 2; Algebr, Flächen, 2; Analyt. u. geometr. Uebgn — Reiger: Astrophysik, 1.

Freiburg im Br.; *Universität.* — Lüroth: Analyt. Geometrie d. Raumes, 4; populäre Astronomie, 2; Sem. — Stickelberger: Analyt. Geometrie d. Ebene u. Diff. rechn., 5; Funktionenth., 3; Sem. — Löwy: Diff. gleichgn., 3; Ueber den Zahlbegriff, 2; Uebgn. — Weingarten: Einl. in die Hydrodynamik, 4. — Leith: Elem. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes.

Giessen; *Universität.* — Pasch: Grundlagen der Analysis, 2; Analyt. Geometrie der Ebene, II. Teil, 4; Uebgn. des math. Seminars, 1. — Netto: Ellipt. Funktionen, 4; Zahlenth., 2; Uebgn. des math. Seminars, 1. — Grassmann: Differential- und Elem. der Integralrech., 4; Analyt. Mechanik. Teil, II, 3; Uebgn. zur analyt. Mechanik.

Göttingen; *Universität.* — Klein: Ellipt. Funktionen, 4. — Klein, Hilbert, Minkowski und Herglotz: Seminar ü. linear Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, 2. — Hilbert: Differential- und Integralrechnung II (mit Uebungen durch Carathéodory), 4; Mechanik der Kontinua, 4. — Schwarzschild: Rotation und Figur der Himmelskörper, 3; Astron. Seminar, 2. — Minkowski: Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, 4; Invariantentheorie, 2. — C. Runge: Darst. Geometrie, 4; Uebungen zur darst. Geometrie, 4. — Runge, Prandtl, Abraham: Anwendungen der part. Differentialgleichungen, 2. — Brendel: Die math. Technik des Versicherungswesens, 3; Uebungen im Seminar für Versicherungswissenschaft, 2. — Ambronn: Bahnbestimmungen für Kometen und Planeten, 3; Methode der kleinsten Quadrate, 1; Uebungen an Instrumenten der Sternwarte (f. Anf. u. Vorgeschr.) tägl.; Uebungen zur Berechnung von Kometen und Planetenbahnen. — Prandtl: Ausgew. Abschnitte aus der Dynamik, insbesondere der Maschinen, 3; Praktikum im Maschinenlaboratorium, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten auf dem Gebiet der Mechanik und Wärmelehre. — Zermelo: Elemente der analyt. Mechanik, 4; Mathem. Behandlung der Logik, 1. — Abraham: Partielle Differentialgleichungen der Physik, 4. — Bose: Einführung in die math. Behandlung der Naturwissenschaften, 3; Uebungen im Selbstanfertigen und Handhaben von Demonstrationsapparaten, 3. — Herglotz: Einf. in die analyt. Geometrie des Raumes, 2; Uebungen über ellipt. Funktionen, 2. — Carathéodory: Minimalprinzipien der Mechanik und Physik, 2; Uebungen in Integralrechnung, I.

Greifswald; *Universität.* — Thomé: Ellipt. Funktionen II, 4; Die hypergeom. Funktion, 2; Seminar. — Engel: Diff. u. Integralrechn. I, 4; Uebungen; Analyt. Geometrie des Raumes, 2; Th. der Transformationsgruppen, 4; Seminar. — Vahlen: Th. der Differentialgleichungen, 3; Uebungen. — Holtz: Mechanik und Molekularphysik. 1. — Starke: Mathematische Ergänzungen der Experimentalphysik — Schreber: Die Kraftmaschinen, 2.

Halle; *Universität.* — G. Cantor : Diff.- und Integralrechn. mit Uebgn. 5; Uebgn des math. Seminars. — Wangerin : Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendung in der math. Physik, 4; Variationsrechnung, 2; Sphär. Trigonometrie und math. Geographie, 2; Uebgn. des math. Seminars. — Gutzmer : Integralrechn. mit Uebgn. 5; Darst. Geometrie mit Uebgn. 4; Uebgn. des math. Seminars. — Eberhard : Algebr. Uebgn. 1; Algebra, Teil II, 3; Analyt. Geometrie des Raumes, 2. — Buchholz : Höhere Geodäsie, 1; Methoden der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 1. — Bernstein : Konforme Abbildungen, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendungen, 1; Praktikum der Versicherungsmathematik, 2; Kursus der Herstellung math. Modelle, 1 1/2.

Heidelberg; *Universität.* — Königsberger : Höhere Algebra (Theorie der Gleichungen), 4 Th. der Differentialgleichnungen, 2; Variationsrechnung, 1; Uebgn. im math. unter und ober Seminar. — M. Cantor : Differential- u. Integralrechn., 4; Uebgn., 1; Politische Arithmetik, 2. — Koehler : Synthetische Geometrie, 3. — Bœhm : Th. und Anwendung der einfachen und vielfachen Integrale, 3; Elementarmathematik, geometrischer Teil, 4. — Valentiner : Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 2; Kapitel aus der Stellarastronomie, 1. — Wolf : Elem. der Astronomie und math. Geographie, 2.

Jena; *Universität.* — Haussner : Integralrechn. mit Uebgn., 5; Näherungsmethoden, 2; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Math. Seminar, 1. — Thomae : Bestimmte Integrale, 4; Differentialgleichungen, 3; Math. Seminar, 1. — Rau : Darst. Geometrie, 4; Mechanik (Dynamik), 3. — Frege : Funktionentheorie nach Riemann, 4.

Kiel; *Universität.* — Pochhammer : Analyt. Geometrie d. Ebene, 3; Theorie d. Funktionen einer complexen Variable, 3; Uebgn. i. math. Seminar, 1. — Harzer : Rotationsprobleme a. d. Mechanik d. Himmels, 3; Uebgn. i. nummer. Rechnen, 1. — Heffter : Differential- u. Integralrech. II T. 4; Uebgn. 2. Differential- u. Integralrech. 1; Einleit. i. d. Zahlentheorie, 4; Uebgn. i. math. Seminar, 1 1/2. — Weinnoldt : Darst. Geometrie : 2. T. Parallelperspektive, Axonometrie und Zentralperspektive, 3. — Strömgren : Math. Geographie, 1; Bewegungen d. Satelliten in uns. Sonnensysteme, 1.

Königsberg; *Universität.* — Meyer : Analyt. Geometrie II, 3; Uebungen; Integralrechnung, 4; Analyt. Mechanik. 4; Sem. — Schoenflies : Th. d. Differentialgleichungen, 4; Sem. — Saalschütz : Ueber pseudo-elliptische Integrale III. Gattung mit den nötigen Entwicklungen aus der Theorie der elliptischen Funktionen nach der Methode der Fundamenta Jacobis, 2; Uebungen zur Integralrechn. — Battermann : Sphär. Astronomie, 2; Methode des wissensch. Rechnens. — Cohn : Th. d. Beobachtungsfehler, 2; ausgew. Kapitäl aus der Himmelmechanik, 2.

Leipzig; *Universität.* — Neumann : Analyt. Mechanik, 4; Math. Seminar; Uebgn. zur analyt. mechanik, 1. — Bruns : Allg. Himmelskunde, 4; Seminar für wissenschaftl. Rechnen, 2; Prakt. Uebgn. in der Sternwarte. — Mayer : Variationsrechnung, 4. — Hölder : Differential- u. Integralrechnung, 5; Ueber die Grundlagen der Arithmetik u. der Grössenlehre, 2; Math. Seminar, 1. — Kohn : Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven u. Flächen, 4; Uebgn. hierzu, 1; Invarianten, 2. — Peter : Ausgew. Kapitel der prakt. Astronomie (Bestimmung von Fixsternörtern), 2; Uebgn.

in der Sternwarte. — HAUSDORFF : Zahlentheorie, 4. — LIEBMANN : Analyt. Geometrie des Raumes, 2. Uebgn. zur anal. Geom. des Raumes, 1. — SCHOLL : Techn. Krafterzeugung mit Demonstr. u. Messungen, an den Masch. des Instituts, 2 ; Physik. Prakt. 3.

Marburg ; *Universität.* — HENSEL : Synthetische Geometrie, 4 ; Determinanten, 3 ; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1 ; Math. Seminar, 2. — NEUMANN : Anwend. der ellipt. Funktionen, 3 ; Variationsrechnung, 3 ; Math. Uebgn. 2. — DALWIGK : Analyt. Geometrie des Raumes mit besondrer Berücksichtigung der Flächen, 2. Ordnung, 4 ; Krümmungstheorie ebener Kurven u. kinematische Untersuchungen über ebene Kurven, 2 ; Ausgewählte Kapitel aus des Geodäsie, Topographie, Flächenabbildung u. Kartographie, 2 ; Dazu Uebgn. nach Verabredung. Konstruktive Uebgn. über Kegelschnitte u. Flächen, 2. Ordnung, 1. — FUETER : Integralrechnung, 4 ; Uebgn. zur Integralrechnung, 1.

München ; *Universität.* — LINDEMANN : Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln, 4 ; Anwendung der Infinitesimal-Rechnung auf die Th. der Kurven und Flächen im Raume, 4 ; Transformationsgruppen, 2 ; math. Seminar, $1^1/_2$. — SEELIGER : Mechanik des Himmels, I. Teil : die Laplace-Leverrier'sche Störungstheorie, 4 ; Astron. Kolloquium. — VOSS : Algebra, 4 ; Th. der algebr. Kurven, 4 ; math. Seminar, 2. — PRINGSHEIM : Differential-Rechnung, 5 ; Zahlentheorie, 4. — GRÄTZ : Analyt. Mechanik, 5 ; über die Fortschritte der exakten Naturwissenschaften, 1. — DOEHLEMANN : Darstellende Geometrie I, 5 ; Uebgn. zur darst. Geometrie, 3 ; Liniengeometrie in synthet.-analyt. Behandlung, 4. — WEBER : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Ergänzungen und Uebgn. zur analyt. Geometrie der Ebene, 2 ; Integralrechnung mit Uebg , 4. — BRUNN : Mengenlehre, 4. — HARTOGS : Ausgew. Kap. aus der Funktionentheorie, 2.

Münster i. W. ; *Universität.* — KILLING : Synthet. Geometrie, 3 ; Analyt. Geometrie, II. Teil, 3 ; Uebgn. zur analyt. Geometrie, 1 ; Math. Oberseminar, 2. — VON LILIENTHAL : Differential- und Integralrechnung, II. Teil, 4 ; Funktionentheorie, 4 ; Math. Unterseminar, 1. — DEHN : Mechanik, II. Teil, 4 ; Darst. Geometrie mit Uebgn., 3.

Strassburg ; *Universität.* — REYE : Geometrie der Lage, 3 ; Analyt. Mechanik, 2 ; Seminar. — WEBER : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Anwendung der ellipt. Funktionen auf Algebra und Zahlentheorie, 2 ; Seminar. — WELLSTEIN : Analyt. Dreiecksgeometrie, 2 ; Einleitung in die Gruppentheorie, 3 ; Seminar. — TIMERDING : Analyt. Geometrie der Ebene, 3 ; Uebungen ; Hydraulik, 1 ; Darst. Geometrie I, 2 ; Uebungen. — EPSTEIN : Die hypergeom. Differentialgleichung, 2. — SIMON : Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit Kulturgeschichte, 2 ; Mathematisches Kolloquium. — BECKER : Th. der speziellen Störungen und der Bahnverbesserung, 2 ; Uebungen ; Th. der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, 1 ; Astronomisches Kolloquium ; Beobachtungen. — WIRTZ : Einführung in die Theorie der Gezeiten und verwandter Phänomene, 1 ; Theorie der Refraktion, 1.

Tübingen ; *Universität.* — BRILL : Einführung in die höhere Mathematik, 4 ; Ueber nichtstarre Systeme und die Mechanik von Hertz, 2 ; Uebgn. im math. Seminar, 2. — STAHL : Höhere Algebra, 2 ; Eliptische und Abel'sche Funktionen, 2 ; Variationsrechnung, 1 ; Uebgn. im math. Seminar, 2. — MAURER : Höhere Analysis II, 3 ; Uebgn. hierzu, 1 ; Sphärische Trigonometrie, 1 ; Uebgn. hierzu, 1. — GANS : Th. des Schalls, 2.

Würzburg; *Universität*. — PRYM : Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 4 ; Im Proseminar · a) Zahlentheorie, 2 ; b) Einführung in die analytische Geometrie der Ebene, gemeinsam mit dem Assistenten, 4 ; Im Seminar : Ueber die Funktionen einer reellen Veränderlichen, 2. — ROST : Algebra, 4 ; Darstellende Geometrie I, 4 ; Analytische Mechanik I, 4 ; Variationsrechnung, 2 ; Im Proseminar : a) Uebungen aus der analytischen und der synthetischen Geometrie, 2 ; b) Uebungen aus der darstellenden Geometrie, gemeinsam mit dem Assistenten, 4 ; c) Elemente der Determinantentheorie, durch den Assistenten, 2 ; d) Ausgewähltes Kapitel der Elementarmathematik, durch den Assistenten, 2 ; Im Seminar : Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, täglich.

ANGLETERRE

Cambridge; *University*. — Mathematics. List of Lectures, proposed for 1906—1907. — (The courses of lectures will begin as follows : im Michaelmas Term 15 Octobre, Lent Term 17 January, Easter Term 22 April.) — FORSYTH : Abel's Theorem and Abelian Functions (*Michaelmas Term*, 3 h.) ; Calculus of Variations (*Lent Term*, 3 h.). — G. H. DARWIN : Th. of Potential and Attractions (*M. T*, 3) ; Figure of the Earth and Precession (*L. T.* 3). — R. S. BALL: Spher. Astronomy (Elem) (*M. T.* and *L. T.* 3), — LARMOR : Electricity and Magnetism (*M. T.* 3) ; Electrodynamics (*L. T.* 3) ; Th. of Gases and Thermodynamics (*E. T.* 2). — HINKS : Demonstration in Practical Astronomy (*M. T*, and *L. T.* 2) ; Practical Work. — HOPKINSON : Applied Mathematics (*M. T.* and *L. T.* 2). — HOBSON : Representation of functions by series, incl. Fourier's series (*M. T.* 3) ; Vibrations and Sound (*L. T.* 3). — BAKER: Th. of functions, 3 ; Th. of equations with Groups (*M. T.* 3) ; Th. of Cont. Groups (*L. T.* 3). — RICHMOND : Analyt. Geometry (*M. T.* and *L. T.* 3) ; Proj. Geometry (*E. T.*). — WHITEHEAD : Principles of Mathematics (*M. T.* and *L. T.*) : Non-Euclidean Geometry (*E. T.*). — HERMAN : Hydromechanics I (*L. T.* 3) ; Hydrodynamics II (*L. T.*). — BERRY : Ellipt. Functions, Bessel Functions and Fourier Series, 3, — BENNETT : Line Geometry (*L. T.* 3). — MUNRO : Hydrodynamics and Sound I (*M. T.* 3). — GRACE : Invariants and Geom. Applications (*M. T.* 3). — BARNES : Taylor's Series (*M. T.*) ; Lin. Diff. Equations (*L. T.* 3). — YOUNG : Th. of Invariants (*E. T.* 3). — HARDY : Integral Functions (*E. T.*). — WEBB : Definite Integrals (*E. T.*).

SUISSE

Basel; *Universität*. — KINKELIN : Diff. u. Integralrechn. 3 ; alg. Analysis, 3 ; Stereometrie, 2 ; Uebgn. im math. Sem. 1. — K. von der MÜHLL : Analyt. Mechanik, 4 ; Uebgn. in der math. Phys. — RIGGENBACH : Astron. Geographie, 2. — FLATT : Pädag. Seminar, 3 ; Rep. der Algebra, 1. — SPIESS : Die Grundbegriffe der Mathematik. 3 ; Bilder aus der Geschichte der Mathem., 1. — GROSSMANN : Anw. d. darst. Geometrie, 2 ; allg. Kurven u. Flächen, 2.

Bern; *Universität*. — GRAF : Kugelfunktionen m. Repet , 3. — Besselsche Funktionen m. Repet., 3 ; Bestimmte Integrale m. Repet., 3 ; Differentialgleichgn., 2 ; Differential- und Integralrechng., 2 ; Funktionentheorie, 2 ; Renten- u. Versicherungsrechnung, 2 ; Seminar, 2. — OTT : Integralrechng., 2 ; Analyt. Geom. d. Ebene II, 2. — HUBER : Sphär. Astronom. I, 2 ; Theorie d. höhern ebenen Kurven m. Uebgn., 3 ; Theorie d. ellipt. u. Theta-Funktionen, 3 ; Seminar, 1. — BENTELI : Darstell. Geom., 2 ; Darstell. Geom., Uebgn. u. Repet., 2; Prakt. Geom., I, 1; Konstrukt. Perspektive, 1. — Moser : Polit. Arithm., 1; Mathem.-versicherungswissensch. Seminar, 2. — Crelier : Synthet. Geom. I, 2.

Genève; *Université* : C. Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3; Exercices, 2. — Mécanique rationnelle, 3; Exercices, 2; Conférences d'analyse supérieure : Théorie des fonctions. — H. Fehr : Géométrie analytique, 2; Algèbre, 2; Séminaire de Géométrie supérieure, 2; Exercices d'algèbre et de géométrie, 2. — R. Gautier : Astronomie physique, 2. — J. Lyon : Fonction d'une variable complexe, 1. — R. de Saussure : Mécanique des fluides, 1; Géométrie du mouvement, 2.

Lausanne; *Université*. — Amstein : Calc. différ. et intégr. I, 6; Exerc. de calc. I, 2; calc. différ. et intégr. II, 2; Exerc. de calcul II, 1; Théor. des fonct., 3. — Joly : Géomét. descript. I, 5; Epures de Géom. descript., 1 ap.-m.; Géom. anal., 2; Géom. de posit., 2; Les courbes planes, 2. — Mayor : Mécan rationn., 5; Exerc. de mécan., 1; Physiq. mathem., 2; Stat. graph. I, 3; III, 2; Epures de stat. I, 4; III, 4. — Maillard : Calc. infinit., avec applic aux sciences (cours dest. aux étud. en sc. phys. et natur.), 3; Astron. sphér., la terre, le soleil, 3; Astron. mathém. et mécan. céleste (évent.), 2. — Jaccottet : Quadrature du cercle, 1.

Neuchâtel; *Académie*. — L. Iseli : Calcul infinitésimal, 3; Géométrie analytique, 2; Théorie des nombres et intégrales eulériennes, 2. — E. Le Grand Roy : Astronomie sphérique, Astrophysique, 2; Géodésie, 1; Exercices d'astromie, 1. — A. Jaquerod : Mécanique analytique, 2. — L. Gaberel : Problèmes de mécanique.

Zürich; *Universität*. — Burkhardt : Elem. d. Diff.- und Integralrechg., 4; Gewöhnl. Diff.-Gleichgn, 4; Math. Sem., 2. — Wolfer : Einl. in d. Astronomie, 3; Ueb. dazu, 2; Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2. — Weiler : Analyt. Geom. m. Ueb. I, 4; Darst. Geom. m. Ueb. I., 4; Mathem. Geogr., 2; Analyt. Geom., m. Ueb. f. Lehrmtskd., 2. — Gubler : Allg. Analysis, 2; Determinanten, 1; Sphär. Trigonometrie, 1.

Zurich; *Ecole polytechnique*. — Section normale des sciences mathématiques. — Hirsch : Differentialrechn., 4; Repet., 1; Uebgn., 2; Variationsrechn., 3. — Franel : Calcul differentiel, 4; Répét., 1; Exerc., 2; Th. des équations différentielles, 4; Exerc., 1. — Geiser : Analyt. Geometrie, 4; Repet., 1. — Fiedler : Darst. Geométrie, 4; Repet. 1; Uebg., 4; Geometrie d. Lage, 4. — Lacombe : Géom. descript., 4; Répét, 1; Exerc., 4; Géom. de Position avec exerc., 3. — Hirsch u. Lacombe : Mathem. Seminar, 2. — Hurwitz : Differentialgleichgn., 4; Uebgn. 1; Ellipt. Fnnktionen, 4. — Herzog : Mechanik II, 4; Repet., 1; Uebgn., 2. — Rosenmund : Vermessungskunde, 3, Repet., 1; Erdmessung, 2; Geodät. Praktikum, 2, — Rebstein ; Kartenprojektionen, 1. — Weber : Zylinderfunktionen und ihre Verwendung in der Physik, 2. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3; Uebgn, 3; Bahnbestimmung von Planeten, 2.

Cours libres : Beyel : Rechenschieber mit Uebg., 1; Darst. Geometrie, 2; Flächen 2. Grades; Zentralprojektion u. projekt. Geometrie, 2. — Dumas : Procédés graphiques pour simplifier des calculs, abaques, nomogrammes, 3. — Herzog : Elastizitätslehre, 2. — J. Keller : Repet. d. darst. Geometrie, 2. Kraft : Mathematik und Mechanik im vorigen Jahrhundert, 2; Geom. Kalkül I, 2; II, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Joaquim d'Azevedo Albuquerque. — **Rudimentos de commercio e contabilidade.** — 1 vol. cart. 82 pp. Porto, typographia occidental.

En quelques pages, claires et bien ordonnées, M. d'Azevedo Albuquerque a développé le programme de commerce et de comptabilité récemment mis en vigueur dans les établissements portugais d'enseignement secondaire. Il s'est inspiré des travaux les plus récents publiés, sur cette matière, par nos compatriotes. Son livre simple et pratique, sera fort apprécié du public spécial auquel s'adresse l'auteur, et contribuera aux progrès d'un enseignement dont personne ne conteste l'utilité. G. Faure (Paris.)

U. Broggi. — **Matematica attuariale.** (Manuali Hœpli). — 1 vol. cart. 346 p.; 3 L.; Hœpli, Milan.

Dans un élégant petit volume de la collection Hœpli, M. U. Broggi expose avec une grande clarté les éléments du calcul des probabilités, la théorie de la statistique mortuaire et celle des assurances sur la vie.

Conçu surtout au point de vue théorique, ce petit ouvrage peut être considéré comme une bonne introduction à l'étude des principes techniques de l'assurance, ce facteur si essentiel de la vie sociale moderne. L'auteur très bien informé, a sû être complet avec brieveté et n'omettre aucune partie de son sujet; c'est ainsi qu'on trouvera exposée d'après les idées de M. Bohlmann, la délicate théorie du risque, généralement négligée par les traités élémentaires. Au total, excellent ouvrage à recommander aux futurs actuaires et où on ne trouve guère à reprendre que les trop nombreuses fautes d'impression restant dans les formules. C. Cailler (Genève.)

K. Doehlemann. — **Geometrische Transformationen.** Teil. — 1 vol. cart.; 10 mk.; G.-J. Goeschen, Leipzig.

L'ouvrage de M. Doehlemann comporte d'abord une première partie, servant d'introduction, dans laquelle il traite la théorie et les applications du rapport anharmonique en se servant des coordonnées simples, des coordonnées trilinéaires, puis des coordonnées tétraédriques. Le livre se subdivise ensuite en trois autres parties développées de la même manière et qu'on peut étudier simultanément.

Ce sont : I. *Transformations binaires* (relatives aux formations synthétiques du premier genre). II. *Transformations ternaires* (relatives aux formations synthétiques du deuxième genre). III. *Transformations quaternaires* (relatives aux formations synthétiques du troisième genre).

Chaque partie comprend quelques généralités sur les formations homographiques correspondantes. M. Doehlemann montre ensuite très habilement comment, par des substitutions linéaires de deux, puis trois, puis quatre équations au premier degré, on peut passer d'un groupe à son homographique. Les principales propriétés de l'homographie sont étudiées algébrique-ment, et par des déductions simples, l'auteur établit les relations qui existent entre les formations de bases différentes, celles de même base et les involutions.

Il faut signaler, comme chapitres très intéressants, celui relatif à l'affinité, l'homothétie, la similitude et l'égalité des figures, puis celui de la collinéation centrale dont on peut comparer les résultats avec ceux de la projection centrale. On trouve encore une théorie géométrique simple des pantographes et du perspectographe Ritter, ainsi qu'une application de la collinéation à la construction matérielle de la perspective des reliefs.

En résumé l'ouvrage de M. Doehlemann constitue une grande nouveauté dans ce sens qu'il établit systématiquement les relations fondamentales de l'algèbre avec les diverses parties de la géométrie synthétique.

L. Crelier (Bienne).

Osk. Lesser. — **Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima,** mit 30 Fig. im Text. — 1 vol. cart. in-8°, 121 p.; 2 Mk., O. Salle, Berlin.

T. Tesar. — **Elemente der Differential- u. Integralrechnung.** — Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. — 1 vol. cart. in-8°, 128 p.; 2 Mk. 20; B. G. Teubner, Leipzig.

Au moment où il est question, dans plusieurs pays, d'introduire les premières notions de calcul différentiel et intégral dans les établissements d'enseignement secondaire supérieur, ces deux ouvrages méritent d'être signalés à tous ceux qui s'intéressent à cette utile réforme. Ils répondent tous deux aux vœux qui ont été exprimés de divers côtés et qui ont également été exposés dans cette Revue. Il s'agit principalement, comme on sait, de développer chez les élèves la notion de fonction, la représentation graphique de sa variation, la notion de dérivée et celle d'intégrale et de les familiariser avec les applications fondamentales les plus simples.

L'*ouvrage de M. Lesser* comprend trois parties :

1° La notion de fonction, représentation graphique. Résolution approchée d'équations numériques.

2° La différentiation des fonctions et applications simples. — Le théorème de Taylor et ses applicptions; expressions indéterminées, maxima et minima; cercle de courbure. Vitesse et accélération.

3° Le calcul intégral. Intégrale définie. Longueur d'arc; le problème des quadratères; volumes; le pendule; centre de gravité; moments d'inertie; les lois de Kepler.

L'*ouvrage de M. Tesar* débute aussi par la représentation graphique d'une fonction, puis, dans une seconde partie, il donne une première étude de la notion de dérivée et de l'intégrale accompagnée d'un grand nombre d'exemples simples; applications géométriques, mécaniques et physiques. Puis viennent dans des chapitres spéciaux : l'étude des courbes planes, les fonctions logarithmiques et exponentielles et les maxima et minima des fonctions.

J. Pionchon. — **Principes et formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique.** — 1 vol. gr. in-8°, 146 p.; 5 fr., Gratier et Rey, Grenoble; Gauthier-Villars, Paris.

Cet ouvrage est indépendant de tout programme; l'auteur s'est inspiré uniquement du but que poursuit la *Bibliothèque de l'élève-ingénieur*. Il s'agit, comme on sait, d'une collection d'opuscules ayant pour objet de présenter sur chaque sujet, d'une façon brève, méthodique et pratique les notions essentielles, c'est-à-dire ce qui est indispensable à retenir pour assurer une application rapide des principes.

Il n'existait guère, en pays de langue française, d'ouvrage de trigonométrie répondant à ce but. Les *Cours* de trigonométrie sont en effet trop élémentaires, tandis que les *Traités* sont beaucoup trop complets. Le présent ouvrage constitue donc un utile intermédiaire en ces deux catégories. C'est une sorte de memento raisonné des principales notions dont l'élève-ingénieur peut avoir besoin.

L'auteur a divisé son exposé en cinq chapitres :

I. Fonctions trigonométriques. — II. Formules usuelles concernant les fonctions trigonométriques. — III. Grandeurs sinusoïdales. — IV. Trigonométrie rectiligne. — V. Trigonométrie sphérique. — Appendice : applications diverses.

Max Simon — **Methodik der elementaren Arithmetik** *in Verbindung mit algebraischer Analysis*. — 1 vol. in-8e, cart., 108 p.; 3 Mk. 20; B.-G. Teubner, Leizig.

Tous ceux qui enseignent les éléments de l'Arithmétique et de l'Algèbre liront avec une véritable intérêt ce petit livre de méthodologie. Il n'est guère besoin de leur présenter l'auteur, qui possède une grande expérience de l'enseignement et dont les travaux d'ordre pédagogique sont bien connus. On doit donc lui savoir gré d'avoir livré ses réflexions sur un enseignement qui offre souvent de sérieuses difficultés pour celui qui ne veut pas se borner à inculquer aux élèves de simples procédés de calcul.

M. Simon passe en revue l'ensemble des questions que l'on étudie dans les collèges et les gymnases, depuis la numération et les sept opérations jusqu'aux développements concernant le binome, les nombres complexes, la fonction exponentielle, la résolution des équations du deuxième et du troisième degrés et les transcendantes élémentaires. Il insiste particulièrement sur le côté scientifique, que le maître ne doit jamais perdre de vue dans l'enseignement secondaire supérieur. et, à ce titre, l'ouvrage de M. Simon mérite d'être examiné avec beaucoup de soin.

Dav.-Eug. Smith. — **A modern American Course of Study in Arithmetic** arranged by years. — 1 broch. in-16, 22 p.

Handbook to Smith's Arithmetics. — 1 vol. in-12°, 125 p.

Practical Arithmetic. — 1 vol. in-12, 546 p.; prix : 65 cent., Ginn et Comp., Boston.

M. David-Eugène Smith, professeur au Teachers College (Ecole normale) de la Columbia University de New-York, a publié une série de petits manuels d'Arithmétique correspondant aux divers degrés des établissements élémentaires. On lui doit en outre plusieurs ouvrages plus spécialement destinés aux maîtres, et ce sont ceux-là que nous voulons signaler ici, non seulement aux maîtres de l'enseignement élémentaire, mais aussi à ceux qui sont appelés à les former.

Chacun sait que l'on trouve encore beaucoup de manuels renfermant un grand nombre de matières et de problèmes qui sont maintenus uniquement par tradition ou par routine, mais qui pourraient et qui devraient être entièrement abandonnés pour céder la place à des questions plus utiles. C'est en se plaçant à ce point de vue que M. Smith a écrit ses ouvrages en s'efforçant de les approprier le plus possible aux besoins actuels. Nous pouvons dire qu'il y a pleinement réussi.

Envisageant l'enseignement de l'Arithmétique dans tout son ensemble, l'auteur expose dans son *Modern american Course* un plan d'étude qui tient compte des vœux qui ont été présentés de divers côtés. Les matières sont réparties sur six années, avec deux années complémentaires suivant les établissements. L'examen même de ce plan d'étude fait l'objet du *Handbook*. Les maîtres y puiseront d'utiles indications et d'excellents conseils d'ordre pédagogique. Quant aux exercices et aux problèmes, ils les trouveront dans l'ouvrage intitulé *Practical Arithmetic*. C'est un excellent recueil renfermant un grand nombre de questions bien choisies et bien groupées, depuis la numération jusqu'aux problèmes d'ordre pratique empruntés à la géographie mathématique, à l'Arithmétique commerciale et aux calculs des assurances.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

American Journal of Mathematics edited by Frank Morley, under the Auspices of the Johns Hopkins University. Vol. XXVIII. Baltimore.

Nos 1 et 2. — L.-E. Dickson : On the Quaternary Linear Homogeneous Groups Modulo p. of Order a Multiple of p. — John Eiesland : On the Integration of a System of Differential Equations in Kinematics. — Ch. H. Sisam : On the Determination of the Properties of the Nodal Curve of a Unicursal Ruled Surface. — L. P. Eisenhart : Certain Surfaces with Plane or Spherical Lines of Curvature. — A. G. Greenhill : The Notion of a Solid in Infinite Liquid. — Bertrand Russell : The Theory of Implication.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Deuxième série. T. VII 1905. E. Privat, Toulouse ; Gauthier-Villars, Paris.

Fasc. 1, 2, 3. — K.-M. Peterson : Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes. — K.-M. Peterson : Sur les courbes tracées sur les surfaces. — K.-M. Peterson : Sur la déformation des courbes de second ordre. — K.-M. Peterson : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. — M.-D. Pompéiu : Sur la continuité des fonctions de variables complexes. — M.-L. Carrière : Sur les déformations de l'alliage entectique plomb-étain et les métaux visqueux.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke. 10. Band. B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

No 1. — Horn : Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche — Budde : Die Tantallampe der Firma Siemens & Halske A.-G. — Epstein : Raumkurven und Liniengeometrie. — Fleck :

Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen. — Kapteyn : Sur l'équation différentielle de Monge. — Landau : Über einen Satz des Herrn Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — Kostka : Zur Lösung der symmetrischen Funktionen. — Saalschütz : Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn C. Kostka. — Cesaro : Fonctions continues sans dérivée.

N° 2. — Schaefer : Über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen. — Thieme : Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung. — Wallenberg : Über Beziehungen zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihren ersten Ableitungen. — Schultz : Die überzähligen willkürlichen Konstanten in der Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung.

N°s 3 et 4. — C. Segre : Sur la génération projective des surfaces cubiques. — Sturm : Über die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel. — Gleichen : Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre. — F.-H. Safford : Rotation Cycloids and Lamé's Products. — E. Haentzschel : Bemerkung zu der vorstehenden Notiz. — W.-Fr. Meyer : Über Partialbruchzerlegung bei vielfachen Linearfactoren des Nenners. — O. Spiess : Einige Integralsätze. — Ph.-E.-B. Jourdain : The Development of the Theory of Transfinite Members. — J. Herzog und Clarence Feldmann : Über widerstandstreue umgestaltung elektrischer Leitungsnetze (Transfiguration). Rezensionen. — Vermischte Mitteilungen. — Inhalt der Bände 1-10 der dritten Reihe.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschr. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften, herausgegeben von G. Eneström. 3. Folge. Band 6. Teubner.

Heft 4. — A.-E. Haas : Über die Originalität der physikalischen Lehren des Johannes Philoponus. — Gino Loria : Sopra una transformazione di contatto ideata da Fermat. — T. Hayashi : Die magischen Kreise in der japonischen Mathematik. — Ph.-E.-B. Jourdain : On two differential equations in Lagrange's « Mécanique analytique ». — Ferd. Rudio : Wilhelm Schmidt (1862-1905). — F. Amodeo : Sul corso di storia delle scienze mathematiche nella r. università di Napoli.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. — Tome XXX. 1906. Paris, Gauthier-Villars.

Janvier-mai 1906. — Butin : Sur la transformation par directions réciproques. — C. Cailler : Sur une propriété de la série hypergéométrique. — Pompéiu : Sur les séries de fonctions holomorphes. — P. Tannery : Les éphémérides chez les Byzantins. — A. de Saint-Germain : Cinématique. Problème relatif au centre instantané de rotation et au centre des accélérations. — Haag : Note sur les surfaces minima applicables sur une surface de révolution. — Pompéiu : (Rectification à sa note ci-dessus). — G. Rados : Rapport sur le prix Bolyai.

Mathesis, Recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. — Série 3. Tome VI 1906. — Gand, Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

Janvier-juin 1906. — De Tilly : Les premiers principes de la géométrie. — J. Neuberg : Propriétés du quadrilatère inscriptible. — A. Gérardin : Sur la détermination des nombres amiables. — F. Gomes-Teixeiras : Sur les transformations linéaires. — J. Neuberg : Sur deux cas particuliers du problème d'Apollonius. — Paul Stäckel : Sur une formule approchée donnant x en fonction de *sin* x et *cos* x. — C.-E. Wasteels : De l'existence du plan tangent. — P. M. : Sur les solutions de l'équation indéterminée $x^2+y^2=z^2$. — Barisien : Exercice de calcul intégral.

Notes mathématiques. — Bibliographie. — Solutions de questions proposées. — Questions d'examen. — Questions proposées.

2. Livres nouveaux:

W. M. Baker. — **Algebraic Geometry,** a new Treatise on analytical conic Sections. — 1 vol. in-16, 325 + 23 pp., 61 ; Georges Bell et Sons, Londres.

Fr. Brioschi. — **Opere Matematiche** T. IV. — 1 vol. gr. in-4°, 418 p., 25 L. ; U. Hœpli, Milan.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, édition française publiée d'après l'édition allemande sous la direction de M. J. Molk. — Tome I, troisième volume : *Theorie des nombres,* Premier fascicule : Propositions élémentaires (Bachmann et Maillet) ; théorie arithmétique des formes (Vahlen et Cahen) — 96 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

A. Guillemin. — **Tableaux logarithmiques** A et B, équivalant à des tables de logarithmes à 6 et 9 décimales et note explicative. — 1 vol. in-8°, 4 fr ; F. Alcan, Paris.

E. Jouffret. — **Mélanges de Géométrie à quatre dimensions.** — 1 vol. gr. in-8° XI-227 p., 49 fig. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

L. Krüger. — **Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze.** — 1 fasc. gr. in-4° ; 34 p. ; 2 Mk. ; 80 B. G. Teubner, Leipzig.

H. Lebesgue. — **Leçons sur les séries trigonométriques.** — 1 vol. in-8°, VII-128 p. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Lucas de Pesloüan. — **N.-H. Abel, sa vie et son œuvre.** — 1 vol. in-8°, XIII-169 p. ; avec un portrait : 5 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

J. Massau. — **Note sur les Géométries non euclidiennes** (Premier fascicule). — 1 fasc. in-8°, 175 p. ; Dequesne-Masquillier et fils, Mons.

M. Petrovitch. — **La Mécanique des phénomènes** fondée sur les analogies *(Collection Scientia).* — 1 vol. 96 p.. 114 fig. ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

E. Rœssler. — **Théorie et calcul des lignes à courants alternatifs** traduit de l'allemand par E. Steinmann. — 1 vol. cart. 288 p., 7 planches ; Ch. Béranger, Paris.

Ch. Schmehl. — **Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie** nebst einer Sammlung von Aufgaben. — 1 vol. in-16, 110 p. ; 1 Mk, 60 ; E. Roth, Giessen.

Ed. Schulze und Fr. Pahl. — **Mathematische Aufgaben** Ausgabe für Gymnasien, II Teil. (Obersekunda und Prima). 1 vol. in-8°, 284 p. ; 3 M. 40 ; Dürr, Leipzig.

M. Simon. — **Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert.** — 1 vol. in-8° relié, 278 p. ; 8 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Vivanti. — **Funzioni poliedriche e modulari.** *(Manuali Hœpli).* — 1 vol. in-16. 437 p., 3 L. ; Hœpli, Milan.

E. J. Wilczynski. — Projective Differential Geometry of curves and ruled Surfaces. — 1 vol. relié in-8°, 298 p. ; 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

LES LOGARITHMES AVANT NEPER[1].

Il est assez remarquable que l'idée d'une théorie arithmétique des logarithmes n'ait pris naissance qu'après celle de leur théorie algébrique. Dès l'aurore de l'algèbre, on voit, en effet, considérer les rapports comme des quantités d'un genre spécial, leur donner des noms particuliers[2], et employer pour leur calcul, un langage logarithmique, pour ainsi dire. Car les opérations que nous appellerions aujourd'hui *multiplication* des rapports, leur *élévation aux puissances*, *l'extraction* de leurs racines, s'appelaient et se sont longtemps appelées *addition*, *multiplication* et *division* de rapports[3].

La musique est vraisemblablement l'origine de ces déno-

---

[1] Consulter aussi, outre l'Histoire des mathématiques de M. CANTOR (*Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 3 vol. parus), l'étude historique que M. TROPFKE consacre aux logarithmes dans l'ouvrage intitulé *Geschichte der Elementar-Mathematik*. t. II, p. 141-186. *Die Logarithmen*. LA RÉDACTION.

[2] Les rapports $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, ... $\frac{n+1}{n}$, par exemple, portaient les noms de ἡμιόλιός, ἐπιτρίτος, ἐπιτέταρτος, ... ἐπιμόριος, devenus plus tard *sesquialter*, *sesquitertius*, *sesquiquartus*, ... *superpartiens*.

[3] Ainsi en *ajoutant* l'ἡμιόλιος $\left(\frac{3}{2}\right)$ et l'ὑπεπιτέταρτος $\left(\frac{4}{5}\right)$, on trouve l'ἐπίπεμπτος $\left(\frac{6}{5}\right)$; *doubler, tripler*, ... *sesquipler* un rapport, c'est l'élever au carré, au cube, ... à la puissance $\frac{3}{2}$; prendre la *moitié* d'un rapport, c'est en extraire la racine carrée ; etc.

La notion du rapport fut longue à s'éclaircir : Kepler, Mercator, Cotes, Halley, dans leurs écrits logarithmiques, parlent couramment d'addition et de division de rapports; dans le sens qu'on vient d'indiquer. On en voit une autre preuve dans les curieuses remarques d'Arnauld, de Leibniz et de d'Alembert, au sujet du rapport de -1 à $+1$.

Le mot *logarithme*, imaginé par Neper, pour remplacer le mot *numerus artificialis*, d'abord employé par lui, et qu'on traduisait avec Kepler, par *mesure des rapports* (ἀριθμός τῶν λογῶν), avait contribué a la confusion. Matzka (A. Gr. 1860) en a montré la vraie origine, qui est λογιστικός ἀριθμός. Neper ne parle nulle part, en effet, de mesure de rapports ; mais de son temps, le mot *logistique* était souvent pris pour *calcul*, comme on le voit chez Neper même. Déjà Platon distinguait la λογιστική, *science du calcul*, de l'ἀριθμητική, *théorie des nombres*.

Ce langage inexact parait avoir été critiqué d'abord par Clarke, dans sa controverse avec Leibniz. Celui-ci avait dit que « l'ordre a aussi sa quantité... Les raisons ou proportions, dans les mathématiques, ont leur quantité, et se mesurent par les logarithmes ». Clarke répondit à cela que « le temps et l'espace sont des *quantités*, ce qu'on ne peut dire de la situation et de l'ordre... *L'expression logarithmique* d'une proportion n'est pas la *mesure*, mais l'*indice* ou le *signe artificiel* de la proportion ».

minations. Comme on sait, Pythagore avait découvert fortuitement que les longueurs des cordes donnant les intervalles de quarte, de quinte et d'octave sont respectivement dans les rapports de 4 à 3, de 3 à 2, de 2 à 1. Il avait conclu que les intervalles musicaux sont régis par des lois numériques, qu'il s'appliqua à découvrir. Pour suivre leurs rêveries numériques, psychologiques et cosmiques, autant que pour régler les instruments de musique, les pythagoriciens en déduisirent plusieurs systèmes, en général très compliqués. C'est probablement d'eux que vient l'usage des noms rappelés plus haut: comme ces noms leur servaient surtout à désigner les intervalles musicaux, ils en vinrent à substituer aux noms des intervalles ceux des rapports qui les représentent. Ainsi ils disaient: le rapport $\frac{1}{2}$ est composé des deux rapports $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

On voit un exemple de ce calcul dans un passage célèbre du *τίμαιος*, où, pour expliquer la formation de l'âme, Platon dit que Dieu sépara du tout une partie, puis une autre double de la première, puis une troisième triple de la première, une quatrième double de la seconde, une cinquième triple de la troisième, une sixième octuple de la première, une septième valant vingt-sept fois la première[1]; qu'ensuite il remplit chacun des intervalles doubles et des triples[2] par deux moyennes, dont l'une[3] surpasse le plus petit et est surpassée par l'autre d'une même fraction de chacun d'eux, et l'autre[4] surpasse le plus petit et est surpassée par l'autre d'une même quantité[5]; qu'il remplit ensuite les intervalles $\frac{4}{3}$ par des intervalles $\frac{9}{8}$ et un intervalle de $\frac{256}{243}$ [6].

---

[1] Ce qui donne déjà les nombres 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27.

[2] Ceux des nombres 1, 2, 4, 8 et des nombres 1, 3, 9, 27.

[3] Moyenne harmonique.

[4] Moyenne arithmétique.

[5] On a ainsi les nombres $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, \frac{8}{3}, 3, 4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, 6, 8, 9, \frac{27}{2}, 18, 27$.

[6] Ainsi le premier intervalle, de $\frac{4}{3}$ à 1, donne les trois nouveaux intervalles, de $\frac{9}{8}$ à 1, $\frac{81}{64}$ à $\frac{9}{8}$, $\frac{4}{3}$ à $\frac{81}{64}$. Le quatrième, de 2 à $\frac{8}{3}$, les trois suivants, 2 à $\frac{9}{4}$, $\frac{81}{32}$ à $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{3}$ à $\frac{81}{32}$.

Ces nombres représentent tous des intervalles musicaux : la quarte (διὰ τεσσάρων) ou $\frac{4}{3}$ comprend un ton (τόνος) ou $\frac{9}{8}$, un second ton et un limma (λεῖμμα) de $\frac{256}{243}$.

La théorie des rapports, due à Eudoxe, est expliquée par Euclide, dans ses στοιχειῶν et ses δεδόμενον, sans toutefois qu'il soit parlé de la division des rapports. Cependant les Anciens ont dû faire plusieurs tentatives pour résoudre cette dernière question. Platon, — qui, comme on sait, fut l'inspirateur du problème déliaque ou duplication du cube, — paraît en avoir eu la première idée : on sait la manière dont il divise en trois parties égales, le rapport $\frac{2}{1}$, au moyen d'une construction graphique. — Le titre d'un des ouvrages d'Appollonius, περὶλόγον ἀποτομῆς, bien que n'en énonçant nullement le contenu, témoigne de préoccupations de ce genre : on sait d'ailleurs qu'il a écrit un traité sur les irrationnelles des ordres supérieurs. — Nous voyons que Théon de Smyrne, pour avoir la valeur approchée du demi-ton, laquelle est la moitié du rapport $\frac{9}{8}$, ou $\sqrt{1+\frac{1}{8}}$, pose cette racine égale à $1+\frac{1}{16}$. — Enfin, d'après Ptolémée, pour partager pratiquement l'intervalle musical $\frac{16}{15}$, par exemple, en deux parties égales, on le traitait ainsi : $\frac{16}{15}=\frac{48}{45}=\frac{48}{46}\cdot\frac{46}{45}$, ce qui donnait le célèbre genre ἐναρμονικόν, provenant de la division de la quarte $\frac{4}{3}$, suivant les intervalles $\frac{46}{45}$, $\frac{48}{46}$, $\frac{5}{4}$. De même, pour diviser l'intervalle de quarte en trois intervalles égaux, on le considérait comme composé des trois suivants $\frac{12}{11}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{10}{9}$, qui sont les rapports approximatifs cherchés; et en effet ce genre s'appelait διατονον ὁμαλόν.

Le premier qui considéra une progression géométrique en nombres, considérait implicitement aussi la progression arithméthique 1, 2, 3, 4,... et pourrait passer comme ayant eu la première idée des logarithmes, si la théorie logarithmique ne reposait pas précisément sur la difficulté de donner des correspondants dans la progression arithmétique aux nombres intermédiaires de la progression géométrique. Quoi qu'il en soit, on doit cette considération à Archimède, qui outre un théorème important sur le mode de croissance des deux progressions[1], remarque dans son ψαμμιτὲς, que : étant donné des nombres continuellement proportionnels à partir de l'unité, le produit de deux de ces nombres est un terme de la progression autant éloigné du plus grand facteur que le second l'est de l'unité, et autant éloigné de l'unité que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité.

Cette remarque d'Archimède a été développée et appliquée par Nicolas Chuquet, aux deux progressions $\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : \ldots$ et $\div\!\div\ 1 : \frac{5}{3} : \frac{25}{9} : \frac{125}{27} : \ldots$ dans son *Triparty*, écrit en 1484, mais publié seulement en 1880 (B. Bon.) par Marre. Voici un extrait du texte de Chuquet :

« De la multiplicacion et prop'ete des nombres proporcionalz.

Tous nombres proporcionalz constituez ordonneement en quelque proporcion que ce soit commancant toutesfoiz a 1 et comptant cellui qui vient Immediatemmt apres, 1. pour le premier et celui dap's pour le second et consequemment les aultres. Telz nombres ainsi ordonnez ont telle prope'te que... qui multiplie lung diceulx par lung des aultres et qui adiouste les deux ordres esquelz sont situez les deux nombres multipliez. Il treuve le lieu ou doit estre situe le nombre venu de la multiplicacion cest a dire qu'il treuve le quantiesme nombre ceste multiplicacion doit produire...

... Aultre exemple a la proporcion superbiparciens. Qui multiplie. $4 . \frac{17}{27}$. qui est le 3ᵉ superbiparciens en soy Il treuve le 6ᵉ superbiparciens qui est $21 . \frac{316}{729}$. Ou qui multiplie le 2ᵉ superbiparciens qui est $2 . \frac{7}{9}$. par le 3ᵉ qui est $4 . \frac{17}{27}$. lon trouuera $12 . \frac{209}{243}$. qui est le 5ᵉ. Car 2 et 3 Joinctz ensemble font 5. Et ainsi des ault's superparciens et semblablement des aultres especes conuient entendre... »

$1 . \frac{2}{3}$	— 1
$2 . \frac{7}{9}$	— 2
$4 . \frac{17}{27}$	— 3
$7 . \frac{58}{82}$	— 4
$12 . \frac{209}{243}$	— 5
$21 . \frac{316}{729}$	— 6

[1] Si entre les quantités H, K, on insère deux moyennes arithmétiques θ, I, le cube du rapport de K à I sera inférieur au rapport de K à H. C'est la relation $(1 + x)^n > 1 + nx$, qui nous a servi de point de départ dans notre étude élémentaire des *fonctions hyperboliques*.

Stifel (*Arith. int.* Nürnberg, 1544), outre des considérations semblables, établit nettement le parallèle des opérations élémentaires effectuées sur les deux progressions et étend le théorème d'Archimède aux progressions prolongées aux-dessous de zéro et de l'unité.

« Additio in Arithmeticis progressionibus respôdet multiplicationi in Geometricis...

Substractio in Aritmeticis respondet in Geometricis divisioni...

Multiplicatio simplex... quœ fit in Arithmeticis, respondet multiplicationi in se quœ fit in Geometricis.

Divisio in Arithmeticis progressionibus, respondet extractionibus radicum in progressionibus Geometricis...

. . . .

... Sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, et infra unitatem finguntur minutiœ unitatis, et sicut supra unum ponuntur integra, et infra unum ponuntur minuta seu fracta: sic supra o ponitur unitas cum numeris, et infra o fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre reprœsentari videtur in progressione numerorum naturali, dum seruit progressioni.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subduca, et clausis oculis abea... »

Tartaglia et d'autres ont aussi traité le même sujet, mais sans y apporter de considérations nouvelles. Ainsi, au milieu du XVI[e] siècle, le théorème incidemment énoncé par Archimède n'avait pas encore conduit à l'idée des logarithmes ; on peut croire cependant que les remarques de Stifel ont disposé les esprits à les appliquer à la simplification des calculs numériques.

Le besoin d'abréger les immenses calculs des astronomes a en effet amené la découverte des logarithmes, que Bürgi paraît avoir faite dès 1588. Mais c'est à Neper seul qu'on en fait honneur, car non seulement il a devancé Bürgi dans la publication des tables, mais il en a donné du même coup la théorie et l'usage, et il en a très bien compris la portée, tant au point de vue arithmétique qu'au point de vue analytique.

Bürgi avait composé vers 1603 une table d'anti-logarithmes, longtemps inconnue. Cette table (*Arith. und Geom. Progress Tabulen*, Prag. 1620), retrouvée par Kœstner, en 1740, contient environ 33,000 logarithmes écrits en rouge (*rothe Zahlen*) à côté des nombres correspondants, écrits en noir (*schwarze Zahlen*).

Il a simplement remplacé la progression $\div\!\div$ 1 : 2 : 4 :... de Chuquet, de Stifel et des autres, par la progression $\div\!\div$ 1 : $1{,}1000^1 : 1{,}0001^2 : 1{,}0001^3$:... variant très lentement, et en outre très facile à construire. L'usage de cette table n'a été publié qu'en 1856, par Gieswald.

Appendice : Sur quelques méthodes élémentaires de calculs des logarithmes.

Neper considère deux points mobiles H, η, sur deux droites AO, $\alpha\omega$, le premier se mouvant uniformément et l'autre avec une vitesse proportionnelle à la distance variable $\eta\omega$. AH est le logarithme de la partie correspondante $\eta\omega$. La définition de Neper, d'ailleurs non rigoureusement justifiée, n'est autre que la définition infinitésimale $Lx = \int \frac{dx}{x}$, ou, mais moins directement, celle-ci $Lx = \lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Ses logarithmes, que nous désignerons par la lettre N, peuvent être définis par la relation $N(a) = 10^7 \, L \, \frac{10^7}{a}$: ils décroissent donc quand le nombre augmente. Neper avait surtout pour but de faciliter les calculs trigonométriques ; aussi, pour ne pas avoir de nombres négatifs, il fait le sinus total (sin. 90° ou rayon) égal à l'unité (représentée par 10^7) et fait croître les logarithmes à partir de celui de ce nombre.

Pour calculer sa table, il construit une progression géométrique de cent termes, dont le premier est le sinus total et la raison $1 - \frac{1}{10^7}$; le dernier terme est $a = 9999900{,}0004950$. D'après un théorème de Neper qui peut se rendre par la formule (α) de l'exercice 8 de notre *Etude des fonc. hyp.*, — formule qui se déduit immédiatement de la définition cinématique de Neper, — on trouve

$$100 < \mathrm{N}(a) < 100{,}00001 \qquad \text{d'où sensiblement } \mathrm{N}(a) = 100{,}000005$$

et de là

$$\mathrm{N}(9999900) = 100{,}00050000.$$

Une autre progression de cinquante termes dont le premier est le sinus total, et le second 999 9900, — la raison par suite étant $1 - \frac{1}{10^5}$, lui donne

$$\mathrm{N}(9995001{,}222927) = 50.100{,}0005 = 5000.025\,,$$

d'où

$$\mathrm{N}(9995000) = 5001{,}2485387.$$

Il construit ensuite soixante-neuf progressions de vingt termes chacune; la raison est partout $1 - \frac{1}{2000}$, les termes initiaux forment eux-mêmes une progression dont le premier terme est le sinus total et la raison $1 - \frac{1}{100}$. Il a ainsi les logarithmes de 1380 nombres variant de 1 à 0,5 et qui lui permettent de calculer par approximation ceux des lignes trigonométriques de 90° à 30°.

Neper indique aussi un autre genre de logarithmes plus commode dans la pratique: ce sont ceux qui ont zéro pour logarithme de l'unité et 10^{10} pour logarithme de 10. Pour calculer ces nouveaux logarithmes, il propose trois méthodes élémentaires, ingénieuses mais peu pratiques. Par la première, on déterminera, au moyen de racines cinquièmes successives de 10, les nombres dont les logarithmes sont 2 000 000 000, 400 000 000, 80 000 000, 16 000 000, 3 200 000, 640 000, 128 000, 25 600, 5 120, 1 024; puis, par des extractions de racines carrées successives de la dernière racine obtenue, les nombres dont les logarithmes sont 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Par des multiplications convenables de ces racines, on aurait les anti-logarithmes de tous les nombres [1].

La seconde méthode ne demande que des extractions de racines carrées. Par exemple, pour trouver log. 5, on prendra successivement le moyen géométrique des nombres 10, 1, dont les logarithmes sont connus, puis le moyen géométrique entre 10 et ce moyen, etc., en moyennant toujours deux nombres, l'un plus grand que 5 et l'autre plus petit [2].

Enfin la troisième méthode de Neper se déduit de cette remarque que le nombre de chiffres de la puissance 1000^{me} de a diminué de 1 représente log. a. Ainsi comme on a :

$$2^{10000000} = 10^{301029996}$$

on peut écrire log. $2 = 0{,}30102995$. Briggs a continué ce calcul et a obtenu ainsi log. 2 avec treize décimales.

Kepler (*Chil. log.* Marpurg, 1624) considère un rapport fixe et le *mesure* par la différence de ses termes. Tout autre rapport a pour mesure celle du rapport fixe multipliée par le nombre de fois que ce rapport *contient* le rapport type [3]. Par exemple, prenons pour rapport type la racine $(2^{30})^{me}$ de $\frac{1}{0{,}7}$, c'est-à-dire le rapport obtenu après trente extractions successives de racines carrées, et que nous désignerons par $\frac{1}{a}$: les rapports $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{0{,}7}$ seront mesurés par $1 - a$ et par $2^{30}(1 - a)$. Pour mesurer le rapport $\frac{1}{1{,}024}$, on en extraira des racines

---

[1] Cette propriété des termes de la progression 1 : 2 : 4 : 8 :... de donner par multiplication tous les nombres entiers et celle presque identique de la progression 1 : 3 : 9 : 27 :... se voient dans l'ouvrage cité de Stifel.

[2] Euler, refaisant ce calcul, a dû extraire vingt-deux racines pour obtenir log 5 avec sept décimales exactes.

[3] Cela veut dire que si $1 - \omega$ désigne un nombre fixe dont le logarithme soit ω, le logarithme de tout nombre k, dans ce système, sera $n(1 - \sqrt[n]{k})$, n désignant l'exposant de la puissance de ω qui donne le nombre k, ou, comme dit Kepler, le nombre de fois que le rapport $\frac{1}{\omega}$ est contenu dans le rapport $\frac{1}{k}$.

carrées successives jusqu'à la vingt-cinquième, b, qui est sensiblement égale à $\frac{1}{a}$: la mesure cherchée est donc 2^{25} $(1 - b)$.

On mesurera de même les rapports

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{0,96}, \frac{1}{0,98}, \frac{1}{0,99}, \frac{1}{0,95}, \frac{1}{0,988}, \frac{1}{0,969}, \frac{1}{0,961}, \ldots$$

ce qui donnera les logarithmes kepleriens des nombres 2, 5, 3, 11, 13, 17, 23,...

Il donne, sans démonstration suffisante, plusieurs relations intéressantes, dont la relation (β) de l'exercice 8 et la première inégalité (α) de l'exercice 16, de notre article sur les *fonc. hyp.*

On voit que Kepler peut représenter tous les systèmes, sauf le système neperien. Sa théorie est d'ailleurs bien inférieure à celle de Neper, qu'il se proposait d'éclaircir.

Briggs s'est attaché, comme on sait, au calcul des logarithmes vulgaires. Voulant que la raison de la progression géométrique soit aussi voisine que possible de l'unité, mais ne pouvant se donner celle-ci a priori, puisque la base était fixée d'avance ; voulant d'autre part obtenir ses logarithmes avec quinze décimales exactes ; il calcula d'abord la table suivante de logarithmes vulgaires, qu'il poursuivit jusqu'à ce qu'il ait quinze zéros après la virgule, ce qui lui permettait de concevoir l'insertion de $10^{15} - 1$ moyens géométriques entre 10 et 1,

$$(\alpha) \quad \log 10 = 1\,, \quad \log \sqrt{10} = 0,5\,, \quad \log \sqrt[4]{10} = 0,25\,, \quad \log \sqrt[8]{10} = 0,125\,, \ldots$$

et dont le cinquante-quatrième terme est [1]

$$\log 1,0^{15}12781914932003235 = 0,0^{16}55511151231257827\dot{0}2.$$

Il remarqua que le rapport de l'excès d'une racine sur

[1] Ces racines successives se déduisent les unes des autres à l'aide de diverses formules, dont voici la plus simple : soient

$$\sqrt{1 + A} = 1 + a, \sqrt{1 + a} = 1 + \alpha \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \alpha} = 1 + x\,,$$

on aura

$$x = \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{8}a + \frac{A3}{1024}\,.$$

l'unité au logarithme correspondant tend vers une limite fixe[1] qui se trouve être le nombre

$$M = 0{,}4342944819032518 04 .$$

De là une première méthode de calcul des logarithmes. En effet soit à trouver log. 2 : il extrait quarante-sept fois de suite la racine du nombre 1,024, ce qui lui donne

$$\log 1{,}0^{15}16851605705394977 = 0{,}0^{16}7318559369062393 68$$
$$= M \,.\, 0{,}0^{15}1685165705394977$$

Multipliant par 2^{47}, il trouve

$$\log 2 = 0{,}30102999566391119 52 .$$

Pour log. 3 il part de $1{,}0077696 = \frac{6^9}{10^7}$; pour log. 7, il agit de même sur $1 + \frac{1}{2400}$; pour log. 11, sur $1 + \frac{1}{9800}$; en général, sur des nombres de la forme $\frac{n^2}{n^2 - 1}$, les facteurs des nombres n, $n - 1$, $n + 1$ ayant leurs logarithmes connus, sauf un.

La table (α) permet de trouver autrement log. n, n étant compris entre 1 et 10. On divise n par le nombre de la table immédiatement inférieur, puis le quotient par le nombre qui lui est immédiatement inférieur, etc. On ajoute ensuite les logarithmes correspondants.

Briggs donne encore une autre méthode fondée sur l'emploi d'une table des logarithmes des nombres 1,1, 1,2, ... 1,9 : 1,01,... 1,09 ;... $1{,}0^8 1$, $1{,}0^8 2$,... $1{,}0^8 9$.

Ainsi, par les divisions successives, on a :

$$2966{,}82051458 = 2966 \,.\, 1{,}0^2 2 \,.\, 1{,}0^4 7 \,.\, 1{,}0^5 6 \ldots .$$

d'où le logarithme du nombre proposé à l'aide de ceux de la table.

Les logarithmes étant calculés par exemple de 10 en 10, Briggs montre à intercaler les autres à l'aide de diverses for-

---

[1] Si $\sqrt{1 + A} = 1 + a$, on a en effet : $\frac{A}{\log (1 + A)} = \left(1 + \frac{a}{2}\right) \frac{a}{\log (1 + a)}$.

mules utilisant surtout les différences secondes et cinquièmes.

Gregory a appliqué au calcul de L 10 le théorème rappelé, exercice 15 de nos *fonc. hyp.* Au vingtième terme, il a trouvé deux limites qui ont vingt-deux décimales communes. Il indique ensuite le calcul des nombres plus petits que 100, comme Briggs :

$$L\left(1+\frac{1}{2400}\right) \text{ d'où } L.7;\ L\left(1+\frac{1}{9800}\right) \text{ d'où } L11;\ \ldots$$

Au-delà de 100, il prescrit de calculer

$$L\left[1+\frac{2A-1}{A^2(A-2)}\right]$$

d'où le logarithme de A + 1, connaissant ceux de A — 2, de A — 1 et de A.

Mercator (*Log.* Londres, 1668) a donné une ingénieuse théorie qui s'appuie sur l'étude des proportions à termes équidifférents,

$$\frac{a}{a+b},\ \frac{a+b}{a+2b},\ \frac{a+2b}{a+3b},\ \ldots$$

des rapports de ces rapports, de leurs rapports seconds, etc. Par exemple, on a sensiblement :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{n(b+a)-(b-a)}{n(b+a)+(b-a)}.$$

Ainsi on a :

$$\frac{3}{5}=\frac{15}{17}\,\frac{17}{19}\,\frac{19}{21}\,\frac{21}{23}\,\frac{23}{25} \quad \text{d'où sensiblement} \quad \sqrt[5]{\frac{3}{5}}=\frac{19}{21}.$$

Cela fait voir que les logarithmes des nombres

$$\frac{a}{b},\ \frac{b+3a}{3b+a},\ \frac{2b+4a}{4b+2a},\ \frac{3b+5a}{5b+3a},\ \ldots$$

sont comme les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Il tire de là, par des moyens élémentaires, mais peu rigoureux, les formules approchées

$$(\alpha)\quad \frac{\mathrm{L}\,(a+b)-\mathrm{L}a}{\mathrm{L}\,(a+c)-\mathrm{L}a}=\frac{2a+b}{2a+c}\,,\quad \frac{2\mathrm{L}\,(a+b)-\mathrm{L}a-\mathrm{L}\,(a+2b)}{2\mathrm{L}\,(a+c)-\mathrm{L}a-\mathrm{L}\,(a+2c)}=\left(\frac{a+b}{a+c}\right)^2$$

et autres analogues.

Ceci posé, il a, par des calculs faciles à restituer,

$$1005^{461}=9965774\quad,\quad 995^{459}=1001823$$

d'où, par des interpolations linéaires

$$1005^{461,6868}=10\qquad \text{et}\qquad 995^{459,3659}=0.1$$

De là les logarithmes de 0,995 et de 1,005, d'où, en utilisant (α), log. 101 — log. 100, puis log. 102 — log. 101, etc.

Dans les P. T. de 1714, ont été publiées deux méthodes intéressantes pour le calcul d'un logarithme isolé quelconque. L'une, due à Long est basée sur l'emploi de la table des racines 10^e, 100^e, 1000^e,... de 10 et de leurs neuf premières puissances. On divise le nombre dont on cherche le logarithme par le nombre le plus voisin de la table, puis on agit de même sur le quotient, et ainsi de suite. On n'a plus qu'à ajouter les logarithmes obtenus.

Le second procédé est de Taylor qui l'expose en l'appliquant au logarithme de 2. Posons

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}=7\log 2-2=\log 1{,}28>0\ ,\ \text{d'où}\ \log 2>0{,}28\\
&\mathrm{B}=3\log 2-1=\log 0{,}8\ <0\ ,\ \text{d'où}\ \log 2<0{,}33\\
&\mathrm{C}=\mathrm{A}+\mathrm{B}=10\log 2-3=\log 1{,}024>0\ ,\ \text{d'où}\ \log 2>0{,}3\\
&\mathrm{D}=\mathrm{B}+9\mathrm{C}=93\log 2-28=\log 0.990352031429<0\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{d'où}\ \log 2<0{,}30107\\
&\mathrm{E}=\mathrm{C}+2\mathrm{D}=169\log 2-59=\log 1{,}004336277664>0\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{d'où}\ \log 2>0{,}301020\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathrm{N}=\mathrm{L}+\mathrm{M}=325147\log 2-97879=\log 1{,}000000364511\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{d'où}\ \log 2>0{,}3010299956635\\
&\mathrm{O}=\mathrm{M}+18\mathrm{N}=6107016\log 2-1838336=\log 0{,}999999764687\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{d'où}\ \log 2<0{,}3010299956640
\end{aligned}$$

On a ainsi deux valeurs très rapprochées de log. 2 et on peut en tirer une valeur très exacte en remarquant que si x est très petit on a sensiblement

$(1 \pm x)^z = 1 \pm zx$ d'où sensiblement $x \log (1 - z) + 2 \log (1 + x) = 0.$

Posant en conséquence

$$364511\mathrm{O} + 235313\mathrm{N} = 0 .$$

on trouve la valeur de log. 2 avec quinze décimales exactes.

Dodson (*anti-log. Canon*, 1742) donne avec onze décimales les 100 000 moyens géométriques insérés entre 10 et 1, avec leurs logarithmes vulgaires, c'est-à-dire la table désignée ci-dessous :

$$\begin{array}{l} 1 : a = 1{,}000023026116 : a^2 : a^3 : \ldots : 10 . \\ 0 . \alpha = 0{,}000001 \quad . 2\alpha . 3\alpha \ldots . \quad 1 . \end{array}$$

Euler, dans son *Alg.* enseigne ainsi à trouver la valeur de log. 2. Il s'agit de résoudre l'équation $10^x = 2$. Or on a :

$$2^4 > 10 > 2^3 , \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{3} > x > \frac{1}{4}$$

La fraction $\frac{1}{6}$, formée en additionnant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux limites de x, est comprise entre elles [1]: c'est donc une nouvelle approximation. Or

---

[1] Cette remarque, que les Anciens paraissent avoir connue et utilisée, se voit pour la première fois chez Chuquet (l. cit.), qui l'appelle « la rigle des moyens » et l'emploie ainsi pour « lextraction des racines imparfaictes. »

Soit $\sqrt{6}$; l'essai direct donne $2 < \sqrt{6} < 3$. Essayons successivement $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{5}$, ... $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, ... nous trouvons :

$$2\frac{1}{2} > \sqrt{6} > 2\frac{1}{3} ,$$

d'où le moyen $2\frac{2}{5}$, qui après essai, se trouve être trop petit. Moyennons les deux limites $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{2}{5}$, il vient $2\frac{3}{7}$, valeur trop petite. « Et par ceste manière peulx proceder en adjoustant le moins avec le plus ou le plus avec le moins Jusques a ce que lon sapproche bien pres de . 6 . ung petit plus ou ung petit moins et tant qu'il souffise. Et doit on scavoir que tant plus lon continueroit par ceste manie tant plus pres de . 6 . lon sapprocheroit mais Jamais on ne lattaindroit pcisemet. »

Estienne de la Roche, dans son *Arismétique* (Lyon, 1520) emploie également ce procédé, qu'il appelle *par médiacion*.

On appelle aujourd'hui *médiantes* le genre de moyennes dont il vient d'être parlé, et leur étude a mené à la connaissance de diverses suites importantes étudiées par Farey, Cauchy, Brocot, Halphen, etc.

on a :

$$10^2 < 2^7 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} > x > \frac{2}{7} \,.$$

De même, on trouve :

$$\frac{1}{3} > x > \frac{3}{10} \,,\; \frac{4}{13} > x > \frac{3}{10} \,,\; \frac{7}{23} > x > \frac{3}{10} \,,\; \ldots \frac{28}{93} > x > \frac{3}{10} \,,\; \frac{31}{103} < x \,.$$

La relation $\frac{28}{93} > x > \frac{31}{103}$ donne l'approximation $\frac{59}{196}$, qui se trouve être trop petite. Combinons-la avec $\frac{28}{93}$, il vient $\frac{87}{299}$, trop forte. Combinons cette dernière avec $\frac{59}{196}$, il vient $\frac{146}{485}$; et ainsi de suite.

Cette méthode serait certainement la moins pratique de toutes celles qu'on a imaginées dans ce but.

La méthode de Briggs, décrite plus haut a été modifiée heureusement par Flower (*New way of making log.* 1771.) Le diviseur est formé de l'ensemble des quatre premiers chiffres, en ajoutant 1, ce qui fournit un quotient de la forme $0{,}9^n$ ab... On multiplie ce quotient par $1{,}0^n\,\alpha$, α étant le complément à 9 de a. On répète la même opération sur le produit et on continue jusqu'à ce que la première moitié des chiffres du produit soit composée de 9 : on écrit, immédiatement les derniers facteurs, en prenant les compléments des derniers chiffres. Ainsi par exemple

$$\frac{2966{,}82051456}{2967} = 0{,}9^4 3950608695$$

le quotient multiplié par $1{,}0^4 6$, donne $0{,}9^6 502457315$; ce produit, multiplié par $1{,}0^6 4$, donne $0{,}9^7 02457116$; celui-ci, multiplié par $1{,}0^7 9$, donne $0{,}9^8 2457107$; ce dernier résultat fournit les facteurs

$$1{,}0^8 7 \;,\quad 1{,}0^9 5 \;,\quad 1{,}0^{10} 4 \;,\quad 1{,}0^{11} 2 \;,\quad 1{,}0^{12} 8 \;,\quad 1{,}0^{13} 9 \;,\quad 1{,}0^{14} 2 \;;$$

d'où

$$\log 2966{,}8\ldots = \log 2967 - (\log 1{,}0^4 6 + \log 10^6 4 + \ldots)$$

Cette méthode a reçu plusieurs perfectionnements de détails de Lefort, Fedor Thoman, Burnier, Gray et Hopp. Byrne (*Dual log.* 1863) a proposé de la modifier en remplaçant dans la table, les logarithmes de 1,2, 1,3,... 1,02, 1,03,... par ceux de $1,1^2$, $1,1^3$,... $1,01^2$, $1,01^3$,... ce qui réduit la construction de la table au calcul des logarithmes de 1,1, 1,01, 1,001,...

Garnier dans son *Alg.* (Paris, 1800), apprend à développer les logarithmes en fractions continues. Soit à trouver log. 2; on a $10^x = 2$, d'où $x < 1$. Posons $x = \frac{1}{\alpha}$; on aura $2^\alpha = 10$, d'où $\alpha = 3 + \beta$ et $2^\beta = 1,25$. Donc $\beta < 1$; posons $\beta = \frac{1}{\gamma}$, on aura de la même manière

$$\gamma = 3 + \delta\ , \quad 1,25^\delta = 1,024\ , \quad \text{d'où} \quad \delta < 1\ ;$$

posons donc $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui donnera

$$\varepsilon = 9 + \zeta\ , \quad 1,024^\zeta = \frac{1,25}{1,23794} = 1,0097\ ,$$

$$\zeta = \frac{1}{\eta}\ , \quad \eta = 2 + \theta\ , \quad 1,0097^\theta = \frac{1,024}{1,019494} = 1,0044\ .$$

Il arrive finalement à ce résultat

$$\log 2 = \frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{\nu} = \frac{729}{2621} = 0,3010301\ .$$

Enfin nous signalerons la méthode de Namur (*Tables de log.* Bruxelles, 1877), qui prescrit de multiplier le nombre dont on cherche le logarithme par un facteur convenable, de manière que le produit soit voisin de 1 000000 M : les différences des logarithmes sont, aux environs de ce nombre, de la forme 100..., ce qui rend l'interpolation très aisée.

Nous aurions voulu faire encore ressortir davantage l'importance de l'admirable découverte de Neper, en signalant l'influence qu'elle eut sur les progrès du calcul, de la trigonométrie, de la cinématique, de l'algèbre ; sur l'extension de celle-ci aux quantités transcendantes ; ainsi que sur la découverte du calcul des fonctions et du calcul infinitésimal. Mais cela eût dépassé notre but, et nous nous contenterons de rappeler, en nous y associant, l'une des épigraphes placées en tête de la *Mirifici Descriptio :*

« Hic liber est minimus, si spectes verba ; sed usum
Si spectes, Lector, maximus hic liber est.
Disce ; scies parvo tantum debere libello
Te, quantum magnis mille voluminibus. *Andreas Junius.* »

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

LA MATHÉMATIQUE PURE ET L'APPROXIMATION

1. — Dans l'évolution actuelle de l'enseignement des sciences, on constate un mouvement bien marqué vers l'utilité. Trop longtemps on a dit que le seul but des mathématiques était de former le raisonnement ; on les a enseignées comme s'il ne s'agissait que de créer de futurs mathématiciens. Aujourd'hui, on veut faire voir aux élèves que les sciences exactes ont de nombreuses applications pratiques, que la mathématique pure n'est pas seulement une excellente gymnastique de l'esprit, un admirable modèle de pensée logique, mais encore une interprétation approchée et commode de la réalité. Il n'est guère besoin de rappeler ici les nombreux écrits de M. Klein [1] en Allemagne, de M. Perry [1] en Angleterre et de beaucoup d'autres auteurs [2]. Signalons toutefois, parmi les ouvrages français, les volumes très suggestifs de M. Laisant, *La Mathématique ; Philosophie-En-*

---

[1] Voir l'aperçu qu'en donne M. Marotte dans sa note sur *L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne*, publiée dans le *Bull. des sciences math.* de 1905, p. 281-306.

[2] Consulter les divers volumes de L'*Enseignement Mathématique*.

seignement [1] et l'*Initiation mathématique* [2]; puis les *Conférences du Musée pédagogique* [3] et enfin les *Instructions* qui accompagnent les nouveaux programmes français du 27 juillet 1905 [4].

Ce mouvement vers la réalité est bien légitime et nous cherchons le moyen de suivre le courant sans faire subir d'oscillations trop brusques à nos méthodes habituelles.

Devons-nous nous contenter de vérifier les formules trigonométriques à l'aide de tables, comme le conseille M. Perry; voulons-nous, avec M. Borel, créer des laboratoires de mathématiques, des ateliers de menuiserie où les élèves construiraient au tour des surfaces de révolution, tandis que d'autres ouvriraient et refermeraient des robinets pour résoudre pratiquement les problèmes classiques sur les bassins à remplir et à vider? Il faudrait tenter l'expérience pour pouvoir en juger sagement. Sans exagérer l'importance de ces exercices pratiques, nous devons reconnaître qu'ils sont excellents pour *préparer* l'enseignement théorique des mathématiques et pour donner une idée des limites d'exactitude des mesures réelles. Mais il est inutile d'en abuser. Nous ne voulons pas sacrifier la haute valeur éducative du raisonnement mathématique ; une bonne et solide logique doit en faire le fond.

Nous croyons qu'il est nécessaire de donner un caractère expérimental au début de notre enseignement, mais nous pensons aussi qu'à un certain moment il faut grouper les résultats observés, reconnaître leurs liens mutuels et arriver enfin à montrer comment on peut les déduire tous d'un minimum d'entre eux.

La manière naturelle de rapprocher la mathématique pure de la réalité, c'est de partir du concret pour arriver à l'abstraction quand on en sent le besoin, puis de retourner du

[1] Paris, Gauthier-Villars, 1re édition 1898, (2e édition, sous presse. *Réd.*).
[2] Paris, Hachette ; Genève, Georg & Cie, 1906.
[3] *L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques* par H. Poincaré, G. Lippmann, L. Poincaré, P. Langevin, E. Borel, F. Marotte. Paris, 1904.
L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'Enseignement secondaire des garçons en Allemagne par F. Marotte, Paris, 1905.
[4] Reproduites par l'*Enseignement Mathématique* du 15 Novembre 1905, p. 491-497.

symbole à la réalité en appliquant les résultats généraux trouvés en théorie à de nombreux exemples pratiques.

2. — Je précise mon idée :

En *Géométrie*, par exemple, la première initiation doit se faire à l'école primaire par des exercices de dessin ; il est bon d'apprendre aux élèves à se servir de la règle, de l'équerre et du compas pour construire quelques figures simples ; on peut leur faire constater expérimentalement toute une série de vérités qu'ils démontreront plus tard ; il est facile aussi de rendre plausibles les formules donnant la plupart des aires et des volumes usuels ; on en fera de nombreuses applications, en montrant que les figures en question se rencontrent en très grand nombre dans les objets qui nous environnent.

Les élèves ne trouvent en général aucune difficulté à ce genre d'exercices. — D'où vient que quelques-uns ont tant de peine plus tard à s'habituer à un raisonnement rigoureux ? C'est que le plus souvent ils n'ont pas compris l'utilité et la nécessité d'une telle rigueur.

Un docteur en philologie me disait un jour qu'il reproche au mathématicien de vouloir démontrer des choses évidentes ; par exemple que les côtés opposés d'un parallélogramme ou d'un rectangle sont égaux. Plusieurs de nos élèves ont peut-être fait la même réflexion, et s'ils l'ont faite c'est bien un peu notre faute.

Pour étudier les propriétés du parallélogramme on ne commencera pas par le définir, mais par le dessiner en coupant les lignes parallèles d'un cahier par deux autres parallèles (obtenues par exemple en faisant glisser une équerre sur une règle). Puis on pourra faire mesurer les côtés et les angles, constater qu'ils sont égaux deux à deux, tracer les diagonales, vérifier qu'elles se coupent mutuellement en parties égales, etc. — On observera ensuite que toutes les propriétés trouvées sont des conséquences de la première d'entre elles, celle qui a servi à construire la figure. On peut donc se demander si, en admettant cette première propriété (qui sera la *définition* du parallélogramme), on ne pourrait pas prouver toutes les autres sans instrument, mais par la pensée seule.

Nous substituons ainsi à l'incohérence du procédé expérimental un enchaînement de vérités, — à une mesure grossière, un passage rigoureux d'hypothèse à conclusion, en faisant remarquer la portée de chaque partie de l'hypothèse. Si l'élève a compris que les fragments épars qu'il possédait font partie d'un tout, s'il est bien pénétré de la suite d'idées, s'il reconnaît la nécessité de prouver certaines propositions admises auparavant sans démonstration, il s'intéressera à la géométrie ; il aura compris la différence entre une vérification expérimentale et une preuve logique ; il aura franchi une première étape très importante. Mais il y a mieux à faire encore.

Il faudra qu'il reconnaisse en outre que l'expérience peut être trompeuse. — On lui fera dessiner, par exemple, un triangle dont les trois côtés diffèrent très peu et il croira que les médianes et les bissectrices correspondantes se confondent. — On trouverait facilement d'autres exemples : je rappelle en particulier le paradoxe souvent cité[1] : $64 = 65$. On partage un carré de 64 cases en 2 triangles et 2 trapèzes que l'on peut assembler ensuite en un rectangle de 65 cases. Si l'on prend un carré de 441 cases, l'assemblage rectangulaire semble être parfait et l'expérience montre que $441 = 442$.

L'élève sait maintenant en quoi son bon sens est insuffisant : il constate que la théorie a mis de la cohésion, de l'ordre, de la clarté et surtout de la *précision* dans les connaissances vagues qu'il possédait auparavant.

Il n'y aurait plus maintenant qu'un seul point à élucider : et cependant, il est bon de s'arrêter un instant et de laisser à nos jeunes géomètres l'illusion d'avoir atteint la certitude absolue ; ils croiront que les vérités mathématiques s'imposent à nous et à la nature elle-même. — Il serait dangereux de les rendre sceptiques, de faire sombrer leur enthousiasme naissant ; donnons-leur plutôt l'occasion d'exercer souvent la faculté nouvelle qu'ils viennent d'acquérir en leur proposant une série de problèmes bien gradués. Il est bon de choisir des exemples que l'on peut résoudre soit par une construction géométrique, soit par un calcul numérique, un des

[1] Voir *Initiation mathématique* par C.-A. Laisant. Paris, [illegible]

procédés vérifiant l'autre. Cependant les problèmes de construction proprement dits sont particulièrement attrayants quand ils sont traités avec méthode. Nous possédons un modèle du genre, traduit en plusieurs langues : ce sont les *Méthodes et théories*, de PETERSEN ; cet excellent ouvrage est de plus une bonne préparation à l'étude de la géométrie moderne, l'auteur montrant l'importance de la transformation des figures.

3. — Je n'ai parlé que de Géométrie jusqu'ici, et encore n'ai-je rien dit de bien nouveau, puisqu'il est d'usage d'appliquer une méthode analogue à l'enseignement de l'Arithmétique. L'initiation expérimentale, le mécanisme du calcul se fait à l'école primaire. On commence l'étude des fractions par le gâteau à partager et l'on a raison ; on effectue les opérations fondamentales sans les justifier ; on enseigne les caractères de divisibilité sans les démontrer ; on a une idée de la numération sans en comprendre le principe ; on ne connaît que le nombre positif (entier et fractionnaire). — C'est à l'école secondaire, au Gymnase, que l'on comblera ces lacunes et que l'on insistera sur les extensions successives de l'idée de nombre [1].

En parlant de la soustraction, on introduira tout naturellement le nombre négatif pour rendre l'opération toujours possible ; on remarquera que cette nouvelle notion est utile pour mesurer les grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens différents, recettes et dépenses, températures, distances, etc.

Il est intéressant d'identifier les deux notions de « nombre » et de « longueur d'un vecteur », en représentant les nombres positifs et négatifs sur un axe, à partir d'une origine.

A l'ensemble des nombres entiers correspond ainsi un ensemble de points équidistants, ou aussi de segments dirigés, de vecteurs. — Remarquons qu'on ne sort pas de cet ensemble de points en appliquant à leurs abscisses les trois premières opérations fondamentales.

[1] Voir, à ce sujet, la note de M. FEHR sur *les extensions de la notion des nombres dans leur développement logique et historique*. L'Enseign. math., 4e année, p. 16-27.

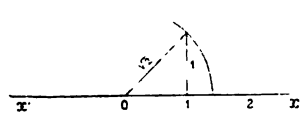
La division introduit les nombres fractionnaires ; les points correspondants viendront remplir les intervalles de la figure précédente. On arrive ainsi à l'ensemble des nombres rationnels et on reste dans cet ensemble si l'on applique à ses éléments les quatre opérations fondamentales.

Le rapport de deux segments s'écrira de préférence $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$ (plutôt que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}$ ou $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{BM}}$) ; on constatera qu'il est susceptible de prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et que l'on peut déterminer la position d'un point sur une droite par le rapport de ses distances à deux points fixes de cette droite.

On peut éventuellement compléter ces notions de Géométrie analytique à une dimension en parlant de la division harmonique et du rapport anharmonique ; en montrant la signification de quelques substitutions simples ;

par exemple : $y = x + a$ (translation, glissement de l'axe sur lui-même ou changement d'origine),
$y = ax$ (amplification ou changement d'unité),
$y = -x$ (symétrie par rapport à l'origine),
ou encore $y = \frac{1}{x}$ et plus généralement $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

La théorie de la racine carrée exige une nouvelle extension de la notion de nombre. Au point de vue pratique, les nombres rationnels suffisent évidemment à la mesure des grandeurs. Et cependant, si l'on n'en introduit pas d'autres, on se voit obligé de dire que l'arc de cercle de la figure ci-dessous ne passe par aucun des points de l'axe Ox, donc ne le coupe pas ; or, nous ne pouvons imaginer qu'une longueur (0 — 2 p. ex.) soit parcourue par un point d'un bout à l'autre sans que le nombre correspondant passe par toutes les valeurs comprises entre les extrémités (0 et 2). L'élève a cette intuition de la continuité. On dira donc que $\sqrt{2}$ et tous les autres nombres irrationnels possèdent dans le domaine de la pensée une existence aussi réelle que les nombres rationnels. Remarquons en outre que l'introduction d'un nouveau symbole tel que $\sqrt{2}$ est très commode puisqu'il condense en un signe, l'infinité des solutions rationnelles approchées.



4. — Et maintenant j'arrive à la dernière étape que nos jeunes géomètres avaient encore à franchir pour arriver à une compréhension exacte de la mathématique pure. S'ils ont bien saisi la notion de nombre irrationnel, ils sauront aussi ce qu'on entend par « point géométrique » ; ils comprendront que c'est une limite, un symbole, une abstraction, et qu'il en est de même de la droite, du plan et de toutes les figures géométriques. — Mais alors ils feront immédiatement cette objection : Les résultats mathématiques ne sont pas conformes à la réalité puisqu'ils portent sur d'autres objets que ceux du monde sensible ! En effet, en créant les symboles subtils de la mathématique pure, on perd en objectivité ce que l'on gagne en rigueur ; mais, il faut reconnaître combien ces abstractions sont commodes. Les figures imparfaitement délimitées par nos sens ou par des instruments ne sont pas même soumises à l'axiome : « Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles », car, si l'on se donne trois objets presque identiques, il peut très bien se faire qu'on ne discerne pas le premier du second, ni le second du troisième, mais que l'on remarque une différence entre le premier et le troisième. Au lieu de dire que deux points déterminent d'autant mieux une droite qu'ils sont plus éloignés (en restant dans les limites du dessin), ou bien que le point d'intersection de deux droites est fixé plus exactement si elles se coupent à angle droit que si elles se rencontrent sous un angle très aigu, — on admet que « par deux points passe toujours une droite et une seule » ; que « deux droites se coupent toujours en un point et un seul ». — C'est plus simple, plus net et cela rend le raisonnement beaucoup plus facile et plus clair : on peut même affirmer que sans ces abstractions, la science serait impossible.

En outre, si les grandeurs sur lesquelles on raisonne ne sont que des conventions, elles ne sont cependant pas arbitraires puisqu'elles ont été pour ainsi dire préparées, dictées par l'expérience ; si elles ne sont pas la traduction exacte des faits, elles n'en diffèrent pourtant que très peu. Un résultat théorique indique toujours une approximation d'autant plus précieuse que l'on en connaîtra plus exactement les limites.

Donc, un complément indispensable à toute théorie mathématique ayant pour but des applications pratiques est une évaluation des erreurs, une théorie des approximations. Sans doute, on ne peut guère exposer à l'école une théorie systématique des erreurs ; mais on doit du moins initier l'élève aux procédés les plus simples de calcul approché par quelques exercices convenablement choisis.

On commencera, par exemple, par faire évaluer la surface d'un carré dont le côté est donné avec une certaine approximation : dire que le côté mesure 6,^{cm}4, au mm. près, c'est dire qu'il est compris entre 6,^{cm}35 et 6,^{cm}45 ; la surface du carré est alors comprise entre 40,$^{cm^2}$3225 et 41,$^{cm^2}$6025 ; on prendra donc comme valeur approchée 41$^{cm^2}$; il serait tout à fait illusoire de conserver d'autres chiffres.

Inversement, si l'on veut avoir des résultats suffisamment approchés, on peut se demander quel degré d'approximation il faut avoir dans les données.

Il est intéressant de faire appel à l'expérience aussi souvent que possible. On peut, par exemple, mesurer directement une circonférence, puis calculer sa longueur en prenant successivement $\pi = 3,14$; $\pi = \frac{22}{7}$; $\pi = 3,1416$; on comparera les résultats et l'on recherchera aussi l'influence d'une petite erreur dans la mesure du diamètre.

Je n'insiste pas sur ces exercices, on en trouvera plusieurs dans les recueils de Martus *(Mathematische Aufgaben)*, de Schülke *(Aufgabensammlung)* et dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Jules Tannery où l'on montre sur quelques exemples la façon d'opérer pour arriver à l'approximation voulue avec le minimum d'effort.

Dans les classes supérieures, on pourra parler aussi de l'interpolation et des méthodes approchées pour l'évaluation des surfaces (méthodes des trapèzes de Poncelet, de Simpson ; comparaison avec les données d'appareils enregistreurs, planimètres, intégraphes).

5. — La question des approximations mériterait évidemment une étude plus approfondie, mais il est temps de conclure.

A cet effet je formulerai les *deux thèses* suivantes :

1. — Il est bon de faire précéder toute définition, toute théorie d'une image grossière donnant une idée générale du sujet, — puis d'amener peu à peu l'élève à la définition logique, à la notion précise sur laquelle on pourra fonder un raisonnement.

2. — Il est utile de voir dans quelles limites se meut le résultat du raisonnement mathématique quand les données varient entre certaines limites connues. Aussi souvent que possible on comparera le résultat des calculs avec le résultat donné par une mesure directe.

Dans la première de ces thèses, j'insiste sur la période d'initiation, puis sur le passage d'une intuition vague à une logique serrée. Dans la seconde, au contraire, je recommande de retourner de l'abstrait au concret en appuyant sur les limites imposées à la raison par l'expérience.

La période préparatoire surtout doit nous intéresser. J'ai déjà parlé de l'introduction à la Géométrie ; je cite encore à ce sujet les ouvrages de MM. Emile Borel[1], Carlo Bourlet[2] et A. Grévy[3], où les considérations de symétrie, de translation et de rotation facilitent les démonstrations.

En *Algèbre*, la représentation graphique des fonctions doit jouer le rôle principal ; un trait de courbe donne mieux l'idée de fonction continue à un débutant que le système d'inégalités de la définition logique ; plus tard, cependant, on pourra faire remarquer que cette définition correspond à une courbe idéale où les abscisses et les ordonnées seraient mesurées avec une précision infinie. Il y a ici le même passage que celui d'un dessin à l'idée subtile de figure géométrique. Une quantité d'autres notions peuvent être ainsi préparées par un petit croquis ; je rappellerai entre autres les fonctions *discontinues* ($\operatorname{tg} x$, $\sec x$), la différence entre les fonctions *uniformes* (x, x^2, x^3, $\sin x$) et *non uniformes* (le cercle $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ a 2 branches ; $y = \arcsin x$ en a une infinité) ; la *dérivée* en un point d'une courbe est la pente de la tangente en ce point. Un point anguleux représente une *discontinuité de la dérivée*. L'*inté-*

[1] Géométrie, premier et second cycles. Paris, Arm. Colin, 1905.
[2] Cours abrégé de Géométrie. Paris, Hachette, 1906.
[3] Géometrie théorique et pratique. Paris, Vuibert & Nony, 1905.

grale doit être définie comme surface ; il serait tout à fait hors de propos de faire soupçonner à nos élèves qu'ils ne savent pas ce que c'est qu'une surface ; le *théorème de la moyenne* revient à remplacer une surface curviligne par un rectangle. Pour rendre plausibles les *théorèmes de Rolle et des accroissements finis*, il suffit de constater que, si l'on a une fonction uniforme dont la dérivée est continue, on peut toujours mener une tangente parallèle à une corde, etc.

Si l'on veut bien faire voir la différence entre deux *séries* dont l'une converge seulement dans un intervalle et l'autre partout, on peut faire dessiner, par exemple, les deux courbes :

$$y = \frac{1}{1 - x} \,, \qquad \text{et} \qquad y = e^x \,,$$

puis celles qui sont fournies par les premiers termes des développements en séries :

$$\begin{array}{ll}
y_1 = 1 + x \,, & y_1 = 1 + x \,, \\
y_2 = 1 + x + x^2 \,, & y_2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \,, \\
y_3 = 1 + x + x^2 + x^3 \,, & y_3 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \,. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

On constatera que les premières ne se rapprochent de la courbe $y = \frac{1}{1 - x}$ que dans l'intervalle de -1 à $+1$, tandis que les autres tendent vers la courbe $y = e^x$ tout entière.

En *Trigonométrie*, je crois qu'il est préférable de commencer par la résolution des triangles rectangles[1] ; au début, on pourra se servir avec avantage d'une table de valeurs naturelles des lignes trigonométriques ; les élèves peuvent eux-mêmes en établir une à 3 décimales à l'aide d'un dessin suffisamment grand sur papier millimétrique. Après l'avoir utilisée dans quelques exercices, ils reconnaîtront aisément en quoi les tables logarithmiques sont préférables. — La résolution des triangles rectangles, à elle seule, peut être illustrée de nombreuses applications intéressantes. — Ce n'est que plus

[1] C'est également ce que recommande M. FEHR, dans son article sur *l'enseignement des éléments de Trigonométrie*. L'Enseign. math. 1re année, 1899, p. 45-49.

tard que l'on parlera des angles supérieurs à deux droits, des angles négatifs, puis des propriétés des fonctions circulaires.

L'étude de la *Géométrie descriptive* est bien préparée par le dessin des projections de quelques solides simples sur deux plans perpendiculaires ; souvent on peut trouver le développement de la surface du solide et reconstituer le modèle en carton. Avant d'aborder les méthodes générales, je fais déterminer à mes élèves les sections par des plans de bout de prismes et de pyramides reposant sur le plan horizontal ; la section se rabat sans difficulté sur le plan de la base. On peut alors faire remarquer l'affinité ou l'homologie de la base du corps avec la projection horizontale de la section ou avec son rabattement. — Plus tard, l'élève retrouvera l'affinité ou l'homologie dans presque tous les chapitres de la géométrie descriptive. En Géométrie analytique, on pourra lui faire voir aussi que certaines substitutions linéaires représentent des transformations affines $x' = x$, $y' = ry$ ou homologiques : $x' = \frac{x}{x-1}$, $y' = \frac{y}{y-1}$ par exemple, (l'origine des coordonnées est le centre d'homologie, la droite $x = 2$ en est l'axe).

La *Mécanique* est avant tout une science expérimentale ; il est difficile d'en donner un exposé bien cohérent dans une école moyenne. Nous devons nous contenter de la période préliminaire, en tenant compte autant que possible du développement historique. Doit-on commencer par la statique, par la cinématique ou encore par une étude géométrique des vecteurs ? Je me borne à poser la question, en insistant cependant sur les avantages des méthodes modernes préconisées par Appell, Chappuis, Kœnigs, etc.

J'arrête ici ces remarques dont le seul but est d'attirer de nouveau l'attention sur ce que l'on peut faire en vue de rendre les mathématiques plus accessibles, plus attrayantes et plus pratiques sans rien enlever de leur haute valeur comme modèle de logique.

L. Kollros (Chaux-de-Fonds, Suisse).

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR DÉTERMINER LES RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION

$$x^3 + px + q = 0$$

M. F. Chomé — dans la 2e partie de son cours de *Géométrie descriptive à l'Ecole Militaire de Belgique: Plans cotés* — applique (chap. V) la méthode des plans cotés à la construction de tableaux graphiques. L'exemple II est relatif à l'équation du 3e degré.

Sans qu'il soit nécessaire de recourir aux plans cotés, on peut obtenir le tableau graphique de M. Chomé, qui n'est d'ailleurs que l'abaque de Lalanne. (voir par ex. *Nomographie* de Maurice d'Ocagne).

Je me propose de montrer que la méthode de Lill, appliquée à l'équation du 3e degré conduit au même abaque.

Lill a donné un procédé graphique permettant de déterminer les racines réelles d'une équation algébrique de degré quelconque, et a même étendu sa méthode au cas des racines imaginaires (*C. R.*, t. LXV et *Nouv. Ann. de Mathém.*, 1867 et 1868).

On suppose un carré dont le côté est égal à l'unité du dessin et dont les sommets numérotés 0′, 1′, 2′, 3′ indiquent, par l'ordre naturel des nombres entiers, le sens direct dans lequel il faut suivre le contour du carré.

On construit alors un contour rectangulaire 012345... ω dont les côtés ont des longueurs proportionnelles aux coefficients des puissances successives de x dans l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0 ,$$

depuis la puissance dont l'exposant est m jusqu'à celle dont l'exposant est zéro. Si les coefficients de l'équation sont positifs, on observe, pour tracer les côtés du contour 0123... ω, le sens des côtés respectivement parallèles du carré de référence 0′ 1′ 2′ 3′. Si un coefficient est négatif, on trace le côté correspondant en sens contraire du côté parallèle du carré de référence. Si un coefficient est nul, le côté correspondant du contour 0123... ω sera nul, mais sa direction sera indiquée par une ligne pointillée.

On construit ensuite un second contour rectangulaire *oabc*... ω, réunissant le point origine *o* au point final ω du contour rectangulaire 0123... ω, les sommets intermédiaires *a*, *b*, *c*,... se trouvant sur les côtés (ou leurs prolongements) du 1er contour rectangulaire.

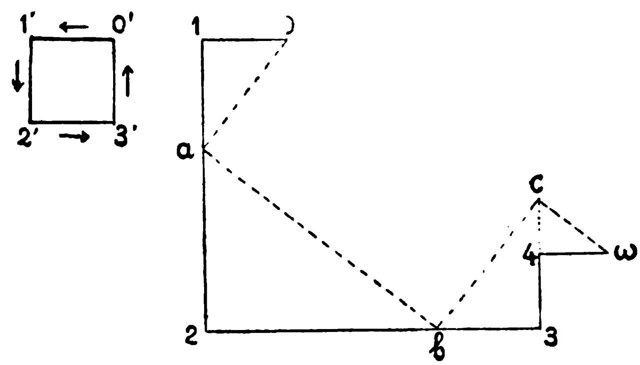


Fig. 1

Ainsi, dans le cas d'une équation du 4^e degré, on obtient par exemple la fig. 1. La longueur (1, *a*) représente une racine réelle de l'équation considérée ; cette racine est négative parce que *a* est au-dessous du point 1 ; lorsque *a* est au-dessus de 1 — sur le prolongement de (2,1) — la racine (1, *a*) est positive.

La démonstration de ce procédé ressort immédiatement de la considération des triangles rectangles semblables de la fig. 1.

Cette méthode n'est pas pratique en général, parce qu'elle exige de nombreux tâtonnements. Pour le 2^e degré, elle donne une construction simple avec la règle et le compas. Pour le 3^e degré on aboutit à l'abaque de Lalanne.

1. *Méthode de Lill.* — L'équation $x^3 + px - q = o$ fournit la fig. 2. On a supposé, pour fixer les idées, $p > o$ et $q < o$ dans l'équation $x^3 + px + q = o$. Le 2[e] côté (1,2) du 1[er] contour rectangulaire n'est indiqué que par sa direction, parce que l'équation ne renferme pas de terme en x^2.

Les triangles semblables $(o, 1, a)$, $(2, a, b)$ et $(3, b, 4)$ donnent

$$\frac{(0,1)}{(1,a)} = \frac{(2,a)}{(2,b)} = \frac{(3,b)}{(3,4)},$$

et, si on pose $(1, a) = \alpha$, on trouve $\alpha^3 + p\alpha - q = o$, c'est-

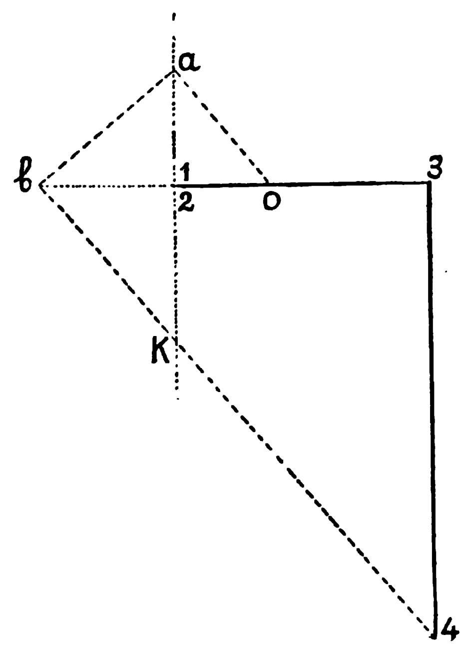


Fig. 2

à-dire l'équation $x^3 + px - q = o$, satisfaite pour la racine positive $x = \alpha$.

2. *Construction de l'abaque.* — Si on prend le point 1 comme origine de 2 axes de coordonnées rectangulaires 1 P et 1 Q dont les parties positives coïncident avec 1,3 et 1, a et qui correspondent aux coordonnées p et q, la droite bk a pour équation

$$\frac{p}{-\alpha^2} + \frac{q}{-\alpha^3} = 1 .$$

La position de cette droite dépend uniquement de α et il est facile de construire les positions successives de cette droite pour des valeurs consécutives de α.

L'enveloppe de ces droites est $4\,p^3 + 27\,q^2 = o$. C'est une courbe présentant un point de rebroussement de 1e espèce au point 1, la tangente commune aux deux branches de la courbe coïncide avec l'axe 1 P et la courbe est entièrement à gauche du point 1.

Toute tangente à la branche supérieure est une droite bk, située au-dessous de 1 P et correspondant à une valeur positive de α ; toute tangente à la branche inférieure est une droite $b'\,k'$, située au-dessus de 1 P et correspondant à une valeur négative de α. Si on suppose $(1, a') = (1, a)$, les deux points b' et b coïncident et les deux tangentes font des angles égaux avec 1 P. (fig. 3).

Connaissant la position d'une tangente qui correspond à une valeur positive α, on détermine immédiatement la tangente qui correspond à la même valeur prise négativement ; de plus, les racines de l'équation changeant de signes avec le changement de signes de q, on peut se contenter de la partie de la figure qui se trouve au-dessus de 1 P. Toutes les droites allant vers la gauche correspondent à des valeurs positives de α, toutes celles allant vers la droite correspondent à des valeurs négatives de α. Les premières droites étant considérées comme des rayons incidents par rapport à l'axe horizontal, les secondes seront les rayons réfléchis.

Une équation $x^3 + px + q = o$ étant donnée, si $q < o$, on change x en $-x$ et on ramène toujours la recherche des racines au cas où $q > o$. Aux valeurs connues de p et de q correspond un point de coordonnées p et q. Si ce point est entre l'enveloppe et l'axe horizontal, par ce point passent trois tangentes à l'enveloppe (en y comprenant la branche inférieure), il y a trois racines réelles pour x. Si le point (p, q) est sur l'enveloppe, il y a deux de ces trois racines qui sont égales et la troisième est double en grandeur et de signe contraire. Enfin si le point (p, q) est au-dessus de l'enveloppe ou si $p > o$, il n'y a plus qu'une seule racine réelle.

Enfin si les valeurs de p ou de q ne sont pas comprises dans les limites de l'abaque, on rend les racines de l'équation un certain nombre de fois plus petites. Ce nombre sera choisi entier et de manière à être suffisant.

Remarques. — 1° Si par les points de rencontre des droites de l'abaque avec l'axe horizontal, on mène des perpendicu-

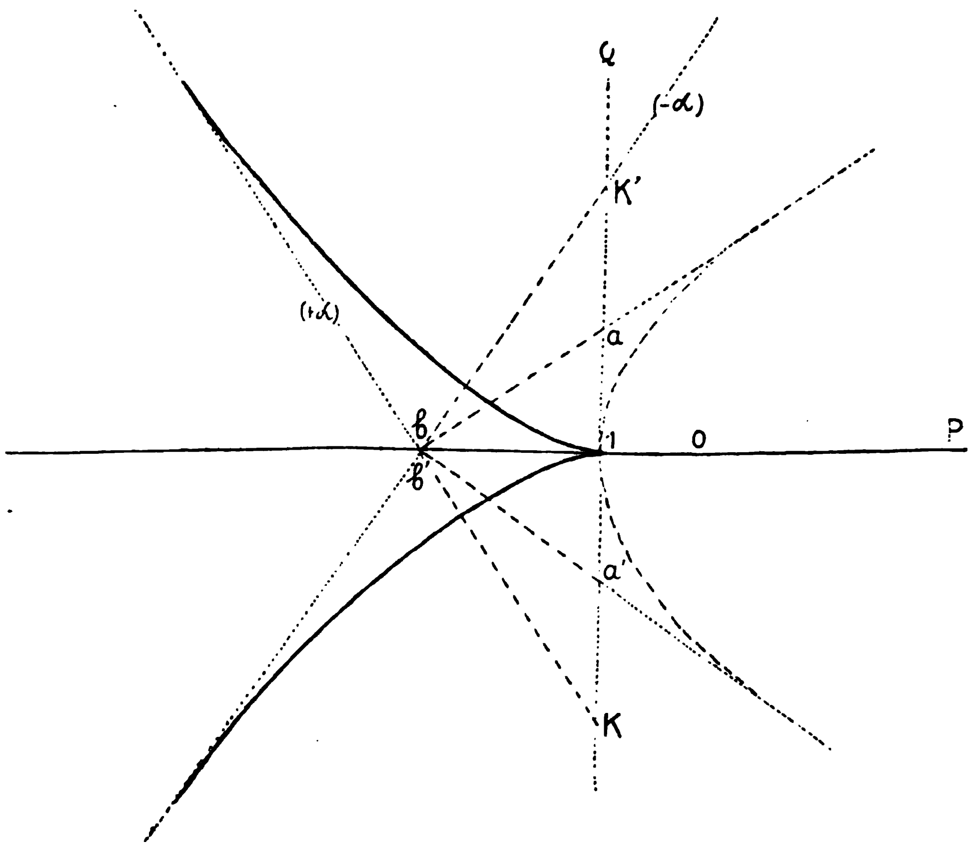


Fig. 3

laires à ces droites, ces dernières auront une enveloppe ayant pour équation $q^2 = 4\,p$. (fig. 3).

2° Si on prend le point milieu de (1, o) comme centre de symétrie, la courbe symétrique de l'enveloppe des droites de l'abaque sera la développée de la parabole $q^2 = 4\,p$. L'enveloppe des droites de l'abaque est elle-même la développée de la parabole $q^2 = -4\,(p-1)$ et cette dernière parabole est donc une trajectoire orthogonale des droites de l'abaque.

3° On pourrait tracer la parabole $q^2 = 4p$ et mener les tangentes à cette courbe. Les perpendiculaires à ces tangentes, menées par les points de rencontre avec l'axe horizontal, donneraient les droites utiles de l'abaque.

E. Brand (Bruxelles).

DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION RELATIVE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Un système

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 = b_{1,1}, & x_2 = b_{1,2}, & x_3 = b_{1,3}, & \ldots & x_n = b_{1,n} \\
x_1 = b_{2,1}, & x_2 = b_{2,2}, & x_3 = b_{2,3}, & \ldots & x_n = b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_1 = b_{s,1}, & x_2 = b_{s,2}, & x_3 = b_{s,3}, & \ldots & x_n = b_{s,n}
\end{array}$$

de s *solutions du système d'équations linéaires et homogènes,*

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \ldots + a_{r,n}x_n = 0
\end{array}\right.$$

étant donné, tout système de valeurs

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = b_{1,1}t_1 + b_{2,1}t_2 + \dots + b_{s,1}t_s \\ x_2 = b_{1,2}t_1 + b_{2,2}t_2 + \dots + b_{s,2}t_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{1,n}t_1 + b_{2,n}t_2 + \dots + b_{s,n}t_s \end{cases}$$

dans lequel $t_1, t_2, \dots t_s$ *représentent des paramètres arbitraires est solution de* (1).

Si, réciproquement $s = n - r$, *et si les deux tableaux*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s,1} & b_{s,2} & \dots & b_{s,n} \end{pmatrix}$$

sont respectivement de rang r *et* s, *toute solution de* (1) *pourra se mettre sous la forme* (2).

Cette proposition fondamentale occupe dans la science mathématique une place considérable. On l'applique, par exemple, à chaque instant, dans la théorie des courbes et surfaces algébriques. Toutefois, ce n'est pas sous cette forme qu'elle se trouve généralement énoncée dans les traités d'Algèbre. On se contente le plus souvent d'établir que r des inconnues du système (1), qui ne peuvent pas d'ailleurs être choisies tout à fait arbitrairement, s'expriment en fonction des $(n-r)$ autres, lorsque le rang du tableau A des coefficients de (1) est égal à r. Ceci suffit pour la plupart des applications, quoique, à vrai dire, cette répartition des inconnues en deux catégories ne soit guère satisfaisante.

Si, d'autre part, $r = n - 1$, on sait que $x_1, x_2, \dots x_n$, sont proportionnels aux déterminants pris avec des signes convenables et formés en supprimant sucessivement dans A chacune des colonnes. Que correspond-il à ceci dans le cas d'un nombre quelconque d'équations ? Voilà ce qu'on omet habituellement de dire.

Il semble, en un mot, mal aisé de donner sans être long ou sans utiliser un symbolisme quelque peu excessif une démonstration, satisfaisante à tous égards, du théorème ci-dessus.

Celle qui suit a pour elle l'avantage de la brièveté. Elle suppose, en revanche, réels, hypothèse dont elle s'affranchit facilement ensuite, tous les éléments des tableaux A et B.

On peut de bien des façons former un tableau B. A étant de rang r, l'un quelconque des déterminants de degré r que renferme A sera différent de zéro. Supposons pour fixer les idées que ce soit le déterminant A′ formé des r premières colonnes de A.

Considérons ensuite, un déterminant de degré s, le déterminant

$$B' = \begin{vmatrix} b_{1,\,r+1} & b_{1,\,r+2} & \cdots & b_{1,\,n} \\ b_{2,\,r+1} & b_{2,\,r+2} & \cdots & b_{2,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s,\,r+1} & b_{s,\,r+2} & \cdots & b_{s,\,n} \end{vmatrix}$$

aux éléments duquel nous donnons des valeurs quelconques, astreintes à la seule condition de ne pas l'annuler.

Dans (1), faisons :

$$x_{r+1} = b_{i,\,r+1}\,, \quad x_{r+2} = b_{i,\,r+2}\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = b_{i,\,n}$$

et résolvons par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_r$ le système d'équations non homogènes, à déterminant A′, différent de zéro, que l'on obtient ainsi; $x_1, x_2, \ldots x_r$ sont alors déterminés d'une manière unique. Nous écrirons :

$$x_1 = b_{i,\,1}\,, \quad x_2 = b_{i,\,2}\,, \quad \ldots\,, \quad x_r = b_{i,\,r}\,.$$

En donnant à i successivement les valeurs, 1, 2,... s, on obtient de la sorte s solutions de (1), dont le tableau, B, est nécessairement de rang s, puisqu'il renferme le déterminant B′, par hypothèse différent de zéro.

Ceci dit, *supposons dans A et B tous les éléments réels.* Puis formons au moyen de A et B le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s,1} & b_{s,2} & \cdots & b_{s,n} \end{vmatrix}$$

Désignons aussi par M et N les déterminants qui s'obtiennent en élevant symboliquement au carré les tableaux A et B.

Si l'on pose

$$c_{i,k} = a_{i,1}a_{k,1} + a_{i,2}a_{k,2} + \cdots + a_{i,n}a_{k,n}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots r)$$

$$d_{j,l} = b_{j,1}b_{l,1} + b_{j,2}b_{l,2} + \cdots + b_{j,n}b_{l,n}. \qquad (j, l = 1, 2, 3, \ldots s)$$

on aura

$$M = | c_{i,k} |, \quad N = | d_{j,l} |.$$

Un premier résultat s'obtient immédiatement :

$$D^2 = \begin{vmatrix} M & \begin{matrix}\text{Eléments} \\ \text{tous} \\ \text{nuls.}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\text{Eléments} \\ \text{tous nuls.}\end{matrix} & N \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$D^2 = MN. \tag{3}$$

Développons maintenant D au moyen de la règle de Laplace. Appelons $P_1, P_2, \ldots P_t$ les déterminants distincts, de degré r, formés avec les r premières lignes de D ; $Q_1, Q_2, \ldots$ Q les déterminants de degré s formés avec les s dernières.

Supposons aussi les notations choisies de telle sorte que Q_1 représente, affecté du signe qu'il convient, le mineur complémentaire de P_1, Q_2 celui de P_2, etc.

On aura, d'une part,

$$D = \sum_{i=1}^{l} P_i Q_i$$

et d'autre part, comme conséquence du théorème de multiplication des tableaux :

$$M = \sum_{i=1}^{l} P_i^2 \,, \quad N = \sum_{i=1}^{l} Q_i^2 \,.$$

On en déduit aussitôt, à cause de (3),

$$\left(\sum_{i=1}^{l} P_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{l} Q_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{l} P_i Q_i\right)^2 = 0 \,.$$

Comme le premier membre s'obtient aussi par élévation au carré du tableau

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_l \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_l \end{pmatrix} ,$$

on en déduit immédiatement

$$\sum (P_i Q_j - Q_i P_j)^2 = 0 \,, \qquad (i, j = 1, 2, 3, \dots l) \,.$$

Mais, par hypothèse, les éléments des tableaux A et B sont tous réels, on a donc :

$$(4) \qquad P_i Q_j - Q_i P_j = 0 \,,$$

quels que soient les indices i et j.

Les déterminants complémentaires dans A et B sont donc proportionnels.

Supposons maintenant, hypothèse légitime, $P_i \neq 0$, $Q_j \neq 0$; il en résulte de suite $P_j \neq 0$, $Q_i \neq 0$. Par conséquent :

Deux déterminants complémentaires dans A et B sont toujours simultanément différents de zéro.

Ce point établi, considérons un système quelconque de valeurs

$$x_1 \,, x_2 \,, \dots x_n$$

vérifiant les équations (1). Parmi les mineurs complémentaires de D simultanément différents de zéro, supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait entre autres les deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_{1,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s,r+1} & b_{s,r+2} & \cdots & b_{s,n} \end{vmatrix}.$$

On pourra toujours, mais d'une seule façon, déterminer des quantités de $t_1, t_2, \ldots t_s$, de manière à avoir

$$x_{r+k} = b_{1,r+k}t_1 + b_{2,r+k}t_2 + \cdots + b_{s,r+k}t_s \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots s)$$

d'où l'on déduit :

$$x_l = b_{1,l}t_1 + b_{2,l}t_2 + \cdots + b_{s,l}t_s + \varepsilon_l \, . \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots r)$$

les ε_λ représentant certaines quantités dont il s'agit de fixer la valeur.

Pour ceci introduisons toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n$ dans les r premières équations (1). En vertu de la première partie, évidente d'ailleurs, de la proposition que nous voulons démontrer, on aboutit au système suivant d'équations pour la détermination des ε_l :

$$a_{k,1}\varepsilon_1 + a_{k,2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{k,r}\varepsilon_r = 0 \, . \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots r) \, .$$

Le déterminant des coefficients étant différent de zéro, les ε_l sont de la sorte nécessairement nuls.

Notre proposition, dans le cas d'éléments réels, se trouve ainsi complètement établie.

Comme d'autre part tout polynôme entier dépendant de plusieurs variables s'annule identiquement s'il est égal à zéro quelles que soient les valeurs réelles attribuées à chacune des variables, nous sommes assurés de tomber sur des identités si dans les relations (4) nous remplaçons les éléments b par leurs expressions en fonction des éléments a. Quelle que soit, par conséquent, la nature des éléments de D, que ceux-ci soient réels ou imaginaires, les déterminants complémentaires de D appartenant respectivement à A et B seront toujours proportionnels. Deux quelconques d'entre eux seront, par conséquent, toujours simultanément différents de zéro.

La proposition se trouve, de ce fait, établie dans tous les cas possibles.

Pour être complet, on doit encore ajouter la remarque suivante :

Le nombre k *étant inférieur à* s, *il n'existe aucun système de solutions de* (1) :

$$x_1 = l_{i,1}\,,\ x_2 = l_{i,2}\,,\ \dots\ x_n = l_{i,n}\,, \qquad (i = 1, 2, \dots\ k)$$

tel qu'en donnant à y_1, y_2, ... y_k, des valeurs convenables, toute solution de (1) puisse se mettre sous la forme

$$x_j = l_{1,j}y_1 + l_{2,j}y_2 + \dots + l_{k,j}y_k\,, \qquad (j = 1, 2, 3, \dots\ n)\ .$$

Si, en effet, la chose pouvait avoir lieu, tous les déterminants Q_1, Q_2, ... Q_l de degré r que l'on forme au moyen de B se réduiraient à zéro. Le rang de B ne pourrait être égal à s. On aboutit à cette conclusion en remplaçant dans l'un quelconque des déterminants Q_i, chaque élément b en fonction des $l_{i,j}$. On arrive de la sorte à un déterminant qui s'obtient aussi, par multiplication de deux tableaux dans lesquels le nombre des lignes est supérieur à celui des colonnes, à un déterminant nul par conséquent.

Il existe, nous l'avons vu, une infinité de tableaux tels que B, et tous de rang s. Appelons homologues les déterminants de degré s, constitués dans chacun d'eux au moyen des mêmes colonnes. On a la proposition :

Dans deux tableaux B *les déterminants homologues sont proportionnels.*

Des tableaux A et B nous avons en effet déduit les relations (4). De A et d'un autre tableau B on déduirait, Q'_i et Q'_j ayant une signification évidente, les relations analogues

$$\frac{P_i}{Q'_i} = \frac{P_j}{Q'_j}\,, \qquad (i, j = 1, 2, \dots\ l)\,. \tag{5}$$

De (4) et (5) résulte aussitôt

$$\frac{Q_i}{Q'_i} = \frac{Q_j}{Q'_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots l).$$

Ceci démontre la proposition que nous venons d'énoncer. Celle-ci, pour les mêmes raisons que tout à l'heure, est vraie quelle que soit la nature des éléments considérés.

Remarque. Dans le cas où les équations (1), au lieu d'être homogènes, admettent un second membre et sont de la forme

$$(6) \qquad a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,n}x_n = d_k, \qquad (k = 1, 2, \dots r)$$

leur solution la plus générale, s'il en existe une, est de la forme

$$x_j = b_{j,1}t_1 + b_{j,2}t_2 + \dots + b_{j,s}t_s + \alpha_j, \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ représentent alors l'un quelconque des systèmes de valeurs vérifiant (6).

La démonstration est immédiate. Nous ne nous y arrêtons pas.

G. Dumas (Zurich).

CONSTRUCTION ET GÉNÉRATION DES COURBES du $(n+1)^e$ degré et de la $(n+1)^e$ classe[1].

Nous commencerons par les définitions suivantes :

Groupe du $(n+1)^e$ degré.

Un faisceau dont chaque rayon correspond à n rayons d'un autre faisceau alors que chaque rayon de celui-ci correspond à un seul rayon du précédent, détermine avec le deuxième, un groupe du $(n+1)^e$ degré.

Groupe de la $(n+1)^e$ classe.

Etant donné deux divisions de points, telles que chaque point de la première correspond à n de la deuxième et chaque point de la deuxième à un seul de la première, ces divisions forment un groupe de la $(n+1)^e$ classe.

[1] Voir C. R. 1906 (n° 24, 11 juin et n° 1, 2 juillet).

Equations :

Les origines sont arbitraires.

α et β étant les abscisses des points des divisions ou les coefficients angulaires des angles des rayons des faisceaux, on a l'équation :

$$\alpha(A\beta^n + B\beta^{n-1} + \ldots + M\beta + N) + A'\beta^n + B'\beta^{n-1} + \ldots + M'\beta + N' = 0 \tag{1}$$

ou

$$\alpha F_1^n(\beta) + F_2^n(\beta) = 0 \,. \tag{2}$$

Il y a 2 $(n + 1)$ ou $2\,n + 2$ termes. Donc $(2\,n + 1)$ paires de points homologues ou de rayons homologues permettent de déterminer les coefficients.

THÉORÈME. *Le lieu des points de coupe des rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe du* (n + 1)^e^ *ordre est une courbe du* (n + 1)^e^ *degré. Le sommet du premier faisceau est un point simple de la courbe et le sommet du second un point multiple d'ordre* n.

Soit $S_1\,(k,\,o)$ le premier sommet et $S_2\,(o,\;o)$ l'autre. Tout rayon du premier faisceau donne :

$y = \alpha\;(x - k)$ et ceux de l'autre : $y = \beta x$.

En éliminant α et β on obtient

$$\beta = \frac{y}{x}$$

$$\alpha = -\frac{F_2^n(\beta)}{F_1^n(\beta)} = -\frac{F_2^n(x\,,y)}{F_1^n(x\,,y)} \,.$$

puis enfin

$$y = -\frac{F_2^n(x\,,y)}{F_1^n(x\,,y)}\,(x - k) \,,$$

ou

$$yF_1^n(xy) + xF_2^n(x\,,y) - kF_2^n(x\,,y) = 0 \,.$$

THÉORÈME. *L'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux divisions de points formant un groupe du* (n + 1)^e^ *ordre est une courbe de la* (n + 1)^e^ *classe. La première base est une tangente simple et la seconde une tangente multiple d'ordre* n.

Désignons une des droites en question par :

$$x\mu + y\nu + 1 = 0 \,,$$

avec

$$\mu = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \nu = -\frac{1}{\beta} \,.$$

En faisant varier μ et ν et en introduisant leurs valeurs en fonctions de α et de β dans l'équation principale on trouvera l'équation de l'enveloppe. On a

$$-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{A(-1)^n}{\nu^n} + \frac{B(-1)^{n-1}}{\nu^n} + \ldots + \frac{M(-1)}{\nu} + N\right\} + \left\{A'\frac{(-1)^n}{\nu^n} + \ldots + \frac{M'(-1)}{\nu} + N'\right\} = 0$$

Le terme de degré inférieur étant du n^e degré donc l'origine est un point multiple d'ordre n et le point (k, o) un point simple de la courbe. C. q. f. d.

Corollaire. *Quand les faisceaux ont deux rayons homologues confondus la courbe se ramène à une courbe du* n^e *degré. Le sommet du deuxième faisceau est un point multiple d'ordre* (n — 1) *et celui du premier n'est plus sur la courbe. La droite formée par les rayons confondus s'est détachée de la courbe.*

Dans ce cas la ligne des sommets est confondue avec les rayons homologues considérés. En la prenant comme axe on aura la solution $\alpha = o$ qui entraine $\beta = o$ et par conséquent on aura aussi

$$N' = 0 \ ,$$

L'équation du lieu sera :

ou

$$a + bv + cv^2 + \ldots + mv^{n-1} + nv^n + \mu \{ a' + b'v + \ldots + m'v^{n-1} + n'v^n) = 0 \ ,$$

ou encore :

$$v^n(n'\mu + n) + v^{n-1}(m'\mu + m) + \ldots + v^2(c'\mu + c) + v(b'\mu + b) + a'\mu + a = 0 \ .$$

L'équation étant du $(n+1)^e$ degré la courbe est de la $(n+1)^e$ classe.

$$v = \infty \text{ donne } \mu = -\frac{n}{n'}, \text{ et}$$

$$\mu = \infty \text{ donne } n \text{ solutions en } v,$$

donc la première base est une tangente simple et l'autre une tangente multiple d'ordre n.

Corollaire. *Quand les deux divisions ont un point homologue commun la courbe se ramène à une courbe de la* n^e *classe. La première base se détache de l'enveloppe et n'est plus tangente tandis que la seconde est encore une tangente multiple d'ordre.* (n — 1)

En prenant le point commun comme origine on a : $\alpha = o$ qui entraine $\beta = o$ et par la suite :

$$N' = 0 \ .$$

L'enveloppe prend alors la forme

$$v^n . n + v^{n-1}(m'\mu + m) + \ldots + a'\mu + a = 0 \ .$$

Donc l'enveloppe est de la n^e classe.

$$yF_1^n(xy) + x(A'y^n + B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) - k(A'y^n + B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) = 0 .$$

ou

$$F_1^n(xy) + xF_2^{n-1}(xy) - kF_2^{n-1}(x,y) = 0 .$$

Le terme de degré inférieur est du $(n-1)^e$.

L'origine est un point multiple d'ordre $n-1$. D'autre part $y = o$ amène

$$x = \frac{M'}{M'+N} k .$$

Donc le point (k, o) n'est plus sur la courbe.

$\nu = \infty$ ne donne plus de solutions en μ autre que $\mu = \infty$, par conséquent la première base n'est plus une tangente ; par contre $\mu = \infty$ donne $(n-1)$ solutions en ν différentes et différentes de $\nu = \infty$ ce qui prouve que la deuxième base est une tangente multiple d'ordre $(n-1)$

Application des théories précédentes a la construction des courbes.

Les deux théorèmes précédents et leurs cas spéciaux permettent de construire par points et par tangentes les courbes du 3e degré à point double ou de la 3e classe à tangente double quand on connaît 5 paires d'éléments homologues dans les groupes générateurs.

Les cas spéciaux déterminent des coniques auxiliaires au moyen desquelles on peut trouver tous les éléments des groupes et par conséquent les courbes considérées.

Courbes du 3e degré.

Le groupe primitif du 3e degré sera formé par un faisceau S (a, b, c) et un un faisceau S_1 $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1)$ contenant les rayons homologues *nécessaires*.

Le rayon c détermine sur S_1 une division A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et le rayon C_1 sur S une division A B C; celles-ci ont le point CC_1 commun. Elles ont pour enveloppe une courbe de 2e degré

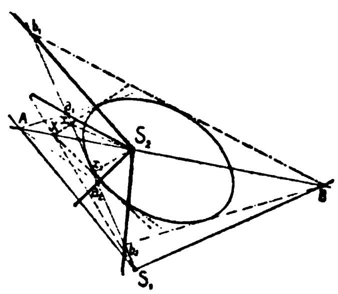
Courbes de la 3e classe.

Désignons par A, B, C des points de la 1re division et par A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 les points homologues *nécessaires* de la 2e. Les tangentes sont avec les deux bases :

$$AA_1 , AA_2 , BB_1 , BB_2 , CC_1 .$$

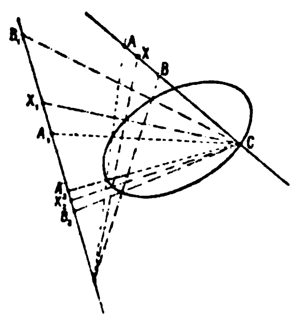
En considérant les points C et C_1 comme sommet de deux fais-déterminée par les tangentes AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 et la base c de la division.

Par tout point X de c_1 on peut mener deux tangentes arbitraires à cette conique. Elle déterminent 2 points X_1 et X_2 sur c. Donc SX et S_1X_1 puis S_1X_2



sont des rayons homologues du groupe primitif et ils déterminent deux points nouveaux de la courbe. En laissant X décrire C_1 on forme l'ensemble des tangentes de la conique auxiliaire et l'ensemble des points de la courbe du 3ᵉ degré. (Voir fig. 1)

ceaux et en joignant C avec les points de la 2ᵉ base, C_1 avec ceux de la 1ʳᵉ base, on obtient un groupe du 3ᵉ degré dans lequel CC_1 représente 2 rayons homologues confondus. Ce groupe détermine une conique



que l'on construit par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 connus.

Tout rayon passant par C_1 et coupant la conique donne deux points que l'on joint à C et qui sont les rayons homologues du 2ᵉ faisceau. Les 3 rayons sont prolongés jusqu'aux bases et déterminent ainsi 2 nouvelles paires de points du groupe primitif de 3ᵉ classe et par conséquent deux nouvelles tangentes. Donc la courbe peut être construite par tangentes en menant par C des rayons arbitraires qui coupent la conique auxiliaire. (Voir fig. 2).

Remarque. Le 2ᵉ faisceau ou la 2ᵉ ponctuelle forme une involution du 2ᵉ degré, qui est homographique avec l'autre faisceau ou l'autre ponctuelle. La construction précédente donne une démonstration des théorèmes suivants très connus.

Quand le sommet d'un faisceau involutif est sur une conique, les sécantes déterminées

Quand une tangente d'une conique est considérée comme base d'une involution, les points *par chaque paire de rayons homologues sont concourantes.*

Courbes du (n + *1*)^e *degré.*

1) Etant donné deux faisceaux S_n, S_1 formant un groupe du $(n+1)^e$ degré, celui-ci est déterminé par $(2n+1)$ paires de rayons homologues fournissant $(2n+1)$ points de la courbe en dehors du point multiple d'ordre n et du point simple considérés aux sommets des deux faisceaux.

2) Soient maintenant deux rayons homologues a et a' coupant les deux faisceaux a coupe S_1 et a' coupe S_n. Ceux-ci donnent deux divisions de points du $(n+1)^e$ degré avec un point homologue commun. Ces divisions entraînent une courbe auxiliaire de la n^e classe dans laquelle la base a' est tangente d'ordre $(n-1)$ tandis que a n'est pas tangente.

3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite ; par tous les points de a' on peut lui mener une tangente mais une seule qui donne un point sur la division a, mais par contre par le point trouvé on peut mener $(n-1)$ tangentes, nouvelles qui donnent les $n-1$ autres points correspondant à celui-là, de telle sorte par les points ainsi considérés, on peut toujours mener les rayons homo-

de coupe de chaque paire de tangentes menées par deux points homologues sont sur une même ligne droite.

Courbes de la (n + *1*)^e *classe.*

1) Etant donné deux divisions de points D_n et D_1, formant un groupe de la $(n+1)^e$ classe celle-ci est déterminée par $(2n+1)$ paires de points, c'est-à-dire par $(2n+1)$ tangentes en dehors de la tangente multiple d'ordre n et de la tangente simple considérées comme bases des divisions.

2) Si maintenant nous prenons deux points homologues A A' et que nous joignons tous les points de D_n avec A' et tous ceux de D_1 avec A nous formons deux faisceaux en A' et A tels qu'à tout rayon de A' en correspondent un de A et à tout rayon de A on en trouve n de A'. On a un groupe de la $(n+1)^e$ classe avec un rayon homologue commun ; la courbe correspondante est du n^e degré, le sommet A' est un point multiple d'ordre $n-1$, l'autre est extérieur.

3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite, à tout rayon arbitraire issu de A correspondent n points de coupe avec cette courbe, c'est-à-dire n rayons issus de A' (réels ou imaginaires). Le rayon par A donne un point sur D_1 et les n rayons par A' donnent les n points correspondants sur D_n. Ceux-ci déterminent n nouvelles tangentes de la courbe primitive de la $(n+1)^e$ classe. Par

logues correspondants, n en S_n et un en S_1. Ces rayons donnent des nouveaux points de la courbe du $(n+1)^e$ degré, et par conséquent, cette courbe peut être construite au moyen de la courbe auxiliaire correspondante de la n^e classe.

conséquent cette courbe peut être construite au moyen des points de la courbe inférieure du n^e degré.

Construction de la courbe auxiliaire.

Pour déterminer cette courbe de n^e classe qui correspond à un groupe de $(n+1)^e$ classe ayant une paire de points homologues confondus, nous remarquons que l'on a $2n$ tangentes différentes, une d'ordre $(n-1)$ et une droite non tangente.

Si maintenant, nous prenons une quelconque des $2n$ tangentes simples différentes, celle-ci est coupée par les $(2n-1)$ autres en $2n-1$ points. A chaque point de la tangente d'ordre $(n-1)$ correspond un seul point de cette tangente simple et à chaque point de celle-ci correspondent $(n-1)$ points homologues sur la tangente multiple, car, par chaque point de la tangente simple on peut mener $(n-1)$ autres tangentes simples.

Il en résulte donc que la construction de la courbe de la n^e classe se ramène à deux divisions formant un groupe de la n^e classe, donc telle qu'à tout point de l'une correspondent $(n-1)$ points de l'autre et à tout point de cette autre un seul de la première.

On peut également ramener cette courbe à celle résultant d'un groupe de n^e degré. Cette courbe comporte le point A′ comme point multiple d'ordre $(n-1)$ et en plus $2n+1-1$ ou $2n$ autres points simples.

En joignant un quelconque de ces points avec les $2n-1$ autres puis ceux-ci avec A′, on forme deux faisceaux, tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent $n-1$ du 2^e et chaque rayon du 2^e un du premier ; car tout rayon par le point simple en question a encore $(n-1)$ points de coupe possible avec la courbe.

Il en résulte également que la construction de cette courbe se ramène à celle résultant de deux faisceaux formant un groupe du n^e degré d'après les formules précédentes appliquées au nombre des points nécessaires.

Si dans la formule

$$2n+1$$

on fait $n = n - 1$, on trouve

$$2n - 1\ ,$$

comme nombre des tangentes nécessaires en dehors de la tangente d'ordre $n - 1$ et d'une tangente simple.

CONCLUSIONS.

A. *Une courbe de* $(n+1)^e$ *degré* avec un point multiple d'ordre n se ramène à

Une courbe de n^e *classe* avec une tangente multiple d'ordre $(n-1)$, puis à

Une courbe de degré $(n-1)$ avec un point d'ordre $n-2$, puis à

Une courbe de $(n-2)^e$ *classe* avec une tangente d'ordre $n-1$, puis à

. . . .

. . . .

Une courbe du 3^e *degré* avec un point double ou de 3^e *classe* avec une tangente double, et enfin à

Une courbe du 2^e degré ou de la 2^e classe avec 5 points ou 5 tangentes simples.

B. *Il en résulte a priori le théorème suivant particulièrement connu dans les coniques.*

THÉORÈME. *Si un point multiple d'ordre* (n — 1) *d'une courbe du* n^e *degré est considéré comme sommet d'un faisceau involutif du* n^e *degré les points de coupe de* n *rayons homologes avec la courbe sont en ligne droite et les droites correspondant à chaque groupe de* n *rayons sont concourantes.*

A. *Une courbe de la* (n + 1)^e *classe* avec une tangente d'ordre n se ramène à

Une courbe du n^e *degré* avec un point d'ordre $n - 1$^e puis à

Une courbe de (n — 1)^e *classe* avec une tangente d'ordre $(n-2)$ puis à

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Une courbe de 3^e classe ou de 3^e degré avec une tangente double ou un point double, et enfin à

Une courbe de 2^e degré ou de 2^e classe avec 5 points simples ou 5 tangentes simples.

B. Ceci donne le théorème dualistique suivant *dont le cas particulier des coniques est bien connu.*

THÉORÈME. *Si une tangente multiple d'ordre* (n — 1) *d'une courbe de* n^e *classe est considérée comme base d'une division involutive de* n^e *classe, les* n *tangentes issues de* n *points homologues sont concourantes, et les points de concours de chaque groupe sont en ligne droite.*

L. CRELIER, (Bienne-Berne).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — VI

Question 10.

10. — Lorsque vous avez obtenu un résultat sur un sujet que vous poursuivez en vue de publier vos recherches, rédigez-vous immédiatement la partie de votre travail correspondante? Au contraire, accumulez-vous vos résultats sous forme de simples notes, pour n'aborder la rédaction que sur un ensemble important?

On comprend aisément que, suivant les recherches, on pratique tantôt l'une, tantôt l'autre de ces deux méthodes. Plusieurs mathématiciens ont répondu dans ce sens. En effet, s'il s'agit de problèmes isolés, la rédaction immédiate est tout indiquée, tandis que pour un travail d'une certaine étendue il suffit de noter les principaux points sous une forme très brève. Ce n'est qu'une fois le travail achevé dans la tête, que l'auteur entreprend la rédaction proprement dite, et là encore il procède souvent par « approximations successives », selon l'expression employée par deux de nos collaborateurs. Par la nature même de leur objet, les recherches mathématiques demandent en général un long effort au cours duquel on se borne à noter les idées sans se préoccuper de la rédaction. Cette méthode devait donc nécessairement être la plus répandue. Sur 65 mathématiciens qui ont répondu à la question 10, 39 d'entre eux pratiquent cette méthode; 19 préfèrent la rédaction immédiate, tandis que 7 utilisent tantôt l'une tantôt l'autre.

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905 ; 8e année, n° 1, p. 43-48, n° 3, p. 217-225, n° 4, p. 293-310, n° 5, p. 383-385, 1906.

Voici les réponses les plus caractéristiques.

Rép. I (France). — Je ne rédige jamais un travail avant de l'avoir achevé dans ma tête ; mais la rédaction conduit à le perfectionner et à l'étendre. MÉRAY.

Rép. II (France). — Rédactions par approximations successives, réunies à la fin dans l'ordre le plus rationnel. AUDEBRAND.

Rép. III (Angleterre). — Il est impossible de publier immédiatement car les nouvelles idées se suivent avec une trop grande rapidité pour qu'on puisse les approfondir. J'ai déjà beaucoup d'idées maintenant que j'attends de pouvoir écrire et cela m'occupera pendant plusieurs années. Tout ce que je désire c'est que d'autres en découvrent quelques-unes par eux-mêmes et me dispensent ainsi de la peine de les approfondir. Mais il en est beaucoup que je ne pourrai traiter, car la vie est trop courte. E. H. BRYAN.

Rép. VI (Allemagne). — Je n'aborde généralement la rédaction que lorsque le travail est terminé. (...)

Rép. VII (Allemagne). — Pour les quelques théorèmes dont je puis revendiquer la propriété, j'ai toujours écrit immédiatement le résultat. Par contre, pour ce qui est de mes nombreux mémoires historiques, je n'ai généralement commencé la rédaction que lorsque le tout était achevé dans mon esprit. MOR. CANTOR.

Rép. IX (France). — Je prends seulement quelques notes ; si le sujet est trop considérable, je suis obligé d'en faire une rédaction sommaire pour ne pas me perdre dans mes notes. Elle a l'avantage de préparer la rédaction définitive et d'en fixer le plan avec plus de sûreté. (...)

Rép. X (Angleterre). — Les deux ; selon l'âge. GENESE.

Rép. XII (Allemagne). — Les deux manières suivant le cas. (...)

Rép. XIII (Angleterre). — Je publie seulement les résultats quand j'ai obtenu tout ce qu'il est possible d'obtenir pour le moment. En général je ne suis pas satisfait de la première démonstration, mais souvent en approfondissant le sujet je trouve une marche entièrement différente. (...)

Rép. XV (Allemagne). — Je travaille en améliorant peu à peu ; c'est une sorte de méthode d'approximation. (...)

Rép. XVI (Belgique). — Je rédige immédiatement les résultats trouvés ou entrevus mentalement. STUYVAERT.

Rép. XVIII (Italie). — Je préfère attendre la rédaction complète. (...)

Rép. XIX (Allemagne). — Je n'aborde la rédaction que lorsque je possède tous les résultats. Cela me coûte toujours un effort sérieux pour m'y décider, car, un problème qui m'a occupé longuement, une fois résolu, perd de son intérêt pour moi. (...

Rép. XXI (Allemagne). — Peu ou pas de notes. Une fois le travail achevé, je fais rapidement la rédaction. L. Boltzmann.

Rép. XXII (Etats-Unis). — J'attends jusqu'à ce que j'aie réuni un matériel assez considérable. Pendant la rédaction il se présente alors souvent des simplifications ou des modifications importantes qui entraînent un remaniement complet du texte.
Edw. B. Escott.

Rép. XXIII (France). — J'ai employé les deux méthodes; en principe, réunir des notes et rédiger seulement ensuite est à mon avis préférable, pour un travail un peu étendu. Laisant.

Rép. XXV (Hollande). — Je rassemble mes résultats sous forme de simples notes sténographiques, et à la fin je commence la rédaction définitive. H. de Vries.

Rép. XXVI (France). — J'ai l'habitude de rédiger au fur et à mesure que je cherche. Si la rédaction est mal faite, je recommence les parties défectueuses. J. Richard.

Rép. XXVIII (France). — Je rédige immédiatement, c'est un grand tort : il faut recommencer vingt fois. Fontené.

Rép. XXIX (Hollande). — J'écris chaque résultat dans un cahier, très brièvement. Je commence à rédiger un mémoire avant même d'être au clair sur tous les détails. Ce qui me manque je le trouve presque toujours pendant la rédaction. Si j'attendais que tout soit ordonné, je n'aurais plus envie de m'astreindre à une rédaction complète. Jan de Vries.

Rép. XXXII (Autriche). — Je me contente généralement d'une rédaction provisoire. Je garde des notes âgées même de quinze ans. Lerch.

Rép. XXXIII (France). — Je ne rédige qu'après que le temps a fait un tassement. R. d'Adhémar.

Rép. XXXVI (Suisse). — J'ai toujours réuni des notes sur divers problèmes et des notes sur des idées qui m'étaient suggérées par des lectures. Une fois que je me décide à publier un travail, je fais d'abord un projet de rédaction auquel je consacre tout mon temps de libre, et que je remanie ensuite une ou deux fois.
Beyel.

Rép. XXXVII (France). — Je ne fais une rédaction définitive que sur un ensemble assez important pour être publié. Fabry.

Rép. XLII (Italie). — J'ai toujours rédigé immédiatement les résultats de crainte de les oublier; mais ce n'est qu'après avoir réuni un ensemble de notes que je cherche à coordonner les diverses parties. F. Amodeo.

Rép. XLIII (France). — Chaque fois que j'ai une idée, je la note depuis une dizaine d'années. Il m'arrive même maintenant de la noter immédiatement sur un carnet ou des feuilles volantes; je le faisais déjà autrefois; mais je le fais encore bien plus depuis ma visite à M. Picard, de la Sorbonne, qui m'a dit utiliser ce procédé. Il m'arrive ainsi de noter des sujets d'études, des détails ou des projets de démonstrations. J'ai maintenant tellement de notes que je m'y perds parfois; j'ai toujours profit à les reparcourir.

Mais, quand j'ai en vue la rédaction, je rédige toujours complètement sans laisser de côté aucun point, si possible, pour éviter les erreurs, et me comprendre quand je relis. Je ne fais guère travailler de tête que l'imagination et la mémoire et je ne fais plus habituellement de calculs de tête, par principe, peut-être parce que mes calculs sont trop compliqués (ceci pour le moment, peut-être ferai-je autrement à d'autres époques). Toutefois j'ai fait de tête beaucoup de calculs numériques ou de raisonnements de ma thèse (partie relative aux groupes de classe N—*n* et de degré N); eh bien, je crois ce système bien inutile, en général.

Je commence la rédaction de quelques théorèmes; là-dessus j'en greffe d'autres qui pourront d'ailleurs donner lieu à d'autres mémoires, etc.

Dans mes débuts, sauf pour ma thèse, je publiai des notes assez courtes, le plus vite possible. Actuellement j'ai tendance à grouper les résultats pour en faire de gros mémoires. L'habitude et l'art de présenter les choses et de les rattacher jouent un rôle à cet égard. Ed. MAILLET.

Rép. XLV (France). — Je rédige immédiatement.
R. de MONTESSUS.

Rép. XLVI (Espagne). — Quand j'ai à faire quelque travail, je note brièvement les idées sans rien rédiger; puis, quand je me mets à écrire le travail, les idées se suivent naturellement sans que j'aie à faire aucun effort, dans un naturel *devenir* et le travail se fait au courant de la plume; il me faut quelquefois accélérer afin de ne rien oublier. (Il s'agit surtout de travaux de littérature, de pédagogie, de méthodologie et de logique mathématique).
Z.-G. de GALDEANO.

Rép. XLVIII (Hollande). — J'avais autrefois l'habitude d'accumuler les résultats sous forme de notes; comme le procédé me semblait un peu lent, j'ai pris l'habitude plus tard de rédiger immédiatement les résultats séparés. CAARDINAL.

Rép. XLIX (France). — Je ne fais jamais que des rédactions d'ensemble. P. BARBARIN.

Rép. LII (France). — Evidemment je commence par des notes, mais je jette de bonne heure une rédaction hâtive sur le papier.

J'en refais au besoin plusieurs successivement. Dans tous les cas je retouche constamment avant de publier. Je poursuis obstinément la correction et la concision du style, l'élégance et la concision du calcul. HATON de la GOUPILLIÈRE.

Rép. LV (Etats-Unis). — Je publie seulement quand les résultats sont complets sur l'ensemble du problème. L. E. DICKSON.

Rép. LXX (Etats-Unis). — Je continue en général mes recherches aussi loin que possible et si elles sont assez importantes, je les publie immédiatement. Cependant je ne rédige jamais mes résultats avant de pouvoir les publier, je conserve simplement mes premières notes. J. W. YOUNG.

Rép. LXXVIII (Italie). — Je cherche toujours à rédiger ce que j'ai trouvé par le calcul, parce que cet effort contribue à rendre la pensée plus claire ; souvent il me vient alors de nouvelles idées. (...)

Rép. LXXXIII (France). — J'écris immédiatement chaque partie. Je rédige ensuite l'ensemble avec, très souvent, de grandes modifications. (...)

Questions 11, 12 et 13.

11. *D'une manière générale, quelle est la part d'importance que vous attribuez aux lectures en matière de recherches mathématiques ? Quels conseils donneriez-vous à ce sujet à un jeune mathématicien pourvu de l'instruction classique habituelle ?*

12. *Avant d'entamer un travail, cherchez-vous tout d'abord à vous assimiler les travaux qui ont été produits sur le même sujet ?*

13. *Préférez-vous au contraire laisser à votre esprit son entière liberté, sauf à vérifier ensuite, par des lectures sur le sujet, la part qui vous est personnelle dans les résultats que vous avez obtenus ?*

La plupart de nos collaborateurs ont répondu à la *question 11* et ils insistent en général sur l'importance des lectures, tout au moins pour le jeune mathématicien. Pour celui-ci, il s'agit en effet de compléter et d'étendre tout d'abord ses connaissances générales dans le domaine des mathématiques, tout en vouant une attention particulière à certains sujets qui pourront faire l'objet d'une petite Note ou d'un travail de thèse. Mais pour y parvenir, s'il est utile de lire, il faut faire un choix très judicieux parmi les auteurs classiques du 18e et du 19e siècles. Il est impossible de tout lire, car il faut arriver le plus vite possible aux confins de la science (Voir Rép. LII). « Il est bon, dit M. Maillet, de s'attacher à l'œuvre d'un savant dans un domaine pour chercher à le continuer » (voir Rép. XLIII).

Ces conseils, et bien d'autres qu'on trouvera ci-après, seront lus et médités avec fruit par plus d'un jeune mathématicien. Sous ce rapport, les réponses, dont nous reproduisons ici les plus caractéristiques, fournissent des détails fort précieux.

En ce qui concerne lès *questions 12 et 13*, les avis sont moins unanimes. Sans doute, il est bon de se rendre compte jusqu'à quel point la question que l'on se propose d'étudier a été approfondie par d'autres ; mais on ne saurait s'exercer trop à développer ses idées personnelles. Et si même on s'expose, surtout au début, à retrouver des résultats déjà connus, ce travail n'a pas été fait en pure perte.

Aujourd'hui, la vérification de la part qui vous revient dans les recherches est grandement facilitée, grâce aux publications bibliographiques dues à la collaboration dévouée et désintéressée de plusieurs groupes de savants. Il est vrai qu'elles ne sont pas encore aussi répandues qu'elles devraient l'être et il convient d'en rappeler ici les principales. Toute bibliothèque universitaire et toute grande bibliothèque devraient posséder le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, qui se publie depuis 1868, le *Bulletin des Sciences mathématiques* (depuis 1870), la *Revue semestrielle des publications mathémathiques*, (depuis 1893), le *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, le *Poggendorfs Annalen* et le *Catalogue international de la Littérature scientifique* de la « Royal society » de Londres.

Quant aux ouvrages fournissant des vues d'ensemble sur certains chapitres des mathématiques, nous mentionnerons tout d'abord l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, dont une édition française est également en cours de publication, *(Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées)*, puis les *Synopsis der höheren Mathema-*

tik de Hagen, le *Repertorium der höheren Mathematik* de Pascal, le *Formulaire mathématique* de Peano. Mentionnons d'autre part les rapports publiés dans les *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, les ouvrages et revues sur l'Histoire et la Philosophie des mathématiques (Cantor, Zeuthen, etc; Peano, Russell, Couturat, etc., *Bibliotheca mathematica*, la *Revue de Métaphysique et de Morale*), les collections de monographies éditées par les maisons Gauthier-Villars *(Scientia, Collection Borel)*, Gœschen *(Sammlung Schubert)*, Hœpli *(Manuali Hœpli)* et Teubner *(Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften)*, etc.

Voici maintenant un choix des passages les plus intéressants des réponses aux *questions 11, 12 et 13:*

Rép. I (France). — 11. Il faut bien lire pour s'instruire d'une manière générale et s'assimiler en gros le sujet spécial que l'on veut travailler en avant. Mais l'*abus* des lectures paralyse l'essor de l'esprit, et je conseille aux jeunes gens de ne lire que des chefs-d'œuvres.

12. Ça a été trop peu ma méthode. — 13. Je l'ai habituellement préféré, et j'ai le travers de ne pas aimer à comparer mes travaux à ceux d'autrui. CH. MÉRAY.

Rép. II (France). — 11. La lecture d'un ouvrage où l'auteur a mis du sien est un *excitateur de la pensée*. Un esprit original (celui *qui pense par lui-même* et c'est ce qu'il faut s'efforcer d'être) n'a que du bénéfice à en retirer : cela l'excite et lui évite de découvrir la Méditerranée ! — 12. Assimiler ! c'est beaucoup dire. Me renseigner, oui, en général. AUDEBRANDT.

Rép. III (Angleterre). — 12 et 13. Je n'ai jamais le temps. Il est plus facile d'examiner soi-même une question que de lire ce que d'autres ont écrit là-dessus. BRYAN.

Rép. IV (Autriche). — 12. Il serait fatiguant et inutile d'étudier *tous* les ouvrages concernant un certain sujet. Il suffit de savoir que son propre travail fournira du nouveau (tout au moins au point de vue de la méthode). — 13. Oui. ZINDLER.

Rép. V (Italie). — 11. Une grande importance à tous les points de vue. — 12. Oui. (...)

Rép. VI (Allemagne). — 11. J'attribue à la lecture une grande influence sur les travaux personnels. Il me paraît donc important que dans les séminaires on engage tout particulièrement les étudiants à la lecture des auteurs classiques dans le domaine des mathématiques.

12. Je n'entreprends en général ces recherches que lorsque je possède déjà quelques résultats. (...)

Rép. VII (Allemagne). — 11. Je ne me place qu'au point de vue de l'histoire, je dirai : Tout lire ; chaque ouvrage vous apprend quelque chose. Mor. CANTOR.

Rép. IX (France). — 11, 12 et 13. L'importance des lectures varie, je crois, avec les tempéraments. Ceux qui lisent facilement ont tout avantage à commencer par là ; il est plus attrayant de penser d'abord et de ne lire que quand on est à court d'idées pour se donner un nouvel élan. Je m'abstiens de tout conseil. Le travail scientifique doit être un plaisir. Chacun prend son plaisir où il le trouve. (...)

Rép. X (Angleterre). — 11. Je conseillerais à un jeune mathématicien de s'approprier les méthodes, mais de ne pas négliger de faire ses propres essais. — 12. Malheureusement non. — 13. Oui. GENESE.

Rép. XI (Russie). — 11. Pour faire quelque chose d'important, il faut avoir de larges horizons, donc il faut lire beaucoup. Mais il ne faut pas que la lecture nuise au travail en laissant trop peu de temps pour la réflexion personnelle.

12. Avant la rédaction définitive je lis encore beaucoup afin de savoir si mes résultats sont nouveaux. DELAUNAY.

Rép. XIII (Angleterre). — 11. Je conseille à un jeune mathématicien de s'arrêter à une de ses propres idées et de l'approfondir. D'autres idées naissent avant que le but soit atteint. Il importe peu s'il constate plus tard que d'autres ont examiné ces questions avant lui. Il est fort probable qu'il en sera ainsi pour ses premières recherches. En Angleterre nous fournissons aux jeunes gens trop de problèmes et d'idées tandis que le travail personnel n'est pas assez développé, aussi l'étudiant ne se trouve-t-il pas encouragé à prendre confiance en lui-même. (...)

Rép. XV (Allemagne). — 11. Ce n'est qu'une fois que je crois avoir trouvé quelque chose de nouveau que j'examine la question dans les ouvrages et les périodiques en vue de comparer mes résultats à ceux obtenus par d'autres. D'après mon expérience personnelle, je conseille aux jeunes mathématiciens qui auraient la tendance à s'isoler de se charger de rapports sur le développement de tel point ou de monographies afin d'avoir à étudier ce qu'ont fait les autres. On peut aussi réagir contre l'isolement par des entretiens ou la correspondance avec des collègues s'occupant des mêmes questions et en fréquentant les réunions et congrès de mathématiciens. — 12. Non. — 13. Oui. (...)

Rép. XVIII (Italie). — 11. La lecture en matière de recherches mathématiques est certainement très importante. Elle fournit des idées nouvelles et suscite l'invention.

12 et 13. — Toujours et aussi complètement qu'il m'est possible. (...)

Rép. XX (France). — 11. Je tiens pour très important d'avoir lu les ouvrages mathématiques. Le souvenir qu'une question a été traitée dans tel ou tel ouvrage est extrêmement important à fixer. — 12. Non. Il me suffit de savoir comment je pourrais m'y référer. — 13. Oui. (...)

Rép. XXI (Allemagne). — 11. Je n'ai qu'un conseil à donner aux jeunes mathématiciens : « Ayez du génie ». — 12. J'ai toujours négligé, plus qu'il ne fallait, les travaux des autres et je ne les ai consultés qu'au dernier moment, immédiatement avant la publication de mes recherches. L. BOLTZMANN.

Rép. XXII (Etats-Unis). — 11. Un jeune homme doit avoir une bonne connaissance générale des mathématiques avant de se livrer aux recherches. Avant d'entreprendre un sujet, il doit lire ce que les autres ont fait dans ce domaine afin d'éviter les répétitions inutiles. — 12. Oui. — 13. Non. Edw. B. ESCOTT.

Rép. XXIII (France). — 11. Je dirais : récapitulez bien vos connaissances classiques ; complétez-les par la lecture des maîtres Mais ne poursuivez vos lectures qu'autant qu'elles vous intéressent ; ne vous acharnez pas ; et surtout, obéissez à vos goûts et à votre tempérament. Si une idée personnelle heureuse vous vient, suivez-là sur l'heure, faudrait-il pour cela interrompre vos lectures.

12. Non. Il est nécessaire et suffisant selon moi d'avoir une notion un peu générale de ce qui a été fait.

13. Je préfère en effet cette seconde méthode ; elle amène parfois, il est vrai, à constater qu'on a enfoncé une porte ouverte. Mais l'esprit en profite ; et la découverte de la vérité est toujours une satisfaction, même si cette vérité a été énoncée antérieurement. C.-A. LAISANT.

Rép. XXV (Hollande). — 11. Les lectures sont importantes, par ce qu'elles donnent des points de vue nouveaux qu'on ne trouverait peut-être pas soi-même. — 12. Oui, s'il s'agit de travaux d'une certaine étendue. — 13. Non. H. de VRIES.

Rép. XXVI (France). — 11. L'importance des lectures est énorme ; mais il faut donner la préférence aux traités car les mémoires sont souvent difficiles à comprendre, l'auteur supposant connues beaucoup de choses qu'on peut ignorer.

12. Oui, mais seulement dans un travail important. Il y a beaucoup de questions que j'aurai cherché à résoudre si j'avais pu me renseigner sur la bibliographie, et que j'ai abandonnées.

J. RICHARD.

Rép. XXVII (France). — 11. L'érudition me paraît une cause d'impuissance ; les belles découvertes sont dues à des mathématiciens qui s'occupaient fort peu de ce que les autres avaient trouvé.

M. Weill.

Rép. XXX (Norvège). — 12. Seulement avant la rédaction définitive. — 13. Oui, pendant les premières recherches.

C. Störmer.

Rép. XXXII (Autriche). — 11. On publie pour être lu et je lis autant que possible. Un étudiant doit d'abord s'armer d'un sens pour la rigueur en matières infinitésimales. Il doit lire bien des livres, sur des branches variées, le choix dépendant de son tempérament et de son instruction. Il faut rechercher et s'occuper avant tout des auteurs particulièrement suggestifs.

12 et 13. L'une ou l'autre suivant le cas. M. Lerch.

Rép. XXXIII (France). — 11. Après la préparation équivalente à la licence française, lire en partie, parcourir en entier, les traités de Jordan, Picard, Darboux, Goursat, Appell et Goursat, Humbert, Borel, et quelques auteurs allemands et italiens, Weber, Bianchi, etc...., puis un peu des classiques, Cauchy, Lagrange, Weierstrass.

12. Il serait dangereux de ne pas regarder. Après, on s'aperçoit qu'il faut s'y prendre tout autrement ou que la chose a été trouvée. — 13. Inutile de perdre trop de temps sur ce qui est déjà fait. Pour cela acquérir un peu d'érudition. R. d'Adhémar.

Rép. XXXV (France). — 11. Il est probable que c'est une affaire toute personnelle. J'aime les mémoires ou livres courts, mettant en évidence les idées générales et les résultats fondamentaux. Ils sont très suggestifs. Ils mesurent la force des méthodes, fournissent des points de comparaison entre elles et aussi entre les problèmes traités et donnent ainsi une orientation de l'esprit. (...)

Rép. XXXVI (Suisse). — Je conseillerais aux jeunes mathématiciens de s'orienter d'abord un peu dans ce qui a été publié et il serait à désirer que l'Université leur fournisse quelques directions dans ce sens. Quant aux véritables et rares génies, nous ne pouvons rien leur conseiller. Beyel.

Rép. XXXVII (France). — 12. (Voir la réponse à la question V).

Fabry.

Rép. XXXIX (Grèce). — 11. La lecture des journaux et des nouveautés mathématiques est indispensable à quiconque tient à être au courant de la science. Elle suggère souvent des idées nouvelles, d'autres points de vue, des problèmes et des sujets d'étude. — 12. Oui. — 13. Non. N. Hatzidakis.

Rép. XLIV (France). — 11, 12 et 13. Il est capital de faire des lectures au début. Pour moi, la première chose à faire, une fois la licence passée, c'est de s'attacher à un sujet, lire tout ce qui est important, faire sa thèse. Après on peut commencer à rayonner, prendre un autre sujet et opérer de même. Si la réussite continue, avec l'habitude, on peut adopter une méthode mixte qui consiste à chercher et à lire ou parcourir en même temps, afin de toujours s'assurer autant que possible (ce qui n'est pas toujours commode) que les résultats importants sont bien neufs. C'est la méthode que j'ai suivie. Arago d'ailleurs dit que le savant, chercheur, est toujours un érudit.

D'après moi, et c'est le conseil que j'ai donné déjà à plusieurs polytechniciens, il est bon au début de s'attacher à l'œuvre d'un savant dans un domaine, pour chercher à le continuer en lisant au préalable des traités généraux. Si l'on réussit, après, on peut continuer, ou essayer de voler de ses propres ailes. Un moyen simple d'opérer est de se procurer des notices sur les travaux scientifiques de plusieurs savants, et de choisir ainsi les mémoires à lire : je ne l'ai su que tard malheureusement. — 12. Dans mes débuts, oui. — 13. Maintenant, oui. Ed. MAILLET.

Rép. XLV (France). — 11. Je conseillerais naturellement les lectures pouvant servir d'introduction au sujet qu'on a en vue ou des lectures générales si l'on cherche un sujet.

12. Le moins possible. Des vues d'ensemble seulement. — 13. Oui. R. de MONTESSUS.

Rép. XLVI (Espagne). — 11. Je conseille de lire des théories nouvelles, parce que ces lectures ouvrent de nouveaux horizons. — 12. Oui. G. Z. DE GALDEANO.

Rép. XLIX (France). — 12 et 13. Cela dépend du sujet. Il en est certains pour lesquels il n'est pas toujours facile de se procurer rapidement la majeure partie des travaux qui s'y rapportent. Dans ce cas je vais de l'avant en toute liberté, sauf à vérifier ensuite.

P. BARBARIN.

Rép. L (Etats-Unis). — 11. Je conseille aux jeunes mathématiciens de commencer de très bonne heure la lecture des grands maîtres et de combiner cela avec l'étude de l'histoire des mathématiques. E. W. DAVIS.

Rép. LII (France). — 11. Je conseille beaucoup de lectures aux confins de la science, sans s'attarder à approfondir en grand détail les zones déjà fouillées par d'autres. Je parle en cela, pour ceux qui se sentent le feu sacré et les dispositions pour faire avancer la science, car on rencontre aussi beaucoup de jouissances moins ambitieuses à chercher à amener à une plus grande perfection des parties déjà explorées de la science et à glaner d'élégantes applications. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Rép. LV (Etats-Unis). — 11. Chercher l'économie de l'effort. Eviter l'isolement. Appliquer à soi-même la division en moyenne et extrême raison *(golden rule)*.

12 et 13. Après avoir, pendant plusieurs années, concentré mon attention sur plusieurs branches des mathématiques, je suis arrivé à distinguer les sujets qui ont été approfondis de ceux qui ne l'ont pas été. Je continue alors moi-même les travaux sans m'occuper de la bibliographie, en réservant cette partie assez ennuyeuse jusqu'au moment où j'ai obtenu quelque résultat.

L. E. Dickson.

Rép. LXIX (Italie). — J'attache une très grande importance aux lectures : c'est par les lectures qu'on apprend de nouvelles méthodes de recherches.

12 et 13. Peut-être n'est-il pas nécessaire aux hommes de génie d'étudier d'abord ce qu'ont trouvé les autres sur un sujet donné. Cependant le plus grand nombre ne peut guère s'en dispenser.

(...)

Rép. LXX (Etats-Unis). — 11. Question difficile à traiter en quelques mots. Un étudiant doit avoir une notion claire des difficultés du problème avant d'approfondir les recherches. Mais je lui conseille de chercher tout d'abord à développer sa méthode personnelle de travail avant de faire une étude détaillée des méthodes obtenues par d'autres. S'il est sous la seule influence des méthodes plus anciennes, il risque de manquer d'originalité.

J. W. Young.

Rép. LVII (Etats-Unis). — 13. Ceux qui se sont tracés leur propre direction semblent témoigner de plus d'originalité que ceux qui sont élèves d'autres. E. P. Thompson.

Rép. LXXV (France). — 11. La méthode que je conseillerai à un jeune mathématicien, celle que je crois féconde pour trouver des choses originales, c'est de laisser germer en lui une pensée mathématique, de ne toucher aux livres qui peuvent le renseigner sur les travaux précédemment faits dans le voisinage de cette pensée que le jour où il se sentira impuissant à avancer plus loin. Je ne parle que du mathématicien jeune et désintéressé n'ayant pas à donner à ses recherches un but précis. Mais pour certains travaux, pour ceux qui correspondent particulièrement aux thèses de doctorat et en général aux travaux d'érudition et d'histoire mathématique, il est naturel de réunir d'abord, sur une fiche, tous les renseignements que l'on pourra découvrir sur le travail dont le plan a été arrêté. G. de Longchamps.

Rép. LXXVI (France). — 11, 12 et 13. En travaillant personnellement sur un sujet avant toute lecture, on risque de faire des efforts inutiles ; en voulant s'assimiler à fond une théorie sans y avoir réfléchi sérieusement, on risque de réussir mal. Le mieux, semble-t-il, est de *parcourir* les travaux déjà existants et de ne les *approfondir* qu'au fur et à mesure de ses propres réflexions.

G. Combebiac.

Rép. LXXXI (Hollande). — 11, 12 et 13. Il vaut mieux développer un sujet d'abord soi-même ; cela exige beaucoup de temps, mais c'est fructueux. Celui qui commence à lire tout ce qui a été écrit sur une question, court le danger de ne jamais commencer ses propres inventions. F. J. Vaes.

Rép. LXXXIV (Suisse). — 11. Les lectures sont très importantes, elles donnent des idées. Il est donc nécessaire de lire beaucoup et de causer avec des gens instruits.

12. Je ne le cherche que lorsque mes idées sont déjà plus ou moins arrêtées. — 13. Je préfère ne pas m'assimiler les idées des autres. G. Oltramare.

Rép. LVIII (Italie). — 11, 12 et 13. (Voir la réponse à la *question* 4). Ern. Pascal.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Vues stéréoscopiques pour l'enseignement de la Géométrie[1].

9. — *Les figures stéréoscopiques établies par les élèves.* — M. Berdellé nous écrit : Permettez-moi de vous communiquer une question à laquelle je réfléchis depuis longtemps.

Pourquoi n'apprendrait-on pas aux enfants, après leur avoir donné un stéréoscope, à former eux-mêmes des figures qui paraîtront en relief dans cet instrument. La perspective se base sur un petit nombre de principes très simples : « Tout alignement droit dans l'espace est rendu par un alignement droit en perspective ; — Les droites parallèles au plan du tableau sont rendues en perspective par des lignes parallèles ; et si ces droites sont égales, leurs représentations ne le seront pas, mais diminueront en s'éloignant de l'œil, et ainsi de suite.

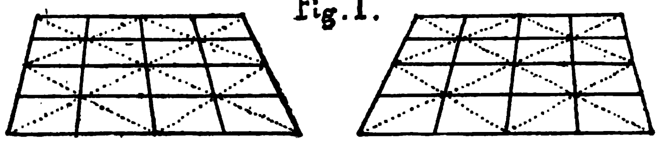
Il y a peu de choses à ajouter pour faire de la perspective stéréoscopique : le principe le plus essentiel est de savoir que la représentation d'un même point doit se trouver sur la même hauteur dans chacune des deux images.

Donnez à un enfant la représentation d'un carré ayant deux de

[1] Voir *l'Enseign. math.* du 15 sept. 1906, p. 385-390.

ses côtés parallèles au tableau. Le principe des alignements droits donnera un moyen facile de diviser successivement ce carré en un échiquier de quatre, seize, soixante-quatre carrés.

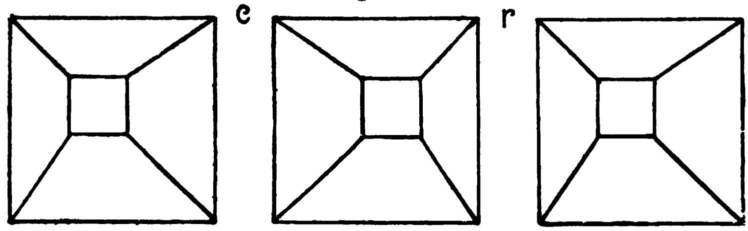
Fig. 1.



Un autre principe du dessin stéréoscopique, c'est que dans la représentation d'une figure en relief les faces du côté d'un œil doivent être élargies ; le contraire a lieu quand la figure doit se présenter en creux.

Pour illustrer ce principe, on peut faire des cartes à trois images comme celles de notre figure 2.

Fig. 2.



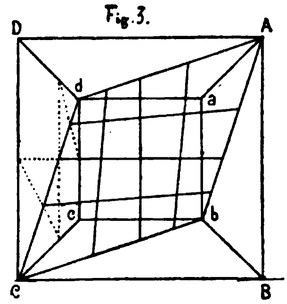
On voit qu'elle représente la surface intérieure ou extérieure d'une trémie selon qu'on met dans le stéréoscope les deux figures de gauche ou celles de droite.

Or toutes les figures déjà tracées sont faciles à tracer par des enfants sur du papier quadrillé ; et ce sera un jeu très amusant pour eux de faire des figures qui paraîtront en relief dans leur stéréoscope. Cela exercera en même temps leur coup d'œil et leur habileté manuelle dans le dessin. C'est un enseignement qui peut, et même *doit* être donné avant celui d'un traité régulier de Géométrie.

Les surfaces du second degré sont assez faciles à se représenter : il y a cependant une exception pour l'hyperboloïde à une nappe. L'œil ne peut pas bien se rendre compte des lignes droites entièrement renfermées dans cette surface courbe. Or le problème résolu par notre figure 1 nous donne un moyen très facile de représenter cette surface au moyen même des droites qui y sont enfermées.

Représentez (fig. 3) soit un cube, soit un parallélogramme rectangle quelconque par des carrés ou rectangles, ABCD et abcd; tracez la ligne brisée AbCdA. Par les procédés employés dans notre figure 1, il vous sera facile de trouver les points milieu, quarts, huitièmes, de chacune des droites Ab, bC, Ad et dC; et en traçant des droites des points de division de Ab à ceux de Cd; des points de division de Ad à ceux de Cb, il semble d'abord que vous aurez une idée d'autant plus parfaite de l'hyperboloïde, que vous aurez plus multiplié les points de division; pourtant il vaut mieux pour la clarté de la figure se borner. Vous aurez une représentation de l'hyperboloïde, vue par en haut. On pourrait aussi en faire vues de côté. Notre dessin ne donne qu'une seule vue, monoculaire; mais il serait facile de répéter la figure avec les changements nécessaires pour la vue binoculaire au stéréoscope; et des vues stéréoscopiques de ce genre seront plus faciles à faire que les appareils à fils de soie tendus.

Fig. 3.



Ch. Berdellé (Rioz, Hte-Saône).

10. — *Stereoscopic Views of Solid Geometry Figures* with References to Wells's essentials of solid Geometry, 60 cents. Heath & C°, Publishers, Boston, 1899. — C'est une collection de près de cent vues stéréoscopiques destinées à l'enseignement de la Géométrie dans l'espace. Très bien dessinées et reproduites en blanc sur fond noir, elles permettent d'illustrer les principaux théorèmes de l'enseignement de la Stéréométrie depuis les premières notions sur le plan et la droite jusqu'aux polyèdres réguliers et aux corps ronds. Bien que ces vues s'adaptent plus particulièrement au manuel de Géométrie de Wells, elles peuvent être utilisées dans tout enseignement de Stéréométrie. H. F.

11. — *Die Kristallgestalten der Mineralogie in stereoskopischen Bildern*, konstruirt u. herausgegeben von Prof. Th. Hartwig. Verlag von A. Pichlers Witwe & Sohn, Wien. — Parmi les applications de la Géométrie, c'est certainement en cristallographie que le stéréoscope est appelé à rendre le plus de services. On sait en effet combien les commençants ont de la peine à concevoir les types des formes cristallines. Avec les planches de la collection Hartwig, toutes les difficultés disparaissent, car, non seulement elles sont bien choisies, mais elles sont aussi d'une exécution irréprochable. Elles sont au nombre de 110, dont 67 sont consacrées

aux formes simples. Ces vues stéréoscopiques méritent d'être signalées à tous ceux qui enseignent la Cristallographie.

H. F.

12. — *Das Stereoskop*, seine Anwendung in den technischen Wissenschaften; über Entstehung und Konstruktion stereoskopischen Bilder. W. MANCHOT; 68 p., 1 Mk. 80, Veit & C°, Leipzig. — Nous signalons ce petit volume à tous ceux qui veulent examiner les bases mathématiques du stéréoscope et parvenir eux-mêmes à construire des vues stéréoscopiques. L'auteur insiste avec raison sur le parti que l'on peut tirer du stéréoscope dans les branches techniques. Toutefois, pour qu'il puisse être utilisé avec avantage, même pour des figures très compliquées, il faut que le stéréoscope puisse s'adapter à des vues de grandeur quelconque. C'est ce que l'on obtient avec l'appareil dit « stéréoscope universel » inventé par l'auteur. Son Ouvrage en donne une étude détaillée.

H. F.

(à suivre)

A propos de la rotation de la terre[1].

Lettre de M. COMBEBIAC (Bourges).

On pensera sans doute qu'il devient sans intérêt de poursuivre une discussion qui s'égare hors du terrain scientifique. Toutefois, il n'est peut-être pas inutile, à cette occasion, d'insister encore sur la nature logique de l'idée d'explication, dont une définition très nette a été donnée par M. J. Richard[2]: expliquer un phénomène, c'est montrer qu'il est une conséquence d'une *loi plus générale* antérieurement admise.

Il résulte de cette définition qu'une explication comporte deux jugements, dont l'un consiste dans une loi et l'autre dans une affirmation que tel objet appartient à la catégorie visée par cette loi. Réduite à son cadre logique et abstraction faite de la complexité que peut affecter la définition de ses termes, une explication se présente donc sous la forme syllogistique. Selon que l'une des prémisses apparaît comme évidente et, par suite, s'efface de l'esprit, l'explication paraît résider soit dans une loi soit dans un jugement particulier; dans le cas où les deux jugements sont évidents, le fait considéré est parfaitement clair et ne provoque aucun besoin d'explication. A la vérité, la loi à invoquer pourrait être considérée comme ne faisant pas partie intégrante de l'explication elle-même, de sorte que celle-ci se reduirait à un jugement, c'est-à-dire à un

[1] Voir L'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1906, p. 150.
[2] Voir L'*Enseignement mathématique*, 8me année, pp. 150-155, 229-232, 311-313, 397-400.

classement. Exemple d'une explication : la lumière donne lieu au phénomène de l'interférence, *parce que* les phénomènes ondulatoires donnent lieu à des interférences et que *la lumière est un phénomène ondulatoire.*

Une question en terminant : Condillac, dans la boutade rapportée par M. Andrault, n'aurait-il pas commis une erreur en attribuant à un physicien la manie d'expliquer des faits qui lui auraient été inconnus ? Ce sont les philosophes qui paraissent surtout affectés de ce travers, la philosophie étant d'ailleurs essentiellement l'art de traiter de généralités qui ne correspondent à aucune application.

Lettre de M. J. Richard (Dijon).

J'hésitais à répondre à M. Andrault. Les lecteurs de l'*Enseignement mathématique* sont sans doute fatigués de cette discussion. D'autre part, je ne comprenais pas très bien la lettre de M. Andrault. Je me décide cependant à faire quelques remarques.

1. Une explication, dit M. Andrault, est une relation, une force aussi. Que faut-il donc entendre par relation ? Une force dit-il a deux bouts ; je l'accorde, mais ces deux bouts ne sont pas symétriques. La force qu'une locomotive exerce sur les rails fait mouvoir le train et laisse la voie sensiblement immobile. La comparaison de l'aveugle et du chien ne vaut rien. Si l'aveugle et le chien tirent en sens contraire, le plus fort entraînera l'autre. *Le principe de l'action et de la réaction loin d'être contraire à la notion de mouvement absolu, la suppose.* Montrer cela serait facile, mais m'entraînerait un peu loin.

2. M. Andrault parle du repère de la dynamique. Voilà un repère qui ressemble au corps α, mais passons. Ce qui suit me paraît si je comprends bien, une sorte de cercle vicieux, d'une nature fort compliquée.

Il s'agit pour M. Andrault, d'expliquer les forces contrifuges. Peut-on les expliquer par une action de milieu ? non, et voici pourquoi. Soit A un corps plongé dans un milieu, et subissant une action de la part de ce milieu. Cela veut dire que des forces sont appliquées aux différents points de la surface du corps A. Expliquer le mouvement que prend le corps A, c'est montrer que le mouvement de A est dû à ces forces. Pour écrire les équations du mouvement de A sous l'action de ces forces, il nous faut appliquer les principes de la dynamique : c'est une sorte de cercle vicieux, car ces principes supposent la notion de mouvement absolu.

D'autre part en admettant ces principes, les forces contrifuges s'expliquent sans action de milieu.

3. Ni l'habitude ni le langage ne nous font croire au mouvement absolu. La loi de Causalité est l'origine de la notion. Si le ciel tourne autour de la terre comme un solide invariable, cette inva-

riabilité paraît sans cause. Les astres ne sont pas reliés les uns aux autres par des barres rigides. La locomotive fait mouvoir son train par rapport au reste du monde. Elle brûle plus de charbon si le train est plus lourd. Comment pourrait-on croire que la locomotive et le train sont fixes, et que tout l'univers se déplace, bien que les astres n'aient aucun lien avec la machine ?

4. La question est selon moi très nette, sans métaphysique. Le relativiste dit : Tous les repères se valent. Cette assertion est fausse, l'observation le montre. Personne ne doute sérieusement de la dynamique. Or elle suppose le mouvement absolu. Ceci admis il n'y a plus rien à dire, à moins de s'enfoncer dans le nuage épais de la métaphysique.

CHRONIQUE

Congrès des mathématiciens allemands ; Stuttgart, 1906.

La réunion annuelle de l'Association allemande des mathématiciens a eu lieu cette année à Stuttgart, du 16 au 20 septembre, en même temps que le Congrès des naturalistes et médecins allemands. Elle était présidée par M. le Prof. Pringsheim (Munich).

Communications scientifiques. — Au nombre de 23, elles ont été réparties sur cinq séances :

1. Blumenthal (Aachen) : Über die ganzen transzendenten Funktionen und den Picardschen Satz (Referat).
2. A. Pringsheim (München) : Über das Fouriersche Integraltheorem.
3. G. Faber (Karlsruhe) : Über Reihen nach Legendreschen Polynomen.
4. O. Perron (München) : Über die singulären Punkte auf dem Konvergenzkreise.
5. F. Hartogs (München) : Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen (Referat).
6. P. Stäckel (Hanover) : Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen.
7. D. Hilbert (Göttingen) : Über Wesen und Ziele der Theorie der Integralgleichungen.
8. E. Hilb (Augsburg) : Über eine Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorem.
9. M. Krause (Dresden) : Zur Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen.
10. P. Koebe (Göttingen) : Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche.

11. F. Meyer (Königsberg) : Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen.

12. P. Schafheitlin (Berlin) : Zur Theorie der Besselschen Funktionen.

13. A. Schoenflies (Königsberg) : Bericht über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II. Teil. (Geometrie und Funktionentheorie).

14. G. Hessenberg (Berlin) : Potenzen transfiniter Ordnungszahlen.

15. G. Landsberg (Breslau) : Über die Totalkrümmung.

16. K. Rohn (Leipzig) : Lineale Konstruktion der Kurve 3. Ordnung.

17. C. Juel (Kopenhagen) : Über nichtanalytische Raumkurven.

18. Th. Schmid (Wien) : Zur konstruktiven Behandlung des Achsenkomplexes.

19. R. Müller (Braunschweig) : Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene.

20. H. Wiener (Darmstadt) : Demonstrationen.

21. C. Runge (Göttingen) : Über graphische Lösungen von Differentialgleichungen.

22. R. Mehmke (Stuttgart) : a. Über neue Mechanismen zur Lösung von Aufgaben der Dynamik. mit Anwendung auf die mechanische Integration von Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung und von Systemen solcher. - b. Über neüe Anwendungen der Rolle auf das Zeichnen verschiedener Klassen von Kurven und auf die Ausführung von Berührungstransformationen.

23. A. Wagenmann (Stuttgart) : Mathematische Theorie des Entwicklungsgedankens.

Commission d'enseignement. — Dans la séance générale du 17 septembre, M. le Prof. Gutzmer a rapporté au nom de la Commission chargée par le Congrès des naturalistes et médecins allemands d'étudier les projets de réforme de l'enseignement scientifique dans les établissements secondaires. Après avoir donné un aperçu des travaux de la Commission pendant l'année écoulée, il a indiqué dans ses grandes lignes les réformes proposées pour l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles dans les « Reformschulen », dans les écoles réales à six classes et dans les écoles supérieures de jeunes filles. La Commission a aussi examiné la question du surmenage et le rôle de l'hygiène. Cet intéressant rapport[1] forme la seconde partie des *Reformvorschläge* publiés par la maison Teubner, à Leipzig.

---

[1] Il sera publié sous le titre : *Reformvorschläge für den mathem. u. naturwiss. Unterricht, entworfen von der Unterrichts-Kommission der Gesellsch. Deutscher Naturforcher u. Aerzte. II. Teil, nebst einem allgemeinen Bericht über die Tätigkeit der Kommission im verflossenen Jahre, von* A. Gutzmer.

Dans une séance ultérieure, spécialement consacrée aux questions d'enseignement, les diverses propositions ont donné lieu à un échange de vues, auquel ont pris part non seulement les représentants de l'enseignement secondaire et universitaire, mais aussi M. le Ministre de l'Instruction publique du Wurtemberg et plusieurs conseillers de son ministère. Ce mélange de professeurs des divers degrés de l'enseignement est un heureux symptôme et ne peut porter que de bons fruits; car l'une des conditions fondamentales de tout progrès dans l'enseignement est la coordination et l'entente aussi bien entre les diverses branches qu'entre tous les degrés de l'enseignement.

Un grand nombre de personnes ont pris part à la discussion; citons, entre autres, les noms de MM. Klein (Gœttingue), Chun (Leipzig), Fricke (Brême), Gutzmer (Halle), von Brill (Tubingue), et Flatt (Bâle). Celui-ci constate avec plaisir que l'enseignement semble sortir de son caractère étroit et unilatéral ne visant que le développement intellectuel, tandis que pour être rationnel son développement doit se faire dans trois dimensions ayant entre elles un rapport convenable, les directions intellectuelles, morales et physiques.

M. le Prof. Klein estime qu'il y a quelques questions qu'il serait intéressant d'examiner dans une assemblée renfermant des représentants des branches littéraires, notamment en ce qui concerne l'action commune des établissements secondaires et de l'Université et la formation des professeurs de l'enseignement secondaire. Ces questions pourraient être discutées à la prochaine réunion annuelle des philologues et professeurs allemands. Il invite les personnes présentes à se rendre à cette réunion qui aura lieu à Bâle en automne 1907.

Séance administrative. — La séance administrative de la « Deutsche Mathematiker-Vereinigung » était consacrée aux objets suivants : *a.* Rapports de gestion (l'association compte actuellement 688 membres). — *b.* Rapport sur les publications entreprises par l'Association. — *c.* Rapport des Commissions. — *d.* Emploi du boni laissé par le III^{me} Congrès des Mathématiciens (800 Mk. seront versés au IV^{me} Congrès, le reste, Mk. 933,80 sont attribués au monument funéraire de Riemann, à Biganzola, près Locarno). — *e.* Création, à la Bibliothèque universitaire de Gœttingue, des « Archives des Mathématiciens », destinées à conserver les legs scientifiques, manuscrits, etc., de mathématiciens décédés. — *f.* 2^{me} centenaire d'Euler en 1907 (des conférences seront consacrées à Euler à la prochaine réunion annuelle). — *g.* Publication d'un annuaire contenant la liste détaillée des membres.

Le président sortant de charge est remplacé par M. von Brill. La prochaine réunion aura lieu à *Dresde*.

Association suisse des professeurs de mathématiques.

La sixième réunion a eu lieu à Bâle, le 20 octobre 1906, sous la présidence de M. H. Fehr, professeur à l'Université de Genève.

Après une allocution du président, M. Otti, Dr phil., (Aarau) a présenté un rapport sur *les tables de logarithmes à quatre décimales et la division décimale de l'angle dans l'enseignement des écoles moyennes*. Le texte [1] ayant préalablement été envoyé à tous les membres, le conférencier a pu se borner à un aperçu général qui a servi d'introduction à une intéressante discussion. L'assemblée était pleinement d'accord avec le rapporteur qui estime que les tables à quatre ou à cinq décimales suffisent aux besoins de l'enseignement des écoles moyennes. Il ressort de l'enquête faite par M. Otti que seize écoles moyennes suisses emploient cependant encore les tables à sept décimales. Quant à la division décimale de l'angle, elle tend à prendre plus d'extension et elle présenterait aussi beaucoup d'avantages pour l'enseignement ; toutefois l'Ecole ne peut pas en prendre l'initiative. On sait qu'en France on cherche à introduire la division décimale de l'angle droit, tandis qu'en Allemagne on adopte dans beaucoup de manuels, la division décimale du degré ordinaire.

Cette discussion était suivie d'une conférence [2] de M. Kollros, Dr phil., (Chaux-de-Fonds), sur *la mathématique pure et l'approximation*. Le conférencier examine le rôle de l'intuition et de l'abstraction ; il montre qu'il est bon de faire précéder toute définition, toute théorie d'une image grossière, qui donne une idée générale du sujet, puis d'amener peu à peu l'élève à la définition logique, à la notion précise sur laquelle le raisonnement puisse se baser. Il est utile de voir dans quelles limites meut le résultat du raisonnement mathématique quand les données varient entre certaines limites connues. Aussi souvent que possible on fera comparer le résultat des calculs avec le résultat donné par une mesure directe.

L'ordre du jour portait ensuite une étude sur les réformes à accomplir dans l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles. Une légère indisposition empêcha M. Flatt, recteur de l'Ecole réale supérieure de Bâle, de faire sa communication. Après discussion l'assemblée adopta la proposition de M. Flatt de tenir la *prochaine assemblée annuelle* à Bâle, en automne 1907, en même temps que la réunion des philologues et professeurs allemands. Elle exprime le vœu qu'une séance plénière soit

---

[1] Voir *Schweiz. Pedagog. Zeitschr.*, 1906 ; n° 5. 23 p.
[2] Reproduite dans le présent n° de l'*Ens. math.*

consacrée à l'étude de l'action commune des établissements secondaires et universitaires et de la formation des professeurs de l'enseignement secondaire ; il serait désirable que M. le prof. F. Klein pût se charger du rapport sur la partie concernant les sciences exactes.

L'Association a réélu le même Comité : *Président,* M. le Dr H. Fehr, professeur à l'Université et au Gymnase de Genève ; *secrétaire-trésorier,* M. le Dr M. Grossmann, professeur à l'Ecole réale supérieure de Bâle ; *assesseur,* M. le Dr A. Juzi, professeur à l'Ecole cantonale de Zurich.

Les doctorats ès sciences délivrés par les Universités des Etats-Unis 1905-1906.

Pendant l'année scolaire 1905-1906 les Universités américaines ont délivré 139 doctorats ès sciences dont 9 diplômes pour les sciences mathématiques (contre 213 et 21 pour l'année précédente). En voici la liste, avec le nom de l'Université qui a délivré le diplôme :

E. C. Colpitts (Cornell) : On the twisted quintic curves. — B. F. Finkel (Pennsylvania) : Determination of all groups of order 2 which contain cyclic selfconjugate subgroups of order 2 and whose generating operators correspond to the partitions. — C. C. Grove (Johns Hopkins) : I. The syzygetic pencil of cubics and a new geometrical development of its Hesse group G_{216}. II. On the complete Pappus-hexagon. — H. B. Leonard (Colorado) : On the factoring of composite algebras. — J. F. Messick (Johns Hopkins) : Cubic curves in reciprocal triangular situation. — R. G. D. Richardson (Yale) : Improper multiple integrals. — W. H. Roebber (Harward) : Brilliant points. — C. H. Sisam (Cornell) : Ruled surfaces of order seven having a rectilinear directrix. — G. E. Wahlin (Yale) : The relation between the binary quadratic forms and the quadratic numerical bodies.

L. Boltzmann.

Une bien triste nouvelle s'est répandue dans le monde scientifique à la fin des vacances : Ludwig Boltzmann est mort le 7 septembre dernier à Duino près Görz, où il avait été se reposer ; gravement atteint d'une maladie nerveuse, il mit fin à ses jours.

Né à Vienne en 1844, Boltzmann témoigna de bonne heure de brillantes aptitudes pour les mathématiques. Il n'était âgé que de vingt-cinq ans lorsqu'il fut appelé à la chaire de physique théorique à l'Université de Graz. Il enseigna plus tard la mathématique à l'Université de Vienne, puis la Physique expérimentale à l'Université de Graz. A la mort de Kirchhoff il reçut un appel à l'Université de Berlin, à côté de Helmholtz, mais ne l'accepta pas. Par contre il se rendit plus tard à un appel à l'Université de Munich, pour revenir ensuite à Vienne, puis à l'Université de Leipzig, où il ne resta que peu de temps. Il préféra toujours sa ville natale.

A côté de ses travaux sur la théorie des tourbillons, Boltzmann a publié, entre autres, ses cours[1] sur la théorie de Maxwell, sur la théorie cinétique des gaz et sur les principes de la Mécanique. Ses ouvrages sont caractérisés par une grande clarté dans l'exposé et par l'élégance de la forme ; ces belles qualités produisent à la lecture une réelle satisfaction, un véritable charme. Dans les polémiques scientifiques il savait défendre ses idées à l'aide des armes précises de son puissant génie, tout en restant modéré et conciliant.

Malgré sa très forte myopie Boltzmann a aussi fourni de remarquables travaux en Physique expérimentale. Rappelons, par exemple, ses recherches acoustiques faites avec Tœpler, sa détermination de constantes diélectriques et ses expériences sur les vibrations électriques.

Excellent professeur il s'était acquis un nombreux groupe d'élèves de grande valeur; comme tous ceux qui ont eu le privilège de le connaître, ils garderont le meilleur souvenir de l'illustre savant.

Ernst Kaller (Vienne).

Nécrologie.

Ernest Cesaro. — Nous signalons d'autre part la mort de notre distingué collaborateur L. Boltzmann, professeur à l'Université de Vienne. Peu de jours après, le 12 septembre, l'Italie devait perdre à son tour l'un de ses plus illustres savants, M. Ernest Cesaro, professeur à l'Université de Naples. Cesaro est mort d'une façon tragique : une vague l'a emporté au moment où il voulait porter secours à son fils qui était tombé à la mer. C'est une perte considérable pour les sciences mathématiques. L'Enseignement Mathématique publiera dans un prochain numéro une notice sur la vie et les travaux de l'illustre géomètre.

Nominations et distinctions.

M. H. F. Blichfeldt est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Stanford (E.-U.).

---

[1] *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes* (2 Teile, 1891-1893) ; *Vorlesungen über Gastheorie* (2 Bände, 1896-1898) ; *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik* (1897), édités à Leipzig, par la maison J. A. Barth.

M. J. Grünwald, privat-docent à l'Université de Vienne, est nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de Prague.

M. W. Haskel est nommé professeur ordinaire à l'Université de Californie.

M. G. Landsberg est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Kiel.

M. Mittag-Leffler est nommé professeur *honoris causa* de l'Université d'Aberdeen.

M. Em. Müller, professeur de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Vienne, est nommé membre correspondant de la section des sciences mathématiques et naturelles de l'Académie des Sciences de Vienne.

M. Michel Radakovic, professeur extraordinaire à l'Université d'Innsbruck est nommé professeur ordinaire de Physique mathématique à l'Université de Czernowitz.

M. G. Rost, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Würzbourg.

M. Scheffers, de l'Ecole technique supérieure de Darmstadt, est nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg, à partir du 1er avril 1907.

M. Th. Schmid, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

MM. J.-J. Thomson et G. Veronese sont nommés docteurs *honoris causa* de l'Université d'Aberdeen.

M. E. J. Wilczynsky est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Californie.

M. W. Wirtinger est nommé membre correspondant de la Société des Sciences de Gœttingue.

M. K. Zsigmondy, de l'Université de Prague, est nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. Bohren, pour les Mathématiques et la théorie des assurances, à l'Université de Berne ; M. Fr. Jung, pour la Mécanique, à l'Ecole technique supérieure de Vienne ; M. Fr. Köhler, pour la Géodésie, à l'Ecole technique supérieure bohême de Prague ; M. A. Frey, pour l'Astronomie et la Géodésie, à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1906-1907 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin; *Techn. Hochschule.* — Dziobek : Höh. Mathematik (Diff.- und Integralrechnung, Analyt. Geometrie). — Haentzschel : Elem. der Diff.- und Integralrechnung und der analyt. Geometrie. — Hertzer : Darst. Geometrie I. — Hettner : Höh. Mathematik (Diff - und Integralrechnung, Analyt. Geometrie). — Jolles : Darst. Geometrie I; Graphische Statik. — Lampe : Höh. Mathematik (Diff.- und Integralrechnung, Analyt. Geometrie). Bestimmte Integrale und Differentialgeichungen. — Steinitz : Potentialtheorie. Funktionentheorie; Niedere Analysis und Algebra. — Fuchs : Partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen; Mathem. Uebungen. — Gross : Mech. Wärmetheorie. Ausgewählte Kapitel aus der mech. Wärmetheorie; Einleitung in die Potentialtheorie. — Hessenberg : Darst. Geometrie II. — Petzoldt : Die mechanische Naturansicht und das Weltproblem. — Rothe : Ausgewählte Teile der Elementarmathematik. Theorie der Kurven. — Servus : Einführung in das Studium der Elektrotechnik; Durcharbeitung aller in der Elektrotechnik vorkommenden Theorien der niederen und höheren Mathematik. — Steinitz : Synthetische Geometrie. — Wallenberg : Elementarmathematik (Algebra, Trigonometrie, Stereometrie). Repetitorium der Integralrechnung und analyt. Geometrie.

Darmstadt; *Techn. Hochschule.* — Dingeldey : Höh. Math. I f. Ing., Masch. u. Elektr. — Fenner : Trigonom.; Geodäsie; Höh. Geodäsie; Geodät. Ueb.; Ausarb. d. geodät. Vermess. — Graefe : Repet. d. Elem.-Math.; Höh. Math. f. Arch., Chem., Elektrochem- u. Geom.; Geschichte d. Math.; Höh. Math. II. — Gundelfinger : Höh. Math. I f. Ing. Masch. u. Elektr.; Analyt. Ueb. — Henneberg : Techn. Mechan.; Mech. II; Ausgew. Abschn. d. graph. Statik. — Scheffers : Höh. Math. I f. Ing., Masch. u. Elektr.; Darst, Geom. I. — Wiener : Darst. Geom. I; Darst. Geom. II; Arbeiten im math. Institut. — Ohl : Prakt. Geom. f. Arch. u. Masch. — Schlink : Repet. d. Mech.

Karlsruhe; *Techn. Hochschule.* — Heun : Mechanik I 4; Ueb. 2; Mechanisches Seminar für Fortgeschrittenere Ueb. 4; Elementarmechanik 2. — Krazer : Höhere Mathematik I. 6; Ueb. 2. — Schur : Darst. Geometrie I. 4; Ueb. 4; Graphische Statik 2; Ueb. 2. — Wedekind : Höhere Mathematik II. 3. — Faber : Elemente der Mechanik 3; Uebungen in den Grundlehren der höheren Mathematik Ueb. 2; Arithmetik und Algebra 2, Ueb. 1; Ebene und sphär. Trigonometrie 2, Ueb. 1. — Ludwig : Projektive Geometrie 2; Elementare und analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes 2, Ueb. 1. — Winkelmann : Elemente der Mechanik; Ueb. 1.

Hanover; *Tech. Hochschule.* — Kiepert : Diff.- und Integralrechnung I. 5, Ueb. I; Diff.- und Integralrechnung III 3; Variationsrechnung 3. — Stäckel : Diff.- u. Integralrechnung I B 4; Ueb. 1; Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes 3 — Rodenberg : Darst. Geometrie 3; Ueb. 6; Darst. Geometrie II. Teil 3. Ueb. 6. — Petzold i. V. : Grundzüge der höheren Mathematik für Architekten und Chemiker 3, Ueb. 1; Algeb. Analysis und Trigonometrie 3.

München; *Techn. Hochschule.* — V. Dyck : Höh. Mathematik I. Teil mit Uebgn. Analyt. Mechanik. — Finsterwalder : Höh. Mathematik III. Teil mit Uebungen; Th. der gerichteten Grössen (Vektoren) mit Uebgn. — V. Dyck u. Finsterwalder : Mathem. Seminar (Kolloquium). — Von Braunmühl : Grundzüge der höh. Mathematik (für Architekten und Chemiker) mit Uebgn.; Projekt. Geometrie in synth. Behandlung mit Uebgn.; Mathem.-historisches Seminar. — Burmester : Darst. Geometrie I. Teil mit Uebgn. — M. Schmidt : Vermessungskunde I. Teil mit Praktikum; Landesvermessung; Katastertechnik; Geodät. Praktikum III; Kartierungsübungen. — Föppl : Techn. Mechanik II. Teil (graphische Statik) und III. Teil (Festigkeitslehre); Uebungen zur graphischen Statik. — Bischoff : Ausgleichungsrechnung (Praktikum); Mechanisches und graphisches Rechnen. — Kutta : Elementare Mathematik; Trigonometrie mit bes. Berücksichtigung des Studiums der Vermessungsingenieure mit Uebungen; Algeb. Analysis; Wahrscheinlichkeitsrechnung — Ewers : Einf. in die Vektorentheorie und Anwendung derselben auf physikalische Probleme. — Grossmann : Elemente der Astronomie.

Stuttgart; *Techn. Hochschule.* -- Bretschneider : Niedere Mathematik. — Hohenner : Trigonometrie. Katastermessungen Markscheidekunde. Praktische Geometrie. Kartenprojektionen. — Stübler : Niedere Analysis. Auflösung numerischer Gleichungen. — Wölffing : Höhere Algebra. Diff. und Integralrechnung. — Reuschle : Kurvendiskussion; Analyt. Geometrie des Raumes; Neuere analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes; Diff.- und Integralrechnung, Mathem. Seminar. — Mehmke : Darst. Geometrie; Vektoren- und Punktrechnung; Mathem. Seminar. — Roth : Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde. — Hammer : Ausarbeitung geodät. Aufnahmen; Prakt. Geometrie. Ausgleichungsrechnung, Astronomische Zeit- und direkte geographische Ortsbestimmung. — v. Autenrieth : Technische Mechanik.

AUTRICHE-HONGRIE

Czernowitz; *Universität.* — Daublebsky von Sterneck : Differential- und Integralrechnung. 5; Mathem. Seminar, 2; Mathem. Proseminar, 2. — Radakovic ; Mechanik, 5; Seminar für mathem. Physik, 2.

Graz; *Universität.* — Frischauf : Niedere Analysis 3; Analyt. Geometrie 2; Höhere Geodäsie 2. — Dantscher : Analyt. u. projek. Geometrie der Ebene 5, Mathem. Seminar 2. — Streissler : Darst. Geometrie (zentrale Projektion). — Wassmuth : Dynamik materieller Punkte und Punktsysteme 5, Seminar für mathem. Physik 3. — Hillebrand : Bahnbestimmung der Planeten u. Kometen 3, Sphär. Astronomie, I, Teil, 2.

Innsbruck : *Universität.* — Gmeiner : Algebra, 3; Funktionen komplexer Veränderlicher, 2; Uebungen im mathem. Seminare, 2. — Zindler : Anwendungen der Diff.- u. Integralrechnung auf Geometrie und Bewegungslehre, 5; Mathem. Seminar, 1. — MENGER : Elemente der projektiven Geometrie, 2. — v. OPPOLZER : Spektrographie, 2; Spektrographische Uebungen, 2; Uebungen in der Zeitbestimmung 3.

Prag; *Universität*. — PICK : Diff.- und Integralrechnung 5; mathem. Seminar 2. — WEINEK : Bahnbestimmung der Kometen und Planeten 3. — OPPENHEIM : Die Gestalt der Himmelskörper 2. — LIPPICH : Elementare Mechanik 3; Hydromechanik 2; Mathem. phys. Seminar 2.

Wien; *Universität*. — A. Mathematik. v. ESCHERICH : Bestimmte Integrale und Variationsrechnung, 5; Proseminar für Mathematik, 1; Seminar für Mathematik, 2. — MERTENS : Diff.- und Integralrechnung (auch für Naturhistoriker und Versicherungsmathematiker), 5; Uebgn. hiezu, Uebungen im mathemat. Seminar, 2; Uebgn. im mathemat. Proseminar, I. — WIRTINGER : Theorie der linearen Differentialgleichungen, 4. Mathemat. Seminar 2; Mathemat. Proseminar, 1. — KOHN : Einleitung in die synthetische Geometrie, 4; Uebgn. 1; Kurven und Flächen dritter Ordnung, 2. — TAUBER : Versicherungsmathematik, 4. — BLASCHKE : Einführung in die mathemat. Statistik, I. Teil, — 3. CARDA : Das Pfaffsche Problem, 2 — PLEMELJ : Elementare Funktionentheorie, 3. — GRÜNWALD : Differentialgeometrie, 2. — HAHN : Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen I· (Mengenlehre, Reihenentwicklungen), 2 — HANNI : Die hypergeometrische Reihe, 2. — B. Astronomie WEISS : Bahnbestimmung von Planeten und Kometen 4. — v. HEPPERGER : Sphär. Astronomie, 4. Photometrie, 1 g. — HERZ : Theoret. Astronomie, 2 — C. Geodäsie. PREY : Ebbe und Flut, 2. — HERZ : Die Elemente der darstellenden Geometrie und deren Anwendung auf das Kartenzeichnen, 3.

Wien; *Technische Hochschule*. — Mathematische Fächer. CARDA : Mathematik I. — CZUBER : Mathematik II, Grundlehren der höh. Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. — REICH : Ausgew. Kapitel aus der höh. Algebra. — GRÜNWALD : Ausgew. Kapitel aus der analyt. Geometrie. — TAUBER : Versicherungsmathematik I u. II. — BLASCHKE : Einf. in die mathem. Statistik. — MÜLLER : Darst. Geometrie u. konstruktives Zeichnen. — SCHMID : Darst. Geometrie u. konstruktives Zeichnen. — MÜLLER : Stereographische Projektion u. Zyklographie, Seminar für darst. Geometrie. — SCHMID : Projektive Geometrie I u. II. — ADLER : Graphisches Rechnen, Theorie der geom. Konstruktionen. — FINGER : Elem. der reinen Mechanik in Verbindung mit graph. Statik. — JUNG : Elem. der reinen Mechanik in Verbindung mit graph. Statik. — FINGER : Enzyklopädie der Mechanik. — KIRSCH : Techn. Mechanik I. Teil. (Elastizitäts- u Festigkeitslehre). — (Unbesetzt) : Technische Mechanik II, Hydromechanik. — FINGER : Analyt. Mechanik. — JUNG : Hydromechanik. — POLLACK : Elem. der niederen Geodäsie, Prakt. Uebungen. — DOLEZAL : Prakt. Geometrie, Prakt. Uebung., Situationszeichnen, Photogrammetrie, Katastralvermessung in Oesterreich. — TINTER : Höh. Geodäsie, Sphär. Astronomie, Uebungen im Beobachten u. Rechnen, Geodät. Rechenübungen, Th. der Kartenprojektionen.

FRANCE

Paris; *Faculté des Sciences*. — G. DARBOUX : Principes généraux de la Géométrie infinitésimale; en particulier, systèmes de coordonnées curvilignes (2 leçons par semaine). — GOURSAT : Opérations du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Eléments de la théorie des fonctions analytiques (2 leçons). — P. PAINLEVÉ : Lois générales de l'Equilibre et du mouvement (2 leçons par semaine) — L. RAFFY : Applications de l'Analyse à la Géométrie (2 leçons). — H. POINCARÉ : Des limites de la loi de Newton (2 leçons par semaine). — BOUSSINESQ : Frottement intérieur des fluides avec applications d'une part aux phénomènes d'écoulement bien continus, d'autre part à l'extinction graduelle des ondes (2 leçons par semaine). — G. KŒNIGS : De l'Elasticité et en particulier de l'Elasticité dans les milieux cristallisés (2 leçons par semaine). — E. BOREL : Théorie générale de la croissance des fonctions. Applications simples (1 leçon par semaine).

Conférences. — GOURSAT : Conférence de Calcul différentiel et intégral (1 leçon par semaine). — E. BOREL : Conférence de Calcul différentiel et intégral (1 leçon par semaine). — RAFFY : Conférence sur la Géométrie supérieure (1 leçon). — HADAMARD : Conférence sur l'Analyse supérieure (1 leçon) ; conférence sur la Mécanique (1 leçon). — BLUTEL : Conférence de Mathématiques (certificat de Mathématiques). Préparations à l'Etude des Sciences physiques (2 leçons). — SERVANT : Conférence de Mécanique physique (1 leçon).

Mathématiques de l'Ingénieur

Cours de l'Université de Besançon.

L'Université de Besançon organise chaque année un Cours public sur les *Mathématiques de l'Ingénieur*. Nous croyons intéresser nos lecteurs en reproduisant ici le programme détaillé publié par l'Université. Ce cours, qui est donné par notre distingué collaborateur M. le prof. J. ANDRADE, comprend deux séries de leçons ; il fait partie d'un ensemble de cours théoriques et pratiques destinés aux élèves horlogers.

I. — *Géométrie appliquée* (les mardis soir à 8 heures). — 1° Les nouvelles méthodes d'initiation géométrique (8 leçons) : Géométrie élémentaire. Statique et cinématique réunies.

2° Les représentations des formes par le dessin, les lunettes ou le calcul (8 leçons) : Perspective, Géométrie descriptive. Les transformations de figure, applications aux cartes géographiques et aux lunettes. Notions de Géométrie analytique.

3° Les méthodes graphiques appliquées à la mécanique et au calcul (9 leçons) : La statique graphique ; application à la résistance des arcs et poutres. Quadratures mécaniques et planimètres.

II. — *Le calcul appliqué aux faits physiques* (les vendredis à 6 h. du soir). 1° Arithmétique et algèbre de l'enfant (8 leçons) : Grandeurs concrètes et nombres représentants : problèmes du 1er et du 2e degré.

2° Les fonctions simples (6 leçons) : Continuité, quadrature, vitesse ou dérivée des fonctions. Théorème de la vitesse moyenne, applications. Fonctions exponentielles, fonctions trigonométriques ; leur origine et leur emploi. Application au mouvement pendulaire simple ou amorti et aux phénomènes qui les traduisent.

3° Méthodes pour la recherche des fonctions (6 leçons) : Comment les phénomènes d'équilibre peuvent conduire aux fonctions trigonométriques. Le problème généralisé des vitesses. Cas où ce problème comporte une solution exprimable soit par les fonctions simples, soit par leurs quadratures.

4° Les méthodes d'approximations successives (6 leçons) : Résolution des opérations numériques. Approximation d'une fonction. Trois applications aux calculs de chronométrie.

BIBLIOGRAPHIE

Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Em. Picard, Tome I. — 1 vol. in-8°, XL-500 pages avec un portrait d'Hermite ; 18 francs ; Gauthier-Villars, Paris.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. Baillaud et de H. Bourget, avec une préface de E. Picard. — 2 vol. in-8°, avec trois portraits, XX-477 p., VI-457 p. ; 16 francs le volume ; Gauthier-Villars, Paris.

La publication des œuvres des grands savants est toujours attendue avec impatience par leurs élèves, surtout lorsque les travaux sont dispersés dans les périodiques et qu'ils s'entendent sur une période de plus de cinquante ans. Il faut donc savoir gré à l'Académie des Sciences de Paris et tout particulièrement à l'un de ses membres M. Em. Picard, de faire paraître, dans un délai relativement court, les œuvres complètes de Charles Hermite, l'un des plus grands géomètres du XIX[e] siècle.

Comme le fait remarquer M. Picard dans la belle préface consacrée à l'œuvre scientifique d'Hermite, cette œuvre grandira encore quand elle se trouvera rassemblée et qu'on pourra ainsi mieux juger de sa belle unité. « C'est en Algèbre et en Arithmétique qu'il a été surtout un inventeur et un créateur. Avec Cayley et Sylvester, il a fondé la théorie des covariants des formes algébriques, et les admirables recherches, où il a introduit le continu dans le domaine du discontinu, lui assurent dans la Théorie des nombres, cette reine des Mathématiques, une place d'honneur à côté des deux grands géomètres, dont il aimait à se dire le disciple, Gauss et Dirichlet. »

Les œuvres d'Hermite comprendront trois volumes. Dans le premier volume sont réunis les mémoires publiés de 1842 à 1859. Au nombre de près de quarante, ils comprennent entre autres les célèbres lettres à Jacobi, alors qu'Hermite était élève à l'Ecole Polytechnique de Paris, et les travaux sur la division des fonctions abéliennes, sur les fonctions Θ et sur la théorie des nombres. Mentionnons aussi les beaux Mémoires sur les formes quadratiques.

En tête de ce volume consacré aux premiers travaux d'Hermite le lecteur trouvera la reproduction d'un dessin au crayon représentant l'illustre géomètre à l'âge d'environ vingt-cinq ans.

Il convient de signaler ici une publication qui a paru à peu près en même temps que ce volume et qui se rattache intimement aux œuvres de Charles Hermite. Nous voulons parler de la *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes,* publiée par les soins de MM. Baillaud et Bourget, avec une préface de M. E. Picard. On sait que le savant professeur de la Sorbonne a eu une correspondance scientifique très étendue avec un grand nombre de mathématiciens; aucune ne fut plus suivie que celle qu'il eut avec Th. Stieltjes (1856-1894). Elle commença en 1882, lorsque Stieltjes était encore astronome adjoint à l'Observatoire de Leyde, et fut interrompue douze ans après, par la mort prématurée du jeune et savant géomètre, qui était alors. depuis huit ans, professeur d'Analyse à la Faculté des sciences à Toulouse. Attirés par des mêmes problèmes les deux mathématiciens ont échangé une longue série de lettres sur une foule de questions d'Algèbre et d'Analyse On ne saurait trop engager les jeunes analystes à examiner cette remarquable correspondance si riche en idées originales; ils ne seront pas seulement charmé par le fond, mais aussi par la forme à la fois simple et intime de ces lettres.

H. F.

J. Tannery. — **Leçons d'Algèbre et d'Analyse** à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales. — 2 vol. gr. in-8°; Tome I, VII-423 p., avec 35 figures et 166 exercices; Tome II, 636 p., avec 104 figures et 238 exercices; 12 fr. le volume; Gauthier-Villars, Paris.

On sait que les programmes de la classe de Mathématiques spéciales en France ont été entièrement remaniés, en 1904, non seulement quant aux matières, mais aussi pour ce qui est des méthodes. M. Tannery a lui-même pris une part importante à l'élaboration des nouveaux programmes. Il était donc particulièrement bien qualifié pour entreprendre la publication de ces *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*. Elles comprennent l'ensemble des notions qui forment la base d'une étude approfondie de l'Analyse. L'auteur part de la notion de coupure pour amener l'élève aux notions du calcul intégral. Etant donné le caractère fondamental de l'ouvrage et sa valeur à la fois scientifique et didactique. nous croyons utile d'en indiquer le plan détaillé :

Tome I. — Chap. I. *Notion de coupure. Nombres irrationnels, Calcul des radicaux. Exposants fractionnaires, négatifs, irrationnels,* Définition des nombres irrationnels. Opérations sur ces nombres. Calcul des radicaux. Exposants fractionnaires, négatifs. irrationnels. Extension de l'idée de coupure : arc, aires. *Exercices.* — Chap. II. *Polynomes.* Préliminaires. Etude d'un polynome à une variable pour les valeurs de la variable voisine de zéro. Polynomes identiques. Etude d'un Polynome pour les valeurs de x voisines de a. Dérivées d'un polynome. Puissances d'un binome. Polynomes à plusieurs variables. *Exercices.* — Chap. III. *Division des polynomes.* Division par un monome. Polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable. Polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable. Polynomes à plusieurs variables. *Exercices.* — Chap. IV. *Des fractions rationnelles.* Etude d'une fraction rationnelle en x pour les valeurs de x voisines d'une valeur donnée. Fonction homographique. *Exercices.* — Chap. V. *Plus grand commun diviseur.* Définition et recherche du plus grand commun diviseur. Propriétés du plus grand commun diviseur. Divisibilité. Polynomes à plusieurs variables. Condition pour que deux polynomes en x soient premiers entre eux, pour qu'ils aient un diviseur de degré égal ou supérieur à un nombre donné. *Exercices.* — Chap. VI. *Nombres imaginaires.* Définitions : opérations sur les nombres imaginaires. Représentation géométrique des nombres imaginaires. Racines $n^{\text{ièmes}}$. *Exercices.* — Chap. VII. *Etude des polynomes à coefficients et à* *variable imaginaires*. Définitions. Interprétation géométrique. Etude d'un polynome pour les valeurs de la variable voisines d'une valeur donnée. Extension de divers résultats. Théorème fondamental de l'Algèbre. *Exercices*. — Chap. VIII. *Arrangements, combinaisons, permutations, inversions. Formule du binome. Exercices*. — Chap. IX. *Equations du premier degré. Exercices*. — Chap. X. *Déterminants; équations du premier degré*. Définition et propriétés fondamentales des déterminants. Méthodes d'élimination d'Euler, Sylvester et Bézout. *Exercices*.

Tome II. — Chap. XI. *Séries*. Séries. *Exercices*. — Chap. II. *Fonctions d'une variable réelle*. Généralités, Définition de diverses fonctions. *Exercices*. — Chap. XIII. *Dérivées*. Définition, calcul des dérivées. Théorèmes fondamentaux sur la variation des fonctions. Fonctions primitives. Dérivées et fonctions primitives de fonctions d'une variable réelle à coefficients imaginaires. Etude de la variation des fonctions primitives. *Exercices*. — Chap. XIV. *Séries de fonctions*. Séries dont les termes sont des fonctions d'une variable. Séries entières en x. Développements en série de quelques fonctions simples. Formules de Taylor et de Maclaurin. Cas où la variable est imaginaire. Fonctions exponentielles et circulaires. Fractions rationnelles. Infiniment petits et infiniment grands. *Exercices*. — Chap. XV. *Applications à l'étude d'une fonction à la séparation et au calcul des racines d'une équation*. Etude de la variation d'une fonction donnée. Séparation des racines. Calcul approché des racines d'une équation. *Exercices*. — Chap. XVI. *Equations algébriques*. Relations entre les coefficients et les racines. Fonctions symétriques. Elimination. Equations numériques à une inconnue. *Exercices*. Chap. XVII. *Notation différentielle. Courbes planes*. Notation différentielle. Courbes planes. *Exercices*. — Chap. XVIII. *Notions de calcul intégral*. Intégrale définie. Intégrales indéfinies et intégrales définies. Evaluation approchée d'une intégrale définie. Applications géométriques. Equations différentielles. *Exercices*.

Toutes ces théories sont exposées avec la précision et la clarté qui caractérisent les publications de M. Tannery. L'auteur n'a pas perdu de vue qu'il s'agit d'une *préparation à l'Analyse*. Son ouvrage ne fait nullement double emploi avec son *Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*, qui est destiné aux jeunes mathématiciens. Dans celui-ci la forme est plus abstraite, tandis que dans les *Leçons* il ne craint pas d'entrer dans le détail de nombreux problèmes et exercices numériques. Le nouveau livre de M. Tannery sera un guide précieux pour les commençants, mais il sera aussi lu avec intérêt et grand profit par ceux qui enseignent cette partie des mathématiques.

O. Staude. — **Analytische Geometrie der Punktes, der geraden Linie und der Ebene.** Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Uebungen über analytische Geometrie. (Teubners Lehrbücher XVI). — 1 vol. in-8°, cart., 448 p.; 14 MK.; B.G. Teubner. Leipzig.

Cet ouvrage de Géométrie analytique contient l'étude systématique des formes géométriques du premier ordre; le point, la droite et le plan. Bien qu'il constitue à lui seul un tout, il peut être considéré comme une introduction à l'ouvrage du même auteur sur la théorie des surfaces du second ordre.

Le principal objet de l'ouvrage est l'étude et l'usage des coordonnées sur la droite, dans le plan et dans l'espace. L'auteur part toujours des coordonnées cartésiennes pour arriver ensuite aux coordonnées triangulaires ou tétraédriques. Il a soin de mettre en lumière les relations projectives entre les éléments.

Dès le début on est frappé par l'enchaînement et la coordination rationnelle des sujets, ainsi que par la remarquable clarté d'exposition. C'est dire que nous recommandons vivement cet ouvrage à tous ceux qui désirent faire une étude approfondie de la Géométrie analytique ; ils y trouveront une foule de remarques et de rapprochements d'un grand intérêt qu'on ne peut en général pas exposer dans les cours faute de temps.

H.-B. Fine. — **A College Algebra.** — 1 vol. cart. 595 p., 6/6 d, Ginn et C°, Boston, New-York, Chicago, Londres.

Ce *Text-book* donne, en moins de six cents pages, un exposé très bien ordonné des principales théories d'Arithmétique et d'Algèbre. L'auteur, qui témoigne d'une grande expérience de l'enseignement, aime l'enchaînement logique des matières. Il le montre dès le premier chapitre dans lequel il étudie la notion de nombre depuis le nombre cardinal jusqu'au nombre complexe. On voit par cela même que son ouvrage s'adresse à des élèves qui, possédant déjà les premiers éléments d'Algèbre, désirent revoir ces éléments et les compléter par une étude des théories conduisant à l'Analyse. Après les chapitres consacrés à l'Algèbre élémentaire, M. Fine expose donc la théorie des équations, les déterminants, les séries, les produits infinis, les fractions continues et la notion de fonction continue. Chaque chapitre se termine par de nombreux exercices et problèmes. Mentionnons d'autre part l'index des matières par ordre alphabétique.

Par son plan et par la méthode personnelle de l'auteur, ce *Text-book* diffère en bien des points des traités en usage dans les divers pays, y compris les pays de langue anglaise. Nous le recommandons à l'attention des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur.

R. Bricard. — **Matematika Terminaro kaj krestomatio.** — 1 broch. in-16 de 59 p., prix : 75 cent. ; Hachette, Paris.

Voilà une publication qui vient à son heure : aujourd'hui que la question de la langue auxiliaire *Esperanto* est partout dans l'air, que les progrès de cette langue pendant les deux dernières années ont été tels que la question de son adoption se pose impérieusement devant le monde scientifique. le moment est venu de préparer des vocabulaires scientifiques et techniques pour fixer définitivement la langue internationale.

Mais l'élaboration de vocabulaires complets pour chaque science nécessite un travail considérable, travail qui devra être revisé et approuvé par une autorité compétente et reconnue. c'est-à-dire par une Commission scientifique internationale. Pour le moment, il a été décidé au dernier Congrès universel d'Esperanto de laisser à l'initiative individuelle le soin de préparer et de *proposer* des vocabulaires techniques.

Le travail de M. Bricard est un vocabulaire de ce genre, pour les mathématiques. Ce travail sera donc de la plus grande utilité pour la future Commission internationale lorsqu'elle aura à fixer les termes usités dans cette science et il est à souhaiter que le vocabulaire de M. Bricard soit largement mis à contribution dans ce but. car c'est à notre connaissance l'essai le plus complet qui ait été publié jusqu'à ce jour dans ce domaine.

Le *Matematika Terminaro* est aussi d'un très grand intérêt à un autre point de vue : les termes du nouveau vocabulaire ne sont pas traduits dans les différents idiomes nationaux ; en d'autres mots, ce n'est pas un dictionnaire que nous offre M. Bricard ; les termes sont définis uniquement par le texte explicatif écrit entièrement en Esperanto. Cette méthode offre évidemment de grands avantages et elle convient très bien, au moins pour les premiers vocabulaires. Reste à savoir, si pour des nomenclatures plus complètes, cette méthode ne risque pas de transformer les vocabulaires en de véritables traités.

Je me permettrai encore deux remarques : doit-on renoncer à rendre la nomenclature mathématique plus logique et plus simple ? Il est très vrai que les nomenclatures existant dans les différentes langues modernes sont suffisamment claires malgré que la logique et la simplicité y font souvent défaut ; il est très vrai aussi que dans la géométrie plane, le point et la droite se correspondent par dualité, tandis que dans l'espace le point correspond au plan par dualité ; mais il n'en est pas moins vrai que l'adoption de l'Esperanto comme langage scientifique international est une occasion unique de simplifier les nomenclatures et de les rendre aussi logiques que possible. Il faut donc y regarder à deux fois avant d'abandonner ce point de vue, d'autant plus que le principe des suffixes en Esperanto est éminemment propre à la formation de nomenclatures régulières et symétriques. Et où trouvera-t-on la symétrie si on ne la trouve pas en géométrie. Quelle parenté y a-t-il, avec la nomenclature actuelle, entre une *ligne courbe* et une *surface développable ?* Et pourtant ces deux expressions ne désignent que les deux aspects opposés d'une seule et même forme géométrique, puisqu'une série de points détermine une série de plans et réciproquement.

Une autre remarque importante concerne le choix des racines des nouveaux mots, surtout des mots qui sont d'un usage courant en mathématiques. Il serait très avantageux de les raccourcir autant que possible afin de faciliter la formation des mots composés : ainsi le mot *kuspeĝo* (de l'anglais *cusp edge*) est très bien choisi pour désigner l'*arête de rebroussement* d'une surface développable ; mais le mot *multipliki* pour *multiplier*, *infinito* pour *infini* ne donnent-ils pas des dérivés un peu longs, comme *infinitezimeca* pour *infinitésimal*. Enfin dans le vocabulaire français-esperanto de M. Cart, on trouve que *ebena* veut dire *plan* dans le sens de *égal (ebenaĵo,* une *plaine),* tandis que *plato* est indiqué comme signifiant *plan géométrique* : or *plato* est plus court que *ebeno*, pourquoi donc préférer ce dernier mot ? De même, le mot *linio*, signifie une ligne dans le vocabulaire usuel, ainsi par exemple : la 3e *ligne* d'une page ou d'un déterminant, ce qui n'est pas la même chose qu'une ligne géométrique ; rien n'empêche donc de garder le mot *linio*, qui a trois syllabes, pour le sens usuel et d'adopter le mot *linjo*, qui n'a que deux syllabes, pour désigner une ligne au sens géométrique.

Si je me suis permis ces quelques critiques, c'est que M. Bricard dit lui-même dans sa préface qu'il *propose* seulement les nouveaux termes et je crois qu'une discussion entre les mathématiciens, basée sur l'excellent travail de M. Bricard ne peut qu'être utile à la future nomenclature.

R. de Saussure (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

American Mathematical Monthly, (The), published under the Auspices of the University of Chicago, edited by B. F. FINKEL & Leon E. DICKSON. Vol. XIII, 1906.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Haward University. Second Series, vol. VII. 1905-1906 Cambridge, Mass. E. U.

BOCHER: 1. A Problem in Analytic Geometry. 2. Introduction to the theorie of Fourier's Series. 3. Another Proof of the Theorem concerning artificial singularities. — CARMICHÆL: Note of multiply perfect numbers. — CURTISS: A Proof of the Theorem concerning artificial singularities. — HEDRICK: On a function which occurs in the Law of the mean. — HUNTINGTON: The continuum as a Type of order. — KENNELY: The harmonic Analysis of the semicircle and of the ellipse. — MAC NEISH: On the Determination of a Catenary wich given Directrix and passing through two given Points. 2. Concerning the discontinuous solution of the Problem of the minimum surface of revolution. — MASCHKE: A geometrical problem connected with the continuation of Power-series. — MASON: Curves of minimum moment of inertia with respect to a Point. — MILLER: Notion the possible number of operators of Order 2 in a group of Order 2^m. — PORTER: Concerning Green's theorem and the Cauchy-Riemann Differential Equations. — LAUREL: 1. On the singularities of tortuous Curves. 2. On the twist of a tortuous Curve. — WHITE: Triangles and quadrilaterals inscribed to a cubic and circumscribed to a conic. — E. B. WILSON: Note on integrating factors.

Bulletin of the American Mathematical Society. New-York. Vol. XII.

N° 4 (Janvier 1906). — LANDAU: On a familar theorem of the theory of functions. — WHITE: Rational plane curves related to Riemann transformations. — WRIGHT: On Lamés six équations connected with triply orthogonal systems of surfaces. — SMITH: Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugates lines. — HEDRICK: The new calculus of variations. — VAN VLECK: Granville's differential and integral calculus. — WILSON: The foundations of science. — HADAMARD: La mécanique statistique. — Notes.

N° 5 (Février). — F.-N. COLE: The Twelfth Annual Meeting of the American Mathematical Society. — PETER FIELD: Note on Certain Groupes of transformations of the Plane into Itself. — E.-A. MILLER AND ELIJAH SWIFT: The Meran Meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung. — A. POINCARÉ: Translated J.-W. YOUNG: The Present and the Future of Mathematical Physics.

N° 6 (Mars). — T.-F. HOLGATE: The December Meeting of the Chicago

Section. — G.-A. Miller : The Groups Containing Thirteen Operators of Order Two. — Oswald Veblen : Huntington's Types of Social Order.

N° 7 (Avril). — F.-N. Cole : The February Meeting of the American Mathematical Society. — L.-G. Weld : The-Fifte. Annual Meeting of the American Association for the advancement of Science. — G.-A. Bliss : A Proof of the Fundamental Theorem of Analysis situs. — J.-E. Wright : Note on the Pratical Application of Sturm's Theorem. — S.-W.-A. Young : The Movement for Reform in the Teaching of Mathematics in Prussia.

N° 8 (Mai). — G.-A. Miller : The February Meeting of the San Francisco Section. — J.-E. Wright : An Application of the Theory of Differential Invariants to Triply Orthogonal Systems of Surfaces. — V. Snyder : Surfaces generated by conics Cutting a Twisted Quartic Curve. and an axis in the Plane of the Conic. — Glenn : Operation Groups of Order p^{m_1} p_1 p_2 m_2 p^2 : — R.-L. Carstens : A Definition of Quartenious by Independent Postulates. — N.-J. Lennes : Note on the Heine-Borel Theorem.

N° 9 (Juin). — F.-N. Cole : The April Meeting of the American Mathematical Society. — E. Slaught : The April Meeting of the Chicago Section. — G.-A. Miller : Groups in which all the Operator save Contained in a Series of Subgroups such that any Two have only Identity in Common. — J.-C. Morchead : Notes on the Factors of Fermat's Numbers.

N° 10 (Juillet). — W.-W. Johnson : Note on the Numerical Transcendents. Sn and $Sn = Sn_{-1}$. — D.-R. Curtiss : On Certain Properties of Wronskians and Related Matrices. — J.-B. Shaw : Significance of the Term Hyper complex Number. — H.-S. White : How should the College teach Analytic Geometry ? — Shorther Notices. — Notes. — New Publications.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von Emil Lampe. Bande 35. Jahrgang 1904. G. Reimer, Berlin.

Hefte 1 u. 2 (p. 1 à 688). — Geschichte und Philosophie. — Algebra. — Niedere und höhere Arithmetik. — Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reihen. — Differential- und Integralrechnung. — Funktionentheorie. — Reine, elementare und synthetische Geometrie. — Analytische Geometrie.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer in Jena. B. 15, 1906 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

N°s 1 à 6 (Janvier-juin 1906.) — Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — A. Schönflies : Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre. — A. Schönflies : Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Massbestimmung. — W. Wien : Über die partiellen Differentialgleichungen der Physik. — A. Sommerfeld : Bemerkungen zur Elektronentheorie, — H. Kortum : Rudolf. Lipschitz. — Anschütz und Study : Hermann Kortum. — Max Nath : Die preussischen Lehrpläne für den mathematischen Unterricht am Gymnasium und die Vorschläge der Breslauer Unterrichtskommission. — E. Czuber : Die Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht vom österreichischen Standpunkte. — J.-W.-A. Young : Die Reformbewegungen im mathematischen Unterrichte in den Vereinigten Staaten Nordamerikas. — P. Kœbe : Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird. — H. Weber : Elementare Mengenlehre. — H. Zindler : Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie. — K.-Th. Vahlen : Über Stetigkeit und Messbarkeit. — A. Korselt : Paradoxien der Mengenlehre. — E. Haentzschel : Bemerkung zu W. Wien : Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. — Yoshio Mikami : On reading P. Harzer's paper on the mathematics in Japan. — F. Hocevar : Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht? — A. Korselt : Über Logik und Mengenlehre. — R. v. Lilienthal : Ratschläge und Unterweisungen für die Studierenden der Mathematik und Naturwissenschaften and der Universität zu Münster i. W. — G. Valentin : Leonhard Eulers Wohnhaus in Berlin. — G. Frege : Über die Grundlagen der Geometrie. — J.-A. Gmeiner : Otto Stolz. — P. Stäckel : Das Archiv der Mathematik und Physik, ein Geleitwort zu den ersten zehn Bänden der dritten Folge. — P. Harzer : Bemerkung zum Aufsatz des Herrn Mikami.

Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. 4e série. T. VI. Gauthier-Villars, Paris.

Janvier-février-mars 1906. — Ch. Halphen : Théorie et application du coin. — A. de Saint-Germain : Note relative au mouvement de rotation. — J. Juhel-Rénoy : Sur le théorème de Ptolémée et son application aux polygones réguliers. — M. Fouché : Au sujet d'un théorème connu. — R. B. : Note au sujet de l'article précédent. — A. Vacquant : Solution de la question de Mathématiques spéciales au concours d'agrégation de 1905. — Ed. Collignon : Théorie élémentaire des petites oscillations d'un pendule simple. — G. Fontené : Sur le cercle pédal. — R.-B. : Note au sujet de l'article précédent. — Emile Weber : Note sur la généralisation du théorème de Feuerbach. — V. Jamet : Sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m augmente au-delà de toute limite. — L. Vessot King : Expression de $p\,\frac{u}{2}$ comme quotient de deux séries entières. — R. Bricard : Sur une propriété de l'hyperboloïde orthogonal et sur un système articulé. — J. Hadamard : Sur la mise en équations des problèmes de mécanique. — A. Deltour : Sur une question de probabilités. — Pernot et Moisson : Sur la construction des courbes algébriques. — J. Juhel-Rénoy : Sur la projection centrale. — Landau : Sur une inégalité de M. Hadamard.

Nieuw Archief voor Wiskunde, revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg, et P.-H. Schoute. 2me série, VII, 1906, Delsman et Nolthenius, Amsterdam.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secundario : Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Serie III, vol. III, Raffaelo Giusti, Livorno.

Fasc. II à VI (Sept. 1905 à juin 1906). — E. Piccioli : Fondamenti per la geometria dell'n-edro in uno spazio lineare con n-1 dimensioni. — S. Alasia : Estensione di alcuni teoremi sui gruppi di sostituzioni. — G. Sadun : Un Criterio di convergenza della serie di Lagrange. — G. Candido : Le equazioni reciproche in senso generale. — G. Ripetto : Intorno ad una forma del potenziale di una massa sferica la cui densità non sia costante. — G. Lazzeri : Sulla composizione delle forze nello spazio. — A. Bonolis : Sull' insegnamento della storia delle matematiche in Russia. — G. Giraud : I numeri perfetti. — G. CALVITTI : Sull' indice minimo di N relativo a p. — M. CHINI : Sulle coppie di numeri interi che anno un dato massimo comme divisore e un dato minimo comme multiplo. — A. COMESSATTI : Una dimostrazione della formola di Meissel. — G. PESCI : Sull' uso e sulle tavole dei valori naturali delle funzioni trigonometriche. — G. CALVITTI : Sulla divisione all' infinite d'una qualsiasi successione periodica per un qualsiasi numero p; primo con la base g del sistema di numerazione adopterato. — KREDIET : La costruzione dell'asse centrale di un sistema di forz. — SIBIRANI : Alcune proprietà metriche della cubica di Wallis. — ACCHIPINTI : Sui sistemi di jacobiani e di determinanti k. — MIOTTI : Rappresentatione delle omografie nello spazio a tre dimensioni. — COMPOSTO : Sulla trasformazione del radicale $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. — Piccole note. — Bibliografia.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Direttore G.-B. GUCCIA.

T. XXI. — SBRANA : Sui sistemi ciclici. — ALMANSI : Sulla flessione dei cilindri. — MARLETTA : Sulle quintiche gobbe razionali. (Estratto da una Lettera al prof. L. Berzolari). — TORELLI : Dimostrazione di una formula di de Jonquières e suo significato geometrico. — GULDBERG : Sur une classification des problèmes du calcul des variations. — SINIGALLIA : Sul sistema di tre forme cubiche binarie. — SILLA : Sopra alcune quistioni di Statica. — FORSYTH : Differential Invariants of a Plane and of Curves in the Plane. — YOUNG : A note on sets of Overlapping Intervals. — POINCARÉ : Sur la dynamique de l'électron. — FUBINI : Nuove ricerche intorno ad alcune classi di gruppi discontinui. — DE DONDER : Sur les invariants différentiels. (Extrait d'une Lettre à M. L. Sinigallia). — MARLETTA : Contributo alla teoria delle curve razionali. — MINEO : Sul luogo dei punti parabolici delle superficie d'un fascio. — CHINI : Sulle superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione. — SANNIA : Deformazioni infinitesime delle curve instendibili e corrispondenza per ortogonalità di elementi. — SEVERI : Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard. — BOGGIO : Risoluzione del problema dei valori al contorno per alcune classi di equazioni alle derivate parziali. — AGUGLIA : Sulla superficie luogo dei contatti stazionari delle superficie di un fascio con quelle di un sistema lineare ∞^3. — APPELL : Remarque relative à un mémoire de M. Lucio Silla « Sopra alcune quistioni di Statica ». — ORLANDO : Sull'integrazione della Δ_4 in un parallelepipedo rettangolo. — ORLANDO : Un'applicazione analitica di un teorema di Fourier. — CIANI : Sopra la configurazione del pentaedro. — ORLANDO : Sull'integrazione della Δ_2 in un campo chiuso e convesso. — STUDY : Sugli enti analitici. — PEANO : Super theorema de Cantor-Bernstein. — RADOS : Rapport sur le prix Bolyai, présenté à l'Académie Hongroise des Sciences. — GUCCIA : Sopra una nuova espressione dell'ordine e della classe di una curva gobba algebrica.

Revue du Mois, dirigée par E. BOREL. 1re année 1906. Librairie Le Soudier, Paris.

Juillet-Octobre. — LANGEVIN : Pierre Curie. — J. MASCART : La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens. — JULES TANNERY : L'adaptation de la pensée. — B. BOURDON : La voûte céleste. — EM. BOREL : La Graphologie et la méthode scientifique. — R. de MONTESSUS : La représentation proportionnelle. — LUDOVIC ZORETTI : La méthode mathématique et les sciences sociales.

Revue générale des sciences pures et appliquées, dirigée par L. Olivier 17^{me} année, 1906. Armand Colin, Paris.

15 et 30 septembre. — P. Duhem : Le P. Marenne Mersenne et la Pesanteur de l'air.

30 octobre. — J. Hadamard : La Logistique et la Notion de nombre entier.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par M. X. Léon. Arm. Colin Paris.

14^{me} année. N° 5. — B. Russell : Les paradoxes de la logique.

Revue scientifique, 5^{e} série. Tome VI, 1906, Paris. — N° 7 (18 août 1906). — Bertin : Les vagues de la mer; leurs dimensions et les lois du mouvement de l'eau.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. Tome XIV, 2^{me} partie, octobre 1905 — avril 1906. Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1906.

School Science and Mathematics, A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools, vol. VI, 1906. Smith and Turton. Chicago.

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft. — Vierter Jahrgang 1905. — 1 vol. in-8°, 80 p. ; Mk. 2.80 ; Teubner, Leipzig.

G. Hessenberg : Neue Begründung der Sphärik. — F. Müller : Erinnerung an die 100. Widerkehr des Geburtstages von Karl Schellbach. — H. Reissner : Mechanische und elektrische Masse. — R. Rothe : Über eine mechanische Auswertung der elliptischen Transzendenten. — E. Salkowski : Zur Bestimmung aller Raumkurwen, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht. — E. Sandor : Über die günstigste Form des Gitterträgers, ein Beitrag zur Theorie des Fachwerks. — G. Schirdewahn : Über ein besonderes rechtwinkliges Koordinatensystem für ebene Dreiecke. — J. Schur : Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke. — R. Skutsch : Anwendungen der Massen reduktionen nach Reye und nach Poinsot. — G. Wallenberg : Konstruktionen mit Lineal und Eichmass sowie mit dem Lineal allein — M. Zacharias : Vierecke mit recht winkligen Diagonalen. — P. Zühlke : Über eine quadratische Kongruenz.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. Tweede Jaargang, 1905-1906. — Blom & Olivierse, Culemborg.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome IX, fasc. 4 et 5. Delsmann en Nolthenius, Amsterdam.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. XXXI. Jahrg. 1906; Alfr. Hölder. Wien.

N° 1 à 6 (Janvier-juin 1906). — R. Fischer : Bestimmung des Abstandes zweier Punkte in homogenen Koordinaten. — H. Seidler : Der casus irreducibilis für Mittelschulen. — A. Farago : Über eine Induktion in den elementaren Geometrie. — A. Pleskot : Über die elementare Komplanation des sphärischen Dreiecks. — F. Hocevar : Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzüführen oder nicht? — H. Kleinpeter : Zur Reformfrage des mathem. Unterrichtes.

2. Livres nouveaux:

AUG. ADLER. — **Theorie der geometrischen Konstruktionen.** — 1 vol. 301 p. *(Sammlung Schubert)*, 9 Mk; G.-J. Goeschen, Leipzig.

H. ANDOYER. — **Cours d'Astronomie.** Première partie : *Astronomie théorique.* — 1 vol. autographié, in-8, 221 p., 9 fr. ; Hermann, Paris.

CARLO BOURLET. — **Cours abrégé de Géométrie,** I. Géométrie plane. — 1 vol. cart. 404 p., 2 fr. 50 ; Hachette et Cie, Paris.

H. BURKHARDT. — **Elliptische Funktionen,** Zweite, durchgesehene u. verbesserte Auflage. — 1 vol. in-8o, 374 p., 10 Mk ; Veit et Cie, Leipzig.

F. EBNER. — **Leitfaden der technischen wichtigen Kurven.** — 1 vol. cart. in-8o, 197 p., 4 Mk ; B.-G. Teubner, Leipzig.

J. CH. FIELDS. — **Theory of the algebraic Functions of a complex Variable.** — 1 vol. in-4o, 186 p., 12 Mk; Mayer & Müller, Berlin.

E. GEYGER. — **Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** I. Teil. — 1 vol. br. gr. in-8, 321 p.. 8 Mk ; G.-J. Goeschen, Leipzig.

P. HENKLER. — **Der Lehrplan für den Unterricht in Naturkunde,** historisch u. kritisch betrachtet. *(Samml. naturw. pädagogischer Abhandlungen).* — 1 fasc. in-8, 44 p., 1 Mk ; B.-G. Teubner, Leipzig.

K. HEUN. — **Lehrbuch der Mechanik,** I *Kinematik.* — 1 vol. cart. 339 p. *(Sammlung Schubert)*, 8 Mk; G.-J., Goeschen. Leipzig.

AUG. KEINDORFF. — **Die Zustandsgleichung der Dämpfe, Flüssigkeiten u. Gase.** — 1 fasc., 61 p., 2 Mk ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Kultur der Gegenwart, herausgegeben, von HINNEBERG Teil I, Abt. 1 : Die Allgemeinen. Grundlagen der Kultur der Gegenwart, 671 p., 16 Mk. Aus dem Inhaltsverzeichniss : W. von DYCK, Die naturwissenschaftliche Hochschulbildung. K. KRAEPELIN, Naturwissenschaftliche-technische Mussen. O.-N. WITT, Naturwissenschaftliche-technische Austellungen. — B.-G. Teubner, Leipzig.

PROSP. LAFITTE. — **Essai sur le carré magique de N à N nombres.** — 1 br. 23 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

H. LAURENT. — **La géométrie analytique générale.** — 1 vol. gr. in-8o, 151 p., 6 fr. ; Hermann, Paris.

ERN. MACH. — **Space et Geometry** in the Light of physiological. psychological and physical Inquiry, from the German by Th.-J. Mc CORMACK. — 1 vol, 148 p., The oper Court publishing Company, Chicago.

O. MEISSNER. — **Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung** mit Ausblicken auf Witterungskunde u. Klimalehre. Unterlagen für Schulgemässe Behandlung sowie zum Selbstunterricht *(Samml. naturw.-pädagogischer Abhandlungen).* — 1 fasc., in-8o, 94 p., 2 Mk 60; B.-G. Teubner, Leipzig.

HERM. SCHUBERT. — **Auslese aus meiner Unterrichts- u. Vorlesungspraxis.** III. — 1 vol. cart., in-16, 250 p., 4 Mk. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

M. STUYVAERT. — **Les nombres positifs.** Exposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire. — 1 vol. in-8o, 133 p., 3 fr. ; Van Goethem, Gand.

AUG. TAFELMACHER. — **Elementos Geometria analitica del plano,** para e; uso del Curso militar de la Escuela Militar. — 1 vol. gr. in-8o. 135 p.l Santiago du Chili.

E. VESSIOT. — **Leçons de Géométrie supérieure.** — 1 vol. autographié, gr. in-4o, 322 p., 12 fr. ; Hermann, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et organisation de l'enseignement.

Philosophie et histoire des mathématiques.

MÉLANGES

CORRESPONDANCE

CHRONIQUE

Congrès et sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire des principaux périodiques.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Los numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.