L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

GENÈVE
IMPRIMERIE W. KUNDIG & FILS

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

NEUVIÈME ANNÉE

1907

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS
10, CORRATERIE, 10

1907

Ernest Cesàro

1859-1906

ERNEST CESÀRO

1859-1906

Nec forma aeternum aut cuiquam est fortuna perennis :
Longius aut propius mors sua quemque manet.
Prop., II, 28, 57.

Le 13 septembre 1906, les journaux de Naples annonçaient la mort tragique du savant géomètre Ernest Cesàro, survenue la veille dans une petite ville peu éloignée, où il allait chaque année se reposer des fatigues de l'étude et de l'enseignement. Un de ses fils, Manlio, âgé de dix-sept ans, se baignait dans la mer qui était fort agitée, et son père, nageur habile, se déshabillait pour le rejoindre, quand tout à coup une vague impétueuse surprit le jeune homme. Son père voulut se jeter à son secours, mais en descendant l'escalier il glissa si malheureusement qu'il tomba dans l'eau après s'être fait des contusions à la tête et à la poitrine. Les bateliers accoururent bientôt, mais ils ne ramenèrent qu'un mourant, tandis que le cadavre de Manlio fut retrouvé le lendemain. On comprend la douleur de la femme et des autres fils de M. Cesàro qui avaient été spectateurs impuissants de cette pénible tragédie. Telle fut la catastrophe qui en quelques minutes priva la famille Cesàro de son seul soutien et qui arracha à la science une de ses gloires les plus illustres et à l'Italie un citoyen dont elle était justement fière.

La science et la famille furent le double but et l'idéal de la vie de Cesàro : à l'une il voua toutes les énergies de son puissant esprit ; à l'autre il se sacrifia lui-même. Qui donc plus que lui peut avoir droit à l'adoration des siens, à l'admiration et à la reconnaissance des amis de la science ?

Il fut un de ces rares hommes privilégiés que nous sommes contraints à admirer dans les productions de leur belle intelligence et à aimer pour eux-mêmes. Modeste et courtois avec tout le monde, loyal jusqu'au scrupule et toujours disposé à voir le bien plutôt que le mal dans les actions humaines, à secourir de son argent un pauvre et de ses conseils tous ceux qui s'adressaient à lui, il sut se faire des amis et des admirateurs de tous ceux qui eurent la bonne fortune de l'approcher ou d'entrer en relations avec lui. Par les qualités de son esprit et de son cœur, ainsi que par ses œuvres, il fit preuve des vertus qui appartiennent aux grands hommes dont une nation a le droit de se montrer fière et le devoir d'en perpétuer le souvenir et l'exemple.

Dans un de ses éloges académiques[1] J. Bertrand a dit : « Les travaux d'un homme de science sont une trop grande part de sa vie pour que l'on puisse séparer les deux souvenirs et c'est dans un même récit que leurs histoires se déroulent et s'expliquent, qu'elles s'éclairent mutuellement en s'unissant, sans se confondre, dans une mesure qu'un vain caprice ne saurait régler ». Mais ce récit devient trop difficile lorsqu'il s'agit d'un savant comme M. Cesàro, c'est-à-dire d'un savant dont la production scientifique est non seulement extraordinairement abondante, mais surtout grandement variée et je ne crois pas qu'il serait possible à quelqu'un de parler de sa vie en jetant un coup d'œil d'ensemble sur ses travaux. On devra toujours ou les examiner un à un, ce qui sera bien long, ou se contenter d'en mentionner quelques-uns parmi les plus intéressants ou les plus récents, et c'est ce que je tâcherai de faire.

Ernest Cesàro naquit à Naples le 12 mars 1859, mais sa vraie patrie est la petite ville de Torre Annunziata qui, s'appuyant pittoresquement sur les derniers contre-forts du Vésuve, baigne ses pieds dans l'eau du Tirrène : c'est dans cette ville que toute sa famille est née et a toujours demeuré. Son père Louis, homme d'affaires, et sa mère, Fortunia Nunziante, ayant dû se rendre à Naples pour quelques mois, Ernest y naquit. Son enfance fut comme celle de la plupart

[1] *Eloge historique de Le Verrier.*

des hommes : elle s'écoula tranquillement au milieu de l'affection de ses parents et de la sympathie de ses maîtres qui se complaisaient de la vivacité de son esprit et de la noblesse de son cœur. Agé de neuf ans il voulut entrer dans le séminaire de Nola au lieu de suivre ses frères dans un collège de Naples, et son père, croyant peut-être à une vocation, y consentit volontiers. Il en sortit deux ans après pour aller fréquenter le Gymnase « Victor Emanuel » de Naples, où il étudia pendant quatre ans ; mais au bout de ce temps, comme il préféra renoncer à l'étude des langues mortes, son père l'envoya à Liège où, depuis plusieurs années, demeurait son frère Joseph, actuellement professeur ordinaire de Minéralogie et Cristallographie à l'Université de cette ville. S'étant inscrit à l'*Ecole des Mines*, il étudia avec ardeur en récoltant beaucoup d'éloges ; il montra une grande prédilection pour la mathématique et ses applications, prédilection qui s'affirmait de jour en jour, surtout par les encouragements de ses maîtres, et en particulier du savant professeur Catalan qui préconisait dans le jeune italien une des gloires de la science. Mais cet éminent géomètre fit encore plus : pour témoigner à son jeune élève tout l'intérêt qu'il concédait à son talent et à son assiduité, il permit que plusieurs de ses Notes de mathématique parussent dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, la savante Revue qu'il dirigeait [1] (Bruxelles, 1874-1880). Ce sont sept courtes recherches sur des sujets différents [2] où on découvre déjà une facilité peu commune d'assimilation et un esprit surprenant de pénétration uni à une intuition toute particulière des applications à la fois intéressantes et peu prévues. Aussi la nouvelle revue *Mathesis*, qui succéda à la *Nouvelle Correspondance*, accueillit dès ses premières pages les nombreux écrits de M. Cesàro, et dans les seize volumes publiés depuis le jour de sa fondation nous y retrouvons une succession de plus

---

[1] La publication de cette revue cessa en 1880 : elle fut reprise en 1881 par MM. J. Neuberg et P. Mansion sous le titre de *Mathesis*.

[2] Je reproduis les titres des sept notes, presque ignorées de la plupart : 1. *Sur l'existence de certains polyèdres.* — 2. *Propriétés d'une courbe.* — 3. *Sur les formes approchées des solides d'égale résistance.* — 4. *Une question de maximum traitée par Poncelet,* — 5. *Sur la série harmonique.* — 6. *Démonstration de la formule de Stirling.* — 7. *Quelques formules.*

de cinquante articles signés par M. Cesàro ; ils sont tous d'un grand intérêt et vont des théories géométriques élémentaires aux applications de l'Analyse, de la théorie des nombres au calcul symbolique, de la doctrine des probabilités à la géométrie différentielle. Quelqu'un a fait remarquer dans le compte rendu d'un Mémoire de M. Cesàro, publié en 1884, que les sujets traités par lui ne sont pas tous nouveaux ou n'ont pas tous de l'originalité dans les applications, leur nombre étant au préjudice de la valeur. Mais j'observe à ce propos le fait remarquable qu'avec les années l'importance de sa production scientifique est allée en augmentant d'une manière extraordinaire sans que la variété des sujets ait subi aucune diminution. La vivacité naturelle de son caractère se réfléchissait sur ses recherches, surtout pendant les premières années de sa carrière scientifique ; mais la méthode par laquelle chaque question y est traitée est toujours personnelle et possède une empreinte propre d'originalité et de largeur de conception suffisantes à leur assurer la plus haute valeur. Les démonstrations complétement neuves et les applications très ingénieuses des théorèmes de Berger, de Fouet, de Jamet, d'Appell, etc., pour ne parler que des notes insérées dans *Mathesis,* en donnent une preuve convaincante. D'ailleurs il aurait suffi d'un travail tel que celui qu'il consacra en 1883 à l'arithmétique asymptotique, et qu'il fit paraître sur les encouragements de Catalan, sous le titre *Sur diverses questions d'arithmétique* dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Liège*, pour lui assurer d'une manière incontestable la renommée de mathématicien profond et original.

Admirateur enthousiaste d'Hermite, qui avait hérité de Gauss et Cauchy le sceptre de l'analyse, Ernest Cesàro étudiait avec ardeur les théories géométriques et, au premier rang de ses désirs, il plaçait celui de se rendre à Paris pour écouter les leçons d'Hermite, comme aussi celles des grands maîtres, MM. Darboux, Serret, Briot, Bouquet et Chasles qui avait fait de la géométrie un art et une science, — *Mathesis ars et Scientia dicenda* — Son rêve fut bientôt satisfait : il quitta Liège avec le fils du Prince de Soisson son ami, et il s'en alla à Paris où pendant plusieurs mois il put étudier à la Sorbonne. Et là aussi il sut attirer l'attention de ses maîtres sur son esprit puissant et sur sa volonté tenace d'aborder les questions de haute science dont la vision lointaine l'attirait. Hermite l'aimait et encourageait ses aspirations ; dans les leçons de M. Darboux il trouvait les fondements de la géométrie intrinsèque à laquelle il aurait associé plus tard son nom ; ses nombreux travaux qu'il communiquait à M. Catalan montraient les gigantesques progrès qu'il faisait dans la voie difficile sur laquelle il avait voulu s'acheminer.

Mais les mauvais jours allaient commencer pour lui : la banqueroute de plusieurs maisons de commerce qui avait jeté sa famille dans la cruelle nécessité de sacrifier la meilleure partie de son patrimoine avait mis celle-ci dans l'impossibilité de le laisser à Paris. La mort de son père dont le cœur n'avait su résister aux chocs des adversités aurait porté le coup fatal aux aspirations du jeune mathématicien si des hommes aussi généreux que grands n'étaient allés à son secours. M. Catalan aimait toujours son ancien élève qui, en attendant, était rentré à Liège : MM. Hermite, Neuberg et Mansion ne voulaient abandonner le jeune homme auquel souriait un avenir aussi brillant ; ils eurent l'idée d'écrire au professeur Cremona dont le bon cœur était bien connu. Celui-ci accepta de contribuer à cette bonne action et en parla à M. Nicolas S. Dino, en ce moment-là professeur à la Faculté des Sciences de Rome, actuellement à celle de Naples. Egalement originaire de Torre Annunziata, où il est grandement aimé, le professeur S. Dino obtint pour le jeune Cesàro ce qui lui était nécessaire pour compléter ses études. Dans la lettre qu'il adressa au Conseil municipal de sa ville natale, il disait entre autres choses [1] : «..... *et il serait faute impardonnable que de l'abandonner à lui-même : c'est une force qui ne doit pas être perdue. — S'il persévère dans la voie longue et pénible des études sévères et bien ordonnées*, *il*

[1] Ce passage de la lettre de M. Dini au Conseil municipal de Torre Annunziata m'a été communiqué par M. le professeur Servillo, directeur de l'Ecole technique de cette ville et qui a été élève de M. Cesàro.

fera honneur à notre nation. — Sur son compte M. le Prof. Catalan de Liège, dans une lettre adressée à un illustre personnage M. le Prof. Cremona *de cette Université* (Rome) *et datée 13 juin 1883 s'exprimait dans ces termes : Il y a un mois, sans connaître Gauss, M. Cesàro a inventé une définition de la fonction* Γ *différente de celle de Gauss, mais qui s'accorde avec celle-ci. Ce jeune homme, s'il vit, sera un très grand géomètre* ». — Et cette même année Hermite exposait dans son Cours d'Analyse à la Sorbonne des formules très intéressantes qui avaient été construites par le jeune M. Cesàro.

La demande de M. S. Dino avait été acceptée à l'unanimité ; le 8 février 1883 le Conseil Municipal attribuait à M. Cesàro un secours de trois mille francs pour qu'il pût compléter à Liège, à l'*Ecole des Mines*, les études qu'il avait commencées avec tant de succès. Mais cela ne devait pas s'accomplir, car, vers la fin de cette même année, il rentra en Italie afin de passer les deux dernières années de cours à l'Université de Rome et d'y prendre son doctorat en mathématiques. L'influence des savantes leçons de MM. Cremona, Cerruti, Battaglini et des autres excellents maîtres qui enseignaient la géométrie supérieure, la mécanique, l'analyse dans cette Université, se fit sentir dans les travaux qu'il fit à Rome ; mais là, comme dans la plupart des travaux qui suivront, on retrouve l'influence d'Hermite. Ainsi par exemple dans ses recherches sur la théorie des séries, où, au lieu de rester circonscrit à la seule méthode des séries entières, comme on avait fait dans les plus anciennes recherches, il se mit hardiment sur les traces d'Hermite, en appelant à son aide toutes les ressources qui peuvent être fournies par les méthodes données par Cauchy. M. Cesàro parvint ainsi en peu de temps à donner à cette doctrine une brièveté et une élégance incomparables. Mais c'est surtout dans ses travaux sur la théorie des nombres, sa branche préférée, que l'on remarque le plus l'influence très vive du savant géomètre français, et il ne pourrait en être autrement. Les méthodes générales introduites par ce savant géomètre ont ouvert dans cette théorie des horizons si nouveaux que pour beaucoup de temps encores elles constitueront un puissant instrument de recherches ; il est donc naturel qu'après les premiers travaux d'Hermite, tous ceux qui se sont occupés de la théorie des formes, et parmi eux aussi M. C. Jordan dans son classique Mémoire[1] sur l'équivalence des formes, aient ressenti vivement son influence.

Le merveilleux principe de la réduction continue s'adapte aujourd'hui aussi aux intéressantes recherches sur la théorie de certaines fonctions uniformes. M. Cesàro ne négligeait aucune occasion pour montrer combien d'importance il donnait à cette branche des mathématiques ; encore récemment, dans une de ses précieuses lettres, il me faisait mélancoliquement remarquer comme cette théorie, que Dirichlet appelle la reine des mathémathiques, est négligée, même en Italie, où pourtant elle a des traditions glorieuses. Ce chagrin est encore plus justifié lorsqu'on réfléchit comme l'introduction de cette branche dans la théorie des fonctions donnera beaucoup de force à ceux qui seront maîtres des principes de l'arithmétique supérieure, et que certaines recherches communes à l'arithmétique et à l'analyse des fonctions pourraient donner[2] dès à présent une belle moisson de résultats de la plus grande importance. Du reste, on sait bien que M. Hermite avait dit qu'il n'aurait jamais pu écrire son célèbre Mémoire sur la transformation des fonctions abeliennes s'il n'avait pas été très familier avec les questions de l'arithmétique.

Le volume XIII de la 2^{me} série (1884) des *Annali di Matematica pura ed applicata*, de MM. Brioschi et Cremona, contiennent neuf Mémoires très intéressants de M. Cesàro sur les différentes branches de l'arithmétique : c'est le fruit de longues recherches, et certaines théories qui y sont à peine signalées pourraient avantageusement servir de base à de nouvelles et utiles recherches. Il a réuni ces neuf Mémoires dans un même volume pour le dédier à M. S.-N. Dino, en

[1] E. PICARD. *L'œuvre scientifique de Ch. Hermite.* — Dans les Annales de l'Ec. norm. sup., sér. 3^e, vol. XVIII, 1901.

[2] Ibid.

témoignage de reconnaissance, sous le titre d'*Excursions arithmétiques à l'infini* (Paris, Hermann, 1885). Il attribua toujours une grande importance au résultat contenu dans ce volume et plusieurs études qu'il aborda dans les années suivantes ont là leur fondement. Rappelons entr'autres celui[1] qui a pour objet la série

$$\mathrm{L}(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots$$

en ce qui concerne la manière dont elle se comporte dans le voisinage de l'unité; M. Cesàro a pu déduire l'expression asymptotique du nombre $\Theta\ (n)$ des diviseurs de n et établir une formule beaucoup plus générale que celles de Gauss et de Dirichlet.

Ces mêmes résultats contiennent le fondement de ses recherches sur certaines séries de puissances[2] et, en particulier, ses observations[3] sur la formule arithmétique de M. Pervouchine

$$\frac{\mathrm{P}_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 - \frac{5}{12 \log n} + \frac{1}{24 \log\log n},$$

(P_n est le n^{me} nombre premier) dont il démontre l'inexactitude théorique : il lui substitue l'autre plus exacte

$$\frac{\mathrm{P}_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11}{2\,(\log n)^2}.$$

Je veux rappeler encore que pendant sa dernière année d'étude à l'Université de Rome (1885), il publia dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Lisbonne une étude très complète sur les formes polyédriques dans tous les espaces (*Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazi;* in-4° de 75 pages); il la dédia à son maître, le savant professeur Cremona.

Afin de permettre à Cesàro de compléter à son aise ses études, M. De Sanctis, fin lettré et brillant esprit, qui était alors ministre de l'Instruction publique, lui avait obtenu du

---

[1] *La série de Lambert en Arithmétique asymptotique.* Rendiconti della R. Accad. di Napoli, sér. 2e, vol. VII (1893), pages 197-204.

[2] *Sur la détermination asymptotique des séries de puissances.* Ibid., pages 187-195.

[3] *Sur une formule empirique de M. Pervouchine.* Comptes rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris, vol. CXIX (1894), pages 848-849.

gouvernement un subside à titre d'encouragement. Mais ses cours universitaires ne furent jamais entièrement complétés : lui qui était si brillant dans toutes les branches des mathématiques, il ne put se résoudre à se plier aux formalités qu'on nomme doctorat.

Toutefois, comme en 1886, on avait bannit ses concours à des chaires dans les écoles secondaires et supérieures, encouragé par ses maîtres, il se laissa porter et il fut élu dans toutes les chaires auxquelles il avait concouru et qui sont celles du Lycée Mamiani de Rome, et celles des Universités de Naples, Palerme et Messine. Il choisit Palerme, où il eut le degré de titulaire d'Algèbre supérieure à dater du 1er novembre de cette même année. Peu après, le 22 février 1887, le président de la Faculté des sciences de l'Université de Rome, le grand physicien M. Pierre Blaserna, lui communiquait que, après un beau rapport de M. le prof. Tonelli et par autorisation du ministre de l'Instruction publique, il lui était conféré *ad honorem* le doctorat en mathématiques.

Il demeura à Palerme jusqu'en 1891 : en cette même année, il demanda et il obtint de passer à la chaire de calcul infinitésimal dans l'Université de Naples, chaire dont M. le professeur Battaglini était le titulaire, mais qui était restée libre, ce mathématicien ayant passé à l'enseignement de l'Analyse supérieure dans la même Université. Vers le milieu de 1906, il avait demandé d'être transféré à l'Université de Bologne pour y enseigner la Mécanique rationnelle, et il devait s'y rendre au mois de novembre dernier. Les collègues et les étudiants l'auraient vu partir avec beaucoup de chagrin ; d'autres collègues et d'autres étudiants l'attendaient avec impatience. La fatalité cruelle a voulu que les uns et les autres s'associassent dans le deuil et dans la douleur.

Cesàro savait également donner à son enseignement cette empreinte toute personnelle qui caractérise ses écrits et qui le conduisait à généraliser les théories en cherchant les plus belles applications. Ses leçons d'algèbre complémentaire formèrent un cours entièrement différent de celui auquel les étudiants avaient été habitués. Son livre *Corso d'analisi algebrica* (Turin 1894), donne un résumé de ses leçons et un aperçu de la réforme qu'il préconisait pour les études universitaires. C'est dans ce même esprit que sont écrits ses *Elementi di calcolo infinitesimale* (Naples 1897), dont il parut une deuxième édition en 1905, d'après la traduction allemande de M. le Prof. Gerhard Kowalewsky, de l'Université de Greifswald. On sait quel est l'accueil qu'ont reçu partout ces leçons, destinées non seulement à ceux qui désirent apprendre les mathématiques supérieures pour s'en servir directement dans les nombreuses applications, mais aussi à ceux qui recherchent avant tout une gymnastique intellectuelle. Il ne voulut jamais s'occuper des critiques plus ou moins intéressées dont il fut l'objet pour ces idées, mais il continua intrépide sa route, bien heureux de se rendre utile aux jeunes étudiants. Dans son cours, comme dans ses livres, il avait soin d'exposer le plus clairement possible les théorèmes généraux dont il donnait la démonstration la plus simple et qu'il faisait suivre d'applications bien appropriées. Il se louait de suivre ainsi les préceptes d'un de ses maîtres [1], qu'il considérait comme insurmontable dans ces qualités d'exposition des théories les plus élevées. Les questions d'importance secondaire il les évitait ; il détestait le luxe d'érudition car il savait qu'elle est préjudiciable aux élèves, tandis qu'il cherchait à développer chez eux l'amour des mathématiques, plutôt que de les éloigner d'elles. Cette méthode devait lui attirer des critiques, mais les méthodes comme les arbres se jugent à leurs fruits, et ils sont bien privilégiés ceux qui peuvent se louer d'avoir eu pour maître le savant Cesàro.

De même qu'il évitait les théories trop élevées, inutiles aux élèves, il évitait les discussions sur les fondements de la science : il respectait, et même à l'occasion il encourageait les discussions sur la philosophie des mathématiques, sans s'y intéresser personnellement. Comme il l'avait dit plus d'une fois, il partageait avec Hermite la croyance un peu mystique sur l'essence du nombre, et avec lui il pensait que les

---

[1] Même peu de jours avant sa mort Hermite écrivait à une Revue didactique:... *L'admiration, a-t-on dit, est le principe du savoir... ; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part plus large pour les étudiants, aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante et sans grand profit pour les commençants qui n'en peuvent comprendre l'intérêt.*

nombres forment un monde qui possède sa propre existence hors de nous.

Son enseignement universitaire ne s'arrêta pas à l'algèbre complémentaire et au calcul infinitésimal. Dès sa première année à Palerme il fut chargé de l'enseignement de la Physique mathématique, puis plus tard encore d'autres cours aux Universités de Palerme et de Naples : dans tous ces cours, qu'il développait avec la plus grande compétence et avec une merveilleuse largeur de vues, il apporta des contributions personnelles, répandues ensuite dans de nombreuses publications. Ses Mémoires sur les équations de l'élasticité dans les hyperespaces, sur les formules de Maxwell, sur le pouvoir rotatoire magnétique, sur les dilatations et rotations dans les milieux élastiques, sur la propagation de la chaleur, etc., sont bien connus. Son livre *La teoria matematica dell' elasticità* (in-8° de 214 pages, Turin 1895), qui est presque le résumé de ses cours, montre quelle autorité il aurait apportée dans son enseignement de mécanique rationnelle qu'il devait occuper à Bologne. Il se proposait de publier sous peu, entre autres ouvrages, ses leçons sur la *Teoria matematica del calore* et les *Lezioni sull' idrodinamica* déjà rédigées.

Les soins que M. le Prof. Cesàro porta à l'enseignement ne firent nullement diminuer sa production scientifique ni la variété des sujets : il sembla au contraire qu'en enseignant aux autres il progressait lui-même et que sa culture devenait toujours plus large. Ses contributions à l'étude des fonctions holomorphes, suivant la nouvelle conception de Laguerre, à l'étude des nombres de Bernoulli, à la théorie des roulettes, etc., s'alternent avec les recherches sur la théorie des nombres, sur l'analyse intrinsèque des courbes et des surfaces dans les hyperespaces, sur la théorie des limites, etc. Dans chacun de ses Mémoires, même dans les brefs écrits destinés aux écoliers, il y a toujours du nouveau, soit dans la méthode, soit dans la théorie elle-même. Il me suffit de rappeler comme exemple une petite note[1] d'en-

[1] *Sur une question de limites :* MATHESIS, vol. X (1890), pages 25-28.

viron trois pages insérée dans *Mathesis* et où il donne une nouvelle démonstration du théorème sur les fonctions à une variable entière : *Si pour* n *entier et croissant indéfiniment,* a_n *et* b_n *s'approchent de zéro, on a*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

si la deuxième limite existe. Ce théorème bien qu'il soit dû à de l'Hospital, devrait s'appeler *théorème de Cesàro* [1], car il l'a présenté sous une forme toute nouvelle et il l'a fait intervenir dans de nombreuses applications.

Il serait facile de citer d'autres exemples analogues à celui-ci et d'apporter ainsi de nouvelles preuves de l'originalité de la production scientifique du regretté Cesàro. C'est dans chacun de ses écrits qu'on pourrait trouver de ces exemples, et le nombre de ses écrits est assez considérable pour qu'un savant mathématicien ait dit en parlant de Cesàro que c'est *un prodige de précoce activité.* En 1886, lorsqu'il concourut a l'enseignement, le nombre de ses publications surpassait une centaine; en 1892, c'est-à-dire quand il concourut à la médaille de la Société italienne des sciences (dite *dei XL*), ce nombre avait surpassé deux cents et depuis 1892 à aujourd'hui ce nombre est plus que doublé. Lui-même ne se rappelait pas toutes ses publications, et quand dernièrement il concourut au grand prix royal de l'Académie *dei Lincei*, il fut obligé de demander aux amis et aux bibliothécaires non seulement des exemplaires de ses publications, mais aussi des titres. Si après nous ajoutons à tout cela les nombreuses questions ou solutions de problèmes qu'il envoyait aux Revues, les discussions épistolaires avec de nombreux mathématiciens, les éclaircissements et les conseils qu'il donnait à tous ceux qui s'adressaient à lui, on pourra bien dire que son activité scientifique fut plus que prodigieuse. Chateaubriand et beaucoup d'autres écrivains avant et après lui, ont toujours célébré la précocité du génie mathématique de Pascal, mais sans en donner des preuves : qu'est-ce qu'on devrait dire de celle de M. Cesàro, qui fut autrement éclatante.

---

[1] Ce n'est pas moi le premier à manifester cette opinion : elle fut déjà exprimée, je crois, par M. MANSION ou par M. NEUBERG.

Comme je l'ai déjà remarqué, le nom de M. Cesàro est associé à une théorie presque neuve à laquelle il a consacré avec enthousiasme toutes les ressources de son grand esprit et qui a fait le sujet non seulement de plusieurs de ses premières recherches, mais aussi de ses derniers et plus importants Mémoires : je veux parler de l'*analyse intrinsèque* qu'il considérait à bon droit comme sa propre création. Une figure géométrique est généralement étudiée soit en la rapportant à des axes fixes, soit en la rapportant à des axes variables. Dans cette dernière méthode la figure considérée dans l'espace est rapportée à un trièdre mobile $Oxyz$ défini par la tangente Ox, la normale principale Oy et la bi-normale Oz en un point variable O de la courbe, et à ces axes sont rapportés les éléments infinitésimaux relatifs à ce point O. Les relations entre ces éléments, c'est-à-dire *les propriétés intrinsèques de la courbe*, s'obtiennent bien plus facilement par cette méthode que par celui des axes fixes. De là, la dénomination d'analyse intrinsèque qu'on a donné à cette méthode.

Dès 1867, M. Darboux fait usage du trièdre mobile comme système d'axes dans son cours professé au Collège de France, puis dans son ouvrage classique sur la théorie des surfaces[1]. Cette même méthode est utilisée après lui par un autre géomètre éminent, M. Ribaucour, dans son *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, couronné[2] en 1876 par l'Académie des sciences de Paris, et postérieurement dans son *Mémoire sur les Elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, couronné en 1880 par l'Académie royale de Belgique. M. Cesàro qui, dès les premiers moments de ses études mathématiques, guidé par le sens très marqué d'intuition qui lui était propre, avait soudainement prévu les nombreuses ressources que cette méthode devait rendre à celui qui saurait l'appliquer à toutes les branches des sciences mathématiques, se consacra ardemment à cette étude, en coordonnant entre eux les résultats déjà connus

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces*, 4 vol., in-8°, Paris, 1887-1896.

[2] Ce mémoire ne fut publié qu'en 1891 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

et en les développant là où c'était nécessaire. Dans ses *Lezioni di geometria intrinseca* (in-8° de 264 pages, Naples, 1896), il sut établir dans un seul corps de doctrine, à une époque où cette méthode n'avait encore guère reçu de publicité, non seulement tout ce qu'il avait pu apprendre des autres, mais aussi, et plus particulièrement, tout ce qui était le fruit de ses recherches personnelles, en joignant avec la plus ingénieuse habileté la théorie aux applications les plus variées. Ces applications vont des courbes usuelles à celles que M. Wölffing a nommées *courbes de M. Cesàro* [1], aux courbes triangulaires, symétriques et harmoniques, et aux congruences linéaires, à propos desquelles il montre comment sa méthode conduit presque intuitivement aux résultats dus par Sturm sur les configurations des normales à une surface dans le voisinage d'un point donné et aux théorèmes bien connus de Hamilton et de Kummer. L'édition allemande de ces *Lezioni* (traduites elles aussi par M. le professeur Kowalewsky et publiées sous le titre *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, in-8° de 341 pages, Leipzig, 1901), contient plusieurs nouveaux paragraphes dont quelques-uns présentent une importance toute particulière. Signalons celui qui a été ajouté au chap. III, où sont considérées les courbes dont les cercles osculateurs appartiennent à un même complexe linéaire de cercles, et celui qui a été ajouté au chap. XVI, où il met en évidence la nature différente des espaces suivant que le nombre *n* de leurs dimensions est pair ou impair : *le lieu d'un point ayant la première, deuxième, troisième, etc., courbures constantes est sphérique ou hélicoïdal, suivant que* n *est un nombre pair ou impair.*

L'analyse intrinsèque forme pour tous ceux qui étudient la géométrie différentielle un instrument très puissant d'investigation et un champ très vaste de recherches, mais dont plusieurs mathématiciens n'ont, jusqu'à ce moment, pas voulu reconnaître la portée, ou n'ont pas su apprécier sa valeur

[1] Ces courbes peuvent se définir comme il suit : le rayon de courbure en un point est proportionnel au segment de normale qui va du point de tangence à son intersection avec la polaire du point de tangence par rapport à un cercle fixe. Lorsque ce cercle se réduit à un point, la courbe devient une spirale sinueuse, et lorsque le cercle se réduit à une ligne droite, le lieu se réduit à la courbe dite *courbe de Ribaucour*.

exacte dans les avantages qu'il présente sur les méthodes classiques de MM. Laguerre, Halphen, Klein, Lie, etc. Mais M. Cesàro, instruit de la haute valeur de sa méthode et persuadé que ses travaux ne disparaîtront pas avec lui, ne se découragea jamais en constatant l'indifférence avec laquelle on accueillait ses efforts pour mettre en pleine lumière toute l'importance de l'analyse intrinsèque; au contraire, en travailleur infatigable, il en continua les applications dans toutes les branches de la géométrie.

Peu après la publication de l'édition allemande de la *Natürliche Geometrie*, M. le professeur Scheffers démontrait[1] que les hélices coniques-cylindriques obtenues par M. Cesàro, et dont il est question à la page 184 de cet ouvrage, ne sont pas les courbes les plus générales. M. Scheffers introduit d'autres courbes, des hélices cylindriques, qui coupent sous un angle constant les génératrices d'un cône; elles se trouvent sur une quadrique de révolution qui a un foyer au sommet du cône et elles coupent sous un angle constant les génératrices du cône qui les projette de l'autre foyer. M. Cesàro reprend les résultats obtenus par M. Scheffers en substituant[2] à la quadrique une surface de révolution engendrée par la rotation de l'ovale de Descartes autour de l'axe de symétrie, et il démontre que les hélices trouvées par M. Scheffers appartiennent à deux types d'hélices qu'on peut nommer elliptique et hyperbolique et qui rentrent dans la classe des hélices déjà signalées par les professeurs Pirondini[3] et Strazzeri[4]. Cette analyse intrinsèque des hélices poloconiques est appliquée avantageusement par M. Cesàro[5] à l'étude d'une courbe quelconque placée sur un cylindre de révolution, en fournissant une méthode applicable à une surface de révolution quelconque,

[1] *Ueber Loxodromen.* Leipziger Berichte, vol. 54, page 369.

[2] *Analisi intrinseca della eliche poloconiche.* Rendiconti della Rea. Acc. di Napoli, sér. 3e, vol. IX, 1903, pages 73-89.

[3] *Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable.* Crelle, 1897.

[4] *Le eliche cilindriche.* In-8°, de 34 pages, Sassari, 1901. *Generalizzazione di alcune proprietà dell' elica cilindro-conica ordinaria.* Le Matematiche pure ed applicate, vol. I, 1902, pages 244-254.

[5] *Per l'analisi intrinseca della superficie rotonde.* Rendiconti della Rea. Acc. di Napoli, serie 3e, vol. IX, 1903, pages 135-145.

procédé qui, avec des modifications très légères, peut facilement être généralisé.

Voici maintenant une autre question qui a attiré l'attention de M. Cesàro et lui a fourni une application[1] de son analyse intrinsèque : c'est la courbe singulière donnée par M. Helge von Koch[2] comme exemple d'une courbe continue qui n'a pas de tangente. M. Cesàro donne une nouvelle construction et il ajoute aux propriétés énoncées par le géomètre suédois une nouvelle série de propriétés caractéristiques. Il démontre, par exemple, que cette courbe est semblable à elle-même dans toutes ses parties; que sa longueur entre deux points quelconques est infinie: que ses points peuvent se représenter arithmétiquement d'une manière naturelle dans le système de numération binaire, ce qui permet d'établir une correspondance univoque entre ces points et les valeurs d'une variable réelle dans l'intervalle (0,1) et d'en déterminer, à l'aide des séries convergentes, les coordonnées en fonction des nombres par lesquels ces variables s'expriment dans le système binaire. Il signale aussi l'existence d'autres courbes analogues à celle de M. von Koch[3] et il les compare aux courbes continues qui passent par tous les points d'une surface donnée, dues à MM. Peano et Hilbert.

L'étude des propriétés des surfaces dans leurs déformations infinitésimales est encore un sujet auquel il applique son analyse et il parvient à établir des formules[4] qui admettent comme cas particulier celles de M. Codazzi : il démontre aussi par un procédé direct le théorème bien connu de Weingarten sur la déformation des surfaces isothermiques. Il reprend encore l'étude intrinsèque des espaces courbes[5]

[1] *Remarques sur la courbe de von Koch*. Atti della Rea. Acc. di Napoli, sér. 2e, vol. XII, 1905. — *Fonctions continues sans dérivée*. Arch. d. Mathem. und Phys., 1905, pages 57-63.

[2] Archiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Stockholm, 1904, pages 681-702. — Un segment rectiligne étant divisé en trois parties, sa partie moyenne se substitue aux deux côtés du triangle équilatère construit sur lui; cette construction étant répétée indéfiniment sur tous les côtés des polygones qu'on obtient, on a la courbe continue mentionnée.

[3] Parmi ces courbes est comprise celle signalée par M. T. Takagi dans ces derniers jours: Comptes rendus de la Soc. physico-mathém. de Tokio, vol. 1, page 176.

[4] *Formole per l'analisi intrinseca delle superficie ecc.* Rendiconti della Rea. Acc. di Napoli, sér. 3e, vol. VII, 1901, pages 294-308.

[5] *Nuova teoria intrinseca degli spazi curvi.* Atti dell' Acc. dei Lincei. sér. 5e, vol. V. 1904-1905, pages 3-24.

suivant une idée qu'il avait déjà énoncée dans un précédent mémoire [1], c'est-à-dire d'envisager l'espace courbe à ν dimensions placé dans l'espace linéaire à n dimensions, comme s'il était composé de courbes gauches définies par leurs équations intrinsèques, et il en déduit des cas particuliers très intéressants de théorèmes connus dans l'espace défini par $\nu = 2$, $n = 4$.

Dans la dernière période de sa vie, il s'était efforcé d'obtenir encore de nouveaux résultats, afin de convaincre les plus indifférents sur la portée de l'analyse intrinsèque dans les questions les plus abstraites, et ainsi il était arrivé à montrer non seulement combien cette analyse peut réussir utilement lorsqu'on l'applique aux espaces non-euclidiens, mais aussi comment elle permet de réédifier sur de nouvelles bases toute la géométrie non-euclidienne. La géométrie intrinsèque du plan étant rendue indépendante de l'axiome euclidien des parallèles [2] au moyen d'une définition particulière du carré de l'élément linéaire, il peut passer directement à l'extension des résultats qu'il obtient par cette méthode à l'espace à courbure constante à un nombre de dimensions quelconque [3]; il poursuivit son analyse jusqu'à montrer comment, à l'aide de l'analyse intrinsèque, la géométrie non-euclidienne peut se bâtir sur des fondements nouveaux [4].

Les résultats qu'il obtint confirment complètement la confiance absolue qu'il plaçait dans la méthode intrinsèque et ils forment un digne couronnement de ses efforts de près d'un quart de siècle en vue de perfectionner une théorie qu'il avait trouvée à un état presque embryonnaire.

Les recherches mentionnées ci-dessus interviennent dans un problème d'un grand intérêt qui a formé l'objet de deux des Mémoires les plus remarquables du regretté M. Cesàro.

---

[1] *Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie.* Atti Rea. Acc. di Napoli, sér. 2e, vol. XII.

[2] *Sui fondamenti della geometria intrinseca non euclidea.* Rendiconti Acc. dei Lincei. sér. 5e, vol. XIII, 1904, pages 438-445.

[3] *Geometria intrinseca negli spazi a curvatura costante.* Ibid., pages 658-667.

[4] *Fondamento intrinseco della pangeometria.* Atti Acc. dei Lincei, sér. 5e, vol. V, 1904-1905, pages 155-183.

Beltrami avait établi [1], en 1866 et comme extension d'un autre théorème énoncé par lui-même, que la condition nécessaire et suffisante pour que les points d'une surface puissent se reporter sur une surface à courbure constante de manière que les géodésiques de la première soient représentées par celles de la deuxième est que la première surface soit aussi à courbure constante. M. Cesàro a repris ce théorème et il a montré [2] que le chemin suivi par M. Beltrami et plusieurs autres après lui, et qui consiste à chercher avant tout la forme de l'élément linéaire et en déduire après que la forme obtenue convient seulement aux surfaces à courbure $K =$ *constante*, n'est ni la plus générale ni la plus courte : il est préférable de commencer par démontrer que la condition $K =$ *constante* est nécessaire pour la dite représentation et en déduire après, au moyen de la détermination effective de l'élément linéaire, que cette condition est suffisante. Par un procédé très rapide, qui s'approche de celui qui a été suivi par M. Bianchi [3] pour arriver à la condition $K =$ *constante* seulement, il arrive à établir les résultats obtenus par Beltrami, en déduisant en outre de nombreux cas particuliers, parmi lesquels celui de la développée de la caténoïde dont la propriété est de pouvoir être rapportée point par point sur un plan, de manière que les images de ses géodésiques soient toutes les chaînettes qui ont une droite comme directrice. Il fit voir ensuite [4] que quelques notions de la théorie intrinsèque suffisent à établir des résultats nouveaux.

Pour montrer en outre comment cette méthode évite toutes les difficultés qu'on rencontre lorsqu'on fait usage des procédés ordinaires de la géométrie différentielle, il se sert de quelques-unes des formules fondamentales obtenues par lui pour en déduire, par un procédé à peu près intuitif, les propriétés des loxodromies sur la pseudosphère, la démonstra-

---

[1] *Annali di Matematica*, série 1re, vol. VII, pages 185-204 ; ou bien *Œuvres complètes*, vol. I, page 280.

[2] *Sulle immagini delle geodetiche nella rappresentazione piana delle superficie*. Rendiconti Rea. Acc. de Naples.

[3] *Lezioni di geometria differenziale*, page 412.

[4] *Per l'analisi intrinseca delle figure tracciate sopra una superficie*. Rendiconti Rea. Acc. de Naples, 1905.

tion du théorème de Clairaut pour les lignes à courbure constante sur la pseudosphère, qui ont la propriété de couper orthogonalement un nombre infini de loxodromies qui convergent en un même point réel ou imaginaire, et bien d'autres problèmes intéressants qu'il serait trop long d'énumérer ici. Il avait laissé entrevoir encore beaucoup d'autres applications remarquables dans ce domaine.

La production scientifique du savant Prof. E. Cesàro se trouve dispersée dans un grand nombre de Revues et de Recueils d'Académies [1] italiennes et étrangères : lorsqu'elle se trouvera réunie, dans un ensemble complet, elle formera le plus beau monument qu'on puisse élever à son génie et elle paraîtra certainement plus majestueuse encore que ce qu'on peut entrevoir aujourd'hui. C'est à ses collègues et à ses élèves qu'incombe maintenant la tâche de réunir et de publier ses écrits.

Je ne saurais mieux terminer cette notice, malheureusement incomplète, qu'en appliquant ici à Cesàro les termes prononcés par M. Levy dans son éloge de M. J. Bertrand : « Il fut un semeur d'idées ; ses ouvrages classiques, avec leurs nombreux exercices, ont déterminé bien des vocations..... S'il jetait la vérité en prodigue par la plume et par la parole, il savait aussi l'aimer et l'apprécier chez les autres. C'est pour cela qu'il eut beaucoup d'amis. Il savait inculquer l'amour aux jeunes gens : c'est pour cela qu'il fut un vrai maître ».

C. Alasia (Ozieri, Sardaigne).

[1] Voici, par ordre de date, les nominations concernant le professeur Cesàro :

1885, mai 19, membre de la *Société royale des Sciences de Liège ;*
1892, février 16, membre de l'*Accademia Pontoniana,* de Naples ;
1892, décembre 3, membre de la *Società Reale delle Scienze,* de Naples ;
1892, décembre 29, membre de l'*Accademia Real das Sciencias,* de Lisbonne ;
1895, août 15, membre de la *Reale Accademia dei Lincei,* de Rome ;
1898, avril 17, membre de la *Reale Accademia della Scienze,* de Turin ;
1900, décembre 17, membre de l'*Académie royale de Belgique ;*
1902, avril 14, membre de la *Società Italiana delle Scienze,* dite *dei XL.*

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES RÉSIDUS QUADRATIQUES

Avant-propos. — Par suite de la création de nombreux journaux scientifiques dans le courant du XIX[e] siècle, de doctes et ingénieux pionniers se sont attachés de plus en plus et dans un grand nombre de directions, à poursuivre surtout le défrichement de l'immense champ mathématique, dont la production a pris ainsi une intensité inquiétante pour l'avenir de la science : il est certain que dans cent ans, bien des étendues cultivées aujourd'hui, seront délaissées, à cause de leur isolement ou de leur aridité. Mais on peut affirmer que les deux parties qui en forment l'entrée, ou, si l'on veut, l'initiation — la géométrie et l'arithmétique — seront toujours l'objet d'une culture de plus en plus suivie et iront se généralisant de plus en plus, jusqu'à l'absorption de la plus grande partie du reste.

De la première de ces deux sciences, on possède des traités élémentaires, aujourd'hui, bien près de toute la perfection désirable. Quant à la seconde, en dépit de nombreux écrits qui en traitent, elle est loin d'être aussi connue que le mériteraient son extrême importance, l'élégance de ses propositions, l'attrait que lui ont reconnu tous ceux qui s'y sont livrés, enfin la beauté des problèmes non encore résolus et d'une foule d'autres qu'il serait facile de se poser et peut-être de résoudre, si les efforts d'un plus grand nombre d'intelligences étaient dirigés dans cette voie. La faute n'en serait-elle pas aux traités, même élémentaires, où elle est exposée, lesquels visent trop haut et abordent dès le début des questions trop générales? Et ne conviendrait-il pas, si on veut arriver à la vulgariser, d'en illustrer au moins les théories initiales par des applications et des exercices choisis, qui soutiendraient l'intérêt du lecteur sans le rebuter et lui montreraient rapidement et mieux que toute explication, l'esprit de la théorie des nombres, son but et sa méthode?

Cela nous a fait penser qu'une série d'études sur les éléments de l'arithmétique pourrait servir la cause que nous défendons, savoir la vulgarisation de cette belle théorie, en contribuant à la production d'un traité véritablement élémentaire. Nous donnons ici la première de ces études.

1. — On appelle *résidus quadratiques* du nombre premier p, les restes de la division par p, des carrés entiers non multiples de p. Ainsi les nombres 1, 3, 4, 9, 10, 12 sont les résidus de 13, et 2, 5, 6, 7, 8, 11 en sont les *non-résidus*.

Dans la première partie de ce mémoire, il ne sera question que de résidus quadratiques; nous pouvons donc nous borner, pour abréger, à dire simplement *résidus*.

Posons $p = 2m + 1$; *il y a* m *résidus de* p *et on les détermine en divisant par* p *les* m *premiers carrés entiers* (Euler). En effet si pour $0 < a < b < m$, on avait les deux *congruences*[1] $a^2 \equiv r$, $b^2 \equiv r$, il s'ensuivrait $(a+b)(a-b) \equiv 0$, ce qui est impossible, puisque $a + b$ et $a - b$ sont inférieurs à p et par suite premiers avec lui.

Divisant par p les carrés supérieurs à m^2 puis ceux supérieurs à p^2, on retrouve symétriquement puis périodiquement les mêmes restes, puisqu'on a $(p - a)^2 \equiv a^2$ et $(kp + a)^2 \equiv a^2$. Il n'y a donc que m résidus.

On désignera les résidus par les lettres r, r', r'', ... et les non-résidus par celles-ci, ρ, ρ', ρ'', ...

2. — *Les produits d'un résidu quelconque par les* m *résidus sont congrus à ces mêmes résidus, dans un certain ordre* (Euler). On voit d'abord que le produit de deux résidus est congru à un résidu, car de $r \equiv a^2$, $r' \equiv b^2$, on conclut $rr' \equiv (ab)^2$. D'ailleurs les deux relations $r'r'' \equiv r$, $r'r''' \equiv r$ entraîneraient la suivante $r'r'' \equiv r'r'''$, d'où, contrairement à l'hypothèse $r'' \equiv r'''$. On obtient donc ainsi tous les m résidus.

---

[1] La *congruence* $a \equiv b$, qui s'énonce *a congru à b*, indique que a diffère de b d'un multiple de p, ou que p divise la différence $a-b$.

Ainsi $(p + a)^n \equiv a^n$, ce qui résulte de ce que $(p + a)^n - a^n$ est divisible par $(p + a) - a$.

Cor. I. Ainsi les m produits rr, rr', rr'', ... sont congrus aux m résidus, et on peut écrire

$$rr.rr'.rr''... \equiv r.r'.r''...,$$

d'où

$$r^m \equiv 1. \tag{1}$$

Cor. II. Le produit d'un résidu par les m *non-résidus sont congrus à tous les non-résidus, et ceux d'un non-résidu par les* m *non-résidus sont congrus aux* m *résidus* (Gauss). Le produit $r\rho$ est incongru aux m produits rr, rr', ... : il est donc congru à un non-résidu. De même le nombre $\rho\rho'$ ne peut être congru à aucun des produits ρr, $\rho r'$, $\rho r''$, ... tous congrus à des non-résidus.

D'ailleurs les produits $r\rho$, $r\rho'$, $r\rho''$, ... sont incongrus entre eux, de même que les produits $\rho\rho$, $\rho\rho'$, $\rho\rho''$, ... Les premiers sont donc congrus aux m non-résidus et les seconds aux m résidus.

3. — De $\rho\rho' \equiv r$, on tire $\rho^m\rho'^m \equiv r^m \equiv 1$: on a donc $\rho^m \equiv 1$ ou $\equiv -1$.

Cor. I. On a donc toujours $a^m \equiv \pm 1$, d'où, en quarrant, cette congruence, qui constitue le *Théorème de Fermat*,

$$a^{p-1} \equiv 1. \tag{2}$$

Cor. II. Puisqu'on ne peut avoir $\rho \equiv x^2$, on ne saurait avoir non plus $\rho^m \equiv x^{p-1} \equiv 1$: on a donc

$$\rho^m \equiv -1. \tag{3}$$

Ainsi *le nombre* a *est résidu ou non-résidu selon que* a^m *est* $\equiv 1$ *ou* $\equiv -1$. Cette importante proposition s'appelle le *critérium d'Euler*.

Cor. III. Puisque 1 est toujours résidu, on peut toujours trouver deux nombres x et ξ tels qu'on ait $rx \equiv 1$ et $\rho\xi \equiv 1$, et cela d'une seule manière.

Le nombre x (ou ξ) est dit *l'associé* de r (ou de ρ). Ainsi *tout nombre* a *inférieur à* p, *a son associé, c'est-à-dire un nombre* y *tel que* ay $\equiv 1$.

Posons $ab \equiv c$; en multipliant par la congruence $1 \equiv ay$, on aura $cy \equiv b$: *on peut donc trouver un nombre* y *inférieur à* p *et tel que* cy ≡ b.

Ces deux importants théorèmes sont dus à Euler. Parmi les nombreuses applications qui peuvent en être faites, nous indiquerons la suivante, qui nous sera utile plus loin.

Si la valeur a *de* x, *inférieure à* p, *satisfait à la congruence* $Ax^2 + Bx + C \equiv 0$, *il y a une autre valeur de* x, *également plus petite que* p, *qui y satisfait, et il n'y en a pas d'autre.* Les deux congruences $Ax^2 + Bx + C \equiv 0$, $Aa^2 + Ba + C \equiv 0$ donnent par soustraction

$$A(x^2 - a^2) + B(x - a) \equiv 0 ,$$

d'où, comme $x - a$ est un nombre premier avec p,

$$A(x + a) + B \equiv 0 .$$

Or on a vu plus haut que cette congruence est toujours possible.

On appelle *racine* de la congruence du n^e degré $Ax^n + Bx^2 + \ldots + Lx + M \equiv 0$, tout nombre plus petit que p et qui, mis à la place de x, satisfait à cette congruence. On peut donc dire que *la congruence du premier degré* $Ax + B \equiv 0$ *a toujours une solution unique et que celle du second degré a deux racines ou n'en a pas.*

On étendrait aisément ce théorème au cas général et on arriverait ainsi à une proposition importante, due à Euler et à Lagrange.

Cor. IV. Le produit de plusieurs entiers plus petits que p *est congru à un résidu ou à un non-résidu selon que le nombre des non-résidus qu'ils comprennent est pair ou impair.* (Euler).

Cor. V. Si le produit ab *est résidu,* a *et* b *sont tous deux résidus ou tous deux non-résidus.*

Cor. VI. Posons $r^m \equiv 1$, $\rho^m \equiv -1$: on aura $(p - r)^m \equiv \pm 1$ et $(p - \rho)^m \equiv \mp 1$ selon que m est pair ou impair. Donc si $p = 4 + 1$[1], *les nombres* a *et* p-a *sont ensemble résidus ou*

[1] Par ce symbole, 4 + 1, nous entendons un *multiple* de 4 augmenté de 1.

non-résidus. Si p $= 4 - 1$, *les deux nombres* a *et* p-a *sont l'un résidu et l'autre non-résidu.*

4. — La question de décider si un nombre donné a est résidu ou non-résidu de p peut se traiter, indépendamment de toute théorie, dans certains cas très simples. Ainsi : 1° on a $(\alpha^2)^m = \alpha^{p-1} \equiv 1$; donc tout carré est congru à un résidu, ce qui suit de la définition des résidus.

2° On a $(p-1)^m \equiv (-1)^m$. Ainsi selon que $p = 4 \pm 1$, on a :

$$(p-1)^m \equiv \pm 1 . \tag{4}$$

3° Soit $a = 2$. Si $p = 4 + 1$, m est pair et le produit des m premiers multiples de 2 peut s'écrire

$$2^m m! = [2.4.6 \ldots m] \left[\left(p - \frac{p-3}{2}\right)\left(p - \frac{p-7}{2}\right) \ldots (p-3)(p-1)\right]$$

$$\equiv 2.4.6 \ldots m \left(-\frac{p-3}{2}\right)\left(-\frac{p-7}{2}\right) \ldots (-3)(-1) = m!\,(-1)^{\frac{m}{2}}$$

Si $p = 4 - 1$, m est impair et on a .

$$2^m m! = \left[2.4.6 \ldots \frac{p-3}{2}\right]\left[\left(p - \frac{p-1}{2}\right)\left(p - \frac{p-5}{2}\right) \ldots (p-3)(p-1)\right]$$

$$\equiv 2.4.6 \ldots \frac{p-3}{2}\left(-\frac{p-1}{2}\right)\left(-\frac{p-5}{2}\right) \ldots (-3)(-1)$$

$$= m!\,(-1)^{\frac{p+1}{4}} .$$

Par conséquent

$$2^m \equiv (-1)^{\frac{p \mp 1}{4}} . \qquad (\text{pour } p = 4 \pm 1). \tag{5}$$

Or $\frac{p^2-1}{8}$ diffère d'un nombre pair de $\frac{p-1}{4}$, dans le premier cas, et de $\frac{p+1}{4}$, dans le second cas, puisque les deux différences sont $\frac{p-1}{4}\,\frac{p-1}{2}$ et $\frac{p-3}{4}\,\frac{p+1}{2}$. La formule (5) peut donc s'écrire, quel que soit le cas,

$$2^m \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} . \tag{6}$$

2 est donc résidu ou non selon que le nombre $\frac{p^2-1}{8}$ est pair ou impair.

4° Soit $a = 3$; p peut prendre seulement l'une des formes $6 + 1$ ou $6 - 1$. Dans le premier cas, on a

$$3^m m! = [3.6.9\ldots m]\left[\left(p - \frac{p-5}{2}\right)\ldots(p-7)(p-4)(p-1)\right]$$
$$\left[(p+2)(p+5)\ldots\left(p + \frac{p-3}{2}\right)\right]$$
$$\equiv m!\,(-1)^{\frac{m}{3}}\ ;$$

d'où

$$(7) \qquad 3^m \equiv (-1)^{\frac{p-1}{6}}. \qquad (p = 6 + 1)$$

De même dans le second cas,

$$3^m m! = [3.6\ldots(m-2)]\,[(p-m)(p+3-m)\ldots(p-2)]$$
$$[(p+1)(p+4)\ldots(p+m-1)]$$
$$\equiv m!\,(-1)^{\frac{p+1}{6}},$$

d'où

$$(8) \qquad 3^m \equiv (-1)^{\frac{p+1}{6}}. \qquad (p = 6 - 1)$$

5° Soit $a = p - 2$: on a visiblement :

$$(p-2)^m \equiv (-2)^m \equiv 2^m\,(-1)^m \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}}\ ;$$

ou bien

$$(9) \qquad (p-2)^m \equiv (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}.$$

De la même manière, on trouvera :

$$(10) \qquad (p-3)^m \equiv (-1)^{\frac{p-1}{6}}\,(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{2p-2}{3}}. \qquad (p = 6 + 1).$$

$$(11) \qquad (p-3)^m \equiv (-1)^{\frac{2p-1}{3}}. \qquad (p = 6 - 1).$$

Cor. I. On a $(p-1)^m \equiv 1$, si $p = 4 + 1$. Donc dans ce cas on peut trouver un nombre f tel que $f^2 \equiv p - 1$, ou $f^2 + 1 \equiv 0$. De là successivement,

$$(f \pm 1)^2 \equiv \pm 2f,\ (f \pm 1)^4 \equiv -4,\ (f \pm 1)^{4n} \equiv (-4)^n.$$

Ainsi *un nombre premier* $p = 4 + 1$ *divise au moins deux nombres assignables de chacune des formes* $x^2 + 1$, $y^4 + 4$, $z^8 - 16$, $w^{16} + 64$, ... Par exemple, soit $p = 13$, on aura $f = 5$: donc 13 divise $6^{16} + 64$ et $4^{16} + 64$. La possibilité d'écrire $y^4 + 4 \equiv 0$ pour $p = 4 + 1$, a été signalée d'abord par Sophie Germain.

De plus on a : $(fx \pm y)^2 + (fy \mp x)^2 \equiv 0$; donc $p = 4 + 1$ *divise une infinité de sommes de deux carrés premiers entre eux* (Fermat).

Cor. II. D'après (6), 2 est résidu de $p = 8 \pm 1$ et non-résidu de $p = 8 \pm 3$. D'après (9), $p - 2$ est résidu si $p = 8 + 1$ ou $8 + 3$ et non-résidu si $p = 8 - 1$ ou $8 + 5$.

m est pair ou impair en même temps que $\frac{p-1}{6}$, et, dans les mêmes cas, $p = 12 + 1$ ou $12 + 7$. Donc, d'après (7),

pour $p = 12 + 1$, $(\pm 3)^m \equiv 1$: 3 et -3 sont[1] résidus ;

pour $p = 12 + 7$, $(\pm 3)^m = \pm 3^m \equiv \pm (-1) = \mp 1$: 3 est non-résidu et -3 résidu.

On verra de même que, à cause de (8), $3^m \equiv \pm 1$ selon que $p = 12 - 1$ ou $12 + 5$. Par suite, dans les deux cas, on a $(-3)^m \equiv -1$.

Ainsi, selon que $p = 6 \pm 1$, il a -3 pour résidu ou non-résidu, c'est-à-dire qu'il divise ou ne divise pas $x^2 + 3$[2].

Cor. III. Soit $f^2 + a \equiv 0$. Si x est le reste de la division de fy par p, il viendra $x^2 + ay^2 \equiv 0$. Donc *si* p *divise un nombre* $f^2 + a$ *il en divise aussi une infinité de la forme* $x^2 + ay^2$. On résoudra ainsi la congruence $x^2 + ay^2 \equiv 0$ en posant $y = 1, 2, 3, \ldots$ et $x \equiv fy$.

D'ailleurs pour $a = 1, 2, 3, \ldots$ on voit que $p = 4 + 1$ *divise une infinité de sommes de deux carrés*; $p = 8 \pm 1$ *une infinité de nombres de la forme* $x^2 - 2y^2$; $p = 6 + 1$ *une infinité de nombres de la forme* $x^2 + 3y^2$; *etc.* (Fermat).

Cor. IV. Si $p = 4 - 1$, $(p - 1)^m \equiv -1$; donc on ne saurait dans ce cas poser $f^2 \equiv p - 1$ ou $f^2 + 1 \equiv 0$, ni $x^2 + y^2 \equiv 0$,

---

[1] Pour abréger on écrit souvent $-a$, au lieu de $p - a$.

[2] On veut dire par là que p divise un certain carré augmenté de 3, ou bien qu'il n'y a aucun carré qui augmenté de 3, fasse un nombre divisible par p.

x et y étant premiers entre eux. Par conséquent, $p = 4 - 1$ ne divise aucune somme de deux carrés premiers entre eux, ce qui permet d'affirmer que *les diviseurs premiers d'une telle somme sont tous de la forme* $4 + 1$ [1]. (Fermat).

De même aucun nombre premier $6 - 1$ ne divisant $x^2 + 3$, ni par suite $x^2 + 3y^2$, il s'ensuit que *tous les diviseurs premiers de* $x^2 + 3y^2$ *sont de la forme* $6 + 1$.

Cor. V. Tout nombre premier $p = 4 - 1$ *divise une somme de trois carrés dont l'un est l'unité* (Euler). La série $1, 2, 3, \ldots p - 1$ commençant par un résidu et finissant par un non-résidu, il y a au moins un résidu r suivi d'un non-résidu $\rho = r + 1$. Par suite, $p - r - 1$ est un résidu et on peut écrire :

$$x^2 \equiv r\,, \quad y^2 \equiv - r - 1\,, \quad \text{d'où} \quad x^2 + y^2 + 1 \equiv 0\,.$$

Cor. VI. Soit à résoudre $jx^2 + ky^2 \equiv 0$. Cherchons le nombre c tel que $jc \equiv k$: il viendra $x^2 + cy^2 \equiv 0$. Posant $x \equiv yz$, le problème est ramené à résoudre $z^2 + c \equiv 0$; il est possible par conséquent si $-c$ est résidu.

Cor. VII. Soit $p = 8 + 1$; -1 est résidu, de même que 2 et -2 : on peut donc écrire :

$$f^2 + 1 \equiv 0\,, \qquad \text{d'où} \qquad (f \pm 1)^2 \equiv \pm 2f\,.$$

Ainsi $2f$ et $-2f$ sont résidus ; et comme 2 et -2 le sont eux-mêmes, le nombre f l'est également. On peut donc poser :

$$k^2 \equiv f, \quad \text{d'où} \quad k^4 \equiv -1\,,\ g^2 \equiv 2\,,\ h^2 \equiv -2\,,\ g^4 \equiv 4\,,\ j^4 \equiv -4\,,$$

en posant

$$g \equiv k^3 - k\ (^2)\,, \quad h \equiv k^3 + k\,, \quad j \equiv f \pm 1\,.$$

La possibilité de trouver un nombre k tel que $k^4 + 1 \equiv 0$, pour $p = 8 + 1$ [3], a été démontrée d'abord par Gauss.

---

[1] Euler démontre ainsi cette proposition : $p = 4 - 1$ ne saurait diviser $x^2 + y^2$ sans diviser $x^{p-1} + y^{p-1}$ qui est multiple de $x^2 + y^2$ puisque m est impair. Or cette divisibilité est impossible puisque, à cause du théorème de Fermat, p divise $x^{p-1} - y^{p-1}$.

[2] Soit $k^3 + \alpha \equiv 0$; α est l'associé de k. De là $k^2 \equiv k^4\alpha^2 \equiv -\alpha^2$ et $(\alpha \pm k)^2 \equiv \pm 2k\alpha \equiv \pm 2$.

[3] Si $p = 8 + 5$, on a également $f^2 + 1 \equiv 0$, $(f \pm 1)^2 \equiv \pm 2f$, puisque p est $4 + 1$; $(2f)$ est donc résidu, mais 2 étant alors non-résidu, f l'est également et on ne peut plus écrire $k^2 \equiv f$, ni par suite $k^4 \equiv -1$.

On remarquera d'ailleurs avec Euler et avec Gauss, que si, pour $p = 4 + 1$, $a^4 \equiv r$, les nombres $-a^4$, fa^4, $-fa^4$ sont également $\equiv r$ et sont incongrus entre eux, car, autrement, de $fa \equiv \pm a$, on conclurait $f \equiv \pm 1$, ce qui est impossible, puisque $f^2 \equiv -1$. De plus il n'y a que ces quatre nombres dans ce cas, car les deux congrues $a^2 - x^2 \equiv 0$ et $a^2 + x^2 \equiv 0$ ne peuvent avoir chacune plus de deux racines, et par suite la congruence $a^4 - x^4 \equiv 0$ ne peut en avoir plus de quatre.

Ainsi $p = 8 + 1$ divise quatre nombres de chacune des formes $g^4 - 4$, $j^4 + 4$ et $k^4 + 1$. On pourra appliquer tout cela au cas de $p = 17$, qui donne $f = 4$ ou 13, $g = 6$ ou 11, $l = 7$ ou 10, $j = 5$ ou 3, ou 12 ou 14, $k = 8$.

Cor. VIII. Soient $p = 8 + 1$, $k^4 \equiv -1$; on résoudra $x^4 + y^4 \equiv 0$ en posant $x = 1, 2, 3, \ldots$ $y \equiv k, 2k, \ldots$ On peut donc dire, avec Euler, que *tout nombre premier de la forme* $8 + 1$ *divise de plusieurs manières une somme de deux bicarrés.*

On résoudra $x^2 \pm 2y^2 \equiv 0$ en posant $ak \equiv A$ d'où $A^4 + a^4 \equiv 0$ ou bien $(A^2 \pm a^2)^2 \mp 2(Aa)^2 \equiv 0$.

En général si p divise $\alpha a^n + \beta$, en posant $ay \equiv x$, on voit qu'il divise également $\alpha x^n + \beta y^n$. Réciproquement si p divise $\alpha a^n + \beta b^n$, il divise aussi $\alpha x^n + \beta$, ce qu'on vérifie en posant $\alpha \equiv \beta x$.

Cor. IX. D'après II, le nombre premier $p = 6 + 1$ divise un certain nombre $s^2 + 3$. Ecrivons d'après cela

$$(\alpha) \qquad (s-1)^2 + 2(s-1) + 4 \equiv 0\,.$$

Soit n l'associé de $(s-1)$; multiplions la relation (α) par n^2 et posons $2n \equiv \alpha \equiv -1 - \beta$; il viendra :

$$\alpha^2 + \alpha + 1 \equiv 0\,, \quad \beta^2 + \beta + 1 \equiv 0\,, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha^3 - 1 \equiv 0\,, \quad \beta^3 - 1 \equiv 0\,.$$

$$(\beta + 1)^2 \equiv \alpha^2 \equiv \beta\,, \quad (\alpha + 1)^2 \equiv \beta^2 \equiv \alpha\,, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta \equiv 0\,,$$

$$s \equiv \beta - \alpha \equiv 2\beta + 1 \equiv -2\alpha - 1\,, \quad (s \pm 1)^3 \equiv \pm 8$$

$$\alpha\beta \equiv (\alpha + 1)(\beta + 1) \equiv 1\,, \quad (\alpha + 1)^3 \equiv (\beta + 1)^3 \equiv -1\,,$$

$$(\alpha \pm 1)(\beta \mp 1) \equiv \pm s\,, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) \equiv 3\,.$$

Soit a un entier inférieur à p ; posons $a\alpha \equiv x$, $a\beta \equiv y$, d'où

$$a^2 + x^2 + ax \equiv 0 \;, \quad a^2 + y^2 + ay \equiv 0 \;, \quad x^2 + y^2 + xy \equiv 0 \;;$$

si on écrit $a^3 \equiv r$, il viendra :

$$x^3 \equiv y^3 \equiv r \;, \quad a + x + y \equiv 0 \;, \quad ax + xy + ya \equiv 0 \;, \quad axy \equiv r \;,$$

$$a^2 \equiv xy \;, \; x^2 \equiv ay \;, \; y^2 \equiv ax \;, \; a^2 + x^2 + y^2 \equiv 0 \;, \; (\alpha x \pm \beta y)^2 + (\alpha y \mp \beta x)^2 \equiv -1$$

$$(a \pm 1)(x \pm 1)(y \pm 1) \equiv r \pm 1 \;. \quad (a + x)(x + y)(y + a) \equiv -r \;.$$

On voit, entre autres choses, que α et β sont des résidus associés ; qu'il en est de même de $\alpha + 1$ et $\beta + 1$; que p divise, de plusieurs manières, une somme de trois carrés ; qu'il divise aussi une somme assignable de quatre carrés, ainsi que les sommes de deux cubes $(s + 1)^3 + (s - 1)^3$ et $(\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3$.

On pourra appliquer ces formules au cas de $p = 19$, qui donne $s = 4$, $n = 13$, $\alpha = 17$, $\beta = 11$.

5. — *Résidus cubiques*. Par extension de la notion des résidus, on appelle *résidus cubiques, biquadratiques*, ... les restes provenant de la division par p des cubes, des bicarrés, ... ; quelques résultats sont assez simples pour trouver place dans un exposé élémentaire.

1° Il est inutile d'aller au-delà des m premières divisions puisque $(p - a)^3 + a^3 \equiv 0$; deux cubes à égales distances de m sont donc complémentaires à p. En particulier, 1 et -1 sont toujours résidus cubiques.

2° Si r est résidu cubique, il en est de même de r^2, et réciproquement, car de $x^3 \equiv r$, on tire $(x^2)^3 \equiv r^2$.

3° Si $p = \mathbf{6} - 1$, les $p - 1$ premiers entiers sont tous résidus cubiques, car si on pouvait écrire $a^3 - b^3 \equiv 0$, il viendrait $a^2 + b^2 + ab \equiv 0$. d'où $(2a + b)^2 + 3b^2 \equiv 0$: or cette expression n'a pas de diviseurs de la forme $\mathbf{6} - 1$. (n° 4, II et III).

4° Si $p = \mathbf{6} + 1$, il y a trois valeurs, 1, α, β, de x, qui donnent $x^3 \equiv 1$(n° 4, X) et il n'y a que celles-là, puisque la congruence $x^2 + x + 1 \equiv 0$ ne peut avoir que deux racines.

Ces trois racines sont d'ailleurs inégales, car autrement, de $\alpha \equiv \beta$, on tirerait $\beta \equiv \alpha^2 \equiv \beta^2$ et $\beta \equiv 1$.

De même, si $a^3 \equiv r$, il n'y a que les nombres a, $a\alpha$, $a\beta$, dont les cubes soient congrus à r. Les $p - 1$ premiers cubes se partagent donc en groupes de trois donnant le même reste quand on les divise par p. Il y a donc $\frac{p-1}{3}$ résidus cubiques.

5° Si r est résidu cubique, p divise $x^3 + ry^3$ et $z^3 + r^2y^3$.

Euler connaissait à peu près tout ce qui précède.

6° La multiplication du résidu cubique r par tous les résidus cubiques donne ces mêmes résidus dans un certain ordre. De là, les relations

$$rr.rr'.rr''... \equiv r.r'.r''... \quad \text{et} \quad r^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 .$$

Les résidus cubiques ne sont donc autres que les racines de la congruence $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$.

Les deux congruences $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv \alpha$ et $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv \beta$ ont également chacune $\frac{p-1}{3}$ racines ; elles sont distinctes des précédentes et ce sont par conséquent les $2\frac{p-1}{3}$ non-résidus cubiques.

6. — *Résidus biquadratiques.* 1° En élevant au carré les résidus, on obtiendra les résidus biquadratiques et ceux-ci doivent évidemment être choisis parmi les résidus : on les trouvera donc en se bornant à diviser par p les m premiers bicarrés.

Soit $a^2 \equiv r$; si $p = 4 - 1$, l'un des nombres $\pm a$ est résidu, quel que soit r ; donc dans ce cas, tous les résidus sont en même temps résidus biquadratiques.

2° Si r est résidu biquadratique, r^2 et r^3 le sont également.

3° Si $p = 8 \pm 1$, on peut écrire $a^2 \equiv -2$, d'ou $a^4 \equiv 4$, $a^8 \equiv 16$, $a^{16} \equiv 256$, ... Donc, dans les mêmes cas, 2 est résidu quadratique, 4 résidu biquadratique, 16 résidu octique, ... de p.

4° Si $p = 4 + 1$, p a $\frac{p-1}{4}$ résidus biquadratiques (n° 4, VII).

5° Si $p = 8 + 1$, -1 est résidu biquadratique, ainsi que 4 et -4 (id.).

6° On démontre comme au n° précédent que, pour $p = 4 + 1$, la congruence des résidus biquadratiques est $x^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$, et, de là, que les $p - 1$ premiers entiers se partagent en quatre classes d'un nombre égal de termes, qui sont les racines des quatre congruences

$$x^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm 1, \qquad x^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm i.$$

Exercices.

1. Etant donné le théorème de Fermat, si on appelle résidus et non-résidus de p les nombres qui lui sont inférieurs et qui donnent respectivement $r^m \equiv 1$ et $\rho^m \equiv -1$, on a les propositions suivantes :

Le produit de deux résidus ou de deux non-résidus est congru à un résidu et celui d'un résidu par un non-résidu l'est à un non-résidu.

Le nombre p a m résidus et m non-résidus[1].

Les résidus sont les restes de la division par p des m premiers carrés.

2. Si $p = 4 + 1$ divise $a^2 \pm kb^2$, il divise aussi $x^2 \mp ky^2$. Quelque soit k, $p = 4 - 1$ divise $x^2 + ky^2$ ou $x^2 - ky^2$. Si p divise $a^2 - kb^2$ et $c^2 - ld^2$, il divise également $x^2 - aly^2$. Si p ne divise ni $x^2 - ky^2$ ni $x^2 - ly^2$, il divise $x^2 - kly^2$. (Lagrange).

3. $B^2 - R$ étant divisible par A et $R - r$ l'étant par p, p divise ou ne divise pas A selon que r est résidu ou non-

[1] Soient n le nombre des résidus et ν celui des non-résidus. Les produits ρr, $\rho r'$, ... donneront n non-résidus différents; par suite $n \leqq \nu$. La multiplication de ρ par les ν non-résidus donnerait ν résidus différents. Donc $n \leqq \nu$ et $n = \nu = m$.

Cette démonstration est beaucoup plus simple que celle de Matrot (J. E. 1893, p. 74).

résidu. Ce théorème sert, dans certains cas, à décomposer les grands nombres en leurs facteurs. (Gauss[1]).

4. Le produit des résidus est $\equiv \mp 1$ et celui des non-résidus $\equiv \pm 1$, selon que $p = 4 \pm 1$. De là, le *théorème de Wilson*, que représente la congruence

$$(p-1)! + 1 \equiv 0\,,$$

et cette autre congruence, due à Libri,

$$\frac{(p-1)!}{a} + a^{p-2} \equiv 0\,.$$

5. Si $p = 4 - 1$, $m! \equiv \pm 1$ selon que p a un nombre impair ou un nombre pair de résidus inférieurs à $\frac{p}{2}$ (Lejeune-Dirichlet).

6. Si $p = 4 + 1$, $(m!)^2 + 1 \equiv 0$ (Lagrange).

7. p divise toujours $rx^2 - r'y^2$ et $\rho x^2 - \rho' y^2$, mais jamais $rx^2 - \rho y^2$. $p = 4 + 1$ divise $rx^2 + \rho y^2$ et non $rx^2 + r'y^2$ ni $\rho x^2 + \rho' y^2$; le contraire a lieu pour $p = 4 - 1$. (Euler).

8. Si $(b^2 - 4ac)$ est résidu, la congruence $ax^2 + bx + c \equiv 0$ a deux racines (Gauss). Plus généralement, la même chose a lieu si $a(b^2 - 4ac)$ est résidu (Cauchy).

9. Si $p = 4 + 1$, on a $(1 + \rho)(1 + \rho') \ldots \equiv 2$ et si $p = 4 - 1$, $(1 + r)(1 + r') \ldots \equiv 2$ (Stieltjès).

10. Pour $p = 4 + 1$, la suite $1 + \rho$, $1 + \rho'$, ... comprend $\frac{p-1}{4}$ résidus et autant de non-résidus. Si $p = 4 - 1$, la suite $1 + r$, $1 + r'$, ... comprend $\frac{p-3}{4}$ résidus et $\frac{p+1}{4}$ non-résidus (Stieltjès).

---

[1] Ainsi on a $93019 = 305^2 - 6$; comme le montre la table des résidus, 6 n'est pas résidu des nombres 7, 11, 13, 17, 31, 37, 41, 53, 61, 71, 79, 83: aucun de ces nombres ne divise donc 93019.

Or $2.93019 = 432^2 - 586$. Le reste 11 de la division de 586 par 23 est non-résidu de 23; donc 23 ne divise pas 93019. Le reste 27 de la division de 586 par 43 est de même non-résidu de 43, donc 43 ne divise pas 93019.

$3.93019 = 529^2 - 784 = 529^2 - 28^2 = 501.257$, d'où $93019 = 167.257$, ce qui termine le calcul. Autrement, on continuerait ainsi. $5.93019 = 682^2 - 29$; or 29 n'est résidu d'aucun des nombres 31, 37, 41, 43, 47, 61, 73, 79, 97, ... On déterminerait ainsi successivement d'autres facteurs premiers impossibles à admettre et on n'aurait plus qu'à essayer les divisions par les quelques facteurs inférieurs à $\sqrt{93019}$ qu'on n'aurait pu éliminer.

On voit l'intérêt qu'il y aurait à posséder une table des résidus des nombres premiers jusqu'à 10.000, ou même plus loin, comme le souhaitait Gauss.

11. Si ni $p - 1$ ni m ne sont résidus, il y a au moins un résidu r tel que $-r-1$ soit également résidu. (Matrot).

12. Appelons *variation* la succession d'un résidu (ou non-résidu) et d'un non-résidu (ou résidu). La suite $1, 2, 3, \ldots p-1$, présente un nombre pair ou impair de variations selon que $p = 4 \pm 1$. (Stieltjès).

13. Si $p = 4 - 1$, la congruence $x^2 \equiv a$ a les deux racines $x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}}$; si $p = 8 + 5$ et que $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$, ses racines sont $x \equiv \pm a^{\frac{p+3}{8}}$ (Legendre).

Si $p = 8 + 5$ et que $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$, les deux racines sont $x \equiv \pm a^{\frac{p+3}{8}} m!$ (Mathews).

14. *Lemme de Gauss.* Soit μ le nombre des restes obtenus en divisant par p les m premiers multiples de a, et ne conservant de ces restes que ceux qui sont plus grands que m ; on a :

$$a^m = (-1)^\mu$$

15. On a aussi, avec Eisenstein,

$$a^m = \prod_1^m \frac{\sin \frac{2ka\pi}{p}}{\sin \frac{2k\pi}{p}},$$

et avec Liouville,

$$a^m = (-1)^{mn} \prod_1^n (\alpha^k - \alpha^{-k})^{p-1}.$$

Dans cette dernière formule $a = 2n + 1$ et α désigne une racine imaginaire de l'équation $x^p - 1 = 0$.

16. Le nombre μ est de même parité que le produit

$$\prod \left(\frac{h}{p} - \frac{k}{a}\right)\left(\frac{h}{p} + \frac{k}{a} - \frac{1}{2}\right)$$

h variant de 1 à m et k de 1 à $\frac{a-1}{2}$ (Kronecker).

17. Appelons, avec Lagrange, Eω la partie entière du nombre non entier ω, et posons

$$f(a,b) = \mathrm{E}\frac{a}{b} + \mathrm{E}\frac{2a}{b} + \mathrm{E}\frac{3a}{b} + \ldots + \mathrm{E}\frac{\frac{b-1}{2}a}{b},$$

$$4r_n = p + \left(4n - p - 2p\mathrm{E}\frac{2n}{p}\right)(-1)^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}},$$

on aura :

$$f(1,b) = 0\ ,\ f(a+b,b) = \frac{b^2-1}{8} + f(a,b) \qquad \text{(Tchebichef).}$$

$$r_a \cdot r_{2a} \cdot r_{3a} \cdots r_{ma} \equiv a^m m!\,(-1)^{f(2a,p)} \qquad \text{(id.)}$$

$$a^m \equiv (-1)^{f(2a,p)} \equiv 2^m (-1)^{f(a+p,p)} \qquad \text{(id.)}$$

$$a^m \equiv (-1)^{f(a,p)}\ . \qquad \text{(Gauss).}$$

18. Etendre la notion des résidus aux restes de carrés divisés par un nombre composé P. En particulier, si a est résidu de p, il l'est de p^n. Le nombre p^n a mp^n résidus. (Gauss).

Soit le nombre $\mathrm{P} = ax^2 + bxy + cy^2$, où x et y sont premiers entre eux $(b^2 - 4ac)$ est résidu de P. (Gauss).

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

SUR LA LOGIQUE ET LA NOTION DE NOMBRE ENTIER

On a beaucoup discuté ces temps derniers, sur la notion de nombre entier, sur les principes de l'Arithmétique et particulièrement sur les principes d'*induction complète.*

Trop souvent en logique on emploie des mots vagues. Il en résulte des discussions sans issue. Le mot *démontrer* est un de ceux là. Je vais en préciser le sens.

Supposez que, dans le cours d'une démonstration Géométrique j'aie un triangle A B C; je sais, soit par l'hypothèse, soit par un raisonnement antérieur, soit de toute autre façon, que l'angle B est égal à l'angle C.

Je dis : « L'angle B est égal à l'angle C, donc le côté AB est égal au côté AC ».

C'est là un petit raisonnement, que je nomme implication, ou inférence. L'inférence est *justifiée*, ou *autorisée* par le théorème supposé connu : « Si un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux ».

Ainsi, une inférence ou implication est un petit raisonnement de la forme suivante :

Le fait A est vrai, donc le fait B est vrai.

L'inférence est juste si 1° Il est établi déjà que le fait A est vrai. 2° Il existe un *principe* ou un théorème général autorisant l'inférence.

Ceci posé, la démonstration d'une proposition consistera dans une chaîne d'inférences, plus ou moins ramifiée, reliant l'hypothèse de la proposition à démontrer à sa conclusion.

Ce n'est pas le lieu d'examiner les particularités que peut présenter une démonstration. Ce que je viens de dire suffira pour la suite.

On définit presque toujours une classe d'objets comme il suit. On indique sous quelles conditions un objet donné x appartient à la classe, et aussi sous quelles conditions deux objets x et y de la classe sont considérés comme distincts.

Lorsqu'une classe est ainsi définie je dirai qu'elle est définie *généralement.*

On peut aussi définir une classe en donnant la liste des objets qui la composent. Je dirai dans ce cas, que la classe est définie *individuellement.* Une classe pouvant être ainsi définie se nommera une *collection.*

Une troisième manière de définir une classe est la définition par *récurrence.* Supposez qu'à un objet a on fasse correspondre par une certaine règle un objet $f(a$ etc, en répétant l'opération (f). Par exemple, le père de a, le père du père de a, le père du père du père de a etc. constituent les ancêtres de a.

Une classe K peut être formée d'un seul individu x. S'il en est ainsi l'implication suivante est légitime.

y est de la classe K, donc y est identique à x. C'est Leibniz, je crois, qui définit le nombre *deux* comme il suit : « Si x est un objet de la classe A, si y est un objet de la classe A distinct de x, x et y sont deux objets de la classe A ».

On définira ensuite 3 ainsi :

Si B est une collection de deux objets de la classe A, si x est un objet de la classe A n'appartenant pas à B, la collection B' formée de B et de l'objet x est une collection de 3 objets.

Et en général, ayant défini un nombre p, on définira *son suivant* $p + 1$, comme il suit : Si K est une collection de p objets de la classe A, et si x est un objet de la classe A, n'appartenant pas à K, la collection K' formée de B et de l'objet x est une collection de $p + 1$ objets.

Les nombres se définissent ainsi par récurrence.

J'arrive au principe d'induction complète. Ce principe s'énonce ainsi.

Si une proposition est vraie du nombre *un*, et si, étant vrai d'un nombre elle l'est de son suivant, elle est vraie pour tous les nombres.

Examinons comment se fait l'application du principe.

On a une proposition P ; cette proposition est vraie du nombre *un*. On sait en outre que : « Si P est vraie d'un nombre, P est vraie de son suivant ». Les mots entre guillemets constituent un principe, que je nomme le principe α.

Je sais que P est vraie de *un*.

Le principe α autorise l'inférence suivante :

P est vraie de *un*, donc P est vraie de *deux*.

C'est la seule chose qu'on puisse inférer en partant des données. Je dis ensuite :

P est vraie de *deux*, donc P est vraie de *trois* ;
P est vraie de *trois*, donc P est vraie de *quatre* ;
P est vraie de *quatre*, donc P est vraie de *cinq*.

J'ai ainsi démontré la proposition pour le nombre *cinq*, au moyen de *quatre* inférences. On voit bien qu'*aucune ne peut être omise*. Si l'on voulait démontrer la proposition P pour le nombre 10.000, il faudrait faire 9999 inférences.

Nous nous représentons très bien ces inférences sans les faire. Il suffit d'écrire 9999 fois de suite :

« P est vrai de n, donc P est vraie de $n + 1$ ».

en mettant successivement à la place de n les 9999 premiers nombres, dans leur ordre naturel.

Se représenter des implications sans les faire, celà peut s'appeler *intuition logique*. Le principe d'induction est donc l'expression d'une intuition logique.

Un tel principe est indémontrable. Si en effet il existait une démonstration, la conclusion de la dernière inférence serait : « donc P est vraie d'un nombre quelconque », or aucune de nos inférences n'aboutit à une pareille conclusion.

« Mais, objectera le lecteur, ceci tient à ce que vous avez défini les nombres par récurrence : si vous aviez donné une définition générale du nombre, le principe d'induction eût été une conséquence de cette définition générale. »

Avant de réfuter cette objection, je reviens sur la définition d'une classe par récurrence.

Supposons que par une certaine règle on puisse faire correspondre à un objet x, un autre objet $f(x)$; f sera alors le signe de cette correspondance. Je suppose que cette correspondance possède les deux propriétés suivantes.

1° Les correspondants de deux objets distincts sont distincts.

2° Il existe un objet a, qui n'est le correspondant d'aucun autre.

Je définirai une classe K comme il suit : j'y mettrai l'objet a, l'objet $f(a)$, l'objet $ff(a)$ et en général quand j'y mettrai un objet, j'y mettrai aussi son correspondant.

Si je désigne par $f_n(a)$, ce que j'obtiens en répétant n fois l'opération f, la classe K se composera de a et de tous les objets $f_n(a)$, n étant n'importe quel nombre.

Cette manière de définir la classe K suppose la notion de nombre.

Mais on peut éviter celà.

On définira la classe K comme il suit :

§ 1° La classe K contient a ;

§ 2° Si la classe K contient b, la classe K contient $f(b)$;

§ 3° Toute classe G qui contient a, et qui ne peut contenir aucun objet b de la classe K sans contenir $f(b)$, contient la classe K ou lui est identique.

Dans ces phrases il n'est plus question de nombres. D'autre part la partie § 3° de cet énoncé équivaut au principe d'induction complète. Effectivement, soit P une proposition sur laquelle on sait

1° Que P est vraie de a ;

2° Que si P est vraie de x, P est vraie de $f(x)$.

Soit G la classe d'objets pour laquelle P est vraie ; à l'aide de la partie § 3° de l'énoncé ci-dessus, on démontre que G contient la classe K. Ce paragraphe 3° équivaut donc au principe d'induction complète.

Il semble donc, au 1er abord que les paragraphes 1°, 2°, 3° donnent de la classe K une définition générale, en sorte que toute définition par récurrence peut être réduite à une définition générale.

Regardons les choses de plus près.

Une définition générale de K, c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet x DONNÉ TOUT SEUL appartienne à K.

La définition ci-dessus ne satisfait pas à cette condition : Pour démontrer que b appartient à K, il faut considérer les objets a $f(a)$ $f_2(a)$ . . . etc. jusqu'à ce qu'on en trouve un identique à b. La définition ne nous donne pas le moyen de procéder autrement. Pour montrer que b appartient à la classe, il faut le relier à a.

Ceci réfute alors l'objection donnée plus haut. On pourrait démontrer le principe d'induction si l'on donnait une définition générale du nombre. Mais les définitions générales du nombre qu'on a tenté de donner sont comme la définition de la classe K donnée ci-dessus, elles ne sont qu'apparentes. Par un ingénieux tour de phrase on peut faire disparaître certains mots tels que : « et ainsi de suite » ou bien des noms de nombre.

Cela ne transforme pas en définition générale une définition par récurrence.

J'ajouterai quelques mots relatifs à la récurrence. Soit A une classe, et f le signe d'une correspondance univoque et réciproque :

Univoque cela veut dire :

$$\text{Si } x = y\,, \quad f(x) = f(y)\,.$$

Réciproque cela veut dire :

$$\text{Si } f(x) = f(y)\,, \quad x = y\,.$$

Le signe $=$ signifie l'identité.

Je définirai la classe $f(A)$ comme il suit : si x est un A, $f(x)$ est un $f(A)$, si z est un $f(A)$ il existe un x tel que $f(x)$ est identique à z, et x est un A.

Je puis alors former une série de classes

$$A\,,\quad f(A)\,,\quad f_2(A)\ \ldots\ f_n(A)\,,\ \ldots$$

Je pourrai appeler totalité de ces classes une classe K définie comme il suit :

x appartient à la classe K s'il existe un entier n tel que x appartient à $f_n(A)$, ou bien si x est un A.

La partie commune à toutes ces classes sera une classe ω définie comme il suit :

x appartient à la classe ω, si x est un A, et si x appartient aussi à la classe $f_n(a)$ quel que soit n.

Ces définitions sont utilisées dans la démonstration du théorème de Cantor Bernstein, que je n'examinerai pas ici. Il y figure la notion de nombre entier. On peut l'éliminer en quelque sorte par une tournure de phrase appropriée, mais, comme dans ce qui précède on ne transforme pas pour cela une définition par récurrence en définition générale.

Peut-on démontrer que les axiomes de la logique et de l'Arithmétique ne sont pas contradictoires. Il est clair que ces axiomes ne sont pas condradictoires, puisqu'ils sont vrais mais il y a une autre façon de poser la question.

Dans la logique symbolique de M. Peano, on adopte un certain nombre de signes, signifiant *et*, *ou*, *implique*, *est*, *non*, etc. Certaines règles de transformation des propositions sont alors vraies, et l'on peut raisonner en appliquant ces *règles*.

Parmi ces règles il y en a d'irréductibles entre elles, c'est à dire qui ne peuvent se démontrer les unes par les autres, sans spécifier le sens attribué aux signes. Les autres se déduisent de celles-là. La question de la compatibilité des axiomes peut alors se poser ainsi. En admettant ces règles, et en raisonnant d'après elles, on ne peut pas arriver à conclure la fausseté de l'une d'elles. Cela peut-il se démontrer sans spécifier le sens des signes? Il s'agit de montrer qu'en combinant des signes d'après certaines lois on ne peut pas arriver à obtenir certaines combinaisons.

A cela il n'y a rien d'absurde. Dans l'étude de certains jeux, sur l'échiquier par exemple, on trouve des propositions analogues. Mais le principe d'induction complète reste en dehors de la question. Il faut en effet l'admettre dans ces sortes de démonstrations. Il faudra en effet faire voir que, si après n applications des règles on n'arrive pas à une contradiction, on n'y arrivera pas par $n + 1$ applications. On ne saurait donc démontrer, par ce procédé, le principe d'induction complète, ou la non contradiction de ce principe.

Voici maintenant la conclusion de ce petit travail sur la logique : Ce qu'on nomme le principe d'induction présente un caractère très particulier ; ce n'est pas un principe destiné à légitimer des inférences, comme sont les autres principes. Il énonce la possibilité de faire un nombre d'inférences pouvant croître indéfiniment.

Ce principe est indémontrable, il est l'expression d'une intuition logique. J. Richard (Dijon).

DE L'EXACTITUDE DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES[1]

L'exactitude des constructions géométriques a prêté maintefois matière à discussion dans le courant de ces dernières années. L'impulsion en a été spécialement donnée par le petit volume de M. Lemoine, intitulé : *Géométrographie* ou *Art des Constructions géométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

On sait que M. Lemoine introduit les notions de *simplicité* et d'*exactitude* d'une construction géométrique et que c'est à la première qu'il accorde le principal rôle dans son Ouvrage. Néanmoins, je n'envisagerai ici que la notion d'exactitude. Voici, à l'aide d'un exemple emprunté à son livre (p. 30 ; XXVII), dans quel sens il prend cette notion.

Par un point E tracer une parallèle à l'une des bissectrices de l'angle formé par deux droites données AB et AC.

Je trace A (AE) qui coupe AB en B et en B′, AC en C et C′. Je trace C′ (BE) qui coupe A (AE) en E′, EB et C′E′ étant de même sens. Je trace EE′, c'est la droite cherchée. Pour la parallèle à l'autre bissectrice je décris C (BE) qui coupe A (AE) en E″, etc. (Voir fig. 1).

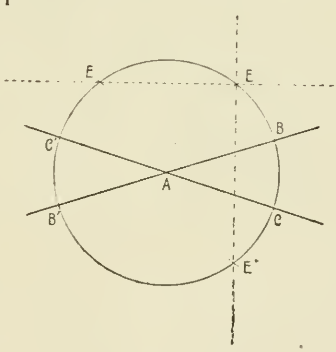


Fig. 1.

Nous avons dû, pour tracer la droite EE′, placer la règle, de sorte qu'elle passât par les 2 points E et E′, et nous aurons exécuté ainsi, selon M. Lemoine, 2 *fois* l'opération R_1

[1] A l'occasion du présent article, il faut répéter une fois de plus que l'*Enseignement mathématique* laisse libéralement la porte ouverte à toutes les opinions, mais ne saurait se solidariser avec les auteurs. Certaines appréciations portées ici sur les idées de M. Lemoine, par l'auteur de l'article, n'engagent que ce dernier.

La Rédaction.

(= règle). Ensuite nous avons dû placer la pointe du compas en A, E, B, E et C', c'est-à-dire répéter *5 fois* l'opération C_1 (= centre) que M. Lemoine caractérise par le symbole 5 C_1. De là il conclut à l'exactitude de la construction en faisant la somme des coefficients de R_1 et de C_1, soit $2 + 5 = 7$.

Il est curieux que cette énumération mécanique des opérations ait trouvé quelques partisans, même des défenseurs, quoiqu'il ait dû sembler clair, à tout mathématicien, que cette façon absolument artificielle de définir la notion compliquée de l'« Exactitude d'une Construction géométrique » est insoutenable. On sent qu'il s'y trouve une erreur, et si l'on n'a pas pu la saisir exactement, cela tient, selon moi, à la circonstance suivante : les *Mathématiques de précision*, d'après leur sens et leur signification mêmes, ne donnent pas lieu de faire une distinction particulière en faveur de l'« exactitude » d'une construction géométrique. La *Géométrie théorique* définit chaque droite par deux de ses points et chaque point par l'intersection de deux droites. Mais la *Géométrie naturelle ou d'approximation* doit faire la restriction suivante : « les deux points ne doivent cependant pas être trop près l'un de l'autre, et l'angle compris entre les deux droites ne doit pas être trop aigu » (Weber et Wellstein, *Encyclopædie der Elementar-Mathematik*, Bd. 2, p. 115, *Leipzig*, Teubner, 1905).

La Géométrographie est du domaine des Mathématiques de précision; et c'est pourquoi M. Lemoine dit très justement, l. c. p. 18: Une construction, pour être dite la *construction géométrographique* d'un problème doit être I° *générale*, c'est-à-dire s'appliquer à ce problème, *quelles que soient les grandeurs et les positions des données*. II° *la plus simple possible*. Il insiste donc, avec raison, sur la considération suivante, prise parmi celles qui sont à la base de la Géométrographie, c'est-à-dire qu'*elle suppose qu'un point est déterminé parfaitement quelque petit que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent* (Lemoine, *Archiv d. Math. u. Phys.*, 3. Reihe. Bd. 1, p. 99, 1901).

M. Reusch exprime la même pensée dans la préface de son Ouvrage : *Planimetrische Konstruktionen in geometrogra-*

phischer Ausführung (Leipzig, Teubner, 1904, S. VIII). « La Géométrographie est de nature purement théorique ». M. Lemoine commit donc une erreur foncière en introduisant la notion d'*exactitude* dans son système. En effet, cette notion étant particulière aux Mathématiques de précision, donna lieu à des équivoques, et M. Lemoine a confondu deux branches essentiellement différentes de la Géométrie. C'est pourquoi Guido Hauck se prononça franchement contre le point de vue de M. Lemoine, en quelques mots brefs et frappants (*Sitzungsberichte d. Berliner Math. Gesellschaft*, Oktober, 1903). D'après mon avis, la polémique de MM. Mehmke (*Deutsche Math. Vereinigung* Karlsbad, 1902) et Holzmüller (*Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw.*, Jahrg. *11*, 1905) protestant contre l'emprunt fait par la Géométrographie au domaine des Mathématiques de précision, n'a pas eu le résultat espéré, parce que les partisans de la Géométrographie tirent leurs arguments précisément de la Géométrie de précision, et on ne peut évidemment y faire aucune objection, puisqu'il ne s'agit, dans la Géométrographie, que de faire usage de quelques propositions plus ou moins connues de la Géométrie plane élémentaire, en vue des constructions proposées. Mais il n'en devient que de plus en plus difficile d'épuiser la discussion, car — je laisse parler M. Félix Klein — « jusqu'aujourd'hui on n'a pas encore développé rationel-« lement une théorie des Erreurs dans les Constructions « géométriques, telle qu'elle se trouve à la base de la Géo-« désie. Je dis qu'une théorie des erreurs est rationnelle « quand elle est basée sur des considérations de probabi-« lité, de sorte que nous devons — pour juger de l'exactitude « d'une méthode de construction — l'appliquer à plusieurs « reprises au même problème, puis comparer les résul-« tats par la méthode des moindres carrés ou de quelque « autre façon » (Félix Klein, *Anwendung d. Diff. u. Integralrechnung auf Geometrie*. Autographiertes Vorlesungsheft. Leipzig, Teubner, 1902, p. 359). M. W. Franz Meyer, professeur à l'Université de Königsberg (Prusse) a précisément chargé un de ses jeunes collègues de diriger son attention sur ce point. Et M. Konrad Nitz a développé le résultat de ses études dans une dissertation sur l'*Application de la théorie des erreurs, sur un plan, aux constructions faites au moyen de la règle et du compas*, Königsberg, 1905), et en outre dans ses *Compléments à une Théorie des erreurs des constructions géométriques* (*Zeitschrift f. Math.* 53, 1906. Leipzig. Teubner). Il existe aujourd'hui une littérature assez riche sur ce sujet qui commence par Bravais (*Analyse math. sur les probabilités des erreurs de situation d'un point*. Paris, Mém. prés. par divers savants, *9*, 1846) et qui comprend entre autres les travaux de Chr. Wiener (*Darst. Geometrie*. Bd. 1 ; p. 190, 1884), de Helmert (*Studien über rationelle Vermessungen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 13*, 1868), de Jordan (*über die Genauigkeit geodätischer Punktbestimmungen, Zeitschr. für Math. u. Phys. 16*, 1871), de Czuber (*Theorie der Beobachtungsfehler*, 3. Teil. Leipzig 1891) et qui se termine par les dissertations toutes récentes de F. Geuer (*Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren; Freiburg*, i. Br. 1902) et de P. Böhmer (*Ueber geometrische Approximationen*. Göttingen, 1904). Il est curieux que M. Lemoine ne connaisse même pas les travaux de ses compatriotes Bravais, Bienaymé (1852), Bertrand (*C. R.* 1888), d'Ocagne (*C. R.* 1894 ; *Bull. Soc. Math. de France*, 1895) ou que du moins il ne leur accorde aucune attention.

Pour jeter un coup d'œil dans cet ordre d'idées, je m'attache au problème de construction exposé au commencement. Il est clair que, dans l'exécution du dessin, il n'est nullement indifférent que l'angle sous lequel se coupent les deux droites données soit quelconque. S'il est très petit, que le point A est donc ce qu'on appelle un *point glissé*, on est, dès l'abord, dans le doute si l'on a vraiment mis la pointe du compas en A ; il est pratiquement impossible de distinguer le point A des points voisins. D'autre part la construction finit encore par devenir impossible, quand les points E et E' sont trop rapprochés l'un de l'autre. L'échafaudage d'une construction géométrographique apparaît donc nébuleux, en ce qui concerne l'exactitude et la simplicité d'une construction : elle n'est — comme dit Jacob Steiner — qu'une construction exécutée avec la langue. Et indiquer une construction moins simple, dans un cas semblable, serait en contradiction flagrante avec le principe de la Géométrographie de M. LEMOINE.

Dans la théorie des erreurs on énonce la proposition suivante : Tous les points de même probabilité sont, dans l'exécution de l'opération C_1 pour le point d'intersection de deux droites, situés sur des ellipses concentriques et semblablement placées autour du point d'intersection donné ; on les nomme *ellipses d'erreurs* ; c'est le *théorème de Bravais.* Si l'on prend les deux droites données pour axes d'un système de coordonnées obliques, si l'on désigne, en outre, l'angle compris par ω, les erreurs moyennes, commises en plaçant la pointe du compas, par rapport à chacune des droites par m_1 et m_2 — sur une largeur de trait de 0,10 à 0,15 mm., ces erreurs moyennes varient, selon les personnes et les circonstances, entre 0,035 et 0,060 mm. — et k étant une constante arbitraire, on a *pour équation de l'ellipse d'erreurs*

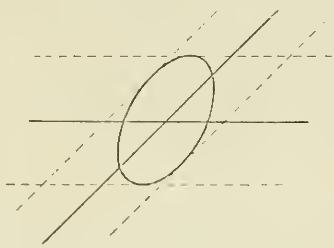


Fig. 2.

$$\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \frac{2k^2}{\sin^2 \omega} .$$

Pour $k^2 = \frac{1}{2}$, on a ce que l'on appelle l'*ellipse d'erreurs moyenne.* L'ellipse est inscrite dans le parallélogramme formé par des droites parallèles aux axes, et coupant ceux-ci à des distances $\pm m_1$ et $\pm m_2$. Dans le plus important des cas particuliers, c'est-à-dire quand on a : $m_1 = m_2 = m$, il vient, pour la longueur des demi-axes :

$$a = \frac{km}{\sin \frac{\omega}{2}} \text{ et } b = \frac{km}{\cos \frac{\omega}{2}} .$$

Pour $\omega = 90°$, on a donc un *cercle d'erreurs.*

La définition de la surface d'erreurs, pour les point B et C', qui sont obtenus par l'intersection de chacune des deux droites et d'un cercle, est plus compliquée. La théorie montre ici que l'on a affaire à des courbes de 4ᵉ ordre, ce que l'on appelle des *ovales d'erreurs de 4ᵉ ordre*. Pour le point E', à l'intersection de deux cercles, la surface d'erreurs est limitée par une *ovale d'erreurs de 8ᵉ ordre*.

Enfin, on achève la construction en tirant la droite EE'. Prenons le cas le plus simple : les deux points sont déterminés chacun par l'intersection de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, ou mieux que cela, supposons les deux points donnés comme des points circulaires marqués au crayon, de telle sorte que l'erreur moyenne est la même dans chaque direction, quand on applique la règle. Alors l'exactitude de toutes les droites joignant les deux points est caractérisée par une série d'hyperboles homofocales, telles que toutes les droites de même probabilité enveloppent chacune des hyperboles. L'équation de ces *hyperboles* est :

$$\frac{y^2(m_1^2 + m_2^2)}{k^2} - \frac{x^2(m_1^2 + m_2^2)^2}{2e^2 - k^2(m_1^2 + m_2^2)} = 2m_1^2 m_2^2 .$$

Elle se simplifie lorsque $m_1 = m_2 = m$ et devient

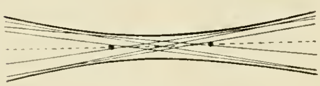


Fig. 3.

$$\frac{y^2}{k^2 m^2} - \frac{x^2}{e^2 - k^2 m^2} = 1 .$$

Enfin, il nous faut encore mentionner l'exactitude qui caractérise un cercle de rayon donné et tracé autour d'un point donné.

Puisque l'exactitude de l'opération C_1 est donnée par une série de surfaces ou courbes d'erreurs, ellipses ou ovales d'erreurs, il s'ensuit que tous les cercles de même probabilité *enveloppent* une *courbe parallèle* à une courbe d'erreurs du point centre. Si, en particulier, il s'agit de l'ellipse d'erreurs, les courbes parallèles sont nommées les toroïdes. Le problème de la composition de deux ou plusieurs de ces ellipses d'erreurs a été traité à fond et généralisé par M. d'Ocagne ; mais les formules sont très compliquées.

Les travaux cités plus haut de MM. Mehmke et Holzmüller et le livre de M. Adler sur la théorie des constructions géométriques, p. 268-301 (Leipzig, Göschen, 1906), complètent très bien cet exposé.

Pour terminer je veux attirer l'attention du lecteur sur la copie photographique d'un dessin, exécuté avec les instruments de la maison *Clemens Riefler* par l'ingénieur *Esseling*; ce dessin représente un polygone régulier de 60 côtés, avec toutes ses diagonales, soit en tout 1770 droites. Cette construction suggère les réflexions les plus diverses, par exemple sur le rôle joué par les instruments, dont on sait la perfection, comme facteurs essentiels de l'exactitude d'une construction géométrique ; elle fait encore songer à l'habileté du *dessinateur* et à son *équation personnelle*, si je puis m'exprimer ainsi.

(Traduction de *E. Perelmutter*).

Em. Haentzschel (Berlin).

EN QUEL SENS ET PAR QUELLES PREUVES VALABLES POUVONS-NOUS JUSTIFIER LE SYSTÈME DE COPERNIC ?

« Qui veut trop prouver ne prouve rien » dit un proverbe. Il arrive en effet qu'en voulant trop étendre la portée d'une démonstration on finit par lui enlever toute signification. Les preuves invoquées en faveur du système de Copernic, en fournissent un exemple caractéristique, du moins sous la forme qu'on a l'habitude de leur donner.

Nulle part, en effet, il n'est question d'un système de référence ; on raisonne comme s'il était possible d'établir que la terre possède certains mouvements lui appartenant en propre, en dehors de toute relation avec des repères.

C'est ainsi qu'à propos du mouvement diurne, il est d'usage constant de poser le dilemme suivant : Ou bien c'est notre globe qui tourne sur lui-même, ou bien c'est le reste de l'Univers qui tourne en sens contraire. »

On pourrait demander pour quelles raisons, on limite notre choix à ces deux hypothèses extrêmes, ciel immobile, ou terre immobile ; pourquoi on passe sous silence la série infinie des hypothèses intermédiaires où ciel et terre se mouvraient tous deux ; d'autant que d'un point de vue absolu, il n'est même plus permis de parler du ciel comme d'un tout indéformable. Mais, nous passerons outre, voulant seulement faire remarquer, qu'en l'absence du repère, les deux hypothèses ne sont pas distinctes. Eût-on même, pour éviter le dilemme, posé la question sous une autre forme, et demandé simplement si la terre tourne, qu'elle n'en serait pas moins restée insoluble et inintelligible, parce que muette sur le repère.

Repos et mouvement ne sont pas en effet, des qualités intrinsèques des corps ; ils ne sont compréhensibles et n'ont de signification définie que par rapport à tel ou tel système de comparaison. Et, dans cet ordre d'idées il n'est pas plus grossièrement absurde d'affirmer que c'est le corps, le fusil, le chien, les arbres et tout l'Univers, qui tournent autour de l'œil droit d'un chasseur inspectant la campagne, que d'attribuer un mouvement propre à cet œil droit. Ce qui nous donne le change, c'est l'habitude, dans laquelle nous nous trouvons, de rapporter implicitement tous les mouvements à notre corps ou à la terre. Mais si nous faisons attention, que par la nature même de la question, il n'y a plus ici de repère, nous reconnaîtrons sans difficulté, non seulement que les deux hypothèses opposées ne sont pas distinctes, mais que chacune d'elles est privée de sens. Il n'y a plus de réponse saine à une question qui ne l'est pas.

Fort heureusement, la valeur scientifique du système de Copernic ne dépend en rien d'affirmations de cet ordre. Elle tient uniquement à la richesse des relations qu'il établit. Un examen même sommaire, nous montrera facilement que les raisons par lesquelles il s'impose, restent entières, quelles que soient nos croyances, plus ou moins métaphysiques, sur l'espace absolu.

C'est ainsi que les analogies révélées par les lunettes et le spectroscope suggèrent de toutes façons, que les corps célestes ne sont pas d'une autre nature que les corps terrestres; et que la terre, loin d'être un astre privilégié, n'est qu'une planète des plus ordinaires.

Ce résultat, d'une importance considérable, n'est peut-être pas toujours apprécié comme il le mérite. Si les corps célestes et les corps terrestres n'étaient pas de même nature, aucune des données qui nous sont rendues familières par l'observation habituelle des seconds ne serait applicable aux premiers. En particulier, la notion de poids et celle de masse ne s'y étendraient pas. Nous n'aurions aucune prise sur eux, puisque le fil de l'induction serait rompu.

Quand nous nous étonnons parfois de voir que Ptolémée n'hésite pas à faire tourner le soleil, ce globe immense par rapport à notre globe, c'est que nous oublions que pour lui le soleil n'avait pas de masse. C'était une flamme qui pouvait, sans contradiction, réunir l'énormité à la mobilité la plus grande. Voilà ce qui explique aussi la pauvreté des arguments que Copernic fit valoir pour rendre vraisemblable le système auquel nous avons attaché son nom, et pourquoi Tycho Brahé crut pouvoir l'abandonner. Cela est si vrai, que, tout en faisant tourner Jupiter qu'il estime 14 fois plus gros que la terre, Tycho Brahé déclare que notre globe est manifestement trop lourd pour être propre au mouvement.

L'illustre chancelier Bacon, le contemporain de Galilée, pose encore le problème de la nature corporelle de la lune. « Supposons qu'il s'agisse de savoir, si la lune est une sub- « stance ténue et analogue à celle de la flamme ou de l'air, « comme l'ont pensé un assez grand nombre de philosophes « anciens, ou si c'est un corps dense et solide comme le « pensent Gilbert et quelques modernes. » Et il indique quelles observations on pourrait faire pour trancher la question : observations auxquelles il n'accorde d'ailleurs, pas lui-même grande confiance, puisqu'il espère en trouver de meilleures.

Les observations de Galilée marquent une date capitale dans l'histoire de l'astronomie, et, somme toute, l'étude télescopique ou spectroscopique des astres fournit l'une des meilleures preuves que l'on puisse invoquer en faveur du système de Copernic. C'est en même temps l'une des plus simples, des plus frappantes ; bien plus immédiatement accessible que ne le sont celles tirées de la mécanique.

Celles-ci en effet, ne peuvent être qu'indirectes ; dans toutes:

On part d'un fait général, autrement dit, d'une loi — loi de mouvement relative à la terre ;

puis on remarque que certains faits qui échappent à cette loi, y obéiraient, au contraire, si l'on pouvait, sans altérer la loi, substituer à la terre un repère lié aux étoiles ;

enfin, on reconnaît qu'au degré de précision des expériences, cette substitution est permise et qu'il convient, par suite, de la faire.

Par exemple :

Des expériences sur la forme d'équilibre d'une masse fluide en rotation, soustraite à l'action de la pesanteur, nous conduisent à énoncer la loi suivante: « Quand une masse « fluide, soustraite à toute action extérieure, prend la forme « d'un ellipsoïde de révolution aplati, c'est qu'elle tourne « par rapport à la terre. »

D'un autre côté, nous savons que notre globe a précisément cette forme. Il ne saurait être question de rattacher ce fait à la loi précédente tant que nous conservons la terre comme repère ; mais cette loi ne serait-elle pas susceptible d'une retouche ? La forme indiquée ne serait-elle pas l'indice d'une gyration par rapport au ciel, plutôt que d'une gyration par rapport à la terre ?

Au degré de précision de nos expériences, rien ne s'oppose à cette manière de voir ; rien ne s'oppose donc à ce que nous fassions dépendre d'une même loi la forme de la terre et celle de nos fluides, et que, dans cette vue, nous rapportions tous les mouvements à un repère par rapport auquel la terre tourne. Grâce à ce choix, la configuration de notre planète trouve son explication.

On pourrait citer d'autres exemples ; mais à les passer ainsi successivement en revue, on ne peut demander à chacun d'eux tout ce qu'il pourrait donner. En les isolant les uns des autres, et surtout des principes de la dynamique, on les mutile. Il devient même difficile de prouver que la terre circule par rapport au repère choisi. C'est qu'en fait, l'histoire le démontre, la question des mouvements de la terre est intimement liée à celle des principes de la mécanique; et, logiquement, l'un des premiers chapitres de toute mécanique devrait être un chapitre d'astronomie.

Aussi pour donner aux preuves toute leur puissance démonstrative; pour bien faire ressortir jusqu'à quel point s'impose le changement de repère qu'elles appellent, convient-il de ne pas les séparer, mais de les considérer ensemble dans le rapports avec les principes. Un seul argument désisif l'emportera toujours sur plusieurs petites raisons.

1° Des expériences, dans lesquelles le repère est naturellement la terre — expériences sur la chute des corps, le mouvement des projectiles, les forces centrifuges, etc. — mêmes expériences répétées en bateau, en ballon, sur les chevaux de bois etc., suggèrent la loi d'inertie exprimée par l'équation vectorielle $F = m J$, et la loi suivant laquelle les forces se composent comme des vecteurs.

D'autre part, l'observation, mais surtout nos réflexions sur la notion de force, nous montrent que toutes les forces ont au moins deux bouts. Nous les appelons respectivement action et réaction, et pour ne pas oublier qu'action et réaction ne sont que deux aspects différents de la même chose, nous posons en principe qu'il y a toujours égalité entre l'action et la réaction.

En possession de ces principes, nous pouvons les utiliser à résoudre les problèmes les plus variés, réels ou imaginaires. Comme toutes les fois qu'une vérification est possible, elle confirme les solutions obtenues, on peut considérer ces principes comme étant l'extrait, la quintessence d'une infinité d'observations qu'ils résument.

2° Parmi les problèmes qu'on peut ainsi se poser, il en est un d'une importance capitale à la solution duquel Newton a consacré la meilleure part de son génie.

Ayant assimilé la lune à un corps pesant, il avait reconnu qu'on pouvait expliquer — à quelques irrégularités près — son mouvement, sous la seule condition d'admettre que la force de pesanteur qui sollicite les corps vers le centre de la terre, varie en raison inverse du carré des distances. Au contraire, il était impossible, à l'aide cette même loi, ou plus généralement de forces centrales, et par les principes de la mécanique, de rendre compte, même grossièrement, des mouvements des autres corps célestes.

Mais — et voici le point essentiel — il démontra qu'on y parvenait, et de la façon la plus complète, la plus merveilleuse, lorsque au lieu de rapporter tous les mouvements à la terre, on les rapporte à un trièdre lié aux étoiles. Les développements ultérieurs de l'astronomie n'ont fait que confirmer, étendre, approfondir ce résultat. Les déplacements relatifs de la terre, de la lune, des planètes et de leurs satellites, du soleil et des étoiles, peuvent alors être décrits, calculés, prévus dans leurs moindres détails et jusque dans leurs irrégularités les plus difficilement observables.

Ajoutons, pour n'y plus revenir, qu'il n'est pas jusqu'à l'aberration des étoiles qui ne s'explique en supposant l'éther lié au repère,

Enfin, par surcroît, l'aplatissement de la terre, la diminution de la pesanteur quand on se dirige vers l'équateur, la direction générale des vents alizés, la gyration des cyclones, le phénomème des marées etc., trouvent du même coup leur explication.

3° Ces coïncidences seraient extraordinaires, invraissemblables, si elles étaient fortuites. Elles deviennent naturelles au contraire si les résultats des expériences d'où sont sortis les principes de la dynamique n'étaient modifiés que d'une façon imperceptible, quand, au lieu de rapporter les mouvements au sol on les rapporte au ciel. Nous nous serions alors simplement trompés de repère.

Or le calcul montre que cette modification est absolument inaccessible aux procédés d'investigation communément employés. Il faudrait, dès lors, être irrationnel, déraisonnable, dénué de tout esprit scientifique, pour ne pas considérer comme établi, que le repère de la dynamique est un repère lié aux étoiles. Je n'ose dire illogique, je n'ose dire absurde, parce que une pareille attitude n'aurait rien de contradictoire. Mais ce serait celle de l'homme qui soutient « qu'une « coquille d'huître fossile n'a jamais été habitée par une huître

« vivante, qu'elle n'est qu'une concréation minérale, un jeu « de la nature » et comme le fait remarquer Huxley, quand on se trouve en présence de gens, chez qui se manifeste un pareil état d'esprit, il vaut mieux les laisser tranquilles.

Et pourtant on a réussi à pousser la preuve encore plus loin. En se plaçant dans des conditions toutes spéciales, combinées à dessein en vue du but à atteindre — pendule et gyroscope de Foucault, barogyroscope de Gilbert, dispositifs pour étudier la déviation vers l'est des corps qui tombent de haut, etc. — en s'armant de patience, ou de microscopes, on est parvenu à saisir, pour ainsi dire sur le vif, les perturbations minimes apportées par la rotation de notre globe aux lois de la dynamique terrestre.

Si après cela quelqu'un vient nous dire que la réalité du système de Copernic, et par conséquent celle des mouvements de la terre ne sont pas démontrés, envoyons-le faire une cure de métaphysique.

Démontre-t-on, en science, la réalité des objets extérieurs ? Quoiqu'en ait dit l'académicien, qui proclama naguère la faillite de la science, on ne la postule même pas.

On peut s'occuper d'un groupe persistant de sensations, sans qu'on ait besoin de savoir si derrière cet assemblage, il y a quelque réalité cachée, immuable, absolue, inaccessible. Et ce que la science ne fait pas pour l'existence des corps, pourquoi le ferait-elle quand il s'agit de leur mouvement ?

G. ANDRAULT (Grenoble).

LETTRE A M. FÉLIX LE DANTEC[1]

Monsieur,

Je viens d'ouvrir votre volume *L'Athéisme* et d'en feuilleter les premières pages. Je crois bien que sur un grand nombre de points je serais d'accord avec vous. C'est un motif de plus pour relever ce qui me semble une hérésie scientifique, et ce qui n'est peut-être au fond qu'un malentendu tenant à l'imperfection de notre langue.

Dans votre Dédicace à votre ancien professeur, mon ami Alfred Giard, vous dites pag. 11 : « *les mathématiques sont* FINIES; *la biologie, au contraire commence ou va commencer.* »

Un peu plus loin (p. 12), revenant sur la même idée, vous vous exprimez ainsi : « *Les sciences naturelles ne sont pas comme les mathématiques; elles ne sont pas* FAITES ».

Le mot « finir » a deux sens très différents. On est fini quand on est mort. Une œuvre est finie quand elle est achevée, quand l'auteur n'y voit plus de retouches à faire. Je crois bien que c'est dans ce dernier sens qu'il faut prendre l'affirmation que vous produisez. Votre seconde citation me paraît le démontrer.

C'est donc cette interprétation que j'adopte; et, l'ayant adoptée, je viens vous demander à vous savant, à vous philosophe : croyez vous vraiment, en toute sincérité intellectuelle, que la science mathématique soit achevée, complète, parfaite? Je vais plus loin : croyez vous que, d'une science, on puisse jamais dire qu'elle est achevée?

Si telle n'est pas votre pensée, vous ne vous êtes pas exprimé assez clairement, ou plutôt je n'ai pas su vous comprendre.

Si au contraire vous me répondez affirmativement, permettez

[1] J'ai tenu à ne publier cette lettre qu'avec le consentement de M. Le Dantec. Il a bien voulu me l'accorder, par une lettre des plus aimables, dans laquelle, après avoir exprimé l'idée qu'il existe un malentendu, il ajoute :

« J'ai voulu dire que dans l'état actuel des choses, il peut y avoir un enseignement secon- « daire des mathématiques. Les vérités établies en mathématiques ne seront pas infirmées par « les découvertes ultérieures. *Il y a des mathématiques qui sont finies.* Voilà ce que j'aurais dû « écrire. En sciences naturelles, on n'en saurait dire autant ».

Je ne suis peut-être pas tout à fait d'accord avec l'éminent biologiste, même après cette explication, mais une discussion nouvelle entraînerait trop loin et deviendrait vaine. L'important pour le lecteur, c'est que les idées de chacun soient clairement mises en présence.

En tous cas, j'adresse à M. Le Dantec mes remerciements bien sincères pour la bonne grâce avec laquelle il s'est prêté à cette discussion courtoise. C. A. L.

moi de vous dire que cela démontrerait la pauvreté philosophique de l'enseignement mathématique que vous reçûtes jadis.

Vous avez dû, comme tous nos contemporains, vous spécialiser, et je m'en réjouis pour la biologie, mais ne vous est il resté vraiment dans l'esprit, en matière mathématique, que le souvenir des procédés ou des méthodes inscrites dans un livre au bout duquel on pourrait mettre le mot : *Fin*?

Vous me rapelleriez alors ces jeunes enfants auxquels j'ai parfois demandé : que savez vous en mathématique?, me répondant avec candeur : Je sais toute l'arithmétique. A quoi j'ai toujours été tenté de répondre à mon tour : Vous êtes bien heureux!

Ce rapprochement n'est pas pour froisser un esprit tel que le vôtre, car il n'est pas donné à tout le monde de conserver la souplesse cérébrale de l'enfant.

Mais si vous persistiez à prétendre que la science mathématique est *faite*, dans le sens que j'ai essayé de préciser, ne serait-on pas en droit de vous demander encore depuis quand? quel est le jour, quelle est la minute précise où fut dit le dernier mot?

Si c'est au lendemain de l'invention du calcul infinitésimal, Lagrange ne compte plus ; si c'est après Lagrange, il faut supprimer Cauchy ; si c'est hier, tous les travaux publiés en ce moment dans le monde entier se réduisent à rien.

La vérité, croyez le bien, c'est qu'en mathématique, comme partout, nous savons bien peu de chose. Rien que dans le domaine de l'arithmétique élémentaire, la succession des nombres premiers reste jusqu'ici un impénétrable mystère. Des questions d'apparence simple ont résisté aux tentatives de plusieurs générations.

D'un autre côté, les sciences physiques et peut être demain les sciences naturelles viennent poser chaque jour des problèmes nouveaux et appellent à leur aide la science mathématique, pour en formuler la solution, pour préciser l'énoncé des lois qui régissent les phénomènes. Est-il sérieusement possible d'affirmer, dans les conditions présentes, que la tâche est finie? Il ne nous resterait plus alors qu'à nous asseoir pour la contempler dans sa splendeur.

Dès lors, l'effort cesserait. Et c'est ici que j'appelle particulièrement votre attention, car vous allez voir s'effacer la distinction grammaticale indiquée plus haut. Les recherches s'arrêtant, la science mathématique étant considérée comme parfaite, aucun progrès ne s'accomplirait plus, et elle serait visiblement *finie*, dans le sens vulgaire.

On peut même à mon avis formuler cette proposition : Toute science achevée est une science morte. Et y ajouter cette prophétie facile : Il n'y aura jamais de science achevée, tant que la curiosité de l'esprit existera chez l'être humain.

Les phénomènes physiques ou biologiques, les lois qui les rattachent les uns aux autres, les vérités mathématiques sont en nombre infini. De tout ce chaos, nous avons exploré des coins insignifiants. Dans cette formidable obscurité, c'est à peine si nous avons pu projeter quelques rayons de lumière. Travaillons ensemble à élargir le champ de nos investigations, indéfiniment ouvert devant nous. Venons les uns vers les autres, dans une intention sincère de secours réciproque, au lieu de nous cantonner dans nos petits compartiments artificiels. Tout évolue : individus, et doctrines aussi ; tout ce ment, tout se transforme. Une science qui cesserait d'évoluer cesserait d'exister.

Vous pardonnerez ces observations à un vieux compatriote (car je suis Breton moi aussi) qui n'a pas eu l'occasion d'entrer en relations personnelles avec vous, mais qui a suivi depuis longtemps les étapes de votre brillante carrière scientifique. Elles vous prouveront l'importance que j'attache à ce que vous écrivez, puisque j'y vois un danger possible.

Pour dire toute la vérité, ma méfiance et mes craintes se sont accrues, en vous voyant placer votre œuvre, vous homme de science, sous la protection de cette épigraphe anti-scientifique : « Ce qu'il y a de terrible quand on cherche la vérité, c'est qu'on la trouve ».

C'est un mot de littérateur paradoxal, dénotant une méconnaissance totale des conditions de la recherche scientifique. Le paradoxe serait plus juste en le retournant ainsi : « Ce qu'il y a d'heureux quand on cherche la vérité, c'est qu'on n'en trouve qu'une partie. »

Veuillez croire, Monsieur, à ma profonde estime.

C. A. Laisant.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Vues stéréoscopiques pour l'enseignement de la Géométrie [1]

13. — *Les recherches de M. Estanave sur le relief stéréoscopique.* — Dans une conférence faite à la Sorbonne, le 17 mars 1906, sous la présidence de M. Appell, doyen de la Faculté des Sciences, M. Estanave a examiné *la Stéréophotographie par le procédé des réseaux* [2]. Après avoir fait ressortir les avantages de la stéréophotographie comme complément indispensable de la photographie ordinaire, il rappelle qu'au point de vue physiologique la sensation du relief résulte de la synthèse intime qui se fait dans le cerveau, des images légèrement différentes que procurent chacun des yeux. « Dans la vision stéréoscopique, dit-il, nous sommes obligés de regarder deux objets identiques sensiblement pour les fusionner et apprécier l'image résultant de leur fusion. » Il s'agira donc de produire sur chacune de nos rétines une impression identique à celle que produit l'objet lumineux. Coupons par un plan quelconque P (fig. 1) les rayons allant de l'objet S à chacun des yeux O et O' et aux points d'intersection s, s' reproduisons l'image de l'objet telle qu'elle doit être en ces points. L'observateur ayant ses yeux en O, O' aura la sensation de la vision directe de l'objet S avec ses dimensions. C'est à cet écartement e de deux images correspondant à un même point que Helmholtz a donné le nom de *parallaxe stéréoscopique*. M. Estanave en établit la formule par une méthode très simple que nous croyons utile de reproduire ici, car elle permet de se rendre compte des règles données empiriquement par M. Berdellé (*L'Ens. math.*, p. 475, 1906) sur l'établissement des vues stéréoscopiques.

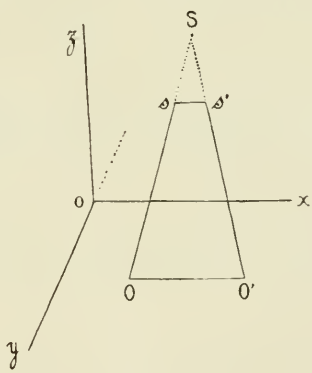


Fig. 1.

Soit xoz le plan du dessin, et supposons O et O' dans le plan ho-

[1] Voir *L'Enseignem. mathém.* 8e année, 1906, no 5, p. 385-390 ; no 6, p. 475-478.

[2] Voir le *Bull. Scientifique* publié par l'Assoc. amicale des Elèves et anciens élèves de la Faculté des Sciences de Paris, 1906, no 3, p. 89-99.

rizontal. Désignons par α, $-\beta$, γ les coordonnées de S et (a, b, o), (a', b, o) celles des points O et O'. Les équations des rayons SO et SO' sont respectivement :

$$\frac{x-a}{a-\alpha}=\frac{y-b}{b+\beta}=\frac{z}{-\gamma}, \qquad \frac{x-a'}{a'-\alpha}=\frac{y-b}{b+\beta}=\frac{z}{-\gamma}.$$

Les coordonnées des points s et s' seront

$$(s) \qquad x=a-\frac{b\,(a-\alpha)}{b+\beta}, \qquad y=o, \qquad z=\frac{b\,\gamma}{b+\beta};$$

$$(s') \qquad x'=a'-\frac{b\,(a'-\alpha)}{b+\beta}, \qquad y'=o, \qquad z'=\frac{b\,\gamma}{b+\beta}.$$

Si le point S s'éloigne du plan du dessin, β grandit indéfiniment et les abscisses des points s et s' deviennent a et a'. Supposons que les deux images constituées par des points analogues à s et s' soient dessinées sur deux plans coïncidants et laissant fixe le plan qui contient l'image s, faisons glisser le plan de l'image s' de façon à faire coïncider les images du point à l'infini dans la direction de l'axe des y. Il faut pour cela déplacer le plan mobile de la quantité $a-a'$, par suite les coordonnées de la nouvelle position du point seront

$$x'_1=a-\frac{b\,(a'-\alpha)}{b+\beta}, \qquad y'=o, \qquad z'=\frac{b\,\gamma}{b+\beta}.$$

celles du point s restant les mêmes.

La parallaxe stéréoscopique, autrement dit l'écartement des deux images d'un même point S dans cette nouvelle position sera $x-x'_1$, c'est-à-dire $\dfrac{b\,(a-a')}{b+\beta}$.

En désignant par ϱ la distance de l'objet S au plan parallèle au plan du dessin et passant par les yeux, on a $b+\beta=\varrho$, en désignant par $2a$ l'écartement $a-a'$ des yeux, on a la formule $e=\dfrac{2a\,b}{\rho}$, où b est la distance des yeux au plan du dessin.

Il résulte de là que la parallaxe stéréoscopique est la même pour tous les points de l'objet qui sont à une même distance du plan du dessin : qu'elle augmente en proportion directe de la distance entre les deux yeux et en raison inverse de la distance de l'objet au plan parallèle du dessin et passant par les yeux. Dans la photographie stéréoscopique le plan du dessin est constitué par la plaque photographique et les yeux sont figurés par les objectifs...

En résumé, pour obtenir le relief il faut observer binoculairement deux épreuves, mais de telle façon que l'œil droit ne voie que l'épreuve qui correspond à l'œil droit et de même pour l'œil gauche.

En se basant sur ces conditions M. Estanave a imaginé un écran spécial de projection[1] sur lequel on projette deux images stéréoscopiques de façon à mettre en coïncidence les points les plus éloignés. En regardant par transparence sur cet écran, à une distance convenable, chaque œil perçoit l'une des images à l'exclusion de l'autre et le relief apparaît.

Le dispositif donné par M. Estanave permet « 1° d'obtenir des stéréogrammes de grand format en partant de vues stéréoscopiques ordinaires ; 2° de projeter les images stéréoscopiques, agrandies, et avec le relief et aussi les images des objets opaques ; les images projetées pouvant être observées simultanément par plusieurs personnes. » H. F.

Démonstrations et explications dans l'enseignement élémentaire.

Dans la plupart des pays où se cultivent les sciences exactes, il existe de nos jours de bons manuels dont les auteurs sont à la fois de véritables mathématiciens et d'excellents professeurs. Comment se peut-il alors que des ouvrages tels que celui que signale le *Supplemento al Periodico di Matematica* nov. 1906 puissent pénétrer dans les écoles avec l'approbation des autorités ? L'Italie possède pourtant de bons mathématiciens dans les divers degrés de l'enseignement : aucun d'entr'eux ne peut avoir appuyé l'*Aritmetica di* A. Spinelli d'Agro *ad uso delle classi V et VI elementari*, récemment adopté dans les écoles élémentaires italiennes. Nous empruntons à notre confrère les extraits ci-dessous qu'il publie sous le titre *Per ridere :*

Page 26. — Droite et plan. Perpendicularité. — « Soit donné un plan, par exemple la figure 1 (CDE), sur le centre duquel on tire la droite AB. Cette droite sera perpendiculaire au plan proposé ». .

. . . .

« Lorsqu'une droite rencontre un plan et d'autres droites on l'appelle oblique. Voyez la fig. 2. La droite AB est oblique aux points (CDEF) ».

Pag. 27. — « Un plan est perpendiculaire à un autre plan lorsque chacun d'eux contient une parallèle aux autres » . . . . . .

Il est à noter que ce livre, comme le remarque le *Supplemento*, a été « approuvé » par les commissions scolaires provinciales, et même par le Ministère !

---

[1] *Le relief stéréoscopique en projection par les réseaux lignés*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 24 oct. 1906.

Comme notre confrère, nous tenons à ajouter que nous signalons cet ouvrage, non pas par animosité contre l'auteur, mais uniquement dans le but d'être utile à l'enseignement mathémathique.

Dans ce même ordre d'idées voici un autre exemple bien caractéristique. Il nous est fourni par la note adressée par M. Ch.-Ed. Guillaume, directeur-adjoint du Bureau international des Poids et Mesures, à la *Revue générale des Sciences* (n° du 30 octobre 1906, p. 877-878), et dont voici un extrait :

A propos d'un livre récent. — « Parmi ceux qui aiment à la fois les enfants et l'arithmétique, la conviction est depuis longtemps faite qu'une bonne partie de l'aversion de beaucoup de jeunes esprits pour le calcul tient surtout à ce que l'enseignement en est formaliste et guindé ; que tantôt il fait appel à la mémoire pure, tantôt à des raisonnements abstraits ; et, dans un cas comme dans l'autre, il ne reste dans l'intelligence de l'enfant que des recettes appliquées avec plus ou moins de discernement aux problèmes qui lui sont posés.

Il suffit de se renseigner sur les démonstrations données dans la plupart des classes d'arithmétique pour se convaincre que ce sont, pour la plupart, de véritables trompe-l'œil, par lesquels on ne fait que répéter, sous une forme alambiquée, l'énoncé du théorème que l'on prétend prouver. Autant vaut, dès lors, l'apprendre comme un credo.

« L'exemple que voici me semble instructif. Un jeune élève de sixième me disait un jour : On nous démontre que lorsqu'on multiplie les deux termes d'une fraction par un même nombre on ne change pas la valeur de la fraction ; mais je n'ai rien compris à la démonstration.

— Pourriez-vous la répéter ?

— Voici. Soit la fraction $^3/_5$, « je multiplie le numérateur et le dénominateur par 4 et j'obtiens la fraction $^{12}/_{20}$, qui est égale à $^3/_5$, ce qu'il fallait démontrer. » Il me semble qu'on ne fait que dire ce qu'on veut prouver.

Je pensai que l'enfant avait mal retenu la démonstration, je lui demandai son livre ; il l'avait répétée textuellement.

Je la repris dans les termes suivants :

— Voici un gâteau que je partage en cinq parties égales ; je vous en donne trois : quelle fraction du gâteau avez-vous ?

— Les trois cinquièmes.

— Bien ; et maintenant je divise chacune des parts du gâteau en quatre parties égales. Quelle fraction du gâteau formera chacune des nouvelles parties ?

— Un vingtième.

— Reprenez ce que vous aviez tout à l'heure, et voyez combien vous avez de nouvelles parts du gâteau.

— J'en ai douze.
— Quelle fraction de gâteau possédez-vous ?
— Les douze vingtièmes.
— Qui sont égaux...
— A trois cinquièmes.

L'enfant était enchanté d'avoir compris. Le lendemain le professeur le rappela au tableau.

Lorsqu'on multiplie les deux termes d'une fraction, etc...
— On ne change pas la valeur de la fraction.
— Démontrez-le.
— Je suppose que j'aie un gâteau...
— Asseyez-vous, vous ne savez rien.

Evidemment le professeur n'avait pas compris que la démonstration du livre était rigoureusement inexistante. Mais les élèves en avaient parfaitement conscience.

La vraie méthode dans l'enseignement des mathématiques très élémentaires consiste à employer des démonstrations dont les enfants aient le sentiment profond, la logique pure viendra plus tard. C'est ce qu'a réalisé admirablement M. Laisant[1] dans un récent ouvrage dont la revue a déjà parlé, mais sur lequel il me paraît utile de revenir..... »

Ces deux exemples montrent une fois de plus qu'il ne faut pas s'étonner si, instruits par des manuels aussi étranges ou des démonstrations aussi insuffisantes, de nombreux jeunes gens se détournent chaque année des mathématiques. Et s'ils se vantent plus tard de n'avoir jamais rien compris aux mathématiques, pas même les démonstrations les plus élémentaires, c'est bien plus à l'enseignement défectueux qu'au manque d'aptitudes spéciales qu'il faut l'attribuer.

Questions d'examens.

Sous ce titre, dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques* (n° du 1er janvier 1907), M. le professeur L. Gérard vient de publier des observations dont quelques-unes sont fort intéressantes, mais qui appelleraient cependant certaines critiques, impossibles à développer complètement ici. Nous ne voulons pour l'instant n'en présenter qu'une seule ; et dans ce but, il est nécessaire de reproduire le début de l'article dont nous parlons :

« Dans le récit véridique fait par le bon Fénelon des examens « passés par Télémaque dans l'île de Crète, on lit que, après « chaque réponse de Télémaque, les sages vieillards membres du

[1] Initiation Mathématique (Voir la *Revue générale des Sciences* du 30 juillet 1906).

« jury se regardaient en souriant, surpris que sa réponse soit pré-
« cisément celle de Minos. J'en conclus que, pour rendre cet « examen loyal et sincère, il aurait fallu mettre, avant l'examen, « entre les mains des autres candidats, le texte des maximes de « Minos que Télémaque connaissait grâce aux répétitions de « Mentor.

« La même chose se passe aujourd'hui dans tous les examens. « Pour chaque question, chaque examinateur a sa démonstration « favorite. Si on lui sert cette démonstration il l'écoute en riant, « comme les sages vieillards, et donne une bonne note. Si on lui « en donne une autre, qui, à tort ou à raison, ne soit pas de son « goût, il en souligne complaisamment les points faibles, et, s'il « n'y a pas de points faibles, il s'ingénie à poser des objections à « côté. »

DANS TOUS LES EXAMENS ! CHAQUE EXAMINATEUR !

Il aurait fallu dire : « Dans tous les examens *mal faits* » et « chaque examinateur *insuffisant* ». L'esprit de généralisation est excellent en mathématiques, mais il n'en faut point abuser ; et M. Gérard en abuse. Nous croyons qu'il y a encore des examinateurs consciencieux et sans parti pris. Nous sommes même persuadé que si le distingué rédacteur du *Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques* se trouvait appelé à interroger des candidats, il serait au nombre de ces examinateurs impartiaux.

CHRONIQUE

Le Colonel A. Mannheim.

Nous avons l'immense regret d'apprendre à nos lecteurs la mort du colonel Mannheim, professeur honoraire à l'Ecole Polytechnique de Paris, décédé dans cette même ville le 11 décembre 1906 à l'âge de soixante-quinze ans.

Le signataire de ces lignes a trop connu cet excellent homme, aussi grand par le cœur que par la science, pour ne pas se sentir paralysé par l'émotion au moment de lui consacrer quelques lignes d'adieu. Que de longues recherches il faudrait pour parler de l'œuvre du géomètre sans rien oublier ! Nous ne pouvons ici, que rappeler brièvement le caractère de cette œuvre et citer comme exemple cette vie si pleine de labeur, si féconde en résultats originaux.

Le colonel Mannheim se destina d'abord à la carrière militaire, mais son esprit profond et ingénieux devait en faire un technicien. Qui ne connaît la règle à calculs qui porte son nom? Ce qu'on sait moins c'est qu'il l'imagina alors qu'il n'était qu'élève à l'Ecole d'Application de Metz. Dans l'art militaire proprement dit il s'occupa de questions d'artillerie, et, soldat aux heures où le patriotisme devient un devoir, il commanda la batterie de l'Ecole Polytechnique pendant le siège de Paris. Plus tard il fut désigné pour prendre un poste important lors de l'éventualité d'une mobilisation et cette désignation ne fut rapportée qu'à l'atteinte de la limite d'âge.

Comme professeur il débuta à l'Ecole Polytechnique âgé seulement de 28 ans. C'était en 1859. Il enseigna alors la géométrie avec l'éclat que l'on sait jusqu'en 1901, où il abandonna alors son enseignement entre les mains de son disciple et ami, M. Haag, toujours par raison de limite d'âge. Il a été le professeur de 44 promotions de polytechniciens!

Quant à l'œuvre scientifique, elle défie toute description rapide. M. Mannheim était profondément et passionnément épris de géométrie pure. C'était un intuitif dans la plus vaste acception du mot. En géométrie descriptive il n'a peut-être jamais tracé une seule épure sans voir dans l'espace ce qu'elle représentait. Il étudia profondément les transformations de figures, notamment la transformation des propriétés métriques et découvre des propriétés nouvelles de surfaces que l'on croyait cependant connaître, telles la cyclide de Dupin et la surface des ondes.

Mais où il manifeste tout son génie, c'est en créant véritablement la géométrie cinématique. Il part d'idées éparses dues à Cauchy, à Chasles, à Poncelet, et arrive à une science que l'on peut considérer comme presque entièrement nouvelle. Il prend le difficile problème du solide assujetti à quatre conditions, étudie géométriquement polhodies et herpolhodies et, sous le nom d'optique géométrique, toutes les propriétés des pinceaux lumineux réfléchis ou réfractés par une surface arbitraire. Il réunit tout cela dans un admirable volume intitulé : *Principes et développements de Géométrie Cinématique*, où il signale tou td'abord ce qu'il emprunte à ses prédécesseurs, mais c'est si peu de chose que lorsqu'on relit sa préface après le volume et qu'on le voit s'excuser de ne pas tout citer et présenter son œuvre comme devant simplement servir à l'explication de la science qu'il cultive, on se demande avec étonnement où sont les matériaux distincts de ceux qu'il apporte. Pour n'être pas injuste il faut bien citer la *Geometrie der Bewegung* de Schoenflies qui, si elle n'est pas aussi étendue que le traité de Mannheim, fait du moins honneur à l'école allemande, mais Mannheim tenait haut et ferme les lumières de l'école française. Il est le continuateur des Chasles et des Poncelet. Qui le continuera? Hélas la géométrie n'est plus en honneur chez les mathématiciens. Tout ce qui est harmonieux, même en analyse, semble céder peu à peu la place aux arides discussions de principes !

Mannheim a l'honneur d'avoir représenté jusqu'au bout la sublime harmonie de la géométrie pure.

Depuis 1901, époque à laquelle l'Ecole Polytechnique lui fit ses adieux dans une touchante cérémonie, il vivait calmement dans l'affection des siens, travaillant toujours. Les dernières années de sa vie furent assombries d'un deuil cruel, et il laisse maintenant les siens dans une peine nouvelle et profonde. *L'Enseignement mathématique* s'associe de tout cœur à ce deuil qui, d'ailleurs, atteint toute la Science.

A. Buhl (Montpellier).

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés. — La lecture des rapports sur les prix décernés par l'Académie en 1906 a eu lieu dans la séance annuelle tenue le 17 décembre dernier. Voici, d'après les *Comptes rendus,* les prix concernant les sciences mathématiques :

Grand Prix des Sciences mathématiques (3000 fr.). — Sujet proposé : Perfectionner en quelque point important, l'étude de la convergence des fractions continues algébriques. Le prix est partagé, en parties inégales, entre MM. H. Padé, R. de Montessus, et Auric.

Géométrie ; Prix Francœur. (1000 fr.). — Ce prix est attribué à M. Emile Lemoine, pour ses travaux de géométrie.

Géométrie ; Prix Poncelet (2000 fr.). — Ce prix est décerné à M. Guichard, correspondant de l'Académie, pour l'ensemble de ses travaux de géométrie.

Mécanique ; Prix Montyon (700 fr.). — Ce prix est décerné à M. Georges Marié, ingénieur, chef de division en retraite de la Compagnie Paris-Lyon-Méditerranée, pour son étude des oscillations que peuvent éprouver les véhicules de chemins de fer.

Prix Boileau (1300 fr.). — Ce prix est décerné à M. Edmond Maillet, ingénieur des Ponts et Chaussées, pour ses travaux d'hydraulique souterraine qui permettent, chaque année, de prévoir, dès le mois de mai ou juin, quels seront, vers la fin de la saison sèche, les débits minima des sources d'une contrée.

Prix Plumey (2500 fr.), — Décerné à M. le professeur Stodola, du Polytechnicum de Zurich, pour son ouvrage *Sur les turbines à vapeur.*

Astronomie ; Prix Pierre Guzman (100.000 fr.). — Le prix n'est pas décerné.

Prix Lalande (540 fr.). — Le prix est attribué par moitié à MM. R.-G. Aitken et William-J. Hussey, astronomes à l'Observatoire de Lick, pour leurs travaux sur les étoiles doubles et multiples.

Prix Valz (460 fr.). — Le prix Valz est décerné à M. Palisa, pour l'ensemble de ses recherches et de ses travaux.

Médaille Janssen. — Cette médaille d'or est décernée à M. A. Ricco, directeur des Observatoires de Catane et de l'Etna, pour ses travaux d'astronomie physique.

Prix Wilde (4000 fr.). — Le prix est partagé entre M. Termier, pour ses recherches sur la structure géologique des Alpes orientales, et M. Massau, pour ses travaux de mécanique appliquée et particulièrement ses recherches de l'intégration graphique.

Prix du Baron de Joëst (2000 fr.). — Le prix est décerné à M. Demoulin, pour ses recherches de géométrie infinitésimale.

Prix de Laplace (les Œuvres de Laplace).— Le prix est décerné à M. Pierre-Paul Lévy, sorti premier de l'Ecole Polytechnique et entré, en qualité d'élève-ingénieur, à l'Ecole nationale des Mines.

Programme des prix proposés pour les années 1908, 1909, 1910 1911, 1912 et 1913[1] :

Grand Prix des Sciences Mathématiques (3000 fr.). — Réaliser un progrès important dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré.

Les mémoires devront être envoyés au Secrétariat de l'Institut *avant le 1er janvier 1908.*

Prix Francœur (1000 fr.). — Ce prix *annuel* sera décerné à l'auteur de découvertes ou de travaux utiles au progrès des Sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Poncelet (2000 fr.). — Ce prix *annuel* fondé par Mme Poncelet, est destiné à récompenser alternativement l'ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans le cours des dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie. Le prix Poncelet sera décerné en 1908 à un ouvrage sur les Mathématiques pures.

Prix Bordin (3000 fr.). — L'Académie met au concours, pour l'année 1909, la question suivante :

L'invariant absolu qui représente le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce d'une surface algébrique dépend d'un invariant relatif ϱ, qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce et dans celles des courbes algébriques tracées sur la surface. On propose de faire une étude approfondie de cet invariant, et de chercher notamment comment on pourrait trouver sa valeur exacte, au moins pour des catégories étendues de surfaces.

---

[1] Les concours de 1907 étant clos le 31 décembre 1906, la liste des prix proposés pour 1907, publiée dans le précédent programme n'a pas été rappelée.

Les mémoires devront être envoyés au Secrétariat de l'Institut *avant le 1er janvier 1909.*

Prix Fourneyron (1000 fr.). — L'Académie rappelle qu'elle a mis de nouveau au concours, pour 1908, la question suivante : Étude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur.

Prix Vaillant (4000 fr.). — L'Académie a mis au concours, pour l'année 1909, la question suivante : Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

Prix Boileau (1300 fr.). — Ce prix *triennal* est destiné à récompenser les recherches sur les mouvements des fluides, jugées suffisantes pour contribuer à un progrès de l'hydraulique. A défaut, la rente triennale échue sera donnée, à titre d'encouragement, à un savant estimé de l'Académie et choisi parmi ceux qui sont notoirement sans fortune. L'Académie décernera le prix Boileau dans sa séance annuelle de 1909.

Astronomie ; Prix Pierre Guzman (100.000 fr.). — Décerné à celui qui aura trouvé le moyen de communiquer avec un astre autre que la planète Mars. Prévoyant que le prix de *cent mille francs* ne serait pas décerné tout de suite, la fondatrice a voulu, jusqu'à ce que ce prix fût gagné, que les intérêts du capital, cumulés pendant cinq années, formassent un prix toujours sous le nom de *Pierre Guzman*, qui serait décerné à un savant français, ou étranger, qui aurait fait faire un progrès important à l'astronomie. Le prix *quinquennal*, représenté par les intérêts du capital sera décerné, s'il y a lieu, en 1910.

Prix Lalande (540 fr.). — Ce prix *annuel* doit être attribué à la personne qui, en France ou ailleurs, aura fait l'observation la plus intéressante, le mémoire ou le travail le plus utile aux progrès de l'astronomie.

Prix Valz (460 fr.). — Ce prix *annuel* est décerné à l'auteur de l'observation astronomique la plus intéressante qui aura été faite dans le courant de l'année.

Prix Damoiseau (2000 fr.). — Ce prix est *triennal*. L'Académie met au concours, pour 1908, la question suivante : Théorie de la planète Eros basée sur toutes les observations connues.

Prix Janssen. — Ce prix *biennal*, qui consiste en une médaille d'or destinée à récompenser la découverte ou le travail faisant faire un progrès important à l'astronomie physique, sera décerné en 1908.

Prix G. de Pontécoulant (700 fr.). — Ce prix *biennal*, destiné à encourager les recherches de mécanique céleste, sera décerné dans la séance publique annuelle de 1909.

Histoire des Sciences ; Prix Binoux (2000 fr.). — Ce prix alternatif sera décerné, en 1909, à l'auteur de travaux sur l'*Histoire des Sciences*.

Prix Petit d'Ormoy (deux prix de 10,000 fr.). — L'Académie a décidé que, sur les fonds produits par le legs Petit d'Ormoy, elle décernera, *tous les deux ans*, un prix de *dix mille francs* pour les Sciences mathématiques pures ou appliquées, et un prix de *dix mille francs* pour les Sciences naturelles. Elle décernera les prix Petit d'Ormoy, s'il y a lieu, dans sa séance publique de 1909.

Prix Pierson-Perrin (5000 fr.). — Ce nouveau prix *biennal*, destiné à récompenser le Français qui aura fait la plus belle découverte physique, telle que la direction des ballons, sera décerné, pour la première fois, à la séance publique de 1909.

Prix Leconte (50,000 fr.). — Ce prix doit être donné, *en un seul prix, tous les trois ans, sans préférence de nationalité* :

1° Aux auteurs de découvertes nouvelles et capitales en mathématiques, physique, chimie, histoire naturelle, médecine;

2° Aux auteurs d'applications nouvelles de ces sciences, applications qui devront donner des résultats de beaucoup supérieurs à ceux obtenus jusque-là. — L'Académie décernera le prix Leconte, s'il y a lieu, en 1910.

Nominations et distinctions.

M. J. Adamczik, est nommé professeur ordinaire de géodésie à l'Ecole technique supérieure allemande de Prague.

M. R. Baire est nommé professeur à l'Université de Dijon.

M. L. Bianchi est nommé membre du R. Istituto Veneto.

M. W. Fiedler (Zurich), est nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Munich.

M. A.-G. Greenhill, a obtenu la *Médaille Royale*, de la Société royale de Londres, pour ses travaux mathématiques, en particulier en ce qui concerne les fonctions elliptiques et ses applications.

M. M. Lerch, professeur à l'Université de Fribourg (Suisse), est nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure tchèque à Brünn.

M. E. Segre (Turin), est nommé membre du R. Istituto Veneto.

M. H. de Vries, professeur à l'Ecole technique supérieure de Delft, est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université d'Amsterdam.

Cercle mathématique de Palerme.

Nous avons le regret d'apprendre la mort, survenue accidentellement le 1er janvier dernier, de M. S. Porcelli, le dévoué trésorier du Cercle depuis près de vingt ans. Il a été remplacé dans ces fonctions par M. E.-P. Guerra.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1906-1907 (suite).

ANGLETERRE

Oxford; *Université*. Lecture List for Hilary Term, 1907. (Course begin 21 jan.) — W. Esson : Comparison of Analytic and Synthetic methods in the Theory of Conics, 2 h.; Synthetic Theory of Cubics, 1. — Elliott : Elements of Elliptic Functions, 2; Theory of Numbers (continued). — Turner : Elementary Mathematical Astronomy, 2. — Plummer : Practical Work. — Love : Theory of the Potential, 2; Elements of the Differential and Integral Calculus, 2. — Kirkby : Higher Plane Curves, 2. — Dixon : Calculus of Finite Differences, 1. — Campbell : Differential Equations (continued), 2. — Sampson : Higher Solid Geometry (continued), 2. — Thompson : Dynamics of a Particle, 3. — Gerrans : Hydrodynamics, 2. — Haselfoot : Geometrical Optics, 2. — Russell, Determinants, 2. — Pedder : Trigonometry, 1. — Leudesdorf : Geometry (Maxima and Minima, Inversion, etc.), 2. — Jolliffe : Analytic Geometry (continued), 2. — Mc Neile : Integral Calculus, 2. — Hayes : Elementary Mechanics, 3.

FRANCE

Paris; *Collège de France* (1er semestre 1906-07). — Mécanique analytique et mécanique céleste ; M. Hadamard traitera des trajectoires réelles de la dynamique (2 h. par semaine). — Mathématiques ; M. Humbert étudiera quelques applications de l'analyse à la théorie des nombres (2 h. par semaine). — Physique générale et mathématique ; M. Brillouin étudiera la théorie de l'élasticité des solides homogènes et hétérogènes (2 h. par semaine). — Mathématiques. Fondation Claude-Antoine Peccot. Cours de M. Pierre Boutroux.

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'an 1907, publié par le Bureau des Longitudes. — 1 vol. in-16; prix : 1 fr. 50 (franco 1 fr. 85); Gauthier-Villars, Paris.

On sait que l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* apporte chaque année une foule de renseignements utiles à l'ingénieur et à l'homme de science. Ce nouveau volume contient en outre deux Notices de M. A. Bouquet de la Grye : I, *Diamètre de Vénus* ; II, *Note sur la XVe Conférence de l'Asso-*

ciation géodésique internationale; et une notice de M. H. Deslandres sur l'*Histoire des idées et des recherches sur le Soleil. Révélations récentes de l'atmosphère entière de l'astre.*

Carlo Bourlet. — **Cours abrégé de Géométrie**; *I. Géométrie plane.* — 1 vol. cart. 404 p., 2 fr. 50; Hachette & Cie, Paris.

Après les manuels de MM. Borel et Grévy, voici encore un excellent ouvrage de géométrie élémentaire rédigé d'après les nouveaux programmes français du 27 juillet 1905. L'auteur s'est inspiré de la méthode de M. Méray; on sait que celle-ci présente le grand avantage d'être plus intuitive, et, par suite, plus accessible à de jeunes intelligences; elle permet, en outre, de réaliser une union plus intime entre l'enseignement du dessin et celui de la géométrie.

Le livre commence par une introduction du dessin géométrique, destinée à donner aux élèves la notion expérimentale du parallélisme fondée sur la translation et celle des angles fondée sur la rotation. On y trouve une foule de renseignements sur les instruments du dessinateur, leur vérification et leur emploi, sur la manière d'inscrire les cotes, de préparer et d'appliquer une teinte, etc.

La géométrie proprement dite n'est abordée qu'au deuxième chapitre. L'auteur définit d'abord la translation rectiligne dont il déduit la théorie des parallèles; tout ce qui concerne la mesure des angles et la symétrie par rapport à un point est basé sur l'idée de rotation; les théorèmes relatifs aux angles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires se démontrent alors immédiatement et l'on arrive ainsi très vite au théorème de la somme des angles d'un triangle qui permet de résoudre plusieurs exercices intéressants.

Dans le troisième chapitre, l'idée de symétrie par rapport à une droite facilite bien des démonstrations (propriétés du triangle isocèle, lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés, arcs de cercle interceptés par deux parallèles, diamètre perpendiculaire à une corde, etc.). — Les cas d'égalité des triangles sont suivis immédiatement des constructions correspondantes; quant aux triangles rectangles, il ne nous semble pas nécessaire de considérer comme spécial le cas de l'hypoténuse et de l'angle aigu, puisqu'on a déjà prouvé que les deux angles aigus sont complémentaires.

Le chapitre IV traite des lignes proportionnelles et de la similitude. M. Bourlet a eu l'heureuse idée de donner la première place à l'homothétie, dont le pantographe donne des exemples concrets. La similitude se définit alors très simplement : « Si deux figures sont homothétiques et que l'on déplace l'une d'elles, elles deviennent semblables ». — En cherchant les conditions suffisantes pour que deux triangles soient semblables, on arrive aux cas de similitude. A propos des triangles rectangles, on remarque que les rapports de deux côtés quelconques ne dépendent que de la grandeur d'un angle aigu, et l'on est ainsi amené tout naturellement à la définition des lignes trigonométriques.

Viennent ensuite les polygones réguliers, un chapitre relatif aux aires, et enfin quelques explications purement graphiques pour le tracé, par points et par tangentes, de quelques courbes usuelles (coniques, conchoïdes et cissoïdes).

Signalons, en terminant, un excellent choix d'exercices à la suite de chaque chapitre.

1° Exercices *pratiques :* dessins faciles ou exercices numériques ; l'auteur donne quelques méthodes générales pour la résolution des problèmes de construction.

2° Exercices *théoriques* devant habituer les élèves à faire quelques raisonnements d'eux-mêmes.

3° Exercices *graphiques :* dessins plus compliqués à exécuter avec soin.

Nous lirons avec plaisir la deuxième partie de cet intéressant ouvrage (Géométrie dans l'espace), qui doit paraître sous peu, ainsi que le « Cours complet » où M. Bourlet reviendra sur certains théorèmes qu'il se contente pour l'instant d'admettre ou de vérifier expérimentalement.

Souhaitons que ces manuels contribuent à la diffusion des méthodes nouvelles, même au delà des frontières françaises, et que, dans l'enseignement élémentaire, l'édifice euclidien soit remplacé définitivement par un système plus simple et tout aussi cohérent.

Louis Kollros (La Chaux-de-Fonds).

Claro C. Dassen. — **Tratado elemental de Geometria Euclidea.** — Tome II. *Geometria del espacio.* — 1 vol. in-12°, XV 470 pages, 382 figures, Coni Hermanos, Buenos-Ayres, 1905.

M. Dassen a fait paraître le tome II de son traité de géométrie[1], en s'inspirant des mêmes idées qui l'avaient précédemment guidé dans la composition de son premier volume ; c'est dire qu'il a conservé le plan primitif, et par suite, rangé sous le titre de *Principes communs aux géométries non euclidiennes* toutes les propositions indépendantes du postulat des parallèles et constituant la géométrie générale. Cet ensemble forme la 1re partie du livre, pages 1-215. La 2me partie renferme l'exposé des principes spéciaux à la géométrie euclidienne. Il est évident que ce plan, mettant l'auteur dans la nécessité de fractionner les théories, peut l'exposer à des longueurs ; mais, d'autre part, il y a d'incontestables avantages à mener de front, par exemple, l'étude du plan et de ses droites avec celle de la surface sphérique et de ses grands cercles.

Voici, sommairement, le contenu des divers chapitres :

1re partie. — Chap. I. Les surfaces les plus usuelles, définitions et propriétés fondamentales : le plan, la surface conique de révolution, la sphère.

Chap. II. Perpendiculaires et obliques à un plan. Sections planes de la sphère, grands et petits cercles, plans tangents. Compas sphérique, construire le rayon d'une sphère solide. M. Dassen donne les deux constructions classiques de ce problème 1° par le petit cercle, 2° par le grand cercle. Il faudrait modifier la première pour la rendre applicable aux géométries non euclidiennes, et il suffit pour cela, P_1 étant le rabattement du pôle P du petit cercle autour de $A_1 D_1$ (page 51, fig. 46), de tracer la perpendiculaire au milieu de $A_1 P_1$. Son point de rencontre O_1 avec $P_1 D_1$ prolongé limite le segment $P_1 O_1$ égal au rayon demandé.

Chap. III. Plans perpendiculaires et obliques entre eux. Les dièdres. L'auteur a parfaitement raison d'exposer les théorèmes sur les dièdres dans l'ordre même qu'il a suivi pour les angles dans le plan. En vérité, il y a si

[1] Voir l'analyse du tome I, *E. M.*, 1905, pages 244-246.

peu de termes à changer pour aller d'une théorie à l'autre, et ce passage si simple présente tant d'avantages que l'on ne conçoit guère aujourd'hui la résistance si longtemps opposée à l'introduction des méthodes de M. Mèray dans l'enseignement.

Chap. IV. Géométrie sphérique et géométrie des étoiles de rayons. Principe de dualité. Correspondance entre les éléments constitutifs d'un système plan, ceux d'un système sphérique et ceux des étoiles de rayons. L'auteur donne, pages 88-104, un lexique des termes traduits du 1er système dans les deux autres, et le fait suivre, pages 104-142, des énoncés des théorèmes de géométrie plane également traduits ; il aurait pu quelque peu abréger, en laissant aux bons élèves le soin de faire eux-mêmes cet exercice extrêmement utile. Le chapitre se termine par la liste des théorèmes de géométrie sphérique et solide qui échappent à la loi de dualité.

Chap. V, VI, VII. Polyèdres réguliers et pyramides régulières, leurs rapports à la sphère et à la surface conique.

Chap. VIII. Dualité réciproque de points et plans dans l'espace.

IIme partie. — La seconde partie est divisée en trois livres.

Le livre I traite des droites parallèles, des droites et plans parallèles, des prismes et cylindres. M. Dassen y place ce théorème, qui rentre plutôt dans le cadre des propositions générales : Quatre points non coplanaires déterminent une surface sphérique et une seule.

Livre II. Aires et volumes des polyèdres et corps ronds.

Livre III. Polyèdres semblables.

L'ouvrage se termine par des résumés, un choix de problèmes théoriques et numériques, et quatre notes : Note 1, la définition du plan. — Note 2, la congruence et la symétrie. — Note 3, notions de topographie. Note 4, courbes et surfaces spéciales, notions très sommaires sur les courbes ellipse, hyperbole, parabole et sections coniques, sur l'hélice et les surfaces du 2me degré.

Le livre de M. Dassen, plein de mérites, est à recommander.

P. Barbarin (Bordeaux).

Dr Wilhelm Fœrster. — **Astrometrie** oder die Lehre der Ortsbestimmung im Himmelsraume zugleich als Grundlage aller Zeit-und Raummessung Erstes Heft, — 1 vol. in-8° de 160 p. ; Georg Reimer, Berlin, 1905.

On répartit ordinairement l'ensemble des sciences astronomiques en trois parties : l'Astronomie sphérique, l'Astronomie théorique et l'Astronomie physique. A ces vocables surannés, l'Auteur propose de substituer les dénominations plus précises d'Astrométrie, d'Astromécanique et d'Astrophysique. La première correspond à peu près à l'Astronomie sphérique ; elle se rapporte, d'une façon générale, à l'étude de la détermination des positions célestes. C'est cette étude que M. Fœrster se propose d'entreprendre.

Le présent fascicule comprend trois chapitres Le premier, qui n'a qu'une vingtaine de pages, renferme des notions sur la vision, la mesure des angles et la trigonométrie sphérique. Le second, encore plus court, il n'a que quelques pages, est relatif aux définitions des divers systèmes de coordonnées Enfin, le troisième, beaucoup plus étendu, est consacré aux mesures des coordonnées.

Le sujet est exposé d'une façon simple et originale. Il ne comporte pas de développements mathématiques compliqués ; aussi, est-il à la portée de tous ceux qui s'intéressent à l'Astronomie, soit pour satisfaire leur goût, soit en vue de leurs études. Aux uns et aux autres, le Traité de M. Foerster rendra les meilleurs services. M. GODEFROY (Marseille).

Dr ZOEL G. DE GALDEANO. — **Tratado de Análisis matemático**. Tomo tercero : aplicación del Cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas. — 1 vol. in-8° de 320 p., 7 Pesetas; Casañal, Zaragoza, 1905.

Le tome III du Traité d'Analyse mathématique dont M. de Galdeano poursuit la publication depuis quelques années est consacré aux applications du calcul infinitésimal à l'étude des figures planes. Nous y constatons la même méthode, à la fois simple et solide, qui distingue les autres parties de ce bon ouvrage. Nous ne pourrions, à ce propos, que répéter, une fois de plus, les éloges que nous avons précédemment adressés au savant Professeur; il serait superflu d'y insister davantage.

Le présent volume débute par des notions générales sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne. Voici, ensuite, l'ordre des matières traitées : Livre I, géométrie plane (*tangentes et normales, transformations par rayons vecteurs réciproques, coordonnées tangentielles, longueur d'un arc de courbe, contact, courbure, enveloppes, étude cinématique de quelques courbes planes*). — Livre II; singularités des courbes planes (*invariants, covariants, polaires, asymptotes, points singuliers*). — Livre III; étude systématique des figures planes (*propriétés numératives, Hessienne, formules de Plücker, transformations planes*).

Telle est la simple énumération de toutes les questions abordées par M. de Galdeano; elle suffit à faire saisir à la fois l'intérêt et la richesse du sujet traité. M. GODEFROY (Marseille).

R. GANS. — **Einführung in die Vektoranalysis** mit Anwendungen auf die mathematische Physik. — 1 vol., VIII-98 p.; 2 Mk 80; B. G. Teubner, Leipzig.

L'utilité du calcul des vecteurs dans la Mécanique et dans presque toutes les parties de la Physique mathématique est dorénavant incontestable. Dans l'électro-dynamique spécialement l'analyse vectorielle constitue la seule méthode naturelle. Pour en faciliter l'accès, M. Gans donne dans les deux premiers chapitres de son petit traité, d'après la méthode américaine-anglaise, les premières notions sur les opérations élémentaires, les opérateurs différentiels et certaines intégrales, avec quelques applications bien choisies, empruntées à la Mécanique, à la Géométrie différentielle et à la Physique. La théorie des « dyadics » est exclue. Le troisième chapitre traite des coordonnées curvilignes orthogonales, des équations de Laplace et Poisson, de la décomposition d'un vecteur en parties potentielles et solenoïdales, et des déformations mécaniques. Le quatrième chapitre enfin, consacré à l'hydrodynamique et l'électrodynamique, contient des paragraphes intéressants sur les déplacements électrolytiques, sur l'induction dans une sphère tournante, la théorie des électrons et les potentiels retardés. Comme notation, M. Gans a cru devoir adopter celle de MM. Lorentz et Sommerfeld qui est aussi celle de l'Encyclopédie des sciences mathématiques. Le petit livre de M. Gans peut rendre de très réels services à tous ceux qui veulent s'initier au calcul des vecteurs et à la théorie mathématique des électrons, qui prend actuellement une place si importante dans la théorie de l'électricité. M. Fr. DANIËLS (Fribourg, Suisse).

H. Lebesgue. — **Leçons sur les séries trigonométriques** professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de VII-128 pages ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce petit volume est un tableau de l'état actuel de la théorie des séries trigonométriques. Toujours les choses les plus importantes sont mises en lumière ou tout au moins signalées. Une introduction nous initie aux propriétés générales des fonctions de variables réelles et le premier chapitre nous montre le début historique de la théorie.

La sommation des séries étudiées est d'abord envisagée au point de vue d'Euler et de Lagrange, d'après lequel une série trigonométrique peut être considérée comme la partie réelle (ou la partie imaginaire) d'une fonction analytique représentée d'abord par une série de Taylor. Vient ensuite la méthode de Fourier. Signalons aussi une méthode récente due à M. Kneser d'un caractère absolument original et d'ailleurs de la plus haute importance, car cette même méthode s'applique aux séries formées non pas seulement de sinus et de cosinus, mais formées aussi d'intégrales d'équations linéaires du second ordre à coefficients quelconques. Et l'on sait que de telles séries jouent un grand rôle en physique mathématique, notamment dans le problème du refroidissement d'une barre hétérogène et dans d'autres du même genre résolus formellement depuis longtemps, mais inachevés cependant faute d'une démonstration suffisante de la convergence des séries obtenues. M. Lebesgue ne va pas si loin car il sortirait de son sujet, mais il a eu le mérite de développer, à propos des séries trigonométriques proprement dites, une méthode analogue à celle de M. Kneser. Il nous montre aussi, sur un exemple particulier fourni par l'équation de Laplace, que les développements en séries de polynômes des fonctions de variables réelles sont liés aux équations aux dérivées partielles à solutions analytiques.

Le chapitre III est, à mon avis, le plus élevé et le plus important. Il traite de la convergence en remplaçant d'abord la série trigonométrique par une intégrale définie bien connue, mais il ajoute beaucoup aux considérations élémentaires habituelles.

Il est assez malaisé de dire au premier abord quels sont les cas les plus généraux dans lesquels le procédé est valable. Pendant longtemps on s'était contenté des conditions dites de Dirichlet. Il y en a d'autres dues à MM. Dini, Lipschitz, Jordan. Et si l'on étudie l'intégrale définie en question indépendamment de son origine, elle donne des résultats qui, s'ils ne se rapportent plus immédiatement à des séries trigonométriques, n'en sont pas moins fort intéressants. C'est ainsi que M. Lebesgue est amené à parler des sommes de Gauss.

Signalons aussi l'étude des séries trigonométriques divergentes. Ces séries peuvent être sommables par des procédés remarquables. Il y a celui de Poisson qui transforme la série trigonométrique en une fonction harmonique et celui de M. Tejér qui n'est autre chose que la méthode de sommation de M. Borel convenablement appliquée.

Quant aux opérations sur les séries de Fourier, il est visible que M. Lebesgue a été un peu trahi par le sujet. Le plus clair est qu'on ne sait pas grand'chose, mais l'auteur fait des efforts pour montrer les difficultés du sujet et la nature des problèmes qui se posent.

Enfin le dernier chapitre intitulé : « Séries trigonométriques quelconques », revient sur la délicate question de savoir quelles peuvent être les séries trigonométriques représentant des fonctions données. C'est surtout une belle analyse des idées de Riemann et des recherches qu'elles ont entraînées. A ce propos, ajoutons que M. Lebesgue a fort bien montré les nombreuses analogies que les questions traitées dans ce nouvel ouvrage ont avec celles traitées dans celui qui a trait à l'intégration, et que j'ai déjà analysé dans ce Journal. La grande figure de Riemann domine ces œuvres.

A. Buhl (Montpellier).

M. Petrovitch. — **La Mécanique des Phénomènes fondée sur les Analogies.** (Collection Scientia.) — 1 vol. 95 p., 2 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Dans le *Discours préliminaire* aux *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (Paris, 1859), Lamé, après avoir fait ressortir les analogies entre la théorie du potentiel, l'hydrostatique et la théorie de la chaleur, analogies qui reposent sur des propriétés communes et sur l'identité des formules analytiques, a écrit que ce rapprochement « fait entrevoir l'avénement futur d'une science rationnelle unique, embrassant, par les mêmes formules, les trois branches des mathématiques appliquées que je viens de définir, et, en outre, la théorie des ondes sonores et celle des ondes lumineuses, qui ne sont autres que la théorie générale de l'élasticité dans l'état dynamique ».

Le petit livre de M. Petrovitch, qui fait partie de l'intéressante collection *Scientia*, est un premier pas vers la constitution de cette science, de cette mécanique générale, que Lamé entrevoyait.

L'analyse d'une analogie entre des phénomènes divers fait ressortir d'elle-même la raison intime et commune à toutes les analogies ; celle-ci réside dans l'identité des rôles joués par certains éléments dans les phénomènes analogues. Alors M. Petrovitch se demande avant tout s'il est possible de schématiser ces rôles, c'est-à-dire de les dégager en quelque sorte de ce qui les rattache spécialement à telle ou telle espèce de phénomènes et de les présenter sous une forme assez simple et assez générale pour qu'ils puissent s'adapter à tous les phénomènes embrassés par une même analogie ; et après cela si on peut aussi schématiser les phénomènes d'un même groupe.

C'est à ces questions, très clairement posées, que M. Petrovitch a consacré son petit ouvrage, plein d'érudition et qu'on lit avec beaucoup de plaisir.

Le livre comprend quatre chapitres ; dans le premier, l'auteur a fait une soigneuse et très intéressante étude des analogies déjà connues, et auxquelles il faut ajouter maintenant celle entre les problèmes d'équilibre des corps élastiques à connexion multiple et les mouvements d'un fluide à potentiel polidrome et qui a fait l'objet des recherches de M. Volterra. L'auteur a toujours soin de faire bien saisir la correspondance entre les éléments correspondants des phénomènes d'une même analogie.

Dans le chapitre II (*Esquisse d'une mécanique générale des causes et des effets*) est exposée la partie nouvelle et originale du livre. L'auteur considère les systèmes formés par des *objets ;* chaque objet est défini par un certain nombre de variables qui déterminent à chaque instant sa position, sa vitesse, ses longueurs d'onde, les diverses radiations simples, etc. Les *causes* directes ou indirectes qui interviennent dans la production d'un phénomène sont, au fond, représentées par des vecteurs ; et la généralisation des principes fondamentaux de la dynamique permet de traduire en équations les relations entre les causes directes et les objets. On comprend que l'on peut, par conséquent, généraliser aussi quelques-uns des théorèmes de la mécanique : principe de l'impulsion, de D'Alembert, intégrale des forces vives, etc.

Le chapitre III s'occupe des schémas généraux représentant l'action des causes. L'auteur examine beaucoup de cas particuliers correspondant à l'action d'une cause d'intensité constante, ou à variation indépendante ; à l'action simultanée de deux causes particulières, etc. ; et il donne toujours de nombreux exemples de phénomènes où ces actions s'pppliquent.

Enfin le chapitre IV contient un aperçu, un peu vague il est vrai, de l'application de la mécanique générale aux cas où la nature des causes est exactement connue, comme dans les phénomènes purement mécaniques, ou bien n'est pas connue. En conclusion, l'auteur veut faire ressortir que certaines particularités de l'allure d'un phénomène peuvent s'expliquer par des mécanismes communs à un grand nombre de phénomènes divers — ce qui était connu depuis longtemps — et ces mécanismes seraient fournis par les schémas de la théorie ébauchée par l'auteur.

R. Marcolongo (Messine).

Salvatore Pincherle. — **Lezioni di Algebra complementare ; Analisi Algebrica**, 2me fascicule (p. 129-362). — Zanichelli, Bologna.

Dans ce deuxième et dernier fascicule, M. le professeur Pincherle étudie avec grand soin, avec la vraie rigueur, celle qui est sobre, les *séries*, puis, ce que l'on ne fait pas toujours dans les livres élémentaires, les *produits infinis* et les *fractions continues* arithmétiques.

Puis la notion générale de fonction est introduite : correspondance de deux ensembles. Viennent alors les propriétés fondamentales des fonctions *continues*, puis la théorie de la *dérivée* et ses applications à la variation des fonctions.

Les fonctions rationnelles sont étudiées avec soin, puis les séries entières. Les propriétés de e^x résultent de l'étude de la série $\sum \frac{x^n}{12\ldots n}$.

La convergence de la série du binôme est étudiée, pour $|x| < 1$, quel que soit l'exposant m de $(1+x)^m$.

Enfin la fonction *logarithme* est présentée tant pour la variable réelle que pour la variable complexe, ce qui permet, on le sait, de voir quel est le logarithme d'un nombre *réel négatif*.

En résumé, par sa limpidité, son élégance, le livre de M. Pincherle est une parfaite introduction à un cours d'Analyse savante, et l'on sera heureux de voir paraître le volume annoncé sur la Théorie des équations.

R. d'Adhémar (Lille).

René de Saussure. — **Théorie géométrique du mouvement des corps**. Fin de la 1re partie et commencement de la 2me partie : *La Géométrie des feuillets*. — 1 vol. 109 pages, avec deux tables. Librairie Kündig, Genève.

Dans le numéro de septembre 1905 de l'*Enseign. mathém.* nous avons fait une courte analyse d'un intéressant mémoire de M. de Saussure. Les *Archives des sciences physiques et naturelles* de Genève (tom. XXI, 1906) contiennent la suite des recherches de ce géomètre.

La symétrie par rapport à un point ou à un plan a conduit l'auteur aux notions générales des translations et des rotations à plusieurs paramètres. Dans la fin de la première partie du nouveau mémoire il s'occupe de la *torsion* ou de la symétrie par rapport à une droite. Les mouvements de torsion sont engendrés par un corps qui se déplace en restant symétrique par rapport à une série de droites ; et suivant que la droite mobile décrit une surface réglée, une congruence, un complexe ou enfin tout l'espace réglé, le mouvement de torsion est à 1, 2, 3, 4 paramètres. La torsion à un paramètre est celle qui définit, comme on sait, le mouvement à un paramètre le plus général d'un corps solide.

Mais, avant tout, l'auteur fait une digression très intéressante sur l'application de la géométrie des complexes linéaires à l'étude des mouvements infiniment petits d'un corps solide qui possède n degrés de liberté (§ 1). Il réussit à présenter d'une manière tout à fait géométrique et très heureuse bien des résultats de la théorie de R. S. Ball.

Il aborde ensuite l'étude des mouvements de torsion ; mais il n'est pas possible de résumer tous les résultats auxquels il arrive, en employant toujours la même méthode claire et élémentaire. Citons pourtant la conclusion plus importante qui découle des recherches de l'auteur, c'est-à-dire que les translations, les rotations et les torsions ne sont pas des mouvements assez généraux pour servir de type aux déplacements finis d'un corps solide avec plusieurs degrés de liberté. Ainsi, par exemple, la torsion à quatre paramètres n'est pas le mouvement le plus général d'un corps solide qui a quatre degrés de liberté. On voit déjà donc que les mouvements de torsion ne peuvent pas être pris comme base d'une théorie générale des mouvements finis à plusieurs paramètres.

L'exposition complète de ces mouvements exige donc quelque autre chose que M. de Saussure expose dans la seconde partie de son travail, qui a aussi le but de développer dans l'espace à trois dimensions la théorie des éléments fluides dans le plan. L'auteur a nommé cette seconde partie : *La géométrie des feuillets ;* et il en a publié seulement les deux premiers chapitres. Nous comptons la résumer et la faire connaître aux lecteurs de cette *Revue* dès que l'auteur aura publié la suite de ses recherches.

Pour terminer, nous croyons devoir faire observer que la théorie hydrocinétique des éléments fluides dans un plan a déjà eu une application ; car l'auteur a appliqué sa méthode à la construction des lignes de flux de l'atmosphère pour les directions du vent observées à la même date dans les principales villes des Etats-Unis, et il a obtenu des résultats qui correspondent aux observations.

M. Jean Bertrand, dans un article sur l'*Interpolation en Météorographie* (Bulletin de la Société belge d'Astronomie, nos 7-8, 1905), où il a même résumé les recherches de M. de Saussure, vient de faire des applications nouvelles.

Les recherches de M. de Saussure n'intéressent donc pas seulement les géomètres ; nous souhaitons les voir bientôt achevées et publiées.

R. Marcolongo (Messine).

P.-H. Schoute. — **Mehrdimensionale Geometrie**. Zweiter Teil : *Die Polytope* (T. XXXVI de la Collection Schubert). — 1 vol. relié, in-8°, IX-326 p., avec 90 fig. et 123 exercices ; J. G. Göschen, Leipzig, 1905.

Le second volume du savant professeur de Groningue est la suite naturelle et attendue de son premier ouvrage : *Die linearen Raume*, déjà publié sur la géométrie à n dimensions[1]. On y trouve les mêmes qualités caractéristiques de simplicité et de clarté, et le souci constant de mettre en lumière les points fondamentaux et essentiels par des exemples aussi nombreux que bien choisis, les uns résolus, les autres proposés comme exercices avec une indication relative à leur résultat.

---

[1] Voir l'analyse de cet ouvrage *E. M.*, 1903, pages 149-150.

Voici les matières renfermées dans les chapitres de l'ouvrage

I^re partie. Introduction topologique — Notions fondamentales; le théorème d'Euler.

2^me partie. Relations métriques — Congruence et similitude; considérations sur les volumes.

3^me partie. Polytopes réguliers — Polygones réguliers; Polyèdres réguliers; cellules régulières; Polytopes réguliers de dimensions supérieures.

4^me partie. Les Polytopes ronds. — Les espaces sphériques; les espaces cylindriques et coniques; les espaces généraux de révolution — Exercices.

L'ouvrage de M. Schoute est, croyons-nous, le premier traité complet et spécial écrit sur la géométrie à n dimensions. Il mérite d'être répandu et traduit.

P. Barbarin (Bordeaux).

H. Schubert. — **Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis**, t. III. — 1 vol. in-16°, 250 p. 4 Mk.; G.-J. Göschen, Leipzig.

Ce volume, comme les deux précédents, traite des questions les plus variées. Des déterminations de centres de gravité précèdent quelques propriétés élémentaires de la parabole. Viennent quelques remarques relatives à la loi de Descartes, sur les indices de réfraction; puis des recherches sur le volume de certains corps. Suit un exposé des principales formules de la trigonométrie sphérique. Celui-ci sert de point de départ au dernier chapitre, consacré à des triangles sphériques héroniques, c'est-à-dire dont les cosinus et sinus des angles et des côtés sont tous quantités rationnelles.

Si d'un bout à l'autre du recueil aucun excès d'originalité n'est à signaler, l'auteur n'en a pas moins fait œuvre utile. Son livre rendra service à ceux qui s'occupent d'enseignement, à ceux qui désirent avoir à disposition des sujets faciles à traiter, constituant un tout en eux-mêmes.

G. Dumas (Zurich).

G. Vivanti. — **Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen**. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers, deutsch herausgegeben von A. Gutzmer. — 1 vol. cart., 512 p. gr. in-8°; 12 Mk. Leipzig, B.-G. Teubner.

On a quelque difficulté à se représenter cet ouvrage comme traduit de l'italien. Si l'on ne regardait pas le frontispice et le nom du véritable auteur on se croirait dans un fort beau monument de l'école allemande, monument élevé dans l'ombre gigantesque que projette toujours Weierstrass, et pour la plus grande gloire de cet illustre géomètre.

Des méthodes de Cauchy rien ou à peu près. Une fonction analytique est définie par un élément taylorien. Il est tout à fait en dehors de ma pensée de donner à cette constatation la forme d'une critique. L'auteur n'a point voulu davantage envisager le point de vue de Riemann et lier les fonctions analytiques à l'équation de Laplace. Il importe simplement d'avertir le futur lecteur de ce qu'il ne saurait trouver dans cet ouvrage et nous pourrons ensuite indiquer plus librement combien il est admirablement ordonné et rédigé dans les limites du plan d'abord tracé.

On n'y peut guère passer tout en revue, tant il y a de choses, tant il est au courant des recherches les plus récentes, et tant la bibliographie y est développée. Je me contenterai de mentionner quelques points particulièrement saillants.

Les premières pages sont consacrées à la théorie des ensembles, aux fonctions des points d'un certain domaine, aux séries de puissances.

Des développements très originaux et peu connus sont donnés sur la valeur moyenne d'une fonction. Il faut entendre par là le résultat obtenu en donnant à la variable d'une fonction analytique des valeurs prises en des points qui divisent une circonférence en 2^n parties égales, en faisant la somme de ces valeurs, en la divisant par 2^n et en passant à la limite pour n croissant indéfiniment. Au fond cela se ramènerait facilement à une certaine intégrale définie prise le long de la circonférence et, d'ailleurs encore, ce théorème de la moyenne intervient de façon bien connue dans la théorie des fonctions harmoniques, mais ce qui me fait précisément dire qu'il y a là quelque chose d'intéressant et qui paraîtra nouveau à beaucoup, c'est que les notions précédentes ne sont pas invoquées. Signalons l'étude de la dérivation et de l'intégration des séries entières, la définition des points singuliers, le théorème de Laurent, les séries de fonctions rationnelles désignées sous le nom d'*expressions arithmétiques*. Après quoi nous passons à l'étude proprement dite des fonctions analytiques, classées d'après la nature de leurs points singuliers. L'auteur en fait le tableau suivant :

A. Fonctions sans singularités.

B. Fonctions qui n'ont que des pôles.
   1. Un seul pôle. *a)* à l'infini. *b)* à distance finie.
   2. Fonction avec un nombre fini de pôles.
   3. » » » » infini » »

C. Fonction avec des singularités essentielles.
   1. Une seule singularité. *a)* à l'infini. *b)* à distance finie.
   2. Un nombre fini de points singuliers.
   3. Un nombre infini de points singuliers.
      a) Une infinité de pôles et un point essentiel.
      b) Une infinité de pôles et un nombre fini de points essentiels.
      c) Un nombre infini de points singuliers arbitraires.

Les A sont des constantes, les B 1*a* des polynômes, etc..., mais, une fois le tableau débarrassé des résultats évidents, toutes les autres classes de fonctions sont étudiées avec la plus méthodique et la plus grande clarté.

Les C 1 *a* sont des fonctions entières. Leur étude si importante présente, en outre, la plus grande élégance et de nombreux exemples à l'appui des théorèmes. La décomposition en facteurs est étudiée pour sin x et σx avec la méthode de Weierstrass ingénieusement complétée de façon à ne pas laisser subsister le facteur que le créateur de la théorie laissait indéterminé.

Dans une troisième et dernière partie du livre, qui, à vrai dire, en forme à peu près la seconde moitié, sont exposées les recherches récentes sur les sujets étudiés auparavant de façon plus classique.

C'est là que le travail d'analyse deviendrait prodigieusement difficile puisqu'il faudrait parler de plusieurs centaines de mémoires et de notes dont M. Vivanti a réussi à tirer un tout homogène.

Je n'essaierai pas une telle description. Je me bornerai à dire qu'il s'agit d'abord des nouvelles recherches sur les fonctions entières, du lemme de M. Picard et de ses généralisations et des tentatives nombreuses faites pour étendre à des fonctions non entières certaines propriétés des fonctions entières (fonction quasi-entières, etc.).

Signalons aussi les fonctions à espaces lacunaires dont un type intéressant est dû à M. Poincaré, les séries divergentes, le prolongement analytique, et la possibilité de comparer deux fonctions analytiques de façon à se renseigner sur les singularités de l'une connaissant celles de l'autre.

Admirable ouvrage au fond pour se mettre rapidement au courant des derniers résultats acquis à la science. La rédaction n'en est pas alourdie par l'emploi exagéré d'inégalités ni par le désir de remplacer l'évident par le rigoureux

J'insiste encore sur la richesse de la bibliographie ; 672 mémoires sont cités et tout est merveilleusement arrangé pour la commodité des recherches.

Remercions M. Vivanti d'avoir eu tant de science et de patience et M. Gutzmer d'avoir traduit si bien et si à propos.

A. Buhl (Montpellier).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Sommaires des principaux périodiques :

American Journal of Mathematics, edited by F. Morley. Vol. XXVIII, 1906; nos 3 et 4; The Johns Hopkins Press, Baltimore.

Edw. Kasner : The Geometry of differential Elements of second Order with Respect to Group of all donit Transformations. — Cordevio : Gyroscopes and Cyclones. — Manning : On the Primitive Groups of Class Ten. — Virgil Snyder : On certain Unicursal Troisted Curves. — H. Livingston Coar : Functions of three Real Independent variables. — Coble : An invariant Condition for certain Automorphic Algebraic Forms. — Kolosoff : On some Cases of Motion of a solid in Infinite Liquid. — V. Ragsdale : On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — 30me année 1905-1906. Louvain, 1906.

3me et 4me fascicules. — J. Neuberg : Sur les lieux discontinus ou suites itératives de points. — R. P. H. Bosmans : Le fragment du commentaire d'Adrien Romain, sur l'Algèbre de Mahumed Ben Musa El-Chowarezmi. — Ch. J. de la Vallée Poussin : 1o Continuité des intégrales des équations différentielles contenant un paramètre. — 2o Sur les équations aux différentielles totales. — J. Delemer : Etude sur la vibration des cordes de piano. — de Sparre : Sur la stabilité du mouvement du cerceau.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 303, 1906 série 5; Rendiconti, vol. XV, Ier semestre 1906 ; Rome.

L, Orlando : Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier. — E. Almansi : Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito. — C. Arzela : 1o Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali. — 2o Sulle equazioni a derivate parziali. — E. Bortolotti : 1o Sopra una ricerca di limite ; — 2o Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insierni lineari. — G. Castelnuovo : Sulle serie Algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica. — H. Lebesgue : Sur les fonctions dérivées. — E. Lebon : Théorie et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre. — B. Levi : Ricerche sulle funzioni derivate. — N. Nielsen : 1° Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym. — 2° Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques. — L. Orlando : Sull' integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali. — M. Pannelli : 1° Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle transformazioni birazionali. — E. Pascal : Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto. — G. Peano : Sulle differenze finite. — S. Pincherle : Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date. — V. Volterra : 1° Nuovi Studi sulle distorsioni dei solidi elastici. — 2° Sull' applicatione del metodo delle immagini alle equazioni del tipo iperbolico. — T. Boggio : Sulla deformazione di un ellissoide elastico. — G. Lauricella : 1° Sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei corpi elastrici isotropi. — 2° Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sulla integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei solidi elastici indefiniti. — 3° Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell' elettrostatica e sull' integrazione delle equazioni dell' elasticità. — R. Marcolongo : Sugl' integrali delle equazioni dell'elettrodinamica. — Pavanini : Sul problema dei due corpi nell' ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — 1906, 2e semestre, T. CXLIII. — Gauthier-Villars, Paris.

2 juillet 1906. — S. Carrus : Feuilles de Lamé à trajectoires planes, les plans passant par un point fixe. — Ed. Maillet : Sur la classification des irrationnelles. — Alliaume : Influence de la tension superficielle sur la propagation des ondes parallèles à la surface d'une lame liquide.

16 juillet. — A. Buhl : Sur le caractère arbitraire des développements des solutions, même uniques, des problèmes de la Physique mathématique, et sur de nouvelles propriétés des séries trigonométriques généralisées.

23 juillet... — E. Wælsch : Extension de l'Algèbre vectorielle à l'aide de la théorie des formes binaires avec des applications à la théorie de l'élasticité. — Pétrovitsch : Sur une classe de séries entières.

30 juillet, 6 août. — (Pas de mathématiques).

13 août. — P. Duhem : Sur les deux chaleurs spécifiques d'un milieu élastique faiblement déformé ; formules fondamentales.

3 sept. — G. Remoundos : Sur la croissance des fonctions multiformes.

13 sept. — A. Buhl : Application du procédé de sommation de M. E. Borel aux séries trigonométriques généralisées.

10 octobre. — C. Störmer : Sur les trajectoires périodiques des corpuscules électriques dans l'espace, sous l'influence du magnétisme terrestre, avec application aux perturbations magnétiques.

8 et 15 octobre. — H. A. Zeuthen : Le principe de correspondance pour une surface algébrique. — Rothé : Sur la transformation de M. Darboux et l'équation fondamentale des surfaces isothermiques. — Fatou : Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. — Lœwy : Méthode nouvelle et rapide pour la détermination des erreurs de division d'un cercle méridien.

22 octobre. — L. Raffy : Surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle et surfaces isothermiques de première classe. — R. Rothé : Sur les

surfaces isothermiques. — Riquier : Sur les conditions d'intégrabilité complète de certains systèmes différentiels.

29 octobre. — L. Bianchi : Sur la déformation des quadriques. — J. Clairin : Sur les transformations de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. — E. Traynard : Sur le système d'intégrales de différentielles totales appartenant à une surface hyperelliptique.

5 novembre. — L. Autonne : Sur certains groupes linéaires. — Korn : Sur les potentiels d'un volume attirant dont la densité satisfait à l'équation de Laplace.

12 novembre. — Fr. Riesz : Sur les ensembles de fonctions. — Gambier : Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.

19 novembre. — S. Lattès : Sur les courbes qui se reproduisent périodiquement par une transformation (X, Y, x, y, y'). — L. Remy : Sur une famille de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

26 novembre. — E. Picard : Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par les valeurs des dérivées normales sur un contour. — Clairin : Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent un groupe d'ordre pair de transformations de contact. — Le Roux : Sur l'intégration des équations différentielles.

3 décembre. — L. Raffy : Remarque sur la recherche des surfaces isothermiques. — E. Maillet : Sur certains nombres transcendants. — G. Hurwitz : Sur les points critiques des fonctions inverses. — P. Cousin : Sur les fonctions périodiques.

10 décembre. — Félix Bernstein : Sur la théorie des ensembles. — Ern. Schmidt : Sur la puissance des systèmes orthogonaux des fonctions continues. — L. Fejér : Sur le calcul des limites. — Révereau : Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires.

17 décembre. — Séance annuelle : Prix décernés par l'Académie en 1906 (v. p. 68).

24 décembre. — Picard : Sur la détermination des intégrales des équations du type elliptique par certaines conditions aux limites. — Painlevé : Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. — Hadamard : Sur une méthode de calcul des variations. — Clairin : Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent un groupe d'ordre impair de transformations de contact. — Lecornu : Sur l'extinction du frottement. — Belot : Formule applicable aux durées de rotation directe des planètes et du soleil.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band 131. Georg Reimer, Berlin.

Bauer : Ueber die arithmetische Reihe. — Bohl : Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie. — Busche : Ueber Gitterpunkte in der Ebene. — Ermakoff : Équations différentielles du premier ordre ayant des multiplicateurs de la forme $\prod_{1}^{n}(y - u_i)^{a_i}$. — Farkas : Beiträge zu den Grundlagen der analyt. Mechanik. — Fejér : Ueber Stabilität u. Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel. — Gundelfinger : Briefe von Gauss an Joh. v. Müller. — Horn : Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage. — J. Knoblauch : Die Biegungsinvarianten u. Kovarianten von gegebener Ordnung. — Landsberg : Bemerkungen zur Theorie der algebraichen Kurven. — Mandl : Ueber die Zerlegung von Funktionen mehrerer Variabeln in irreduktible Faktoren. — Mertens : Ueber zyklische Gleichungen. — Rados : Die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung. — Schlesinger : Zur Theorie der homogenen linearen Differentialsysteme. — Schwering : Anwendung der ellipt. Funktionen auf eine geometrische Aufgabe. — Stéphanos : Sur des forces donnant lieu à des trajectoires coniques. — Teixeira : Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus. — Thomé : Ueber simultane lineare Differentialgleichungen.

Monatshefte f. Mathematik u. Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. XVII. Jahrg. 1906. Eisenstein, Wien.

Berger, A. : Ueber die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde. — Biermann, O. : Ueber gewisse lineare Transformazionen — Carda, K. : 1° Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung. — 2° Ueber eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene. — Eberhard, V. : Ein Beitrag zur Tetraederlehre. — Ernst, P. : Ueber das Küppersche Konoïd. — Gmeiner, J.-A. : Otto Stolz, Nachruf. — Grunwald, J. : Ueber duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie. — Hahn, H. : 1° Ueber einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung. — 2° Ueber das allgemeineP roblem der Variationsrechnung. — Klug, L. : Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung. — Lerch, M. : Ueber einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. — Mack, K. : Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche. — Meder, A. : Ueber die Determinante von Wronski. — Nielson, N. : 1° Ueber bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Fonktion. — 2° Notiz über die Kugelfonktionen. — 3° Notiz über eine allgemeine Integralformel. — Tauber, A. : Ueber die unvollständigen Gammafunktionen. — Waelsch, E. : Ueber mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie. — Zindler, K. : Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. 4e série. T. VI. Gauthier-Villars, Paris.

Janvier-février-mars 1906. — G. Fontené : Sur une surface de troisième ordre qui est l'analogie du cercle des neuf points. — R. Bricard : Sur la Géométrie de direction. — J.-J. Chapelon : Sur la surface lieu des centres de courbure des courbes d'une surface passant par un point de cette surface. — L. Dunoyer : Sur les courbures de poursuite d'un cercle. — A. Gérardin : Contribution à l'étude de l'équation $1.2.3.4\ldots z+1=y^2$. — A. Mannheim : Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit. — A. Mannheim : Note à propos de la question 1960. — H. Laurent : Sur les substitutions linéaires qui laissent une forme quadratique invariante. — E. Guitton : Démonstration de la formule $\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. — Pernot et Moisson : Etude des points à l'infini d'une courbe algébrique. — H. Laurent : Sur un théorème de Chasles et d'Abel. — Ph. du Plessis : Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1906. Composition de Géométrie analytique et mécanique. — Ch. Méray : Construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points ou neuf plans tangents. — H. Padé : Sur la propriété de concavité de l'herpolhodie de Ponsot. — S. Lattès : Sur les courbes invariantes par polaires réciproques. — Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1906. Composition d'Algèbre et Trigonométrie. — F.-Gomes Teixeira : Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coïncident avec leurs cissoïdales. — Emile Weber : Sur quelques cercles du plan d'un triangle. — Stuyvaert : Un théorème sur la collinéation et la réciprocité. — H. Laurent : Sur une généralisation de la transformation birationnelle. — Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole Normale supérieure en 1906. Première composition de mathématiques. Sciences I. — Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole Normale supérieure en 1906. Deuxième composition de mathématiques. Sciences I et II. — Paul Lévy : Sur la densité des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée. — A. Vacquant : Note sur l'hyperbole équilatère inverse d'une droite OS par rapport à un triangle ABC et sur le triangle pédal du point S. — J. Juhel-Rénoy : Sur les centres de gravité. — Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1906). — C. Clapier : Solution de la question de Mathématiques élémentaires. — Certificats de calcul différentiel et intégral. — Certificats de mathématiques préparatoires à l'étude des Sciences physiques.

Prace Matematyczano-Fizyczne, przez S. Dicksteina. T. XVII, 1906.

T. Levi-Civita : Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires. — K. Zorawski : Ueber Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen. — W. Sierpinski : Sur un problème du calcul des fonctions asymtotiques. — G.-A. Miller : Groups generated by two operators which transform each other into the same power. — A. Przeborski : Sur les intégrales non analytiques des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. — G. Doborzinski : Ueber die van der Waals'che Hypothese der übereinstimmenden Zustände. — G. Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. — A. Przeborski : Sur les intégrales non analytiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 4, fasc. 1-4.

W. Burnside : On the Arithmetical Nature of the Coefficients in a Group of Linear Substitutions of Finite Order (Second Paper). — G.-H. Hardy : The Continuum and the Second Number Class. — A.-C. Dixon : On « Well-ordered » Aggregates. — E.-W. Hobson : On the Arithmetic Continuum. — B. Russell : On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types. — W. Burnside : On the Hessian Configuration and its connection with the Group of 360 Plane Collineations. — L.-J. Rogers : On the Representation of certain Asymptotic Series as Convergent Continued Fractions. — H. Bateman : The Theory of Integral Equations. — H.-F. Baker : On the Monogeneity of a Function defined by an Algebraic Equation. — J. Brill : On the Expression of the so-called Biquaternions and Triquaternions with the aid of Quaternary Matrices. — H.-F. Baker : Remark on the Eisenstein-Sylvester Extension of Fermat's Theorem, — E.-W. Hobson : On absolutely Convergent Improper Double Integrals. — A.-C. Dixon and T. Stuart : On the Reduction of the Ternary Quintic and Septimic to their Canonical Forms. — L.-J. Rogers : On Function Sum Theorems connected with the Series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. — Horace LAMB: On Sommerfeld's Diffraction Problem: and on Reflection by a Parabolic Mirror. — T.-J.-I'A. BROMWICH: Investigations on Series of Zonal Harmonics. — A.-C. DIXON: The Canonical Forms of the Ternary Sextic and Quaternary Quartic. — E.-B. ELLIOTT: On perpetuants and Contra-Perpetuants. — G.-H. HARDY: Some Theorems connected with Abel's Theorem on the Continuity of Power Series. — P.-E.-B. JOURDAIN: On the Question of the Existence of Transfinite Numbers. — Rev. E.-W. BARNES: On certain Functions defined by Taylor's Series of Finite Radius of Convergence. — A.-C. DIXON: On a Question in the Theory of Aggregates. — W.-F. SHEPPARD: On the Accuracy of Interpolation by Finite Differences.

2. Livres nouveaux :

GABR. ARNOUX. — **Arithmétique graphique** Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. — 1 vol. gr. in-8°, xx-225 p.; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

E. BLASCHKE. — **Vorlesungen über mathematische Statistik.** (Die Lehre von den statistischen Masszahlen), mit 17 Fig. u. 5 Tafeln. — 1 vol. relié in-8°, 268 p.; 7 Mk. 40: B.-G. Teubner, Leipzig.

ALB. CONTI. — **Elementi di Aritmetica razionale** ad uso degli allievi delle Scuole Normali. Terza edizione. — 1 vol. in-16, 286 p. 2 L.; Zanichelli, Bologne.

DURÈGE U. MAURER. — **Elemente der Theorie der Funktionen** einer komplexen Veränderlichen Grösse. — 1 vol. relié, in-8°, 397 p.: 10 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

J. HEMPEL. — **Schattenkonstruktionen,** für den Gebrauch an Baugewerkschulen, Gewerbschulen sowie zum Selbstunterricht. Mit 51 Textfiguren u. 20 Tafeln praktischer Beispiele in Lichtdruck. — 1 vol. cart. in-4°, 60 p.: 5 Mk.; B.-G. Teubner. Leipzig.

ALOIS LANNER. — **Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik** im Bereiche der Mittelschule.— 1 vol. in-8°, 192 p.; 3 Mk.; O. Salle, Berlin.

ERNEST LEBON. — **Géométrie cotée et Géométrie descriptive,** ouvrage conforme aux programmes du 27 juillet 1905 pour l'enseignement secondaire. — 1 vol. in-8°, 190 p.; 3 fr.; Delalain frères, Paris.

EDM. MAILLET. — **Introduction à la Théorie des nombres transcendants** et à des propriétés arithmétiques des fonctions. — 1 vol. gr. in-8°, v-275 p.: 12 fr.; Gauthier-Villars; Paris.

H. MANDART — **Cours de Trigonométrie rectiligne et sphérique** à l'usage de l'enseignement moyen. — 1 vol. gr. in-8°, 194 p.; 3 fr.; Wesmall-Charlier, Namur.

FR. REIDT. — **Anleitung zum mathematischen Unterricht.** Zweite Auflage. revidiert u. mit Anmerkungen versehen von H. SCHOTTEN. — 1 vol. in-8°, 296 pages; Grote, Berlin.

SERRET. — **Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung.** Nach Axel Harnacks Uebersetzung, Dritte Aufl., neu bearbeitet von GEORG SCHEFFERS. *I Differentialrechnung.* 1 vol. relié, in-8°, 624 p.; 13 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

P. ZÜHLKE. — **Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen** bei ungünstigen Lageverhältnissen. — 1 broch. cart. in-8°, 46 p.; 1 Mk.; B.-G. Teubner.

LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS DE PARIS

Extrait[1] *de la leçon d'ouverture de* M. Carlo Bourlet.

La Géométrie, telle que l'ont forgée les mathématiciens pendant de longs siècles depuis Euclide, est une Géométrie synthétique d'une élégante logique, mais factice, comme toute science qui procède par synthèse. Les démonstrations y ont cette forme inattendue et quelque peu mystérieuse qui, sous prétexte de rigueur, cache la nature des choses. La genèse des idées a disparu pour faire place à un lien logique que rien ne semble imposer ; et l'étudiant ne trouve dans cette science aucune méthode générale qui puisse lui servir de guide, soit pour classer les notions acquises, soit pour découvrir à son tour quelques propriétés nouvelles.

Les beaux travaux de Poncelet et de Chasles sur la projection, l'homologie, l'homographie, avaient jeté une lumière nouvelle sur la froide Géométrie d'Euclide. Ils avaient doté la science d'un des premiers exemples de ces transformations générales des figures qui, actuellement, servent de base à notre Géométrie supérieure moderne.

Mais, à étudier de plus près ces transformations, on s'aperçut bientôt qu'il y en avait d'autres beaucoup plus intuitives, plus élémentaires, dont nous nous servions d'ailleurs aveuglément, et qui étaient à la base de la géométrie : ce sont les déplacements d'une figure invariable et, parmi eux, les plus simples, la translation et la rotation.

---

[1] M. Bourlet a bien voulu nous autoriser à reproduire cet extrait de sa leçon d'ouverture comme professeur titulaire de la chaire de géométrie descriptive à laquelle il a été nommé en remplacement de M. Rouché. V. *Rev. Scient.* du 22 déc. 1906.

L'existence même de la Géométrie implique la notion de mouvement. S'il pouvait exister un être pensant, condamné à une immobilité absolue au milieu d'un Univers également rigide et immuable, un tel être ne pourrait, quelque puissante que soit sa force de pensée, imaginer une Géométrie quelconque, car il serait dans l'impossibilité absolue de comparer deux longueurs. La Géométrie est la science de la comparaison des figures et cette comparaison n'est possible qu'à condition que nous puissions déplacer les objets sur lesquels nous raisonnons pour en identifier les dimensions communes. Puisque donc la possibilité du déplacement est la condition essentielle d'existence de la Géométrie, il semble naturel, je dirais même *nécessaire*, de faire de ce déplacement l'instrument fondamental du raisonnement géométrique.

En faisant de l'étude des déplacements élémentaires le fondement de la Géométrie moderne, en nous servant systématiquement de cet instrument primordial, nous construirons une science non seulement plus réelle, plus tangible, mais encore plus vaste et plus en harmonie avec les grandes découvertes des mathématiciens du siècle dernier. Après avoir, à la suite d'Euclide, fait un long détour dans le domaine de l'abstraction, nous reviendrons au concret. Nos idées auront, suivant la loi générale de l'évolution humaine, décrit un cycle ; mais ce cycle n'est pas fermé, car nous le décrivons à la manière d'une vis qui se meut dans son écrou et avance d'un cran à chaque tour. Ainsi chaque cycle nous fait faire un pas en avant dans ce vaste inconnu que nous nous efforçons de pénétrer.

De la Géométrie pure à la Géométrie descriptive, il n'y a qu'un pas, car la seconde est l'application directe de la première aux problèmes de la pratique.

La Géométrie descriptive a traversé les mêmes phases que la Géométrie pure. Ayant pris naissance dans les tracés empiriques des anciens appareilleurs, elle fut systématisée et érigée en science par les géomètres et particulièrement par Monge et son école. Elle passa ainsi des mains des praticiens dans celles des théoriciens. Bientôt ceux-ci, oubliant sa raison d'être, lui donnèrent une tournure de plus en plus dogmatique pour ne plus y voir qu'une traduction graphique de faits analytiques.

Deux écoles se trouvèrent ainsi en présence : l'une *théorique* qui met la Géométrie descriptive en formules et l'applique à des objets irréels ; l'autre *pratique* qui ne veut jamais perdre de vue le but technique du Dessin géométrique et le limite aux tracés utiles. Les théoriciens nous défendent de *voir dans l'espace ;* ils établissent, par le raisonnement pur et abstrait, en se basant sur des définitions présentées *a priori,* des règles générales immuables, panacées universelles, que l'on doit appliquer aveuglément, sans les discuter, pour obtenir un résultat d'autant moins facile à contrôler qu'il est plus inattendu. Et, pour justifier leurs prétentions, ils font exécuter, parfois, à leurs élèves, des épures bizarres, dont les données sont choisies à dessein de façon à en rendre la vision impossible. Il est clair que si l'on opère sur des surfaces illimitées, placées par rapport aux plans de projection de manière à n'avoir aucun contour apparent où le regard s'accroche, l'imagination visuelle a peine à concevoir les formes des objets qu'il s'agit de figurer. Mais ce sont là des problèmes dénués d'intérêt, jongleries de dessinateur, dont nous ne savons que faire. Dans la réalité, nous n'aurons jamais à considérer que des portions *limitées* de ces surfaces illimitées : et nous serons, d'ailleurs, toujours libres de choisir nos plans de projection pour en rendre la vision facile.

Il ne faut pas, en effet, oublier que le but unique de la Géométrie descriptive et de la Stéréotomie est de représenter des morceaux de pierre, des pièces de bois, des organes de machines, des détails et ensembles architecturaux d'une façon claire et précise qui en permette l'exécution. L'artisan, auquel on transmettra le dessin, doit pouvoir, d'un premier coup d'œil, connaître la forme et les détails de la pièce qu'il est chargé d'exécuter. Le rôle — je dirai plus — le *devoir* du dessinateur est donc de présenter ces objets d'une manière simple. Il doit, non pas s'imposer au hasard des plans de projection, ni même un mode de représentation, mais les choisir judicieusement pour atteindre le maximum d'effet utile. Il doit *faire voir*; et pour cela, il faut d'abord qu'*il voie lui-même.*

Loin de nous la pensée de nier les grands services que nous ont rendus les théoriciens. Ceux qui ont reçu leur enseignement y ont trouvé des méthodes générales fécondes, ils y ont appris à dominer leur sujet et à en dégager ce qu'il contient d'essentiel. Mais, en toutes choses, l'excès est détestable; et il est toujours fâcheux de faire dévier systématiquement une science du but fondamental qui justifie son existence.

Nous nous rangerons donc, Messieurs, résolument, dans le parti des praticiens; et nous nous efforcerons, suivant les traditions du Conservatoire des Arts-et-Métiers, à rester ensemble dans le domaine technique, le seul qui puisse trouver ásile ici. Cela ne signifie pas que nous exclurons de nos études les idées et les méthodes générales, mais nous essaierons d'en faire un emploi raisonné et judicieux: nous chercherons *à voir*, et, au besoin des modèles placés sous nos yeux nous aideront à ne pas perdre de vue, jusqu'au jour où notre imagination seule pourra y suffire, les objets que nous serons appelés à représenter. Nous saurons, quand il le faudra, nous inspirer des circonstances, éviter l'usage machinal des règles compliquées, pour faire souvent appel au simple *bon sens* qui, après tout, n'est qu'une forme vulgaire de cette logique naturelle qui est le fondement de toute l'intelligence humaine.

Jusqu'ici, Messieurs, nous avons passé en revue les applications directes du dessin, celles qui en sont, en quelque sorte, la raison d'être primordiale.

Le cours de cette année, fermant le cycle que nous recommencerons l'an prochain, sera réservé à l'étude de la Statique graphique. Je pense que la place que doit occuper cette science dans ce cours ne saurait être diminuée; et je ne crois pas inutile d'en développer ici mes raisons, en définissant nettement les limites du cadre dans lequel nous aurons à nous mouvoir.

Le Cours de Géométrie descriptive doit, à mon avis, comprendre *toutes* les applications du *Dessin géométrique.* Mais que devons-nous entendre sous ce nom ? Comprendrons-nous dans le Dessin géométrique toutes les applications *graphiques* de la science, quelles que soient leur portée ou leur nature ? Certes, non, car, s'il en était ainsi, nous devrions embrasser toutes celles des connaissances humaines qui plus ou moins se servent de représentations graphiques. Or, notre esprit a tant de peine à demeurer dans l'abstrait, que, même dans celles des parties de la science pure qui sont les plus éloignées des applications immédiates, on se sert de schémas graphiques, bornes concrètes qui marquent une étape, et où la pensée lasse s'arrête pour se reposer. Si nous voulions étudier tous les cas où la représentation graphique rend des services, nous ne saurions plus nous arrêter. Même en restant sur le terrain géométrique, nous serions ainsi conduits à exposer ici toute la Géométrie analytique ; car, si celle-ci, vue sous un certain angle, est la traduction analytique de formes géométriques, elle est aussi, prise à rebours, la traduction graphique de formules et d'équations.

Le Dessin géométrique a un rôle plus restreint : celui de résoudre graphiquement, *au moyen de la règle, de l'équerre et du compas* tous les problèmes pratiques qui comportent une pareille solution.

Et le champ ainsi délimité est encore assez vaste pour que le cycle de nos trois années ne suffise pas à le parcourir en entier.

SUR UN PARADOXE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET SUR L'AXIOME ZERMELO

J'ai signalé autrefois, dans la *Revue générale des sciences*, un paradoxe relatif à la théorie des ensembles. L'explication que j'en ai donné n'est pas entièrement exacte, comme l'a remarqué M. Peano. Je voudrais reprendre la question ici, et la faire suivre de quelques réflexions sur ce qu'on nomme l'*axiome* Zermelo.

Mon paradoxe concerne l'ensemble E des nombres susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots.

Cet ensemble est dénombrable. En effet, la définition d'un nombre par un nombre fini de mots est un arrangement avec répétition des 26 lettres de l'alphabet. Rangeons par ordre alphabétique, d'abord tous les arrangements un à un, puis à la suite tous ceux deux à deux, puis tous ceux trois à trois, etc. Puis, parmi ces arrangements conservons seulement ceux qui définissent des nombres, en biffant tous les autres.

Dans la suite des arrangements restant et définissant des nombres, toute définition de nombre occupera un rang. Ces définitions, ou les nombres correspondants forment donc un ensemble dénombrable.

Cet ensemble que je nomme E est défini par les mots qui précèdent. Mais, étant donné un ensemble dénombrable de nombres, on sait qu'on peut trouver un nombre n'appartenant pas à l'ensemble.

Pour définir un pareil nombre, aux chiffres

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

faisons correspondre respectivement

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 1 \quad 1$$

à chaque chiffre x correspond un autre chiffre $\varphi(x)$ et $\varphi(x)$ est distinct de x. En outre $\varphi(x)$ n'est jamais égal à 9.

Formons alors un nombre N ayant zéro pour partie entière et pour n^{me} chiffre décimal le correspondant du n^{me} chiffre décimal du n^{me} nombre de l'ensemble E.

Le nombre N ainsi défini ne fait pas partie de E, car s'il était le n^{me} nombre de E, son n^{me} chiffre serait identique au n^{me} chiffre du n^{me} nombre de E, et cela n'est pas.

Voilà donc un nombre N, défini par un nombre fini de mots et n'appartenant pas à E, ce qui est contradictoire avec la définition de E.

Telle est la contradiction.

Il m'avait paru assez facile d'expliquer ce paradoxe. Soit G la phrase définissant N. Cette phrase est un arrangement de mots. Comme les éléments de E sont des arrangements de mots, en formant l'ensemble E, on rencontrera la phrase G. Supposons qu'on la rencontre au rang p. A ce moment elle n'a pas de sens, car à ce moment les $p - 1$ premiers éléments de E sont seuls définis. La phrase G n'ayant pas de sens devra être biffée.

Voici l'objection de M. Peano. Dans la phrase G on peut remplacer les mots : *l'Ensemble E* par leur définition. La phrase G acquiert alors un sens et elle définit un nombre.

Le paradoxe subsiste donc.

Mais alors on peut remarquer ceci : la phrase G formule une contradiction. Soit p son rang dans l'ensemble E ; si la phrase G définit un nombre N, soit x son n^{me} chiffre. La phrase G exprime que le p^{me} chiffre de N est égal à $\varphi(x)$, elle exprime donc que :

$$\varphi(x) = x\ .$$

or par la définition de $\varphi(x)$ on a $\varphi(x) \gtrless x$.

La phrase G exprime donc que le p^{me} chiffre du p^{me} nombre de E est différent de lui-même, ce qui est absurde. On devra donc la biffer.

Il reste encore une difficulté. M. Peano l'indique et la résout comme il suit : (Je cite textuellement en traduisant en français le latin sans flexion dont l'auteur fait usage).

« Si la phrase qui définit N n'exprime pas un nombre, comme il est démontré ci-dessus, alors dans le calcul de N je passe cette phrase qui ne définit pas un nombre, et la définition de N acquiert un sens. C'est-à-dire : si N n'existe pas, alors il existe ».

« La contradiction est dans l'ambiguité de la phrase N. Il est nécessaire d'ajouter d'une manière explicite, « cette phrase non exclue » ou « cette phrase exclue ».

« Alors nous biffons la phrase ambiguë, et nous continuons au delà. Un peu plus loin nous trouvons les deux phrases :

« $N' =$ (Phrase N) cette phrase exclue,
« $N'' =$ (Phrase N) cette phrase non exclue.

« N'' n'existe pas, par la raison indiquée. N' représente un nombre déterminé, appartenant à E, et évidemment différent de tout autre nombre de E. »

Telle est l'explication de M. Peano. On pourrait encore y faire cette objection que l'ensemble E (qui contient N) est malgré tout dénombrable. Alors cet ensemble E étant formé, la phrase G aura un autre sens et définira un nombre qui n'est pas dans E. Cette fois le nombre n'est défini qu'après la formation totale de E et mon explication redevient bonne.

Je n'insiste pas plus longtemps sur ce sujet, de peur de patauger dans l'infini, selon l'expression de M. Poincaré.

Je vais parler de l'*axiome Zermelo*, ce qui n'est pas sans liaison avec ce qui précède, comme on pourrait le croire.

On est conduit à l'axiome en question, en cherchant à démontrer la proposition suivante :

Si A est un ensemble infini non dénombrable, on peut toujours trouver un ensemble dénombrable B contenu dans A.

Un ensemble infini, c'est un ensemble tel que si $a_1\ a_2\ \ldots\ a_p$ sont p éléments distincts de l'ensemble, on peut toujours trouver un élément distinct des premiers, a_{p+1} appartenant à l'ensemble.

D'après cela, dans l'ensemble A on peut toujours trouver une série d'éléments $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$. aussi longue qu'on voudra contenue dans l'ensemble. Si on se contentait de celà la proposition énoncée serait démontrée.

Mais une suite *infinie* $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ n'est définie que si l'on peut calculer a_n. On dit cela dans les cours de mathématiques en commençant l'étude des séries. Pour démontrer complètement la proposition, il faudrait donc prouver l'*existence d'une règle* permettant de calculer a_n en fonction de n.

On peut il est vrai prendre arbitrairement a_n, mais on a l'embarras du choix. Cet embarras se répète une infinité de fois. C'est là la difficulté.

Dans les ensembles particuliers on a en général la possibilité d'une pareille règle. Soit par exemple l'ensemble des nombres transcendants. On pourra prélever dans cet ensemble un ensemble dénombrable

$$\pi, \pi^2, \pi^4, \ldots, \pi^n, \ldots, \text{etc.}$$

Mais la chose est-elle toujours possible ?

Pour plus de clarté nous énoncerons l'axiome Zermelo ainsi. Etant donné un ensemble infini A, il est toujours possible de faire correspondre à chaque entier n un objet a_n de l'ensemble, à deux entiers distincts correspondant deux éléments distincts.

On devra également admettre l'énoncé suivant un peu différent. Dans une suite d'ensembles rangés, $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ sans éléments communs, on peut prélever une suite d'éléments, $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ l'élément a_n étant dans A_n.

Ces propositions constitueront pour nous *l'axiome Zermelo*. Elles ne paraissent pas démontrables dans le cas le plus général, elles le sont dans un cas très étendu, le seul qu'on ait à considérer pratiquement. Envisageons la 1^re^ proposition. Supposons ceci « Dans l'ensemble A il y a des éléments pouvant être définis par un nombre fini de mots ». En faisant cette hypothèse supplémentaire nous ne restreignons pas beaucoup la question. On ne peut en effet se faire aucune idée d'un ensemble ne possédant pas cette propriété.

Avec notre restriction *l'axiome Zermelo se démontre immédiatement*. En effet reprenons les arrangements de lettres dont j'ai parlé au début de ce travail. Parmi ces arrangements, rangés comme nous l'avons dit, *biffons tous ceux* *qui ne définissent pas des éléments de l'ensemble* A. Ceux qui restent définiront des éléments de l'ensemble A rangés dans un certain ordre. Nous aurons donc bien une suite rangée $a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots$ formée d'éléments de l'ensemble A.

La seconde partie se démontre de même. On peut supposer rangés des éléments des ensembles $A_1\ A_2 \ldots A_n$, par la règle précédente, et dans chacun d'eux on prendra le premier élément, a_n sera alors le premier élément de A_n.

Ces démonstrations laissent un peu à désirer. Il faut en effet bien préciser dans quel cas un arrangement de lettres définit un élément de l'ensemble A. Lorsqu'on arrive en effet à un arrangement de mots définissant un élément de l'ensemble A mais avec une incorrection de langage, par exemple en omettant les articles, doit-on le biffer ou non. Il faut faire à ce sujet des conventions précises, car pour bien démontrer l'axiome, il faut supprimer partout *l'embarras du choix*.

Je considère ces questions comme curieuses, mais absolument oiseuses en mathématiques. La vraie mathématique, celle qui nous fait connaître le monde extérieur, n'a que faire des ensembles non dénombrables, et des objets non susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots. Ces objets n'existent qu'en un sens : leur existence n'implique pas contradiction. Et encore n'est-ce pas sûr.

En géométrie il est vrai on considère des segments de droite, des arcs de courbe, etc. Ce sont des ensembles de points non dénombrables. Mais tous les points obtenus par une construction géométrique quelconque ont une position définie par un nombre fini de mots.

J. Richard (Dijon).

LES TROIS CONCEPTS GÉOMÉTRIQUES

En remontant le cours des définitions logiques, on parvient nécessairement à des concepts *indéfinissables logiquement*. On peut les appeler *empiriques* en raison de ce qu'ils ne sauraient prendre naissance sans données fournies par l'expérience. Ce sont les concepts de cette sorte qu'il s'agit de spécifier pour la Géométrie.

Le point Géométrique. — La notion de *point matériel* est le *substratum* des conceptions géométriques ; un point matériel possède, à tout instant, une *qualité locale*, sa position ; les points géométriques sont, en définitive, les positions ponctuelles et, par suite, sont définis comme qualités des points matériels. La notion de point matériel joue donc, dans les conceptions géométriques, le même rôle latent que la notion d'ensemble dans la génération des concepts numériques, les nombres cardinaux (ou *puissances*) se définissant en effet comme qualités afférentes aux ensembles ; l'idée de position, ou qualité locale, est subordonnée à celle de matière comme l'idée de nombre à celle d'ensemble.

L'ensemble des points géométriques est l'*espace ;* c'est la seule signification précise qui convienne à ce terme. On attribue à l'espace la puissance du continu et il n'a pas d'autres propriétés intrinsèques que celles qui appartiennent à tous les ensembles ayant cette puissance, de sorte que *la Géométrie n'est qu'une application de la théorie des ensembles ayant la puissance du continu*.

Les propriétés de ces ensembles ne trouvent évidemment leur application dans la Géométrie qu'autant qu'elles correspondent à des concepts réellement géométriques. Mais leur existence n'en est pas moins indépendante de toute considération géométrique.

On sait que tout ensemble M ayant la puissance du continu est susceptible d'être *appliqué*, et d'une infinité de manières, sur le continu numérique, sur la variété numérique à deux dimensions, etc. Ces représentations numériques donnent lieu à des notions plus générales qu'elles-mêmes, qu'il est nécessaire de dégager des concepts numériques. C'est ainsi qu'en ce qui concerne les représentations numériques simples, un même *ordre* est défini par toutes celles qui sont susceptibles d'être déduites de l'une d'entre elles au moyen de relations de la forme :

$$x' = f(x),$$

où $f(x)$ désigne une fonction uniforme, continue et toujours croissante de x. On sait d'ailleurs que l'idée d'ordre peut se définir en dehors de toute considération numérique.

Pour élucider complètement la question géométrique, il est nécessaire de réaliser une généralisation de l'idée d'ordre, suivant l'indication donnée d'ailleurs par G. Cantor ; il suffit, pour cela, de considérer, outre les ordres simples, des ordres complexes, ceux-ci étant déterminés par les représentations numériques à plusieurs dimensions comme les premiers par les représentations numériques simples et un même ordre complexe correspondant, par suite, à une infinité de représentations numériques ou, ce qui revient au même, de systèmes coordonnés. On obtient ainsi la notion d'ordres continus à deux, trois, etc. dimensions. En définitive, ce qu'ont de commun toutes les représentations numériques afférentes à un même ordre continu, simple ou complexe, se réduit presque à une notion de continuité. Il est à signaler qu'un ordre complexe donne lieu à la notion de certains ensembles simplement ordonnés, qui suffisent à le caractériser et qui seront appelés ses *caractéristiques*.

Enfin les ordres se divisent, comme l'on sait, en catégories ou *types* d'après leurs particularités logiques. Il importe de signaler que les caractères des divers types d'ordre sont définissables logiquement (même sans l'intervention des concepts numériques), mais qu'un ordre déterminé ne saurait être défini sans données empiriques.

La continuité Géométrique. — Un point matériel possédant, à tout instant, une position, l'ensemble des positions qu'il occupe pendant un intervalle de temps se trouve ordonné suivant le même type d'ordre que cet intervalle de temps lui-même considéré comme ensemble d'instants, c'est-à-dire dans un ordre continu (simple). Mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que tout ensemble de points ordonné dans un ordre simple continu ne constitue pas une trajectoire possible pour les points matériels. Les seuls, parmi ces ensembles, qui jouissent de cette propriété sont les *lignes*, et l'on se trouve ainsi en présence d'un nouveau concept empirique.

Ce concept peut recevoir la désignation générale de *continuité géométrique*, en appelant *géométriquement continu* tout ensemble de points tels que deux quelconques d'entre eux soient susceptibles d'être réunis par une ligne formée de points appartenant tous à l'ensemble. On reconnaît facilement que le concept empirique de continuité géométrique définit, pour l'espace, un ordre complexe de la nature de ceux dont la possibilité a été signalée pour les ensembles ayant la puissance du continu ; les lignes sont les caractéristiques de cet ordre.

L'axiome de l'*Analysis sitûs*, c'est-à-dire de la partie de la Géométrie qui a pour objet l'étude de la continuité géométrique, doit simplement classer l'*ordre géométrique*, c'est-à-dire indiquer le type auquel il appartient. Ce type n'est autre, comme l'on sait, que celui qui est caractérisé par la variété numérique à trois dimensions, de sorte que, rationnellement, l'*Analysis sitûs* n'est qu'une application de la théorie de ce type d'ordre.

Les idées de localisation et d'ordre géométrique fournissent un nouvel exemple de la distinction à observer entre la notion d'un ensemble déterminé et celle d'un ordre qui lui est afférent. L'analogie est complète avec la dissociation actuellement réalisée des notions de nombre cardinal et de nombre ordinal. Dans les deux cas, de nouvelles données empiriques interviennent pour définir l'ordre ; pour l'ordre géométrique, elles résident dans la propriété de la matière de ne se déplacer qu'en observant certaines conditions et, quant à la grandeur relative des nombres cardinaux, elle se définit en faisant appel à la notion de « partie d'un ensemble », qui n'est nullement impliquée dans celle de nombre cardinal.

L'ordre géométrique a donc une existence objective, et il en est, par suite, de même de ses propriétés, notamment du nombre de ses dimensions. L'axiome de l'*Analysis situs*, exprime, en définitive, des qualités d'un concept empirique, savoir de l'ordre complexe dont les lignes sont les caractéristiques.

Comme la théorie de l'ordre, la théorie de la *mesure* doit, rationnellement, être établie en toute généralité et en dehors de toute considération de réalisation physique.

La notion de *grandeur continue* (le temps ou la température, par exemple) se réduit évidemment à celle d'ensemble ordonné dans un ordre continu. Elle est donc susceptible de la même généralisation que celle-ci, et rien n'empêche, dans cet ordre d'idées, de parler de grandeurs continues à deux, trois, etc. dimensions. On peut étendre à ce domaine l'idée de mesure, et il est facile de reconnaître que, dans tous les cas, un système de mesure se caractérise par une fonction numérique de deux éléments définie à un facteur numérique près à déterminer par le choix d'une unité. Dans tous les cas également, les fonctions caractéristiques des systèmes de mesure doivent satisfaire à certaines conditions, qui ne peuvent trouver place dans cette esquisse.

Les systèmes de mesure, ou *métriques*, se répartissent, d'après leurs propriétés (correspondant à celles de leurs fonctions caractéristiques), en catégories, dont l'existence est évidemment toute logique. Mais, conformément à ce qui a lieu pour les ordres, une métrique déterminée (ou sa fonction caractéristique) ne peut être définie sans l'intervention de nouveaux éléments empiriques.

La mesure Géométrique. — On sait que le concept fondamental de la Géométrie métrique réside dans la notion de figure invariable, à laquelle on peut substituer celle de déplacement sans déformation ou encore celle de distance, deux quelconques de ces trois notions se définissant très simplement en fonction de la troisième. A ces notions se rattachent, par des liens purement logiques, celles d'égalité géométrique, de ligne droite, de longueur, d'angle, d'aire, etc., toutes notions servant à édifier la Géométrie traditionnelle ou euclidienne. Celle-ci constitue, en définitive, la théorie d'un système de mesure, d'une métrique, dont la fonction caractéristique est la distance.

A ne considérer que l'enchaînement logique de ses propositions, cette doctrine n'est évidemment pas spéciale au système de mesure ainsi défini empiriquement et doit s'appliquer à toutes les métriques appartenant à une certaine catégorie, caractérisée par des propriétés purement logiques ; cette catégorie est constituée par les métriques dites *paraboliques* et *archimédiennes*. La doctrine euclidienne, ainsi interprétée, est applicable à la mesure géométrique en vertu d'un classement de celle-ci. On voit combien il est radicalement absurde d'appliquer le qualificatif « euclidien » au substantif « espace » ; ce qui est euclidien, c'est la mesure géométrique.

La notion de la mesure géométrique a manifestement son origine dans l'observation imparfaite des corps sensiblement indéformables ; mais une grande part de son individualité est due au rôle important qu'elle joue dans le domaine concret.

Elle a d'abord, comme tout système de mesure, un rôle de représentation. La qualité locale de la matière a, comme on l'a vu, une existence propre, indépendamment des autres concepts géométriques. Sa représentation numérique peut être conçue de bien des manières différentes, même en se bornant aux systèmes de coordonnées qui observent la continuité géométrique. Mais la définition d'un tel système de *topographie* (au sens étymologique) nécessite toujours l'intervention de données empiriques ; elle comporte en effet un système de repères et des instruments d'opération, qu'il faut bien trouver dans la nature. C'est pour cela qu'on est nécessairement conduit à recourir à l'emploi des notions métriques, notamment de la distance et de l'angle.

Mais le rôle principal des notions métriques est celui qu'elles jouent dans les lois physiques. On peut dire en effet, d'une manière générale, que la *qualité locale de la matière n'est reliée à ses autres qualités physiques que par l'intermédiaire des notions métriques.* Il suffit de citer les lois sur l'élasticité, la chaleur, l'électro-magnétisme, la gravité, etc. On pourrait objecter, il est vrai, que les notions physiques reçoivent peut-être, dans leur définition même, l'empreinte métrique, de sorte que la Physique ne serait que l'étude de certaines propriétés des corps par rapport aux notions métriques. Mais si cette observation pourrait être admissible en ce qui concerne les systèmes de mesure des grandeurs physiques, elle ne paraît pas applicable à certaines relations d'équivalence, telles que l'équilibre de température et l'égalité de pression entre deux corps.

Il paraît donc impossible d'éliminer les notions métriques (et, à plus forte raison, l'idée de la continuité géométrique qu'elles impliquent) des lois physiques où elles figurent, et elles reçoivent de ce fait une objectivité nouvelle.

La nature et le rôle de la Géométrie. — La question de la nature logique de la Géométrie ne pouvait être pleinement élucidée avant les travaux de G. Cantor sur les ensembles et de S. Lie sur les groupes continus de transformation, parce que ce sont ces travaux qui ont permis de spécifier les catégories logiques auxquelles appartiennent les concepts géométriques.

Il importe de distinguer : d'une part, des notions logiquement définies (ensembles ayant la puissance du continu, ordres simples ou complexes, métriques) ; d'autre part, des concepts d'origine empirique (espace, c'est-à-dire ensemble des points géométriques, ordre géométrique, mesure géométrique). Les catégories logiques doivent faire l'objet de doctrines fondées sur leurs définitions et édifiées, par conséquent, avec toute la généralité qu'elles comportent. Quant aux concepts empiriques, ils sont à classer, au moyen d'axiomes, dans les catégories logiques, et ne doivent pas, rationnellement, donner lieu à des doctrines spéciales ; mais, même considérés comme idéaux, ils sont parfaitement déterminés et il en est, par suite, de même de leurs propriétés initiales, telles qu'elles sont révélées par l'observation mentale, c'est-à-dire par l'*intuition*.

C'est dans ses concepts empiriques que réside le véritable intérêt de la Géométrie et son unique raison d'être. Son individualité est donc indépendante de son appareil logique et, par suite, la terminologie qui lui est propre ne saurait être reportée, sans abus de langage et sans équivoque, dans les théories générales dont la Géométrie n'est qu'une application. Ces théories sont d'ailleurs elles-même un objet parfaitement défini, bien que non géométrique, et elles n'ont rien à gagner à affecter la forme de ces jeux logiques où se combinent artificiellement des mots qui, selon la formule chère à certains néo-logiciens, ne doivent avoir aucune signification, comme si l'idéal mathématique consistait dans l'automatisme.

En ce qui concerne le rôle scientifique de la Géométrie, on a répété à satiété, sans que la moindre démonstration ait d'ailleurs jamais été tentée, que la Géométrie constitue, vis-à-vis de la réalité, un système de coordination, de représentation ou d'analyse et on en a finalement situé l'origine et la nature dans la physiologie humaine ; c'est ainsi qu'on en est venu à affirmer sérieusement que les trois dimensions de l'espace sont dues à l'existence, chez les vertébrés, de trois directions « cardinales ». On devrait alors rechercher dans la seule conformation de l'oreille les raisons de la diversité des sons et voir, dans les théories de l'acoustique, de la chaleur, de l'optique et de l'électro-magnétisme, des systèmes artificiels ne dépendant que de la nature des sens humains. L'unité de la Physique se réaliserait ainsi dans la Physiologie.

Il ne manque à ces conceptions, ou plutôt à ces formules, que d'avoir une signification ; on serait curieux, par exemple, de voir définir les choses à représenter ou à coordonner et celles qui doivent servir à représenter les premières. Contraires au bon sens, susceptibles de faire illusion, comme toutes les théories philosophiques, en raison du soin avec lequel elles évitent toute application aux faits concrets, ces divagations sans fondement procèdent de la théorie idéaliste ou subjectiviste de la Connaissance, qui devrait pourtant bien.

près d'un demi-siècle après les études réalistes de Helmholtz et de Taine, avoir perdu tout crédit dans le monde scientifique. N'est-il pas manifeste, par exemple, que l'idée de la troisième dimension s'imposerait rapidement, bien qu'inconsciemment, au spectateur d'une scène cinématographique, comme le serait un homme uniquement pourvu du sens de la vue ? C'est que les objets et les événements ne sont pas, comme le disent les subjectivistes, des « complexes de sensations » ; ce sont des « complexes de prévisions » (savoir, c'est prévoir). Tout objet de Connaissance est conçu comme source de faits, comme *cause* ; « Réalité » se résoud, en dernière analyse, en « Causalité ».

Les propriétés géométriques de la matière (car il doit bien être permis, même aux mathématiciens, de se souvenir, de temps à autre, que les figures sont des positions possibles pour la matière) n'ont ni plus ni moins de réalité que les qualités dites physiques. La Géométrie est donc, en définitive, une branche de la Physique ; seulement, une frondaison, peut être un peu abusivement luxuriante, en a masqué le point d'insertion, comme cela pourrait se produire pour la Mécanique, la Thermodynamique, etc. Les Mathématiques, pas plus que l'Art, n'ont rien à gagner à renier leur mère : la Nature.

G. Combebiac (Bourges).

GÉNÉRATION DES COURBES ET DES SURFACES SUPÉRIEURES

(Notes de géométrie synthétique[1].)

I

Courbes du $(n+p)^e$ degré.

Nous appellerons *groupe du* $(n+p)^e$ *degré* deux faisceaux de rayons tels que tout rayon du premier correspond à p rayons du deuxième et tels encore que chaque rayon de celui-ci correspond à n du premier.

Théorème. *Le lieu des points de coupe des rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe du* $(n+p)^e$ *degré est une courbe du* $(n+p)^e$ *degré. Le sommet du premier faisceau est un point multiple d'ordre* n *et celui de l'autre un point multiple d'ordre* p.

Courbes de la $(n+p)^e$ classe.

Un groupe de la $(n+p)^e$ *classe* est formé de deux ponctuelles dans lesquelles chaque point de l'une correspond à p de l'autre et chaque point de celle-ci à n de la première.

Théorème. *L'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux ponctuelles appartenant à un groupe de la* $(n+p)^e$ *classe est une courbe de la* $(n+p)^e$ *classe. La première base est une tangente multiple d'ordre* n *et l'autre, une d'ordre* p.

En désignant par α et β les coefficients angulaires de deux rayons homologues ou les abscisses de deux points homologues, ces valeurs α et β seront, en se basant sur les définitions précédentes, liées par l'équation :

$$\beta^p F_1^{(n)}(\alpha) + \beta^{p-1} F_2^{(n)}(\alpha) + \ldots + \beta F_p^{(n)}(\alpha) + F_{p+1}^{(n)}(\alpha) = 0 \qquad (1)$$

dans laquelle on a :

$$F_1^{(n)}(\alpha) = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots + L\alpha + P .$$

[1] Voir L. Crelier : *C. R.*, 11 juin et 2 juillet 1906; et l'« Enseign. mathématique », 15 novembre 1906.

En prenant S_n, sommet du premier faisceau comme origine et S_p, sommet de l'autre sur l'axe des x avec une abscisse égale à k nous aurons pour les équations de deux rayons homologues :

$$y = \alpha x$$
$$y = \beta (x - k) .$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{x-k} .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation générale (1) et en posant :

$$Ay^n + By^{n-1} . x + \ldots + Lyx^{n-1} + P^n x = F^{(n)}(xy)$$

nous aurons :

$$y^p F_1^{(n)}(xy) + y^{p-1}(x-k) F_2^{(n)}(xy) + \ldots + y(x-k)^{p-1} F_p^{(n)}(xy) + (x-k)^p F_p^{(n)}(xy) = 0 .$$

Cette équation représente le lieu des points cherché. Elle est du $(n+p)^e$ degré et le terme inférieur du degré n. D'autre part $x = k$ entraîne

$$y^p F_1(xy) = 0$$

ou aussi

$$y^p = 0 .$$

Dans ces conditions la courbe est du $(n+p)^e$ degré. L'origine S_n est un point multiple d'ordre n et le point (k, o) est aussi un point multiple d'ordre p.

Nous prendrons les ponctuelles comme axes et nous utiliserons les coordonnées linéaires. Toute droite joignant deux points homologues sera définie par les équations :

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{\beta} .$$

On a donc :

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\nu} .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation générale on obtient évidemment l'équation de l'enveloppe cherchée ; soit :

$$\frac{1}{\nu^p} F_1^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \ldots + \frac{1}{\nu} F_p^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 .$$

On en déduit de suite :

$$\nu^p F_{p+1}^{(n)}(\mu) + \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\mu) + \ldots + F_1^{(n)}(\mu) = 0 .$$

L'équation est bien de la $(p+n)^e$ classe.

La valeur $\nu = \infty$ entraîne

$$F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 ;$$

en conséquence, la première base est une tangente multiple d'ordre n. D'un autre côté $\mu = \infty$ nous donne :

$$P_1 \frac{1}{\nu^p} + P_2 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \ldots + P_p \frac{1}{\nu} + P_{p+1} = 0$$

Corollaire. *Quand les faisceaux ont deux rayons homologues confondus, la courbe se ramène à une courbe du* (n + p — 1)ᵉ *degré. Le sommet du premier faisceau est un point multiple d'ordre* (n — 1) *et l'autre un d'ordre* (p — 1). *La droite formée par les rayons homologues s'est détachée de la courbe.*

La ligne des sommets est confondue avec les rayons homologues dont il est question. En la prenant comme axe des x, la solution $\alpha = 0$ entraînera $\beta = 0$.

Cette condition donne

$$P_{p+1} = 0 .$$

L'équation de la courbe devient :

$$y^p F_1^{(n)}(xy) + y^{p-1}(x-k)F_2^{(n)}(xy) +$$

$$\ldots + (x-k)^p y F_{p+1}^{(n-1)}(xy) = 0 .$$

A cause du dernier terme on trouve

$$y = 0 \quad \text{et}$$

$$y^{p-1} F_1^{(n)}(xy) + \ldots +$$

$$(x-k)^p F_{p+1}^{(n-1)}(xy) = 0 .$$

Celle-ci montre suffisamment que le degré de la courbe est $(n + p - 1)$, puis que les points (o,o) et (k,o) sont des points

ou

$$\varphi^p\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0 .$$

La deuxième base est une tangente multiple d'ordre p.

Corollaire. *Quand les deux divisions ont un point homologue commun la courbe est de la* (n + p — 1)ᵉ *classe. La première base est tangente multiple d'ordre* (n — 1) *et l'autre d'ordre* (p — 1).

Le point commun est pris comme origine et la solution $\alpha = 0$ donne $\beta = 0$.

Ceci entraîne par conséquent :

$$P_{p+1} = 0 .$$

L'équation du lieu devient

$$\frac{1}{\nu^p} F_1^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \ldots +$$

$$\frac{1}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0$$

ou

$$\nu^p F_{p+1}^{(n-1)}(\mu) + \ldots + F_1^{(n)}(\mu) = 0 .$$

La classe de la courbe est $(n + p - 1)$.

$$\nu = \infty \text{ donne } \frac{1}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 .$$

On a donc $(n - 1)$ solutions en $\frac{1}{\mu}$ différentes de $\mu = \infty$; la première base est tangente multiples d'ordre, le premier $(n-1)$ et l'autre $(p-1)$.

multiple d'ordre $(n-1)$; $\mu = \infty$ donne :

$$P_1 \frac{1}{\nu^p} + P_2 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \dots + P_p \frac{1}{\nu} = 0$$

ou

$$\frac{1}{\nu}\left(P_1 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \dots + P_{p-1}\right) = 0\,.$$

Il y a $(p-1)$ solutions en $\frac{1}{\nu}$ différentes de $\nu = \infty$; la deuxième base est tangente multiple d'ordre $(p-1)$. Comme $\mu = \infty$ donne également $\nu = \infty$, toute droite passant par l'origine serait une tangente et *l'origine devient un point isolé détaché de la courbe.*

Construction des courbes.

En coupant le faisceau S_n par un rayon issu de S_p puis S_p par un des rayons homologues du précédent issu de S_n, on obtient deux ponctuelles formant un groupe du $(n+p)^e$ ordre régi par le cas spécial.

En d'autres termes, la courbe du $(n+p)^e$ degré correspondant à deux faisceaux du $(n+p)^e$ degré également se déduira d'une courbe de la $(n+p-1)^e$ classe dépendant de deux ponctuelles ayant un point homologue commun.

Le choix des ponctuelles étant arbitraire, il y a une infinité de courbes analogues de la $(n+p-1)^e$ classe qui peuvent servir pour la construction de la courbe principale.

Etant donné un groupe de la $(n+p)^e$ classe formé par deux ponctuelles, nous pouvons former deux faisceaux ayant un rayon homologue commun et formant un groupe du $(n+p)^e$ degré régi par le cas spécial. Il suffit pour cela de joindre un point d'une ponctuelle avec tous ceux de l'autre puis un des points homologues de celle-ci avec tous ceux de la première. La courbe primitive de la $(n+p)^e$ classe dépend ainsi d'une courbe du $(n+p-1)^e$ degré. Le choix des sommets des faisceaux secondaires étant arbitraire, la courbe auxiliaire peut avoir une infinité de positions.

Quand on veut déterminer de nouvelles tangentes de la courbe

Pour obtenir les points de la courbe du $(n+p)^e$ degré engendrée par les deux faisceaux primitifs on peut remarquer que les tangentes à la courbe auxiliaire menées par un point quelconque d'une des ponctuelles considérées, donnent les points homologues sur l'autre. En outre, si l'on joint les points homologues des ponctuelles avec les sommets respectifs on obtient des rayons homologues des deux faisceaux. Les points de coupe des rayons homologues sont les points cherchés.

principale, on mène un rayon d'un des faisceaux secondaires, puis on joint ses points de coupe avec la courbe auxiliaire, avec le sommet du deuxième faisceau. Les divers rayons ainsi obtenus donnent des points homologues sur les deux bases, et les lignes de jonction de ces points homologues sont des tangentes nouvelles de la courbe primitive.

Dans un mémoire précédent (*L'Ens. math.* l. c.) nous avons montré que pour les courbes du $(n+1)^e$ degré ou de la $(n+1)^e$ classe, les courbes auxiliaires se ramenaient successivement par degré et par classe jusqu'à des coniques.

Remarque : Pour construire deux faisceaux ou deux divisions formant un groupe du $(n+p)^e$ ordre il faut

$$(n+1)(p+1) - 1 = np + p + n \text{ coefficients}$$

dans l'équation fondamentale (1), autrement dit, une courbe du $(n+p)^e$ degré ou de la $(n+p)^e$ classe dépendant d'un tel groupe peut être construite dès qu'on connaît $np+p+n$ paires d'éléments homologues.

Courbes du 4e degré avec deux points doubles.

Ces courbes proviennent de deux faisceaux tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent deux du deuxième et inversement. Il faut huit paires de rayons homologues pour les déterminer.

La courbe auxiliaire qui permet de les construire est une courbe de la troisième classe, courbe générale déterminée par un ensemble de neuf tangentes.

Courbes de la 4e classe avec deux tangentes doubles.

Ces courbes proviennent de deux ponctuelles telles qu'à chaque point de l'une correspondent deux points de l'autre et inversement.

Elles demandent huit paires de points homologues pour être construites.

La courbe auxiliaire à laquelle on peut les rattacher est une courbe générale du troisième degré donnée par neuf points.

Nouvelle construction des courbes du 3e degré par neuf points. La courbe est engendrée par un groupe du (2 + 2e degré avec un rayon homologue commun aux deux faisceaux.

Au point de vue constructif, nous admettrons la courbe comme provenant d'un faisceau de coniques, homographique avec un faisceau de rayons.

Le faisceau de coniques est déterminé par quatre points; chacune d'elles passera par un autre des points connus. Considérons une nouvelle conique déterminée par les cinq derniers points. Un point quelconque de celle-ci donne une involution de rayons avec le faisceau de rayons fondamental.

D'autre part les tangentes des coniques du premier faisceau prises par l'un quelconque des quatre points constituent un faisceau de rayons homographique avec l'involution.

Comme on possède cinq paires d'éléments homologues de ces deux derniers faisceaux, on peut construire la cubique à point double correspondante et en déduire le faisceau simple puis la cubique cherchée.

Nouvelle construction des courbes de 3e classe par neuf tangentes. On peut considérer cette courbe comme provenant d'un groupe de la (2 + 2e classe avec un point homologue commun aux deux bases. Constructivement nous formerons avec les éléments connus, un faisceau de courbes de deuxième classe et une division de points simples qui lui est homographique.

Nous prendrons quatre tangentes pour déterminer le faisceau de coniques, chacune d'elles s'appuiera sur une autre des tangentes. Nous considérerons en outre une nouvelle conique déterminée par les cinq dernières tangentes. Une quelconque de ces tangentes coupera les paires de tangentes à cette dernière conique issues des points de la division fondamentale, suivant une involution. D'un autre côté les points de tangence des coniques du premier faisceau avec une des tangentes fondamentales formeront une division de points homographique avec l'involution précédente.

Comme on a cinq paires de points homologues de ce groupe nouveau, on peut d'après ce qui précède construire la courbe de troisième classe à tangente double correspondante et en déduire la base de la division simple puis la courbe générale cherchée.

En appliquant le raisonnement général à ces nouvelles courbes, considérées comme courbes auxiliaires dans des groupes du (2 + 2e ordre, on obtiendra sans difficulté les courbes relatives à ces groupes.

II

Cônes du (n + p)^e degré.

Deux faisceaux de plans dont les arêtes ont un point commun peuvent former un *groupe du* (n + p)^e *degré* dans les mêmes conditions que deux faisceaux de droites. Un plan du premier correspond à p du deuxième et un de celui-ci à n du premier.

Théorème. *Le lieu géométrique des lignes d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plans d'un groupe du* (n + p)^e *degré est un cône du* (n + p)^e *degré. L'arête du premier faisceau est une génératrice multiple d'ordre* n *et celle de l'autre une d'ordre* p.

Dans un système de trois axes nous considérerons l'axe des x comme arête du premier faisceau et celui des y comme arête du second.

Les équations des plans du premier faisceau seront de la forme

$$z = \alpha y .$$

Celles des plans de l'autre :

$$z = \beta x .$$

Les valeurs α et β sont liées par l'équation (1) du chapitre précédent, de telle manière que toute valeur de β en donne n de α et une de α en donne p de β.

On a :

$$\alpha = \frac{z}{y} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{z}{x} .$$

Cônes de la (n + p)^e classe.

Deux faisceaux de rayons situés chacun dans un plan et ayant les sommets communs forment un groupe de la ($n + p$)^e classe quand, à tout rayon du premier en correspondent p du deuxième et à tout rayon du deuxième n du premier.

Théorème. *L'enveloppe des plans passant par deux rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe de la* (n + p)^e *classe est un cône de la* (n + p)^e *classe. Le plan du premier faisceau est un plan tangent multiple d'ordre* n *et l'autre un plan tangent multiple d'ordre* p

Nous prendrons le plan du premier faisceau comme plan des ($\lambda o \mu$) et celui du deuxième comme plan des ($\lambda o \nu$). Le sommet commun sera situé en un point fixe $\lambda = \frac{1}{k}$.

Tout plan passant par deux rayons homologues déterminera des coordonnées μ et ν telles que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\nu} = \beta$$

λ est connu, puis les valeurs α et β sont liées par la relation fondamentale (1).

En introduisant ces valeurs on obtient :

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^p F_1^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \ldots +$$

$$F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0$$

On introduit ces valeurs et on trouve l'équation de la surface, lieu géométrique.

On obtient :

$$\left(\frac{z}{x}\right)^p F_1^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + \ldots + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) = 0$$

ou

$$z^p F_1^{(n)}(yz) + xz^{p-1} F_2^{(n)}(yz) + \ldots + x^{p-1} z F_p^{(n)}(yz) + x^p F_{p+1}^{(n)}(yz) = 0 .$$

En divisant par z^{n+p} on trouve :

$$F^{(n+p)}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 .$$

Donc la surface est un cône du degré $(n+p)$.

Il reste facile de voir analytiquement que les axes des x et des y sont des génératrices multiples d'ordre n et p.

Corollaire. *Quand les faisceaux de plans ont deux plans homologues communs, le cône se ramène à un cône du* $(n+p-1)$ *e degré. La première arête est une génératrice multiple d'ordre* $(n-1)$ *et l'autre d'ordre* $(p-1)$.

Le plan homologue commun sera pris comme plan des xoy, et la solution $\alpha = 0$ devra donner $\beta = 0$. Comme pour les courbes par degré du chapitre précédent on aura

$$P_{p+1} = 0 .$$

ou

$$\lambda^p F_1^{(n)}(\lambda\mu) + \lambda^{p-1}\nu F_2^{(n)}(\lambda\mu) + \ldots + \lambda\nu^{p-1} F_p^{(n)}(\lambda\mu) + \nu^p F_{p+1}^{(n)}(\lambda\mu) = 0 .$$

On en tire également :

$$F^{(n+p)}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}\right) = 0 .$$

Nous avons donc un cône de la $(n+p)$e classe et, en faisant $\lambda = \frac{1}{k} =$ constante, nous trouvons la section par le troisième plan. C'est une courbe de la $(n+p)$e classe d'équation

$$F^{(n+p)}(\mu, \nu) = 0 .$$

Il en résulte a priori que le plan $(\lambda o \mu)$ est tangent multiple d'ordre n et le plan $(\lambda o \nu)$ l'est également d'ordre p.

Corollaire. *Quand les deux faisceaux de rayons ont deux rayons homologues communs, la surface enveloppe se ramène à un cône de la* $(n+p-1)$e *classe. Le plan du premier faisceau est tangent multiple d'ordre* $(n-1)$ *et l'autre d'ordre* $(p-1)$.

Le rayon homologue commun sera l'axe $o\lambda$ et la solution $\mu = \infty$ donnera $\nu = \infty$ ce qui correspond à

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0 .$$

L'équation du cône donne :

$$z^p F_1^{(n)}(yz) + \ldots + x^p\Big(A_{p+1} z^n + B_{p+1} z^{n-1} y + \ldots + L_{p+1} z\Big) = 0 .$$

On peut sortir z et l'on a :

$$z = 0$$

$$z^{p-1} F_1^{(n)}(yz) + \ldots + x^{p-1} F_p^{(n)}(yz) + x^p F_{p+1}^{(n-1)} = 0$$

on obtient aussi

$$F^{(n-1)}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 .$$

Nous avons un cône du $(n + p - 1)^e$ degré.

Le plan $z = 0$ s'est détaché de la surface et les arêtes ou les axes ox et oy sont des génératrices multiples d'ordre $(n - 1)$ et $(p - 1)$.

Ceci se démontre en menant des plans sécants du cône par ces axes.

De même que pour les développements analogues on a :

$$P_{p+1} = 0 .$$

Par analogie nous pouvons écrire pour l'équation de la surface :

$$\lambda^p F_1^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \lambda^{p-1}\nu F_2^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \ldots + \lambda\nu^{p-1} F_p^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \nu^p \frac{\lambda}{\mu} \overset{1}{F}{}_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ou en multipliant par μ^n et en divisant par λ

$$\nu^p \overset{1}{F}{}_{(p+1)}^{n-1}(\lambda\mu) + \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\lambda\mu) + \ldots + \lambda^{p-2}\nu F_2^{(n)}(\lambda\mu) + \lambda^{p-1} F_1^{(n)}(\lambda\mu) = 0$$

ou

$$F^{n+p-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}\right) = 0 .$$

Nous avons également un cône de classe $(n + p - 1)$.

Comme tous les plans passant par l'axe $o\lambda$ correspondent à $\mu = \infty$ et $\nu = \infty$, ils sont tangents et dans ce cas la droite $(o\lambda)$ est une génératrice détachée du cône.

En outre les plans $\lambda o \mu$ et $\lambda o \nu$ sont tangents multiples d'ordre $(n - 1)$ et $(p - 1)$.

Construction des cones.

1. Etant donné deux faisceaux de plans formant un groupe du $(n+p)^e$ degré, nous pouvons considérer deux plans homologues coupant les faisceaux.

Ces plans correspondent à deux faisceaux de rayons avec un rayon homologue commun; autrement dit *le cône du* $(n+p)^e$ *degré dépend d'un cône de la* $(n+p-1)^e$ *classe régi par le corollaire.*

2. En faisant $p = 1$, on a des groupes du $(n+1)^e$ degré, et les cônes correspondants dépendent de cônes auxiliaires de la n^e classe. De la même manière que nous avons montré que les courbes de cette nature se ramenaient par une alternance de classes et de degrés jusqu'à des coniques nous pouvons établir la même loi pour les cônes et dire :

Un cône du $(n+1)^e$ *degré avec une génératrice multiple d'ordre* n *se ramène à un cône de la* n^e *classe avec un plan tangent multiple d'ordre* n — 1.

La transformation dualistique est applicable à ce dernier cône et en procédant comme dans les courbes, nous dirons :

La construction d'un cône du $(n+1)^e$ *degré se ramène à celle d'un cône du deuxième degré ou de la deuxième classe.*

3. Théorème. *Quand une génératrice multiple d'ordre* (n — 1) *d'un cône du* n^e *degré est considérée comme arête d'un faisceau de plans formant une involution*

1. Etant donné deux faisceaux de rayons formant un groupe de la $(n+p)^e$ classe, nous pouvons considérer deux rayons homologues et les joindre par des plans avec tous les autres rayons des faisceaux. On forme ainsi deux faisceaux de plans avec un plan homologue commun donnant un groupe du $(n+p)^e$ degré dépendant du corollaire. En d'autres termes : *Un cône de la* $(n+p)^e$ *classe dépend d'un cône auxiliaire du* $(n+p-1)^e$ *degré régi par le corollaire.*

2. Avec $p = 1$ les cônes auxiliaires sont du n^e degré. Il est évident que les développements connus pour les courbes sont applicables aux cônes et nous avons :

Un cône de la $(n+1)^e$ *classe avec un plan tangent multiple d'ordre* n *se ramène à un cône du* n^e *degré avec une génératrice multiple d'ordre* n — 1.

Ce cône est évidemment dépendant d'un autre comme nous l'avons vu dans les courbes et par une succession de transformations nous pouvons remonter à un cône du deuxième degré ou de la deuxième classe.

3. Théorème. *Si dans un plan tangent multiple d'ordre* (n — 1) *d'un cône de la* n^e *classe nous considérons une involution de rayons de degré* n *ayant le som-*

du n^{e} *degré, les lignes d'intersection des* n *plans homologues avec le cône sont dans un même plan, et les plans correspondant à chaque groupe de* n *plans de l'involution passent par une même arête commune.*

La démonstration de ce théorème découle, *a priori*, du théorème des cônes, du $(n + p)^{e}$ degré.

4. Les cônes du 4^{e} degré avec deux générations doubles dépendent d'un cône auxiliaire de la troisième classe donné par neuf plans tangents.

La construction de ce cône peut être déduite directement de la construction que nous avons indiquée pour les courbes de la 3^{e} classe par neuf tangentes.

met du cône comme centre, les plans tangents du cône issus des n *rayons homologues d'un même groupe passent par une arête commune et les arêtes relatives aux différents groupes de rayons sont situées dans un même plan.*

La démonstration de ce théorème découle du théorème général des cônes de la $(n + p)^{e}$ classe.

4. Les cônes de la 4^{e} classe avec deux plans tangents multiples d'ordre deux, dépendent d'un cône auxiliaire du troisième degré donné par neuf génératrices.

La construction de ce cône est analogue à la construction que nous avons indiquée pour les courbes du 3^{e} degré par neuf points.

III

Surfaces réglées du $(n + p)^{e}$ degré.

Deux faisceaux de plans dont les arêtes ne sont pas situées dans un même plan peuvent également former un groupe du $(n + p)^{e}$ degré. Dans ce cas, tout plan du premier faisceau correspond à p du deuxième et tout plan du deuxième à n du premier.

Théorème. — *Le lieu géométrique des lignes d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plans dont les arêtes ne sont pas dans un plan et qui forment un groupe du* $(n + p)^{e}$ *degré est une surface réglée du* $(n + p)^{e}$ *degré. La première arête est une ligne multiple de la surface, d'ordre* n *et la deuxième une d'ordre* p.

Nous pouvons prendre une des arêtes comme *axe* des x et la deuxième comme étant située dans le plan yoz.

Les plans du premier faisceau auront comme équation :

$$z = \alpha y .$$

Si maintenant nous posons comme équations de la deuxième arête :

$$k_1 y + k_2 z + k_3 = 0$$
$$x = 0 ,$$

tout plan passant par cette droite aura pour équation :

$$\beta x + k_1 y + k_2 z + k_3 = 0 .$$

Les valeurs k_1, k_2, k_3 sont des constantes qui définissent l'arête, tandis que α et β sont les paramètres variables qui donnent les plans homologues.

α et β sont liés par l'équation (1). En tirant leurs valeurs des équations que nous avons et en les introduisant dans l'équation (1) nous obtiendrons évidemment le lieu géométrique cherché.

On a :

$$\alpha = \frac{z}{y}$$

$$\beta = - \frac{k_1 y + k_2 z + k_3}{x}$$

On obtient ensuite :

$$\left(\frac{-1}{x}\right)^p (k_1 y + k_2 z + k_3)^p F_1^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{x}\right)(k_1 y + k_2 z + k_3) F_p^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) = 0$$

ou

$$x^p F_{p+1}^{(n)}(yz) + x^{p-1}(- k_1 y - k_2 z - k_3) F_p^{(n)}(yz) + \dots + (- k_1 y - k_2 z - k_3)^p F_1^{(n)}(yz) = 0$$

Cette équation correspond à une surface du $(n + p)^e$ degré.

La surface étant engendrée par une droite qui se meut en restant dans deux plans homologues, elle est bien une surface réglée. D'autre part tout plan passant par l'axe ox

$$z = my \quad \text{ou} \quad \frac{z}{y} = m = \text{constante}$$

donne comme intersection avec la surface :

$$x^p \cdot A + x^{p-1}(My + N)B + x^{p-2}(My + N)^2C + \ldots + (My + N)^p \cdot I = 0$$

Il en résulte que l'axe est une droite multiple d'ordre n et l'on démontrerait de la même manière que la droite $k_1y + k_2z + k_3 = 0$ est une droite multiple d'ordre p.

L. Crelier (Bienne).

SUR LES DÉMONSTRATIONS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On n'a pas l'habitude, pour démontrer les théorèmes qui appartiennent spécialement à la Géométrie descriptive, de recourir aux moyens fournis par cette dernière.

On s'impose ainsi des considérations inutilement compliquées et on méconnaît le but général de cette science, au moment même de la développer. Les démonstrations suivantes de trois théorèmes, dont deux sont bien connus et le troisième peut-être *nouveau*, montreront l'avantage de faire autrement. Cette manière de procéder placerait la Géométrie descriptive à doubles projections naturellement avant la méthode des plans cotés, contrairement à ce que suppose le programme officiel des lycées de France.

Théorème I. — *Pour que deux droites* AB, CD, *soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de leurs* *projections sur un plan* P *parallèle à la direction de l'une* AB *et non perpendiculaire à l'autre* CD.

Pour le démontrer je prendrai P pour plan horizontal de projections et ab pour ligne de terre. AB sera une horizontale, par conséquent parallèle à la direction de ab ou de la ligne de terre XX.

1° La condition est *nécessaire:* CD étant perpendiculaire à AB l'est à XX et est donc soit de bout soit de profil. Dans les deux cas cd est perpendiculaire à XX ou ab.

2° Elle est *suffisante:* cd étant perpendiculaire à ab ou XX, CD est soit de bout soit de profil, par conséquent perpendiculaire à XX et à sa parallèle AB.

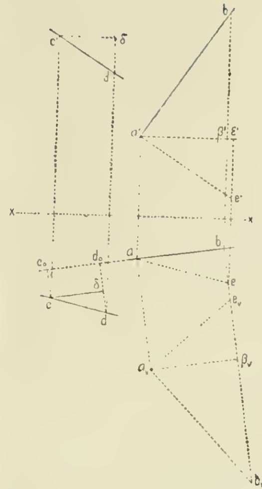
Théorème II. — *Pour que les projections de deux droites perpendiculaires* AB, CD, *soient deux droites perpendiculaires il faut et il suffit que le plan de projection* P *soit parallèle à la direction de l'une des droites sans être perpendiculaire à l'autre.*

Ici la condition suffisante revient à la condition nécessaire du théorème précédent. Pour démontrer la nécessité je prends encore P pour plan horizontal de projections et ab par exemple pour ligne de terre XX. Par hypothèse cd est perpendiculaire à ab ou XX, donc CD est soit de bout soit de profil. Dans le premier cas elle est parallèle à la direction du plan horizontal P. Dans le second cas, comme AB est frontale et que CD lui est perpendiculaire, $a'b'$ sera perpendiculaire à $c'd'$ et par conséquent parallèle à la direction de XX; AB est donc horizontale ou parallèle à la direction de P.

Théorème III. — *Pour que deux droites* AB *et* CD, *non parallèles aux directions des plans de projections, soient perpendiculaires, il faut et il suffit que les cotes réduites de leurs secondes extrémités* B *et* D, *par rapport respectivement à leurs premières extrémités* A *et* C, *soient inversément et négativement proportionnelles aux segments* $a\ b$, $c_0\ d_0$, *obtenus en projetant orthogonalement les projections horizontales* ab, cd *des deux droites sur l'une quelconque d'entre elles et choisissant les origines* a *et* c_0 *d'après les premières extrémités* A et C.

$$\overline{\beta' b'} \,.\, \overline{\delta' d'} = -\overline{ab} \,.\, \overline{c_0 d_0} \,. \tag{1}$$

Le théorème reste vrai si l'on remplace les cotes par les ordonnées et les projections horizontales par les projections verticales.



Pour le démontrer je mène par A la parallèle AE à CD et j'emploie un second plan vertical de projections parallèles à AB. On remarque que ae et $a'e'$ sont parallèles respectivement à cd et à $c'd'$. Les secondes projections verticales de AB et AE sont $a_v b_v$, $a_v e_v$ telles que

$$\overline{\beta_v b_v} = \overline{\beta' b'} \text{ et } \overline{\beta_v e_v} = \overline{\varepsilon' e'} .$$

Le parallélisme de AE et CD, celui des côtés dans les triangles $\alpha' e' \varepsilon'$ et $c'd'\delta'$ ainsi que dans les triangles aeb et $cd\delta$ où $c\delta$ est parallèle à ab, donne

$$\frac{\overline{ae}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{a'e'}}{\overline{c'd'}}$$

$$\frac{\overline{a'e'}}{\overline{c'd'}} = \frac{\overline{\varepsilon' e'}}{\overline{\delta' d'}}$$

$$\frac{\overline{ae}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{c\delta}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{c_o d_o}} , \quad \text{donc}$$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{c_o d_o}} = \frac{\overline{\varepsilon' e'}}{\overline{\delta' d'}} . \tag{2}$$

1° La condition est nécessaire: De ce que CD et par conséquent AE sont perpendiculaires à AB, il résulte d'abord que $a_v e_v$ l'est à $a_v b_v$ et ensuite qu'il a été possible de choisir e sur la seconde ligne de rappel bb_v; cette dernière particularité ne serait irréalisable que si ae était perpendiculaire à ab, ce qui est contraire à notre hypothèse, puisque l'une des deux droites AB, AE ou AB, CD serait horizontale. Le triangle $a_v b_v e_v$, rectangle en a_v, donne

$$\overline{a_v \beta_v}^2 = - \overline{\beta_v b_v} \times \overline{\beta_v e_v} , \tag{3}$$ d'où $$\overline{ab} \times \overline{ab} = - \overline{\beta' b'} \times \overline{\varepsilon' e'} \tag{4}$$

Cette relation est homogène par rapport au second facteur ab et au facteur $\varepsilon' e'$, on peut donc remplacer ces segments par les grandeurs dont (2) constate la proportionnalité. On trouve ainsi

$$(5) \qquad \overline{ab} \times \overline{c_0 d_0} = - \overline{\beta' b'} \times \overline{\delta' d'}\,, \quad \text{ce qui est (1).}$$

2° La condition est suffisante: La relation (1) est vraie par hypothèse. Donc d'abord on peut choisir e comme précédemment: en effet, le premier membre de (1) est significatif donc $c_0 d_0 \gtrless o$ et par suite cd n'est pas perpendiculaire à ab. Ensuite (5), qui est une forme de (1), devient (4) par la substitution inverse de la précédente, et par conséquent (3). Celle-ci prouve que $\widehat{b_v a_v e_v}$ est droit, donc $a_v e_v$ est perpendiculaire à $a_v b_v$, donc AE ou CD l'est à AB.

Corollaire. — La condition de perpendicularité de deux droites AB, CD, se simplifie si l'on choisit les extrémités de celle CD, qui ne fournit pas l'axe de projections ab, de manière que la projection orthogonale correspondante $\overline{c_0 d_0}$ soit égale à la cote réduite $\overline{\beta' b'}$ relative à l'autre droite: il faut alors et il suffit que la secondecote réduite $\delta' d'$ ne diffère que par le signe de la valeur de la projection horizontale ab de cette autre droite.

George Lehr (Montauban).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — VII

Question 14.

14. Quand vous abordez une question cherchez-vous à étudier de suite d'une façon aussi générale que possible les problèmes plus ou moins précis que vous vous posez? Préférez-vous habituellement traiter d'abord des cas particuliers, ou un cas étendu, pour généraliser ensuite progressivement?

C'est cette dernière méthode « la méthode expérimentale » comme l'appelle l'un de nos collaborateurs, qui est la plus répandue. Elle consiste à procéder par généralisations successives en partant de cas simples. Sur 60 réponses à la question *14*, 30 doivent être rangées dans cette première catégorie. Mais il n'existe pas de méthode générale s'appliquant à la fois à toutes les questions et à tous les mathématiciens. Il en est aussi un bon nombre (14) qui préfèrent aborder directement le cas général et utiliser les cas particuliers simplement à titre de vérification. Enfin, les 16 autres emploient tantôt l'une des méthodes, tantôt l'autre, suivant la nature de la question.

Beaucoup de réponses sont à peu près identiques. Nous reproduisons ci-après les plus typiques; elles caractérisent en même temps les différentes méthodes.

Rép. I (France). — Oui, je préfère rester dans l'étude générale; mais quand je ne réussis pas promptement, je cherche la *clef du général* dans l'étude approfondie et le rapprochement des cas particuliers faciles. Une théorie mathématique a *presque toujours*

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, nº 5, p. 387-395; nº 6, p. 473-478, 1905; 8e année, nº 1, p. 43-48, nº 3, p. 217-225, nº 4, p. 293-310, nº 5, p. 383-385, nº 6, p. 463-475, 1906.

pour base son cas particulier le plus simple. Exemple : la théorie des équations linéaires se fonde sur le cas d'une seule inconnue, celle des séries entières sur celui de la simple progression géométrique $1 + x^2 + x^3 + \ldots$ (Th. d'Abel), celle des singularités des fonctions implicites sur le cas du monôme à exposant fractionnaire $u = x^{\frac{n}{m}}$, ramené à l'équation binôme $u^m - x^n = 0$, etc.

Ch. Méray.

Rép. IV (Autriche). — Cela dépend de la difficulté du sujet. Si l'on a l'espoir de pouvoir dominer le cas général, il est préférable de tendre dès le début vers la généralité. Zindler.

Rép. VI (Allemagne). — J'examine d'ordinaire le cas général et je cherche à m'assurer de sa justesse et de sa portée par des hypothèses particulières. ...

Rép. IX (France). — Suivant les cas ; mais plus un sujet est neuf, plus il est nécessaire de s'en faire une idée sur des cas simples ; c'est la méthode expérimentale. (...)

Rép. XV (Allemagne). — J'ai beaucoup appris et trouvé par l'étude de cas particuliers. (...)

Rép. XXII (États-Unis). — Dans beaucoup de problèmes, lorsque le cas général est trop difficile, je préfère approfondir d'abord un certain nombre de cas particuliers et je cherche ensuite à obtenir le cas général par induction. E. B. Escott.

Rép. XXIII. (France). — Je n'ai pas de règles absolues : d'ordinaire j'étudie des cas simples, puis je me trouve conduit à généraliser, sans avoir eu *d'avance* la volonté de cette généralisation.

C. A. Laisant.

Rép. XXXIII (France). — C'est une question de mesure. En général l'esprit humain ne peut aller que *du particulier au général.* Mais il faut se méfier : ainsi, pour les *courbes algébriques*, les singularités diminuent le nombre des transcendantes attachées, tandis que c'est le contraire pour les *surfaces algébriques.* De même le problème de Dirichlet peut offrir plus de difficultés dans le plan que dans l'espace. R. d'Adhémar.

Rép. XLIII (France). — Actuellement, je cherche à étudier la question aussi généralement que possible, en principe, quitte à en tirer ce que je peux, en particularisant au besoin. Mais, inversement, si l'idée m'en vient, je généralise. A ce point de vue je fais comme je peux.

Pratiquement, ou, si l'on veut, inconsciemment, j'ai plutôt la tendance à généraliser, mais par la marche naturelle de mes idées plutôt que systématiquement.

J'ai remarqué plusieurs fois que l'étude d'une voie ou d'un but déterminé aboutissant à un échec m'engageait dans une autre voie où je réussissais, ce qui me fait dire, assez souvent, on trouve ce qu'on peut, non ce qu'on veut. E. Maillet.

Rép. LV (Etats-Unis). — Autrefois, notamment dans mes recherches sur la théorie des groupes, je partais de cas particuliers ; puis je suis parvenu, peu à peu, à aborder immédiatement le cas général en vérifiant toujours à l'aide de cas simples.

L. E. Dikson.

Rép. LXIX (Italie). — Je préfère partir du cas général lorsque mes moyens intellectuels me le permettent. (...)

Rép. LXXVI (France). — Les concepts sont d'autant plus précis et faciles à manier qu'ils sont plus particuliers ; mais une propriété a d'autant plus de valeur qu'elle est plus générale. J'adopte le plus haut degré de généralité que me permet ma capacité de conception, sauf à procéder à une généralisation ultérieure. Combebiac.

Question 15.

15. — *Faites-vous une distinction, au point de vue de la méthode, entre le travail d'invention et celui de rédaction ?*

Il existe évidemment une différence, au point de vue de la méthode, entre le travail d'invention où la pensée a, pour ainsi dire, libre cours, et celui qui consiste à coordonner d'une manière systématique les résultats. Nos correspondants sont presque unanimes à le reconnaître. Sur 46 réponses, 42 parlent dans ce sens ; les 4 *non* ne sont pas motivés. Les réponses affirmatives sont souvent aussi très brèves, de simples *oui ;* d'autres sont accompagnées de développements très intéressants, ainsi que nos lecteurs peuvent le constater d'après les extraits ci-dessous.

Rép. I (France). — L'invention n'a pas de méthode, sauf le passage du simple au composé ; le souci *constant* des analogies (elles sont perceptibles entre *toutes* choses au monde), le cheminement prudent et progressif du connu, *pris pour base d'opération*, à l'inconnu, objet des explorations. Dans la rédaction, l'ordre historique me parait détestable : il faut toujours présenter les choses de la manière et dans l'ordre qui rendent leur conception *séduisante* et *définitive*. Ch. Méray.

Rép. II (France). — L'un porte l'autre. Je ne puis mieux dire.

A. Audebrandt.

Rép. IV (Autriche). — Oui, dans le travail d'invention on ne peut immédiatement s'astreindre à une rigueur absolue.

Zindler.

Rép. VII (Allemagne). — Oui. — Pendant une lecture, avoir le crayon à la main, réfléchir, puis rédiger. M. Cantor.

Rép. IX (France). — Oui. On trouve par le chemin que l'on peut. Quand on a trouvé on voit clair, alors on voit quel est le meilleur chemin. C'est celui qu'il faut montrer. Autrement la société n'est plus une société coopérative, ce qu'elle doit être. (...)

Rép. XXIII (France). — La distinction est essentielle; mais le travail de rédaction provoque assez souvent l'invention; on est amené alors à interrompre la rédaction pour suivre la pensée qui est venue. C. A. LAISANT.

Rép. XXXVIII (Allemagne). — Oui, la rédaction est plus systématique. WERNICKE.

Rép. XLVIII (Hollande). — Pendant le travail d'invention les théorèmes se présentent souvent sans ordre logique, ce qui fait que, par exemple, une conséquence se revèle quelquefois avant le théorème principal. Le travail de rédaction doit y apporter l'ordre et combler les lacunes. J. CARDINAAL.

Rép. LXXVI (France). — Oui, certes. Le point de vue n'est pas le même. Bien heureux ceux à qui les résultats se présentent sous une forme ordonnée et propre à être facilement assimilée par le public. COMBEBIAC.

Rép. LXXVII (Etats-Unis). — Oui. Le premier est un vrai plaisir ; le second un labeur très ardu. F. R. MOULTON.

Questions 16 et 17

16. — Vos habitudes de travail, depuis vos études terminées, vous semblent-elles avoir été sensiblement les mêmes ?

17. — Dans vos principales recherches, avez-vous poursuivi constamment votre but, sans discontinuité, ou bien avez-vous abandonné le sujet à certains moments, pour y revenir plus tard ?

Si vous avez pratiqué les deux méthodes, de laquelle, en général, vous êtes-vous le mieux trouvé ?

Si l'on parcourt les réponses à la question *16*, on est frappé de voir combien elles sont à peu près identiques. Pour la plupart de nos correspondants (45 sur 53) les habitudes de travail sont restées sensiblement les mêmes. Les réponses négatives elles-mêmes parlent plutôt d'une unification dans la méthode que de modifications profondes.

La majorité est encore plus forte pour la question 17 et cela tient à la nature même des questions que se posent les mathématiciens. 56 sur 62 estiment que des interruptions sont nécessaires. Il est rare, si non impossible, que l'on puisse résoudre et épuiser une question de quelque ampleur sur un sujet nouveau dans une première étude. Ce n'est que lorsqu'il s'agit de problèmes dont on possède déjà les éléments principaux que l'on peut se borner à un seul examen pour obtenir un ensemble de résultats satisfaisants et bien coordonnés. Presque toutes les réponses sont rédigées dans ce sens; nous nous bornons à reproduire ici celles qui offrent le plus de variétés dans les considérations qui viennent justifier la réponse.

Rép. I (France). — 16. Oui, depuis l'âge tout au moins où j'ai pu avoir quelques idées à moi. — 17. Il faut songer sans cesse au sujet que l'on travaille, s'y acharner souvent. Mais il est bon parfois de le laisser pour revenir plus tard, car alors l'esprit a généralement perdu des *mauvais plis* qui lui cachaient obstinément des choses aperçues sans peine *dans d'autres dispositions*.

Ch. Méray.

Rép. II (France). — 16. Elles n'ont pas pu être les mêmes, vu la variété des occupations que j'ai eues. Cependant, plus j'avance en âge, plus je me possède, plus la méthode tend à s'unifier 1° dans les recherches, 2° les réflexions, 3° la notation, 4° les discussions, 5° la rédaction. — 17. J'ai dû pratiquer les deux méthodes ; j'ai une préférence intuitive pour la première, la seconde m'a parfois réussi. Audebrandt.

Rép. VI (Allemagne). — 16. Oui. — 17. En général, je me suis occupé d'un sujet sans interruption essentielle ; mais dans beaucoup de cas je suis revenu plus tard sur la même question.

(...)

Rép. VII (Allemagne). — 16. Ma manière de travailler est la même depuis 50 ans. — 17. Une fois engagé dans une recherche je ne l'abandonne que lorsque j'ai terminé, ou que j'ai la conviction de ne pas pouvoir la terminer. Mor. Cantor.

Rép. IX (France). — 16. Oui. — 17. J'ai fait les deux, l'interruption a l'inconvénient d'exiger un nouvel effort de mise au point. Il ne faut l'employer que si on y est obligé ou si l'on sent qu'on aurait avantage à reprendre son étude avec un esprit nouveau.

(...)

Rép. XI (Russie). — 17. Les grands problèmes sont toujours présents à mon esprit et j'y reviens toujours ; quant à des sujets moins étendus, ils peuvent souvent être traités d'une seule haleine.

N. Delaunay.

Rép. XIII (Angleterre). — 17. Lorsqu'il s'agit de problèmes difficiles, il est souvent nécessaire de les abandonner. Certaines questions peuvent être traitées en quelques semaines ou mois; d'autres doivent attendre et subir des interruptions de plus d'une année. (...)

Rép. XVI (Belgique). — 16. Oui. — 17. J'ai souvent abandonné un sujet pendant des mois et des années, pour y revenir ensuite.
STUYVAERT.

Rép. XXI (Autriche). — 16. Ma méthode de travail a toujours été la même. — 17. Il m'est arrivé d'interrompre un travail parce que je ne pouvais pas avancer et de le reprendre plus tard avec succès. Toutefois, j'ai fait mes meilleurs travaux d'un seul trait.
L. BOLTZMANN.

Rép. XXIII (France). — 16. Oui, à peu près. — 17. Je n'ai poursuivi le sujet qu'autant qu'il continuait à m'intéresser. Il faut une certaine persistance, mais, quand arrive la fatigue, on ne fait plus grand chose de bon. Souvent j'ai laissé de côté, très longtemps, un travail entrepris, pour le reprendre beaucoup plus tard, et je ne m'en suis pas mal trouvé. C.-A. LAISANT.

Rép. XXXVII (France). — 16. Oui. — 17. Lorsqu'un sujet paraît ne plus rien donner, il y a tout avantage à l'abandonner, sauf à le reprendre après un an ou deux. Bien souvent on voit alors la question à un autre point de vue. Des questions oubliées et reprises à deux ou trois intervalles m'ont conduit à des résultats importants. Il est rare que du premier coup on tire d'une question tout ce qui est possible. FABRY.

Rép. XLVI (Espagne). — 16. Oui. — 17. Dans les recherches je trouve convenable une certaine discontinuité. Vaincre les difficultés dans certains moments favorables. La continuité dans une seule recherche produit de la fatigue. Z.-G. de GALDEANO.

Rép. LVII (États-Unis). — 16. Ma méthode n'est pas aussi systématique et aussi régulière que je le désirerais. — 17. J'ai la tendance à abandonner une longue étude pour la reprendre après quelque temps. Des travaux plus courts peuvent être traités d'une manière continue. Il me semble que la meilleure méthode consiste en un travail continu avec interruptions pour le *repos*.
E.-F. THOMPSON.

Rép. LXXXIV (Suisse). — 17. J'ai souvent abandonné un sujet pour y revenir ensuite. Cela dépend, du reste, de la disposition dans laquelle on se trouve. G. OLTRAMARE.

Questions 18 et 20[1]

18. — Quel est, d'après vous, le temps minimum qu'un mathématicien ayant d'autres occupations journalières doit

1 L'étude des questions 18 et 20 est due à M. Th. Flournoy, professeur de psychologie à l'Université de Genève.

consacrer dans sa journée, sa semaine et son année aux mathématiques pour arriver à cultiver avec fruit certaines branches des mêmes mathématiques? Vaut-il mieux quand on a le choix, d'après vous, travailler tous les jours un peu : une heure, par exemple, au minimum?

20. — Si vous avez des occupations professionnelles absorbantes, comment vous appliquez-vous à les concilier avec vos travaux personnels?

Il nous a paru indiqué de rapprocher les réponses aux questions *18* et *20* à cause de leur connexité, et de renvoyer à un prochain article l'étude du nº *19*.

Près des deux tiers de nos documents renferment des réponses à la question *18*; mais elles sont loin de s'accorder entre elles, ce qui n'est pas pour étonner lorsqu'on pense à la variété des tempéraments individuels, et aussi aux divers sens du mot *travailler*. Autre chose est en effet d'apprendre, c'est à dire d'étudier et de s'assimiler une science déjà existante, autre chose de préparer un enseignement, autre chose encore d'inventer et de se livrer à des recherches originales, etc. Il y a, de même, des natures pondérées, qui font tout avec suite et régularité, comme si elles ignoraient également la lassitude et l'emballement; et il y a des natures explosives, procédant par saccades ou *bourrées* suivies de périodes d'inactivité plus ou moins prolongées. Ce sont ces oppositions, et leurs combinaisons diverses, qu'on voit se refléter dans les extraits ci-dessous de notre enquête.

Les uns recommandent avant tout la régularité du travail, à raison d'une, deux, trois, jusqu'à six heures chaque jour ou chaque semaine. Les autres, davantage frappés des phénomènes d'entrainement et de fatigue, préconisent les coups de collier, et ont plus de confiance, par exemple, dans deux journées consécutives de travail par semaine, ou dans quatre heures par jour pendant deux mois, que dans une ou deux heures chaque jour pendant toute l'année. D'autres encore, songeant évidemment avant tout à la production originale, ne veulent d'aucune règle et s'abandonnent pour ainsi dire à l'inspiration du moment, travaillant jour et nuit quand une idée les tient, quitte à ne plus rien faire ensuite pendant des semaines ou des mois. De tout cela on ne peut rien conclure, en somme, de général. Mais n'est-ce pas aussi un résultat que d'avoir mis en lumière cette extrême diversité, et par conséquent le droit et le devoir de chacun de se forger sa propre méthode et d'adopter le mode de travail que l'expérience lui aura montré être le mieux adapté à ses circonstances personnelles ?

Même conclusion, ou absence de conclusion, quant à la question 20, qui a provoqué une quarantaine de réponses. Il n'y a pas de panacée, il n'y a que des expédients variables et généralement précaires, pour résoudre l'éternel conflit entre les devoirs professionnels, absorbants et ingrats, et les recherches personnelles, les chères études de prédilection. En se levant tôt, en se tenant à un horaire rigoureux, en empiétant sur le repos de la nuit et des vacances, etc., chacun se tire d'affaire comme il peut — rarement à son entière satisfaction —. Heureux les privilégiés à qui la destinée, et leur nature, permettent de concilier pleinement ces deux sortes d'occupations, ou de se confiner exclusivement dans l'une d'elles !

Rép. I (France). — 18. Je ne puis formuler aucune règle : à un travail de copie, on peut se mettre, se retirer quand on veut ; mais le travail *intellectuel* ne produit rien s'il n'entraîne pas l'ouvrier, et dans ces conditions il est presque impossible de s'y mettre quand il n'attire pas, de s'en arracher quand il attire. Je ne considère pas comme possible d'abandonner un problème dont la solution est en bonne voie, autrement que sous le coup de quelque nécessité.

20. La difficulté n'existe pas pour moi, puisque mon métier consiste précisément à cultiver les mathématiques. Je constate que leur étude (et le reste) m'a fait trop souvent négliger mes affaires proprement dites. MÉRAY.

Rép. II (France). — 18. *Nulla dies sine linea* !... Ce doit être l'idéal, mais la réalité en est bien loin ! — 20. Utiliser les marches libres... comme on peut ! AUDEBRAND.

Rép. III (Angleterre). — Il faut prendre tout le temps qu'on peut, et c'est bien peu. Une heure n'est pas assez pour s'entraîner. BRYAN.

Rép. VII (Allemagne). — 18. Il m'est impossible de travailler régulièrement. Tantôt j'ai travaillé 12 à 14 heures par jour, tantôt je n'ai pas travaillé du tout, ou peu. Mais je ne voudrais absolument pas ériger cela en règle. — 20. J'ai toujours considéré qu'il fallait d'abord m'acquitter de mes devoirs professionnels ; mes travaux de prédilection sont toujours venus en seconde ligne. CANTOR.

Rép. IX (France). — Réponse difficile. En thèse générale, il me faut de la continuité dans le travail. (...)

Rép. XI (Russie). — 18. *Ars longa et vita brevis est :* on ne saurait rattraper le temps. Travailler chaque jour une heure et seulement une heure, dans la voie des recherches scientifiques, est tout à fait contraire à ma nature : lorsque je suis possédé par une idée, elle est dans ma tête toute la journée et je saisis tous les instants possibles pour faire mes calculs et mes constructions. — 20. En pensant à mes problèmes même au milieu des occupations professionnelles, et en réservant les soirées pour les recherches et lectures mathématiques. DELAUNAY.

Rép. XIII (Angleterre). — 18. Il vaut mieux travailler 3 heures tous les deux jours qu'une demi-heure chaque jour. Mais il faudrait donner au moins 3 ou 4 heures par jour aux recherches si on en a le loisir, c'est-à-dire si les autres travaux ne prennent pas plus de 6 heures. (...)

Rép. XIV (Irlande). — 18. C'est l'inclination qui doit décider. Mais les distractions sont fatales. — 20. Il faut séparer entièrement ces deux sortes de choses, de façon à les mettre sur des jours différents. (...)

Rép. XVI (Belgique). — 18. Deux heures par jour au minimum et de préférence tous les jours. — 20. Les devoirs professionnels ont naturellement le pas sur les travaux personnels.

STUYVAERT.

Rép. XX (France). — 18. Je considère qu'il faut donner une ou deux heures par jour aux mathématiques pour maintenir le niveau de ses connaissances. — 20. Très simplement : en me levant matin. BROCARD.

Rép. XXI (Autriche). — 18. Je n'avancerais pas en ne travaillant qu'une heure par jour. Quand je suis en train, je travaille six heures par jour, et davantage ; mais ensuite, quand je ne suis plus en train, je ne fais plus rien pendant des mois. — 20. Je n'ai pas d'occupations professionnelles régulières en dehors de mon enseignement. Ce dernier favorise à un haut degré mon activité scientifique en stimulant continuellement mes lectures, en me faisant exprimer à ma façon et sous une forme précise ce que j'ai lu, et en me mettant en contact avec des jeunes gens travailleurs dont les questions me sont un nouveau stimulant.

BOLTZMANN.

Rép. XXII (Etats-Unis). — Il est difficile de fixer un minimum ; mais même avec une ou deux heures seulement par semaine, on peut faire des progrès évidents. Je pense qu'il vaut mieux travailler un peu chaque jour, pourvu que ce ne soit pas moins d'une heure à la fois, plutôt que de travailler plus longuement, mais à des intervalles plus prolongés. ESCOTT.

Rép. XXIII (France). — 18. Il n'y a pas de règle à formuler. Pour mon compte, je suis resté des semaines, peut-être des mois, sans m'occuper de mathématiques. Par contre, j'ai passé quelquefois des nuits entières à travailler sans interruptions. Il faut que l'on soit entraîné par le sujet; quand l'attrait cesse, on ne fait rien qui vaille. C'est vrai pour l'invention, pour la rédaction et pour les lectures.

20. J'ai toujours pris un quart d'heure s'il s'offrait à moi, une semaine s'il m'était possible. Même très occupé, on trouve toujours un peu de temps pour faire des mathématiques quand on en a le goût. Il m'est souvent arrivé de griffonner sur mon pupitre des équations au milieu des séances les plus tumultueuses de la Chambre. LAISANT.

Rép. XXVI (France). — 18. Ma manière de travailler exclut cette question. Je travaille en me promenant. S'il faut un calcul un peu compliqué et que je n'aie sur moi pas de quoi écrire, j'achève au retour. RICHARD.

Rép. XXXIII (France). — 18. Il me semble qu'en une heure on ne fait rien. J'aurais plus de confiance dans 4 heures par jour pendant 2 mois qu'en une heure chaque jour de l'année.

R. D'ADHÉMAR.

Rép. XXXV (France). — 18. Question toute personnelle. Il faut évidemment que l'on dispose, soit toutes les semaines de quelques heures, soit tous les ans de quelques semaines, pendant lesquelles l'esprit n'est ni absorbé, ni fatigué par les occupations professionnelles habituelles. Il est préférable de travailler deux jours de suite chaque semaine plutôt que une heure ou deux tous les jours (avec d'autres occupations absorbantes). (...)

Rép. XXXIX (Grèce). — 18. Deux à trois heures par jour au moins, excepté les dimanches et peut-être un à deux mois dans l'année. Oui, tous les jours, ne fût-ce même que pour une demi-heure. HATZIDAKIS.

Rép. XL (Allemagne). — 18. J'estime qu'il vaut mieux s'occuper de mathématiques chaque jour qu'une fois par semaine, etc. Il serait désirable de s'en occuper au moins deux heures chaque matin; il faut que l'esprit soit frais pour pouvoir produire.

MENZEL.

Rép. XLI (Écosse). — 18 et 20. J'aimerais consacrer toute la journée aux mathématiques pures, mais hélas je ne peux pas, j'ai trop peu de loisir pour cela (il est astronome dans un observatoire *Réd.*). (...)

Rép. XLII (Italie). — 18. Je n'ai jamais eu le choix. J'ai pris le temps où je pouvais. Pendant les vacances, j'ai préféré travailler chaque jour quatre ou cinq heures, le matin pour l'invention, le soir pour la rédaction. — 20. En sacrifiant toutes les heures qui devraient être accordées au repos et au divertissement.

AMODEO.

Rép. XLIII (France). — 18 et 20. Quand j'avais un service d'ingénieur, en province, j'avais pour principe de *toujours* faire, même le dimanche, au moins une demi-heure, ou mieux une heure de mathématiques par jour (lectures, recherches ou rédactions). Comme me l'avait dit Hermite avant ma sortie de l'Ecole des Ponts et Chaussées, quand on le veut sérieusement on trouve *toujours* ce temps pour étudier les mathématiques. Avec ce procédé on fait quelque chose : c'est pour moi un minimum de principe, il est désirable qu'on ne reste pas au-dessous d'une heure en moyenne. MAILLET.

Rép. XLIV (Italie). — 18. Pour être *vraiment* mathématicien, il faut vouer à cette sublime science *tout* son temps disponible et y penser constamment... MARLETTA.

Rép. XLVI (Espagne). — 18. Quand il y a d'autres occupations, je conseillerais au moins trois heures par jour.

Z. de GALDEANO.

Rép. XLVII (Suisse). — 18. Il faut travailler les mathématiques tous les jours, au moins un peu, une heure au minimum. — 20. Il me faut employer mes moments de loisir, soirées, dimanches, vacances. GUBLER.

Rép. XLIX (France). — 18. Certainement deux ou trois heures consacrées par jour aux mathématiques permettraient une spécialisation assez rapide ; mais combien peu, surtout chez les professeurs qui veulent travailler personnellement, peuvent s'estimer assez heureux pour jouir régulièrement même d'une heure ? — 20. Ceci devient presque de l'adresse : il faut avoir l'esprit assez délié, le travail assez facile pour ne consacrer, l'habitude aidant, que le temps strictement nécessaire aux occupations professionnelles et s'en réserver un peu pour les *chères études*. On y arrive à la longue, mais ce n'est pas donné à tout le monde. Heureux les rentiers qui ont du temps de trop ! BARBARIN.

Rép. L (Etats-Unis). — 18 et 20. Une heure par jour, en y ajoutant de temps à autre une demi-journée au moins de travail continu, me paraît nécessaire pour arriver à un résultat. Je m'applique à trouver chaque jour un moment pour faire des mathématiques, et, en outre, une journée entière chaque semaine. DAVIS.

Rép LI (France). — 18. Cela dépend beaucoup des circonstances. Ma vie a été exceptionnellement éprouvée, très traversée par les longues maladies de tout mon entourage. De là une très grande inégalité. La régularité vaudrait certainement mieux, en lui adjoignant des coups de collier au service de l'inspiration lorsqu'elle vient. — 20. Avec un travail constant, inlassable, sans aucune perte de temps et avec le plus possible d'ordre et de méthode. Haton de la Goupillière.

Rép. LVII (Etats-Unis). — 18. Quand on a d'autres occupations quotidiennes, pour continuer à s'intéresser profitablement aux mathématiques il faut leur consacrer au minimum une heure par jour, et de temps en temps plusieurs heures. Deux ou trois heures par jour vaudraient mieux. — 20. Etant professeur de mathématiques, c'est à cela que mon travail est principalement consacré. E.-P. Thompson.

Rép. LIX (Allemagne). — 18 et 20. Mon idéal serait de pouvoir consacrer 4 ou 5 heures chaque matin aux travaux scientifiques ; malheureusement, la plus grande partie de mon temps est absorbée par mon enseignement. Je me réserve deux matinées par semaine pour mon travail personnel et je me lève à 5 heures, été et hiver. Tafelmacher.

Rép. LX (Suisse). — 18. Je trouve que le mieux est de concentrer ses énergies mathématiques sur un ou deux jours par semaine. Emch.

Rép. LXII (Etats-Unis). — 18 et 20. Le seul moyen de mener à bonne fin un travail mathématique est de lui réserver chaque jour un certain temps, le plus possible, sur lequel on ne laissera empiéter aucun autre travail quelque pressant qu'il soit. Tallmann.

Rép. LXVI (Etats-Unis). — 20. En ayant un programme journalier strict. Snyder.

Rép. LXVIII (Etats-Unis). — 18. Le mieux est de travailler un peu chaque jour, deux heures.

20. En consacrant un temps spécial aux occupations professionnelles et en ne leur permettant pas d'empiéter sur mes travaux mathématiques. Conant.

Rép. LXIX (Italie). — 18. Une heure de travail par jour me semble peu : on risque d'oublier dans les 23 autres heures plus qu'on n'a appris dans la première. (...)

Rép. LXXII (Etats-Unis). — 18. Je crois que, quand on a du goût pour les mathématiques, le moindre temps régulièrement consacré à cette étude chaque jour ou chaque semaine est déjà profitable. Cela ne suffit peut-être pas à donner des résultats importants, mais le bénéfice subjectif qu'on en retire vaut cependant la peine, pour peu qu'on ait une profession ayant quelque connexion avec les mathématiques. Quant à savoir si le travail mathématique doit être fait à heures fixes, cela dépend du type d'esprit... — 20. Je suis dans l'enseignement, en sorte que mon travail personnel ne vient qu'au second plan : j'en suis réduit à faire de mon mieux pour réserver un peu de temps à mes propres travaux ; c'est le cas général en Amérique. (...).

Rép. LXXIV (Italie). — 18. Trois heures journellement. Il vaut mieux travailler tous les jours un peu. Pirondini.

Rép. LXXV (France). — J'ai toujours consacré, en dehors de mes obligations professionnelles, pourtant très lourdes, trois heures par jour en moyenne aux recherches personnelles. Longtemps, j'ai pris ces heures de travail dans la soirée. Depuis l'âge de 45 ans, j'ai compris que ce travail du soir produisait peu et me fatiguait ; je lui ai substitué le travail de l'après-midi.

De Longchamps.

Rép. LXXVII (Etats-Unis). — J'estime qu'il faut toujours réfléchir à des sujets mathématiques pour que cela soit profitable.

Moulton.

Rep. LXXXII (Suisse). — 18. Travailler toutes les fois que l'on se trouve en bonne disposition. Mais il faut savoir provoquer soi-même ces bons moments et en tirer parti en s'astreignant à un minimum de travail personnel chaque jour autant que possible.

20. — Mes occupations professionnelles et la direction de *l'Ens. Math.*, ne me laissent que fort peu de temps. Fehr.

Rép. LXXXIV (Suisse). — 18. Il faut travailler lorsque les idées surgissent, mais on ne peut pas limiter le temps qu'on y a consacré, attendu qu'en pareil cas la notion du temps n'existe plus. Oltramare.

A PROPOS DE ENQUÈTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

Réflexions sur les réponses [1] aux questions 4 et 5.

Par V. Bobynin (Moscou).

Etant donné le nombre peu considérable des réponses à la première et principale partie de la question 4 [2], on est tenté de croire que les personnes qui étudient les mathématiques

[1] Voir l'*Enseignement mathématique*, 8e année, no 3, p. 217-225. — Traduction de Mlle Ryck (Genève).

[2] Question 4. — Avez-vous conservé un souvenir précis de votre manière de travailler lorsque vous poursuiviez vos études, alors que le but était plutôt de s'assimiler les richesses d'autrui que de vous livrer à des recherches personnelles ? Avez-vous sur ce point quelques renseignements intéressants à fournir ?

n'ont pas dans la première période de leurs études de méthode personnelle, tout au moins que ces méthodes sont inconscientes et par conséquent ne laissent aucun souvenir.

Dans vingt réponses[3] on constate que, pendant la première période des études, les élèves qui ont du goût pour cette science ont la tendance à faire des recherches personnelles.

R. de MONTESSUS dans sa rép. XLX dit : « Il m'a toujours été très pénible d'apprendre ; je préférais chercher moi-même et trouver à ma manière la solution des questions exposées dans les cours ».

Dans les réponses concernant la période des études supérieures (universitaires), on rencontre, comme il fallait s'y attendre, une tendance plus accusée à cet égard.

Un mathématicien allemand dans la Rép. VI dit : « Je m'occupe de préférence de recherches personnelles. Lorsque je lis les travaux d'autres auteurs, je me borne souvent à lire les résultats et je cherche à les établir ensuite moi-même. »

BOLTZMANN (Rép. XXI) avait toujours des doutes sur ce qu'il lisait ou entendait, tant qu'il n'avait pas obtenu les résultats par une voie personnelle.

Un mathématicien hollandais JEAN DE VRIES (Rép. XXVII) dit : « J'ai toujours éprouvé le besoin de remanier un mémoire ou un livre selon mon goût personnel ».

Qu'est ce qui pouvait provoquer cette tendance chez les débutants qui sont encore bien loin de la période des investigations. Il me semble qu'on n'a qu'une seule réponse sur cette question ; c'est que la tendance considérée est provoquée par la nature intellectuelle de l'homme, qui suit pendant l'étude de chaque science la même voie qu'a suivie l'humanité entière, c'est-à-dire la voie des découvertes.

Les mathématiques élémentaires de même que les supérieures doivent être enseignées de telle sorte, que l'élève, guidé par ses maîtres, participe seul à la découverte des vérités et résolve lui-même toutes les questions qu'il rencontre.

Et comme l'enseignement des mathématiques ne donne rien de pareil, on comprend pourquoi il ne satisfait pas tous

[3] Rép. I, V, VI, IX, XIII, XIX, XXI, XXIII, XXVII, XXX, XXXV, XXXVI, XLV, XLVIII, LVII, LVIII, LXXII, LXXVII et LXXVIII.

ceux qui avaient montré un intérêt spécial pour les mathématiques.

Cette observation se trouve d'ailleurs dans quelques réponses, notamment dans celle de M. Ch. Méray (v. Rép. I). Plusieurs auteurs manifestent leur opinion sur les défauts que présente à ce point de vue l'enseignement élémentaire.

Dans cinq réponses[1] les auteurs se prononcent non pas seulement contre les « cours » de mathématiques, mais aussi contre la lecture en général des œuvres mathématiques.

Il y a déjà longtemps qu'on rencontre ces idées et surtout la seconde. Ainsi, en parlant de Poinsot dans son introduction à la IIme édition de ses « Eléments de Statique », J. Bertrand dit : « peu soucieux d'étudier les livres, il aimait à suivre ses propres idées[2] ».

On sait qu'il en est de même de Carnot et de beaucoup d'autres.

Rappelons encore quelques réponses qui parlent dans le même sens. Un mathématicien allemand, qui désire rester inconnu, écrit dans sa Rép. XIX :

« Je n'ai jamais éprouvé beaucoup de plaisir à étudier des ouvrages d'une certaine étendue; une fois que je possédais les bases des branches spéciales, je cherchais à continuer par mes propres moyens. Il en résultait nécessairement des lacunes et des détours inévitables ».

M. C.-A. Laisant (Rép. XXIII), dit : « l'étude dans les livres m'a toujours été très pénible. Il me semble qu'en principe il vaut mieux chercher par soi-même, sauf à contrôler et compléter ses résultats par des lectures ultérieures. Pour cela cependant un premier bagage général est nécessaire ».

D'autres, au contraire, recommandent la lecture. Ainsi M. Méray (Rép. I), dit : « Je n'ai presque rien lu *et le regrette*. Je conseille aux autres de lire tant qu'ils pourront pendant leur jeunesse, mais en étant guidés de manière à éviter l'innombrable quantité d'écrits qui n'apprennent rien ».

Il y a beaucoup de réponses (par exemple XIX), où l'on considère comme obligatoire la lecture non pas seulement

[1] I, VI, XIX, XXIII et LXXVIII.
[2] *Bull. des sc. math. et astr.*, T. IV, p. 18, 1873.

pour les autres, mais aussi pour soi-même. On trouve cinq réponses concernant ce point de vue (V, XVIII, XXIII, XLIII et L). « Dès l'âge de 16 ans, dit un mathématicien italien (Rép. V), lors de mon entrée dans les études universitaires, je pris l'habitude de lire et d'étudier dans toutes les directions, auteurs classiques et auteurs... de moindre valeur. Je voulais m'emparer *de tout* ce que l'on a fait en mathématiques! *En même temps* je voulais faire des recherches pour mon compte ».

Un autre mathématicien italien (Rép. XVIII) dit : « J'ai toujours lu peu de livres, mais des bons. Je les étudiais complètement et je reviens souvent aux points qui sont restés obscurs ». Voir aussi la réponse XXXIII, du mathématicien français R. d'Adhémar.

Pour écarter les nombreuses difficultés que présente l'enseignement des mathématiques, d'Alembert n'a pas vu d'autre moyen que celui qu'il a donné dans son sage conseil : « Avancez et la foi vous viendra ». Ces mots caractérisent bien la situation. C'est par négligence que l'enseignement laisse souvent beaucoup de choses mal expliquées et par cela obscures, et même tout à fait inconnues. Pour l'élève les conséquences de cet état de choses sont considérables. Elles ne peuvent être aplanies que si les études sont bien coordonnées.

Le conseil de d'Alembert s'adresse d'ailleurs à tous ceux qui s'occupent de mathématiques. Dans l'état actuel de l'enseignement ils ne peuvent faire autrement. Ce point de vue ressort très nettement dans la réponse XLVI du mathématicien espagnol Zœl G. de Galdeano : « Mes études universitaires une fois terminées, j'écrivis dans un gros volume toutes mes pensées sur l'enchaînement des idées mathématiques, la comparaison des diverses méthodes d'exposition des auteurs que je connaissais, la formation des concepts mathématiques au point de vue de la logique et en cherchant la genèse des idées. Au lieu d'approfondir des points particuliers, j'ai cherché d'obtenir le moyen d'acquérir de la variété dans les connaissances avec l'idée que leur enchaînement produit souvent la connaissance d'autres vérités. J'ai suivi l'idée de d'Alembert : *Avancez et la foi vous viendra*, conquérir les hauteurs et après approfondir et vaincre des difficultés ». Cette réponse désigne bien la pensée du savant et la direction de ses travaux ; elle montre clairement sa façon de suivre le conseil de d'Alembert. Il en est de même dans la réponse XXX du mathématicien norvégien Störmer.

Les difficultés qu'on rencontre en étudiant les mathématiques à cause de l'organisation de l'enseignement et qui sont souvent au-dessus des forces des gens peu doués, provoquent au contraire chez ceux qui ont du talent l'emploi des méthodes artificielles pour parvenir à comprendre le sujet, et pour s'engager eux-mêmes à faire des investigations personnelles. Mais il n'est guère possible de donner des indications spéciales à cet égard. On en trouve cependant dans deux réponses. L'une d'elles (XXXIX), appartient à un mathématicien grec N. Hatzidakis. Il parle de la première des deux questions, c'est-à-dire de la recherche des moyens particuliers de l'étude. Il dit : « Quant à la manière de travailler, j'ai trouvé que j'apprenais bien mieux en cherchant à expliquer le sujet à un autre étudiant en mathématique ».

La seconde réponse (LVII) est donnée par un mathématicien des Etats-Unis, Edw. P. Thompson : « J'ai suivi les études des autres plutôt que de m'engager dans des recherches personnelles, et cela à mon grand regret. Je conseillerais aux étudiants de s'initier de bonne heure aux recherches. »

Voici maintenant quelques réflexions que me suggère l'examen des réponses à la question 5 [1]. On remarque tout de suite qu'il est difficile de découvrir chez les auteurs une direction consciente de leurs travaux après avoir achevé leurs études générales de mathématiques. Ainsi, dans la réponse (IX), qui appartient à un mathématicien français

[1] Question 5. — Une fois les études mathématiques usuelles (correspondant par exemple au programme de la licence mathématique ou de l'agrégation ou de deux licences) terminées, dans quel sens avez-vous cru devoir orienter vos études ? Avez-vous d'abord cherché à acquérir une instruction générale très étendue sur plusieurs points de la science avant de produire ou de publier quelque chose de sérieux ? Avez-vous au contraire cherché à approfondir d'abord un point particulier en n'étudiant à peu près que ce qui était indispensable dans ce but ; et n'est-ce qu'ensuite que vous vous êtes étendu peu à peu ? Et si vous avez employé d'autres méthodes pouvez-vous les indiquer sommairement. Qu'elle est celle que vous préférez ?

(anonyme), l'auteur dit : « Je n'ai employé, de parti pris, aucune méthode. J'ai seulement voulu élucider l'enseignement que j'ai reçu, et avoir la réponse aux questions non résolues. J'ai travaillé, non pas pour savoir et me faire une carrière plus brillante, mais par simple curiosité. »

Après avoir fini les études fixées par les exigences officielles, en abordant les travaux qui ont pour but un avancement de la science, les uns commencent par acquérir une instruction générale et plus complète dans les mathématiques, tandis que les autres suivent, dès le commencement, la voie étroite de la spécialisation particulière.

Il y a 13 réponses [1] sur cette partie de la question 5, où les auteurs appartiennent à la première catégorie, et 11 [2] à la seconde. De ceux qui appartiennent à cette dernière, il y a 5 cas [3] où les auteurs passent graduellement de la spécialisation particulière à une extension du domaine qu'ils étudient. Il arrive aussi des cas où l'absence de spécialisation n'est qu'apparente : c'est lorsque le savant réunit la théorie à la pratique. La réponse de M. Maillet (LIII) est à peu près la seule.

Les passages concernant la période qui a précédé le travail créateur offrent un grand intérêt. Il indique la voie de ce travail et les conditions dans lesquelles on est placé quand il se présente de nouvelles idées.

D'après Zindler (rép. IV) et Jean de Vries (rép. XXVII), l'effet du travail préparatoire commence lorsque le domaine d'investigation change en même temps que l'objet. Il se présente alors une tendance à faire des recherches variées. Chacun aura remarqué les intéressantes réponses de MM. E. Fabry (rép. XXXVII), N. Hadzidakis (rép. XXXIX), Amodeo (rép. XLII), et Lerch (rép. XXXII), qui parlent d'une façon détaillée des études mathématiques.

Pour découvrir et pénétrer dans un champ de recherches, M. Zindler retourne à l'*étude* des branches qu'il n'avait pas encore eu l'occasion d'approfondir. M. Jean de Vries tâche

[1] Rép. IV, V, XVIII, XXII, XXX, XXXV, XLVI, L, LVIII, LXVI, LXIX, LXX, LXXI.
[2] Rép. VI, XVII, XXIII, XXVI, XXXV, XLI, XLV, XLIX, LXVIII, LXXII et LXXVII.
[3] Rép. VI, XVII XVVI, LXXII et LXXVII.

d'abord de s'*orienter* dans le nouveau domaine et après seulement il crée, et il réussit.

G. de Longchamps (rép. LXXV) guide tout à fait autrement la préparation aux investigations. Il dit : « A l'exception de la surface de Steiner que j'avais étudiée à fond parce que j'avais l'idée d'en faire le sujet d'une thèse de doctorat, je n'ai jamais cru utile de faire des études à *priori* sur un sujet adopté. Je crois qu'il est préférable de chercher une voie, et une fois engagé, de se documenter sur une idée originale et susceptible d'être poursuivie avec les éléments nouveaux obtenus. »

Boltzmann (rép. XXI) donne des renseignements plus précis sur la manière de guider les travaux de recherches ; il dit : « Je considérais toujours d'abord des cas plus particuliers et afin de bien faire comprendre la véritable signification d'un théorème, et ce ne fut qu'ensuite que je cherchais la démonstration générale. »

MM. de Longchamps (rép. LXXV) et F.-J. Vaes (rép. LXXXI) donnent quelques indications sur les circonstances extérieures et accessoires pendant lesquelles il arrive des idées sur un sujet nouveau et sur sa solution, par exemple au cours d'une promenade, ou pendant les insomnies. Nous renvoyons le lecteur à leurs réponses. Une seule réponse (LXXVIII) examine la manière d'envisager les résultats finaux des travaux personnels. Cette réponse est très instructive. On en conclut que quelques mathématiciens confondent avec le temps ce qu'ils ont étudié et ce qu'ils ont créé eux-mêmes. Celà provient peut-être de la nature de l'esprit humain qui veut suivre la voie naturelle des découvertes et, inconsciemment, il a la tendance de croire que tout ce qu'il a étudié il le doit à des découvertes personnelles. L'auteur (LXXVIII) dit : « Je confonds facilement au bout de peu de temps ce que j'ai écrit avec ce que j'apprends chez les autres, pourvu, bien entendu, qu'il ne s'agisse pas de théorèmes fondamentaux et de résultats absolument nouveaux. Si l'on me posait des questions sur les recherches que j'ai publiées, je devrais d'abord me préparer comme pour une chose étudiée depuis longtemps. »

MÉLANGES

Le stéréoscope et ses applications scientifiques[1].

14. — *Das Stereoskop*[2], Anleitung zur selbständigen Herstellung eines Stereoskops, mit Modellbogen, von M. Mittag. — Ce petit ouvrage est destiné à la jeunesse. Il permet à un jeune garçon de construire lui-même son stéréoscope et de se familiariser ainsi avec les principes de cet appareil tout en jouant. Par un exposé très clair, accompagné d'utiles comparaisons, l'auteur a su se mettre à la portée de l'enfant. Son petit opuscule constitue un excellent ouvrage d'initiation.

15. — *Das Stereoskop*[3] *und seine Anwendungen*, von Prof. Th. Hartwig. — Lorsque nous avons entrepris cette série de petites notes destinées à rappeler les avantages que présente le stéréoscope dans l'enseignement scientifique et à faire connaître le matériel dont on dispose, nous cherchions en vain une monographie à signaler à nos lecteurs dans laquelle ils trouveraient les principes et les applications modernes de cet appareil. Un tel ouvrage vient de paraître et nous nous empressons de le mentionner à cette place. Auteur d'une remarquable collection de planches stéréographiques pour la cristallographie (voir la note 11, p. 477, L'*Ens. math.*, 1906), M. Hartwig semblait tout particulièrement désigné pour écrire cette utile monographie. Le volume comprend sept parties, dont voici les titres : I. La chambre photographique et l'œil humain. — II. La vision monoculaire et le vérant. — III. La vision binoculaire et le stéréoscope. — IV. Stéréogrammes et effets stéréoscopiques. — V. Les téléstéréoscopes et la photographie à grande distance. — VI. Le microstéréoscope. — VII. Le stéréocomparateur.

L'ouvrage est accompagné de 19 stéréogrammes fort bien choisis et très variés ; ils forment un excellent matériel de démonstration. Au moment où l'emploi du stéréoscope pénètre dans les sciences

---

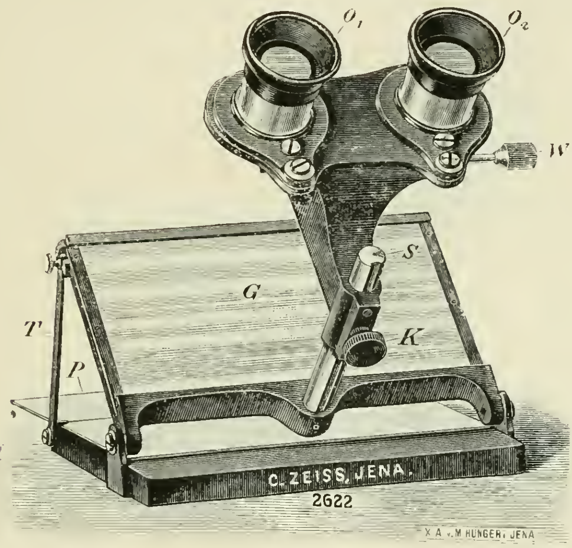
[1] Ces notes font suite aux articles sur les *vues stéréoscopiques pour l'enseignement de la Géométrie*. — Voir l'*Enseign. mathém.*, 8e année, 1906, n° 5, p. 385-390 ; n° 6, p. 475-478 ; 9e année, n° 1, p. 61-63.

[2] Librairie O. Maier, Ravensbourg ; 1 fasc. de 16 p. avec de nombreuses figures. — n° 5 de la Collection *Spiel u. Arbeit.*

[3] Librairie Teubner, Leipzig ; 1 vol. 70 p. avec 40 fig. et 19 vues stéréoscopiques ; 1 Mk. 25 ; de la Collection *Aus Natur u. Geisteswelt.*

les plus diverses, depuis la minéralogie jusqu'à la mesure des distances astronomiques, ce petit volume est appelé à rendre de grands services dans les établissements secondaires supérieurs et dans les laboratoires.

16. — *Le stéréoscope Zeiss*[1]. — Les progrès de la stéréoscopie devaient nécessairement dépendre en première ligne des perfectionnements apportés aux instruments. Pour l'usage courant, dans les familles et en classe, la boîte stéréoscopique de Brewster et le stéréoscope à main resteront toujours d'un emploi très répandu. Les améliorations ont porté principalement sur le stéréoscope de laboratoire et sur son adaptation à divers instruments de préci-



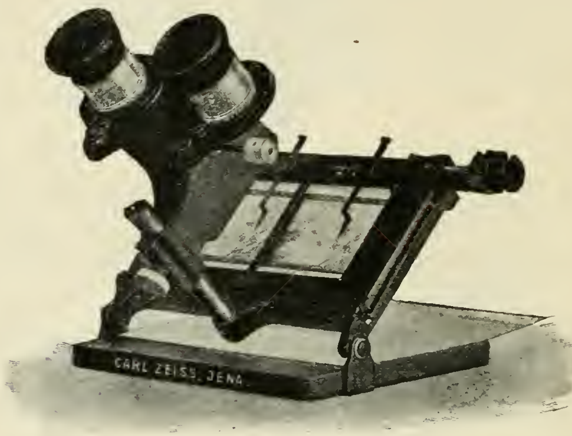
sion ; elles sont dues, en grande partie, aux efforts d'une maison bien connue pour tout ce qui touche aux instruments d'optique, la Maison Zeiss à Iéna.

Nous signalerons ici son *stéréoscope nouveau* pour épreuves stéréoscopiques du format ordinaire ; il présente sur l'appareil à main du modèle courant l'avantage de permettre d'examiner les images dans de meilleures conditions. L'appareil est muni de deux réglages, l'un K pour modifier, suivant la vue de l'observateur, la distance entre les lentilles oculaires et les épreuves, l'autre W pour adapter l'écartement des oculaires à l'écartement des yeux et à la distance entre les points correspondants des deux images. Il peut

[1] Stéréoscope avec oculaires simples de 15 cm. de foyer, 40 Marks ; avec oculaires de 10 cm., 46 Marks,

être employé indifféremment pour des vues sur papier ou pour des positifs sur verre[1].

Nous avons eu l'occasion de constater que la vision stéréoscopique varie souvent beaucoup avec les élèves. Le stéréoscope nouveau permet, mieux que le modèle courant, d'apprécier les différences d'un observateur à l'autre. Il suffit d'examiner le *tableau-épreuve* imaginé par M. C. Pulfrich[2]. Ce tableau contient une série de figures géométriques complètement dépourvues de tout faux effet stéréoscopique ; ainsi elles ne présentent pas trace de perspective. Grâce à cet artifice, celui-là seul qui est capable de voir stéréoscopiquement, peut saisir la véritable disposition des figures dans l'espace. Le tableau peut donc être utilisé pour un contrôle qualitatif et quantitatif de la vision stéréoscopique, mais il peut



aussi servir à exercer la vision binoculaire et à développer la perception de la profondeur.

Ce nouveau stéréoscope permet aussi d'initier les étudiants à la méthode des mesures stéréoscopiques et d'étudier le principe et les avantages de cette méthode en la comparant aux procédés monoculaires. Dans ce but on fait usage du *stéréo-micromètre* celui-ci se compose d'un cadre rectangulaire (fig. 2), que l'on place sur l'image qui se trouve sur la platine du stéréoscope. L'appareil micrométrique est adapté à la partie supérieure du cadre. Lorsqu'il s'agit d'obtenir des mesures d'une grande préci-

[1] Parmi les plaques éditées par la maison Zeiss, signalons le tableau épreuve pour adultes ; la vue portant une échelle des distances, les corps géométriques, la lune, etc.

[2] V. *Zeitsch. f. Instrumentenkunde*, XXI, p. 249, 1901. — Consulter aussi l'ouvrage de M. Hartwig on trouvera, entre autres, une échelle des distances parmi les stéréogrammes placés à la fin du volume.

sion on remplace le stéréoscope par un stéréomicroscope ; l'ensemble porte alors le nom de *stéréomètre*[1].

17. — *Les applications de la Stéréoscopie en Topographie et en Astronomie.* — L'étude des mesures stéréoscopiques et de leurs applications a donné lieu à d'intéressantes recherches[2] concernant l'évaluation des distances d'après des photographies. Ces mesures sont obtenues d'une manière très exacte au moyen du *stéréo-comparateur* imaginé par M. Pulfrich et construit par la Maison Zeiss. On obtient cet appareil en remplaçant le stéréoscope ordinaire par un microscope binoculaire ; les mesures peuvent alors être faites avec une grande exactitude. On comprend aisément qu'en Topographie et en Astronomie, comme encore dans d'autres branches, on se soit immédiatement emparé de cette sorte de télémètre perfectionné ; il suffit d'avoir des vues fournies soit par le photo-théodolite, soit par la photographie stéréoscopique. Nous donnerons une idée suffisante de la grande portée de ces méthodes en indiquant ici quelques-uns des problèmes qu'elles permettent de résoudre :

En Topographie. Tracé de plans topographiques très exacts ; construction des courbes de niveau, des profils, etc. ; lever des côtes à partir d'un navire au moyen d'épreuves téléstéréoscopiques ; etc.

En Astronomie. Mesure des parallaxes sensibles des étoiles et des nébuleuses ; étude des taches solaires et des mouvements qui se produisent sur le soleil ; mesure de l'altitude des montagnes de la lune ; étude de la libration de la lune ; etc.

En Météorologie et en Géologie. Mesure de l'altitude des nuages, des aurores boréales, des étoiles filantes ; études géologiques dans les hautes montagnes ; étude des mouvements des glaciers.

Autres applications. Mesure anthropométrique de crânes ; détermination des dimensions d'œuvres d'arts, d'objets divers, d'animaux vivants, etc.

Ces quelques notes destinées à signaler les applications didactiques et scientifiques du stéréoscope donnent un aperçu, bien incomplet il est vrai, du chemin parcouru depuis l'appareil de Brewster (Londres, 1856) jusqu'aux remarquables instruments de précision que l'on trouve sous les noms de stéréomètres ou de stéréocomparateurs. Sans perdre de vue son but primitif, la stéréoscopie a considérablement augmenté le nombre de ses pro-

---

[1] Pour la description complète et les prix voir les catalogues de la maison Zeiss.

[2] Voir notamment les articles de M. Pulfrich dans la *Zeitschr. f. Instrumentenkunde* (depuis 1901). Voir aussi Laussedat, De l'emploi du stéréoscope en topographie et en astronomie, *C. R.* t. 134, p. 22-28, 1903 ; la stéréoscopie appliquée à la construction des plans, dans le t. II de ses « recherches sur les instruments topographiques », 1903. p. 209-280.

blèmes en cherchant toujours à tirer parti des progrès de la science et de l'outillage scientifique. Il y a là un bel exemple de ce que peut fournir une collaboration étroite entre les savants et leurs précieux auxiliaires les constructeurs. H. FEHR.

CHRONIQUE

IVe Congrès International des Mathématiciens. Rome 6-11 avril 1908.

Le Comité d'organisation du 4e Congrès International des Mathématiciens vient de lancer sa première circulaire. Le Congrès aura lieu *à Rome, du 6 au 11 avril 1908.*

On sait que les Congrès précédents ont été tenus à Zurich (1897), à Paris (1900), à Heidelberg (1904). C'est précisément pendant cette dernière réunion que Rome fut choisie comme siège du Congrès suivant ; la proposition fut accueillie par acclamation, car chacun voyait là une occasion pour rendre hommage à la part importante que prennent les mathématiciens italiens au mouvement scientifique contemporain.

En s'inspirant du but pour lequel ces Congrès internationaux ont été particulièrement institués, le Comité a pensé qu'il serait utile de jeter un regard sur les principaux résultats obtenus jusqu'ici, et sur les grands problèmes qui attirent encore l'attention des mathématiciens. Dans ce but, il organisera une série de conférences qui pourront donner une idée de l'état actuel des principales branches des Mathématiques et de leurs applications. Le Comité s'est déjà assuré le concours de MM. G. DARBOUX, A. R. FORSYTH, D. HILBERT, F. KLEIN, H. A. LORENTZ, G. MITTAG-LEFFLER, S. NEWCOMB, E. PICARD, H. POINCARÉ, qui ont consenti à faire dans les séances plénières des conférences sur des thèmes qui seront indiqués par la suite.

Il est décidé, dès maintenant, que le Congrès sera divisé en quatre sections :

I. Arithmétique, Algèbre, Analyse. — II. Géométrie. — III. Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées. — IV. Questions philosophiques, historiques et didactiques.

Une autre circulaire viendra préciser le programme du Congrès et indiquer les réceptions offertes aux savants qui voudront bien y prendre part.

Le Comité d'organisation est composé comme suit :

P. Blaserna, *président ;* G. Castelnuovo, *secrétaire général ;* V. Reina, *trésorier ;* V. Cerruti ; A. Di Legge ; G. Pittarelli ; A. Sella ; A. Tonelli ; V. Volterra.

Pour tous les renseignements se rapportant au Congrès, s'adresser au Secrétaire général du Comité d'organisation : M. le Prof. G. Castelnuovo, 5, Piazza S. Pietro in Vincoli, Rome (Italie).

Association scientifique internationale espérantiste ; création d'un Bureau permanent.

Dans une réunion tenue, le 31 août dernier, à Genève, à l'occasion du 2e Congrès universel de l'Esperanto, un certain nombre d'hommes de science, membres de ce Congrès, ont exprimé leur intention de créer une *Association scientifique espérantiste* réunissant les savants et les amis des sciences de tous les pays qui, convaincus de l'utilité de la langue auxiliaire internationale « Esperanto » pour la diffusion des sciences, seraient disposés à chercher à en propager, le plus rapidement possible, l'emploi dans le monde scientifique et notamment à en introduire l'usage dans les Congrès internationaux, à côté des langues nationales multiples qui sont aujourd'hui acceptées pour les communications faites dans ces Congrès.

Pour faciliter la réalisation de ce programme, M. René de Saussure, Privat-docent à l'Université de Genève, vient de constituer dans cette dernière ville un *Bureau permanent*, qu'il met à la disposition de l'Association.

Il compte apporter le concours de ce Bureau, tant à la rédaction des Revues[1] scientifiques espérantistes qu'à l'œuvre, déjà entreprise par ces Revues, de la préparation des vocabulaires techniques de la langue Esperanto, et, à cet effet, il s'est assuré la collaboration d'un grand nombre de savants.

Après avoir obtenu, à ce sujet, l'assentiment du Dr Zamenhof, auteur de la langue Esperanto, ainsi que celui de M. Boirac, président du Comité linguistique (espérantiste), le Comité de l'Association, composé de M. H. Sebert, Membre de l'Institut de France, et de M. C. Bourlet, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris, a accepté avec empressement la proposition de M. de Saussure.

---

[1] A la suite d'un arrangement spécial avec le comité de rédaction de l'*Internacia Scienca Revuo*, cette importante revue, publiée jusqu'ici à Paris et rédigée entièrement en Esperanto, paraîtra désormais à Genève mensuellement et sera l'organe officiel du Bureau.

Le Bureau permanent portera le nom de *Bureau scientifique international espérantiste.*

L'une de ses premières missions consiste à recueillir de nouvelles adhésions à la Déclaration signée par les membres de la réunion de Genève, et à préparer l'organisation définitive de l'Association scientifique espérantiste.

Nous pensons que l'Association devra comprendre non seulement les personnes qui s'occupent des Sciences pures, mais aussi celles qui s'occupent des applications de la science aux Arts et à l'Industrie, ainsi que celles qui portent intérêt à la Science, dans son acception la plus générale.

Pour les adhésions et les renseignements, s'adresser au *Bureau scientifique international espérantiste*, 8, rue Bovy-Lysberg, Genève.

Un journal mathématique en esperanto.

Au moment où le vocabulaire scientifique en esperanto est encore en voie de formation, le Bureau scientifique fondé par M. de Saussure est appelé à rendre de grands services aux publications et revues spéciales qui ne tarderont pas à éclore de divers côtés. Ce sera précisément le cas de la *Gazeto Matematika Internacia* qui va se fonder à Rotterdam, sur l'initiative de M. F.-J. Vaes. Les mathématiques possèdent déjà un *projet* de vocabulaire, le *Matematika Terminaro*[1], de M. Bricard ; elles auront donc un périodique en esperanto. Nous en rendrons compte dès que nous aurons reçu les premiers fascicules. Souhaitons, pour le moment, que cette tentative soit bien accueillie des mathématiciens espérantistes et qu'elle ne tarde pas à en augmenter le nombre.

Les adhésions et les articles sont reçus, dès ce jour, par M. F.-J. Vaes, Mathenesserlaan, 290, Rotterdam. H. F.

Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

La 16e réunion de cette Association (*Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften*) aura lieu à *Dresde* du 21 au 24 mai. L'ordre du jour comprend, entre autres, deux rapports qui seront suivis de discussions, l'un de M. Krause, sur le rôle des écoles techniques supérieures dans la formation des maîtres de mathématiques et de physique ; l'autre, de M. Reinhardt, sur les vœux exprimés par les maîtres au sujet

[1] V. dans l'*Ens. math.*, nov. 1906, p. 494-495, l'analyse qu'en donne M. de Saussure.

de l'enseignement supérieur destiné aux candidats à l'enseignement.

Nous comptons pouvoir donner un aperçu de ces travaux.

Association italienne pour l'avancement des sciences.

Le Congrès des naturalistes italiens, tenu à Milan en septembre 1906, a décidé de faire un appel à tous les savants italiens en faveur de la fondation d'une Association permettant de grouper toutes les sciences. Bien qu'il y ait déjà eu plusieurs Congrès scientifiques dont le premier remonte à l'année 1839 (Pise), l'Italie manquait d'une Association ouverte à toutes les branches scientifiques et possédant une organisation analogue à celle des Associations pour l'avancement des sciences. De pareilles Sociétés existent en Suisse depuis 1815, en Allemagne depuis 1822, en Angleterre depuis 1831, aux Etats-Unis depuis 1853, en France depuis 1864 ; l'Australie et l'Afrique du Sud ont également créé des groupements analogues.

La circulaire qui vient d'être lancée à tous les savants de l'Italie rappelle ces dates et insiste, à juste titre, sur les services que peut rendre la *Società Italiana per il progresso delle Scienze*. Elle annonce que le premier Congrès aura lieu à *Parme* en septembre 1907. Le Comité, tel qu'il a été constitué au mois de septembre dernier à Milan, est composé comme suit :

Ettore Artini. — Deputato Pietro Cardani. — Giov. Celoria. — Arturo Issel. — Fr. Sav. Monticelli. — Senatore Emanuele Paterno. — Romualdo Pirotta. — Guglielmo Romiti. — Alfonso Sella. — Senatore Vito Volterra.

Les adhésions et communications sont reçues à l'adresse du Comité, 23, Via del Collegio Romano, Rome.

Faculté des Sciences de Paris.

Thèses soutenues en 1906 en vue du doctorat ès sciences mathématiques :

Doctorat d'Etat. — Carrus : Familles de surfaces à trajectoires orthogonales. — Fréchet : Sur quelques points du Calcul fonctionnel. — Lattès : Sur les équations fonctionnelles. — Fayet : Recherches concernant les excentricités des comètes. — Saint-Blancat : Action d'une masse intramercurielle sur la longitude de la lune.

Doctorat d'Université. — Remoundos : Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes.

L'Exposition mathématique de l'Université Columbia de New-York.

Le *Teachers College*[1] de l'Université de Columbia vient d'organiser une Exposition mathématique permanente comprenant tout le matériel utile à l'enseignement, depuis l'école frœbelienne jusqu'aux cours les plus élevés des sciences mathématiques. Cette exposition, qui est extrêmement variée, comprend une série de sections. Nous n'en pouvons donner une description détaillée. Il suffira à mettre en lumière le caractère même de cette heureuse initiative qui, espérons-le, trouvera des imitateurs dans d'autres établissements.

Mentionnons tout d'abord la collection des instruments et des appareils mathématiques destinés aux divers degrés des établissements élémentaires et supérieurs. Il a été largement tenu compte du côté historique et de l'intérêt que présentent certains instruments astronomiques tels que l'astrolabe et le sextant. A signaler aussi d'anciens globes terrestres.

On y trouve encore une belle collection de mécanismes anciens concernant le calcul mécanique, entr'autres les essais faits par les Chinois et les Japonais.

L'Exposition renferme une belle série de portraits de mathématiciens; faute de place, elle a dû faire un choix de 40 portraits parmi les 2,000 réunis par M. Dav.-Eug. David au cours de ses voyages en Europe. On sait qu'il a entrepris la publication d'un choix de portraits; les deux portefeuilles parus ont été signalés dans l'*Ens. math.*

Puis viennent les médailles de mathématiciens, les autographes, des manuscrits rares, des ouvrages annotés par les auteurs, et une très belle série d'ouvrages anciens présentant un grand intérêt historique.

Pour un grand nombre d'objets exposés il sera tiré des clichés destinés aux leçons accompagnées de projections.

On ne peut que féliciter vivement les organisateurs de cette utile exposition, et tout particulièrement son fondateur et directeur M. le Prof. Dav.-Eug. Smith.

Association des naturalistes et médecins allemands.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Dresde*, du 15 au 22 septembre 1907. La Section des Sciences Mathématiques sera

[1] L'*Enseign. math.* a publié un aperçu de l'organisation des études. (V. n° de juillet. 1904, p. 313-316.)

présidée par M. le Professeur KRAUSE (Dresde). A l'occasion de cette réunion il sera organisé une Exposition d'instruments et d'appareils scientifiques.

Réunion des philologues et professeurs allemands.

La 49e réunion aura lieu à *Bâle*, du 23 au 27 septembre 1907, sous la présidence de MM. MÜNZER et SCHÄUBLIN, professeurs à Bâle. Au nombre des onze Sections figure une Section des Sciences mathématiques et naturelles ; elle sera présidée par deux professeurs bâlois, MM. BURKHARDT et VEILLON.

Ce Congrès se tiendra à Bâle, de manière à provoquer un échange de vue entre les professeurs allemands et leurs collègues suisses. La Société suisse des professeurs de Gymnase, qui tient habituellement ses séances en octobre, vient de renoncer à sa réunion annuelle, afin de permettre à ses membres de participer au Congrès de Bâle ; tandis que l'Association suisse des professeurs de mathématiques tiendra précisément son assemblée annuelle à Bâle, à l'occasion de ce Congrès.

IIe centenaire d'Euler.

Dans les séances dont il vient d'être question, on ne manquera pas de rappeler le nom de l'illustre bâlois LEONARD EULER, qui fut non seulement le plus grand savant de son siècle, mais qui compte parmi les plus grands penseurs de tous les temps.

La Société mathématique de Berlin se propose de célébrer le 200e anniversaire de la naissance d'Euler, en une séance solennelle, qui aura lieu le 15 avril (jour de la naissance), sous la présidence de M. SCHAFHEITLIN. On sait que le savant bâlois resta à Berlin de 1741 à 1766. MM. VALENTIN, KNESER et KÖTTER parleront du savant, de son séjour à Berlin et de ses travaux dans les divers domaines scientifiques.

On remarquera, d'autre part, dans les programmes des cours de l'Université de Berlin, que M. KNOBLAUCH consacre précisément l'un de ses cours à l'œuvre de Leonard Euler et à son influence sur les mathématiques modernes.

Nominations et Distinctions.

M. S. EPSTEEN est nommé professeur extraord. à l'Université de Colorado.

M. E. GROSSMANN est admis en qualité de privat-docent pour l'Astronomie à l'Université de Munich.

M. G.-W. Jones, professeur de Mathématiques à la Cornell-Université, prend sa retraite après 30 ans de fonctions.

M. Nielsen est nommé professeur extraord. à l'Université de Copenhague.

M. Ernest Lebon Paris a obtenu une Médaille d'or à l'Exposition internationale de Milan pour l'ensemble de ses publications scientifiques.

M. R. Müller, professeur à l'Ecole technique sup. de Braunschweig, est nommé professeur ord. de Géométrie descriptive à l'Ecole techn. sup. de Dresde.

M. V. Oppolzer, professeur extraord., est nommé professeur ord. à l'Université d'Innsbruck.

M. C.-K. Russjan, professeur à l'Ecole techn. sup. de Lemberg, est nommé professeur de Mathématiques pures à l'Université de Charkow.

Nécrologie.

M. E. Jürgens, professeur à l'Ecole techn. sup. d'Aix-la-Chapelle, est décédé le 5 janvier 1907, à l'âge de 56 ans.

M. A. Oudemans, professeur d'Astronomie à l'Université d'Utrecht, est décédé le 13 décembre 1906, dans sa 78e année.

M. A. Sucharda, professeur émérite de l'Ecole techn. sup. de Brunn, est décédé le 20 février 1907, à l'âge de 52 ans.

M. Joseph Lyon. — Nous enregistrons avec regret la mort de M. J. Lyon, survenue à Genève le 26 janvier 1907, à la suite d'un accident de tramway. D'origine russe, M. Lyon termina ses études à Paris par une thèse de géométrie supérieure, en 1890. Cette même année il vint se fixer à Genève et professa à l'Université en qualité de privat-docent. Il n'était âgé que de 49 ans. H. F.

Notice sur le Colonel Mannheim.

Nous avons déjà consacré quelques lignes au Colonel Mannheim en annonçant sa mort dans notre numéro de janvier.

Dans un des prochains numéros, nous publierons une Notice sur la vie et les travaux du savant géomètre. La Rédaction.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'été 1907.

Note de la Rédaction. — *Afin d'éviter tout retard dans la publication des programmes, qui nous parviennent souvent très tardivement, nous prions nos collègues des universités et écoles techniques supérieures d'insister auprès de leur secrétariat pour l'envoi rapide des listes de cours. Nous voudrions pouvoir les publier en mars, pour le semestre d'été, et en septembre pour le semestre d'hiver. Prière d'adresser les envois, si possible avant le 1er mars et le 1er septembre, à* M. H. Fehr, *Professeur à l'Université de Genève.*

Nous saisissons cette occasion pour remercier ceux des professeurs qui veulent bien nous faciliter la publication des programmes par l'envoi direct des extraits, sous forme manuscrite, d'après la disposition adoptée par la Revue.

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität.* — Schwarz: Integralrechn: Übgn. dazu; Theorie der ellipt. Funktionen; Ausgew. Kapitel der Th. der analyt. Funktionen; Mathem. Kolloquien; Seminar. — Frobenius: Th. der algebr. Gleichungen; Sem. — Schottky: Potentialtheorie; Spezielle Funktionentheorie; Seminar. — Hettner: Über Fouriersche Reihen und Integrale. — Knoblauch: Über Leonhard Eulers Werke und ihre Bedeutung für die neuere Mathematik; Theorie der krummen Flächen II; Theorie der Raumkurven II. — Lehmann-Filhés: Differentialrechn.: Übgn. dazu.-Schur: Th. der Determinanten. — Landau: Variationsrechn.; Wahrscheinlichkeitsrechn. — Foerster: Geschichte der neueren Astronomie; Fundamentale Ausgleichung von Zeit- und Raumrechnung. — Struve: Prakt. Astronomie: Seminar. — Bauschinger: Th. der Störungen; Interpolationsrechn. u. mechanische Integration. — Marcuse: Einführung in die astron. Geographie und Erdphysik; Th. und Anw. astronomischer Instrumente- — Ristenpart: Gemeinverständliche Himmelskunde; Der Merkursdurchgang 1907 und verwandte Erscheinungen. — Helmert: Figur der Erde; Geodätische Dreiecke. — Rubens: Mathem. Ergänzungen zur Experimentalphysik. — Planck: Mechanik deformierbarer Körper; Übgn. — Neesen: Geometrische Optik.

Bonn; *Universität.* — Study: Differentialgeometrie; Ausgw. Kapitel der Mechanik: Seminar. — Kowalewski: Das Problem der Kreisteilung; Allgemeine Th. der Differentialgleichungen; Übgn. dazu. — London: Elemente der Diff.- und Integralrechn.; Übgn. dazu: Axonometrie und Perspektive mit Zeichenübungen. — Schmidt: Bestimmte Integrale; Grundlagen der Mengenlehre und der Theorie der reelen Funktionen. — Mönnichmeyer: Mechanik des Himmels; Prakt. Übgn. — Küstner: Th. der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen II; Astron. Kolloquium.

Braunschweig; *Techn. Hochschule.* — Fricke: Diff.- und Integralrechnung I mit Übgn.; Trigon. Reihen und harmonische Analyse; Vektorentheorie. — N. N., Geometrie der Bewegung; Ausgew. Kapitel aus der Th. der Kurven und Flächen. — Wernicke: Statik starrer und elastischer Körper. — Wieghardt: Technische Mechanik I; Ausgewählte Kapitel aus der analyt. Mechanik: Ausgew. Kapitel aus der Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen. — Koppe: Geodäsie II; Ausgleichungsrechn.; Grundzüge der sphär. Astronomie; Vermessungsübungen. — Schöttler: Kinematik.

Breslau. *Universität.* — Rosanes: Diff. Rechnung und Elemente der Integralrechn.; Seminar. — Sturm: Geom. Verwandtschaften I; Geom. Abschnitte der Mechanik; Seminar. — Kneser: Die allgemeinen Prinzipien der Dynamik; Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale: Seminar. — Franz: Geodäsie, niedere und Elemente der höheren; Geodätisch-astron. Praktikum; Übgn. über die Theorie der Astronomie. — Schæfer: Theoretische Mechanik.

Danzig; *Techn. Hochschule.* — Lorenz: Einf. in die Mechanik mit Übgn. Ausgew. Kapitel aus der Mechanik. — v. Mangoldt: Höhere Mathematik I. — Schilling: Darst. Geometrie mit Übgn.; Graphische Statik; mit Übgn. — Sommer: Höhere Mathematik II mit Übgn.; Einf. in die höh. Mathematik.

Darmstadt; *Techn. Hochschule.* — Dingeldey: Elemente der höh. Algebra; Höh. Mathematik. I — N. N., Ausgew. Kapitel aus der Mathematik; Höh. Mathematik. — Græfe: Höhere Mathematik II. — Wiener: Darst. Geometrie I; Synth. Geometrie; Arbeiten im mathem. Institut. — Henneberg: Mechanik I; Reine Kinematik. — Schlink: Ausgew. Abschnitte der Statik; Die Hauptsätze der Mechanik. — Pfarr: Hydraulik. — Fenner: Geodäsie; Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Erlangen; *Universität.* — Gordan: Algebra; Raumgeometrie; Seminar. Nœther: Diff. und Integralrechnung II; Analyt. Mechanik. — Hilb: Einleitend-mathematische sowie synthetisch- und darstellend-geometrische Vorträge und Uebungen.

Freiburg i. Br.; *Universität.* — Lüroth: Ellipt. Funktionen; Theoret. Astronomie. — Stickelberger: Integralrechn.; Übgn dazu; Infinitesimalgeometrie. — Lœwy: Algebr. Gleichungen; Einf. in die höh. Mathematik mit Anw. auf Fragen der Naturwissenschaften; Seminar. — Weingarten: Ueber die Deformation der Flächen. — Seith: Die Kegelschnitte in elementargeometr. Behandlung. — Kœnigsberger: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper: Geophysik. — Tolle: Mechanische Technologie I.

Göttingen; *Universität.* — Klein: Kurven und Flächen; Seminar. — Hilbert: Th. der Differentialgleichungen mit einer unabh. Variabeln; Seminar. — Minkowski: Variationsrechnung; Wärmestrahlung: Seminar. — Runge: Numerische Auflösung von Gleichungen mit Übungen: Photogrammetrie mit Uebungen; Seminar. — Brendel: Versicherungsrechnung; Versicherungsseminar; Arbeiten auf dem Gebiete der Störungstheorie. — Prandtl : Einf. in die Thermodynamik ; Maschinenlehre ; Seminar. — Herglotz : Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiete. — Caratheodory : Diff.- und Integralrechn. I. — N. N. : Analyt. Geometrie. — Schwarzschild : Populäre Astronomie ; Rotation der Himmelskörper ; Astrophysik. Praktikum; Seminar. — Ambronn : Geogr. Ortsbestimmungen ; Bahnbestimmungen von Doppelsternen.

Greifswald ; *Universität.* — Thomé : Mechanik I ; Ebene algeb. Kurven ; Seminar. — Engel : Diff. und Integralrechnung II ; Ubgn. dazu ; Th. der Transformationsgruppen (Fortsetzung) ; Seminar. — Vahlen : Projektive Geometrie ; Ubgn. dazu ; Th. und Anw. der geodätischen Instrumente. — Mie : Elementarmathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik.

Halle a. S. ; *Universität.* — Cantor : Diff-. und Integralrechnung II ; Analyt. Mechanik ; Seminar. — Wangerin : Synth. Geometrie ; Diff-. rechnung ; Seminar. — Gutzmer : Analyt. Geometrie der Ebene ; Einf. in die Theorie der linearen Differentialgleichungen ; Seminar. — Eberhard : Zahlenth. ; Übgn dazu. — Bernstein : Algebra ; Übgn dazu ; Einf. in die Versicherungsmathematik ; Übgn dazu. — Walter : Graph. Statik mit Übgn ; Feldmessen und Nivellieren ; Eisenbahnbau und -Betrieb mit Exkursionen II. — Buchholz : Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung mit Anwendung auf Triangulation ; Praktische Übungen in geographischer Ortsbestimmung

Hannover ; *Tech. Hochschule.* — Kiepert : Diff. und Integralrechnung II ; Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes. — Stäckel : Diff. und Integralrechnung I und II ; Anw. der höh. Mathematik. — Rodenberg : Darst. Geometrie. — N. N. : Grundzüge der höh. Mathematik für Architekten und Chemiker. — Hotopp : Mechanik. — Weber : Mechanik ; Ausgew. Kapitel der techn. Mechanik. — N. N. : Geodäsie ; Prakt. Geometrie. — Barkhausen : Ausgew. Kapitel der Statik. — Petzold : Geodätisches Rechnen ; Übungen in der Ausgleichungsrechnung.

Heidelberg ; *Universität.* — Kœnigsberger : Diff.-u. Integralrechn., 4 ; Funktionentheorie, 4, math. Seminar, 2. — M. Cantor : Anw. der Analysis auf höhere ebene Kurven, 4 ; Arithmetik u. Algebra (für Kameralisten.) 3. — Kœhler : Anal. Geometrie d. Ebene, 3 ; Ausgew. Kapitel aus der synth. Geometrie des Raumes, 1. — Boehm : Die Grundlagen d. Arithmetik, Algebra u. Analysis (Elementar mathematik, Arithm. Teil), 3 ; Uebgn. 3, höh. Mathematik, 1. — Bopp : Geschichte des Infinitesimalrechn. von Leibniz bis Lagrange, 2. — Valentiner : Bahnverbesserung, 2 ; Kapitel aus der Stellarastronomie, 1 ; Entwicklung der Astronomie seit Newton, 1. — Wolf : Elemente der Meteorologie, 2.

Iena ; *Universität.* — Haussner : Differentialrechnung mit Uebgn , 5 ; Ausgew. Kapitel aus der Geometrie, (Kollineation, Perspektive und Axometrie), 2 : Differentialgeometrie, 3 ; Mathem. Proseminar, Uebgn. aus der analyt. Geometrie der Ebene, 2 ; Mathem. Seminar, 2. — Thomæ : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Kartographie, 2. — Frege : Theorie der nach dem Newton'schen Gesetze wirkenden Kräfte, 3. — Rau : Technische Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 2 ; Graphische Uebungen, 3. — Knopf : Zeit- und Ortsbestimmung mit prakt. Uebgn., Sternwarte, 4 ; Geodäsie mit prakt. Uebgn. im Gelände, 2 ; Berechnung des scheinbaren Laufs der Planeten und Kometen, 2.

Karlsruhe ; *Techn. Hochschule.* — Krazer : Höh. Mathematik I. — Wedekind : Grundlehren der höh. Mathematik ; Höh. Mathematik II. — Ludwig : Elementare und analyt. Geometrie des Raumes ; Projektionslehre. — Faber : Algeb. Analysis ; Repetitorium der höh. Mathematik ; Übungen. — Schur : Darst. Geometrie II ; Konstruktive Übungen der Perspektive. — Heun : Mechanik II : Seminar. — Brauer : Hydraulik ; Festigkeitslehre.

Kiel ; *Universität.* — Pochhammer : Analyt. Geometrie des Raumes ; Einl. in die Th. der ellipt. Funktionen ; Seminar. — Heffter : Analyt. Mechanik ; Grundlagen der Analysis (Irrationalzahl, Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit) ; Seminar. — Landsberg : Diff.-rechnung ; Übgn. dazu ; Variationsrechnung. — Weinnoldt : Synth. Geometrie. — Kobold : Höh. Geodäsie ; Geodätische Übungen. — Harzer : Geogr. Ortsbestimmungen ; Übgn. dazu ; Th. der Präzession und Nutation. — Kreutz : Berechnung der Doppelsternbahnen ; Parallaxe und Aberration. — Strömgren : Num. Behandlung spezieller Fälle des Dreikörperproblems ; Mathem. Geographie.

Königsberg i. Pr. ; *Universität.* — Meyer : Analyt. Geometrie der Ebene ; Übungen dazu ; Differentialgeometrie ; Seminar. — Schoenflies : Diff.-rechnung ; Übgn. dazu ; Über den Kurvenbegriff. — Saalschutz : Determinantenlehre ; Über Gauss hypergometrische und andere interessante Reihen ; Algeb. Übungen und Vortrag. — Battermann : Th. der astron. Instrumente ; Uebgn. an Instrumenten der Sternwarte. — Cohn : Einf. in die theor. Astronomie ; Ausgew. Kapitel der Himmelsmechanik.

Leipzig ; *Universität.* — Neumann : Ausgew. Kapitel der Mathematik oder der mathematischen Physik. — Mayer : Analyt. Dynamik ; Uebungen dazu. — Hölder : Allg. Th. der Funktionen einer komplexen Veränderlichen ; Bestimmte Integrale ; Seminar. — Rohn : Projektive Geometrie ; Analyt. Geometrie der Ebene ; Seminar. — v. Oettingen : Geometrisch-perspektivisches Zeichnen. — Hausdorff : Algebr. Gleichungen. — Liebmann : Gewöhnliche Differentialgleichungen ; Uebungen dazu. — Bruns : Prakt. Analysis ; Geom. Optik ; Prakt. Uebungen in der Sternwarte. — Peter : Astron. und techn. Chronologie ; Prakt. Uebungen. — Fischer : Einf. in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften. — Strecker : Praktische Geometrie. — Zimmern : Ueber die Astronomie der Babylonier. — Des Coudres : Einleitung in die theoretische Physik ; Uebungen dazu ; Fouriersche Reihen und harmonische Analysatoren.

Marburg ; *Universität.* — Hensel : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes ; Funktionenth. ; Seminar. — Neumann : Algebra ; Analyt. Mechanik ; Seminar. — v. Dalwigk : Differentialrechnung ; Übungen dazu ; Darst. Geometrie I mit Übungen. — Fueter : Über bestimmte Integrale und für die physikalische Anwendung wichtige Funktionen in elementarer Dartstellung ; Populäre Astronomie. — Jung : Differentialgeichungen. — Feussner und v. Dalwigk : Anleitung zu Zeit- und Ortsbestimmungen.

München ; *Universität.* — Lindemann : Th. der ellipt. Funktionen ; Th. der algebr. Formen ; Seminar. — Voss : Part. Differentialgleichungen ; Algebra II ; Seminar. — Pringsheim : Integralrechnung ; Übgn. dazu ; Geomet. Ergänzungen zur Differentialrechnung. — Doehlemann : Darst. Geometrie II ; Übgn. dazu ; Graph. Statik ; Übgn dazu. — v. Weber : Analyt. Geometrie des Raumes ; Übgn. dazu ; Differentialrechnung ; Übgn. dazu. — Brunn : Elemente der höh. Mathematik. — Hartogs : Elem. Geometrie der Ebene und des Raumes. — PERRON : Analyt. Zahlentheorie. — v. SEELIGER : Die neueren Methoden in der Theorie der Bewegung der Planeten ; Übgn. — GROSSMANN : Einf. in die Astronomie. — GRAETZ : Analytische Mechanik II.

Strassburg ; *Strasbourg*. — REYE : Ausgew. Kapitel der höh. synth. Geometrie ; Theorie der Kräfte, die nach Newtons Gesetz wirken (Potentialtheorie) ; Seminar. — WEBER : Bestimmte Integrale und Einl. in die Funktionentheorie ; Algebra ; Seminar. — SIMON : Methodik und Didaktik des Rechnens und der Mathematik auf den höh. Schulen. — WELLSTEIN : Einleit. in die Theorie der algebr. Funktionen ; Riemannsche Flächen ; Seminar. — TIMERDING : Analyt. Geometrie des Raumes ; Darst. Geometrie II mit Übungen : Die Entwicklung der mechanischen Prinzipien ; Seminar. — EPSTEIN : Analyt. Zahlentheorie ; Seminar. — BECKER : Sphär. Astronomie ; Geodäsie mit Übungen und Demonstrationen ; Astron. Beobachtungen an Instrumenten der Sternwarte ; Astron. Kolloquium.

Stuttgart ; *Techn. Hochschule*. — REUSCHLE : Analyt. Geometrie der Ebene, mit Übgn. ; Diff.- und Integralrechnung, mit Übgn. ; Seminar. — MEHMKE : Darst. Geometrie mit Übgn. ; Projektive Geometrie mit Übgn. ; Seminar. — BRETSCHNEIDER : Repetitionen in nied. Mathematik. — WÖLFFING : Krümmungsth. Partielle Differentialgleichungen. — ROTH : Perspektive. — WEYRAUCH : Einl. in die mathem. Theorie der Elastizität. — N. N. ; Techn. Mechanik. — HAMMER : Prakt. Geometrie mit Übungen ; Ausgleichungsrechnung. — HOHENNER : Trigon. Übgn. ; Prakt. Geometrie mit Übungen ; Astron. Zeit- und direkte geogr. Ortsbestimmung mit Übungen. ; Katastermessungen. — STÜBLER : Mathem. Geographie. — LANG : Die Differentialgleichungen der mathem. Physik.

Tubingen ; *Universität*. — v. BRILL : Analyt., Geometrie des Raumes, 3 ; Krümmung d. Flächen. 4 ; Sem. 2. — v. STAHL : Niedere Analysis, 3 ; höhere Analysis (Diff. rechn.) 3 ; Variationsrechn. 2 ; Sem. 2. — MAURER : Synthetische Geometrie 2 ; Uebgn. 1 ; Darst. Geom. 1 ; Uebgn. 2. — GANS : Einführung in die Vektoranalysis mit Anw. auf. die math. Physik.

AUTRICHE-HONGRIE

Kolorsvar ; *Université*. — SCHLESINGER : Intégrales définies, 3 ; Fonctions fuchsiennes, 2 : Séminaire, 1 ; Exercices, 1, Astronomie théorique, 2. — VALYI : Géométrie analytique, 5 ; Equations résolubles algébriquement, 2 ; Exercices, 1 ; Séminaire, 1. — FEJER : Equations différentielles au domaine réel, 3 ; Fonctions entières transcendantes, 2. — KLUG : Géométrie descriptive, 3 ; Géométrie projective, 2 ; Exercices, 2. — FARKAS : Propagation de l'énergie, 4 ; Mécanique analytique, 3 ; Séminaire, 2.

FRANCE

Paris ; *Faculté des sciences. 2e semestre* (à partir du 1er mars 1907). — E. PICARD : Détermination des intégrales des Equations aux dérivées partielles par diverses conditions aux limites, 2 leçons par semaine. — GOURSAT : Des Equations différentielles et des Equations aux dérivées partielles,

I. — L. Raffy : Théorie de la courbure et propriétés des lignes tracées sur les surfaces. — P. Painlevé : Lois générales du mouvement des systèmes, la Mécanique analytique, l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique, 2. — P. Appell : Eléments d'Analyse et de Mécanique, 3. — Andoyer : Ensemble des matières comprises dans le programme du Certificat d'Astronomie, 2 leçons, 1 conférence. — Boussinesq : Des écoulements tumultueux et tourbillonnants auxquels donnent lieu les lits à grande section (tuyaux de conduite et cours d'eau découverts), 2. — G. Kœnigs : Etude cinématique et dynamique des machines, 2. — Borel : Calcul des probabilités et théorie des erreurs, 1.

Conférences. — L. Raffy : Conférence sur le calcul intégral et les applications géométriques, 1 conférence. — P. Puiseux : Conférences sur la mécanique, 2. — Servant : Travaux pratiques de mécanique physique.

Enseignements et exercices pratiques ouverts aux étudiants appartenant à l'Ecole normale supérieure. — J. Tannery : Calcul différentiel et intégral. — L. Raffy : Applications de l'Analyse à la Géométrie. — G. Borel : Mathématiques. — F. Hadamard : Mathématiques.

Cours libres. — M. d'Ocagne : Calcul graphique et nomographie, 2 leçons.

SUISSE

Berne ; *Universität.* — Graf : Besselsche Funkt. m. Repetit. 3 ; Bestimmte Integrale m. Repetit. 3 ; Differentialgleichungen 2 ; Differential- u. Integralrechnung 2 ; Renten- u. Versicherungsrechnung 2 ; Repetit. d. Elementar-Math. 3 ; Math. Seminar m. Huber 2. — Ott : Differentialrechnung 2 ; Analyt. Geom. d. Ebene, I. Teil 2. — G. Huber : Sphär. Astron. II. 2 ; Repetit. der Astronomie 1 ; Analyt. Geometrie des Raumes m. Theorie d. Flächen II. Grades 3 ; Theorie d. Enveloppen u. Brennlinien 2 ; Math. Seminar (geometr. Richtung), m. Graf 1. — Benteli : Elem. d. darst. Geom. 4 ; Prakt. Geom., meist Uebungen auf d. Terrain 3. — Moser : Ausgew. versicherungs-wissenschaftl. Kap. ; Die Tranzendente π (Bestimmung durch Beobachtung m. Hülfe d. Fehlertheorie) 1 ; Math.-versichrgs-wschftl. Seminar 2. — Crelier : Synthet. Geomet. II. Teil 2 ; Zentralprojektion 2 ; Exercices de Géométrie 2. — Bohren : Wahrscheinlichkeitsrechnung 2.

Genève ; *Université.* — C. Cailler : Calcul diff. et intégral, 3 ; Exerc. 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exerc., 2 ; Conférences d'Analyse, 2. — H. Fehr : Théorie des Equations, 2 ; Géométrie descriptive et projective, 2 ; Exerc. d'Algèbre et de Géométrie, 2, Géométrie vectorielle, 1 ; Séminaire de Géométrie sup. 2. — R. Gautier : Astronomie théorique, 2. — R. de Saussure : Géométrie du mouvement, 2 ; Mécanique des fluides, 1.

Zurich ; *Ecole polytechnique fédérale:* Section normale des sciences mathématiques. — Hirsch : Integralr. 4 ; Repet. 1 ; Uebgn. 2 ; Invariantentheorie 2. — Franel : Calcul intégral 4 ; Répét. 1 ; Exerc. 2. — Herzog : Mechanik I, 6 ; Repet 1 ; Uebgn. 2. — W. Fiedler : Darst. Geometrie 2 ; Repet. 1 ; Uebgn. 4 ; Geometrie du Lage 4 ; Elemente d. Anal. Geom. der Lage 2. — Lacombe : Géométrie descriptive 2 ; Répét. 1 ; Exerc. 4. — Geiser : Analyt. Geometrie II : Algebr. Flächen 4. — Hurwitz : Algebr. Gleichungen 4. — Hurwitz mit Lacombe : Math. Seminar 2. — Rebstein : Versicherungsmathematik 2; Anw. d. Wahrscheinlichkeitsrechn. auf d. Fehlerth. 1. — Rosenmund : Vermessungskunde m. Uebgn. — Wolfer : Geogr. Ortsbestimmung 3; Uebgn im astron. Beobachten 3; Ausgew. Methoden der Zeit u. Ortsbestimmung 2. — Beyel : Die Grundlagen der Geometrie 2; Axonometrie u. Perspektive 2; Schattenlehre 1. — Dumas : Exercices de nomographie 1; Exerc. sur la résolut. numérique des équations 1. — T. Keller : Uebgn. aus d. Diff.- u. Integralrechn. 2. — Kraft : Anal. Mechanik 3; Geometrischer Kalkül, I, 1; II, 2; III, 1.

BIBLIOGRAPHIE

Ch. Fassbinder. — **Théorie et pratique des approximations numériques.** — 1 vol. in-8°, 91 p.; prix : 3 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Ouvrage élémentaire dans lequel l'auteur se borne aux notions les plus essentielles, généralement exigées des candidats à des écoles techniques spéciales. Ce sont les définitions et théorèmes concernant l'erreur absolue, l'erreur relative, le nombre des chiffres exacts. On y trouve aussi quelques aperçus sur les opérations abrégées et l'application de l'Algèbre à la théorie des erreurs.

De nombreux problèmes et exercices numériques accompagnent le texte. L'ouvrage se termine par les exercices proposés aux concours d'admission à l'Ecole navale et aux Ecoles des Arts et métiers depuis 1885.

Otto Biermann. — **Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.** 1 vol. gr. in-8°, 226 p.. 8 M.; Vieweg u. Sohn, Braunschweig.

Le présent Ouvrage est établi sur un plan beaucoup plus vaste que celui de M. Fassbinder; il s'adresse aussi à d'autres lecteurs. Destinées aux étudiants qui désirent s'initier à la pratique du calcul numérique dans les problèmes scientifiques, ces leçons seront les bienvenues dans les séminaires et les laboratoires de mathématiques. Ici ce terme de laboratoire est conçu dans son véritable sens; mais il en existe bien peu où l'on s'attache à initier et à exercer les étudiants aux méthodes de calcul. L'ouvrage de M. Biermann contribuera à développer cet enseignement, car il repose sur une expérience de nombreuses années. Nous ne saurions trop en recommander l'étude à tous ceux qui seront appelés à faire des exercices numériques dans les problèmes des sciences pures et appliquées. Les professeurs y trouveront d'intéressantes et utiles indications quant aux méthodes de calcul.

Une énumération des principaux chapitres donnera une idée de l'étendue des matières traitées:

Calcul avec des nombres exacts ou approchés. — L'approximation dans les séries numériques. — Résolution approchée d'équations numériques. — Interpolation et calcul des différences. — Application de l'interpolation aux problèmes de quadrature et de cubature. — Emploi d'instruments mathématiques tels que la règle à calculs, l'intégraphe et le planimètre.

Brioschi. — **Opere Matematiche**. *Tome IV*. — 1 vol. gr. in-4°, 418 p. ; 25 l. ; U. Hœpli, Milan.

La publication des œuvres de Brioschi continue d'une manière très régulière — on en voudrait pouvoir dire autant des différentes œuvres complètes en cours de publication dans divers pays —. Ce tome *IV* contient une cinquantaine de mémoires ayant principalement pour objet les fonctions hyperelliptiques, la théorie des formes quadratiques et biquadratiques, etc. Citons aussi les belles recherches sur l'équation du cinquième degré. La publication de ce volume a été faite sous la direction de MM. Gerbaldi et Pascal qui se sont chargés de revoir les mémoires originaux et les épreuves. L'exécution matérielle est faite avec le soin qui caractérise les ouvrages de la Maison Hœpli.

C.-C. Dassen. — **Tratado elemental de Aritmetica** de acuerdo con las ideas modernas y metodos mas rigurosos. — 1 vol. in-8°, XVIII, 548 p.

— **Tratado elemental de Algebra**. — 1 vol. in-8° XVIII, 528 p., Coni Hermanos, Buenos-Aires.

Dans une de ses préfaces l'auteur constate que les manuels en usage dans la République-Argentine sont bien faibles et que la rigueur, en général, « y brille par son absence. »

S'il en est ainsi, les deux volumes de M. Dassen constituent sans doute un progrès considérable sur la littérature actuelle de ce pays ; car ses théories sont, dans leur ensemble, établies avec logique et rigueur.

L'auteur devait même éviter de verser dans un modernisme outré, sous peine de ne pas être compris de ses concitoyens. Il a heureusement échappé à ce danger et, sauf le vocabulaire qu'il pouvait rajeunir sans inconvénient, il s'est avancé, avec sagesse et prudence, dans la voie du progrès.

Il y aurait maladresse de notre part à formuler des critiques de détail, car les particularités de ces livres s'expliquent peut-être par cette circonstance qu'ils succèdent à une littérature presque nulle.

Par exemple, si l'on trouvait le travail un peu long, M. Dassen pourrait à bon droit répondre qu'il a tout à édifier, qu'il doit faire l'éducation des professeurs mêmes, de sorte que son exposé prend parfois les allures du plaidoyer.

Beaucoup d'autres faits s'expliquent sans doute de la même manière. Bien que très au courant de la bibliographie générale, M. Dassen a dû, en écrivant ses livres, tenir compte du milieu auquel il les destinait. Et le même devoir nous incombe quant à l'appréciation. Il serait donc souverainement injuste de porter un jugement sur la valeur absolue de ces ouvrages. L'important n'est pas qu'ils sont comparables à la bonne moyenne des manuels usités en Europe, mais qu'ils soient adaptés aux exigences du moment et du lieu.

Il ne nous reste, pour donner une idée exacte de ces deux traités, qu'à résumer et à caractériser sommairement les matières exposées.

Arithmétique. *Livre I. Nombres entiers.* — Notions fondamentales : les concepts de nombre cardinal et de nombre ordinal. — Les trois opérations directes. — Opérations inverses, y compris l'extraction des racines et les logarithmes entiers (si $b^x = a$, l'entier x est le log. de a). — Systèmes de numération. — Mécanisme du calcul dans le système décimal. — Divisibilité et nombres premiers.

Livre II. Le concept de grandeur ou de quantité mathématique. — Notion de nombre fractionnaire basée sur la mesure des grandeurs concrètes. — Calcul des fractions ordinaires et décimales. — Fractions périodiques. — Calculs approchés. — Concepts de limite et de nombre incommensurable : ce dernier est la limite d'une série de valeurs approchées. — Système métrique et autres mesures. — Rapports et proportions. — Règle de trois, intérêt, escompte, etc.

Appendice : Equidifférences. — Equations. — Progressions et logarithmes (avec une table à 4 décimales); intérêts composés.

Algèbre. *Livre I. Calcul algébrique.* — Opérations sur les grandeurs non dirigées (cette partie fait double emploi avec l'Arithmétique, parce que l'Algèbre a été publiée la première). — Opérations sur les grandeurs dirigées (les nombres négatifs sont basés sur la notion empirique des grandeurs susceptibles de varier dans deux sens opposés). — Calcul des polynomes. — Fractions algébriques. — Irrationnelles.

Livre II. Equations. — Principes fondamentaux. — Equations et systèmes du premier degré ; problèmes. — Equations du second degré. — Trinome. — Equation bicarrée.

Livre III. Applications. — Calcul des imaginaires. — Analyse combinatoire et binôme. — Progressions et logarithmes.

Appendice. Rapports et proportions, etc.

Les deux volumes sont édités avec soin et ornés de figures. Chaque paragraphe est suivi d'une série d'exercices. Le nombre total d'exercices est considérable : si les plus simples manquent d'intérêt, c'est que chaque série est soigneusement graduée. M. Stuyvaert (Gand).

J. Horn. — **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.** (Sammlung Schubert). — 1 vol. de X. 392 pages ; 10 Mk.; G.-J. Göschen, Leipzig.

Je ne saurais donner une meilleure idée de ce qu'est ce volume qu'en traduisant et résumant sa préface. Le treizième volume de la collection Schubert déjà consacré aux équations différentielles par le professeur Schlesinger, est un ouvrage surtout destiné aux commençants, ouvrage qui se limite aux équations du premier ordre et aux équations linéaires du second. Le présent livre ne se propose pas de revenir sur ces débuts, mais plutôt de traiter systématiquement les équations différentielles d'ordre quelconque. C'est ainsi qu'il débute par des généralités sur les systèmes d'équations simultanées.

Il n'est pas possible en de telles matières d'écrire un ouvrage véritablement complet et l'auteur a surtout développé, quant aux applications, les questions empruntées à la Physique, à la Mécanique céleste, etc., qui avaient été négligées par Schlesinger, ce qui ne veut pas dire qu'il néglige ici tout ce qui a été traité par ce dernier.

L'unité de l'œuvre n'est donc altérée en rien et, pour la pouvoir parcourir avec fruit, il suffit de connaître les éléments classiques de la théorie des fonctions et de la théorie des déterminants. La connaissance des fonctions elliptiques et de la mécanique analytique n'est nécessaire que pour quelques paragraphes spéciaux.

Ce portrait rapide peut être complété de façon fort intéressante si l'on feuillette les quatre cents pages ainsi présentées.

Dans le premier chapitre, à propos des théorèmes d'existence, signalons des discussions très approfondies faites à l'aide des méthodes de MM. Painlevé et Picard, et notamment l'emploi de la méthode d'approximations successives due à ce dernier géomètre.

L'étude des équations linéaires, est à la fois très étendue, très simple et très nette. L'étude des différentes branches des intégrales est précédée de la théorie des substitutions linéaires et la grande importance mécanique du cas où les coefficients sont constants est mise en lumière par la considération des petites oscillations d'un système possédant divers degrés de liberté.

Mais nous pouvons passer sur ces débuts élémentaires pour constater combien l'ouvrage sera utile à ceux qui voudront s'élever jusqu'aux derniers progrès faits dans une si intéressante branche de l'analyse.

Après les équations linéaires considérées par Fuchs nous étudions celles qui admettent des solutions asymptotiques du genre de M. Poincaré, celles dont l'intégration exige l'emploi de déterminants infinis comme l'équation rencontrée par Hill dans sa belle théorie de la Lune, les équations à coefficients simplement ou doublement périodiques dont un type célèbre est fourni par l'équation de Lamé.

Ces hautes questions n'empêchent pas le professeur Horn de consacrer un très intéressant chapitre aux équations, les plus simples et les plus anciennes, intégrables ou tout au moins réductibles à l'aide de procédés élémentaires, telles les équations homogènes, linéaires, de Bernoulli, de Riccati, de Clairaut, etc., etc... mais il nous montre, ne serait-ce que par la théorie du facteur intégrant, à quelles circonstances ces cas simples doivent leur existence. Dans le même ordre d'idées les équations de la dynamique sont étudiées avec les recherches de Jacobi notamment sur la notion du dernier multiplicateur.

Des pages, très remarquables au point de vue de la physique mathématique, sont consacrées aux équations qui contiennent dans leurs coefficients un paramètre arbitraire μ. On sait que si l'on astreint les solutions de telles équations à certaines conditions aux limites, on ne peut plus alors donner à μ que certaines valeurs en nombre infini qui sont racines d'une équation transcendante. On peut en général appliquer à de telles équations le procédé d'approximations successives de M. Picard.

L'ouvrage, décidément fort au courant des résultats les plus modernes, se termine par l'étude des équations considérées par M. Painlevé, équations dont l'intégrale générale est uniforme.

En résumé, nous trouvons ici sous une forme simple et claire les résultats les plus importants acquis à la science. Le professeur Horn nous donne le moyen de les comprendre avec un effort certainement réduit au minimum, car il va en général droit aux points qu'il se propose d'exposer sans les faire précéder de préliminaires qui donnent souvent aux questions une apparence obscure qu'elles n'ont pas en réalité. A. Buhl (Montpellier).

E. Jouffret. — **Mélanges de Géométrie à quatre dimensions.** — 1 vol. gr. in-8°, XI, 227 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

On sait que les propriétés projectives, en Géométrie plane, n'ont aucun fondement simple qui soit propre à cette Géométrie puisqu'elles y trouvent pour unique appui la proposition de Desargues jouant alors le rôle d'un axiome ; elles se coordonnent, au contraire, facilement lorsqu'on les envisage comme des conséquences de propriétés spatiales. C'est ainsi que les propriétés diverses et compliquées auxquelles donnent lieu les hexagrammes de Pascal et de Brianchon acquièrent, par ce moyen, une évidence particulière.

Des travaux divers ont en effet montré que ces propriétés constituent un cas particulier de propriétés plus générales se rattachant à la théorie d'une certaine surface du troisième degré ; cette théorie acquiert elle-même une simplicité remarquable lorsqu'on considère l'espace comme une variété linéaire appartenant à une variété à quatre dimensions. Ce sont ces résultats dont M. Jouffret présente un exposé méthodique et clair. Il étudie également, dans le même ordre d'idées, les surfaces du quatrième degré (ou quartiques) en les considérant comme intersections d'*hypersurfaces* appartenant à une variété à quatre dimensions.

Quelques alinéas, qui ont pour objet la définition de la distance et de la mesure dans l'espace à quatre dimensions, nous ont paru hors du sujet dans cette étude essentiellement projective. Enfin M. Jouffret a cru devoir consacrer à la « question de l'existence réelle de l'hyperespace » des spéculations qui ne nous ont pas convaincu, mais qui contiennent pourtant des remarques intéressantes. G. Combebiac (Bourges).

H. Laurent. — **La Géométrie analytique générale.** — 1 vol. in-8°, VII, 151 p. ; 6 fr. ; Hermann, Paris.

« On appelle point ou variété à *o* dimensions, dans un espace à n dimensions, l'ensemble de n quantités x_1, x_2, ..., x_n ». Cette définition suffit à caractériser le point de vue nettement analytique adopté par l'auteur.

Après une claire exposition concernant les éléments : substitutions orthogonales, lignes droites, longueur, contact, enveloppes, surfaces développables, l'auteur consacre à la théorie des surfaces algébriques un beau chapitre qui, avec un autre chapitre de compléments sur le même sujet, constituent la partie la plus saillante de l'ouvrage et, peut-être, sa raison d'être. Signalons, parmi les questions traitées dans ces chapitres, la théorie des points communs à n surfaces dans l'espace à n dimensions, comprenant l'établissement des relations différentielles d'Abel, qui existent entre les coordonnées de ces points, ainsi qu'une démonstration analytique extrêmement élégante d'un théorème de Chasles généralisé, savoir : *si on mène à une surface algébrique des plans tangents parallèles à une même direction, le centre de gravité des points de contact restera fixe quand on fera varier la direction.*

La théorie des surfaces du second degré (ou, si l'on préfère, des fonctions quadratiques) fait l'objet d'un chapitre spécial ; puis, dans un chapitre consacré aux géométries non-euclidiennes, on trouve un exposé des géométries sphériques et des géométries hyperboliques, ainsi qu'une étude des transformations homographiques et, en particulier, homologiques.

Enfin, en une brève « incursion dans le domaine concret », l'auteur a cru devoir exposer ses vues sur la nature de la Géométrie. Les idées subjectivistes semblent décidément séduire certains géomètres éminents. Je ne saurais les suivre dans cette voie et, bien que je croie avoir, autant que quiconque, l'esprit affranchi « des préjugés que nous devons à notre éducation et à notre atavisme », je m'inscris franchement en faux contre cette affirmation contenue dans l'épigraphe de l'ouvrage : « L'homme a créé l'espace pour expliquer et coordonner ses sensations ; il l'eût créé à deux dimensions, s'il avait été condamné à l'immobilité et s'il n'avait eu que le sens de la vue ».

Le nom de l'auteur doit nous dispenser d'insister sur la clarté de l'exposition, la personnalité des points de vue, la parfaite élégance des méthodes. G. COMBEBIAC (Bourges).

NIELS NIELSEN. — **Handbuch der Theorie der Gammafunktion.** — 1 vol. in-8° cart. de X-362 p., 12 M ; B. G. TEUBNER, Leipzig.

L'ouvrage de M. Nielsen constitue une Monographie complète de la fonction gamma. Nul n'était plus qualifié pour l'écrire ; les nombreux et beaux travaux de l'Auteur sur les transcendantes eulériennes l'avaient préparé à cette tâche. Il s'en est acquitté d'une façon magistrale. Aucun point de la théorie n'a été laissé de côté. — Une érudition profonde s'allie partout à une science d'exposition tout à fait remarquable. Il en résulte, dans l'ensemble, une œuvre qui en impose par son ampleur et sa solidité.

La première partie du livre est consacrée à un exposé, sous une forme élémentaire, des propriétés de la fonction gamma et des fonctions analogues, déduites de la théorie des fonctions analytiques, sans le secours des intégrales définies. C'était la façon de procéder de Weierstrass ; il faut espérer qu'elle deviendra définitivement classique. L'Auteur passe successivement en revue les fonctions $\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)$, $P(x)$ et $Q(x)$ de Prym, les développements en séries entières, les factorielles, la formule de Stirling, le théorème de Hölder.

La seconde partie est relative aux intégrales définies (propriétés des intégrales eulériennes, intégrales exprimables au moyen de la fonction gamma, fonctions $\Psi(x)$ et $\log\Gamma(x)$, séries de Kummer, de Lerch, de Stirling, fonctions de Prym, problème de Mellin).

La troisième et dernière partie renferme les théories des séries de factorielles où l'Auteur a introduit de si importantes contributions.

Telles sont, en quelques mots, les matières traitées par M. Nielsen. Ce sommaire, trop restreint, ne suffit pas évidemment à donner une idée, même approximative, de la richesse de documentation et de la sûreté de méthode qui caractérisent ce livre excellent. On sent que l'Auteur a pris plaisir à le composer, plaisir bien compréhensible puisqu'il n'est guère d'analystes qui ne se soient laissé séduire par l'attrait des transcendantes eulériennes. Le lecteur, à son tour, éprouvera bien certainement une égale satisfaction à l'étudier et à le méditer. M. GODEFROY (Marseille).

Ed. Bidw. WILSON. — **Seven Lectures on Spherical Geometry.** — 1 fasc. 8° 34 p., Drury College, Springfield, Missouri, E.-U. 1904.

L'étude suggestive de M. Wilson ne se prête pas bien à une courte analyse. Nous nous bornons à en indiquer le but et la disposition. Les discussions sur les fondements de la Géométrie étant assez abstraites, rien ne lui paraît plus apte à faire disparaître certaines difficultés que l'analyse complète d'un exemple particulier déjà connu, mais présenté maintenant sous un autre jour et discuté dans l'intention de préparer le chemin pour des recherches moins familières, quoique analogues. L'exemple lui est fourni par la Géométrie sphérique. Il considère donc la surface sphérique indépendamment de la Géométrie euclidienne de l'espace, et suivant « l'idée qui

« est le fondement de la conception moderne, que ce sont les axiomes qui « en réalité font la géométrie », il forme d'abord un ensemble d'axiomes sur la base desquels il construit son système de Géométrie sphérique. Il examine ensuite plus spécialement ces axiomes pour se rapprocher de la manière moderne d'envisager les fondements des Mathématiques et de la Géométrie en particulier. M.-Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques:

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Direttore G.-B. Guccia.

T. XXII. — M. Fréchet : Sur quelques points du Calcul Fonctionnel. — L. Bianchi : Ricerche sulla deformazione delle quadriche. — E. Pascal : Sulla equivalenza di due sistemi di forme differenziali multilineari, e su quella di due forme differenziali complete di 2º ordine. — U. Sbrana : Sopra certi inviluppi di sfere. — O. Niccoletti : Su un teorema di Kronecker della teoria dei determinanti. — L. S. da Rios : Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. — L. Berzolari : Sull'estensione del concetto di tetraedi di Möbius agli iperspazii. — P. Stæckel : Geodätische Linien auf Polyederflächen. — C. Burali-Forti : Sui principii della Meccanica. — P. Gordan : Die Resultante binärer Formen. — P. Calapso : Sugl'invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio. — L. Berzolari : Alcuni teoremi sulle curve razionali di uno spazio ad r dimensioni dotate di $r+1$ punti d'iperosculazione. — T. Boggio : Trasformazione di alcune funzioni potenziali. — A. Kneser : Ein Breitag zur Theorie der Integralgleichungen. — E. Picard : Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm. — Th. Reye : Folgerungen aus einem Satz von Bobillier über confocale Flächen zweiten Grades. — J. Quanjel : Les équations générales de la Mécanique dans le cas des liaisons non-holonomes. — P. Quintili : Determinazione della funzione m^{ma} di Green per un campo sferico di p dimenzioni. — E. Ciani : Sopra la sestiche gobbe dotate di infiniti pianti tritangenti. — B. Levi : Sul principio di Dirichlet. — P. Appell : Sur les fonctions harmoniques à trois groupes de périodes. — E. Pascal : Sui determinanti composti e su di un covariante estensione dell'hessiano di una forma algebrica. — G. Fubini : Sul principio di Dirichlet. — B. Levi : Sul principio di Dirichlet.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par X. Léon. Arm. Colin, Paris.

14e année. Nº 6. — Hannequin : La méthode de Descartes. — La philosophie de Leibniz et les lois du mouvement. — Poincaré : A propos de la Logistique.

15me année. Nº 1. — A. N. Whitehead : Introduction logique à la géométrie. — Voir, dans ce même fascicule 1, p. 11 du supplément, l'analyse de l'ouvrage de Frege. Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien. Math. - Naturw. Klasse. CXIV. Band, Jahrgang 1905. — Gerold's Sohn, Vienne.

Daublebsky v. Sterneck, R. : 1° Ueber die Kombinationen der Potenzreste einer Primzahl zu bestimmten Summen. — 2° Versuch einer Theorie der scheinbaren Entfernungen. — Klug, L. : Konstruktion des Reliefs einer Fläche zweiter Ordnung. — Kohn, G. : Ueber den Wurf von sechs Punkten der Ebene. — Mertens, F. : 1° Ueber zyklische Gleichungen. — 2° Ueber den Dedekind'schen Beweis der Irreduktibilität der Gleichung für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln — 3° Die Kummer'sche Zerfällung der Kreisteilungsresolvente. — Niessl, G. v. : 1° Bahnbestimmung des Meteors vom 2 November 1903. — 2° Bahnbestimmung des Meteors vom 14 März 1905. — Pick, G. : Zur Theorie der Differentiationsprozesse der Invariantentheorie. — Prey, A. : Ueber eine Vorrichtung zur Vermeidung des Mitschwingens des Statives beim Doppelpendel. — Radacovic, M. : Ueber die Berechnung der erzwungenen Schwingungen eines materiellen Systems. — Wælsch, E. : Ueber die Resultante binärer Formen. — Wagner, A. : Eine neue Methode zur Messung der Horizontalintensität auf Reisen. — Weinek, L. : Zur Theorie der Sonnenuhren. — Willkens, A. : Untersuchungen über eine neue Klasse periodischer Lösungen des Problems der drei Körper. — Wirtinger, W. : Ueber die Anzahl der linear unabhängigen hypergeometrischen Integrale n^{ter} Stufe. — Zahradnik, K. : Ueber eine birationale kubische Verwandschaft und deren Anwendung.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. herausgegeben von F. Pietzker. XII, Jahrgang, 1906. Otto Salle, Berlin.

Th. Adrian : Die Behandlung der Zycloide in einem angepassten Koordinatensystem. — K. Geissler : Die Bedeutung der Winkeldefinition für das Parallelenproblem. — O. Lesser : Negative Flächen im Schulunterricht. — O. Nitsche : Elementare Berechnung bestimmter Integrale von Potenzen mit ganzen und gebrochenen Exponenten. — G. Junge : Die Bazillenvermehrung, ein Beispiel für die Theorie der Potenzen. — E. Haentzschel : Ueber die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen. — J. Braun : Der Cosinussatz für beliebige Vielecke. — G. Junge : Zur Einführung in den Satz von Pythagoras. — R. Haage : Die Bestimmung der Charakteristik eines Kugelschnitts aus dem Neigungswinkel der Kegelkante und dem der Schnittebene gegen die Kegelachse. — H. Wieleitner : Beitrag zur Lehre von den negativen Flächen. — F. Pietzker : Flächenwerte von entgegengesetztem Zeichen. — Th. Schwartze : Die Grundformel des Parallelogrammgesetzes. — A. Wendler : Maximum, Minimum und Symmetrie. — O. Ohmann : Ueber eine kreisförmige und drehbare Wandtafel und ihre Verwendung im mathematischen Unterricht. — O. Lesser ; P. Kirchberger ; F. Pietzker : Nochmals die negativen Flächen. — V. Dörr : Eine vereinfachte Lichtstufen-Bestimmung. — E. Wiedemann : Ueber das Experiment im Altertum und Mittelalter. — F. Pietzker : 1° Die Stellung der Fachkreise zu den Vorschlägen der von der Naturforscher-Gesellschaft eingesetzten Unterrichtskommission. — 2° Diskussion über diese Frage. — G. Holzmüller : Karl Schellbach und seine Stellung zur Frage der Differential-und Integralrechnung auf hoheren Schulen. — H. Wieleitner : Der Zahl-und Mengebegriff im Unterricht. — O. Nitsche : Die Anwendbarkeit der Simpsonschen Regel, gleichzeitig eine Verallgemeinerung des Archimedischen Satzes. — J. Ducrue : Ueber geometrische Propädeutik. —

G. Holzmüller : Eine Abplattungsaufgabe. — Th. Adrian : Tangential-Koordinaten.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. XXXI Jahrg. 1906; Alfr. Hölder. Wien.

Nos 7 à 12. (Juillet-décembre, 1906). — P. v. Schaewnen : Quadrierbare Summen von mondförmigen Figuren. — E. Czuber : Die Kollektivmasslehre. — Adr. Achitsch : Zwei Reihen zur Berechnung von Logarithmen. — R. Kirchberger : Die darstellende Geometrie an unseren Realschulen seit deren Bestande.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 53. Band, 1906. B.-G. Teubner, Leipzig.

No 1. — Nitz : Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen. — Mie : Über die Kurzschlussstromkurve eines Gleichstromankers. — Ernst : Zur Addition und Subtraktion mit Hilfe des logarithmischen Rechenschiebers.

No 2. — Wieghardt : Über die Nebenspannungen gewisser hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. — Leon : Spannungen und Formänderungen rotierender Kugelschalen. — Lerch : Über die Berechnung der Summen diskontierter Zahlen für eine nach dem Makehamschen Gesetz fortschreitende Sterbetafel. — Wellisch : Die Gewölbetheorie im Lichte der Theorie der kleinsten Produkte. — Girtler : Über die kubische Dilatation und ihre Beziehung zur Beanspruchung isotroper elastischer Körper.

No 3. M. Radakovic : Über die theoretische Behandlung des Problems der störenden Lokomotivbewegungen. — Hans Linsenmann : Die elastische Linie der Gehäuse von Drehstrommaschinen mit grossen Durchmessern. — F. Wittenbauer : Dynamische Kraftpläne. — E. Wölffing : Abhandlungsregister 1904-1905. — E. Wölffing : Verzeichnis der in technischen Zeitschriften 1903-1904 sich vorfindenden mathematischen Abhandlungen.

No 4. — P. Riebesell : Über die Kommutation des Stromes in Gleichstromgeneratoren. — J. Horn : Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. — N. Delaunay : Graphische Berechnung der elliptischen Funktionen, mit einigen Anwendungen. — F. Biske : Réflexion de la lumière sur l'eau ébranlée. — Otto Biermann : Über die dichteste Lagerung gleicher Kreise in einem Kreise. — R. Gans : Das Potential einer leitenden Kreisscheibe. — Kleinere Mitteilungen. — Bücherschau.

Zeitschrift für mathematischen u. naturw. Unterricht, herausgegeben von Dr H. Schotten. — 37. Jahrgang, 1906 : B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 1 à 4. — Eckhardt : Berechnung der zyklometrischen und goniometrischen Funktionen ohne Reihenentwicklung. — Hagge : Das Volumen des Tetraeders als Funktion der Kanten. — Epstein : Ein Zerlegungsbeweis des Pythagoreischen Lehrsatzes. — Tesar : Ein Beispiel aus der Mathematik und Mechanik zur Lehre von den Grössenordnungen. — Pasternak : Über die Identität $(m^2 + n^2)(o^2 + p^2) = (mo \pm np)^2 + (mp \mp no)^2$. — Hermes : Bemerkungen zum Paskalschen Sechsecke. — Milarch : Elementare Berechnung der Logarithmen. — Th. Häbler : Die Ausnahmslosigkeit beim Definieren trigonometrischer Funktionen, — H. Bondenstedt : Das Berührungsproblem des Apollonius. — A. Schülke : Über die Einführung negativer Zahlen. — C. Frenzel : Neue elementare Ableitung der Formeln zur Bestimmung der Haupt-und Brennpunckte einer Linse. — A. Schülke : Über die Reform des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. — H. Keferstein : Eine gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2, 3, und 4. Grades. — Th. Nonne : Das Raumverhältnis des konkaven und konvexen Umdrehungs-Paraboloïds bei $2r$-Höhe. — J. Schreiner : Ein Satz der Schulgeometrie. — Ernst Sös : Zwei diophantische Gleichungen. — Ludwig Matthiessen ; Merkwürdige Zahlenreihen. — H. Wieleitner : Die Evoluten der Kegelschnitte. — H. Pfaff : Geometrische Oerter als Übungsstoff für die Prima. — J. Schlesinger : Zur Lehre von der Proportionalität der Linien am Kreise. — Wilh. Lehnen : Teilung eines jeden gegebenen Winkels in den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13,... usw. entsprechende gleiche Teile. — P. Zühlke : Einfacher Beweis des Satzes vom Neunpunktekreis. — Ernst Vogel : Über die mechanische Ermittlung des Durchdringungspolygons. — Grosse : Die graphische Behandlung der Gleichungen im Unterricht.

Literarische Berichte. — Pädagogische Zeitung.

2. Livres nouveaux :

O. Broggi. — **Traité des assurances sur la vie** avec développements sur le calcul des probabilités, traduit de l'italien par S. Lattès. — 1 vol. cart., 306 p. ; 7 fr. 50 ; Librairie Hermann, Paris.

C.-H. Chandler. — **Elements of the Infinitesimal Calculus.** — 1 vol., in-12, relié, 319 p., 146 figures, $ 2 ; John Wiley and Sons, New-York.

E. Czuber. — **Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung.** II Band. Zweite, sorgfältig durch gesehene Auflage. — 1 vol. in-8°, relié, 522 p. : 12 marks ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Hartwig. — **Das Stereoskop und seine Anwendungen**, mit 40 Abbildungen im Text u. 19 stereoskopischen Tafeln. — 1 vol. cart. 70 p., Collection « Natur u. Geisteswelt » ; 1 m. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

F. Pietzker. — **Lehrgang der Elementar-Mathematik.** I. Unterstufe. — 1 vol. in-8°, relié, 318 p. ; 3 m. 20 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Poincaré. — **Leçons de Mécanique céleste.** T. II. 1re partie : Développement de la fonction perturbatrice. — 1 vol. gr. in-8, 167 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

J. Riollot. — **Les carrés magiques.** Contribution à leur étude. — 1 vol. gr. in-8, 119 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

Osw. Veblen and N. J. Lennes. — **Introduction to Infinitesimal Analysis.** — Funktions of one real variable. — 1 vol. in-8, relié, 227 p., 22 figures ; $ 2 ; John Wiley and Sons, New-York.

H. Vogt. — **Eléments de mathématiques supérieures** à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs et des élèves des Facultés des sciences. 4me édition, très augmentée et entièrement refondue. — 1 vol. gr. in-8°, 710 p. ; 12 fr. ; Vuibert et Nony, Paris.

A. MANNHEIM

1831-1906

LA VIE ET LES TRAVAUX D'AMÉDÉE MANNHEIM

Le 11 décembre 1906 est une date de deuil pour la science française : ce jour-là, un grand géomètre, continuateur des Chasles et des Poncelet, était emporté à l'âge de 75 ans par une courte maladie.

L'histoire de la vie du colonel Mannheim est simple, et offre surtout de l'intérêt pour ceux qui l'ont connu, c'est à dire pour ceux qui l'ont aimé. Cependant il nous semble bon de ne pas la séparer de l'exposé de son œuvre ; il n'est pas inutile de présenter aux jeunes générations, l'exemple d'hommes chez lesquels la bonté, la droiture, la noblesse du caractère, les vertus privées furent en harmonie avec la puissance intellectuelle.

L'exposé des travaux scientifiques de Mannheim a été et sera sans doute présenté encore dans les journaux mathématiques. Les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, notamment, ont publié sous le titre « L'Œuvre d'Amédée Mannheim » une notice excellente de mon ami M. R. Bricard, à laquelle je me permettrai de faire de larges emprunts.

Né à Paris le 17 juillet 1831, Mannheim montra de très bonne heure un goût prononcé pour les mathématiques ; ses dessins d'enfant témoignent d'un sentiment inné de la perspective.

A l'Institution Martelet, où il fut placé par ses parents, il put commencer à révéler certaines particularités caractérisant ses aptitudes. Sa famille habitait rue de la Paix, l'institution était au Marais ; et c'est pendant le trajet, de plusieurs kilomètres, que l'élève résolvait mentalement les problèmes qui lui avaient été posés.

Reçu à l'Ecole centrale, il voulut pousser plus loin ses études et fut au lycée Charlemagne l'élève de Catalan. Il entra à l'Ecole Polytechnique en 1848, âgé de 17 ans, en sortit sous-lieutenant d'artillerie, et, quittant Paris pour la première fois, se rendit à l'Ecole d'application de Metz.

C'est là qu'il eut l'ingénieuse idée de modifier la règle à calculs, d'y adapter le curseur, et d'en faire l'instrument pratique si répandu, si utile, auquel son nom reste attaché. Rappelons ici qu'il devait plus tard perfectionner aussi le vernier et en décupler la précision.

C'est également pendant son séjour à l'école de Metz qu'âgé de moins de vingt ans, il publiait son premier travail mathématique, sur la théorie des polaires réciproques (1851).

Comme lieutenant, il fut envoyé dans plusieurs garnisons successives, puis à Marseille, où il séjourna deux ans et put se remettre à la science.

Détaché ensuite à la Manufacture d'armes de Châtellerault, en qualité de capitaine, il eut occasion de donner carrière à son génie inventif, par plusieurs perfectionnements dans le matériel de l'armée, et s'occupa des questions scientifiques s'y rapportant, comme plus tard au Comité technique de l'artillerie, auquel il fut pendant longtemps attaché.

En 1857 il avait publié, sous forme de brochure, un curieux mémoire, sur la « Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques », où se révèlent déjà dans leur plénitude son originalité et son tour d'esprit. Alors que Poncelet n'avait abordé le problème qu'en rendant les relations métriques d'abord projectives, Mannheim le résoud directement, en fait les applications les plus diverses et, allant plus avant encore, obtient la transformation, non seulement des théorèmes, mais de leur démonstration même.

Peu après, il faisait paraître dans divers journaux mathématiques d'intéressantes notes relatives aux centres de courbure et à la Géométrie infinitésimale.

Il était cependant encore peu connu lorsqu'en 1859, une place de répétiteur devint vacante à l'Ecole Polytechnique ; Mannheim y fut nommé, grâce à l'appui de l'illustre Lamé, qui avait su apprécier la valeur du jeune géomètre.

De cette année 1859 date la véritable carrière de Mannheim.

Désormais, il va se consacrer entièrement à la science et à l'enseignement.

C'est à cette époque également que remontent mes premières relations, d'élève à répétiteur, avec celui qui pour moi devait devenir plus tard un ami respecté. J'ai toujours gardé le souvenir de la sympathie que nous inspirait, à mes camarades et à moi, ce jeune répétiteur, de quelques années plus âgé que nous, et en qui nous sentions déjà un maître.

En 1860, Mannheim fit partie d'une mission envoyée dans le sud de la province de Constantine, pour l'étude d'une éclipse totale de soleil, et il s'y distingua par des observations, aussi curieuses qu'inattendues, relatives aux phénomènes d'interférences.

Nommé examinateur d'admission en 1863, il devenait l'année suivante professeur de Géométrie descriptive, en remplacement de M. de la Gournerie, et il a occupé cette chaire, on sait avec quel éclat, jusqu'à sa limite d'âge, en 1901.

Dans les années qui s'écoulent de 1859 à 1870, de nombreux et très importants travaux sont publiés par Mannheim sur la cyclide de Dupin, sur les transformations, sur les polygones inscrits et circonscrits, sur la Géométrie infinitésimale, et enfin sur le déplacement d'une figure de forme invariable, point de départ (1866) de cette « Géométrie cinématique » dont il est le créateur et qui restera comme la partie maîtresse de son œuvre.

Pendant le siège de Paris en 1870, il commande la batterie de l'Ecole Polytechnique; après le siège, au début de la Commune, il parvient à quitter Paris pour aller reprendre son enseignement à Tours, où avait été transférée l'Ecole Polytechnique.

Les années qui suivent comptent parmi les plus fécondes. Mannheim publie une foule d'articles et de mémoires remarquables, soit dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, soit dans les journaux mathématiques. Il pousse ses recherches dans toutes les directions où il devait définitivement établir son domaine, et il apporte d'importantes contributions à toutes les questions qu'il aborde; elles concernent notamment les surfaces du 2e ordre, la courbure et le contact des surfaces, les pinceaux de droites, les normalies, le déplacement des figures, la surface de l'onde, les surfaces réglées.

Ces sujets si divers, et dont plusieurs paraissaient ne pouvoir être traités que par l'Analyse, il les résoud par des procédés de Géométrie pure qu'il crée au fur et à mesure des besoins, et dont l'emploi donne à toutes ses productions un caractère saisissant de simplicité et d'élégance.

On retrouve ces mêmes qualités au plus haut degré dans son enseignement. Soucieux à juste titre d'en élever le niveau, il fait profiter ses élèves de ses découvertes, en attribuant un rôle prépondérant à la Géométrie cinématique ; il réussit ainsi à apporter, avantage très précieux, l'unité de méthode dans les démonstrations, et à obtenir une concision, une clarté, qui ne sont pas loin d'atteindre la perfection même.

En peu d'années, le cours est entièrement rénové. De la chaire de Géométrie descriptive il a fait, sans en altérer le programme et sans amoindrir, tant s'en faut, son utilité pratique, une chaire de Géométrie supérieure.

Aussi les suffrages du monde mathématique ne manquèrent-ils pas au « Cours de Géométrie descriptive de l'Ecole Polytechnique, comprenant les éléments de la Géométrie cinématique », que Mannheim, après quinze années de professorat, fit paraître en 1880.

D'éminents géomètres tels que Gilbert, Cremona, Zeuthen, dans de longues et flatteuses analyses, donnèrent à cet ouvrage la consécration de leurs éloges. Resal, dans une communication à l'Académie des Sciences, disait de son côté: « Ce beau travail établit un point de repère important dans l'histoire de la Science. »

Mannheim professait d'ailleurs avec une clarté impeccable et une grande autorité, complétant l'intérêt de ses leçons par l'habileté remarquable avec laquelle il exécutait au tableau, tout en parlant, les épures les plus compliquées. Aussi la renommée du professeur dépassa-t-elle l'enceinte de l'Ecole et plusieurs savants étrangers sollicitèrent et obtinrent l'autorisation de venir suivre cet enseignement.

Puisque nous sommes conduit en ce moment à parler plus spécialement du professeur, il est bon de remarquer que les qualités de l'esprit ne se spécialisent et ne se divisent pas. C'est parce que Mannheim était un savant précis, consciencieux, sévère vis à vis de lui-même, qu'il a été un maître des plus éminents. C'est parce qu'il était bon et qu'il aimait la jeunesse, qu'il a conquis l'affection de ses élèves s'ajoutant à l'admiration et au respect.

Qu'il écrive ou qu'il enseigne, il ne se sent jamais satisfait s'il lui semble qu'on pourrait encore atteindre à une plus grande simplicité, soit dans les démonstrations, soit dans les constructions. S'il est conduit à une citation, il tient à la donner précise, rigoureuse et complète. Il tient aussi à ne jamais omettre l'indication d'un auteur qui s'est occupé du même sujet ou d'un sujet analogue, fût-ce par une contribution minime. Sa scrupuleuse conscience a ainsi sauvé certains noms d'un oubli immérité.

En 1886 parait une deuxième édition du Cours de Géométrie descriptive, contenant de nombreuses modifications et additions. Signalons aussi une brochure publiée en 1882 et intitulée « Premiers Eléments de Géométrie descriptive », où Mannheim préconise la suppression de l'emploi systématique de la ligne de terre.

Ses idées très justes, sur ce point, furent introduites rapidement dans de nombreux établissements d'instruction, et nous pouvons constater qu'aujourd'hui elles ont à peu près universellement prévalu.

Durant la période s'étendant à partir de 1881 jusqu'en 1894, le domaine des recherches de Mannheim se précise ; il les poursuit et les achève. Parmi les travaux qu'il publie, mentionnons, presqu'au hasard, des notes importantes sur la polhodie et l'herpolhodie, sur l'hyperboloïde articulé, sur le conoïde de Plücker, etc. etc...

Prise dans son ensemble, son œuvre, comme le remarque M. Bricard, peut être divisée en trois groupes.

Le premier concerne la théorie des surfaces ; Mannheim généralise le théorème de Meusnier, il découvre le paraboloïde des huit droites, et apporte des contributions considérables à l'étude des propriétés qui dépendent d'infiniment petits du 3[me] ordre.

La considération des normalies, qui appartient en propre à Mannheim, le conduit à trouver et à vérifier des propositions qu'on aurait pu croire inabordables par la Géométrie pure. Enfin, les recherches sur les pinceaux, éléments infinitésimaux des congruences de droites, aboutissent au très beau « Mémoire d'optique géométrique » (1884), où tout est nouveau, méthode et constructions.

L'étude de la surface de l'onde de Fresnel constitue à elle seule un second groupe imposant de travaux. Ces recherches, qui forment encore un important chapitre des applications de la Géométrie cinématique, ont amené Mannheim à la détermination des ombilics, à la considération de la surface de l'onde comme surface limite, etc.

Parmi les nouvelles propriétés géométriques qu'il a découvertes, Mannheim a été assez heureux pour en rencontrer un certain nombre qui sont suceptibles d'une interprétation physique. On ne connaissait que peu de propriétés de ce genre, malgré les beaux travaux de Fresnel, Hamilton, Mac-Cullagh et Plücker.

Enfin le troisième groupe de ses travaux constitue la partie capitale de son œuvre et concerne la Géométrie cinématique. Nous avons déjà cité de nombreux mémoires qui s'y rattachent. Ils ont servi d'élément au plus important de ses ouvrages scientifiques, qui est le volume intitulé : *Principes et développements de Géométrie Cinématique* (1894).

Là il reprend, coordonne et expose magistralement les idées qu'il a émises depuis 1866, qu'il a développées dans de nombreux mémoires et présentées en partie à ses élèves, au cours de son enseignement, sur le déplacement des figures.

Un pareil livre peut être mis en parallèle avec la *Géométrie Supérieure* de Chasles et les *Propriétés projectives* de Poncelet, et l'auteur, dans sa préface, exprime rigoureusement la vérité en écrivant cette phrase : « Je puis dire que cet ouvrage tout entier est le fruit de mes recherches personnelles[1]. »

M. Bricard, en parlant de ce beau livre, dit qu' « il restera « l'un des monuments de la science française au XIX[e] siècle, » et il ajoute: « il serait difficile de citer beaucoup de traités « mathématiques de cette étendue aussi complètement ori- « ginaux, et dont la lecture soit aussi propre à développer « l'esprit d'invention.

« Dans un tel livre où tout est personnel, les idées sem- « blent encore animées de l'activité qui leur a donné le jour. »

Arrivons maintenant à l'année 1901. C'est l'instant où prenait fin la carrière de Mannheim comme professeur; la retraite lui était imposée par limite d'âge.

Ici se place un épisode touchant et sans précédent à l'Ecole Polytechnique. A l'insu du professeur, un comité se forma pour lui offrir un souvenir artistique (la Renommée, de Coutant) qui lui serait solennellement remis dans le grand amphithéâtre de physique, à l'Ecole même.

Mannheim fut prévenu quelques jours à peine avant la cérémonie, qui eut lieu le 14 décembre 1901, sous la présidence du Ministre de la Guerre d'alors, le Général André. De belles allocutions furent adressées au Colonel Mannheim par le Général Debâtisse, commandant l'Ecole, par M. Mercadier, Directeur des Etudes, par M. Rouché, Examinateur de Géométrie, enfin par le premier élève de la promotion des anciens, M. Aubrun.

Le *Journal de l'Ecole Polytechnique* (2[e] série, cahier 7) a publié (y compris les discours) le compte rendu de cette belle séance, à propos de laquelle un jeune et regretté mathématicien, prématurément enlevé à la science depuis lors, écrivait: « Cette récompense est le couronnement d'une car- « rière vouée avec le plus complet désintéressement à la « science que M. Mannheim aime vraiment comme un artiste

[1] Si cet ouvrage n'a paru qu'en 1894, la Géométrie Cinématique était, comme nous l'avons dit, créée, connue et professée par l'auteur même depuis environ un quart de siècle. Des disciples avaient suivi, plutôt à l'étranger qu'en France, et Schœnflies, en Allemagne, avait publié en 1893 sa « Géométrie du mouvement », livre des plus intéressants et des mieux faits, dont une traduction française apparut rapidement. Schœnflies y désigne lui-même Chasles et Mannheim comme les fondateurs de la Géométrie Cinématique.

« aime son art. Nul mieux que lui n'a jamais cultivé la Géo-
« métrie pour sa beauté propre, qu'il met si harmonieuse-
« ment en évidence par l'élégance de sa méthode et par la
« concise précision de sa forme » (ERNEST DUPORCQ, *Nouvelles Annales*, janvier 1902.)

Lors de cette grande manifestation d'admiration et de sympathie, Mannheim, profondément ému, ajouta à ses remerciements les paroles les plus élevées relativement à la mission de l'Ecole et au rôle de la Géométrie.

Mais Mannheim n'avait pas seulement honoré comme professeur cette Ecole à laquelle il avait entièrement consacré quarante années de sa vie avec le désir passionné de lui être utile ; c'est dans les conseils qu'il put donner toute la mesure de son dévouement. Il s'y montra toujours le défenseur désintéressé de tout ce qui touchait à la grandeur de cette institution nationale, ferme d'esprit, indépendant, inébranlable.

Mannheim fut aussi l'un des fondateurs, et, pendant vingt-cinq ans, l'un des membres les plus actifs de la Société Amicale des anciens élèves de l'Ecole.

Pendant les années qui s'écoulèrent de 1901 jusqu'à sa mort, Mannheim ne resta pas inactif. Son intelligence était de celles qui ne sauraient se laisser engourdir. Malgré une santé depuis longtemps atteinte, on lui aurait attribué physiquement dix ou quinze ans de moins que son âge. Un deuil cruel, dans la dernière période de sa vie, lui enlevant une fille charmante, produisit en lui un déchirement, et un ébranlement de la santé qui devait être irrémédiable.

Il se confina dès lors dans une retraite absolue. Mais ni les souffrances physiques, ni les épreuves ne portèrent jamais atteinte à sa vigueur intellectuelle ni à sa haute sérénité morale. Il ne s'est jamais abandonné au découragement ni à l'amertume.

Un des côtés les moins connus du caractère de Mannheim, c'est le plaisir qu'il prenait à des œuvres utiles, en apparence bien au dessous de son talent, mais en y mettant une sorte de coquetterie discrète. C'est ainsi par exemple que pendant plusieurs années (de 1879 à 1886) il a donné régulièrement dans les *Nouvelles Annales* les solutions des compositions proposées à chaque concours d'admission à l'Ecole Polytechnique.

Il les signait « Un ancien élève de mathématiques spéciales »[1]; Ces solutions d'une extrême élégance présentaient cette particularité, qu'elles reposaient exclusivement sur l'emploi de la Géométrie, sans aucun recours au calcul. Le secret fut bientôt percé à jour, car il n'était pas malaisé de voir que cet « ancien élève » ne pouvait être qu'un maître incontesté. Dans le même ordre d'idées, au cours des dernières années, il a publié dans plusieurs journaux des notes ou des énoncés de questions, souvent d'apparence très élémentaire, sous le pseudonyme de « Canon ». Il y aura intérêt à accorder une attention particulière aux moindres problèmes portant cette signature, car pas une ligne n'était écrite par Mannheim, qui n'eût un cachet d'originalité et souvent une portée dépassant de beaucoup l'apparence première. Sous cette sorte de jeu, il poursuivait toujours le même but; perfectionner l'enseignement à tous les degrés, y infuser le goût et le culte de la Géométrie.

On retrouve à chaque instant chez lui les marques de cette préoccupation. Elle se manifeste notamment, avec une netteté particulière, dans son discours d'adieu du 14 décembre 1901, dont nous parlions tout à l'heure.

« L'étude de la Géométrie, disait-il, est toujours féconde en « elle-même, car aucune autre science n'est plus propre à « donner le goût de la simplicité, de la clarté, aucune n'habitue mieux l'esprit à synthétiser et à rendre concrètes les « conceptions mathématiques ; aucune enfin n'est plus capa-« ble de développer la faculté de réfléchir, la faculté de rai-« sonner, de faire, en un mot, l'éducation de l'intelligence. »

Je n'ai parlé ni de l'étonnante érudition mathématique de Mannheim ni de la bienveillance avec laquelle il mettait ce trésor à la disposition des mathématiciens, surtout des jeunes, qui venaient le consulter comme une bibliothèque vivante. Il avait la faiblesse d'en paraître flatté. Au fond, je

[1] Dans le même recueil (1890) on trouve encore sous la même signature deux articles de Géométrie dignes d'attention.

crois bien que sa satisfaction était surtout de savoir qu'il rendait service.

Mais je n'en terminerais pas, si je me laissais aller à la tentation de décrire tous les côtés originaux et charmants de cette nature d'élite, si je faisais appel aux souvenirs personnels, si j'essayais de montrer par des exemples la finesse de vues qui était alliée en lui à la force et à la pénétration de la pensée.

Le lecteur est en droit d'attendre qu'on lui parle surtout du savant et de l'œuvre. Il a dû deviner suffisamment par ce qui précède le chagrin que causa la disparition de l'ami.

L'œuvre de Mannheim, écrit M. Bricard (op. cit.) « frappe « à la fois par l'unité des principes qui ont dirigé ce savant « dans toutes ses recherches, et par la diversité des applica- « tions qu'il en a faites dans les domaines les plus variés. »

Elle témoigne d'un merveilleux génie d'invention ; mais la faculté dominante et caractéristique de Mannheim, celle qui lui a permis d'aussi belles découvertes par des moyens d'apparence simple, semble avoir été « la vision de l'espace ». Il faut entendre par là, non pas la vue dans l'espace de corps plus ou moins compliqués, représentés sur une épure, mais une sorte de puissance imaginative fort rare, qui permet de former directement dans le cerveau les schemas nécessaires à la conception nette des figures, de leurs éléments infinitésimaux, de leurs rapports, et des propriétés qui s'en suivent.

De là son culte pour la Géométrie, culte qu'il était loin de pousser jusqu'au mépris du calcul. Il avait pour cela trop d'équilibre d'esprit et d'équité scientifique. Mais il avait rêvé et il pouvait légitimement espérer de voir continuer l'éclat dont avait brillé la Géométrie pure, en France surtout, dans la première partie du XIX^e siècle, grâce aux travaux de Ch. Dupin, de Chasles et de Poncelet. Cet éclat, Mannheim a contribué à en augmenter la splendeur ; et cependant le délaissement s'est produit de son vivant au profit exclusif de l'Analyse mathématique.

Il s'en suivit chez lui une inévitable mélancolie scientifique, bien justifiée, car il était en droit d'avoir conscience de sa valeur. Il en ressentit de la tristesse, sans aucune aigreur. Sa science de prédilection « n'était plus à la mode ».

Mais la mode n'est pas maîtresse du temps. Ce que les contemporains de Mannheim n'ont pas su faire, la postérité le fera, et reconnaîtra en lui l'un des bons ouvriers de la pensée humaine, l'un des savants auxquels ira le plus justement l'hommage des hommes épris de science et de vérité. La renaissance de la Géométrie est inévitable, sinon prochaine. C'est surtout à celui que nous venons de perdre que la gloire en reviendra.

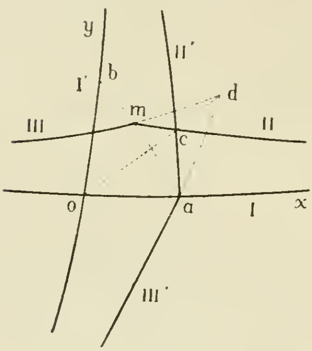
C.-A. Laisant.

SUR LA DÉTERMINATION DES MÉTRIQUES

I. — Il ne semble pas qu'on ait encore signalé une propriété importante par laquelle la métrique lobatchewskienne se distingue de la Géométrie ordinaire ou métrique euclidienne. Cette propriété consiste dans la possibilité de transporter un segment d'une droite sur une autre au moyen de constructions uniquement projectives, tandis qu'en Géométrie ordinaire il est seulement possible, par ces moyens, de transporter un segment sur une même droite ou sur des droites parallèles entr'elles. Autrement dit, les notions projectives suffisent à établir la métrique lobatchewskienne, tandis qu'elles ne suffisent pas à établir la métrique euclidienne.

On sait que les constructions projectives (ou par alignements) permettent de déplacer un segment sur une même droite ; il suffit donc de montrer comment l'on peut déterminer un segment Ob égal à un segment Oa de même origine mais ayant une direction différente.

En métrique lobatchewskienne comme en métrique ordinaire, les extrémités de segments égaux portés sur deux droites Ox et Oy, à partir d'un même point O, déterminent une correspondance homographique, dans laquelle le point O se correspond à lui même ; les droites qui joignent les points correspondants et, en particulier, les points a et b sont donc concourantes. En métrique ordinaire, le point de concours est à l'infini, comme l'est elle-même la droite qui joint les deux points situés à l'infini sur les deux droites Ox et Oy. En métrique lobatchewskienne, le point de concours est imaginaire et situé sur les deux droites qui joignent deux à deux les *quatre* points situés à l'infini sur Ox et Oy, points qui se correspondent homographiquement. Ces deux dernières droites ne sont pas en général accessibles ; mais il



est facile de construire une droite concourante avec elles, et passant, par exemple, par le point a, extrémité du segment donné. Il suffit, pour cela, de faire appel au théorème de Desargues, qui est le représentant en Géométrie plane de l'axiome d'existence du plan (axiome principal de la Géométrie projective). La construction est la suivante : mener par le point a les deux droites II′ et III′ *asymptotiques* à Oy, puis, par le point O, une droite quelconque, et, par les points c et d, où elle rencontre les deux premières, mener les deux droites II et III asymptotiques à Ox. La droite qui joint le point de rencontre m de ces deux dernières au point a passe par le point b; car les deux triangles formés respectivement par les droites I, II, III et I′, II′, III′ sont homologiques par construction. On peut d'ailleurs vérifier qu'en vertu du théorème de Desargues, le point b est bien indépendant du choix de la droite de construction Ocd, en tenant compte du fait que trois droites asymptotiques d'un même côté doivent être considérées comme concourantes.

La différence qui vient d'être établie entre la métrique lobatchewskienne et la métrique euclidienne trouve facilement son explication dans la genèse même des métriques, à la condition toutefois de se placer au point de vue franchement géométrique et, avant tout, d'abandonner la manière de s'exprimer encore employée dans ce paragraphe et qui consiste à désigner, sous le nom de lignes droites, des lignes qui ne présentent aucune particularité individuelle, mais qui forment un ensemble jouissant des mêmes propriétés que l'ensemble des lignes droites. C'est cette genèse géométrique des métriques qui fait l'objet du paragraphe suivant.

II. — Le fondement de la théorie proprement géométrique des métriques réside dans les recherches de Cayley sur les métriques projectives, parmi lesquelles figure la Géométrie ordinaire. Une métrique projective s'obtient en adoptant comme distance de deux points la grandeur définie par la propriété d'être proportionnelle au logarithme du rapport anharmonique déterminé par ces points et par les points d'intersection de la droite qui les joint avec une surface du second ordre prise pour base de la métrique.

Les métriques de Cayley n'épuisent pas les interprétations géométriques dont sont susceptibles les diverses théories édifiées sous le nom de géométries non-euclidiennes.

En effet, si l'on applique aux divers points de l'espace une transformation ponctuelle réelle, continue et n'introduisant aucune singularité, les lignes droites sont transformées en d'autres lignes également simples, s'étendant à l'infini dans les deux sens et formant un ensemble qui jouit des mêmes propriétés géométriques que l'ensemble des lignes droites (détermination par deux points et formation de surfaces possédant les mêmes propriétés que les plans). Un tel ensemble de lignes permet de définir des nombres qui présentent toutes les propriétés des rapports anharmoniques et d'établir, par leur intermédiaire, des systèmes de coordonnées en tout semblables aux systèmes de coordonnées projectifs; une surface du second ordre aura pour transformée une surface représentée, dans les nouveaux systèmes de coordonnées ainsi définis, par une équation du second degré. On dispose donc des mêmes éléments qu'en Géométrie projective pour établir, par le procédé même de Cayley, d'autres métriques possédant les mêmes propriétés essentielles que les métriques projectives auxquelles elles correspondent, les lignes droites étant seulement remplacées dans leur rôle par d'autres lignes, que l'on peut appeler les *lignes axiales* des nouvelles métriques.

Ce sont les métriques susceptibles d'être obtenues par le procédé exposé ci-dessus que Sophus Lie a exclusivement visées dans ses recherches sur les axiomes de la Géométrie et qu'il a pu réunir dans une définition commune en les caractérisant par une propriété simple et indépendante de toute notion métrique ou projective. On peut reconnaître d'ailleurs que les systèmes d'axiomes adoptés par les géomètres qui, comme M. Hilbert, se sont placés au point de vue purement logique, définissent au fond ces mêmes métriques.

Il résulte de là qu'une métrique est déterminée par ses lignes axiales et par la surface du second ordre (par rapport à ces lignes) qui joue le rôle de surface fondamentale. On va rechercher dans quelle mesure est réduite l'indétermination, pour les diverses catégories de métriques, par l'introduction d'une nouvelle condition, la condition *archimédienne.*

III. — Les métriques susceptibles d'êtres déduites les unes des autres, c'est-à-dire de l'une d'entr'elles, par l'application de transformations ponctuelles n'introduisant pas de singularité seront dites *semblables.*

On se bornera aux trois catégories de métriques généralement envisagées, savoir :

1° les métriques *hyperboliques,* c'est-à-dire celles qui sont semblables à la métrique projective ayant pour surface fondamentale un ellipsoïde réel, par exemple la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 ;$$

2° les métriques *elliptiques,* c'est-à-dire celles qui sont semblables à la métrique projective ayant pour surface fondamentale un ellipsoïde imaginaire à centre réel, par exemple la sphère imaginaire :

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0 ;$$

3° les métriques *paraboliques,* c'est-à-dire celles qui sont semblables à la Géométrie ordinaire.

Le transport successif d'un segment le long d'une ligne axiale présente des caractères différents dans ces trois catégories.

Dans les métriques hyperboliques ou paraboliques, les points du segment ne peuvent atteindre que les points situés d'un même côté de la surface fondamentale (pour les métriques projectives, ellipsoïde réel ou plan); dans les métriques elliptiques, au contraire, on atteint l'infini après un nombre fini d'opérations.

Si l'on appelle *archimédiennes* les métriques, projectives ou non, dans lesquelles le transport d'un segment le long d'une ligne axiale permet d'atteindre un point quelconque de cette ligne et peut, en outre, être répété indéfiniment, on voit que la condition pour qu'une métrique hyperbolique ou parabolique soit archimédienne est que sa surface fondamentale soit rejetée à l'infini.

La Géométrie ordinaire est une métrique parabolique et archimédienne, sa surface fondamentale étant constituée par la surface du second ordre dégénérée qui est définie par le cercle imaginaire du plan de l'infini.

Pour obtenir une métrique qui soit à la fois hyperbolique et archimédienne, c'est-à-dire qui soit justiciable de la théorie logique édifiée par Lobatchewski, il suffit d'appliquer aux points de l'espace une transformation ponctuelle continue qui fasse correspondre l'espace tout entier au volume intérieur à une sphère [1]; cette sphère est alors transformée en une surface rejetée à l'infini, les lignes transformées des lignes droites sont des lignes simples, s'étendant à l'infini dans les deux sens et formant un ensemble tel que par un point extérieur à l'une d'elles on peut mener à celle-ci deux lignes *asymptotiques* appartenant à l'ensemble. C'est donc là une propriété caractéristique des métriques à la fois hyperboliques et archimédiennes.

Réciproquement, des lignes simples, s'étendant à l'infini

[1] On peut, par exemple, faire correspondre, à tout point M situé à une distance $r\,(< \mathrm{R})$ du centre de la sphère, un point M′ situé sur la droite OM, du même côté de O que M et à une distance r' de O déterminée par

$$\frac{r'}{\mathrm{R}} = \log \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}.$$

dans les deux sens et formant un ensemble qui jouit des mêmes propriétés géométriques que l'ensemble des lignes droites, à l'exception de la propriété de l'unicité de l'asymptotique, sont les lignes axiales d'*une* et d'*une seule* métrique archimédienne, et celle-ci est hyperbolique.

En effet une étude d'un tel ensemble de lignes, calquée sur la Géométrie projective, conduit à considérer les points situés à l'infini sur ces lignes comme appartenant à une même surface du second ordre, c'est-à-dire qu'un tel ensemble de lignes donne lieu à une *surface du second ordre de l'infini*, comme les lignes droites déterminent le plan de l'infini. La seule métrique archimédienne parmi celles qui admettent ces lignes pour lignes axiales est, d'après la condition établie, celle dont la surface fondamentale est la surface de l'infini.

Les métriques paraboliques archimédiennes ne sont pas déterminées par leurs lignes axiales. Elles sont obtenues, en partant de la Géométrie ordinaire, par l'application d'une transformation ponctuelle continue et biunivoque. La propriété de l'unicité de l'asymptotique est conservée et se trouve ainsi caractériser les métriques à la fois paraboliques et archimédiennes; les lignes axiales déterminent une surface de l'infini qui est du premier ordre (pour les métriques projectives, c'est le plan de l'infini). Mais ces données ne suffisent pas pour déterminer une métrique : pour les métriques projectives, par exemple, il reste à spécifier la conique imaginaire qui doit jouer le rôle du cercle imaginaire de l'infini. On peut, à cet effet, se donner, par exemple, une des surfaces qui doivent jouer le rôle des sphères. Ces surfaces sont, dans le cas en cause, des ellipsoïdes semblables entr'eux et semblablement placés. Moyennant ces données on pourra transporter un segment sur une droite de direction quelconque, ce qui suffit pour déterminer une métrique.

Enfin, en ce qui concerne les métriques elliptiques, on a vu que le transport d'un segment sur une ligne axiale ne peut pas être répété indéfiniment; mais cela supposait que ces lignes s'étendaient à l'infini. Une métrique elliptique pourrait être archimédienne si ses lignes axiales étaient toutes fermées. Mais il est facile de reconnaître qu'un ensemble de lignes tel qu'il en passe une par deux points quelconques de l'espace comprend forcément des lignes s'étendant à l'infini. C'est ainsi que parmi les cercles orthogonaux à un plan, qui forment, comme on sait, un tel ensemble, figurent les droites parallèles à ce plan. On doit donc conclure que les métriques elliptiques archimédiennes n'ont pas d'existence géométrique, dans notre conception de l'espace. Mais ces métriques s'imposeraient, au contraire, si l'espace venait à être conçu, selon l'idée émise par Riemann, comme une variété numérique fermée[1]. On peut bien ajouter que rien ne permet d'affirmer que cette conception n'est pas celle de l'avenir. G. Combebiac (Bourges).

TABLE D'ÉLÉMENTS RELATIFS A LA BASE 30030 POUR LA RECHERCHE RAPIDE DES FACTEURS PREMIERS DES GRANDS NOMBRES

La dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.
Gauss[1].

I. — Préliminaires.

1. Pour *reconnaître si un nombre donné est composé ou premier et trouver les facteurs premiers d'un nombre composé*, il n'existe ni de méthode générale, ni de procédé pratique ; on a, il est vrai, quelques procédés applicables à des nombres ayant des formes particulières ; mais il est regrettable de constater que l'on ne soit guère maintenant plus avancé qu'au début du XIX^{me} siècle et que les réflexions, suivantes publiées par Gauss[2] en 1801, soient malheureusement encore vraies.

« On ne peut s'empêcher de convenir que toutes les mé-« thodes proposées jusqu'à présent sont restreintes à des cas

[1] Ou mieux, si la *continuité géométrique* venait à être assimilée à celle d'une variété numérique fermée.

[2] *Disquisitiones Arithmeticæ*, Lipsiæ, 1801. N° 329. — Cet Ouvrage a été traduit par Poullet-Delisle sous le titre *Recherches Arithmétiques*, Paris, 1807. P. 416.

« très particuliers, ou sont si longues et si pénibles, que « même pour ceux de ces nombres qui ne dépassent pas les « limites des Tables dont on est redevable à quelques mathé- « maticiens, c'est-à-dire pour les nombres à l'égard desquels « ces méthodes sont inutiles, elles fatiguent la patience du « calculateur le plus exercé, et qu'elles ne sont pour ainsi « dire pas applicables à de plus grands nombres. »

Notons que LEGENDRE [1] a écrit en 1830 des considérations analogues à celles de GAUSS et que E. LUCAS [2] a jugé nécessaire de reproduire en 1876 les réflexions précitées.

Par exemple, ce n'est qu'après des raisonnements et des calculs assez longs et compliqués que LEGENDRE arrive à montrer qu'il suffit d'essayer les nombres premiers 83, 107, 163, 401, 409, 467 et 509 pour conclure que le petit nombre 333667 est premier; que Th. PEPIN [3] trouve que le nombre 7444009 est égal à 53.140453. Ce dernier savant, en constatant qu'il trouve le facteur premier 53, ne peut s'empêcher d'ajouter : « On regrette de ne pas avoir employé la méthode des diviseurs ».

2. — C'est pour obvier à l'absence de méthode pratique que l'on s'est astreint à construire des Tables de diviseurs premiers des nombres. Mais il ne faut pas songer à continuer la publication de telles Tables dans le mode de disposition employé jusqu'ici, consistant à inscrire chaque nombre et son moindre diviseur premier : en effet, il a fallu, pour les 9 premiers millions, 9 volumes dont chacun contient 112 pages grand in-4°, les chiffres étant imprimés en petits caractères.

La Table dont je propose l'emploi pour résoudre le double problème en question, dont la construction repose sur d'élégantes propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques, n'exige que de rapides comparaisons de nombres et occupe une surface petite relativement à l'importance des résultats qu'elle donne. Son emploi constitue une méthode uniforme applicable aux grands nombres.

---

[1] *Théorie des Nombres*. 3e édit., Paris, 1830. N° 256. N° 260.

[2] Compte rendu de la Session tenue à Clermont-Ferrand en 1876 par l'Association Française pour l'Avancement des Sciences. P. 61.

[3] *Extension de la Méthode d'Euler pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers*. Memorie della Pontificia Accademia dei nuovi Lincei, vol. IV, Roma, 1893. P. 72.

3. — Soient :

B le produit $\alpha\beta...\lambda$ de nombres premiers consécutifs $\alpha, \beta, ..., \lambda$ à partir de 2 ;

P le produit $(\alpha - 1)(\beta - 1) ... (\lambda - 1)$;

I l'un quelconque des P nombres premiers à B et inférieurs à B ;

K un nombre successivement égal aux entiers positifs, à partir de 0.

On reconnaît aisément que : *Chacun des systèmes des* P *progressions arithmétiques de terme général* BK+I *renferme tous les nombres premiers autres que ceux qui forment* B.

On peut dire que B est la *base* du système considéré et que I est l'*indicateur* d'un terme de ce système.

Deux indicateurs sont dits *complémentaires* lorsque leur somme est égale à la base.

4. — Soient N, D et M des nombres d'un système de progressions de base B.

Il est évident que : *Le nombre* N *est ou n'est pas divisible par le diviseur* D *selon que* K *et* M *sont ou ne sont pas tels que l'équation*

$$BK + I = MD \tag{a}$$

soit satisfaite, B, I *et* D *étant connus.*

Soient k et m les valeurs *minima* de K et M satisfaisant à l'équation (a). Les nombres k se nomment *caractéristiques.*

Nous dirons que la caractéristique k et l'indicateur I sont les *éléments* du nombre N par rapport à un diviseur D.

5. — Le lecteur est supposé connaître les propriétés que j'ai établies [1] pour calculer les éléments k et I. La construction

[1] Mon premier travail sur ce sujet a été signalé à l'Académie des Sciences de Paris, dans la séance du 3 Juillet 1905 (*Comptes Rendus*, T. CXLI, Paris, 1905, P. 78). Mes principaux Mémoires se trouvent dans le *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes* publié par l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne (1er Août 1905, 2e série, T. VII, Lisbonne, 1906) ; dans les *Rendiconti* de l'Académie Royale des Lincei (Vol. XV, Roma; Nota presentata dal Socio V. Volterra nella Seduta del 22 Aprile 1906) ; dans le *Bulletin* de la Société Philomathique de Paris (28 Avril 1906, Paris, à la Sorbonne, 1906) ; dans le *Bulletin* de la Société Mathématique Américaine (May 1906, New York, 1906) ; dans les *Comptes Rendus* du Congres tenu à Lyon en août 1906 par l'Association Française pour l'Avancement des Sciences ; dans *Il Pitagora, Giornale di Matematica* di Gaetano Fazzari (Anno XIII, 1906-1907, Palermo, n° 6-7, 1907). Ce Journal contient une Table de base 30030 donnant, pour les nombres inférieurs à 510510, les caractéristiques relatives aux diviseurs premiers de 17 à 709, le multiplicateur correspondant à la première valeur de l'indicateur pour chaque caractéristique et cette première valeur, et permettant, par suite, d'abréger notablement la recherche des facteurs premiers de ces nombres.

de la Table dont je propose l'emploi dépend principalement de la propriété suivante :

Lorsque deux nombres N *et* N_1, $N > N_1$, *admettent le même diviseur* D *et la même caractéristique* k, *la différence de leurs indicateurs* I *et* I_1 *est multiple de* D.

Il en résulte que, si m et m_1 sont les multiplicateurs de D tels que $N = Dm$, $N_1 = Dm_1$, on a la formule

$$(b) \qquad m = m_1 + \frac{I - I_1}{D}.$$

Pour trouver les facteurs premiers de m ou reconnaître que m est premier, on cherche si m se trouve parmi les indicateurs des groupes 0 dans les Tableaux D, de 17 à 173, ou bien on se sert de la *Table de caractéristiques relatives à la base 2310* [1].

II. — Disposition des Eléments.

6. — Au point de vue de la moindre surface occupée par la Table de base 30030, je vais donner une disposition des éléments plus avantageuse que celle que j'ai proposée au Congrès des Sociétés Savantes en avril 1906.

7. — Pour chaque diviseur premier D, ces diviseurs étant considérés en ordre croissant à partir de 17, on forme un Tableau de la manière suivante :

La caractéristique la plus faible $k = \varkappa$ correspond au carré du diviseur premier considéré δ. On écrit cette caractéristique, puis le multiplicateur $m_1 = \delta$, ensuite l'indicateur I_1 relatif à δ^2, enfin les indicateurs I relatifs aux produits de δ par les multiplicateurs m non divisibles par les nombres premiers inférieurs à δ. On écrit la caractéristique $k = \varkappa + 1$, puis le premier multiplicateur m_1 non divisible par les nombres premiers inférieurs à δ, ensuite l'indicateur I_1 relatif au produit δm_1, enfin les indicateurs I relatifs aux produits de δ par les multiplicateurs m non divisibles par les nombres premiers inférieurs à δ. On continue à écrire ainsi les valeurs successives de k, de m_1, de I_1, des indicateurs I, jusqu'à et y compris la caractéristique $k = \delta - 1$.

---

[1] Paris, Delalain Freres, 1906.

Comme les valeurs des multiplicateurs m vont en croissant, il en est de même des valeurs des indicateurs relatifs à une même caractéristique.

8. — La Table sera donc formée d'autant de *Tableaux* D qu'elle contiendra de diviseurs premiers D. Chaque Tableau D contiendra autant de *groupes* d'indicateurs que de caractéristiques inscrites.

De $D = 17$ à $D = 173$, les Tableaux D commencent à la caractéristique 0; à partir de $D = 179$, de $D = 251$, de $D = 307, \ldots$, les Tableaux D commencent respectivement aux caractéristiques 1, 2, 3,.....

III. — Mode d'emploi de la Table.

9. — Soit N un nombre non divisible par les facteurs premiers 2, 3, 5, 7, 11 et 13 de la base 30030. En divisant N par 30030, ce qui est rapide, on trouve pour quotient le nombre K et pour reste l'indicateur I.

10. — Par rapport aux caractéristiques k d'un Tableau D, le nombre K peut être inférieur à $D - 1$, égal à $D - 1$, supérieur à $D - 1$.

Si $K > D - 1$, soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ respectivement le quotient et le reste obtenus en divisant K par D. On est alors ramené à se servir de $\mathcal{R}$ de la même manière dont on se sert de K, lorsque $K \leqq D - 1$.

11. — Supposons que l'on ait reconnu que N admet le facteur premier D.

Si $K \leqq D - 1$, la formule (b) donne le multiplicateur m de D.

Si $K > D$, le multiplicateur de D est un nombre M inférieur à N et ayant la forme $BK + I$. Alors, on trouve la formule

$$M = B\mathcal{Q} + \left(m_1 + \frac{I - I_1}{D}\right). \tag{c}$$

12. — Selon que I se trouve ou ne se trouve pas, dans le Tableau **17**, parmi les indicateurs soit du groupe $k = K$, soit du groupe $k = \mathcal{R}$, N est ou n'est pas divisible par 17.

Lorsqu'un nombre N n'est divisible par aucun des diviseurs premiers inférieurs à un diviseur $D = \delta$, le Tableau δ indique de même que N est ou n'est pas divisible par δ.

13. — Soit à résoudre, avec la Table de base 30030, le double problème en question.

On consulte le Tableau **17**. Si l'on reconnaît que N est divisible par 17, on calcule le multiplicateur m ou M ; on cherche si m ou M est divisible par 17 ; etc., jusqu'à un multiplicateur m ou M non divisible par 17. On est alors ramené à résoudre, pour le multiplicateur M le problème que l'on va résoudre quand on a reconnu que N n'est pas divisible par 17.

Sachant que N n'est pas divisible par 17, on voit si N est divisible par 19 en consultant le Tableau **19**. Si l'on reconnaît que N est divisible par 19, on calcule le multiplicateur m ou M ; on cherche si m ou M est divisible par 19 ; etc., etc.

Si l'on arrive à un Tableau Δ tel que $I = I_1$, on en conclut que $N = \Delta^2$.

Sinon, on est averti que l'on a essayé tous les diviseurs premiers de 17 au nombre premier Δ immédiatement inférieur à $\sqrt{N}$, lorsque l'on arrive à un diviseur premier Δ' tel que $I < I_1$.

Avant de consulter les Tableaux D en ordre croissant à partir du Tableau **17**, on regarde s'il y a un Tableau Δ tel que $I = I_1$ sinon on cherche le Tableau Δ' tel que $I < I_1$. Alors, on consulte d'abord tous les Tableaux D où il existe une caractéristique $k = K$. Etc.

IV. — Remarques.

14. — Si les indicateurs inscrits étaient remplacés par des nombres égaux à $\frac{I-1}{2}$ ou à $\frac{I-15015}{2}$, selon que l'indicateur est supérieur ou inférieur à 15015, la Table serait encore moins étendue.

15. — Comme, pour le diviseur premier 17, il n'y a aucun indicateur supprimé, on peut diminuer de moitié l'étendue du Tableau **17** en faisant correspondre à chaque caractéristique seulement les indicateurs inférieurs à 15015. Alors, si l'on trouve $I > 15015$, on cherche le complément de I dans les indicateurs inscrits à la caractéristique $16-k$.

16. — Si l'on formait les autres Tableaux D en ne supprimant aucun indicateur, on pourrait aussi n'y inscrire que les indicateurs inférieurs à 15015, et opérer de même quand on a $I > 15015$.

17. — Se plaçant toujours au point de vue de faire occuper à la Table le moins possible de surface, on pourrait, pour un certain nombre des diviseurs premiers D les plus petits, n'inscrire, à chaque caractéristique de 0 à $D - 1$, que les indicateurs inférieurs à 15015, mais en ne supprimant pas les indicateurs venant d'un produit Dm divisible par les nombres premiers inférieurs à D. Alors, quand N donnera le quotient K et l'indicateur I supérieur à 15015, on regardera si le complément de I se trouve parmi les indicateurs qui correspondent soit à $k = D - 1 - K$, soit à $k = D - 1 - \mathcal{R}$.

18. — On peut prendre pour nombres directeurs des Tableaux les caractéristiques k, des groupes les facteurs premiers D. Alors, on consulte d'abord le tableau $k = K$. Lorsque I se trouve parmi les indicateurs d'un groupe D', N est divisible par D' ; s'il n'en est pas ainsi, il y a deux cas. 1° Quand $K < 17$, N est premier. 2° Quand $K \geqq 17$, on consulte le groupe 17 du Tableau $k = \mathcal{R}_{17}$: si I se trouve dans ce groupe, N est divisible par 17 ; sinon, N n'admet pas le facteur 17 et il faut consulter le groupe 19 du Tableau $K = \mathcal{R}_{19}$; etc ; N est premier lorsque l'on est conduit à un diviseur premier D supérieur à K.

Paris, Février 1907.

ERNEST LEBON.

LA THÉORIE DES GROUPES APPLIQUÉE AUX MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

NOTE DE LA RÉDACTION. — *On connaît le rôle fondamental que joue en mathématiques la notion de groupe ; elle fournit une idée directrice qu'on ne saurait mettre assez en lumière et dont doivent s'inspirer de plus en plus tous ceux qui enseignent. Mais on ne possédait guère d'exposé se limitant aux applications les plus élémentaires. Nous croyons donc intéresser nos lecteurs en leur donnant ici la traduction d'une Note*[1] *de* M. G.-A. MILLER, *professeur à l'Université d'Illinois (Etats-Unis), qui a déjà consacré de nombreuses et importantes recherches à la théorie des groupes. Nous la ferons suivre d'une note ayant en vue plus particulièrement la théorie des parallèles ; elle est extraite d'un récent mémoire de* M. C. BOURLET, *professeur au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris.*

A la cinquième assemblée annuelle de l'Association suisse des professeurs de mathématiques, tenue à Zurich le 9 décembre 1905, le Professeur H. FEHR, de l'Université de Genève, donna un bref aperçu de quelques tendances actuelles dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Il insista spécialement sur le fait que le maître devrait se familiariser avec la notion de groupe, qui joue actuellement un rôle si fertile dans les développements mathématiques [2].

Le présent article a pour objet de donner quelques applications de la notion de groupe aux mathématiques élémentaires. Nous espérons qu'il pourra servir non seulement de première initiation aux éléments de la théorie des groupes, mais aussi de moyen d'arriver à des notions plus étendues se rapportant à quelques sujets fondamentaux des mathématiques élémentaires.

Nous considérerons d'abord les deux opérations de sous-

---

[1] V. *School Science and Mathematics, dec. 1906, Chicago.* — Reproduite avec l'autorisation de l'auteur. Traduction de J.-P. DUMUR (Genève).

[2] *L'Enseignement Mathématique* (8e année, p. 54, 1906.

traire de 1 et diviser 1. La première opération sera représentée par s et la dernière par d. Les deux opérations successives, d'abord soustraire de 1 et ensuite diviser 1 par le reste, seront représentées par sd. Il est facile de prouver qu'en effectuant sd trois fois successivement en partant d'un nombre quelconque, on retrouve le nombre primitif. Par exemple, si nous partons de 2 et effectuons sd sur lui, nous arrivons à -1 ; effectuant sd sur -1 nous arrivons à $\frac{1}{2}$; effectuant sd sur $\frac{1}{2}$ nous obtenons 2. En général, si nous effectuons l'opération sd successivement sur le nombre n, nous obtenons les trois nombres suivants : $\frac{1}{1-n}$, $\frac{n-1}{n}$, n.

Les trois nombres n, $\frac{1}{1-n}$, $\frac{n-1}{n}$ sont distincts, excepté lorsque n a l'une des valeurs suivantes : $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Par conséquent, l'opération sd combine tous les nombres (réels et imaginaires) en collections de trois, à l'exception des deux nombres ci-dessus mentionnés. Si l'un des nombres d'une telle collection est réel tous sont réels, et si l'un est rationnel tous sont rationnels puisque les opérations de division et de soustraction effectuées sur des nombres rationnels conduisent à des nombres rationnels.

Si nous considérons les six opérations

$$\begin{matrix} 1 & sd & (sd)^2 \\ d & s & sd\,s \end{matrix} \qquad \text{(A)}$$

où 1 représente comme habituellement l'opération identique (c'est-à-dire une opération qui ne modifie rien), nous pouvons aisément vérifier qu'elles associent, en général, six nombres distincts. Par exemple, si nous effectuons ces six opérations sur le nombre n nous obtenons

$$\begin{matrix} n & \dfrac{1}{1-n} & \dfrac{n-1}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{n} & 1-n & \dfrac{n}{n-1} \end{matrix}$$

Un des faits les plus importants n'a pas encore été établi explicitement ; à savoir que nous arrivons à la même collection de nombres en appliquant toutes ces opérations à l'un quelconque des nombres de la collection. Par exemple, si nous partons de 3, les six opérations indiquées conduisent aux nombres suivants, dans l'ordre : $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -2, \frac{3}{2}$. En partant de $-\frac{1}{2}$, l'ordre est : $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, -2, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$. De la même manière, en partant d'un autre nombre quelconque de cette collection et lui appliquant les six opérations indiquées, on obtiendrait simplement un nouvel arrangement de ces six nombres. Ceci est directement dû au fait que les six opérations dénotées par (A) forment un groupe.

Supposons que ces six opérations soient effectuées dans l'ordre sur $\sin^2 x$. Les fonctions obtenues seront: $\sin^2 x$, $\sec^2 x$, $-\operatorname{cotg}^2 x$, $-\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$, $\cos^2 x$. Par suite, ces six fonctions représentent une collection de nombres sous le groupe (A) pour chaque valeur de x. On dit que les nombres d'une telle collection sont conjugués sous le groupe représenté par (A). Quoiqu'il soit aisé de présenter des relations beaucoup plus intéressantes, celles-ci ont cependant une valeur spéciale, étant donné qu'elles constituent une partie d'un ensemble très considérable de faits qui s'y rattachent étroitement. En d'autres termes, elles sont un acheminement vers des horizons plus étendus.

Nous avons remarqué que chacun des deux nombres $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ est transformé en lui-même par les trois premières opérations de (A). Il est facile de vérifier que les trois autres opérations transforment l'un de ces nombres en l'autre. Par suite, chacun de ces nombres n'a que deux conjugués sous le groupe (A). Chacune des deux collections de trois nombres $\left(-1, 2, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 0, \infty)$ a trois conjugués sous le groupe (A). Tous les autres nombres ont six conjugués distincts sous le groupe (A). Cette proposition peut être démontrée facilement [1] et renferme évidemment des questions concernant l'égalité des fonctions trigonométriques du paragraphe précédent.

---

[1] *Quarterly Journal of Mathematics*. vol. 37 (1905), p. 80.

Les opérations de (A) peuvent être placées en correspondance (1, 1) avec les six mouvements qui transforment un triangle équilatéral en lui-même. Celles de la première ligne correspondent aux rotations de 0°, 120° et 240° respectivement autour du centre du triangle, tandis que les trois dernières correspondent à des rotations de 180° du plan du triangle autour d'axes de symétrie. Comme ces six mouvements et les opérations de (A) obéissent aux mêmes lois de combinaison, on dit qu'ils représentent le même groupe abstrait.

De même que les opérations de soustraire de 1 et diviser 1 conduisent à un groupe de l'ordre six, les opérations de soustraire de 2 ou 3 et diviser 2 ou 3 conduisent à un groupe de l'ordre 8 ou 12 respectivement. Dans le premier cas il y a 10 nombres particuliers qui sont égaux à quelques-uns de leurs conjugués, tandis que dans le dernier cas il y a 14 nombres analogues. Suivant l'un ou l'autre de ces groupes, les autres nombres sont associés en collections de 8 ou 12 respectivement, de telle façon que chaque nombre d'une collection est transformé en chaque autre nombre de la collection au moyen des opérations des groupes respectifs. Pour les détails et démonstrations nous renvoyons à l'auteur mentionné ci-dessus.

Si nous considérons les huit mouvements du plan qui transforment un carré en lui-même, nous verrons facilement qu'ils peuvent être mis en correspondance (1,1) avec les huit opérations obtenues en combinant d_2 et s_2, où d_2 représente diviser 2 et s_2 représente soustraire de 2. L'opération $s_2 d_2$ doit être répétée quatre fois pour revenir au nombre primitif, et peut correspondre à une rotation de 90° dans le groupe des mouvements du carré. Le fait que $s_2 d_2$ est généralement de période quatre est rendu évident par les équations :

$$s_2d_2 = \frac{2}{2-n}, \quad (s_2d_2)^2 = \frac{2-n}{1-n}, \quad (s_2d_2)^3 = \frac{2n-2}{n}, \quad (s_2d_2)^4 = n .$$

Ce groupe de l'ordre 8 est généralement connu sous le nom de *groupe octique* et se présente lui-même très fréquemment dans les mathématiques élémentaires. Nous avons déjà donné un exemple en arithmétique — soustraire de 2 et diviser 2 — et un exemple en géométrie élémentaire — les mouvements qui transforment un carré en lui-même. Nous continuons en donnant une application fondamentale de ce groupe en trigonométrie.

Représentant les opérations de prendre le complément et le supplément d'un angle par c et s respectivement, il est facile de voir que cs augmente l'angle de 90°. Par suite $(cs)^2 = \alpha + 180°$, $(cs)^3 = \alpha + 270°$, $(cs)^4 = \alpha$, où α est l'angle considéré. Par conséquent, il est clair que cs est une opération de période quatre comme $s_2\, d_2$. En plus, les huit opérations

1	cs	$(cs)^2$	$(cs)^3$
s	c	csc	scs

forment un groupe qui a exactement les mêmes propriétés que le groupe formé par s_2, d_2.

Il est spécialement intéressant de remarquer que les huit opérations du groupe octique transforment α en les huit angles dont on donne généralement les fonctions dans les livres de trigonométrie élémentaire. Ces angles sont dans l'ordre : α, $\alpha + 90°$, $\alpha + 180°$, $\alpha + 270°$, $180° - \alpha$, $90° - \alpha$, $270° - \alpha$. En vertu de la prédominence de ces angles et des opérations c et s, notre trigonométrie élémentaire pourrait être appelée, d'une façon appropriée, la trigonométrie du groupe octique. Quelques-unes des méthodes concernant l'emploi des propriétés du groupe octique dans l'étude des fonctions de ces huit angles ont été données dans l'article intitulé « A new chapter in trigonometry ». *Quart. Journal of Mathematics*, vol. 37, (1906), p. 226.

Ces quelques applications du groupe du triangle et du carré dans d'autres sujets élémentaires montrent clairement la relation intéressante entre ces sujets. Ceci est un des traits les plus importants de la notion de groupe. Nous ne voulons pas dire que ces relations doivent être développées dans un enseignement élémentaire, mais le maître qui les connaît enseignera plus sagement et avec un intérêt plus profond que s'il les ignorait. Ce qui est nécessaire à tout maître est une compréhension claire des principes qui trouvent des applications étendues. Des faits isolés sont souvent intéressants, mais ils ne peuvent pas être si fructueux que ceux qui trouvent des applications générales dans des développements plus éloignés. Le vrai pédagogue seul peut être un juge de l'importance relative des éléments qui entrent dans l'ensemble du bagage mathématique.

Les trois polygones réguliers qui entrent pour la plus grande part dans l'étude de la géométrie élémentaire sont : le triangle, le carré et l'hexagone. Nous avons considéré brièvement les groupes des mouvements des deux premiers. Le groupe des mouvements du dernier est de l'ordre 12, et a les mêmes propriétés que le groupe obtenu par les deux opérations de soustraire de 3 et diviser 3. Si ces deux opérations sont représentées par s_3 et d_3 respectivement, il est facile de vérifier que $s_3\, d_3$ est une opération de période six, qui peut correspondre à une rotation de 60°. Les autres opérations du groupe, obtenues par s_3, d_3, correspondent à des rotations autour des axes de symétrie de l'hexagone régulier.

C'est un fait curieux que les groupes des trois polygones réguliers fondamentaux soient les mêmes que les trois groupes finis de soustraction et division, avec des nombres rationnels, si nous excluons le cas presque trivial de soustraire de 0 et diviser 1. Tandis que chacun des autres polygones réguliers possède un groupe de mouvements dont l'ordre est également deux fois le nombre des côtés du polygone, ces groupes, cependant, ne se présentent pas comme groupes de soustraction et division lorsque le nombre dont on soustrait et le nombre qu'on divise sont tous les deux rationnels [1]. En tenant compte de ces faits, les groupes qui ont été considérés sont d'un intérêt plus spécial.

Les principales visées d'un bref article sur un vaste sujet doivent être de susciter un vif intérêt et de donner de bonnes références. Pour ce qui concerne ces dernières, nous voudrions spécialement renvoyer à l'article de POINCARÉ publié dans *The Monist*, vol. 9, (1898), p. 34. Des données semblables sont utilisées déjà en 1874 dans les « Nouveaux Eléments

---

[1] Cf. HILTON, *Messenger of Mathematics*, vol. 35, p. 117, 1905.

de Géométrie » de Méray [1]. Pour de plus brefs développements sur ce point, nous pouvons renvoyer à la définition de la théorie des groupes dans *The Popular Science Monthly*, février 1904, « on the groups of the figures of elementary geometry », American Mathematical Monthly, octobre 1903, et aux articles ci-dessus mentionnés.

G.-A. Miller (Université d'Illinois).

LA NOTION DE GROUPE ET LA THÉORIE DES PARALLÈLES

Extrait d'un mémoire[2] de M. C. Bourlet (Paris).

Les *Instructions* qui accompagnent les programmes officiels (27 juillet 1905) de l'enseignement de la Géométrie, dans le premier cycle de l'Enseignement Secondaire, recommandent aux professeurs de « faire un appel constant à la notion de mouvement » et de « lier le parallélisme à la notion de translation ». Beaucoup d'entre eux se sont émus de ces Instructions, et à bon droit, en se demandant si dorénavant on enseignerait dans nos lycées *deux* Géométries : l'une, au premier cycle, où les parallèles seraient définies par la translation ; l'autre, au second cycle, où l'on conserverait l'ancienne méthode.

La question qui se pose est alors de savoir si l'on ne pourrait pas, en définissant les parallèles par la translation, construire une Géométrie aussi rigoureuse que celle que l'on enseigne actuellement et qui puisse être conservée d'un bout à

[1] Voir l'analyse qu'en donne Bourlet dans les *Nouvelles Annales*, année 1904, p. 211-219. (*Réd.*)

[2] Sous le titre de théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne, M. Bourlet vient de publier dans les *Nouv. Annales* (Nov. 1906), un important mémoire que nous signalons à tous ceux qui enseignent la Géométrie élémentaire. Nous en reproduisons ici la préface.

Note de la Rédaction.

l'autre de l'Enseignement Secondaire. C'est pour y répondre que j'ai rédigé ce petit travail qui n'est, en somme, que le premier Chapitre d'une nouvelle Géométrie où l'on ferait un appel constant à la notion de *déplacement* et où l'on donnerait à la méthode des *groupes de transformations* une place prépondérante.

C'est M. Charles Méray qui, à ma connaissance du moins, a pour la première fois, dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*, dont la première édition remonte à 1874, fait usage de la translation pour définir les parallèles. En lisant l'Ouvrage de M. Méray, j'avais été frappé de la place qu'y tenait le *postulat* qu'il y a introduit, à savoir que *deux translations peuvent être remplacées par une troisième*; mais l'éminent professeur de l'Université de Dijon, ayant surtout en vue *la fusion* des deux Géométries plane et de l'espace, ne s'était pas préoccupé de réduire le nombre de ses postulats et, à côté de celui que je viens d'énoncer, il en admet bien d'autres. Il admet, par exemple, l'existence d'une infinité de glissières dans la translation rectiligne; il admet aussi que, lorsque deux plans se déduisent l'un de l'autre par translation, toute droite qui rencontre l'un rencontre l'autre. Je me suis alors demandé si, en se plaçant, ce que n'avait pas fait M. Méray, au point de vue de la théorie des groupes, on ne pourrait pas bâtir une Géométrie élémentaire dans laquelle le postulat de M. Méray serait l'*unique* postulat fondamental remplaçant celui d'Euclide.

Reprenant ainsi la chose de fond en comble, je suis parvenu à établir la théorie qui suit, qui diffère totalement de celle de M. Méray quant à l'esprit et s'en écarte notablement quant à l'ordre et à la nature des propositions. Il est clair que, dans un Traité complet de Géométrie, que je pense pouvoir faire paraître bientôt, on étudierait les angles et les rotations, l'homothétie et la similitude dans le même esprit.

Je suis actuellement convaincu que l'introduction d'une telle Géométrie dans notre Enseignement Secondaire constituerait un réel progrès.

Cette nouvelle méthode, substituant aux démonstrations artificielles actuelles d'autres plus naturelles, est plus intuitive, car elle *fait voir* à l'étudiant les déplacements qui permettent de comparer les figures.

Définissant les figures géométriques par les constructions mêmes par lesquelles on les obtient, elle donne lieu à des applications graphiques immédiates. Dès qu'on y a défini le parallélisme de deux droites, on sait tracer deux droites parallèles. On n'est pas obligé d'exposer, comme cela a lieu maintenant, deux Livres entiers de Géométrie, avant de pouvoir justifier la moindre construction élémentaire.

Enfin, et ce n'est pas là l'un de ses moindres avantages, cette nouvelle Géométrie se prête admirablement aux simplifications nécessaires pour les débutants, *et cela sans en modifier ni l'esprit ni l'ordonnance*.

J'ai pu, en effet, en conservant l'ordre exact des propositions de ce petit Mémoire, rédiger un Volume tout à fait élémentaire à l'usage du premier cycle[1], en me contentant de le dépouiller de sa forme abstraite et de substituer, aux démonstrations trop délicates, des vérifications expérimentales au moyen des instruments ordinaires du dessin. La comparaison des premiers Chapitres de ce Volume avec le présent travail montrera les ressources de cette nouvelle Géométrie.

Elle descend plus bas et monte plus haut que celle qui a cours. Présentée sous une forme expérimentale aux enfants, elle leur est plus accessible et est plus attrayante. Présentée avec tous ses détails, sous une forme abstraite, dans les classes élevées, elle initiera nos jeunes élèves aux méthodes fécondes de Sophus Lie qui ont droit de cité dans notre enseignement.

J'ai volontairement donné à l'exposé une forme un peu abstraite, en employant la notation symbolique habituelle des groupes de transformations. On peut évidemment se passer de cette notation, mais les démonstrations seraient moins rapides et peut-être moins claires. D'autre part, pour montrer la rigueur et la généralité du raisonnement, je n'ai fait intentionnellement aucune figure. Le lecteur pourra aisément en construire, s'il le juge utile. J'ai également réduit cet ex-

[1] *Cours abrégé de Géométrie*, chez Hachette et Cie; 1906.

posé au strict minimum, en élaguant les applications nombreuses dont il faudrait l'illustrer dans un cours de lycée. Il ne suppose d'ailleurs que la notion préalable du point, de la droite, du plan et de leur détermination ; en d'autres termes, les préliminaires ordinaires qui servent d'introduction à toute Géométrie élémentaire.

Pour plus de rapidité, j'ai rédigé à la fois la théorie dans le plan et dans l'espace. Rien n'est plus facile que de séparer la Géométrie plane de celle de l'espace si on le désire ; mais on détruit ainsi la parfaite harmonie des parties II, III et IV, où l'on remarquera certainement l'exacte correspondance de l'ordre des propositions dans les trois parties.

G. Combeliac (Bourges).

NOTES DE STATIQUE

1. — *Calcul logarithmique des résultantes.* — Deux forces P et Q forment entre elles un angle α. Soient X et Y les projections de Q sur P et sur une perpendiculaire à P. Tirons X et log Y des équations.

$$\log X = \log Q + L \cos \alpha - 10 \ ,$$
$$\log Y = \log Q + L \sin \alpha - 10 \ .$$

Si R est la résultante et θ son angle avec P, on a

$$L \operatorname{tg} \theta = \log Y - \log (X + P) + 10 \ ,$$

et par suite

$$\log R = \log (X + P) + L \sec \theta - 10 \ ,$$

ou

$$\log R = \log Y + L \operatorname{cosec} \theta - 10 \ .$$

(L signifie le « logarithme tabulaire » anglais, c'est-à-dire le vrai logarithme augmenté de 10).

2. — *Preuve expérimentale de la propriété de trois forces.* — Prenez une barre ou une règle, trouvez-en le centre de gravité G en la balançant sur le doigt et marquez-le avec de la craie. Placez la règle dans une position quelconque au moyen d'une ficelle attachée dans une direction quelconque en un point au-dessus de G, planche noire devant une

verticale, l'extrémité inférieure étant supportée dans un angle de mur. Tirez par G une verticale rencontrant le fil en un point I. Joignez I à l'extrémité inférieure (soit B) et attachez un fil en B. En tenant alors ce fil dans la direction B I, et en le tirant légèrement dans cette direction, la règle pourra être soulevée hors de son support. J'ai fait cette expérience pour la première fois, comme passe-temps, avec des résultats très satisfaisants, sans y avoir été préparé par des lectures antérieures.

3. — *Construction graphique concernant une barre sur un cercle vertical.* — Dessinez le cercle et la barre dans une position quelconque. Tirez, par les points d'intersection, des droites formant l'angle de frottement avec les normales; joignez leur intersection avec le centre de gravité de la barre. La position de l'équilibre limite s'obtiendra alors en tournant la figure jusqu'à ce que cette droite (joignant l'intersection au centre de gravité de la barre) soit verticale, par suite l'angle de cette droite avec la barre mesure l'inclinaison de cette dernière sur la verticale.

4. — *Détermination graphique du coefficient de frottement limite pour une barre* s'appuyant dans une position donnée sur deux lignes ayant même coefficient de frottement (les deux lignes peuvent représenter des plans en section, par exemple, une échelle s'appuyant contre un mur et sur le sol, les coefficients de frottement étant les mêmes). Construisez un cercle passant par les extrémités de la barre et l'intersection des deux lignes. Puisque les coefficients de frottement sont égaux, les lignes de réaction totale aux extrémités devront se rencontrer sur ce cercle. Tirez une verticale par le centre de gravité de la barre, jusqu'à son intersection avec le cercle, joignez l'intersection aux extrémités de la barre. Ces dernières droites donnent les directions de réaction totale, et l'angle de frottement peut être facilement mesuré. Cette méthode s'applique également à la barre sur un cercle du problème 3, lorsque la position d'équilibre limite est connue, et l'angle de frottement inconnu. Dans ce cas, le cercle de la construction passe par le centre du cercle sur lequel la barre est placée.

5. — *Construction graphique de la position d'équilibre limite d'une barre* s'appuyant sur deux lignes droites (ou sections de plans) dont les coefficients de frottement sont inconnus. — Ici les réactions aux extrémités font l'angle de frottement avec les normales, leurs directions sont par conséquent connues. Tirez O A, O B parallèles à ces directions et O C verticalement. On est alors ramené à trouver une droite coupant ces lignes en des points A, C, B, tels que le rapport de A C à C B soit égal au rapport des segments suivant lesquels la barre est divisée par son centre de gravité. Pour une barre homogène, A C doit être pris égal à C B. La construction est facilement réalisée en prolongeant A O et prenant des longueurs A O, O D proportionnelles à ces segments, puis en dessinant D B parallèle à O C, rencontrant O B en B. La position d'équilibre limite est parallèle à A B.

Pour construire effectivement la barre, nous n'avons qu'à construire une droite de la longueur de la barre, ayant ses extrémités sur les lignes données et parallèle à A B, ce qui est un simple problème de géométrie.

6. — *Régions de faux équilibre.* — Prenez une machine quelconque, par exemple un assemblage de poulies. Trouvez par expérience les différents poids P qui peuvent élever différents poids W au moyen de la machine et portez, en abcisses et ordonnées, les valeurs de W et P sur un papier quadrillé. Faites-en autant lorsque le poids W descend et P monte. Les courbes ainsi obtenues comprendront entre elles un espace qui serait appelé, suivant Duhem, une région de faux équilibre. Faites alors une représentation graphique du rapport des vitesses de W et P, représentation qui donnerait les relations entre W et P si la machine était sans frottement. Ce graphique, qui est généralement une ligne droite, représente, selon Duhem, la « courbe d'équilibre vrai » et est bordé de chaque côté par les régions de faux équilibre.

G. H. Bryan (Bangor, N. Wales).

(Traduction de J.-P. Dumur, Genève).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — VII

Question 19[2].

a) *Quelles sont vos distractions ou occupations favorites, ou vos goûts dominants, en dehors de l'étude des mathématiques, ou dans vos moments de loisir ?*

b) *Les occupations ou distractions artistiques, littéraires, la musique et la poésie en particulier, vous semblent-elles de nature à détourner de l'invention mathématique, ou bien la favorisent-elles, par le repos qu'elles procurent à l'esprit momentanément ?*

c) *Vous sentez-vous attirés par les questions d'ordre métaphysique, éthique ou religieux, ou au contraire celles-ci vous répugnent-elles ?*

La question 19 a suscité 76 réponses dont nous reproduisons ci-après celles présentant le plus d'intérêt et de développements. — Bien que nos documents ne distinguent pas toujours nettement entre les trois sujets assez différents que visait la question, il nous paraît utile de considérer ces points séparément dans le présent résumé.

QUESTION 19 *a*.

D'une manière générale, on peut dire que les distractions le plus goûtées par les mathématiciens de notre enquête sont :

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905. — 8e année, n° 1, p. 43-48 ; n° 3, p. 217-225 ; n° 4, p. 293-310 ; n° 5, p. 383-385 ; n° 6, p. 463-475, 1906. — 9e année, n° 2, p. 123-135. 1907.

[2] L'Étude de cette question est due à M. TH. FLOURNOY, professeur de psychologie à l'Université de Genève.

dans l'ordre artistique, la *musique*, comme on pouvait s'y attendre d'après les affinités si souvent constatées entre la bosse mathématique et cet art; dans l'ordre intellectuel la *littérature* (non scientifique); et, comme exercice physique, la *promenade* à pied.

I. Pour 3 répondants seulement qui avouent que la musique ne leur dit rien, il y en a 37 qui la mentionnent avec faveur. De ce nombre, dix laissent entendre qu'ils en font eux-mêmes (instruments indiqués : piano 2, pianola 1, violon 2, violoncelle 1, chant 1, chant et piano 1). — 18 répondants (dont 13 déjà compris dans les amateurs de musique) ont accusé d'autres formes d'intérêt artistique : peinture ou dessin (mentionnés par 7 personnes), sculpture (3), photographie (2), théâtre (5), histoire de l'art ou arts en général (5). — Enfin le goût de la nature et de ses beaux spectacles, noté dans quelques réponses seulement, est sans doute plus fréquent, mais se trouve chez la plupart compris dans le plaisir de la promenade.

II. En fait de distractions proprement intellectuelles, la lecture « littéraire » (romans, journaux, biographies, etc.) charme les loisirs d'une trentaine de répondants, dont un bon tiers (11) ont déclaré leur goût spécial pour la poésie : l'un d'eux compose lui-même des vers. — Notablement moins nombreux, une vingtaine seulement, sont ceux qui cherchent tout ou partie de leur délassement dans des branches d'études plus sérieuses ; et ici les sciences physiques et naturelles semblent l'emporter, car nous avons relevé 13 mathématiciens s'occupant, par récréation, de physique, chimie, hydrologie, botanique (2 cas), histoire naturelle en général (3), ethnographie et autres questions scientifiques, contre 7 cultivant les langues, l'histoire ou les sciences sociales et la politique. — En outre on trouve mentionné 1 fois le « soin des affaires » ; 2 fois les voyages ; 6 fois le jeu d'échecs (seul, ou avec le whist ou les dames) ; une dizaine de fois enfin les agréments de la société, de la conversation, de la vie de famille. D'autre part la « conversation intellectuelle, sans but pratique » est formellement condamnée par un de nos répondants à cause du temps qu'elle perd.

III. Dans le domaine des récréations physiques, la promenade à pied, soit solitaire, soit en compagnie, est mentionnée par 21 répondants, dont 4 l'affectionnent sous la forme plus énergique des courses de montagne ou ascensions. On trouve également indiqués, par ordre de fréquence décroissante : tennis, canotage, jardinage (4 fois chacun); pêche, chasse (3 fois); golf, bicyclette (2 fois); enfin gymnastique, danse, équitation, escrime, ski. En y joignant une demi-douzaine de documents qui mentionnent, sans préciser autrement, les exercices corporels, le sport, ou la vie en plein air, cela fait un total de 36 mathématiciens adonnés à des distractions physiques. — Il ne s'agit évidemment dans tout cela, conformément à la question posée, que des exercices *favoris* ou des goûts *dominants*. Car on verra plus tard, par les réponses à la question 26 concernant les exercices physiques en général, qu'ils sont plus variés et plus répandus chez nos mathématiciens qu'il n'y paraît ici, la promenade à pied, par exemple, figurant au total chez une cinquantaine de répondants, la bicyclette chez 19, la natation (entièrement passée sous silence dans les exercices préférés) chez 9, etc.

Question 19 *b*.

Nous avons ici 40 réponses, quasi unanimes à reconnaître que les distractions artistiques et littéraires ne font aucun tort au travail mathématique, ou qu'elles le favorisent bien plutôt par le repos cérébral qu'elles procurent. (Un seul de nos documents déclare que ces distractions sont préjudiciables, *abträglich*.) — Il va d'ailleurs de soi que cette influence bienfaisante est soumise à certaines conditions, que quelques-uns de nos répondants ont relevées, à savoir que ces distractions n'absorbent pas trop de temps, qu'on ne s'y livre pas avec une passion telle qu'on ne puisse plus s'en arracher, etc. Ici encore c'est la musique qui est généralement mentionnée comme le délassement par excellence, le plus reposant et le plus stimulant à la fois pour l'invention mathématique.

Question 19 *c*.

Tot capita, tot sensus : ainsi pourrait presque se résumer notre enquête quant à l'intérêt que les questions d'ordre métaphysique, éthique, ou religieux, inspirent à nos mathématiciens. Des 59 qui ont fourni quelque indication sur ce sujet, la plupart (34) englobent ces trois sortes de problèmes dans un même sentiment soit de sympathie et d'attrait plus ou moins vif (19), soit de complète indifférence (8), soit d'aversion et de répugnance bien caractérisée (7). Les autres ont introduit des distinctions ou subdivisions dans ces diverses matières, et ils offrent toutes les combinaisons d'attitudes possibles: indifférence pour la métaphysique, ou pour la religion, et penchant vers la philosophie des sciences ou vers l'éthique, ou vice-versa, etc.

En essayant de faire une statistique de tous les verdicts émis dans nos documents, nous arrivons à ce résultat, que la métaphysique est ce qu'il y a de moins bien vu chez les mathématiciens, ne réunissant que 22 amateurs contre 24 indifférents ou adversaires; puis vient la religion (25 contre 20); enfin l'éthique, qui a le plus de succès (26 contre 15). Ajoutons qu'une quinzaine de répondants (dont 9 déjà compris dans les chiffres précédents) ont déclaré leur goût pour la philosophie (bien que ce mot ne figurât pas dans le questionnaire), entendue au sens de philosophie des sciences, logique et théorie de la connaissance, *Naturphilosophie*, esprit philosophique, etc.

Inutile d'insister sur ce qu'une telle statistique a forcément de superficiel et d'aventureux. Il n'est pas douteux que la variété ou le désaccord des opinions individuelles de nos répondants éclaterait encore davantage, si l'on pouvait savoir ce que chacun entend au juste sous ces termes vagues et généraux de métaphysique, éthique, religion. Bornons-nous donc faute de mieux, en fait de conclusion, à la constatation suivante, qui ressort avec une suffisante évidence de la lecture de nos documents (et qui entraîne, comme conséquence pratique très banale, la nécessité d'une tolérance réciproque illimitée):

On rencontre chez les mathématiciens — comme partout — des esprits tellement spécialisés et exclusifs qu'ils ne comprennent pas, et que même cela les irrite, que l'on puisse s'occuper de questions absolument étrangères à leur domaine et réfractaires à leurs méthodes rigoureuses (voir, par exemple, les réponses XXXIX *c*, LXXVIII, etc.). Il y en a d'autres, au contraire, qui continuent de réagir à tous les souffles capables de faire vibrer l'âme humaine en son inépuisable complexité, et qui peuvent s'appliquer sincèrement la célèbre devise *Homo sum*... (voir cas II, XVI, XXXIII, etc.). Et entre ces deux extrêmes se déroule une gamme indéfinie de nuances et de combinaisons de tout genre, dont on se fera quelque idée par les échantillons renfermés dans les citations suivantes.

Rép. I (France). — *a)* Presque pendant toute ma vie, j'ai eu pour la musique et le violon une passion d'ailleurs peu heureuse; j'ai lu beaucoup de romans en évitant ceux qui finissent mal et en les prenant par la fin pour mieux apercevoir les procédés de l'auteur; je me suis occupé d'économie politique en donnant d'emblée mes préférences aux théories de Bastiat; j'aime la poésie en exécrant la *versification* indéfinie; j'aime beaucoup à causer et à discuter. *Tout* m'intéresserait, principalement dans le compartiment scientifique, si j'avais le temps de tout travailler. J'aime beaucoup à lire les *Traités* bien faits, parce qu'ils apprennent quelque chose de sérieux, mais j'aime peu les *Mémoires* à cause de ce qu'ils ont habituellement d'inachevé, d'imparfait.

b) Je crois que toutes les connaissances s'aident les unes les autres à entrer dans notre esprit, mais le temps manque pour en acquérir beaucoup.

c) Les questions de cet ordre me paraissent préoccuper tous les hommes, et pour ma part j'y ai beaucoup réfléchi, j'en parle volontiers; mais cela n'a servi qu'à me montrer toutes ces choses hors de la portée, *absolument*, des moyens dont nous disposons pour atteindre la vérité *scientifique*, même vulgaire, et ce n'est plus pour moi qu'une affaire de sentiment, non moins respectable pour autant. MÉRAY.

Rép. II (France). — Autrefois l'équitation, la danse (il y a très longtemps!); puis la marche à pied, la causerie, la peinture, tout cela est favorable à l'esprit. Du reste « homo sum et nihil humanum a me alienum puto! » dans tous les domaines. Si l'ennui me prend, c'est que je suis malade. J'aime la musique et ne suis pas musicien; j'aime les beaux vers (je trouve qu'il y en a peu) et suis incapable d'en écrire un seul. Je dessine, je peins, je ne sculpte pas. Je trouve que les arts du dessin, et *du dessin artistique surtout*, ont une très grande valeur éducative de la pensée, pour apprendre à l'esprit à démêler vite ce qui est le principal et le secondaire d'un sujet. C'est très simple à formuler, très long à maîtriser. Ils apprennent à voir. — Je suis un animal religieux (sans pratiquer aucun culte et en les respectant tous, même les plus étranges). Les questions philosophiques m'attirent beaucoup (je le prouve en vous répondant !). AUDEBRAND.

Rép. III (Angleterre). — *a)* L'histoire naturelle (botanique, microscopie), et surtout la *musique* (le pianola). — *b)* Tout cela repose le cerveau et favorise le travail. — *c)* Ces sujets ne valent rien, parce qu'ils exigent trop de profondeur de pensée. La *conversation intellectuelle*, sans but pratique, est le pire sous ce rapport et perd un temps démesuré. BRYAN.

Rep. IV (Autriche). — *a)* Exercices corporels divers. Le jeu d'échec me plairait aussi beaucoup, mais je ne le pratique qu'avec modération à cause des efforts qu'il exige. — *b)* Ces occupations sont défavorables aux mathématiques. — *c)* Les spéculations métaphysiques m'intéressaient dans ma première jeunesse ; maintenant elles me paraissent stériles. ZINDLER.

Rép. V (Italie). — J'aime beaucoup la musique, ce qui paraît très fréquent chez les mathématiciens. Je ne crois pas que les occupations artistiques détournent des mathématiques. — La métaphysique me répugne : au contraire je suis attiré par les questions d'ordre éthique qui ont un caractère pratique et tendent immédiatement au bien. (....)

Rép. VII (Allemagne). — J'aime les distractions qui stimulent sans exciter : les lectures faciles, la musique, le théâtre. J'aimais aussi les luttes politiques quand j'étais plus jeune, et je prenais souvent la parole dans les assemblées publiques. Je n'ai jamais eu d'inclination pour les sujets philosophiques, etc. Mor. CANTOR.

Rép. IX (France). — La musique ; le théâtre ; les exercices du corps, surtout la promenade, la bicyclette, le canotage ; l'escrime faute de plein air. — La lecture littéraire a pour moi un inconvénient d'inertie : j'ai du mal à m'y mettre, et quand j'y suis je ne la quitte plus. Cela me gêne pour mes affaires les plus simples, et m'empêche de travailler. Je ne peux lire qu'en vacances, et les raisons de santé me font préférer les exercices de plein air quand il fait beau, de sorte que je lis peu, à mon grand regret. (....)

Rép. XI (Russie). — *a)* Voyages dans les montagnes, sport, et éducation de mes enfants. — *b)* La musique favorise le travail, j'aime en entendre lorsque je réfléchis ou que je travaille. — *c)* Autrefois, j'aimais beaucoup la métaphysique, et je pense encore maintenant que sans philosophie on n'est pas savant.

DELAUNOY.

Rép. XV (Allemagne). — La musique, la lecture de biographies, quelquefois un roman, la sculpture sur bois, en usant de tout cela sans excès, favorisent la fraîcheur d'esprit et de corps qui est si nécessaire pour que le temps employé au travail scientifique soit fécond. J'y joins huit heures de sommeil, de la modération aux repas, et du mouvement en plein air. (....)

Rép. XVI (Belgique). — 19 *Homo sum et nihil humani a me alienum puto.* STUYVAERT.

Rép. XVII (Allemagne). — *a)* Je m'occupe volontiers d'art et de littérature, surtout de poésie lyrique. En général je n'aime pas les romans, à moins qu'ils ne soient très intéressants et ne donnent pas dans les problèmes psychologiques ou sociaux ou la peinture des sentiments. — *b)* Je crois que de s'occuper parfois de choses hétérogènes rend à l'esprit sa fraicheur pour les mathématiques. — *c)* Les questions métaphysiques, éthiques, religieuses, et politiques « me répugnent », je ne saurais mieux exprimer la chose.

(....)

Rép. XVIII (Italie). — *a)* En fait de distractions, je n'aime que les promenades en rase campagne, dans des endroits le plus solitaires possible. — *b)* J'aime la musique et la poésie, mais il ne me semble pas qu'elles aient une influence bonne ou mauvaise sur l'invention mathématique. — *c)* Je n'ai aucun goût pour les questions d'ordre métaphysique, éthique, ou religieux ; elles me répugnent plutôt, surtout les premières. (....)

Rép. XIX (Allemagne). — J'aime énormément la musique, mais je ne puis dire qu'elle me distraise quand je suis seul, car pendant que je suis au piano je continue à penser aux mathématiques. Par contre, faire de la musique avec d'autres, surtout jouer dans un quatuor, me repose parfaitement. Je m'intéresse en outre vivement à la littérature et à l'histoire de l'art. — *c)* Je m'intéresse aux questions morales. (....)

Rép. XXI (Autriche). — Ce que je préfère dans mes loisirs c'est la bonne musique, et je me remémore des opéras et des œuvres orchestrales en en jouant la partition au piano. J'aime aussi lire des poésies, et j'en fais moi-même parfois, mais je les garde pour moi. J'aime la métaphysique sur l'herbe verte, et les questions morales, sociales et religieuses m'intéressent aussi. BOLTZMANN.

Rép. XXII (Etats-Unis). — *a)* J'aime les jeux de réflexion, surtout les échecs et le whist, mais je n'y joue pas beaucoup, trouvant meilleur pour la santé les distractions de plein air telles que le tennis ou le golf. J'aime beaucoup la musique, quoique non musicien. — *b)* Je ne connais pas d'autre effet à ces distractions que de servir de diversion et d'être ainsi favorables à l'esprit. — *c)* Je ne me sens pas attiré par les questions de cet ordre.

ESCOTT.

Rép. XXIII (France). — *a)* Principalement les distractions ou occupations qui obligent à un exercice physique. — *b)* J'ai aimé et j'aime le théâtre ; j'en use fort peu à cause de la fatigue qu'il entraine. J'adore la musique sans être musicien. Je m'intéresse aux choses littéraires et aux arts, j'apprécie beaucoup la poésie, et je suis persuadé que rien de tout cela n'est nuisible à l'esprit mathématique, bien au contraire. — *c)* La métaphysique, définie comme on la comprend d'ordinaire, ne m'attire nullement. Je suis profondément anti-religieux ; la philosophie m'intéresse à un haut degré ; il en est de même des questions sociales. Quant à la politique courante, j'en ai fait avec passion pendant vingt ans environ ; aujourd'hui, elle me dégoûte. LAISANT.

Rép. XXIV (France). — Distractions : lecture, promenade à pied. — Je crois que les distractions littéraires ou artistiques ne peuvent nuire à l'invention mathématique. Personnellement, mes lectures portent volontiers sur la philosophie des sciences, des sciences naturelles surtout. L'étude des religions, à un point de vue purement objectif, m'intéresse aussi beaucoup. La métaphysique pure m'assomme. BOUTIN.

Rép. XXV (Hollande). — *a)* Une promenade, la musique (violon) et la littérature classique. — *b)* Je crois qu'elles favorisent l'invention mathématique. — *c)* Elles me répugnent. DE VRIES.

Rép. XXVI (France). — *a)* J'ai fait de la photographie, je fais maintenant du dessin. — *b)* Je crois qu'une occupation artistique est presque nécessaire. — *c)* Je suis très attiré vers les questions métaphysiques et religieuses. RICHARD.

Rép. XXVIII (France). — *a)* J'aime la sculpture et la musique. — *c)* J'ai horreur des raisonnements vagues : il faut des hypothèses pour obtenir des conclusions. FONTENÉ.

Rép. XXIX (Hollande). — *a)* J'aime faire de la musique pour me reposer, ou je lis des nouvelles ou des romans. — *b)* Effet favorable sur la production mathématique. — *c)* Ces questions me sont passablement indifférentes. (....)

Rép. XXX (Norvège). — *a*) La botanique, par exemple.
STÖRMER.

Rép. XXXI (Allemagne). — *a)* La musique, le jardinage, la photographie et la peinture (pastel). — *c)* Oui, les questions métaphysiques ou plutôt de philosophie de la nature. V. ŒTTINGEN.

Rép. XXXII (Autriche). — Je n'ai pas besoin de ces distractions, contre lesquelles je n'ai d'ailleurs aucune objection. — Catholique convaincu, d'une extrême tolérance ; je préfère les bonnes actions à la piété exagérée. LERCH.

Rép. XXXIII (France). — La science en général ne correspond qu'à *l'un* des besoins de l'*homme complet*, qui doit être aussi épris de l'*art*, et doit être *moral* et *affectueux*, appliqué, dans l'ordre pratique, aux intérêts de sa famille, de son pays, et de l'humanité. C'est dire qu'à mes yeux celui qui voudrait traiter de tout « more geometrico » ou n'être « que mathématicien » serait un rabougri ; on ne pourrait lui pardonner que s'il avait du génie.

La science est un de nos plus nobles besoins. Ce n'est pas le seul. J'ai besoin pour ma part de l'Art, de la Philosophie et de la Religion — la religion qui donne à l'homme une « position totale » en face de l'Univers, aussi nécessaire à Ampère qu'au hottentot. Ma tendance religieuse ressemblerait à celle de Pascal, un des plus beaux exemplaires d'*homme vivant* et *sentant*. R. d'Adhémar.

Rép. XXXIV (France). — *a*) La musique en premier rang, et j'estime que c'est là une qualité commune à pas mal de mathématiciens. La peinture et la poésie, la lecture littéraire et philosophique, en second rang.

b) Au contraire, j'estime qu'elles sont une aide au travail, et que l'excitation produite compense grandement le temps perdu.

c) Les questions d'ordre religieux me sont indifférentes. L'éthique, la morale, la métaphysique surtout, m'ont toujours attiré, peut-être à cause de la grande liberté qui y est laissée aux recherches. Azaïs.

Rép. XXXVI (Suisse). — *a*) Les courses de montagne. — *b*) Je n'entends rien à la musique. Je m'intéresse beaucoup aux arts, mais je ne comprends pas encore l'art moderne. J'ai de temps en temps besoin de lire un roman. — *c*) Les questions philosophiques et religieuses m'intéressent vivement, et j'écris parfois sur ces sujets; la politique ne m'intéresse qu'autant qu'elle est en connexion avec ces questions. Beyel.

Rép. XXXVII (France). — *a*) Les promenades à pied, la culture d'un petit jardin. — *c*) Je n'ai aucun goût pour les questions, comme la métaphysique ou la religion, qui me paraissent manquer de rigueur. Fabry.

Rép. XXXVIII (Allemagne). — Les questions éthico-religieuses m'intéressent vivement, de même la théorie de la connaissance et la logique, et aussi les choses artistiques. Je m'y livre volontiers de temps à autre, et j'en reviens tout reposé aux mathématiques. Wernicke.

Rép. XXXIX (Grèce). — *a*) La lecture (littérature de tous pays : spécialement la poésie) ; la culture des fleurs ; les promenades à la campagne.

b) Ces distractions favorisent à un haut degré l'invention. L'esprit s'y récrée et en revient frais et dispos aux mathématiques. La musique en particulier : pour moi, je travaille avec bien plus d'entrain et de facilité en écoutant (mais pas de trop près) un bon piano bien joué. Les morceaux mélancoliques, cependant, me plaisent moins, car ils m'entraînent dans des rêveries contraires au travail. Quant à la poésie, non seulement je la crois très favorable aux études mathématiques, mais j'interromps souvent mon travail pour lire des vers de Moore, Sully Prud'homme ou Björnson, ou pour en composer moi-même. Cette influence de la musique et de la poésie a peut-être sa raison profonde dans la nature essentiellement *une* des différentes formes de l'*harmonie*. Car je ne crois pas qu'il y ait de différence radicale entre le *beau* et le *vrai* malgré leur grande différence apparente. C'est toujours l'*harmonique*, qu'on l'appelle *beau* ou *vrai* selon les cas. En effet, quelle différence *radicale* y a-t-il entre un théorème ou en général une vérité mathématique, et une belle poésie ou un beau morceau de musique, du moins quant à ce qui fait qu'ils nous plaisent tous trois ? C'est l'*harmonie* qui nous plait dans chaque vérité, poésie, ou morceau de musique. De même qu'en chimie on regarde tous les éléments, si différents qu'ils soient, comme composés de la même matière, seulement arrangée différemment, de même je crois que le vrai et le beau, sous toutes leurs formes, sont uniquement constitués d'*harmonie*. Un mathématicien *peut* donc (j'ajouterais même qu'il *doit*) lire et composer des vers, entendre ou faire de la musique, en dépit de l'opinion très répandue que les mathématiciens sont des pédants et les mathématiques une science sèche.

c) Je ne crois point à toutes ces prétendues branches de la science ; ce qui me répugne, c'est qu'il y ait encore des personnes sérieuses s'occupant sérieusement de ces questions. HATZIDAKIS

Rép. XL (Allemagne). — A côté des mathématiques, je suis attiré par la physique. J'estime qu'une bonne manière de se délasser est de construire soi-même de petits appareils de physique, de souffler du verre, de travailler le bois, etc. On peut aussi se reposer en s'occupant d'art, soit de peinture soit de musique. Dans le domaine de la philosophie, je m'intéresse surtout à la logique formelle, puis aussi aux questions religieuses, et philosophiques, dans la mesure où ces dernières sont en relation avec le domaine des sciences naturelles. MENZEL.

Rép. XLII (Italie). — Ma distraction favorite est de me promener en pleine campagne avec peu de compagnie. AMODEO.

Rép. XLIII (France). — Je me suis occupé d'hydraulique, à l'occasion de mon service d'ingénieur, et par goût ; plus récemment d'hydrologie et de psychologie expérimentale. Je prends assez d'exercice depuis quelques années, comme dans ma jeunesse. Je chasse. Je n'aime pas la métaphysique. MAILLET.

Rép. XLIV (Italie). — *a*) La musique, quand mon esprit a besoin de repos ou de récréation.

b) Les beaux-arts, surtout la musique, favorisent les études mathématiques. Il m'arrive souvent de résoudre des questions en jouant au piano des mélodies sentimentales ou dramatiques, où je m'accompagne toujours de mon propre chant.

c) Ces sujets me sont indifférents. MARLETTA.

Rép. XLVI (Espagne). — Ma distraction favorite c'est la musique, allemande, italienne ou espagnole. J'aime les questions métaphysiques pour les appliquer aux sciences. L'ordre moral et intellectuel mérite mon respect et mon attention ; c'est la source de tout.

Z. G. DE GALDEANO.

Rép. XLVII (Suisse). — Etude des langues, histoire naturelle, philosophie. Petites réunions de deux à quatre personnes. GUBLER.

Rép. XLVIII (Hollande). — *a)* Vie de famille, voyages, récréations artistiques.

b) Les distractions artistiques, littéraires, musique, etc., donnent le repos nécessaire pour les études mathématiques. — *c)* Les questions religieuses m'intéressent beaucoup, celles d'ordre purement métaphysique ne m'intéressent pas. CARDINAL.

Rép. XLIX (France). — La musique, surtout celle d'ensemble. Je suis persuadé que la musique et les mathématiques sont sœurs; en tous cas j'ai rencontré beaucoup plus d'excellents musiciens chez les mathématiciens que chez les littéraires. J'ai même remarqué que les mathématiciens avaient une prédilection très marquée pour le violoncelle. Le caractère grave de l'instrument n'est-il pas pour beaucoup dans cette curieuse sympathie ? BARBARIN.

Rép. L (Etats-Unis). — *a)* Me promener au milieu d'une nature grande et belle. — *b)* Je trouve la musique particulièrement reposante. — *c)* Je les trouve attrayantes. DAVIS.

Rép. LI (Etats-Unis). — *a)* Exercices athlétiques, sports, musique. — *b)* Oui. (....)

Rép. LII (France). — *a)* Le soin de mes affaires, et beaucoup d'ordre à apporter en toutes choses ; des lectures de bons livres, que me présente de moins en moins, à mon gré, la littérature contemporaine, sauf pour l'histoire.

b) La musique, que j'ai beaucoup aimée et un peu pratiquée. J'ai bien peu réussi pour le dessin, et je ne l'ai pas cultivé. J'admire comme une très belle chose la poésie ; mais comme sastisfaction, je reste plus sensible à une bonne prose au service de belles pensées qu'aux vers en général. Dans tous les cas, je suis très éloigné de voir le moindre antagonisme entre la science et ces belles choses.

c) Métaphysique pure, pas du tout. Etudes philosophiques plus concrètes, et surtout religieuses, avec le plus grand attrait.

HATON DE LA GOUPILLÈRE.

Rép. LIV (Etats-Unis). — Sports en plein air, littérature, politique. Je m'intéresse aux questions religieuses et philosophiques. Pour moi, les mathématiques sont une branche de la philosophie.

COOLIDGE

Rép. LVI (France). — En raison de ma situation spéciale, on comprend que le travail mathématique n'a jamais été pour moi qu'un moyen d'employer mes loisirs. J'ai exercé la médecine pendant 30 ans, j'ai eu souvent une pratique très active ; c'est surtout quand elle l'a été le plus que j'ai obtenu en mathématiques des résultats satisfaisants. Cela semble paradoxal, mais peut-être trouvera-t-on par d'autres témoignages que le mien, la preuve d'un principe qui me semble très net et très exact : c'est que moins on se repose (en matière de travaux intellectuels, cela s'entend) et moins on est fatigué. PROMPT.

Rép. LVII (Etats-Unis). — *a)* Je m'intéresse à la littérature du jour, au jardinage, à la politique (étant membre de la commission scolaire locale), et à l'activité de l'Eglise (Protestante). Tout cela, pourvu qu'on y prenne garde, ne porte pas préjudice aux études mathématiques. — *b)* Je pense que ces choses favorisent l'tude des mathématiques, pourvu qu'on ne les laisse pas monopoliser l'attention. — *c)* Je me sens attiré par ces questions et non pas repoussé. THOMPSON.

Rép. LXII (Etats-Unis). — *a)* Echecs et tennis. – *c)* La métaphysique, l'éthique, la théologie, et en réalité toute la philosophie, m'inspirent un très vif intérêt. TALLMAN.

Rép. LXIII (Suisse). — *a)* En dehors des études, mon occupation est :

A. Quand je suis fatigué des études : (1) Par le beau temps : sport violent, skys, voile, gymnastique. — (2) Par temps de pluie: m'étendre et rêver, à demi endormi, sur les belles profondeurs des sciences, jouir de ces mystères ; puis ces pensées, ces envolées dans le ciel des sciences me portent à la musique, à la peinture, que j'aime beaucoup. En montagne, j'aime le danger, surmonter une grande difficulté, puis admirer la belle nature ; pour moi rien de plus beau qu'une belle vue de montagne, ça va si bien avec les mathématiques !

B. Quand le travail ne m'a pas fatigué : chercher en amateur des petits cas spéciaux en me promenant, en faisant du sport.

c) Les questions métaphysiques, religieuses, m'attirent beaucoup; mais je déteste discuter là-dessus si l'on ne se base pas sur la science et si l'on n'est pas rigoureusement logique. FERRIÈRE.

Rép. LXIX (Italie). — Mon occupation favorite est la musique, que j'ai toujours cultivée depuis mon enfance, et où, modestie à part, je réussis assez bien. Je ne crois absolument pas que le culte de l'art puisse nuire aux études scientifiques : au contraire, la musique peut agir comme le plus utile calmant du système nerveux troublé quelquefois par un excès de travail cérébral. (....)

Rép. LXX (Etats-Unis). — *a)* Lecture, promenade, tennis, sociabilité. — *b)* Toute distraction reposant l'esprit est à mon avis favorable aux mathématiques. — *c)* Les questions philosophiques m'intéressent beaucoup. Je ne suis pas d'un tempérament religieux.
J. W. YOUNG.

Rép. LXXI (Etats-Unis). — *a)* J'ai beaucoup écrit pour les périodiques américains d'éducation, sur les questions d'enseignement mathématique.

b) Romans, un peu de musique. Cela repose des autres travaux.

c) Ces questions m'attirent jusqu'à un certain point. ....

Rép. LXXII (États-Unis). — *a)* Musique, athlétique, sociabilité.

b) Favorables quand on ne s'y livre pas avec excès.

c) Ces questions m'attirent, mais je ne crois pas qu'il faille leur donner trop de temps. ....

Rép. LXXIV (Italie). — *a)* Lectures littéraires. — *b)* Les occupations artistiques favorisent d'après moi l'invention mathématique. — *c)* Je me sens attiré surtout par des questions d'ordre philosophique. PIRONDINI.

Rép. LXXV (France). — *a)* La lecture ; particulièrement celle des journaux et du roman, c'est-à-dire celle qui n'exige qu'une très faible attention. La promenade dans les campagnes et les bois ; la pêche au bord de la mer.

b) Toute distraction me paraît une force pour le travail futur. Il n'y a, je crois, rien de plus funeste à tous les points de vue, que cette tension de l'esprit vers une seule idée, rien de plus opposé au développement des qualités inventives.

c) Non, je ne me sens aucun intérêt pour les questions d'ordre métaphysique, éthique ou religieux. Mais on n'introduira jamais assez, à mon avis, dans l'enseignement et dans les recherches mathématiques, l'esprit philosophique : c'est le maître par excellence. DE LONGCHAMPS.

Rép. LXXVI (France). — *a)* Je suis un liseur passionné ; le mouvement des idées générales m'attire. — *b)* Les occupations artistiques me paraissent très appropriées à l'esprit mathématique. Alors que je pouvais disposer à mon gré de la presque totalité de mon temps, je demandais à la littérature (surtout poétique) et à la musique, sinon la *distraction*, du moins la diversion nécessaire à la détente cérébrale. — *c)* Je suis très attiré par les questions d'ordre général, y compris les questions d'ordre métaphysique, éthique, ou religieux. Mais il est entendu que cela ne signifie nullement que j'attribue à ces questions une réalité objective en dehors de la psychologie humaine, c'est-à-dire des conceptions anthropomorphiques. COMBEBIAC.

LXXVII (États-Unis). — Au point de vue intellectuel, j'aime la philosophie et la science pure ; au point de vue artistique, la musique ; au point de vue physique, les exercices très vigoureux, comme le tennis, la rame, les ascensions. MOULTON.

Rép. LXXVIII (Italie). — *a)* Me promener dans la campagne en compagnie d'une autre personne, pas davantage, de préférence cultivée. — *b)* Je crois que les distractions artistiques ou musicales, que je me procure quelquefois, distraisent des études mathématiques. — *c)* Je ne m'occupe de rien de tout cela, et cela me fâche (*mi fa stizza*) que d'autres s'en occupent. ....

Rép. LXXXI (Hollande). — Penser à des choses éthiques ou sociales. Littérature de haute valeur, ou sujets éthiques, sociaux, ethnographiques, de vaste étendue. VAES.

Rép. LXXXII (Suisse). — *a)* Promenades et autres exercices physiques. Je recherche volontiers la société d'amis aimant à discuter les idées générales dans les divers domaines de l'activité intellectuelle. Quelquefois au contraire je préfère la compagnie de ceux de mes amis qui n'appartiennent pas aux carrières libérales; cela me permet de sortir entièrement de mes occupations habituelles.

b) J'aime beaucoup la musique sans être musicien; le théâtre, surtout la belle comédie; de temps à autre la poésie. Je m'intéresse aussi à la peinture et à la sculpture lorsqu'elles restent en contact avec la belle nature, la grande inspiratrice de toutes les branches artistiques. Ce sont pour moi d'agréables diversions intellectuelles.

c) La métaphysique ne m'intéresse pas. Je préfère les questions d'ordre général se rattachant à la philosophie des sciences, à la psychologie. FEHR.

Rép. LXXXIII (France). — *a)* Les exercices physiques, la lecture, la musique, le théâtre. — *b)* Je ne pense pas qu'elles puissent détourner de l'invention mathématique. Elles peuvent la favoriser par le changement qu'elles apportent, mais je ne pense pas qu'elles soient un aussi bon repos pour l'esprit que les exercices physiques, malheureusement difficiles à pratiquer dans une ville.

(...)

Rép. LXXXIV (Suisse). — *a)* Les jeux de combinaison, tels que les dames, les échecs, les cartes, etc. — *b)* Je suis complètement étranger à cette question, n'ayant jamais pratiqué ni la musique, ni la littérature, ni la poésie. — *c)* Je m'intéresse aux questions métaphysiques, mais les questions religieuses me laissent complètement froid. OLTRAMARE.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Le lieu de naissance de Legendre.

Une question, déjà ancienne, n° 755 de l'*Intermédiaire des mathématiciens*, a appelé l'attention du colonel Brocard sur le problème controversé du lieu de naissance de Legendre, certaines biographies désignant Toulouse, et d'autres Paris. M. Brocard donnait le conseil de faire des recherches à la mairie du 16^{me} arrondissement de Paris où, croyait-il, devait se trouver l'acte de décès. L'avis me sembla bon, et l'un de nos collègues de la Société Mathématique de France, M. Pierre Renard, eut l'obligeance, sur ma prière, d'entreprendre les démarches.

A la mairie du 16^{me} arrondissement, on lui apprit que tous les actes antérieurs à 1860 étaient déposés aux Archives départementales et communales, quai Henri IV. Il s'y transporta, et trouva un employé fort aimable auquel il exposa sa requête, et le but poursuivi. Après une courte recherche, on constata que l'acte de décès existait effectivement.

— Très bien, répondit M. Renard ; alors, pourriez-vous me dire si Legendre est né à Toulouse ou à Paris ?

— Impossible, Monsieur. Il nous est absolument interdit de fournir des renseignements. Seulement, nous pouvons vous procurer une expédition de l'acte de décès pour le prix de 3 francs 75 centimes.

— Voici 3 fr. 75. Pouvez-vous m'écrire, sur un bout de papier, le lieu de naissance de Legendre ? Je voudrais bien savoir s'il est de Paris, ou de Toulouse.

— Impossible, Monsieur. Nous ne pouvons fournir l'expédition que dans un délai de trois jours. Il faut effectuer votre versement au guichet voisin.

Au guichet voisin, un second employé non moins aimable que le premier reçut avec une grâce exquise les 3 fr. 75. Et comme on lui proposait d'ajouter les frais d'envoi, pour qu'il voulût bien adresser l'expédition :

— Impossible, Monsieur; nous n'envoyons jamais rien. Il faudra que vous ayez l'obligeance de revenir.

— Je l'aurai.

Et en même temps l'employé modèle n° 2 tendait à son interlocuteur un reçu n° 3467 où celui-ci lisait avec stupéfaction :

« Reçu de M. Legendre la somme de etc...., pour frais d'expédi-
« tion d'un acte de décès. »

Paris, le 16 mars 1907.

Le Caissier des archives,
(Illisible). »

— Mais je ne m'appelle pas Legendre, et je ne suis pas mort. Je m'appelle Renard, et je suis toujours vivant.

— Ça ne fait rien, ça n'a pas d'importance.

Sur cette parole admirable, la conversation pris fin. Quelques jours après, M. Renard, ayant fait un nouveau voyage aller et retour d'un bout à l'autre de Paris, me remettait l'expédition de l'acte de décès, que je ne trouve pas d'un prix trop élevé : 1° parce qu'elle contient la solution d'une question d'histoire scientifique intéressante ; 2° parce que, en raison des circonstances que je viens de rappeler, elle fournit un petit paragraphe additionnel à l'inépuisable chronique de la sottise administrative.

En définitive, il est désormais acquis, d'après l'acte de décès, que Adrien-Marie Legendre était né à Paris, qu'il y est mort, en sa demeure, quai Voltaire, n° 9, à l'âge de 80 ans, le 9 janvier 1833, à six heures du matin (et non le 10 janvier, comme l'indiquent quelques biographies). Legendre à sa mort, était Membre de l'Académie des Sciences et officier de la Légion d'honneur.

C. A. L.

Sur le cercle passant par les pieds des bissectrices intérieures.

1. — Soient P et P′ deux points quelconques du plan ABC. Nous désignons par A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1 les intersections respectives de AP, BP, CP, AP′, BP′, CP′ avec BC, CA, AB. Lorsque ces six points d'intersection sont concycliques, nous avons fait voir (*Nouvelles Annales*, Août 1906), que le point P′ est le réciproque de l'anticomplémentaire d'un point dont les coordonnées barycentriques sont

$$\frac{a^2}{x(y+z)}, \quad \frac{b^2}{y(z+x)}, \quad \frac{c^2}{z(x+y)},$$

x, y, z étant les coordonnées barycentriques de P.

2. — D'après cela il est facile de voir, que si P est le centre I du cercle inscrit à ABC le point P′ a pour coordonnées barycentriques

$$\frac{a}{a+4p\cos A}, \quad \frac{b}{b+4p\cos B}, \quad \frac{c}{c+4p\cos C}.$$

On vérifie aisément, que ce point appartient à l'hyperbole de Kiepert de ABC.

3. — Les triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A'_1 B'_1 C'_1$ sont les triangles diagonaux des quadrilatères ABCI, ABCP'. Ces triangles sont donc autopolaires aux hyperboles équilatères ABCI (hyperbole de Feuerbach) et ABCP' (hyperbole de Kiepert). Comme le cercle circonscrit à un triangle autopolaire à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette courbe et comme le cercle d'Euler est le lieu des centres des hyperboles équilatères ABC, nous pourrons dire : *le cercle passant par les pieds des bissectrices intérieures coupe le cercle d'Euler aux centres des hyperboles de Feuerbach et de Kiepert.*

Emile WEBER (Liège).

Simple remarque sur un théorème de géométrie.

Nous avons en vue le théorème :

Si P est un point pris à l'intérieur d'un triangle ABC, on a

$$BP + PC < AB + AC .$$

La démonstration donnée dans les ouvrages classiques gagnerait — ce nous semble — en clarté à être exposée comme suit.

Lemme. — *Si l'on prend un point P sur un côté AC d'un triangle ABC, entre A et C, on a $BP + PC < BA + AC$.*

La démonstration est immédiate.

Théorème. (Enoncé ci-dessus). — Prolongeons BP jusqu'à sa rencontre en R avec AC. En appliquant le lemme aux triangles BRC, ABC, on a

$$BP + PC < BR + RC < BA + AC .$$

C. q. f. d.

Emile WEBER (Liège).

Sur la relation entre les côtés d'un triangle rectiligne.

Cette petite note est destinée à attirer l'attention des professeurs sur un défaut de méthode, dans tous les traités de géométrie élémentaire qui nous sont connus. Il s'agit de trois théorèmes qui se rapportent à l'expression de la valeur du carré d'un côté du triangle en fonction des deux autres. Tous les auteurs que nous avons lus distinguent trois cas suivant que le côté est opposé à un angle droit, à un angle aigu ou à un angle obtus. Au fond, ils déduisent chacun de ces théorèmes de la propriété suivante, dont ils recommencent trois fois la démonstration :

Les hauteurs d'un triangle déterminent dans les carrés construits sur les côtés, six rectangles équivalents deux à deux. Ces rectangles se suivent lorsque l'on fait le tour de la figure et font partie de carrés distincts.

Il serait plus méthodique, à notre avis, de poser, une fois pour toutes, la proposition précédente en théorème, et d'en déduire les trois cas qui se présentent, comme corollaires. J. Malaise (Liège)

CHRONIQUE

IIe centenaire de Léonard Euler.

I. *Séance commémorative organisée par la Société Mathématique de Berlin.*

Le 15 avril deux cents ans s'étaient écoulés depuis que Léonard Euler naquit à Bâle. La Société Mathématique de Berlin avait pris la résolution de remplacer la séance mensuelle par une séance solennelle à la date du 15 avril.

Grâce à l'obligeance de M. Rubens, directeur de l'Institut de Physique à l'Université, la grande salle de cet Institut fut mise à la disposition de la Société.

En premier lieu, M. Valentin, bibliothécaire à la Bibliothèque Royale, fit un discours *sur Léonard Euler à Berlin*; en particulier il donna des communications intéressantes sur les relations entre Frédéric-le-Grand et le savant géomètre. Puis M. Kneser, professeur à l'Université de Breslau, prit la parole pour développer *les progrès que le calcul des variations doit au génie d'Euler* qui continuait l'œuvre de Leibniz et préparait les découvertes de Lagrange. Le troisième discours, prononcé par M. Fritz Kötter, professeur à l'Ecole Polytechnique de Charlottenbourg, était destiné à montrer l'impulsion que donnèrent les travaux d'Euler à la *théorie de la toupie* et aux problèmes qui s'y rattachent.

La cérémonie officielle a été suivie d'une réunion familière qui a réuni un grand nombre de personnes. E. Jahnke (Berlin).

II. *Séance solennelle organisée par l'Université de Bâle.*

L'université de Bâle avait décidé, dans le courant de l'hiver dernier, d'organiser une cérémonie académique en l'honneur du grand mathématicien bâlois Léonard Euler. Ce projet a été mis à exécution le 29 avril, et l'université avait convié à cette fête scientifique des représentants des Académies des sciences de St-Pétersbourg et de Berlin, des universités suisses, de l'école polytechnique de Zurich et de quelques universités allemandes voisines de notre frontière.

Appelé en qualité de doyen de notre faculté des sciences, à représenter l'université de Genève à cette solennité, je suis heureux d'en donner ici un court aperçu et de présenter à l'université de de Bâle mes sincères félicitations pour la manière à la fois sérieuse, digne et simple dont elle a commémoré l'anniversaire deux fois centenaire de la naissance à Bâle de Léonard Euler.

La cérémonie s'est déroulée le 29 avril avant midi dans l'église de St-Martin, voisine de l'université et qui sert à notre sœur des bords du Rhin d'Aula pour les grandes occasions. L'église, sobrement décorée de verdure, était ornée du buste d'Euler, et la tribune, était entourée des drapeaux des sociétés d'étudiants bâloises. Le chœur était occupé par l'orchestre académique qui a inauguré la cérémonie par l'exécution de l'ouverture d'Iphigénie de Gluck et l'a clôturée par celle de la marche de l'Athalie de Mendelssohn. Le corps professoral, presque au complet, s'est placé derrière la tribune. La grande nef avait été réservée aux invités et aux étudiants, et les bas-côtés de l'église étaient occupés par un nombreux public, ami de l'université, qui a attentivement écouté les discours des divers orateurs.

Le premier discours a été prononcé, au nom de l'université de Bâle, par M. le professeur Karl Vonder Mühll qui a retracé, en historien et en mathématicien, la biographie d'Euler et donné un aperçu critique de son œuvre immense. Euler est né à Bâle et a été élevé d'abord à Riehen, paroisse de son père, le pasteur Paul Euler, qui avait été élève de Jacques Bernoulli. C'est lui qui a initié son fils aux mathématiques, mais c'est à l'université que s'est développé le goût prononcé de Léonard pour cette science, sous l'influence de Jean Bernoulli. Celui-ci discerna promptement le génie du jeune homme et obtint de son père qu'il pût suivre ses goûts et ne pas poursuivre les études de théologie.

Bâle était alors une vraie pépinière de mathématiciens qui, naturellement, ne pouvaient tous faire leur carrière dans leur patrie. Nicolas et Daniel Bernoulli étaient à St-Pétersbourg et y attirèrent Euler en 1727, à l'âge de vingt ans. C'est là qu'il publia ses premiers travaux. Il les continua de 1741 à 1766 à Berlin où parurent ses œuvres les plus importantes, puis retourna à St-Pétersbourg où il termina sa carrière en 1781. Malade, borgne et ensuite aveugle dans cette dernière partie de sa vie, poursuivi par le malheur, il n'en dicta pas moins encore plus de 300 travaux à ses secrétaires.

Euler a été avant tout un mathématicien et a fait du calcul infinitésimal l'instrument qu'il est encore aujourd'hui. Mais en outre il a appliqué ce calcul à tous les problèmes des sciences exactes, et on peut dire qu'il a abordé tous ceux de l'astronomie, de l'optique, de la mécanique, surtout et aussi ceux de l'art de l'ingénieur. Son travail a été immense et quoique sa vie se fut passée à l'étranger, Bâle n'en est pas moins fière de lui avoir donné le jour.

M. O. Backlund, directeur de l'observatoire de Poulkovo, délégué de l'Académie des sciences de St-Pétersbourg, a ensuite lu un discours en latin célébrant les services rendus par Euler à cette Académie. Puis M. le professeur Frobenius, au nom de l'Académie des sciences de Berlin, a encore insisté, après le professeur Von der Mühll, sur l'œuvre immense d'Euler et sur l'originalité de son génie. Il a fait ressortir tout ce que les étudiants de l'époque actuelle lui doivent encore, en ce sens que les manuels d'aujourd'hui, qu'il s'agisse de mathématiques pures ou appliquées, ne font, que reproduire pour une forte part, les méthodes, les résultats et les applications d'Euler.

M. le professeur Rudio de Zurich a prononcé un dernier discours, au nom des hautes écoles de la Suisse et, en remerciant l'université de Bâle d'avoir si dignement célébré l'anniversaire d'Euler, il a exprimé le vœu que le plan de la publication intégrale de l'œuvre complète d'Euler dont on a déjà souvent parlé, marche vers une prochaine réalisation. M. le professeur John Meier, recteur de l'université de Bâle, a remercié les orateurs qui de l'étranger et de la Suisse sont venus apporter leur tribut d'éloge au grand mathématicien bâlois et la cérémonie a été ainsi terminée.

Disons encore qu'à propos du deuxième centenaire d'Euler, la Bibliothèque de l'université de Bâle avait, par les soins de M. le professeur Burckhardt, organisé une exposition des œuvres d'Euler. Cette exposition comprenait quelques manuscrits, les principaux ouvrages du savant bâlois et les portraits que l'on possède de lui à Bâle ainsi que les reproductions de ceux qui existent ailleurs.

Enfin qu'il me soit permis de rapporter en terminant une remarque que m'a faite M. Backlund : c'est qu'il existe en français un excellent compte rendu de l'œuvre d'Euler en fait de mécanique céleste, dans la thèse de doctorat présentée en 1817 à l'Académie de Paris par Alfred Gautier qui a été directeur de l'observatoire de Genève de 1819 à 1839. Je transcris d'autant plus volontiers ici ce jugement, qu'il vient confirmer ce que me disait, il y a plus de vingt ans, Tisserand, en me parlant de ce travail de mon grand oncle[1] dont il s'est servi dans certains chapitres de sa Mécanique céleste devenue classique, et qu'il appréciait comme un résumé très bien fait. Raoul Gautier (Genève.)

[1] Essai historique sur le problème des trois corps, ou dissertation sur la théorie des mouvements de la lune et des planetes, etc., par Alfred Gautier, licencés ès lettres et docteur es sciences, Paris. 1817. — 283 pages in-4°.

Monument Abel.

« Lors du Centenaire d'Abel, le monde entier a témoigné par sa grandiose participation en quelle haute estime on avait ce génie transcendant.

Au moment où ils se disposent à lui élever un monument digne de lui, ses compatriotes ont cru ne pas devoir donner à leur manifestation un caractère exclusif, mais ont trouvé qu'ils rendraient mieux hommage au caractère international de l'œuvre d'Abel, en conviant les mathématiciens des autres nations à collaborer avec les Norvégiens.

Le monument, qui aura 13 mètres de hauteur, est achevé en plâtre, et prêt à être coulé en bronze. Il est dû au ciseau de Gustav Vigeland, le premier des sculpteurs norvégiens. Sur un haut piédestal planent deux génies de taille gigantesque sur le dos desquels repose le jeune voyant, dont les traits rendent, en une mâle adaptation, ceux de l'illustre Abel. Cette œuvre a excité l'admiration de connaisseurs distingués, même en dehors des limites de la Norvège.

Il s'agit ici de la mémoire d'un homme par lequel la Norvège a apporté une part contributive tout à fait unique à l'œuvre scientifique de tous les pays et de tous les âges : c'est pourquoi nous nous adressons en toute confiance à l'ensemble du monde savant. »

Kristiania, mars 1907.

W. C. Brogger. Elling Holst. Fridtjof Nansen.
Carl Stormer. L. Sylow. Axel Thue.

Les souscriptions sont reçues par M. Karl Fischer, Kirkegaden, 6 b., Christiania.

Monument Lamarck [1].

« Les professeurs du Museum national d'Histoire naturelle de Paris, désireux de rendre un hommage solennel à leur illustre prédécesseur, le naturaliste philosophe Lamarck, prennent l'initiative d'une souscription internationale afin de lui élever une statue dans le Jardin des Plantes.

Ils vous demandent de prendre part à cette manifestation scientifique qui a pour but de rendre une tardive justice à l'immortel auteur de la Philosophie zoologique, au savant qui, en zoologie,

[1] Bien que Lamarck fût un naturaliste, son nom est trop intimément associé à la science universelle pour que l'*Enseignement mathématique* hésite à faire connaître cette grande manifestation, placée sous le haut patronage du Président de la République française, du roi de Portugal et du prince de Monaco.

Dans la liste du Comité d'honneur, nous relevons les noms de MM. Appell, Bouquet de la Grye, Darboux, Janssen, Jordan, Maurice Lévy, Lamy, membres de l'Institut, et celui de M. C. A. Laisant, président de la Société Philomatique de Paris en 1906.

en botanique, en géologie, en météorologie, fut un précurseur génial, au grand penseur dont les conceptions sont la base des idées modernes sur l'évolution du monde organisé. »

Les souscriptions[1] sont reçues par M. Joubin, professeur au Museum d'Histoire naturelle, à Paris.

Les Professeurs du Museum national d'Histoire naturelle.

Nominations et Distinctions.

M. le Prince Roland Bonaparte est nommé académicien libre de l'Académie des Sciences de Paris, en remplacement de M. Bischoffsheim, décédé.

M. G. Darboux, est nommé membre associé de l'Académie des Sciences de Belgique.

M. L. E. Dickson est promu professeur adjoint à l'Université de Chicago.

M. U. Dini, professeur à l'Université de Pise, est nommé docteur honoraire de l'Université de Glasgow.

M. Th. Furtwängler est nommé professeur titulaire de mathématiques à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. P. Koebe est admis à l'Université de Göttingue en qualité de privat-docent.

M. Ludwig, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, est nommé professeur titulaire à la chaire de Géométrie descriptive de l'Ecole technique supérieure de Braunschweig.

M. H. Maschke est promu professeur titulaire à l'Université de Chicago.

M. H. Poincaré est nommé docteur honoraire de l'Université de Glasgow.

M. Jules Tannery est nommé académicien libre de l'Académie des Sciences de Paris.

M. E. v. Weber, privat-docent à l'Université de Munich, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Würzbourg.

M. Wieghardt, de l'Ecole technique supérieure de Braunschweig, est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Hanovre.

Nécrologie.

Marcelin Berthelot. — Le 18 mars 1907 la France a perdu l'un de ses plus illustres savants, Marcelin Berthelot, et l'on sait qu'elle lui a rendu les honneurs les plus grands dont elle dispose. Ber-

---

[1] Le Comité a décidé d'offrir à tous les Souscripteurs d'au moins 20 francs la reproduction en héliogravure (format grand in-4° d'un portrait authentique et inédit de Lamarck, peint pour sa famille par Thévenin, en 1801.

A tout Souscripteur d'une somme de 200 francs au moins sera offerte, s'il le désire, une épreuve en plâtre du buste de Lamarck par le statuaire Fagel, à qui est confiée l'exécution du monument.

thelot était l'un des secrétaires perpétuels de l'Académie des Sciences; il avait été élu membre de l'Académie française en 1900 en remplacement de M. Joseph Bertrand.

Colonel LAUSSÉDAT. — Ce même jour est décédé à Paris M. le colonel Laussédat, académicien libre, ancien professeur de Géodésie à l'Ecole polytechnique, ancien Directeur du Conservatoire national des Arts et Métiers; il était né le 14 avril 1819.

J. REBSTEIN. — M. J. Rebstein, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, est décédé au mois de mars 1907 à l'âge de 67 ans. Il professait les cours se rattachant à la théorie des assurances, à la méthode des moindres carrés et à la construction des cartes géographiques.

NOTES ET DOCUMENTS

Programme d'un cours d'histoire des sciences. [1]

Le programme qu'on va lire a été demandé à mon frère par M. Rabier, directeur de l'enseignement secondaire, au moment où se préparait l'organisation de l'enseignement moderne (1892). On pensait donner à l'histoire des sciences une heure et demie par semaine, dans la dernière classe. Si mes souvenirs sont exacts, il a été imprimé dans les documents remis aux membres du Conseil supérieur de l'Instruction publique, mais n'a pas été publié.

Je ne l'ai pas relu sans émotion : on peut le regarder comme une table des matières, très abrégée, de ce Discours sur l'histoire générale des sciences que mon frère avait commencé d'écrire et qui, s'il avait vécu, serait publié depuis deux ans. On verra avec quelle élévation d'esprit Paul Tannery concevait l'enseignement de cette histoire. Un jour viendra peut-être où l'autre histoire, l'histoire des faits, ne sera plus regardée que comme un cadre, d'ailleurs indispensable. Pour savoir comment l'esprit humain a évolué, il faut connaître le milieu où il a évolué : c'est cette évolution qui importe : l'histoire des sciences n'en retrace qu'une partie, mais une partie essentielle.

Il faut bien avouer qu'aujourd'hui, comme il y a quinze ans, l'enseignement de cette histoire est impossible dans nos lycées, parce que le personnel n'est pas préparé. Il faut, tout d'abord, organiser la préparation. On a jugé avec raison que l'histoire de l'enseigne-

[1] Extrait de la *Revue du mois* du 10 avril 1907, avec l'autorisation de la Rédaction. — Paris, Librairie Le Soudier.

ment et des doctrines pédagogiques était indispensable à ceux qui veulent être professeurs : elle est, aujourd'hui, admirablement exposée ; mais l'histoire de ce qu'ils auront à enseigner est-elle moins nécessaire aux futurs maîtres ? Peuvent-ils continuer d'en ignorer les grands traits ?

Il suffit, pour répondre, de lire les pages qui suivent.

JULES TANNERY (Paris).

Conseils et Directions.

Le but que le professeur devra chercher à atteindre est principalement de montrer l'enchaînement rationnel qui a lié l'évolution de chacune des sciences, soit avec celle des autres, soit avec celle de la civilisation en général.

Pour chacune des périodes indiquées dans le programme ci-après, il devra s'attacher à définir et à bien faire comprendre l'ordre d'idées, vrai ou erroné, qui dominait dans chaque science, ainsi que le caractère des transformations qu'a pu subir cet ordre d'idées au cours de la période. Il sera d'ailleurs inutile de s'astreindre rigoureusement à l'ordre chronologique ; il est préférable, au contraire, de s'en tenir pour chaque époque aux traits généraux, sauf à remonter aux germes antérieurs des grandes idées ou découvertes nouvelles, quand il s'agira d'en exposer l'histoire, et à indiquer en même temps les conséquences ultérieures de ces découvertes sur lesquelles on ne se proposera pas de revenir à propos d'une autre époque.

Tout en cherchant ainsi à développer le plus possible chez les élèves des idées générales, il conviendra, pour soutenir leur attention, d'illustrer l'enseignement par des détails circonstanciés donnés dans chaque leçon sur un sujet déterminé. Le programme indique un certain nombre de ces sujets, mais il ne sera pas nécessaire de les développer tous également ; le programme ne doit pas davantage être considéré comme limitatif; le professeur devra choisir, d'après ses convenances personnelles, pour chaque leçon, la question qu'il se proposera de traiter en détail, sous la condition de la rattacher nettement à un ordre d'idées générales exposé dans la même leçon.

Toute question de détails ainsi choisie devra être traitée aussi complètement que possible : on aura soin d'ailleurs, soit en l'exposant, soit en développant des thèmes plus généraux, d'éviter toute nomenclature vide, aussi bien que les indications historiques trop sommaires qui, sous une apparence de précision, ne laissent souvent que des notions fausses dans l'esprit des élèves.

Au lieu d'un sujet relatif à l'histoire d'une question déterminée (comme par exemple l'origine des chiffres modernes ou celle de la machine à vapeur, le professeur pourra choisir la vie d'un savant illustre. Dans ce cas, tout en retraçant les détails intéressants de sa biographie, il devra s'attacher à indiquer ses ouvrages les plus importants et à en donner une analyse suffisante pour provoquer alors chez les élèves le désir d'arriver à les connaître plus complètement.

Enfin il ne devra pas perdre de vue, en thèse générale, que l'étude historique des sciences ne doit pas seulement s'attacher à retracer les progrès de l'esprit humain dans la connaissance de la vérité ; qu'elle a aussi à en rappeler les erreurs, et que c'est précisément la saine appréciation de ces erreurs qui seule peut bien faire comprendre l'importance véritable des sciences ; sans négliger l'intérêt qu'offrent les applications pratiques, il ne perdra pas une occasion de faire ressortir la nécessité de la science qui seule peut conduire à des conceptions justes, soit de l'univers, soit de la société humaine.

Programme.

Premier trimestre.

Des connaissances pratiques qui ont servi de fondement aux théories des sciences pures. — Développement de ces connaissances aux divers degrés de la civilisation. — Niveau atteint chez les anciens peuples de l'Orient (Egypte, Chaldée).

Nota. — *Les diverses sciences seront successivement considérées dans l'ordre suivant : arithmétique et géométrie, mécanique, astronomie, physique, chimie, histoire naturelle.*

Des conceptions irrationnelles de la nature qui ont été l'origine des prétendues sciences occultes (astrologie, magie, sorcellerie, etc.) Des notions positives mêlées à ces conceptions, de l'influence qu'elles ont exercée sur l'évolution des sciences.

Apparition de la science pure chez les Grecs vers le VIe siècle avant notre ère : sa double tendance : abstraite : (mathématiques) ; concrète (science de la nature en général).

Mathématiques. — Pythagore et son école. — Constitution d'un enseignement scientifique. — Classification en arithmétique, géométrie sphérique (astronomie), musique. — Découverte expérimentale des relations numériques concernant la gamme. — Progrès des mathématiques au IVe siècle avant notre ère (académie). — Importance historique de la classification pythagorienne ; le *quadrivium* et le *trivium* au moyen âge.

Science de la nature. — Recherche d'une conception rationnelle et générale de la science. — Tentatives des premiers philosophes grecs à partir de Thalès. — Résultats spéciaux : constitution de la médecine : Hippocrate et son école. — Résultats généraux : Aristote, son œuvre scientifique. — Adoption de principes erronés concernant la dynamique. — Système astronomique. — Doctrine des quatre éléments. — Travaux d'histoire naturelle.

Des contradictions opposées dans l'antiquité aux dogmes d'Aristote : doctrine atomique.

Période alexandrine. (Des conquêtes d'Alexandre à l'établissement de l'empire romain). — Abandon, dans la Grèce proprement dite, des tendances véritablement scientifiques. — Les nouvelles écoles philosophiques se propoposent pour but l'établissement de règle de conduite individuelle : rôles du stoïcisme et de l'épicurisme au point de vue de l'histoire des sciences.— Caractère classique que prend l'enseignement.

La science pure protégée par les Ptolémées. — Fondation du musée d'Alexandrie. — Euclide : la géométrie élémentaire. — Apollonius : la géométrie des coniques. — De l'utilité de l'appui donné par les gouvernements aux recherches purement théoriques : imprévu des applications pratiques qu'elles peuvent recevoir (les coniques en astronomie ; autres exemples historiques).

Archimède, ses travaux géométriques ; ses découvertes en statique.

De la mécanique chez les anciens. — Héron d'Alexandrie.

L'astronomie scientifique : Hipparque.

Période gréco-romaine (jusqu'à Constantin). — Inaptitudes des romains pour les sciences : elles restent stationnaires. — Coordination des travaux antérieurs : Ptolémée. — Progrès de l'astrologie. — Galien : la médecine et l'histoire naturelle.

Période de décadence. — Origine de l'alchimie ; son caractère mystique ; influences gnostiques mêlées aux dogmes de la philosophie hellène. — Tendances pratiques de l'enseignement classique des mathématiques : les ingénieurs de Justinien. — Maintien de cet enseignement sous l'empire byzantin.

Deuxième trimestre.

Période barbare. — Des connaissances pratiques conservées en Occident après la chute de l'empire romain ; arpentage ; comput ecclésiastique. — Réveil des études au temps de Charlemagne. — Isignifiance des résultats obtenus jusqu'à l'établissement de relations avec les arabes.

La science arabe. — Développement scientifique de la civilisation arabe ; défaut d'originalité dans ce développement : son importance pour la transmission de la science grecque à l'Occident latin. — Mathématiques et astronomie. — Alchimie et médecine.

Origine des chiffres modernes : leur introduction en Occident ; notions sur les procédés de numération écrite chez les Grecs et les Romains ; le calcul sur l'abacus. — Gerbert.

Moyen âge. — L'enseignement dans les universités : les sciences sont réduites au rang d'arts et subordonnées à la théologie, considérée comme la science véritable. — Triomphe des doctrines d'Aristote relatives à la conception de la nature. Traductions d'ouvrages scientifiques faites sur l'arabe, sur le grec.

Renaissance. — Retour définitif aux sources grecques et réveil des tendances vers la science pure. — Progrès de l'enseignement mathématique : Tartaglia, Cardan. — Premières oppositions aux doctrines d'Aristote. — Hypothèse de Copernic renouvelée d'Aristarque de Samos. — Les éléments des corps d'après les alchimistes : Paracelse.

XVIIe siècle (première moitié). — Viète : Invention de l'algèbre moderne. — Napier : les logarithmes.

Lutte définitive contre l'enseignement scolastique. — Bacon : glorification des sciences : Appel à l'expérience. — Galilée : découverte des principes fondamentaux de la dynamique ; les lunettes astronomiques. — Kepler : ses lois ; comment elles ont fait triompher l'hypothèse de Copernic et ont conduit à la découverte de la gravitation universelle. — Gilbert : le magnétisme. — Garvey : la circulation du sang.

Introduction d'une nouvelle conception rationnelle et générale de la nature. — Descartes : universalité de ses travaux. — Tentatives distinctes de la science, antérieures ou contemporaines : Gassendi. — Triomphe de la physique corpusculaire. — Recherches expérimentales. — Découverte de la pesanteur de l'air ; Pascal : principe de l'hydrostatique.

Troisième trimestre.

XVIIe siècle (seconde moitié). — Fondations des académies des sciences et des observatoires ; leur influence sur le progrès.

Achèvement de la découverte des principes de la dynamique : Huygens ; Newton. — L'optique mathématique.

XVIIIe siècle. — Progrès des mathématiques et de l'astronomie ; indicacation de la nature des problèmes que l'on arrive à résoudre ; Clairaut et la comète de Halley. — L'aplatissement de la terre aux pôles : confirmation définitive des théories de Newton.

Abandon des hypothèses de la physique corpusculaire : les actions à distance ; les fluides. — Franklin : le paratonnerre. — Stahl et la théorie de phlogistique. — Lavoisier : fondation de la chimie moderne.

Histoire naturelle. — Progrès accomplis depuis la Renaissance. — Les tentatives de classification : Linné ; Jussieu. — Buffon — Cuvier : la paléontologie et l'histoire des révolutions du globe.

Applications de la science. — L'encyclopédie de Diderot et d'Alembert.

Tentative pour soumettre aux méthodes scientifiques l'étude des questions sociales. — Origine de l'économie politique : la statistique.

XIXe siècle. — Indications sur les tendances actuelles, de plus en plus abstraites, des mathématiques pures. — Nouveaux résultats pratiques obtenus : découverte de la planète Le Verrier.

Applications des mathématiques à la physique. — Nouvelles hypothèses générales : Fresnel : l'éther. — Joule : l'équivalent mécanique de la chaleur. — De l'unité des forces physiques.

Développement de la chimie. — Evolution des idées générales dans cette science. — Les équivalents : la doctrine atomique : la thermo-chimie. — L'analyse spectrale : ses applications à l'astronomie.

Histoire naturelle et biologie. — Bichat. — Claude Bernard. — Pasteur. — Progrès de la médecine. — Darwin ; la doctrine de l'évolution.

Applications industrielles. — Chemins de fer : télégraphe et téléphone. — Chimie agricole et industrielle.

La philosophie scientifique. — Auguste Comte : sa conception des sciences ; leur classification. — La sociologie. — Nouveau but proposé à la philosophie : règles de conduite de la société humaine à déterminer par l'application de méthodes scientifiques.

Paul Tannery (Paris).

FRANCE

Circulaire,

adressée par M. le Vice-Recteur de l'Académie de Paris à MM. les Inspecteurs d'Académie, Proviseurs, Principaux et Professeurs de Mathématiques et de Physique du ressort.

Paris, le 1er octobre 1906.

Les rapports présentés au Conseil académique, en sa session d'été, sur l'enseigement des sciences mathématiques et des sciences physiques, contiennent des constatations et des observations qu'il me parait utile de porter à la connaissance des professeurs.

Mathématiques.

Dans les classes littéraires, cet enseignement est faible, très faible même. Cette faiblesse est-elle imputable au petit nombre d'heures dont les professeurs de mathématiques disposent ? Un certain dédain des élèves n'y est-il pas, comme autrefois, pour quelque chose ? Dans ce cas, ce serait aux professeurs à réagir. Leur est-il impossible de faire entendre, par un choix judicieux d'exemples et d'applications, de quelle utilité est, dans la vie de chaque jour, une certaine connaissance des éléments des mathématiques, même pour ceux dont l'activité n'aura pas besoin de la science comme instrument ? Leur est-il impossible également, surtout en philosophie, de faire voir à leurs élèves, par un enseignement clair, bien dépouillé, réduit à l'essentiel, de quel prix sont ces éléments pour cette culture plus complète des esprits, à laquelle visent les programmes de 1902 ? Dans ces classes, qui n'aboutissent pas à des concours, je ne saurais trop recommander aux professeurs de s'attacher plus à l'esprit qu'à la lettre des programmes, de se dire qu'ils auront rempli leur tâche si, de leur enseignement, leurs élèves emportent un certain nombre de notions positives, bien assises, nettement comprises et adhérentes à leurs esprits.

Dans les classes scientifiques, tout autres sont les résultats. Les changements de points de vue et de méthodes, inaugurés avec les nouveaux programmes, commencent à faire sentir leurs effets, qui sont d'heureux effets.

En Spéciales, au témoignage de M. l'Inspecteur d'Académie rapporteur, la situation est bonne. D'une manière générale, non seulement le rôle de l'analyse s'y est accru en vue des applications pratiques, mais l'esprit de la géométrie analytique s'y est transformé ; plus rare s'est faite l'intervention des formules générales, plus fréquent l'appel à l'initiative des élèves. Certes les grandes théories restent un des honneurs de l'esprit humain, et la joie de ceux qui ont la passion du savoir. Mais pour ceux, et ce sont les plus nombreux, qui ont besoin de développer avant tout leur capacité de pouvoir, qui seront appelés à résoudre au jour le jour, au mieux d'intérêts positifs, les problèmes de l'action, quelle préparation vaut le mieux : celle qui aborde autant que possible chaque question en elle-même, ou celle qui fait dépendre la solution d'un problème relativement facile d'une théorie trop puissante pour la majorité des jeunes esprits ?

D'une façon plus particulière, quelques initiatives ont paru dignes d'être notées et signalées. Ainsi, dans un lycée de Paris, un professeur a renoncé à la division traditionnelle des cours en Algèbre et Géométrie analytique, et a incorporé les applications géométriques au cours d'Analyse. Dans un autre lycée, l'enseignement de la Géométrie dans l'espace est illustré par des modèles en plâtre et en fil. C'était le vœu de la Commission interministérielle qui a préparé les programmes de Spéciales, qu'il en fût partout ainsi. Cette pratique, dont l'expérience a prouvé la valeur, ne saurait être trop recommandée.

L'ancienne classe d'Élémentaires supérieures a été transformée l'an dernier en Spéciales préparatoires. Les résultats n'ont pas répondu à notre attente. Trop d'élèves, qui eussent fait volontiers un an d'Élémentaires supérieures, se sont imaginés qu'ils avaient intérêt à entrer d'emblée dans une classe préparant à l'examen, et les effectifs de la classe nouvelle ont été sensiblement inférieurs à ceux de la classe qu'elle remplaçait. Il y a là une erreur contre laquelle il faut réagir : les professeurs, en maintenant rigoureusement à cette classe le caractère qu'elle doit avoir, et qu'ont nettement défini les instructions de l'an dernier ; les administrateurs, en démontrant aux élèves et à leurs familles qu'un an passé en Spéciales préparatoires, à s'initier, en toute liberté, aux méthodes, aux questions générales, est pour tous la meilleure préparation à la classe de Spéciales proprement dite, à l'esprit et aux procédés de la science, et pour beaucoup le seul moyen d'éviter la surcharge, le désarroi et la chute.

Les classes de Mathématiques, anciennes Élémentaires, sont généralement bonnes. On y fait moins de Géométrie que par le passé, et plus d'Algèbre. Mais on a rompu la barrière qui autrefois y limitait l'algèbre aux équations du second degré. Les bons élèves sont devenus capables de traiter les problèmes de physique conduisant à des équations du 3e degré. Ce sont là des résultats satisfaisants. Mais il faut constater qu'un très grand nombre des élèves de cette classe, malgré leur diplôme de bachelier, n'apportent pas un bagage suffisant de connaissances. Il faut revenir sur beaucoup trop de questions, reprendre presque entièrement la trigonométrie, alors qu'une revision devrait suffire, s'assurer que des élèves auxquels on va enseigner la dynamique connaissent suffisamment la cinématique. C'est aux professeurs des classes antérieures, Première et Seconde, qu'il appartient de réagir contre cet état de choses. Je compte sur leur dévouement à leurs élèves, et sur leur entente des intérêts de l'enseignement public.

Dans les divisions de Première et de Seconde, les effectifs sont nombreux. Presque partout on se plaint qu'ils le soient trop. Nombre d'élèves se trompent sur leurs goûts, sur leurs aptitudes au sortir du 1er cycle, et s'engagent à la légère dans la voie scientifique, sans se douter qu'ils entrent dans une impasse, et qu'au bout les attendent des échecs irréparables. C'est un courant contre lequel il est, je le sais, difficile de lutter, dans une société où grandit chaque jour l'importance de l'industrie. Toutefois, c'est notre rôle, c'est notre devoir, à l'instant décisif des options, d'éclairer, autant que faire se peut, les familles sur les aptitudes de leurs enfants, et sur les chances de succès qui les attendent dans telle voie ou dans telle autre.

Dans l'ensemble, les divisions D semblent moins bonnes que les divisions C. L'habitude de réfléchir et de raisonner y est moins solide ; on y donne trop à la mémoire. Je le signale aux professeurs de ces divisions, persuadé qu'ils s'appliqueront à provoquer chez leurs élèves un effort personnel et soutenu de réflexion.

Je note enfin, en ce qui concerne ces classes, que des exercices d'arpentage ont été faits avec succès dans divers lycées et collèges des départements. La pratique est de celles qui méritent d'être généralisées.

J'arrive aux classes du premier cycle. La lettre et l'esprit des programmes et des instructions de 1905 n'y sont pas encore assez généralement observés. Je prie MM. les professeurs de se reporter à ces documents, de s'en bien pénétrer et de redoubler d'ingéniosité pour les appliquer. Ce qu'on leur demande, ce qu'eux-mêmes avaient demandé, en très grand nombre, est fort simple. De même que le premier contact de l'enfant avec les choses de l'arithmétique se fait par l'expérience, par le mécanisme des opérations et la résolution des problèmes faciles, non par le dogmatisme, la logique pure et la démonstration de vérités abstraites, on a pensé que ce même enfant, encore qu'il fût déjà un peu plus mûr, ne pouvait s'intéresser aux choses de la géométrie, que s'il les voyait sortir et se dégager peu à peu de l'étude des formes usuelles et de la considération des mouvements familiers. En provoquant ce changement de méthode, nos professeurs étaient d'accord avec d'éminents géomètres. Dès 1765, dans la préface de ses *Eléments de Géométrie*, Clairaut demande que l'on n'impose pas aux débutants la fatigue et l'ennui d'une rigueur inutile. Et en 1846, Jacobi écrivait : « La rigueur des démonstrations géométriques est une invention des Grecs, qui fait le plus grand honneur à l'intelligence humaine : mais elle n'est une nourriture convenable et saine que pour les jeunes gens dont l'esprit a déjà une certaine maturité : alors seulement, la géométrie logique est, comme la grammaire, une véritable éducation de l'intelligence. »

Il s'agit donc de faire intervenir l'expérience dans l'enseignement de la géométrie ; de ne pas jeter, de prime saut, l'enfant dans le monde des abstraits. Certes on ne doit pas s'interdire de le soulever un peu, mais à condition qu'il puisse toujours se remettre sur pied.

C'est aux professeurs à discerner suivant les questions traitées, suivant la force relative de leurs élèves, dans quels cas l'expérience seule suffit, dans quels autres il faut faire appel au raisonnement. Il n'est pas d'enseignement plus difficile, qui exige des professeurs plus d'attention, plus d'initiative, plus d'invention, et ceux qui le dédaigneraient, comme inférieur, n'en comprendraient ni l'utilité, ni la portée.

Je le répète, il y faut beaucoup d'invention, et une invention qui s'adapte aux circonstances. Aussi les prescriptions détaillées sont-elles moins de mise là que partout ailleurs. Toutefois, à titre d'indication et d'exemple, voici comment s'explique M. l'Inspecteur d'Académie rapporteur : « Les instructions recommandent de faire un appel constant, pour l'enseignement de début de la géométrie, à la notion de mouvement, et, en particulier de lier le parallélisme à la notion expérimentale de translation, l'étude des droites et plans perpendiculaires à celle de rotation. Voici pour ma part comment je comprends les choses. Prenons par exemple la théorie des parallèles qui est celle dont on a le plus discuté. Je trouve excellent d'introduire cette notion par le glissement d'une équerre le long d'une règle, de la rendre ainsi familière aux élèves, de leur en donner le sens et la possession intime ; mais je ne crois pas qu'il convienne de fonder sur l'idée de translation la *définition* des parallèles que l'on doit apprendre aux élèves. Plus tard, en effet, quand ils feront de la géométrie logique, ils fonderont l'étude de la translation sur la définition euclidienne de la parallèle, et il me semble très imprudent de mettre dans un jeune cerveau, sous la forme lapidaire d'une définition, une idée qu'il ne pourra conserver plus tard ».

Sciences physiques.

A peu près partout, cet enseignement est dans un état satisfaisant. Il est en progrès constant. Les exercices pratiques commencent à porter leurs fruits, et ces fruits récompensent le zèle des maîtres. L'esprit physique et le sens de la réalité se développent chez les élèves. Un professeur de physique en Spéciales en témoignait récemment. Ses élèves, disait-il, commencent à comprendre la relation qui doit exister entre la précision d'une mesure et le résultat numérique qui la traduit, entre une formule algébrique et la réalité : et il ajoutait qu'à cet égard il était moins avancé qu'eux lorsqu'il passait le concours d'agrégation, et que de bonne foi il donnait la mesure d'un indice de réfraction avec 4 décimales, alors que 2 tout au plus pouvaient être exactes. Ce fait encore en témoigne également. Dans tel lycée, il est arrivé plusieurs fois que des élèves de Mathématiques ont indiqué à leurs professeurs d'heureuses modifications à tel détail pratique d'un dispositif adopté.

L'effort du personnel a été considérable ; il a été fructueux. Il ne reste plus çà et là, dans des collèges, que quelques réfractaires qui ne peuvent se résoudre à changer leurs habitudes et à troubler la quiétude de leurs dernières années de service.

Presque partout les installations matérielles ont été améliorées et mises en accord avec les nécessités nouvelles de l'enseignement. Là où elles sont encore insuffisantes, MM. les proviseurs et principaux redoubleront d'efforts pour y remédier.

Le Conseil académique a entendu avec grand intérêt les observations de M. l'Inspecteur d'Académie rapporteur sur les compositions. Sans doute on ne saurait juger sur elles seules l'enseignement d'un professeur. Mais elles sont un indice qui n'est pas à négliger. Elles montrent si les applications numériques sont l'objet des préoccupations des professeurs, si les problèmes sont judicieusement choisis, s'ils sont en rapport avec la réalité des faits et non pas seulement avec la vraisemblance. Or plus d'une fois l'examen des compositions de la dernière année scolaire a révélé dans l'énoncé des questions de l'imprécision, de l'invraisemblance, parfois même de l'incorrection, de sorte que la solution, logiquement correcte, aboutissait à des irréalités, à des impossibilités. En physique, c'est déplorable. Car il importe avant tout de donner à l'élève le sentiment net et inébranlable qu'il est là dans le domaine des faits, et non dans celui des abstractions et de l'imagination.

On a noté aussi la façon défectueuse dont sont posées certaines questions de cours. Tels professeurs n'ont pas encore pu se déshabituer d'un langage inharmonique avec les méthodes fondamentales de l'enseignement. On demande encore trop souvent aux élèves d'*énoncer* d'abord une loi, puis de la *vérifier*, alors qu'elle n'est pas la conséquence d'une autre loi. C'est d'*établir* la loi qu'il devait s'agir dans ce cas, et l'énoncé n'en devait venir sous la plume de l'élève que comme conclusion des expériences rapportées.

Par contre, et le procédé a paru fort bon, on a constaté que, dans certains lycées, le professeur demande quelquefois aux élèves, comme questions de cours, de relater une manipulation qu'ils ont faite, sur un sujet de mesure déterminé ; — inversement de tirer d'une question de cours un sujet de manipulation qu'ils réaliseront ensuite. Ce sont là d'excellentes choses, bien dans l'esprit de l'enseignement expérimental de la physique, et qui ont cet effet de provoquer l'initiative des élèves.

De ces constatations se dégagent d'eux-mêmes les conseils suivants :

Dans les classes préparatoires aux écoles et aux baccalauréats scientifiques, les compositions doivent être naturellement une préparation immédiate aux épreuves correspondantes des concours et des examens. Par suite, en dehors d'une question de cours, s'il y a lieu, elles doivent toujours comprendre des problèmes du genre et de la force de ceux qui seront donnés aux élèves en fin d'année.

Les questions de cours ne doivent pas d'ailleurs être bornées, en général, à la simple reproduction de tel ou tel point du programme. Il y a mieux à faire. Il convient, par le choix et l'énoncé des questions, d'habituer peu à peu les élèves depuis la classe de Première jusqu'à celle de Spéciales, à *composer* un sujet au sens propre du terme. Ainsi comprise, la composition de sciences physiques concourt à l'éducation générale.

Il y a mieux à faire en un autre sens encore. Un sujet tiré purement et simplement du programme, et donné à reproduire sous la forme même où il a été enseigné, n'est le plus souvent qu'une prime à la mémoire. On pourrait s'assurer que le cours a été compris et non pas simplement retenu, en proposant aussi souvent que possible des questions de cours elles-mêmes, sous la forme d'exercices numériques. Par là l'élève ferait la preuve qu'il sait se servir de ce qu'il a appris ; et n'est-ce pas là une des fins essentielles de tout enseignement ?

Quant aux problèmes, il ne suffit pas, en général, qu'ils soient de simples applications numériques de formules de cours. Ils doivent exiger une analyse préalable, et pour qu'elle soit possible, être énoncés en termes complets et parfaitement clairs. Il ne suffit pas qu'ils renferment toutes les données nécessaires à la solution. Il est indispensable que ces données soient bien choisies, c'est-à-dire qu'elles soient conformes tout à la fois à la précision des mesures et à la réalité des faits connus.

Dans les divisions littéraires et dans les classes du 1er cycle, où l'on ne peut donner de problèmes proprement dits, qui exigeraient une faculté d'analyse étrangère aux élèves de cette catégorie et de cet âge, les applications numériques restent importantes.

Enfin, il importe que les compositions ne soient jamais d'une longueur démesurée, et que toujours, et très exactement, elles soient proportionnées à l'âge des élèves, et au temps dont ils disposent. L. Liard.

Cours universitaires.

Semestre d'été 1907.

(Suite).

ANGLETERRE

Oxford; *Université*. Lecture List for *Easter and Trinity terms*. (Course begins 29 April). — W. Esson : Comparison of analytic and synthetic methods in the theory of conics, 2 ; Informal instruction in geometry, 1. — E. B. Elliott : Theory of functions, 3. — A. E. H. Love : Waves and sound, 3. — A. L. Dixon : Calculus of variations, 1. — H. T. Gerrans : Line geometry, 2. — A. E. Jolliffe : Invariants and covariants of conics, 1. — P. J. Kirkby : Higher plane curves. 3. — J. W. Russell : Rigid dynamics, 2. — E. H. Hayes : Electrostatics. 1. — R. F. McNeille : Algebra, 2. — C. E. Haselfoot : Series and continued fractions, 2. — A. L. Pedder : Spherical trigonometry, 1. — C. H. Sampson : Solid geometry, 2. — C. H. Thompson : Differential equations. 2.

AUTRICHE-HONGRIE

Agram; *Université*. — Varicak : Calcul intégral, 3 ; Calcul des variations, 3 ; Séminaire, 2. — Segen : Geométrie synthétique des sections coniques, 2 ; Géométrie descriptive, méthodes de projection, 2. — Majcen : Géométrie synthétique des surfaces et des courbes du 3e ordre, 3 ; Géométrie analytique des courbes planes, 4. — Bohnicek : Equations algébriques, 4 ; Introduction à la théorie des nombres, 2.

Graz : *Universität*. — Dantscher : Analyt. u. projekt. Geometrie der Ebene (Fortsetzung) 5 ; Uebungen im mathematischen Seminare 2. — Streissler : Angewandte konstruktive Geometrie, 2. — Wassmuth : Mechanik nicht starrer Körper (Elastizitätstheorie, Hydrodynamik und Akustik), 5. Uebungen im mathem.-physik. Seminar, 3. — Hillebrand : Praktische Astronomie. 3, Sphärische Astronomie, II. Teil, 2

Innsbruck; *Universität*. — Gmeiner : Doppelintegrale, 3 ; Algebra. 2 ; Uebungen im mathem. Seminare, 2. — Zindler : Ueber Differentialgleichungen, 6 ; Mathem. Seminar, 1. — Menger : Elemente der projektiven Geometrie, 2. — v. Oppolzer : Die Methode der kleinsten Quadrate, 1 : Die Dioptrik des Fernrohres, 1 ; Uebungen in der Messung der Polhöhe. 1.

Prague; *Deutsche Universität*. — Pick : Differential- und Ingegralrechnung, 3 : Grundbegriffe der Analysis, 2 : Seminar, 2. — Grünwald : Analyt. Geometrie, II. 5. — Weinek : Theorie des Aequatoreals und seiner Mikrometer, 3 ; Uebungen im astronom. Beobachten, 2 ; Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen, 1. — Oppenheim : Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung nebst Anwendung, 2. — Lippich : Theorie des Potentials nebst Anwendungen, 3 ; Elementare Mechanik, 2 ; Seminar, 2.

Vienne ; *Universität*. — v. Escherich : Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. Bestimmte Integrale und Variationsrechnung, 5 ; Proseminar ; Seminar. —

MERTENS : Diff.- und Integralrechnung, 5 ; Uebg. hierzu, g. Uebgn. im math. Seminar, 2 ; Uebg. im math. Proseminar, g. — WIRTINGER : Elliptische Funktionen, 5 ; Mathem. Statistik, 3 ; Mathem. Seminar ; Mathemat. Proseminar. — KOHN : Synthetische Geometrie, 4 ; Uebg. ; Differentialgeometrie I., 2. — TAUBER : Versicherungsmathematik, 4 ; Invaliditätsversicherung, 2. — BLASCHKE : Einführung in die mathemat. Statistik, II. Teil, 3. — PLEMELY : Funktionentheorie, 3. — HAHN : Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, 3. — HANNI : Unendliche Doppelreihen und deren Verwendung in der Funktionentheorie, 2. — WEISS : Praktische Astronomie, 4. — HEPPERGER : Astrophysik, 3 ; Ueber Doppelsterne, 2. — SCHRAM : Ueber die Zeitrechnung der Inder, 1. — HERZ : Die Elemente der darstellenden Geometrie und deren Anwendung auf das Kartenzeichnen, 4. — PREY : Die Schwereverteilung auf der Erde, 1.

BIBLIOGRAPHIE

H. ANDOYER. — **Cours d'Astronomie.** Première partie : Astronomie théorique. — 1 vol. in-8, autographié 221 p. ; 9 fr. ; Librairie Hermann, Paris.

M. Andoyer a réuni dans ce volume les notions fondamentales *d'Astronomie théorique* qu'il présente habituellement à ses étudiants de la Sorbonne. Tous ceux qui abordent l'étude de l'Astronomie trouveront dans son ouvrage un exposé à la fois clair, élégant et concis qui ne fera qu'augmenter leur intérêt pour l'Astronomie. Ils ne regretteront qu'une chose : c'est que le volume ne soit pas imprimé.

Voici la liste des matières traitées dans ce volume : Trigonométrie sphérique. — La Terre. — Coordonnées astronomiques ; Temps. — Changement de coordonnées. — Mouvement diurne. — Réfraction astronomique. — Parallaxe. — Aberration. — Notion de Mécanique céleste. — Précession et nutation. — Positions apparentes des astres. — Mouvement du soleil. Temps. — Mouvement géocentrique des planètes. — Mouvement de la lune et des satellites. — Eclipses.

J. BOUSSINESQ. — **Théorie analytique de la chaleur** mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement ; conductibilité des tiges, lames et masses cristallines ; courants de convection ; théorie mécanique de la lumière. — Un vol. gr. in-8°, XXXII, 625 p. ; Gauthier-Villars, Paris, 1903.

L'analyse, bien incomplète, du premier volume de l'ouvrage de M. Boussinesq a occupé quelques pages du numéro de juillet 1903 de l'*Enseignement*. Si nous voulions à présent donner une faible idée de la beauté du second volume et résumer seulement les questions nouvelles et importantes traitées par l'illustre auteur, il nous faudrait un espace bien plus grand encore ; car ce volume ne contient pas seulement l'étude des problèmes particuliers de la théorie de la chaleur, mais aussi un exposé à peu près complet d'une théorie mécanique de la lumière, entièrement originale et propre à l'auteur. Nous avons donc deux traités de Physique mathématique où l'auteur développe, en grande partie, des théories qui lui appartiennent et qui s'éloignent des théories déjà reçues. Elles mériteraient par conséquent une longue et minutieuse analyse, incompatible avec les notices, nécessairement courtes, que doit donner cette revue d'Enseignement. Aussi nous bornerons nous à faire connaître seulement les points essentiels de cette œuvre magistrale.

Nous avons déjà dit que dans le premier volume M. Boussinesq à déduites les équations fondamentales de la théorie, et, sauf les applications à l'armille, au refroidissement de la sphère, il n'a traité que des problèmes généraux. Le nouveau volume débute par des problèmes particuliers.

Il y a une différence entre les deux modes de refroidissement ou d'échauffement des corps par contact ou par rayonnement. En effet, si les deux problèmes sont régis par une même équation indéfinie, qu'il s'agit d'un état calorifique variable avec le temps ou d'un état permanent; les conditions à la surface sont au contraire très différentes. L'auteur examine avant tout des cas où l'on peut réduire le problème du rayonnement à celui plus facile du contact, et il fait l'application de ces considérations générales à cinq problèmes particuliers. (Leçons XXI à XXVI.) Le premier est celui du refroidissement par rayonnement d'un mur d'épaisseur indéfinie. L'auteur à l'aide d'une élégante application de l'intégrale de Fourier démontre la formule qu'avait donné Fourier et il en fait une intéressante application, toujours suivant Fourier, au refroidissement du globe. Les trois autres problèmes sont : celui de la dissipation de la chaleur en tous sens; celui de l'échauffement, par rayonnement, et celui de l'échauffement permanent mais inégal, par le rayonnement de sources extérieures constantes (problème de Poisson) pour le cas d'un mur. Vient enfin le problème de l'échauffement permanent d'une sphère par rayonnement; on le réduit aisément au problème intérieur de Dirichlet lorsqu'on connaît sur la surface une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et ceux de la dérivée normale. L'auteur en déduit en particulier la solution du second problème de Dirichlet sans la détermination préalable de la seconde fonction de Green.

Après la solution et la discussion savante de ces problèmes, où, comme toujours, l'auteur « ne fait intervenir l'analyse que dans la mesure où elle « semble nécessaire pour fixer l'intuition et arriver aux résultats numé-« riques », on revient encore à la théorie générale; c'est-à-dire à l'échauffement d'un corps homogène non isotrope, ou d'une plaque de faible épaisseur à faces parallèles ou d'une barre mince cylindrique, par une source calorifique de débit donné et n'occupant qu'une région très petite à l'intérieur du corps. Les expériences classiques de Senarmont sur la conductibilité des cristaux ont inspiré à la moitié du dernier siècle les recherches de Duhamel sur les corps à contexture symétrique. En 1867 l'auteur dans sa thèse de doctorat considéra le cas général; son analyse simplifiée fait l'objet des nouvelles leçons. En laissant de côté le cas d'un corps massif pourvu de sources calorifiques arbitrairement distribuées dans son intérieur, l'auteur cherche l'équation indéfinie régissant les températures moyennes le long d'une petite droite de la plaque, taillée suivant une orientation quelconque à l'intérieur d'un corps homogène. Cette équation, qui est aussi trouvée pour le cas d'une barre, contient les grandeurs des deux conductibilités principales; et l'auteur donne un moyen simple pour leur détermination, car il prouve que l'ellipse figurative des conductibilités principales de la plaque est l'intersection d'un ellipsoïde fixe avec le feuillet moyen de la plaque.

Par une simple transformation homographique le problème de l'échauffement, dans les trois cas, est réduit au même problème pour un corps isotrope et l'intégration est faite dans quelques cas particuliers. Celui d'un état permanent est surtout intéressant ; car l'équation indéfinie du problème, aux dérivées ordinaires, est du second ordre à coefficients constants dans les cas d'un corps massif ou d'une barre et, par conséquent, immédiatement intégrable. Dans le cas d'une plaque l'intégration se fait par la fonction J_0 de Bessel ; mais la détermination du rapport des deux constantes, afin que la solution soit finie à l'origine, est un problème assez difficile qui s'est présenté à Stokes dans ses recherches sur la résistance de l'air au mouvement d'un pendule. M. Boussinesq donne une remarquable simplification de la démonstration de Stokes.

Dans les trois dernières leçons l'auteur considère les phénomènes où coexistent des mouvements visibles de déformation ou de vibration et le mouvement calorifique. Plus particulièrement, l'auteur cherche avant tout l'équation indéfinie de la température pour un fluide en mouvement et à l'état élastique, en employant les principes de la thermodynamique ; c'est l'équation déjà trouvée par Fourier et, sous sa forme définitive et simplifiée, par Poisson. Pour ce qui regarde un milieu élastique déformé ou vibrant l'auteur démontre que l'équation indéfinie des températures est très sensiblement la même que si ses particules restaient immobiles dans leurs situations primitives ou moyennes d'équilibre. Enfin, les problèmes plus difficiles de la *convection calorifique,* c'est-à-dire des phénomènes produits autour d'un corps chaud immergé dans un fluide par des couches fluides avoisinantes, sont abordés dans deux cas extrêmes ; car la question en général est presque toujours rebelle à l'intégration. Le premier est celui des courants de convection au sein d'une masse fluide en repos ; bien que les intégrations ne semblent pas possibles, certaines lois de proportionnalité ou de similitude que l'auteur déduit des équations différentielles, donnent raison des lois de Dulong et Petit sur le pouvoir refroidissant des gaz. Le second cas, un peu plus simple, est celui où un corps chaud a sa chaleur emportée d'une manière permanente par un courant fluide rectiligne et uniforme indéfini en tous sens au sein duquel il est immergé. L'intégration est possible dans le cas où le corps a la forme d'un mince plateau limité d'un côté par un bord, indéfini suivant les autres sens et parallèles au courant. L'extension des mêmes lois approchées au cas de tout corps à courbures modérées, montre un pouvoir refroidissant en raison directe de la racine carrée de la vitesse générale du courant. Les résultats théoriques ont été confirmés par l'expérience.

Après avoir ainsi achevé la théorie analytique de la chaleur, deux mémoires assez longs et déjà annoncés par l'auteur, occupent la plus grande partie du volume.

Nous avons dit ailleurs que dans la quatrième leçon M. Boussinesq a considéré la résistance que les molécules des corps, regardées comme fixes, opposent aux vibrations de l'éther animé par une série d'ondes ; de là la nécessité de considérer, en général, la résistance opposée aux petits mouvements d'un fluide indéfini par un solide immergé dans ce fluide. C'est l'objet de la première note.

En 1786 les expériences de Du Buat (*Principes d'Hydraulique,* tome II) avaient montré que la masse d'un corps en mouvement dans un milieu résistant est plus grande que celle à l'état de repos; c'est-à-dire que le corps retient une partie du fluide adhérent à la manière d'une *poupe* et d'une *proue* fluides. Les travaux de Bessel (*Astron. Nachrich.* 1828), de Baily (*Phil. Trans.* 1832) confirmèrent ceux de Du Buat; Poisson (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, t. XI), Green démontrèrent théoriquement quelques-uns des résultats de Du Buat.

La théorie entière fut approfondie par Stokes qui a écrit un long et classique mémoire (*Mathem. and physic. Papers*, Vol. 3). M. Boussinesq a repris de nouveau toute l'analyse et il a encore obtenu quelques résultats nouveaux par une voie simple et nouvelle.

Quelques considérations élémentaires d'hydrodynamique permettent avant tout d'obtenir les équations indéfinies et à la surface pour la pression du fluide, sans frottements, et l'expression générale de l'impulsion exercée sur le solide immergé par le fluide ambiant. Cette impulsion a un potentiel de second degré par rapport aux accélérations relatives; on a donc à considérer seulement six coefficients de résistance (*terne tensorielle* suivant l'expression de M. Voigt), et il en résulte un système d'axes principaux pour tout solide immergé. Le calcul de ces coefficients peut se faire dans quelques cas particuliers; par exemple si le corps est une sphère, un cylindre de longueur indéfinie animé de translations connues normaux à son axe; un ellipsoïde et en particulier un disque ou une aiguille. Ces recherches occupent les deux premières parties du mémoire.

Les deux autres mettent en compte les frottements intérieurs du fluide en partant des équations de Navier. Le système d'équations indéfinies et à la surface auquel arrive l'auteur n'est pas de ceux dont on peut démontrer, en général, l'univocité de la solution. M. Boussinesq par un artifice, dont il a fait plusieurs applications dans le second mémoire, prouve cette univocité en faisant des hypothèses très générales. L'application à la sphère, la seule où l'intégration soit possible, dans le cas d'un mouvement pendulaire fait trouver une formule de Stokes. L'auteur enfin envisage la résistance du cylindre circulaire dans les deux cas d'une vitesse constante et d'un mouvement pendulaire. On trouve, dans ce dernier cas, que la résistance se compose de deux parties dont l'une est proportionnelle à la vitesse, l'autre à l'accélération du fluide.

La deuxième note, qui est divisée en neuf parties, occupe à elle seule plus que la moitié du volume; elle développe la théorie des ondes lumineuses contenue en germe dans les troisième et quatrième leçons. C'est un véritable traité sur la théorie mécanique de la lumière; malheureusement nous sommes forcés d'en dire peu de choses.

Tous ceux qui connaissent les belles leçons de Verdet sur l'optique physique (tome V et VI de ses *Œuvres* — voir aussi la traduction allemande de Exner) auront une idée bien claire du développement historique des nombreuses théories formulées pour les divers chapitres de l'optique, ayant pour base le principe des ondulations, et des difficultés que l'on y rencontre encore. Kirchhoff, par sa découverte de la formule analytique du principe de Huygens, a réussi à exposer d'une manière originale et uniforme la partie générale de l'optique. Les difficultés, bien graves, interviennent lorsqu'on a à considérer les mouvements de l'éther dans un milieu ou isotrope ou birifringent. Il suffit de se rappeler les hypothèses de Helmholtz pour l'explication de la dispersion anomale; la recherche encore imparfaite des conditions à la surface dans la théorie de la réflexion et de la réfraction; etc.

Les idées de Boussinesq sur cette partie de la Physique mathématique datent de 1867 ; bien qu'elles aient été acceptées par de Saint-Venant et par plusieurs savants, surtout en Allemagne, elles n'ont pas eu la diffusion qu'elles méritaient. L'auteur est revenu bien tard sur ces idées ; leur développement, mis en harmonie avec ces dernières découvertes, est l'objet de cette seconde note.

L'idée maîtresse de l'auteur est l'*identité réelle* de l'éther des corps à l'éther du vide et l'*accroissement* apparent de sa densité par la résistance des molécules des corps. Les lois trouvées dans la première note assurent alors que les résistances totales, suivant les axes, opposées par la molécule à l'éther sont des fonctions linéaires des composantes de l'accélération avec six coefficients, comme pour un fluide. Des formules relatives à une molécule on trouve simplement, par voie de sommation, les trois composantes de la résistance totale opposée par la matière pondérable au mouvement de l'unité de volume de l'éther ; alors la théorie classique de l'élasticité permet d'écrire aussitôt les trois équations approchées aux dérivées partielles régissant le mouvement vibratoire lumineux. Ces trois équations expriment que si ξ, η, ζ sont les trois composantes du déplacement, θ la dilatation cubique,

$$\mu\left(\Delta_2\,\xi - \frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$

etc. sont des fonctions linéaires, avec six coefficients distincts, des dérivées secondes de ξ, η, ζ, par rapport au temps. Ces équations, que nous nommerons équations fondamentales, sont la base de toute la théorie mécanique.

Pour vérifier si elles suffisent à l'explication des faits, l'auteur cherche avant tout de fixer les idées sur la constitution d'un pinceau de lumière dans un milieu quelconque, en étudiant, dans toute étendue restreinte, la propagation par ondes planes dans le cas des vibrations polarisées rectilignement. Voici les résultats de l'analyse de l'auteur, en s'arrêtant à une première approximation 1. Les vibrations ne sont pas transversales (comprises dans les plans des ondes). 2. La relation entre la direction des ondes et leur vitesse de propagation est la même que dans la théorie de Fresnel. 3 L'orientation de la vibration de Boussinesq et de celle de Fresnel (rigoureusement transversale) sont dans un même plan mené suivant la normale à l'onde. 4. La surface d'onde est la même que dans la théorie de Fresnel. 5. La direction des vibrations est normale au rayon.

Dans une seconde approximation, l'auteur tient compte de la lente variation des déplacements aux divers points d'une même onde, en augmentant les déplacements de petites fonctions. Alors, d'une manière toute différente que celle suivie par Kirchhoff, on peut réussir à la définition d'un rayon lumineux ; on peut prouver en effet que le sens suivant lequel le mouvement de l'onde plane se propage sans variation sensible est le sens même du rayon aboutissant au point de contact de cette onde avec l'enveloppe de toutes celles qui seraient parties en même temps qu'elle de l'origine, mais dans d'autres directions. De manière que, suivant l'auteur, « l'hypothèse des vibrations rectilignes inévitable et féconde à une première approximation doit être laissée de côté à une approximation plus haute ». Cette théorie de M. Boussinesq est très profonde ; mais elle lui fait défaut, il faut le reconnaître, toute l'élégance de la théorie de Kirchhoff (*Mathem. Optik* — 12, 13 Vorles) ; mais cela est toujours inévitable lorsqu'on pousse au loin les approximations.

Après avoir reconnu que ses équations paraissent propres à représenter la propagation de la lumière dans un corps homogène, l'auteur veut voir si elles réussiront aussi bien à exprimer ce qui se passe à la surface de séparation de deux corps homogènes distincts. C'est, comme on le voit, le problème de la réflexion ou de la réfraction (3me partie). Il est bien connu que toute la difficulté de la théorie consiste dans la recherche des conditions à la surface séparative. L'hypothèse, commune aux autres problèmes de l'élasticité, de l'égalité des pressions supportées par les deux faces de la couche de transition n'est plus vraie. L'auteur se rapproche ici aux idées de Cauchy, et il démontre que sur la surface de séparation la rotation moyenne des particules (condition de Cauchy) et leur déplacement tangentiel (condition de Fresnel) sont les mêmes par la grandeur et la direction, dans deux milieux contigus, en tous les points de leur surface limite. Ces quatre conditions définies, ne sont au fond qu'une simplification des équations indéfinies des mouvements vibratoires de l'éther, considérées à l'intérieur des couches de transition. Ces conditions et les équations indéfinies fondamentales suffisent pour trouver les lois de Fresnel pour la réflexion et réfraction vitreuse ; pour expliquer, en suivant M. Potier, les particularités qu'elle présente aux environs de l'angle de polarisation ; pour la réflexion cristalline, métallique, etc.

L'auteur applique sa théorie à l'explication simple de l'entraînement des ondes, et à la généralisation de quelques-unes des propriétés précédentes aux milieux non symétriques.

Ayant achevé l'étude des phénomènes lumineux dans une première approximation, l'auteur passe à étudier des particularités plus délicates, et en première ligne il considère le phénomène de la dispersion. Sa théorie, on le sait, a été acceptée et en partie modifiée par Sellmeier et par Helmholtz.

L'ensemble des molécules pondérables exerce des actions, à des distances relativement grandes, sur l'unité de masse d'une particule d'éther. Ces actions admettent un potentiel de second degré par rapport aux composantes de déplacement. Alors, dans le cas d'une lumière simple ou d'un mouvement pendulaire, rien ne sera changé aux lois du mouvement ; mais les divers coefficients spécifiques exprimant les propriétés d'un même corps varieront un peu et, en général, inégalement avec la période ou la longueur d'onde. L'étude de la dispersion dans les corps en repos ou en mouvement, au moyen des équations fondamentales, conduit tout de suite à la formule de Cauchy. La participation sensible de la matière pondérable au mouvement est ensuite la base de l'explication de la dispersion anomale, surtout au voisinage des raies d'absorption. La résistance spéciale de certaines molécules donne l'explication de la polarisation rotatoire, etc. Mais nous ne pouvons pas nous arrêter à toutes les particularités de cet immense ouvrage ; nous n'insistons guère sur les septième et huitième parties qui traitent de la propagation d'un pinceau de lumière dans un milieu hétérogène, du principe de Fermat, de la double réfraction elliptique, de la polarisation rotatoire magnétique, etc.

La transmission des mouvements non pendulaires dans les cas les plus simples de non homogénéité de leurs équations différentielles est l'objet de la neuvième et dernière partie de ce long traité. Les déplacements, dans le cas de propagation de mouvement dans l'éther d'un corps homogène et isotrope-symétrique, absorbant ou dispersif des longues radiations, dans l'hypothèse que la dilatation cubique soit nulle, satisfont à trois équations de même forme qu'on peut réduire à deux formes seulement, exprimant que Δ_2 de la fonction inconnue est une fonction linéaire de la même fonction et de la dérivée seconde par rapport au temps ; ou bien une fonction linéaire de sa dérivée première et seconde. Initialement on donne la valeur de la fonction et de sa dérivée en tout point du corps. L'auteur fait une étude approfondie de ces équations, dont il démontre l'univocité de la solution par une méthode simple et originale ; et il en tire les conséquences les plus intéressantes ; par exemple la propagation uniforme du front de l'onde, le calcul (Hugoniot) de la vitesse de propagation, etc.

Le mémoire contient encore une dixième partie où l'auteur a réuni une foule de compléments sur divers points de la théorie qu'il a exposée.

M. Boussinesq dans la préface au volume dont nous avons cherché de faire ressortir l'importance et l'originalité, observe, très justement, que « les questions y sont présentées autant que possible d'une manière concrète, à la fois géométrique et physique ». C'est cela précisément, comme nous avons déjà écrit, un des traits les plus caractéristiques de cette œuvre profonde, qui est digne du pays qui a vu naître les œuvres de Fourier et de Poisson.

R. Marcolongo (Messine).

E. Czuber. — **Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung.** II, mit 87 Fig. ; zweite, sorgfältig durchsehene Auflage. — 1 vol. relié, in-8° 532 p. ; 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

La première édition des Leçons de Calcul différentiel et intégral a eu un succès qui ne peut surprendre ceux qui connaissent le talent d'exposition de l'auteur et le soin qu'il apporte à ses ouvrages.

Elles constituent un excellent cours accompagné de nombreux exemples et problèmes dans lesquels il est tenu compte des besoins des mathématiques appliquées à la mécanique et à la physique.

Rappelons que le tome II comprend les bases du calcul intégral, les propriétés et les applications des intégrales indéfinies, des intégrales définies, des équations différentielles et du calcul des variations.

E. Desportes. — **Eléments de Géométrie descriptive,** nouvelle édition entièrement refondue, conforme aux programmes officiels du 27 juillet 1905 ; classe de première C et D, et de mathématiques A, B. — 1 vol. gr. in-8°, 332 p. ; 4 fr. ; Arm. Colin, Paris.

On sait que les nouveaux programmes français sont caractérisés par l'importance justement rendue à la *Géométrie cotée* ; il est prescrit de commencer l'étude de la Géométrie descriptive par celle des projections cotées. L'auteur a adopté cette marche, et il consacre d'abord un premier chapitre à la Géométrie cotée en ayant constamment recours au calcul numérique.

Un cours élémentaire de Géométrie descriptive doit nécessairement se rattacher directement à la Géométrie de l'espace. L'auteur en tient compte le plus possible en donnant pour chaque problème élémentaire, une méthode générale de solution fondée sur la conservation directe des figures de l'espace. C'est là un principe qu'on ne saurait assez inculquer aux élèves afin de *les habituer à voir et à chercher dans l'espace.*

Pour donner une idée de l'étendue des matières traitées à ceux qui ne connaissent pas les programmes français, nous ajouterons que l'ouvrage comprend l'ensemble des éléments de Géométrie descriptive concernant la droite, le plan, les prismes et les pyramides, les sections planes et les développements des polyèdres et des surfaces courbes, la sphère et les problèmes concernant les ombres.

A. Guillemin. — **Tableaux logarithmiques A et B** équivalant à des tables de logarithmes à 6 et à 9 décimales, avec notice explicative donnant la théorie et le mode d'emploi des tableaux. — 1 vol. in-8, 4 fr. Félix Alcan, éditeur, Paris.

Le premier intérêt, intérêt matériel mais incontestable, qu'offre ce travail, est la faible dimension et la clarté précise des tableaux dans lesquels, grâce à une ingénieuse disposition, il a fait rentrer tous les éléments de calcul des tables de 6 et de 9 décimales, éléments qui, jusqu'à présent, faisaient l'objet d'études volumineuses et compliquées.

Le second point important de ce petit livre est que son emploi n'entraîne pas aux longues opérations de calcul nécessitées par les tables ordinaires ; l'on n'a plus besoin, pour compléter les éléments de logarithmes destinés à être additionnés, de se livrer à des multiplications sur leurs différences tabulaires. Les interpolations de nouveaux termes entre deux consécutifs de tables se réduisent à des additions.

Plus de clarté, moins de travail matériel, moins de causes d'erreurs, tels sont les avantages que présentent ces nouveaux tableaux logarithmiques qui seront sans doute bien accueilli de tous ceux qui ont à s'occuper de calculs logarithmiques.

J. Hempel. — **Schattenkonstruktionen** für den Gebrauch an Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht. Mit 51 Textfiguren und 20 Tafeln praktischer Beispiele in Lichtdruck. — 1 vol. cart. in-8°, IV-60 p. ; 5 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Lorsqu'un élève passe pour la première fois de la Géométrie descriptive pure aux applications techniques, il éprouve toujours quelque peine à dessiner correctement les objets qu'il veut représenter. Habitué à utiliser des plans de projections bien définis, une ligne de terre donnée, des plans et des droites dont les traces sont connues, il est dérouté par l'absence de ces éléments ou par leur connaissance incomplète.

Cette difficulté n'est pas bien grande lorsqu'il s'agit de dessin de machines ou de construction civile, mais elle est très sérieuse dans le dessin d'architecture. Dans ce cas il est important, en effet, de se rendre compte de l'effet esthétique des objets représentés, ce qui nécessite le tracé des ombres ; or ce tracé est souvent compliqué et exige des dessinateurs une étude attentive.

L'auteur du présent ouvrage, professeur à la « Baugewerkschule » de Hambourg a eu l'occasion de voir combien la difficulté était sérieuse ; il nous y rend attentif dans sa préface comme suit :

« La plupart des problèmes sur les intersections, présentés dans les manuels de géométrie descriptive, doivent être considérés comme des exercices préparatoires pour les constructions compliquées d'ombres. Malheureusement la plupart des élèves ne s'en rendent pas compte. Du reste pour trouver les méthodes convenant à une construction exacte, il est de toute nécessité d'arriver à se représenter clairement les objets dans l'espace. Si l'élève ne fait qu'appliquer mécaniquement des procédés connus, il ne sera pas capable d'obtenir la solution la plus convenable (c'est-à-dire la plus simple et la plus juste) pour son épure.....

Le sentiment instinctif et sûr, résultant de la claire représentation de l'espace conduira plus rapidement au but que toute règle mathématique appliquée machinalement. »

L'ouvrage comprend vingt planches et un texte explicatif précédé d'un chapitre d'introduction résumant quelques propriétés essentielles de la théorie des projections.

Ces planches sont toutes consacrées à des applications ; mais celles-ci sont groupées d'une façon graduée. On passe ainsi en revue l'étude des ombres des corps suivants :

Corps *prismatiques* (Contreforts, corniches, escalier, cheminées) ; *cylindriques* (Base, rosaces, moulures, clochetons, arcade) ; *pyramidaux* (clochers, obélisque) ; *coniques* (clochers, toits de tourelles, piliers) ; *sphériques* (motifs ornementaux divers) ; *de révolution* (colonnettes, chapiteau, pendentifs, moulures). Les dernières planches sont réservées à des études de perspective avec ombres, ainsi qu'à des exemples où les rayons lumineux ne sont pas inclinés à 45°.

Dans toutes les épures l'auteur a adopté un système de hachures en deux intensités, distinguant seulement l'ombre propre de l'ombre portée, cette dernière étant naturellement la plus foncée. L'effet produit est très satisfaisant et donne bien l'illusion du relief. Les figures et les planches sont très claires et leur exécution irréprochable.

Paul Ad. Mercier (Genève).

Ernst Mach. — **Space and Geometry** in the light of physiological, psychological and physical inquiry, from German by Th. Mc Cormack. — 1 vol. de 148 p. ; The open Court publishing Company ; Chicago.

Les trois essais qui composent ce volume ont paru dans *The Monist* en avril 1901, juillet 1902 et octobre 1903 et ont été, en grande partie, incorporés dans un ouvrage récemment publié en allemand par l'auteur sous le titre : *Erkentniss und Irrthum : Skizzen zur Psychologie der Forschung.*

Leur objet consiste dans une application à la Géométrie de la théorie *subjectiviste* (ou *idéaliste*) de la Connaissance ; mais, tandis que cette théorie sous la forme purement intellectualiste, qu'elle affecte généralement, échappe assez facilement à la critique positive par son absence totale de signification, c'est dans la physiologie humaine que M. Mach n'hésite pas à chercher la raison d'être des conceptions géométriques.

On commence par étudier un « espace physiologique, distinct de l'espace géométrique » (c'est le titre du premier article), et qui comprend bien d'autres « espaces », tels qu'un *espace* visuel, un *espace* tactile, etc., s'accordant tous plus ou moins défectueusement entr'eux et avec l' « espace géométrique » (on ne serait pas fâché de connaître, dans ces conditions, la nature des éléments constitutifs de ce dernier espace). L'auteur omet d'ailleurs d'élucider ce qu'il entend par « espace ».

Les corps sont des « complexes de sensations » (en quoi se distinguent-ils alors des apparences produites par l'hallucination ?) ; quant aux trois dimensions, elles sont dues à l'existence, chez les vertébrés, de trois directions « cardinales ». La subjectivité de la Connaissance fait l'objet des affirmations les plus hardies : « sans sensations de chaleur, pas de théorie de la chaleur » (l'existence des machines à vapeur conditionnée par la sensibilité de la peau humaine !) ; « sans sensations d'espace, pas de géométrie » (comme si les qualités locales des corps correspondaient à des sensations spéciales) ; « le caractère de notre activité est déterminé en accord avec la *place* des corps » (il est dit pourtant par ailleurs que cette place n'est qu'une « modalité de l'activité du sujet », alors ?). Tout cela est hors du bon sens et ne résiste pas à la plus superficielle confrontation avec un fait déterminé.

L'ouvrage contient aussi un exposé de la théorie générale des parallèles et se termine par un sommaire réunissant les résultats que l'on a voulu faire ressortir, mais qui, ainsi résumés, ne nous ont pas paru plus clairs.

G. Combebiac (Bourges).

H. Mandart. — **Cours de Géométrie analytique** à deux dimensions (section conique). — 1 vol. in-8°, 574 p.; prix : 10 fr. ; Wesmæl-Charlier, Namur.

Cet ouvrage contient les matières que l'on trouve habituellement dans les traités classiques de Géométrie analytique. Il n'y a donc pas lieu d'en présenter une analyse détaillée. Voici les grandes divisions de l'Ouvrage :

I Du point, de la droite et du cercle (p. 1 à 124). — II Lignes du deuxième degré (p. 125-271). — III Théorie générale des coniques (p. 272-413). — IV Coordonnées trilinéaires homogènes (p. 414-574).

Quant à l'exposé lui-même, il est très bien ordonné et il se recommande par sa clarté. Nous attirons tout particulièrement l'attention des professeurs sur la manière simple dont l'auteur introduit et utilise les invariants.

H. Mandart. — **Cours de Trigonométrie** rectiligne et sphérique à l'usage de l'enseignement moyen. — 1 vol. in-8°, 194 p.; Wesmæl-Charlier, Namur.

Ces mêmes qualités de clarté se retrouvent dans ce Cours de Trigonométrie que l'auteur a cherché à présenter d'une manière aussi simple que possible. D'importantes simplifications se rencontrent dans l'étude des fonctions trigonométriques réduite à peu près uniquement à celle des sinus et de cosinus. La méthode suivie par l'auteur est personnelle; elle mérite d'être examinée et discutée par ceux qui enseignent cette branche.

E. H. Niewenglowski. — **Les Mathématiques et la Médecine.** — 1 fasc. in-8°, 70 p. ; 2 fr. ; Libraire Desforges, Paris.

L'auteur s'est demandé dans quelle mesure on peut appliquer aujourd'hui les mathématiques aux sciences biologiques. Cette application ne peut être rationnelle et utile que si l'on parvient à éclaircir une question et si l'on obtient une formule dont on peut effectivement calculer des valeurs numériques. L'auteur donne d'intéressants exemples de l'application de la mécanique et des théories de l'élasticité à la physiologie, ainsi que des exemples qui montrent le parti que l'on peut tirer des analogies mathématiques.

Dans l'état actuel de la science, dit l'auteur, l'application directe des mathématiques aux phénomènes biologiques repose souvent sur de grandes illusions ils dépendent d'un trop grand nombre de variables et les données indispensables à la mise en équation sont trop peu connues. Mais il estime que les progrès des sciences médicales étant intimement liés aux progrès des applications des mathématiques aux sciences biologiques, il serait désirable de renforcer la préparation mathématique des étudiants en médecine.

F. Pietzker. — **Lehrgang der Elementar-Mathematik.** *I. Unterstufe.* — 1 vol. in-8°, relié, 318 p., 3 M. 20 ; Teubner, Leipzig.

Le premier volume de cet ouvrage est destiné aux élèves des classes inférieures et moyennes des gymnases prussiens. L'auteur, en nous le présentant, a voulu tenir compte, autant que le permettent les programmes officiels, du vif courant qui se produit en Allemagne en faveur d'une réforme de l'enseignement des mathématiques élémentaires ; courant qui a notamment trouvé un sérieux appui auprès de la « Société allemande des Naturalistes et des Médecins », dont les conclusions d'une commission spéciale, nommée à cet effet, ont été approuvées dans son récent congrès de Méran. La méthode d'enseignement, selon ces conclusions, ne doit pas contribuer à isoler les mathématiques des sciences expérimentales, mais au contraire elle doit, en connexion intime avec ces dernières, leur emprunter tout ce qui peut faciliter la compréhension naturelle et instinctive de l'enfant ; il faut autant que possible laisser de côté dans l'enseignement élémentaire ce qui semble « truc », aux yeux des élèves. Il est alors certain que les progrès seront plus marqués et que les mathématiques rempliront dans la culture du jeune homme le rôle important qu'on est en droit d'attendre de cette science.

Une sorte de liaison entre ces différents domaines est précisément fournie par la « notion de fonction », c'est pourquoi l'auteur ne manque pas, déjà dans ce premier livre, toutes les fois que le sujet s'y prête, de familiariser l'élève avec cette importante notion. Dans la partie du livre consacrée à la Géométrie, l'auteur s'est également inspiré des mêmes principes ; c'est ainsi qu'il n'a pas cru devoir conserver la définition euclidienne du parallélisme de deux droites ; pour lui, deux droites sont dites parallèles quand elles ont même direction. L'ordre habituel des matières est aussi modifié ; M. Pietzker traite, par exemple, des logarithmes immédiatement après les puissances et avant de passer à la résolution des équations. Ce livre intéressant par plus d'un côté ne peut manquer d'être très apprécié des maîtres chargés de l'enseignement des mathématiques élémentaires. Ajoutons qu'un appendice comporte encore les premières notions de trigonométrie, de la théorie des projections et de la représentation graphique De nombreux exercices accompagnent les différentes matières traitées, sauf en ce qui concerne l'algèbre, l'auteur nous renvoyant pour cette partie à sa nouvelle édition des exercices de Bardey, faite en collaboration avec M. Presler. G. Bertrand (Genève).

Ed. Schulze et F. Pahl. — **Mathematische Aufgaben.** — Ausgabe für Gymnasien. II Teil. Aufgaben für die Oberstufe (Obersekunda und Prima). I vol. in-8°, VIII, 284 p , 3 M. 40 ; Dürr, Leipzig.

Nous avons déjà annoncé la *Première Partie* de cet ouvrage dans le précédent tome (1906, p. 326). La *Deuxième Partie*, parue depuis, est franchement conforme aux idées de réforme de l'enseignement mathématique et ne craint pas d'exposer des exercices sur la représentation graphique des fonctions, (p. 106-119, 90 problèmes) et d'introduire la notion de quotient différentiel. Des applications des Mathématiques à la Physique, l'Astronomie et d'autres sciences y sont exposées clairement par un choix de nombreux problèmes.

Ainsi, à la Physique seulement, sont consacrés 214 problèmes, à la connaissance mathématique de la terre et du ciel 25, à la Navigation 12, a l'Arpentage 12. à l'Astronomie 12, sans compter que plusieurs numéraux contiennent chaque fois 6 à 7 exemples particuliers. Quelques chapitres (sur les progressions arithmétiques d'ordre supérieur, les séries infinies, les équations du 3me degré et autres) dépassent le champ du gymnase, il serait regrettable cependant de les laisser de côté.

On ne peut que louer le fait que les angles ne sont donnés qu'aux dixièmes de minutes près. De nombreuses notes au bas des pages facilitent à l'élève l'exécution du calcul par des renvois à ce qui a été appris précédemment ou aux chapitres de Physique dont il est question (p. 87, 129, 162-167); elles présentent parfois également d'intéressantes remarques historiques. L'impression du livre, faite sur bon papier, est claire et facile à lire. Le volume est en outre pourvu d'une très bonne reliure.

Ernst Kaller (Vienne).

H. A. Stern and W. H. Topham. — **Practical Mathematics.** — 1 vol. cart. in-16, 376 p.; 4 s. 6 d.; George Bell and Sons, London.

Dans cet ouvrage les auteurs ont réunis les principales méthodes graphiques et expérimentales qui interviennent dans les applications courantes des mathématiques. Ils s'adressent aux élèves des écoles techniques élémentaires et des écoles militaires.

Après avoir examiné successivement les méthodes et les instruments destinés aux mesures de longueurs, d'angles, de surfaces, de volumes et de poids spécifiques, ils exposent brièvement les procédés graphiques concernant les vecteurs et quelques applications en statique graphique et en mécanique. Puis viennent les notions de force, vitesse, accélération, travail et énergie et toute une série d'intéressantes applications très variées.

Un grand nombre d'exercices numériques viennent accompagner les principaux paragraphes. Nous recommandons cet ouvrage à tous ceux qui enseignent les mathématiques appliquées.

M. Stuyvaert. — **Les nombres positifs :** Exposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire. — 1 vol. in-8°, 133 p.; 3 fr. Van Goethem, Gand.

Cet ouvrage s'adresse particulièrement aux classes supérieures de la section scientifique d'une école moyenne; c'est une revision bien coordonnéeet approfondie de l'Arithmétique élémentaire. L'auteur a senti une lacune entre l'enseignement moyen plus ou moins intuitif et le cours universitaire sur la théorie des nombres.

Partant de la notion de nombre entier cardinal (collection d'objets) l'auteur en déduit, par une voie purement logique, les théorèmes relatifs aux quatre opérations, en admettant toutefois comme postulat l'invariance du nombre ou (ce qui revient au même) la propriété commutative de l'addition.

Le I^er^ chapitre renferme en outre les théories élémentaires de la divisibilité, du plus grand commun diviseur, du moindre multiple, des nombres premiers avec les théorèmes de Fermat et de Wilson; il se termine par une théorie générale des caractères de divisibilité d'un nombre écrit dans un système à base quelconque.

La première extension de la notion de nombre naturel devrait être logiquement le nombre négatif. Le titre du volume indique que M. Stuyvaert n'en parle pas; il est d'usage, en Belgique et en France, de n'étudier les nombres négatifs que dans le cours d'Algèbre. Cependant, dans une répétition systématique des éléments, il serait bon d'insister sur le principe de permanence, comme le font par exemple les auteurs de l'Encyclopédie des sciences mathématiques.

Les chapitres II et III sont consacrés aux nombres fractionnaires et incommensurables.

L'égalité de 2 fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est définie par l'égalité $ad = bc$; pour justifier cette convention l'auteur montre 1° qu'elle contient comme cas particulier l'égalité des nombres entiers ; 2° que deux fractions égales à une troisième sont égales entre elles. Les fractions décimales sont considérées comme des cas particuliers des fractions ordinaires et la conversion des fractions est exposée sans recourir à la notion de limite.

Quant aux nombres incommensurables, la théorie est basée sur l'idée de coupure, de M. Dedekind ; quelques théorèmes sur les limites ont trouvé leur place dans le même chapitre qui se termine par des notions sur les erreurs et les opérations abrégées.

Enfin dans un dernier chapitre sur « La mesure des grandeurs », l'auteur établit une correspondance entre les nombres et les rapports des grandeurs ; il montre en particulier dans quel cas cette correspondance réalise la proportionnalité.

L. Kollros (Chaux-de-Fonds).

H. Vogt. — **Eléments de mathématiques supérieures** à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs et des élèves des Facultés des sciences. 4e édition, très augmentée et entièrement refondue. — 1 vol. gr. in-8°, 710 p., 12 fr. ; Vuibert et Nony, Paris.

Ces *Eléments de mathématiques supérieures* s'adressent aux jeunes gens qui désirent compléter leurs études de mathématiques élémentaires afin de pouvoir suivre les cours d'Analyse, de mécanique, de physique, d'électrotechnique, de chimie physique, etc. Dès leur première édition, en mars 1901, ils ont rencontré un accueil très favorable auprès des professeurs et des étudiants, car il manquait, pour les lecteurs de langue française, un ouvrage comprenant sous une forme condensée les notions fondamentales d'Algèbre, de Géométrie analytique et d'Analyse. L'auteur a su faire un excellent choix de ce qui est indispensable aux étudiants en sciences. La clarté et la concision de son exposé, dégagé de distinctions trop subtiles, ont beaucoup contribué au succès de cet ouvrage dont les trois premières éditions ont été enlevées en moins de six ans.

Dans une nouvelle édition il serait désirable d'augmenter encore le nombre des applications aux sciences les plus diverses, afin que l'étudiant voit de bonne heure comment les mathématiques interviennent dans les sciences appliquées.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXX. Beijer, Stockholm.

Fasc. 3 et 4. — M. Lerch : Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers. — J. Richard : Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue générale des Sciences. — T. J. Bromwich : On the roots of the characteristic equation of a linear substitution. — Levi Civita : Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. — König : Sur les fondements de la théorie des ensembles et le problème du continu. — Faton : Séries trigonométriques et séries de Taylor.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Deuxième série, T. VIII, 1906. E. Privat, Toulouse ; Gauthier-Villars, Paris.

Fasc. 1 à 4. — E. Remoundos : Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes. — E. Husson : Recherches des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. — Bouasse et Berthier : Déformation d'un cylindre de section rectangulaire par enroulement et déroulement d'une hypothèse simple. — E. Goursat : Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes. — Le Vavasseur : Les sous-groupes du groupe linéaire homogène à quatre variables ; sous-groupes à un et à deux paramètres. — Ch. Ricquier : Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables. — E. Goursat : Recherches sur la théorie des caractéristiques.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — 31me année 1906-1907. Louvrain, 1907.

1e fascicule. — De Salvert : Sur l'attraction du parallélépipède ellipsoïdal (chap. II).

Annali di Matematica. — Directeurs : L. Bianchi, O. Dini, G. Jung, C. Segre. — Série III. T. XIII Rebeschini di Turati e.C., Milan.

S. Lattès : Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation. — G. Tognoli : Sulle forme differenziali a variabili alcune dipendenti altre indipendenti. — G. Pavanini : Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi.

— P. Calapso : Un problema sui sistemi di linee fra loro coniugate e sulle relative trasformazioni di Laplace. — Luther, Pfahler, Eisenhart : Transformations of Minimal surfaces. — Walter B. Ford : Sur les équations linéaires aux différences finies. — Niels Nielsen : Sur la multiplication des séries trigonométriques.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Series, vol. VIII, 1906-1907. Cambridge, Mass. E. U.

N° 1 (Octobre, 1906). — Huntington : The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra. — Porter : On a criterion of Pringsheim's for Expansibility in Taylor's Series. — Carmichæl : Multiply Perfect Numbers of Three Different Primes.

N° 2 (Janvier, 1907). — Moore : Cercles orthogonal to a Given sphere. — P. Saurel : On Functional Determinants. — E. B. Wilson : Involutary Transformations in Projective Group and its subgroups. — Brenke : On the Convergence and differentiation of Trigonometric Series. — A. Hurwitz : Note on the Definition of an Abelian Group by Independant Postulate

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke. 17. Band. B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Nos 1 et 2. — G. Berkhan : Zur projektivischen Behandlung der Dreiecksgeometrie. — Edm. Landau : Über einige Ungleichheitsbeziehungen in der Theorie der analytischen Funktionen. — M. Krause : Zur Theorie des Integrallogarithmus. — M. Lerch : Bemerkungen über eine Formel aus der Theorie der unvollständigen Gammafunktion und des Integrallogarithmus. — E. Eckhardt : Analytisch-geometrische Ableitung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichungen vierten Grades. — P. Kokott : Das Abrollen von Kurven bei geradliniger Bewegung eines Punktes. — Gomes Teixeira : Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus. — St. Jolles : Eine einfache synthetische Ableitung der Grundeigenschaften eines Büschels polarer Felder. — G. A. Miller : The groups in which every subgroup of composite order is invariant. — Eugen Meyer : Über Büschel kubischer Raumkurven. — K. Petr : Über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von zehn und zwölf Quadraten. – Ernst Steinitz : Über die Eulerschen Polyederrelationen. — Rezensionen.

Bibliotheca mathematica. Zeitschr. f. Geschichte der mathem. Wissenchaften, herausgegeben von G. Eneström. 3. Folge, Band 7, Teubner, Leipzig.

Nos 1 et 2. — G. Eneström : Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenchaften. — H. Vogt : Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale hekannt? — G. Eneström : Über die „Demonstratio Jordani de algorismo". — G. Eneström : Hat Tartaglia seine Lösung der kubischen Gleichung von Del Ferro entlehnt ? — H. Bosmans : Le „De arte magna" de Guillaume Gosselin. — Gino Loria : Per la preistoria della teoria delle trasformazioni di contatto. — Ed. Landau : Euler und die Funktionalgleichung der Riemanschen Zetafunktion. — H. Suter : Über das Rechenbuch des Alì ben Ahmed el-Nasawì. — K. Hunrath : Albrecht Dürers annähernde Dreiteilung eines Kreisbogens. — G. Eneström : Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli. — W. Ahrens : Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobis. — G. Eneström : Über Bearbeitung von Bandregistern zu mathematischen Zeitschriften oder Sammelwerken.

Bolletino di Bibliografia e Storia delle Science matematiche, publicato per cura di Gino Loria. Anno IX, 1906. — C. Clausen, Torino.

R. Marcolongo : Sul teorema della composizione delle rotazioni istantanee, appunti per la storia della meccanica nel secolo XVIII. — R. Bonola : Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa. — Loria : Matematica e matematici del Giappone. — Recenzioni ed annunzi.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXIV. Paris.

Fasc. 3 et 4. — Hadamard : Sur le principe de Dirichlet. — de Montcheuil : Les anticaustiques du paraboloïde hyperbolique équilatère. — Fontené : Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre *un*. — Rudzki : Notes sur la chute des corps pesants. — Petrovitch : Sur certaines transcendantes entières. — Remy : Sur quelques théorèmes de Géométrie plane liés à la surface de Kummer. — Sanielevici : Remarques sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles. — Combebiac : Remarques sur la question des principes de l'*Analysis situs*. — Rémoundos : Sur la représentation uniforme des courbes transcendantes. — Autonne : Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes. — Maillet : Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville. — Combebiac : Sur les représentations numériques des ensembles. — Vessiot : Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales. — Von Koch : Remarques sur quelques séries de polynomes

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G Darboux, E. Picard, J. Tannery. — Tome XXX. 1906 Paris, Gauthier-Villars.

Juin-décembre 1906. — Montel : Sur les séries de fonctions analytiques. Dolbnia : Remarques sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et la réduction des intégrales abéliennes. — J. Tannery : Manuscrits et papiers inédits de Galois. — Bateman : Sur l'équation de Fredholm. — Haag : Note sur les surfaces (B) algébriques. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques. — Comptes rendus et analyses

Bulletin of the American Mathematical Society. New-York. Vol. XIII.

Nos 1 à 3 (Octobre-décembre, 1906). — L. E. Dickson : Criteria for the Irreducibility of Functions in *a* Finite Field. — L. E. Dickson : On the Theory of Equations in *a* Modular Field. — N. J. Lennes : Note on the Variation of the Definite Integral. — W. A. Manning : A Note on Transitive Groups. — L. P. Eisenhart : Differential Geometry of n Dimensional Space. — Ernest Lebon : Theory and Construction of Tables for the Rapid Determination of the Prime Factors of a Number. — A. R. Schweitzer : On a Fundamental Relation in Abstract Geometry. — D. N. Lehmer : On the Orderly Listing of Substitutions. — E. J. Wilczynski : Projective Differential Geometry. — Hutchinson : On Loci the coordinates of whose Points are abelian Functions of three Parameters. — Carver : Associated Configurations of the Cayley-Veronese Class.

No 4 à 6 (Janvier-mars, 1907). — G. Peirce : A new Approximate Construction for π. — Kellogg : Note on conjugate Potentials. — S. A. Miller : Groups of Order p^m containing exactly $p+1$ abelian subgroups of Order $pm-1$. — S. F. Richardson : Note on systems of In- and Circumscribed

Polygons. — MASON : Selected topics in the theory of boundary value problems of differential equations. — MOORE : Note on Fourier's constants. — MILLER : On the minimum number of operators whose orders exceed two in any finite group. — AMES : Note on the orientation of a secant. — CARMICHÆL : On Euler's φ-function. — MOORE : The decomposition of modular systems connected with the doubly generalized Fermat theorem. — KASNER : Systems of extremals in the calculus of variations. — MASON : A necessary condition for an extremum of a double integral. — Shorter notices. — Notes.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. GUTZMER. B. 15, 1906 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 7 à 10. (juillet-décembre, 1906). — F. v. DALWIGK : Beiträge zur Frage des Unterrichts in angewandter Mathematik an der Universität. — G. FREGE : Über die Grundlagen der Geometrie. — M. LERCH : Bemerkung über Funktionen des elliptischen Zylinders. — G. KOWALEWSKI : Über einige Formeln der Integralrechnung. — Félix MÜLLER : Verzeichnis älterer mathematischer Werke aus der im Besitz der Jacobsonschule zu Seesen befindlichen Wertheimschen Bibliothek. — J. THOMAE : Gedankenlose Denker. — Hubert STIER : Technische Arbeit. — H. BURKHARDT : Zu den Funktionen des elliptischen Zylinders. — Gustav KOHN : Über Flächen zweiter Ordnung, welche einander wechselseitig stützen. — E. STUDY : Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie (V—XII). — Protokoll der Stuttgarter Versammlung vom 16. bis zum 20. September 1906. — Félix MÜLLER : Verbesserungen und Bemerkungen zu den Büchertiteln der Wertheimschen Bibliothek (Bd. 15, 431-434). — A. SCHOENFLIES : Die Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie und Funktionentheorie. — P. STÄCKEL : Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen. — T. HAYASHY : On Mr. Mikami's Essay and Prof. Harzer's Remark. — G. FREGE : Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae. — J. THOMAE : Erklärung. — Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Mathesis, Recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Série 3. Tome VI 1906. Gand, Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

Juillet-décembre 1906. — A. DEMOULIN : Sur quelques transformations géométriques. — Nécrologie. — A. AUBRY : Sur l'emploi de la formule de Mercator. — J. NEUBERG : Sur un théorème de Chasles. — St. MIREA : Sur un théorème de Sylvester. — T. HAYASHI : Sur un soi-disant théorème chinois. — H. BOSMANS : Pour une histoire de la Géométrie analytique d'après Loria. — E. DELAHAYE : Sur un triangle particulier. — G. A. VERKAART : Nouvelle méthode pour la résolution des équations complètes du 4e degré.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Em. LAMPE. Band 35. Jahrgang 1904. — G. Reimer, Berlin, 1907.

Heft 3. — Mechanik. — Mathem. Physik. — Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Monatshefte f. Mathematik u. Physik, herausgegeben von G. v. ESCHERICH, F. MERTENS u. W. WIRTINGER. XVIII. Jahrg. 1907. Eisenstein, Wien.

Hefte 1 u. 2. — JÄGER : Der Physiker Boltzmann. LANDAU : Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. — FREUD : Über Grenzwerte von Doppelintegralen, die den bedingt konvergenten, einfachen Integralen analog sind. — OPPENHEIMER :

Über die einer ebenen Kurve dritter Ordnung um- und einbeschriebenen Vielecke. — Petr : Über die Ponceletschen Polygone. — Wieleitner : Über zwei Familien von rationalen Kubiken. — Meyer, W. Franz : Über Gebilde, die aus Tetraedern und Flächen zweiter Klasse zusammengesetzt sind. — Wirtinger : Zum Hadamardschen Determinantensatz.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard. 4e série. Gauthier-Villars, Paris.

T. VI. octobre-décembre, 1906. — R. Bricard : Sur la Géométrie de direction dans l'espace. — H. Laurent : Sur un théorème de Weierstrasse. Agrégation des sciences mathématiques ; solution de la question de mécanique rationnelle (De Sparre). — Bourlet : Théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne. — Fabry : Sur la série de Taylor et ses points singuliers. — Fontené : Sur le cercle pédal. — Bouvaist : Sur le théorème de Feuerbach. — Fontené : Volume d'un tétraèdre en fonction des arêtes, démonstration géométrique. — Suchar : Recherche de la loi que doit suivre une force centrale, sachant que la trajectoire est une conique, quelles que soient les conditions initiales. — Parrod : Aggrégation des sciences mathématiques (Concours de 1906). — Correspondance. — Solution de questions proposées.

T. VII. Janvier-mars, 1907. — d'Ocagne : Sur la rectification approchée des arcs de cercle. — Remy : Sur deux surfaces du quatrième ordre à l'octuple gauche complet. — Fontené : Sur le système articulé de Hart. — Bricard : Sur un système articulé. — L. Autonne : Sur un certain domaine holoïde. — Remoundos : Sur les rapports anharmoniques généralisés. — R. Bricard : L'œuvre d'Amédée Mannheim. — A. de Saint-Germain : Sur la solution d'une difficulté qui se présente dans l'étude de l'équilibre du treuil. — J. Haag : Etude du tore rapporté aux cercles d'Yvon Villarceau. — D. Tabakoff : Quasi-développées des surfaces du second ordre. — Certificats de calculs différentiel et intégral, de Géométrie supérieure, de mécanique appliquée. — Questions.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secundario : Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Serie III, vol. IV, Raffaelo Giusti, Livorno.

Fasc. IV et V (janvier-avril, 1907). Marcolongo : Davide Besso (Biografia). — Bottari : Soluzioni intere in progressione aritmetica appartenenti a equazioni indeterminate del tipo $\sum_{\nu=1}^{r} x_\nu^n = x_{r+1}^n$. — Alasia : Sugli automorfismi di certi gruppi di operazioni. — Bini : Sopra alcune congruenze. — Repetto : Le geodetiche del toro (*Contitua*). — Loria : Le trasformazioni pedali ed antipedali nel piano e nello spazio. — Comessatti : Di una generazione del complesso tetraedrale. — Orlando : Sopra un noto invariante delle forme binarie di grado pari.

Supplemento al Periodico di Matematica. fasc. III à VI. 1907.

Pitagora (I. C.). Giornale di matematica per gli aluni delle scuole secondarie, publicato per cura di Gaet. Fazzari. — 13e année, no 1-7, octobre, 1906 — avril, 1907 ; Palermo.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 4, fasc. 5-7. Sheppard : On the Accuracy of interpolation by finite differences. — C.-F. Russell : On the Geometrical interpretation of Apolar Binary Forms. — E.-J.

Routh : On the motion of a swarm of particles whose centre of gravity describes an Elliptic Orbit of small eccentricity round the Sun. — E. Cunningham : On linear differential equations of Rank Unity. — F. Morley : On two cubic curves in triangular relation. — J. Rogers : Supplementary note on the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions. — Filon : On the expansion of polynomials in series of functions. — Forsyth : Partial differential equations ; some criticisms and some suggestions. — Bateman : On the inversion of a definite integral. — Index of Proceedings. — Obituary Notice of Charles Jasper Joly. — Obituary Notice of Robert Rawson.

Revue du Mois, dirigée par M. Borel. 2e année 1907. Librairie Le Soudier, Paris.

10 janvier. G. Appell : Faut-il supprimer le baccalauréat?

10 mars. — H. Poincaré : Le hasard. — R. de Montessus : A propos du hasard.

10 avril. — P. Tannery : Programme d'un cours d'histoire des sciences. (v. l'*Enseign. math.* du 15 mai, 1907.)

Revue générale des Sciences pures et appliquées dirigée par L. Olivier. 18me année, 1907 ; Arm. Colin, Paris.

No 2 (30 janvier). — R. Bourgeois : L'état actuel de la Géodésie.

No 4 (28 février). — Léop. de Saussure : L'Astronomie chinoise dans l'antiquité.

No 6 (30 mars). — G. Milhaud : Descartes et la loi des sinus.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, D.-E. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. T. XV. 1re partie : avril-octobre 1906. Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1907.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. — XXXII Jahrg. 1907 ; Alfr. Hölder, Wien.

No 1. — H. Hartl : Ein Funktionenzeiger. — A. Pleskot : Geometrischer Beweis eines algebraischen Satzes.

No 2. — F. Schiffner : Ein einfacher Beweis des Lehrsatzes vom Quadrate der Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes. — J. Wanka : Schattenversuche.

No 3. — A. Achitsch : Eine bei der Lichtreflexion auftretende Minimumeigenschaft. — P. v. Schæwen : Ueber rationale Dreiecke.

No 4. — R. Fischer : Eine Analogie der Pythagoreischen Zahlen. — P. Ernst : Die einfachste Behandlung des Spieker'schen Kreises.

Zeitschrift für mathematischen u. naturw. Unterricht, herausgegeben von Dr H. Schotten. — 37. Jahrgang, Hefte 5 bis 8, 1906 : B.-G. Teubner, Leipzig.

H. Pfaff : Geometrische Oerter als Uebungsstoff für die Prima. — A. Tafelmacher : Ueber einen geometrischen Ort und eine neue Art von Dreieckskoordinaten. — Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Zweiter Teil. Vorschläge überreicht der 78. Naturforscher-Versammlung in Stuttgart 1906. — Paul Epstein : Die dualistische Ergänzung des Potenzbegriffs in der Geometrie des Kreises. — Verhandlungen beim Göttinger Ferienkurs (Ostern 1906) über die Reform des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Bericht von J. Schröder in Hamburg. — Literarische Berichte. — Pädagogische Zeitung, etc.

2. Livres nouveaux :

Chwolson. — **Traité de Physique.** Trad. Ed. Davaux. T. I. ; fasc. II. L'état gazeux des corps, 1 vol. 6 fr. — fasc. III. L'état liquide et l'état solide des corps. 1 vol. 310 p., 12 fr. ; Hermann, Paris.

P. Duhem. — **Les origines de la statique.** T. II. 1 vol. in-8°, 364 p. 10 fr. ; Hermann, Paris.

P. Duhem. — **Etude sur Léonard de Vinci.** Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Première série. — 1 vol. in-8°, 355 p., 12 fr. ; Hermann, Paris.

Ch. Fabre. — **Traité pratique de photographie stéréoscopique.** — 1 vol. in-8°, 207 p., fig. 132 ; 6 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

W. Felgenträger. — **Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage.** — 1 vol. cart. in-8°, 310 p. ; 8 M. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

A. Galle. — **Geodäsie.** — 1 vol. cart. 284 p. ; 8 M. ; (*Sammlung Schubert*) ; G.-J. Goeschen, Leipzig.

O. Hesse. — **Vorlesungen aus der analytischen Geometrie** der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. — 4. Aufl. revidiert und ergänzt von J. Gundelfinger. — 1 vol. cart. 251 p. ; 6 M. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Edw. M. Huntington. — **La Kontinuo.** Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. Tradukita de la angla lingvo de R. Bricard. — 1 vol. in-16, 125 p. ; 2 fr. 75 ; Gauthier-Villars, Paris.

Aug. Tafelmacher. — **Elementos de Aljebra superior** para el uso del Curso militar. — 1 vol. in-8°, 103 p. ; Santiago du Chili.

LE ROLE DES FONCTIONS MULTIFORMES EN DYNAMIQUE

1. — Introduction. Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force, dont les composantes X et Y sont des fonctions des coordonnées x et y du point, il y a lieu à distinguer deux cas fondamentaux, 1° — la force ne dépend que de la position du point matériel, 2° — la force peut avoir plusieurs valeurs à la même position du point matériel, parce qu'elle est donnée par des fonctions multiformes des coordonnées x et y. Nous nous proposons d'examiner ici le rôle que jouent les fonctions multiformes en Mécanique rationnelle. L'existence de théorèmes importants découverts par les mathématiciens dans l'hypothèse restrictive que la force ne dépend que de la position du mobile justifie bien notre recherche et rend ce sujet extrêmement intéressant : je me borne à citer ici les théorèmes de Bertrand, Halphen, de MM. Darboux et Koenigs ; ils se rattachent aux célèbres problèmes de Bertrand sur les lois des forces donnant lieu à des trajectoires ayant une propriété donnée, quelles que soient les conditions initiales.

Parmi les résultats contenus dans ce travail, celui auquel j'attribue la plus grande importance consiste dans le théorème suivant :

« *Une force centrale quelconque est toujours uniforme sur* « *la trajectoire décrite par le mobile, quelles que soient les* « *conditions initiales; il n'y a d'exception que pour les points* « *de la trajectoire présentant des singularités géométriques* « *comme les points multiples. Ainsi, la force centrale (intensité, sens) ne dépend que de la position du mobile, pourvu* « *que cette position ne soit pas un point multiple de la courbe* « *trajectoire.* »

Les forces multiformes par rapport au temps.

2. — Supposons qu'un point matériel soit sollicité par une force, dont les composantes X et Y sont données par des fonctions *multiformes* des coordonnées x et y.

$$X = \sigma(x, y) \quad , \quad Y = \varphi(x, y) ,$$

et considérons une trajectoire du mobile correspondant à des conditions initiales déterminées. Lorsque le mouvement est périodique, le mobile passant plusieurs fois par le même point de la trajectoire, la force est, en général, multiforme sur la trajectoire, puisqu'elle peut prendre dans une certaine position une détermination différente de la précédente, grâce au principe bien connu de la permutation des branches d'une fonction multiforme. La force considérée F deviendra uniforme (c'est-à-dire aura une valeur) sur la trajectoire, si aux coordonnées X et Y on adjoint une troisième variable *mécanique*, le temps t; il est en effet clair que la force F aura en chaque point de la trajectoire une valeur unique et bien déterminée, pourvu que l'on se donne *le temps* au bout duquel le mobile se trouve à chaque position. Nous supposons, bien entendu, que la trajectoire ne passe pas par des points critiques [1] des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ qui donnent les composantes X et Y de la force ; nous appelons *points critiques* d'une fonction multiforme des coordonnées x et y, les points où plusieurs déterminations de la fonction coïncident. Ainsi la notion de continuité combinée avec le principe bien connu de la permutation des diverses branches d'une fonction multiforme effectuée par un mouvement continu du point M (x, y) revenant à la position de départ, nous permet d'énoncer le théorème suivant :

« *Une force multiforme, fonction multiforme des coordon-*
« *nées* x *et* y, *peut sur chaque trajectoire du mobile être*
« *exprimée par une fonction uniforme de trois variables : les coordonnées* x *et* y *du mobile et le temps* t. »

[1] En général, points singuliers (discontinuités, coïncidence de branches) des fonctions $\sigma(x . y)$ et $\varphi(xy)$.

On peut donc écrire pour toute trajectoire du mobile :

$$F = H(x, y, t) \tag{1}$$

$H(x, y, t)$ désignant une fonction uniforme des variables x, y et t, qui peut varier, bien entendu, avec la trajectoire, lorsque les conditions initiales changent.

Il en est de même des composantes X et Y de la force F.

La détermination de cette fonction $H(x, y, t)$, lorsque la force est donnée par une fonction multiforme $f(x, y)$ est un problème mécanique, puisque l'équation nous donnerait, en général, le temps t comme fonction des coordonnées x et y ; elle pourrait donc nous déterminer l'instant t, auquel le point mobile (x, y) se trouve dans une position donnée. Mais l'étude des variations qu'éprouve la force F, lorsque le mobile revient à la position initiale après avoir décrit un certain chemin continu, est un problème d'analyse qui se ramène à l'étude des singularités multiformes et surtout des points critiques (points de ramifications) ; pour nous ça sera ici un principe pour une étude de quelques quantités mécaniques multiformes, c'est-à-dire ayant plusieurs valeurs à chaque position du mobile.

Si les composantes X et Y sont données par des fonctions uniformes des x et y, il est clair que tous les éléments de la force (intensité, direction, sens) ne dépendent que de la position du mobile ; il ne dépendent pas du tout du temps et du chemin suivi par le mobile pour arriver à chaque position ; c'est le cas qui a été supposé dans les problèmes que nous avons mentionnés dans l'Introduction de ce travail [1]. Le cas général est celui où, les composantes X et Y étant données par des fonctions multiformes des x et y, la force ne dépend pas seulement de la position du mobile ; sur une trajectoire donnée elle dépend aussi *du temps d'une façon indépendante de la position du mobile* de sorte qu'elle peut changer de valeur, lorsque le mobile revient à une certaine position après quelque temps.

[1] Dans un travail publié récemment dans le *Journal de Crelle* (1906, Heft 2) M. STEPHANOS indique une voie par laquelle un théorème de Bertrand est affranchi de la restriction que comporte ce cas.

On se rend aisément compte du rôle remarquable que les fonctions multiformes doivent jouer en Mécanique, si l'on se rappelle que la permutation des branches se fait par un mouvement continu du point M (x, y), qui ramène ce point à la position de départ : le mouvement exige, en effet, du temps et suppose l'existence d'une cause, que l'on appelle *force* en Mécanique. Le rôle spécial des fonctions multiformes en Mécanique tient à la nature des choses et nous pouvons dire qu'elles se rattachent à la Mécanique d'une façon intrinsèque et non seulement par la nécessité des applications.

3. — Si le point (x, y) part d'une position initiale $(x_0\ y_0)$ les accroissements de temps les plus intéressants pour nous seront ceux, pour lesquels le point mobile M (x, y) revient à la position initiale. Nous appellerons *période* un tel accroissement du temps t ; d'une façon plus claire, nous appellerons *période* tout intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages du mobile par la même position de la trajectoire et nous remarquerons que la période ainsi définie est, en général, une quantité variable. Les autres accroissements du temps t, qui entraînent le changement de la position du mobile, nous intéressent peu ici, parce que le but principal de ce travail consiste en l'étude des variations des forces et, en général, de quantités multiformes, qui ne sont causées que par les changements du temps et non par la position du mobile.

Avant d'aborder l'étude des problèmes mécaniques, nous devons remarquer que les fonctions multiformes utilisées dans nos théories seront particulièrement intéressantes si elles sont harmoniques par rapport aux coordonnées x et y ou bien analytiques en $z = x + i\,y$, grâce aux progrès spéciaux accomplis dans la théorie des singularités de ces fonctions et de la permutation de leurs branches.

Les Invariants.

4. — Nous allons supposer que les composantes X et Y de la force agissant sur un point matériel M (x, y) soient données par des fonctions multiformes des x et y, soit :

$$X = \sigma(x, y) \quad , \quad Y = \varphi(x, y).$$

Nous appellerons *invariant absolu* toute quantité mécanique concernant le mouvement d'un point mobile sollicité par la force et ayant la propriété d'être une fonction *uniforme des coordonnées* x *et* y *sur tout le plan*.

L'importance des invariants absolus consiste en ce que ces quantités ne dépendent que de la position du mobile pour toutes les trajectoires possibles, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales; d'une façon plus claire, à chaque position du mobile ces quantités n'ont qu'une valeur unique ne dépendant ni des conditions initiales ni du temps mis par le mobile pour y arriver. Le caractère d'invariance, que nous considérons pour ces quantités se rapporte non seulement aux accroissements du temps, mais encore aux changements des conditions initiales, c'est-à-dire de la courbe suivie par le mobile pour arriver à une certaine position. Nous ne pouvons pas citer dans ce travail des exemples d'invariants absolus valables d'une façon générale, mais nous allons envisager aussi une autre espèce d'invariants, dont nous présenterons des exemples remarquables.

Une quantité mécanique Q sera appelée *invariant relatif* à une trajectoire du mobile, lorsqu'elle ne dépend que de la position du mobile sur *cette trajectoire* et nullement du temps mis par le mobile pour arriver à chaque point de la trajectoire; si le mouvement est périodique, toutes les fois que le mobile passe par un point de la trajectoire, cette quantité Q prend toujours la même valeur : si nous considérons deux instants t et $t + \Delta t$ avec l'hypothèse que la différence Δt soit égale à une ou plusieurs périodes, la valeur de Q à l'instant t est égale à sa valeur à l'instant $t + \Delta t$. Donc le caractère d'invariance que nous avons en vue ici, se rapporte seulement aux accroissements du temps égaux à une ou plusieurs périodes.

5. La force F n'est jamais un invariant *général*, puisque notre hypothèse fondamentale consiste en ce que les composantes X et Y ne sont pas toutes les deux fonctions uniformes des coordonnées x et y du mobile ; d'une façon plus précise, les trois éléments de la force F : intensité, direction et sens ne peuvent être tous les trois des invariants généraux, conformément à notre hypothèse.

Si, par exemple, nous avons :

$$X = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{2xy} .$$

l'intensité de la force sera égale à :

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x + y)^2} = x + y .$$

Elle est donc uniforme par rapport aux coordonnées x et y et, par conséquent, c'est un invariant général, mais il n'en est pas de même de l'angle formé par la direction de la force avec l'axe des x.

Mais il est bien possible que tous les éléments de la force soient des invariants *relatifs* par rapport à une trajectoire, pourvu que cette trajectoire remplisse certaines conditions par rapport aux singularités des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ donnant les composantes X et Y de la force. L'étude de ce rapport entre les trajectoires d'invariance pour la force et les singularités des fonctions $\sigma(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ s'offre plus avantageuse dans le cas, où la fonction $A(z) = X + iY$ est analytique en $z = x + iy$, les fonctions $X = \sigma(x, y)$ et $Y = \varphi(x, y)$ étant harmoniques conjuguées ; pour bien nous en rendre compte, remarquons que tous les éléments de la force seront des invariants relatifs à toute trajectoire, qui ne renferme aucun point singulier de la fonction analytique $A(z)$; si $A(z)$ n'admet qu'un point critique $z = \alpha$, tel que :

$$A(z) = \sqrt{z - \alpha}\, B(z) ,$$

où $B(z)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage du point $z = \alpha$ la force sera un invariant relatif à toute trajectoire qui ne renferme pas le point $z = \alpha$; ces exemples nous donnent une idée des services que peut rendre à notre problème mécanique la théorie de la permutation des branches d'une fonction analytique, lorsque le point d'affixe $z = x + iy$ tourne autour d'un ou plusieurs points singuliers (critiques) de cette fonction.

Si nous désignons par $\alpha(x, y)$ la fonction donnant l'intensité de la force, elle sera un invariant relatif à toute trajectoire qui ne renferme à son intérieur aucun point singulier des dérivées premières.

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} , \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} .$$

En d'autres termes, nous supposons qu'à l'intérieur de cette trajectoire les dérivées partielles $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ soient continues, finies et bien déterminées[1].

Exemples d'invariants : Forces quelconques.

6. Après les considérations générales du chapitre précédent, nous allons signaler d'abord quelques exemples d'invariants relatifs à une trajectoire et valables pour une force quelconque. La recherche des invariants, que nous tenons à citer ici, s'appuie sur le principe suivant. *Une quantité mécanique Q sera certainement un invariant relatif à une trajectoire T, si la quantité Q est égale à un élément géométrique de la courbe de la trajectoire qui a naturellement une valeur unique et bien déterminée en chaque point de la courbe. Il en est de même des quantités Q qui peuvent être exprimées en fonction uniforme de plusieurs éléments géométriques de la trajectoire.* Nous admettons que ces éléments géométriques peuvent avoir plusieurs valeurs en quelques points singuliers de la trajectoire, mais nous excluons toujours toute singularité de la trajectoire qui entraînerait des singularités pour la quantité Q, considérée comme fonction des coordonnées x et y sur la trajectoire ; cela tient à ce que la notion des invariants suppose pour eux une succession de valeurs continue et bien déterminée le long de la trajectoire relative.

Si nous appelons F_n et F_t les composantes normale et tangentielle d'une force agissant sur un point matériel $M(x, y)$, nous avons les formules classiques

$$F_n = m \frac{V^2}{\rho}, \quad F_t = m \frac{dV}{dt},$$

V désignant la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.

Si la masse m est constante ou fonction uniforme des coor-

[1] C'est une conséquence immédiate d'un théorème classique de la théorie des intégrales curvilignes prises le long d'une courbe fermée.

données x et y, ces formules nous donnent les invariants suivants :

$$\frac{V^2}{F_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t}\frac{dV}{dt},$$

parce que nous avons :

$$\frac{V^2}{F_n} = \frac{\rho}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}.$$

Si la masse m est une fonction quelconque des coordonnées x et y, nous n'avons que l'invariant $\frac{mV^2}{F_n}$, qui est égal au rayon de courbure de la trajectoire. Ce sont là *des invariants relatifs à toute trajectoire correspondante à des conditions initiales quelconques ; nous faisons exception des trajectoires passant par des points singuliers des quantités considérées* [1].

Forces centrales.

7. Nous allons maintenant présenter un autre invariant beaucoup plus intéressant que les précédents et concernant seulement les forces centrales ; son importance consiste en ce qu'il s'exprime par la force elle-même qui est donnée comme une fonction des coordonnées x et y du mobile, contrairement aux invariants signalés au paragraphe précédent, qui sont exprimés par des composantes de la force suivant la normale et la tangente de la trajectoire. C'est, en effet, un inconvénient d'avoir les invariants exprimés par des composantes de la force qui exigent une certaine connaissance d'une trajectoire, généralement inconnue ; cela tient à ce que nous nous proposons comme but principal des applications des invariants à la recherche géométrique des trajectoires, lorsque la force est donnée comme fonction des coordonnées x et y.

Le mathématicien Resal a communiqué autrefois à l'Academie des sciences de Paris (Comptes rendus, tome XC ; page 769) un théorème intéressant sur une loi relative à une force centrale. Ce théorème est le suivant :

---

[1] Ces points singuliers sont les points d'une trajectoire possédant plusieurs rayons de courbure (points multiples à tangentes distinctes ou non).

« *La force centrale produisant le mouvement d'un point est* « *proportionnelle à la quantité :* $\frac{V^3 . r}{\rho}$, V *désignant la vitesse* « *du mobile,* r *sa distance au centre des forces,* ρ *le rayon de* « *courbure de la trajectoire.* »

Nous arrivons très aisément à ce théorème par une comparaison des formules donnant l'intensité d'une force centrale et la vitesse du mobile en coordonnées polaires, avec la formule bien connue qui donne le rayon de courbure d'une trajectoire plane en coordonnées polaires, en prenant comme pôle le centre fixe de la force. Nous savons, en effet, que le rayon ρ de courbure d'une courbe plane est donné par la formule :

$$(2) \qquad \rho = \frac{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)} \quad . \quad \left[u = \frac{1}{r}\right]$$

r et θ désignant les coordonnées polaires, quel que soit le point pris comme pôle.

En prenant comme pôle le centre de la force centrale, nous avons les formules classiques suivantes, qui donnent l'intensité de la force et la vitesse du mobile aussi en coordonnées polaires, savoir :

$$(3) \qquad V^2 = K^2\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right) \ , \quad F = -\, mK^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right] \ ,$$

où V désigne la vitesse du mobile, F l'intensité de la force, et K la constante des aires. Nous n'avons qu'à éliminer les quantités

$$u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2} \quad \text{et} \quad u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

entre les formules (2) et (3) pour obtenir la formule suivante :

$$(4) \qquad \rho = -\frac{m}{K}\,\frac{V^3}{uF} \quad \text{ou} \quad \rho = -\frac{m}{K}\,\frac{V^3 . r}{F}$$

qui est la conséquence des égalités :

$$\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V^3}{K^3} \ , \quad u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = -\,\frac{Fu}{mK^2} \ .$$

La formule (4) qui nous conduit immédiatement au théorème de Resal énoncé plus haut, peut s'écrire aussi de la façon suivante :

$$\frac{-K\rho}{mr} = \frac{V^3}{F} \tag{5}$$

et nous permet de conclure que la quantité mécanique $V^3 F$ est un *invariant relatif à toute trajectoire du mobile*, quelles que soient les conditions initiales, si la masse m est supposée constante ou bien une fonction uniforme des coordonnées x et y du mobile ; cela tient à ce que les quantités géométriques ρ et V n'ont qu'une valeur bien déterminée à chaque point de la trajectoire, tandis que K est une constante.

8. Nous allons maintenant simplifier beaucoup cet invariant $V^3 F$ en appliquant la formule classique suivante :

$$P\,V = K\,, \tag{6}$$

qui exprime le théorème des aires, P désignant la distance du centre de la force à la tangente de la trajectoire en chaque point et K la constante des aires ; cette formule nous permet de conclure que la vitesse V est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque la quantité géométrique P n'a qu'une valeur unique à chaque point de la trajectoire, sauf quelques points singuliers de la courbe.

Nous en concluons que, lorsque le mouvement est périodique, il n'est jamais rétrograde, et, en général, le mobile revient à un point de la trajectoire toujours avec la même vitesse.

Mais l'invariant le plus important pour le but que nous poursuivons, est celui que nous déduisons par la combinaison des deux invariants précédents, c'est l'intensité F de la force ; il n'y a qu'à éliminer la vitesse V entre les égalités (5) et (6) pour avoir la formule suivante :

$$F = -\,mK^2\,\frac{r}{\rho P^3} \tag{7}$$

qui nous donne l'intensité F de la force en fonction rationnelle de quantités, qui n'ont qu'une valeur unique et bien déterminée à chaque point de la trajectoire. Si nous excluons donc les trajectoires ayant des points *singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes*, pour toutes les autres nous aurons pour l'intensité F une succession de valeurs continue et bien déterminée et le théorème suivant :

THÉORÈME. « *L'intensité d'une force centrale est un invariant relatif à toute trajectoire du mobile n'ayant aucun point singulier à plusieurs rayons de courbure*[1] *ou bien plusieurs tangentes.* »

L'existence de points de la trajectoire, où la force F devient infinie ne gêne pas ; il suffit que l'intensité de la force y soit *toujours* infinie.

L'importance de ce théorème consiste en ce que j'ai en vue des problèmes où la force est donnée comme fonction des coordonnées x et y et, par conséquent, la connaissance de cet invariant nous donne des renseignements quelquefois précieux sur la trajectoire inconnue. Ainsi, si l'intensité de la force n'est pas un invariant par rapport à une trajectoire, cette trajectoire, doit avoir des points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes. *Les points de la trajectoire, où l'intensité de la force prend plusieurs valeurs pendant le mouvement supposé périodique, coïncident avec les points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes.* Des tels points singuliers sont, par exemple, les points multiples à tangentes distinctes ou non. La même formule (7) montre que le sens de la force est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque le signe du second membre de (7) ne change pas d'après nos hypothèses.

Applications.

9. — Pour comprendre l'intérêt de la théorie exposée dans les chapitres précédents, nous citerons quelques applications se rapportant aux problèmes où la force est donnée par une fonction multiforme des x et y et nous nous propo-

[1] La formule (7) montre, en effet, que la force F ne saurait avoir plusieurs valeurs qu'aux points singuliers de la trajectoire, où il en est ainsi du rayon ρ ou de la quantité P. Nous ne parlons pas de la direction de la force, parce que elle reste évidemment invariable.

serons d'étudier les diverses trajectoires tracées par un mobile sollicité par cette force. Supposons que l'on ait :

$$F = m \cdot \omega(x, y)^{1}$$

(m désigne la masse), F désignant l'intensité de la force, et que la fonction $\omega(x, y)$ admette un point singulier $x = a$ et $y = b$ tel que, lorsque le point M $(x\ y)$ part d'une position initiale et y revient après avoir tourné autour du point M, la fonction change de valeur ; dans cette hypothèse, la courbe ainsi suivie par le point M $(x\ y)$ ne saurait jamais être une trajectoire du mobile sollicité par la force F ; c'est une conséquence immédiate de notre théorème du paragraphe précédent.

Prenons l'exemple suivant :

$$F = re^{\theta}.$$

Lorsque le point M (r, θ), partant d'une position quelconque M (r, θ), y revient après avoir décrit une courbe quelconque renfermant le pôle (origine des coordonnées), la fonction re^{θ} ne reprend pas la même valeur et se multiplie par $e^{2\pi}$; pour cette raison, grâce à notre théorème, aucune trajectoire d'un mobile sollicité par la force $F = re^{\theta}$ ne saurait renfermer le pôle (origine des coordonnées).

D'une façon plus générale, si l'intensité de la force F est donnée par une fonction P (r, θ) n'ayant pas par rapport à la variable θ la période 2π, alors l'équation :

$$P(r, \theta + 2\pi) = P(r, \theta)$$

ne sera pas satisfaite identiquement. Cela posé, l'application de notre théorème nous permet de conclure que les trajectoires d'un point matériel sollicité par cette force ne sauraient jamais renfermer le pôle ($r = 0$). Il n'y a que les trajectoires ayant des points singuliers à plusieurs rayons de courbure [2] que nous devons exclure dans cette conclusion ; nous devons même remarquer qu'en ces points singuliers

[1] La fonction $\omega(x, y)$ détermine non seulement l'intensité mais encore le sens de la force centrale.

[2] Ou bien à plusieurs tangentes.

les trajectoires exceptionnelles doivent, en général, avoir une infinité de rayons de courbure ou de tangentes parce que la fonction P (r, θ) quand elle n'est pas périodique en θ, admet une infinité de déterminations. Il en résulte que, dans le cas général, les trajectoires exceptionnelles présentant des singularités très compliquées doivent être considérées comme très rares. Elles doivent présenter des points multiples où se croisent une infinité de branches ; à chaque branche correspond une valeur du rayon de courbure ρ et à chaque tangente correspond une valeur de la quantité P ; aussi, à deux valeurs différentes de p correspondent deux tangentes différentes et à deux valeurs différentes de ρ correspondent, en général, deux branches différentes. Si le point multiple est à tangentes distinctes, il devient critique pour l'intensité F de la force à cause de la multiplicité du rayon ρ et de la distance P simultanément ; dans le cas contraire, ce n'est que le rayon de courbure ρ qui a plusieurs valeurs, en général, et rend le point critique pour l'intensité de la force F.

10. Les applications de notre théorème deviennent particulièrement intéressantes dans le cas où nous ne pouvons pas effectuer l'intégration de l'équation différentielle.

$$F = -mK^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right), \tag{8}$$

et déterminer les trajectoires du mobile, lorsque la force F est donnée comme fonction des coordonnées polaires r et θ.

Si nous tenons compte d'un théorème classique cité plus haut, nous remarquons que ce sont les points singuliers des dérivées partielles,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta},$$

qui nous intéressent au point de vue des invariants de ce travail, puisque ce ne sont que ces points qui entraînent la permutation des diverses branches des fonctions $\omega(x, y)$ et P (r, θ) lorsqu'on tourne autour d'eux. Nous savons, en effet, que l'intégrale

$$\int \frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,dy$$

le long d'une courbe fermée est nulle, si à l'intérieur de la courbe les dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ sont continues, finies et bien déterminées.

Dans l'exemple examiné plus haut où

$$F = re^{\theta}$$

le pôle, qui ne doit pas être renfermé par les trajectoires, est, en effet, un point singulier de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \theta} = re^{\theta}$, dont les déterminations coïncident en ce point.

Nous ne voulons pas nous étendre davantage, dans ce travail, sur les applications de notre invariant à la théorie des forces centrales, nous nous bornerons seulement à examiner le cas, où la force F est donnée par une fonction $f(z)$ analytique en $z = x + iy$.

Si nous posons :

$$f(z) = R(x, y) + i\Phi(x, y),$$

la seule trajectoire possible est celle qui est définie par l'équation $\Phi(x, y) = 0$.

Il est vrai que nous pouvons immédiatement constater par l'équation différentielle (8) si cette courbe est effectivement une trajectoire, mais il est quelque fois possible d'éviter cette preuve par l'application de notre invariant. Pour nous en rendre bien compte, laissons toute généralité, et prenons un exemple particulier, soit :

$$F = -i \log z = \theta - i \log r,$$

r et θ désignant les coordonnées polaires, et remarquons que la seule trajectoire possible est une circonférence de cercle ayant son centre au pôle ($r = 0$) et son rayon égal à l'unité. L'application de notre théorie nous permet de voir immédiatement que cette courbe n'est pas du tout une trajectoire effective, parce que cette courbe ne passant par aucun point singulier (n'ayant aucune singularité géométrique) renferme un seul point critique transcendant de la fonction analytique $-i \log z$, le point $z = 0$; lorsque le point mobile tourne une fois autour de l'origine des coordonnées, la fonction $-i \log z$ augmente de 2π et, par conséquent, la force ne serait pas un invariant par rapport à la trajectoire n'ayant aucune singularité géométrique. *Il est donc impossible qu'un mobile soit sollicité par une force centrale, dont l'intensité est donnée par la fonction — i log z.*

On pourrait aussi se poser la question suivante : Est-il possible que les composantes X et Y d'une force centrale soient données par des fonctions harmoniques conjuguées de façon que $X + iY$ soit une fonction analytique en $z = x + iy$?

Supposons qu'il en soit ainsi et appliquons l'égalité $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$ qui caractérise les forces centrales ayant comme centre l'origine des coordonnées.

Nous aurons :

$$X + iY = X + i\frac{y}{x}X = X\left(1 + i\frac{y}{x}\right) = \frac{X}{x}(x + iy) = \frac{X}{x}z ,$$

$$\text{et } \frac{X + iY}{z} = \frac{X}{x} .$$

Si donc $X + iY$ est une fonction analytique de z, il en sera de même du premier et du second membre de cette égalité, ce qui n'est possible que dans le cas où la fonction réelle $\frac{X}{x}$ est une constante C. On doit donc avoir :

$$X = Cx \quad \text{et} \quad Y = Cy ,$$

c'est-à-dire chacune des composantes X et Y doit être proportionnelle à la coordonnée correspondante et l'on aura

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = Cr .$$

C'est là un cas où tous les éléments de la force ne dépendent que de la position du mobile et dans lequel la théorie des invariants n'a pas à intervenir.

C'est la raison pour laquelle le cas, où $X + iY$ est une fonction analytique de $z = x + iy$, n'intéresse pas les forces centrales au point de vue de nos invariants.

Il n'est pas douteux qu'il y ait encore beaucoup de choses à faire dans l'étude du rôle que les fonctions multiformes jouent dans la Dynamique ; c'est là un domaine où des théories importantes de l'analyse moderne trouvent des applications intéressantes.

Georges RÉMOUNDOS (Athènes).

CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

Les démonstrations ordinaires pour l'opération bien connue du changement de variable dans une intégrale multiple sont non seulement artificielles, mais aussi difficiles à comprendre pour des étudiants qui n'ont pas une grande expérience des démonstrations de ce genre.

La démonstration de M. GOURSAT pour 2 variables, donnée dans son *Cours d'Analyse* n'est pas artificielle et est suffisamment simple, mais elle emploie la formule de Green.

Dans l'édition de 1893 du *Cours d'Analyse* de M. JORDAN, § 148 T. 1, il y a un aperçu d'une démonstration ingénieuse que l'on rend facilement parfaitement rigoureuse et qui peut être appliquée au cas d'un nombre quelconque de variables.

L'énoncé rigoureux de cette démonstration est :

Etant donné l'intégrale $\iint_A f(x, y)\, da$.

Admettons que

$$\left.\begin{aligned} X &= X(u, v) \\ Y &= Y(u, v) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sont des fonctions, continues de (u, v) dans toute une région $\overline{A}$ (limites comprises) et, telles qu'à chaque point (u, v) de $\overline{A}$ corresponde un point et un seul (x, y) de A.

De plus X'_u, X'_v, Y'_u, Y'_v sont des fonctions continues de (u, v) dans tout l'espace $\overline{A}$, et le déterminant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} X'_u & X'_v \\ Y'_u & Y'_v \end{vmatrix}$$

est de signe *invariable* dans tout l'espace $\overline{A}$, ou s'évanouit tout au plus en un point fixe de contenu (signification de Cantor) zéro dans $\overline{A}$.

Puisque la région A peut être subdivisée en petites régions d'une manière arbitraire, pourvu que *toutes* les dimensions de ces régions tendent vers zéro, nous pouvons diviser A en triangles de type Δ_i dont les sommets sont les points $(X_1 Y_1)$ $(X_2 Y_2)$ $(X_3 Y_3)$.

A ce triangle correspond, dans la région $\overline{A}$, un triangle $\overline{\Delta}_i$ dont les sommets sont $u_1, v_1, u_2, v_2; u_3, v_3$.

Si les lettres des sommets de Δ_i sont bien ordonnées, nous avons

$$\text{aire } \Delta_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ Y_1 - Y_2 & Y_2 - Y_3 \end{vmatrix}$$

et par le *premier théorème de la moyenne*

$$\text{aire } \overline{\Delta}_i = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} \overline{X}'_u \Delta_1 u + \overline{X}'_v \Delta_1 v & \overline{\overline{X}}'_u \Delta_2 u + \overline{\overline{X}}'_v \Delta_2 v \\ \overline{Y}'_u \Delta_1 u + \overline{Y}'_v \Delta_1 v & \overline{\overline{Y}}'_u \Delta_2 u + \overline{\overline{Y}}'_v \Delta_2 v \end{vmatrix},$$

où

$$\Delta_1 u = u_1 - u_2 , \quad \Delta_2 u = u_2 - u_3 , \text{ etc.}$$

et où $\overline{X}'_u$, $\overline{\overline{X}}'_u$; $\overline{Y}'_u$, $\overline{\overline{Y}}'_u$ ... sont aussi voisins que nous le voulons de $X'_u(u_1 v_1)$; $Y'_u(u_1 v_1)$ etc.; pour $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$ ... assez petits.

Nous avons alors, à cause de la continuité de X'_u, Y'_u ...,

$$\text{aire } \overline{\Delta}_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_2 u \\ \Delta_1 v & \Delta_2 v \end{vmatrix} J(u_1, v_1)(1 + \varepsilon), \qquad (2)$$

où ε tend uniformément vers zéro lorsque $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$, $\Delta_1 v$, $\Delta_2 v$, tendent vers zéro.

(2) nous montre que puisque $J(u, v)$ est de signe invariable lorsque nous circulons sur le contour du triangle Δ_i dans le sens positif, nous circulerons toujours sur le contour de $\overline{\Delta}_i$

dans le sens positif si J est positif dans $\bar{A}$ et nous circulerons toujours sur le contour de $\bar{\Delta}_i$ dans le sens négatif si J est négatif dans $\bar{A}$.

Ainsi les triangles $\bar{\Delta}_i$ couvrent la région $\bar{A}$ *sans en sortir*, si les triangles Δ_i couvrent la région A *sans en sortir*. (2) montre que en appliquant le principe de substitution des infiniments petits, nous avons

$$\iint_A f(x, y)\, da = \iint_{\bar{A}} f[X(u, v), Y(u, v)] \mid J \mid d\bar{a}$$

quand $d\bar{a}$ est l'élément d'aire de $\bar{A}$.

Dans le cas de trois variables notre élément de volume serait naturellement le tétraèdre.

M. B. Porter (Austin, Texas).

(Traduction de M[lle] R. Masson, Genève).

CAS PARTICULIERS D'EMPLOI DISSIMULÉ DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE DANS LES TEMPS LES PLUS RÉCENTS

I. — Dans la science moderne, outre les résultats indiqués précédemment[1] et obtenus par le développement de la méthode des essais et de sa forme particulière, il existe aussi des théories qui se servent directement de ces deux méthodes. Si cet emploi paraît actuellement un peu obscur, cela ne tient qu'à la forme de l'exposition ordinairement en usage dans les manuels et non à la nature du problème. Parmi ces théories-là, dans l'arithmétique élémentaire et dans l'algèbre supérieure on peut indiquer *la division des nombres entiers, l'extraction des racines, et la détermination des valeurs numériques des racines d'une équation.*

[1] V. L'*Ens. Math.*, 8[e] année, p. 177-150, 1906, 7[e] année, p. 343-356, 1905.

2. — La division des nombres entiers, considérée comme une action dérivée de l'action de soustraire, se présenta d'abord à l'humanité sous la forme de la question : de combien de parties égales au plus petit des deux nombres donnés se compose le plus grand ? Le chemin le plus court, indiqué par la question même, consiste en soustractions successives du diviseur jusqu'au moment où l'on obtient dans le reste un nombre égal à zéro, ou un nombre plus petit que le diviseur. Pour peu que le quotient soit grand, le procédé est très long et on a cherché à l'abréger le plus possible. Le moyen le plus simple fut donné par l'idée qu'il était possible de remplacer plusieurs ou bien toutes les soustractions par une seule, c'est-à-dire par la soustraction du dividende du produit du diviseur par le nombre de toutes les soustractions dans le premier cas et par le quotient dans le second cas. Sous l'influence de cette idée la question de la division apparut sous une nouvelle forme : trouver un nombre qui, multiplié par le diviseur, donne un nombre ou bien égal au dividende ou n'en différant que par un nombre plus petit que le diviseur. A cette forme de la question on a déjà appliqué autrefois la méthode des essais. Considérons par exemple les trois cas suivants de division : 32,647 : 324 ; 33,758 : 324 ; 78,547 : 324. La détermination des limites entre lesquelles doivent se trouver les essais, nous donne 100 et 1000. Si pour l'essai initial on prend la limite inférieure et qu'on le vérifie ensuite par les conditions de la question, on trouve qu'il convient dans le premier cas et ne réussit pas dans les deux autres. On a :

32647	33758	78547
32400	32400	32400
247	1358	46147
	1296	32400
	62	13747
		12960
		787
		324
		463
		324
		139

Il faut noter que la différence trouvée par la vérification dans le second cas est plus petite que le produit de l'essai par le diviseur et plus grande dans le troisième cas. Pour que dans le troisième cas cette différence soit encore plus petite que le produit mentionné, on soustrait de la différence trouvée le produit de l'essai par le diviseur autant de fois que possible, c'est-à-dire pas moins d'une fois et pas plus de neuf fois. Ce nombre étant déterminé soit directement par soustraction soit par les essais, on voit immédiatement qu'il représente les unités de l'ordre supérieur du quotient cherché. Ainsi s'applique la méthode de la formation ou de la composition graduelle de l'inconnu suivant les conditions de la question, le procédé consistant en la détermination successive des nombres des unités des différents ordres du quotient cherché. Dans le troisième des cas considérés le nombre des soustractions successives ou, ce qui revient au même, le nombre des centaines dans le quotient cherché égale 2. Or ce résultat étant acquis, la différence est aussi bien que dans le second cas plus grande que le diviseur et la question se pose : par quel nombre faut-il multiplier le diviseur pour que le produit obtenu soit ou bien égal à cette différence ou bien qu'il n'en diffère que par un nombre plus petit que le diviseur. Les limites inférieure et supérieure des essais ayant pour but de déterminer ce nombre sont 10 et 100. Après avoir commencé de nouveau les essais par la limite inférieure 10 et constaté l'échec par vérification, on recommence le chemin déjà fait auparavant et l'on trouve au quotient 40 et comme reste 787. Mais ce reste étant plus petit que le soustrahende 3240 est encore plus grand que le diviseur. En le traitant de la même façon et en limitant les essais pour les nombres 1-10, on trouve 2 pour le nombre des unités du quotient et 139 comme reste. Ici la division s'achève, car ce nombre est plus petit que le diviseur. En ce qui concerne le quotient tout entier, en réunissant ses parties trouvées, 200, 40 et 2, on le trouve égal à 242. Enfin dans le deuxième cas de division considéré, que nous avons laissé provisoirement de côté, le même procédé nous amène à 4 comme la dernière partie du quotient et au reste 62 plus petit que le diviseur. Le quotient complet fourni par la réunion de ses parties trouvées 100 et 4, est donc dans le second cas 104.

En schématisant ce procédé exposé de la division des nombres entiers, on peut dire que : *pour déterminer le nombre des unités du plus haut des ordres qui forment le quotient, il faut le nombre des unités du même ordre dans le dividende à diviser par le diviseur; de même pour la détermination des nombres des unités des ordres suivants du quotient, il faut diviser par le diviseur les nombres des unités du même ordre dans les restes correspondants.* On voit que ce schema n'est autre chose qu'un bref exposé de la règle, citée dans les manuels élémentaires d'arithmétique.

Ces règles si simples et compréhensibles de la division des nombres entiers ont été entièrement perdues au cours des siècles pour la science scolaire et les auteurs des traités d'arithmétique ont employé des procédés tout à fait artificiels, fondés sur la considération de cas particuliers. Ces procédés ont tellement compliqué le sujet et rendu si difficile sa compréhension, que le chapitre de la division dans l'arithmétique des nombres entiers est devenue le plus difficile pour les commençants. J.-A. Serret dans son traité d'arithmétique, qui est l'un des meilleurs manuels existants, considère préalablement en quatre pages pour déduire la règle de division des nombres entiers dans le cas général, « détermination du nombre de chiffres du quotient », « cas particulier où le quotient n'a qu'un chiffre », « principe sur lequel repose la division lorsque le quotient a plusieurs chiffres ». En outre dans ce même manuel l'exposition « du cas général de la division » occupe trois pages et plus loin le « cas particulier où le diviseur est terminé par des zéros » presque une page.

3. — Les pythagoriciens apprirent aux anciens Grecs à connaître les nombres carrés, dont on se sert dans l'extraction de la racine carrée, par la méthode des essais, déjà connue dans ses traits généraux. Puis on établit le tableau des nombres carrés fournissant avec une approximation d'une unité la racine carrée du chaque nombre entier donné. En ce qui concerne la partie fractionnaire de la racine carrée,

Théon d'Alexandrie, le mathématicien grec du 4^{me} siècle après J.-C., dans son commentaire du premier livre d'*Almageste* de Ptolémée et de même que Ptolémée utilisait pour la détermination de cette partie la méthode des rectangles ou du gnomon. L'emploi fréquent de cette méthode chez les mathématiciens du 16^{me} siècle et des siècles voisins permet d'affirmer avec certitude que cette méthode était employée avec la méthode des essais aussi pour la détermination de la partie entière de la racine. Voici sous quelles formes devait se présenter dans ce cas le procédé de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier. Soit à déterminer $\sqrt{8476}$. Le nombre donné se trouvant entre 1000 et 10000, les limites des essais seront 10 et 100. En prenant comme essai initial le nombre 90, nous le trouverons entièrement satisfaisant, car la soustraction du carré de ce nombre du nombre donné, donne un nombre plus petit que le minuende. Or la bande *bab* qu'on ajoute au

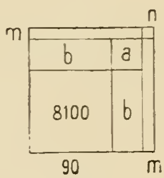


Fig. 1.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8476} \\ 8100 \\ \hline 376 \\ 360 \\ \hline 16 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

carré $90^2 = 8100$ se compose d'un carré *a* et de deux rectangles *b* et *b*, ayant comme côtés inégaux le côté 90 et le côté inconnu du carré *a*. C'est pour la détermination de ce dernier qu'il faut faire un essai. Mais si, d'accord avec la méthode de la formation ou de la composition graduelles de l'inconnue, selon les conditions de la question, on tient compte du fait que la détermination du nombre des dizaines de la racine étant déjà faite, le côté du carré *a* doit représenter le nombre de ses unités, — alors il faudra prendre pour les limites des essais, qui servent à la détermination de ce côté les nombres 1 et 10. Si l'on fait l'essai 1 la somme des aires des rectangles *b* et *b*, 180, et de celle du carré *a* 1 sera 181, ce qui ne suffit pas pour faire disparaître aussi complètement que possible de la différence 376, trouvée par la soustraction du carré 8100, ou, en d'autres termes, pour trouver dans le reste un nombre plus petit que le soustrahende. Or, comme l'essai suivant avec le nombre 2 est satisfaisant, le côté cherché du carré *a*, c'est-à-dire le nombre des unités sera 2. En faisant l'essai 1, ce même nombre peut être trouvé directement par la détermination du rapport de la différence 376 à la somme des aires des rectangles *b* et *b*, ceux-ci constituant la plus grande partie de la portion complémentaire, c'est-à-dire par la division de la différence 376, par la somme mentionnée. En le vérifiant ensuite par les conditions de la question, on verra si le quotient trouvé est en effet le côté cherché du carré ou bien s'il doit être diminué. Dans le cas actuel, le quotient 2 est le nombre cherché des unités de la racine. La racine carrée cherchée sera donc 92.

Examinons maintenant un exemple plus compliqué. Supposons qu'il faille déterminer $\sqrt{743526}$. Les limites des essais sont données par les nombres 100 et 1000 dont les carrés sont 10000 et 1000000.

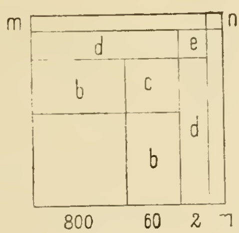


Fig. 2.

$$\begin{array}{r l}
\sqrt{743526} & \\
\overline{640000} & \\
\overline{103526} & \vert\, 16000 \\
96000 & \vert\, \overline{\quad 6} \\
\hline
7526 & \\
3600 & \\
\overline{3926} & \vert\, 1720 \\
3440 & \vert\, \overline{\quad 2} \\
\hline
486 & \\
\overline{4} & \\
\overline{482} &
\end{array}$$

En procédant comme dans l'exemple précédent on trouve le nombre des centaines (800) de la racine cherchée. Pour déterminer les nombres des ordres des dizaines et des unités prenons respectivement deux bandes *b c b* et *d e d*, dans lesquels le côté du carré *c* représentera le nombre des dizaines et celui du carré *e* le nombre des unités. Les essais de détermination des côtés de ces carrés seront compris respectivement entre les limites 10 et 100 et entre 1 et 10. En déterminant ensuite le côté du carré *c* par les moyens indiqués déjà dans l'exemple précédent, c'est-à-dire soit par les essais, soit par la détermination directe du nombre cherché, en divisant la différence 103526 trouvée précédemment par la somme des rectangles *b* et *b* obtenus par l'essai 10, c'est-à-dire par le nombre 16,000, nous trouverons pour le côté cherché du carré *c* le nombre 60. Par les mêmes procédés pour le côté du carré *e* dans le gnomon *d e d*, ayant pour un des côtés de ses rectangles le nombre 860, nous trouverons le nombre 2. En réunissant les parties trouvées de la racine cherchée (800, 60 et 2) on trouve cette racine égale à 862. Les restes de l'extraction de la racine carrée dans les deux exemples (12 et 482) sont figurés par les gnomons *m n m*.

Des considérations précédentes sur l'extraction de la racine carrée, il résulte la règle suivante :

Ayant déterminé le nombre des unités de l'ordre supérieur, les nombres des unités des ordres suivants s'obtiennent par la division du reste trouvé : par le double du nombre, qui représente dans la bande correspondante le plus grand côté de ses rectangles et en vérifiant ensuite par les conditions de la question le quotient trouvé regardé comme le nombre possible des unités de l'ordre considéré.

En remplaçant la méthode géométrique par le procédé algébrique, et en renonçant à la méthode des essais et à sa forme particulière, on a non seulement privé le procédé de l'extraction de la racine carrée, non seulement de sa clarté primitive, mais on a compliqué l'exposé. La considération du schema et la déduction de la règle facilitent grandement la première étude de l'extraction de la racine carrée, tandis que pour les commençants elle devient un objet d'étude des plus difficiles et vite oublié lorsqu'on se borne à la méthode algébrique.

Dans son manuel d'algèbre élémentaire, le professeur Davydoff expose cette règle de la façon suivante: « on divise en tranches le nombre donné et l'on détermine le nombre dont le carré se rapproche le plus de la première tranche. Ce nombre représente le premier chiffre du quotient. Ayant soustrait son carré de la première tranche et ajouté la tranche suivante. on obtient le soi-disant premier reste ; en séparant dans ce reste le dernier chiffre, nous divisons les autres par le double du premier chiffre de la racine; *le quotient est le second chiffre de la racine*; on le place à la droite du diviseur, on multiplie le diviseur avec le chiffre ajouté par le *second chiffre de la racine* et l'on soustrait le produit du premier reste; mais si le produit est plus grand que le reste, on diminue d'une unité le second chiffre de la racine. Au reste trouvé on ajoute la tranche suivante et l'on trouve de cette manière le soi-disant second reste, en le traitant comme le premier *on trouve le chiffre suivant de la racine* et ainsi de suite. Si le dernier reste est zéro, le nombre trouvé est la racine exacte du nombre donné; dans le cas contraire le nombre donné n'a pas de racine exacte ». A la démonstration et à l'exposition de cette règle sont consacrées neuf pages et la démonstration elle-même se base sur les faits suivants : la détermination préalable du nombre des chiffres de la racine; l'extraction de la racine carrée d'un nombre $\geqq 10$ et < 100; enfin l'extraction de la racine dans le cas d'un nombre quelconque. En ce qui concerne l'exposé donné de la règle, outre ses défauts essentiels — longueur et manque de clarté — il contient dans les lignes par nous soulignées des affirmations inexactes au point de vue général et que contredit l'exposé dont elles sont suivies.

Dans le traité de J.-A. Serret l'exposé de la règle considérée occupant toute une page est encore plus long, mais en revanche on a su éviter une affirmation inexacte signalée dans l'exposé du professeur Davydoff, et, ce qui est surtout remarquable, c'est grâce au fait que l'on s'est adressé directement à la vraie nature de l'objet, c'est-à-dire à la méthode des essais. En effet, dans le passage correspondant, Serret s'exprime ainsi «... on obtient ainsi un premier reste à la droite duquel on abaisse la deuxième tranche. On sépare le dernier chiffre du nombre ainsi formé, et l'on divise la partie à gauche par le double du premier chiffre de la racine. »

« Le quotient entier de cette division est égal ou supérieur au deuxième chiffre de la racine. Pour *essayer* ce chiffre, on l'écrit à la droite du double du premier chiffre de la racine, et l'on multiplie le résultat par le chiffre *essayé*. On retranche le produit du nombre formé par le premier reste suivi de la deuxième tranche : si la soustraction peut se faire, le chiffre *essayé* est exact ; sinon, *on essaye* de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre exact. »

4. — La voie, suivie pour la démonstration de la règle de l'extraction d'une racine carrée, a conduit à la *règle de l'extraction de la racine cubique* d'un nombre entier.

En cherchant un procédé analogue à la méthode des rectangles on a été amené à envisager le cube. On décompose un cube de côté $a + b$ en parties qui sont les termes du développement de $(a + b)^3$.

5. — Le procédé qui sert à la détermination de la valeur numérique d'une racine d'une équation d'un degré quelconque, connu sous le nom de *méthode de Newton* a été trouvé d'abord par Viète qui l'a exposé dans son ouvrage *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione.* »

Dans la science moderne on le déduit de la façon suivante, soit : $f(x) = Q$ une équation à résoudre et soit a le nombre des unités de l'ordre supérieur de la racine cherchée trouvé par une voie quelconque. En désignant par p la partie complémentaire on trouve

$$f(a.10\ldots00 + p) = f(a.10\ldots00) + pf'(a.10\ldots00) +$$
$$+ \frac{1}{2}p^2 f''(a.10\ldots00) + \ldots\ldots = Q.$$

En négligeant dans cette expression tous les termes d'ordre supérieur à partir du terme $\frac{1}{2} f''(a.10\ldots00)$ P et en divisant $Q - f(a.10\ldots00)$ par $f'(a.10\ldots00)$, on trouve le nombre b pour les unités de l'ordre supérieur dans la partie complémentaire. Si l'on remplace maintenant dans la même équation p par $b.10\ldots00 + q$, où q représentera de nouveau la partie complémentaire de la racine cherchée cette équation s'écrira

$$f(a.10\ldots00 + b.10\ldots0 + q) = f(a.10\ldots00 + b.10\ldots0) +$$
$$+ qf'(a.10\ldots00 + b.10\ldots0) + \frac{1}{2}q^2 f''(a.10\ldots00 + b.10\ldots0) + \ldots\ldots = Q$$

d'où il résulte le nombre c des unités de l'ordre supérieur dans la partie complémentaire; en négligeant les termes d'ordres supérieurs on aura le quotient

$$\frac{Q - f(a.10\ldots00 + b.10\ldots0)}{f'(a.10\ldots00 + b.10\ldots0)} \text{ etc.}$$

6. — Viète examine le cas des équations du deuxième degré dans son ouvrage *ad Logisticen speciosam notae priores et posteriores;* il est parvenu à sa méthode par l'extension de la méthode des rectangles à l'expression

$$(A + B)^2 + D(A + B) .$$

Cette extension s'obtenait par l'augmentation du carré construit sur le côté A + B par le rectangle construit sur le même côté et ayant pour l'autre côté D. Pour déterminer à l'aide de cette extension le nombre des unités des différents ordres, qui forment la racine d'une des équations considérées par Viète

$$x^2 + 7x = 60750 ,$$

on peut procéder de la façon suivante : La valeur approchée de la racine carrée du nombre 60750 est 246, donc le nombre des unités de l'ordre des centaines dans la racine de l'équation considérée ne peut surpasser 2, la racine elle-même étant plus petite que 246.

$$\begin{array}{r|c}
60750 & \\
41400 & \\
\hline
19350 & 4070 \\
17880 & \overline{4} \\
\hline
1470 & 487 \\
1470 & \overline{3} \\
\hline
\end{array}$$

En prenant le nombre 2 pour un essai, on le trouve satisfaisant, car la vérification par les conditions de la question nous donne pour la différence du nombre 60750 et du binôme

$$200^2 + 7.200 = 41400$$

un nombre plus petit que le soustrahende. Cette différence, c'est-à-dire le nombre 19350, représente comme c'est facile à voir la portion $a\ d\ b\ e\ c\ f$. On trouve facilement que les essais de la détermination de nombre doivent être compris entre les limites 10-100. On prend pour l'essai initial la limite inférieure ; on le vérifie par les conditions de la question, c'est-à-dire on soustrait du nombre 19350 le nombre 2.200.10 + 100 + 70 = 4170, fourni par l'essai. On voit que l'évanouissement du premier nombre n'est aussi complet qu'il pouvait être ou, en d'autres termes, on n'obtient pas dans le reste (15180) un nombre plus petit que le soustrahende. En passant aux essais suivants 20, 30, 40, on trouve que l'évanouissement aussi complet que possible du nombre 19350 se réalise seulement par l'essai 40, cet essai donnant pour reste de la soustraction 19350 — (2.200.40 + 1600 + 280) le nombre 1470 plus petit que le soustrahende 17880. Comme dans le cas de l'extraction de la racine carrée, le processus compliqué de la considération des quatre essais consécutifs peut être remplacé par la détermination directe du plus grand essai de tous les essais possibles par la division du nombre 19350 par la somme des trois rectangles qu'on obtient au moyen de l'essai 10, c'est-à-dire par le nombre 4070 soit 407.10. Le quotien 4 provenant de cette division est le plus grand essai possible servant à déterminer le nombre des dizaines de la racine. En effet, d'après ce qui précède cet essai vérifié par les conditions de la question est précisément ce nombre. Après avoir déterminé les côtés du carré *b* dans le gnomon *a b c*, soit le nombre des dizaines de la racine, on passe à la détermination du nombre des unités ou en d'autres termes à la détermination du côté du carré *e* dans la portion *d e f*. Les essais correspondants seront donc compris entre les limites 1-10. En suivant la même marche que dans le cas précédent on trouve le nombre cherché soit par les essais subséquents, soit par la division du dernier reste 1470, considéré comme représentant toute la bande *d e f* ou sa plus grande partie, par la somme des trois rectangles du gnomon, obtenu au moyen de l'essai 1, c'est-à-dire par le nombre 2.240 + 7 = 487. Le quotient trouvé 3, après la vérification par les conditions de la question, en effet se trouve être égale au nombre cherché et le nombre 243, obtenu par la réunion des côtés des trois carrés 200 + 40 + 3, est la racine cherchée exacte de l'équation, donnée du deuxième degré.

En schématisant le processus exposé, on peut dire qu'après avoir déterminé par les essais le chiffre de l'ordre supérieur de la racine (la limite supérieure de cet essai est indiquée par la racine carrée du terme connu de l'équation) les chiffres suivants se déterminent par la division de chacun des restes par la somme des aires des trois rectangles, appartenant au gnomon correspondant et calculés au moyen de l'essai unité de l'ordre considéré, et ensuite par la vérification par les conditions de la question du quotient obtenu, envisagé comme le nombre possible des unités de l'ordre considéré. Comme c'est facile à voir dans toutes ces divisions, le diviseur est la dérivé de la fonction $f(x)$, dont l'expression est la partie gauche de l'équation et dans laquelle a est remplacé par sa partie trouvée accompagnée d'un certain nombre de zéros, représentant les ordres de la partie encore inconnue de la racine.

7. — Un procédé analogue pour calculer la racine d'une équation du troisième degré a été trouvé par Viète, soit par la même voie, comme dans le cas d'une équation du deuxième degré, c'est-à-dire par une méthode analogue à la méthode des rectangles, soit algébriquement par un moyen, dont il se sert dans les cas des équations des 4^{me}, 5^{me}, 6^{me} degrés. Ce moyen consiste d'abord à remplacer x dans l'équation considérée par la somme

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

où x_1, x_2, x_3,... sont les nombres des unités des ordres consécutifs de la racine ; ensuite on ordonne les termes, obtenus après la substitution, cette opération étant conciliée avec les besoins de l'élucidation de la règle cherchée. Mais il n'y a pas de raison pour entrer dans les détails de ce procédé, car il ne se trouve pas en rapports directs avec la méthode des essais. Les mathématiciens de nos jours sont loin de la compréhension et de la connaissance des méthodes employées par Viète; on peut en juger : 1) par les paroles de Moritz Cantor [1], relatives au passage correspondant

[1] Moritz CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. II. S. 588.

dans la résolution d'une équation du deuxième degré citée plus haut, qu'en divisant 19350 par 407 on obtient $x_2 = 40$, et 2) par le compte rendu de Maximilien Marie sur l'ouvrage de Viète, consacré au sujet considéré, qu'il envisage comme « un essai infructeux de résolution des équations de tous les degrés à coefficients numériques [1]. »

(Traduction de M. V. Frédéricksz, Genève.)

V. Bobynin (Moscou).

LE LEMME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES NOMBRES

Avant-Propos. — Historiquement, la théorie des nombres tire son origine des spéculations des Anciens sur les identités géométriques ou algébriques, les proportions, les progressions, les combinaisons, les nombres polygones, figurés, parfaits, les carrés magiques, les problèmes indéterminés et surtout les triangles rectangles en nombres entiers; mais la voie la plus naturelle qui y conduit est sans contredit, l'idée de congruence, énoncée explicitement, pour la première fois par Gauss. Plus immédiatement, on peut établir cette théorie en partant, par exemple, de l'analyse indéterminée, du théorème de Fermat, de la théorie des résidus, de la loi de réciprocité, de la formule de Moivre, ou encore d'un théorème démontré par Euler, page 75 du tome VIII des *Novi Comm. Petr* [2].

Ce dernier moyen paraît le plus propre à pénétrer rapidement dans le sujet, car il en fait comprendre d'un seul coup

[1] Maximilien Marie. *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, III, p. 61.

[2] « Si per numerum quemcunque n termini progressionis arithmeticæ cujuscunque, cujus differentia sit numerus ad n primus, dividantur, inter residua occurrent omnes numeri divisore n minores ».

l'esprit et la méthode ; d'ailleurs il y est employé à chaque instant,

Pour ces deux raisons, il semble que ce serait chose utile qu'une monographie de ce théorème et de ses nombreuses conséquences, presque toutes origines directes des diverses divisions de la théorie des nombres. Tel est le programme du présent article, le second de ceux que nous avons annoncés, page 25[1].

1. — La relation que présentent deux entiers a, A, ne différant que d'un multiple de b, s'écrit $a \equiv A \pmod{b}$ et s'énonce a *congru* à A, *suivant le module* b.

Si on a :

$$a \equiv A\,,\ a' \equiv A'\,,\ a'' \equiv A''',\ \ldots \qquad (\text{mod. } b)$$

on aura aussi :

$$aa' \ldots \equiv AA' \ldots\,,\quad ka \equiv kA\,,\quad ka + la' + \ldots \equiv kA + lA' + \ldots\,,$$
$$a^n \equiv A^n \qquad (\text{mod. } b)$$

De plus, si le nombre k divise a et A et qu'en outre il soit premier avec b,

$$\frac{a}{k} \equiv \frac{A}{k}\,. \qquad (\text{mod. } b)$$

2. — *Les entiers* a *et* b *étant premiers entre eux, si on divise par* b *les* (b — 1) *premiers multiples de* a, *les restes seront, dans un certain ordre les* (b — 1) *premiers entiers.* (Euler, 1759). Aucun reste n'est nul, et il ne peut y en avoir deux qui soient égaux, car, autrement on aurait, par exemple,

$$\alpha a \equiv r \quad \text{et} \quad \beta a \equiv r \quad \text{d'où} \quad (\alpha - \beta)\, a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } b)$$

ce qui est impossible, puisque a est premier avec b et que, $\alpha - \beta$ étant $< b$, l'expression $(\alpha - \beta)\, a$ ne peut représenter un multiple de b.

Cor. I. Si a et b sont premiers entre eux, on peut toujours trouver, au-dessous de b, un nombre x qui satisfasse à la congruence $ax \equiv c \pmod{b}$, ou, si l'on veut, à la relation $ax - by = c$.

---

[1] Dans le premier article, prière de rectifier ainsi le commencement du n° 3, page 25 :
3. — Posons $\rho^2 \equiv r$, il viendra $\rho^{\mu - 1} \equiv r^m \equiv 1$: on a donc, etc.

Si a et b ne sont pas premiers entre eux et que θ soit leur p. g. c. d., $\frac{a}{\theta}$ et $\frac{b}{\theta}$ seront premiers entre eux et on pourra écrire $ax - by = c\theta$.

On remarquera que si x satisfait à la congruence $ax \equiv c$ (mod. b), tous les nombres congrus à x, c'est-à-dire compris dans la formule $kb + x$, y satisferont également, et il n'y aura que ceux-là.

Cor. II. Si $(kb + a)(lb + x) = mb + c$, x a toujours une valeur unique $< b$. Ainsi tout nombre qui, multiplié par $8 + 5$[1], donne un produit $8 + 7$, est de la forme $8 + 3$, puisque $3.5 = 8 + 7$.

Si a et αa sont tous deux $\equiv 1$ (mod. b), il en est de même de α.

Cor. III. Supposons b impair : les restes de la division par b des nombres a, $2a$, $3a$, ... $\frac{b-1}{2}a$ sont tous différents et de plus la somme de deux restes quelconques ne peut être égale à b. (Gauss).

Cor. IV. Soit a l'un des nombres $1, \alpha, \alpha', \alpha'', \dots b - 1$, lesquels sont inférieurs à b et premiers avec lui : la division des nombres a, $a\alpha$, $a\alpha'$, ... $a(b-1)$ par b, donnera comme restes les mêmes nombres 1, α, α', ... (Gauss).

Cor. V. Nombres associés. Appelons *associés relativement* à b, deux nombres dont le produit est $\equiv 1$ (mod. b) : un nombre quelconque, premier avec b, a son associé (Euler 1772).

En particulier, si b est un nombre premier p, tout entier inférieur à p a son *associé*. En outre les nombres 1 et $p - 1$ sont les seuls à être leurs propres associés, car, de $x^2 \equiv 1$[2], on tire $(x + 1)(x - 1) \equiv 0$.

On verra de même : 1° que 2 et $\frac{p+1}{2}$ sont associés, de même que $\frac{p-1}{2}$ et $p - 2$; 2° que les compléments à p de deux associés sont eux-mêmes associés.

Cor. VI. Si n divise $a^2 \pm kb^2$, a et b étant premiers entre eux, il divise aussi un certain nombre de la forme $x \pm k$.

---

[1] Nous entendons par là un multiple de 8 augmenté de 5.

[2] Quand le module est le nombre premier indéterminé p, on se dispense d'écrire la mention (mod. p).

Euler 1748). Démonstration de Lagrange (1769). On peut écrire $a \equiv bx$ (mod. n), d'où

$$0 \equiv a^2 \pm kb^2 \equiv b^2x^2 \pm kb^2 = b^2(x^2 \pm k) . \qquad (\text{mod. } n)$$

En particulier, si le nombre premier p divise $a^2 \pm kb^2$, il divise aussi $x^2 \pm k$ [1].

Cor. VII. Les nombres a et b étant premiers entre eux, tout diviseur de $a^2 + kb^2$ est de la forme $Lb^2 + Mbx + Nx^2$ et on a en outre $4LN - M^2 = 4k$ (Lagrange 1775 [2]).

Soit n un diviseur de $a^2 + kb^2$; on peut écrire $a = bv + nx$, ce qui donne

$$a^2 + kb^2 = (v^2 + k) b^2 + 2vnbx + n^2x^2 ,$$

ce qui montre que n divise $v^2 + k$, puisque n et b sont premiers entre eux.

Remarques. Formes réduites. On donnera ainsi qu'il suit une forme plus précise au diviseur. Si, en valeur absolue, $M > L$ ou $> N$, la formule $Lb^2 + Mbx + Nx^2$ peut se changer en $L'b'^2 + M'b'x' + N'x'^2$, avec les relations

$$4L'N' - M'^2 = 4k \quad \text{et} \quad M' < N , L' \geqq L , N' \geqq N .$$

Faisons en effet $b = b' - mx'$, $x = x'$; la transformée s'obtiendra en posant :

$$L' = L , M' = M - 2Lm , N' = Lm^2 - Mm + N ,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad 4L'N' - M'^2 = 4LN - M^2 .$$

Or on peut prendre m tel que, en valeur absolue, on ait $M' < L' = L < M$ et de là, à cause de (α), $L'N' > LN$ ou $N' > N$.

Si $M' > N'$ on opérera de même et on obtiendra une autre transformée du diviseur, laquelle donnera $4L''N'' - M''^2 = 4k$, $N'' = N'$, $M'' < M'$, $L'' > L'$; et ainsi de suite.

---

[1] On dit souvent que *p divise* $Ax^2 + Bx + C$, pour signaler qu'il existe un entier x, qui rend la valeur de l'expression $Ax^2 + Bx + C$ divisible par p.

[2] Le théorème de Lagrange est plus général : il traite l'expression $Aa^2 + Bab + Cb^2$, au lieu de $a^2 + kb^2$; mais il suffit de considérer cette dernière, car la précédente s'y ramène immédiatement, puisqu'on peut l'écrire ainsi

$$\frac{(2Aa + Bb)^2 + (4AC - B^2)b^2}{4A} .$$

Puisque les nombres M, M′, M″, ... décroissent de plus en plus, que L, L′, ... et N, N′, ... ne croissent pas, on arrivera à une expression de la forme suivante

$$Py^2 + \Phi yz + Rz^2 ,$$

pour le diviseur de $a^2 + kb^2$. Dans cette expression, appelée par Gauss, la *forme réduite*[1], y et z sont premiers entre eux, $\Phi \leqq P$, $\Phi \leqq R$ et de plus

$$(\beta) \qquad 4PR - \Phi^2 = 4k .$$

Si $k > 0$, 4PR est positif et comme $P \geqq \Phi$, $R \geqq \Phi$, on aura :

$$4PR \geqq 4\Phi^2 , \quad \text{d'où} \quad \Phi \leqq 2\sqrt{\frac{k}{3}} .$$

Si $k < 0$, on aura :

$$\Phi^2 - 4PR > 0 , \quad \text{d'où} \quad \Phi \leqq 2\sqrt{\frac{-k}{5}} .$$

Φ est pair d'après (β) ; on prendra Φ d'après les limites indiquées et pour P et R, les facteurs de $\dfrac{\Phi^2 + k}{4}$, en rejetant ceux qui seraient $< \Phi$.

Le nombre des diviseurs est visiblement fini.

Diviseurs quadratiques. — 1° soit $k = 1$; on aura $\Phi \leqq 2\sqrt{\frac{1}{3}}$; donc $\Phi = 0$ et d'après (β), $PR = 1$, d'où $P = 1$, $R = 1$. Ainsi *les diviseurs de* $a^2 + b^2$ *sont de la forme* $y^2 + z^2$ (Fermat).

2° Soit $k = 2$; il viendra $\Phi \leqq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où $\Phi = 0$, $PR = 2$, $PR = 1$, $R = 2$. Ainsi *les diviseurs de* $a^2 + 2b^2$ *sont de la même forme* (Euler).

3° Soit $k = 3$; il viendra $\Phi \leqq 2$; Φ peut prendre les valeurs 0 ou 2. La première donne $PR = 3$, d'où $P = 1$, $R = 3$. La seconde, $PR = 4$, d'où $P = R = 2$. Ainsi *les diviseurs impairs de* $a^2 + 3b^2$ *sont de la même forme* (Euler).

[1] Gauss y arrive par certaines transformations qui en rendent l'étude théorique plus accessible, mais il suffit pour notre objet de montrer l'existence de la forme reduite.

4° Soit enfin $k = -2$: on aura $\Phi \leq 2\sqrt{\frac{2}{5}}$; donc $\Phi = 0$, $PR = 2$, $P = 1$, $R = 2$; ou bien $P = 2$, $R = 1$.

Les diviseurs sont ainsi de l'une des formes $y^2 - 2z^2$ ou $2y^2 - z^2$, lesquelles n'en font qu'une, car on a

$$y^2 - 2z^2 = 2(y - z)^2 - (y - 2z)^2 .$$

Ainsi *les diviseurs de* $a^2 - 2b^2$ *sont de la même forme* (Euler).

Legendre a donné la table des diviseurs quadratiques jusqu'à $k = \pm 103$. Pour s'exercer, on pourra vérifier que les facteurs de $a^2 + 13b^2$ sont de l'une des formes

$$y^2 + 13z^2 , \quad 2y^2 + 2yz + 7z^2 .$$

Diviseurs linéaires. Reportons nous aux quatre applications qui précédent et considérons seulement les diviseurs impairs.

1° y et z étant premiers entre eux et $y^2 + z^2$ un diviseur impair, on a, par exemple, y pair et z impair. Il suit de là que *les diviseurs impairs de* $a^2 + b^2$ *sont de la forme* $4 + 1$ (Fermat).

2° $y^2 + 2z^2$ ne peut représenter un impair que si y est impair. Selon que z sera pair ou impair, on aura $y^2 + 2z^2 = 8 + 1$ ou $8 + 3$: telles sont les formes des diviseurs de $a^2 + 2b^2$ (Fermat).

3° L'un des nombres y, z est pair, l'autre impair : autrement $y^2 + 3z^2$ serait pair. D'ailleurs y ne peut être un multiple de 3 car $y^2 + 3z^2$ le serait aussi. Supposons y pair, il sera de la forme 6 ± 2, z sera impair et on aura $y^2 + 3z^2 = 6 + 1$. Soit y impair, ce qui demande qu'il soit de la forme 6 ± 1, z sera pair et on aura $y^2 + 3z^2 = 6 + 1$. Cette dernière forme est donc celle des diviseurs premiers impairs de $a^2 + 3b^2$ (Fermat).

4° On verra de même que tout diviseur impair de $a^2 - 2b^2$ est de l'une des formes $8 + 1$, $8 - 1$ (Fermat).

Diviseurs numériques. Les formules des diviseurs servent principalement dans la recherche des diviseurs des grands nombres. On en saisira l'usage par l'exemple simple suivant.

On a $10273 = 101^2 + 2.6^2 = 89^2 + 3.28^2$. Les diviseurs de ce nombre appartiennent ainsi aux formes $8+1$, $8+3$, $6+1$. La seule forme à essayer est donc $24+1$; or les seuls nombres premiers de cette forme inférieurs à $\sqrt{10273}$ sont 73 et 97 : la division par ces deux nombres ne réussissant pas, le nombre 10273 est donc premier.

Formes quadratiques. C'est ici le lieu de donner une idée de la théorie des *formes quadratiques*, c'est-à-dire des expressions de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$, qu'on représente par la notation (a, b, c). Cette théorie tire son origine des beaux théorèmes dûs à Fermat et démontrés par Euler, qui en a compris l'importance et dégagé les principes. Lagrange l'a définitivement fondée par sa considération des formes réduites ; Legendre l'a ensuite perfectionnée à divers égards ; mais c'est surtout Gauss qui, la reprenant systématiquement, en a fait le chapitre le plus vaste et le plus fécond de la théorie des nombres.

Le but de Gauss était primitivement la représentation des nombres par des formes, mais l'intérêt propre de ces expressions les lui a fait étudier en elles-mêmes et il a été suivi dans cette voie par les plus éminents arithméticiens.

Nous nous contenterons d'indiquer ici quelques notions très élémentaires de cette théorie, dans le but de familiariser avec la terminologie de Gauss, laquelle a souvent effrayé les débutants par le grand nombre des idées et des expressions nouvelles qu'elle a introduites dans la science des nombres.

1° Dans la forme $(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, substituons les valeurs

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y' ;$$

il viendra une autre expression de la forme

$$(a', b', c') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 .$$

On dit que la première forme *renferme* la seconde, et la substitution se figure par la notation $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$. De même dans la seconde forme, effectuons une substitution $\binom{\alpha'\beta'}{\gamma'\delta'}$, il viendra une troisième forme *renfermée* dans la deuxième. Or la première forme peut donner la troisième à l'aide d'une certaine substitution $\begin{pmatrix} \alpha'' \beta'' \\ \gamma'' \delta'' \end{pmatrix}$ déterminée par les formules

$$(1) \qquad \alpha'' = \alpha\alpha' + \beta\gamma', \quad \beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta', \quad \gamma'' = \gamma\alpha' + \delta\gamma', \quad \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta'.$$

et liée aux deux autres par la relation

$$(2) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = \alpha''\delta'' - \beta''\gamma''.$$

2°. Si dans la deuxième forme, les nombres x' et y' sont entiers, les nombres x et y de la première le seront également si l'on a $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$; et, dans ce cas, les deux formes sont dites *équivalentes*[1], *proprement* dans le cas du signe $+$ et *improprement* dans le cas du signe —. L'équivalence de ces deux formes se note ainsi $(a, b, c) \backsim (a'b'c')$.

La quantité $ac - b^2$ s'appelle d'après Gauss, le *déterminant* de la forme (a, b, c). Les déterminants de deux formes équivalentes sont égaux ; la réciproque n'est pas vraie en général.

3°. Les lettres x, y, x', y'... représentant des entiers qui peuvent être quelconques, on peut supprimer les accents dans une forme considérée isolément, et ainsi on peut dire que, si deux formes sont équivalentes, tout nombre représentable par l'une l'est également par l'autre.

4°. Si on a $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, la substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est très remarquable ; elle est dite *modulaire* et les formes qui s'en déduisent sont dites *de même classe*. Si $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, effectuer la substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ puis la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ revient à effectuer la substitution unique $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$, qui est modulaire.

---

[1] Telles sont les formes (a, b, c), (c, b, a), $(c, -b, a)$, $(a, -b, c)$, qui sont respectivement les formes *identique, associée, complémentaire et opposée* à la forme (a, b, c). Elles s'en déduisent par le moyen des substitutions $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dedekind a appelé par analogie *nombres équivalents* ceux qui sont compris dans la formule $\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, quand $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Ils jouent un rôle important dans la résolution des congruences du second degré.

5°. Deux formes réduites, qui ont un même déterminant positif, ne peuvent être de même classe que si elles sont identiques. De là le moyen de reconnaître si deux formes de même déterminant positif sont de même classe.

Si les nombres a, b, c n'ont aucun diviseur commun, et qu'on pose $ac - b^2 = D$. les valeurs déterminées par la relation $t^2 + Du^2 = 1$ donneront toutes les substitutions $\begin{pmatrix} t - bu & -cu \\ au & t + bu \end{pmatrix}$ qui changent la forme (a, b, c) en elle-même. On tire de là le moyen de trouver les substitutions modulaires qui lient deux formes à déterminants positifs et de la même classe.

Les théorèmes analogues dans le cas d'un déterminant négatif sont beaucoup moins simples.

6°. Les problèmes généraux résolus par Gauss et ses continuateurs visent surtout la détermination et le dénombrement des classes des formes de même déterminant, ainsi que différents modes de les grouper.

Cor. VIII. Si $n = a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2$, μ et ν étant premiers entre eux, on peut déterminer un nombre dont le carré divisé par n, donne pour reste $b^2 - ac$[1] (Gauss.) Posons en effet $\mu x - \nu y = 1$, il viendra

$$(3)\qquad [x(b\mu + c\nu) + y(a\mu + b\nu)]^2 = n(ay^2 + 2bxy + cx^2) + b^2 - ac.$$

Cor. IX. Une expression de la forme $Ax^n + \ldots + M \equiv 0$ s'appelle une *congruence* du n^e degré et les valeurs de x qui y satisfont et sont inférieures à p en sont les *racines*; les autres nombres plus petits que p en sont les *non-racines*.

n désignant un nombre inférieur à p, la congruence $F(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Lx + M \equiv 0$ ne saurait avoir plus de n racines (Lagrange, 1768). Soit en effet a une racine de $F(x) \equiv 0$; on a :

$$F(a) \equiv 0, \quad \text{d'où} \quad A(x^n - a^n) + B(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + L(x - a) \equiv 0.$$

Le premier membre est divisible par $x - a$, quantité non multiple de p. De là, une transformée, de la forme $Ax^{n-1} + \ldots + L \equiv 0$. Si le nombre b, plus petit que p est une autre

[1] Le nombre $b^2 - ac$ est dit *résidu* de n.

racine, on aura de même $A(x^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots \equiv 0$, d'où, en divisant par $x - b$, $Ax^{n-2} + \ldots \equiv 0$, laquelle ne peut avoir qu'une solution.

Certaines congruences ont toutes leurs racines ; certaines, au contraire, n'en ont aucune, comme la suivante, $x^2 - 2x + 4 \equiv 0 \pmod{5}$.

On suppose que les coefficients de $F(x)$ ne sont pas tous des multiples de p : autrement on aurait $F(x) \equiv 0$, quel que soit x. Une telle congruence est dite *identique*. Réciproquement, si on a $F(x) \equiv 0$ quel que soit x, les coefficients sont tous des multiples de p.

Remarques. 1° Euler avait esquissé, en 1754, une démonstration de ce théorème, qu'on peut présenter ainsi : Si les $(n + 1)$ premiers entiers étaient racines de $F(x) \equiv 0$, les valeurs correspondantes de $F(x)$ et leurs différences premières, secondes, ... seraient $\equiv 0$. Or la différence n^e est égale à $An!$ quantité incongrue à p. La supposition est donc fausse, et la congruence a des non-racines $\leq n + 1$.

2° Si le premier membre $F(x)$ peut se décomposer en deux facteurs entiers $f(x)$, $\varphi(x)$ de degrés k et $n - k$ et que la congruence $F(x) \equiv 0$ ait n racines, les congruences $f(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$ en ont respectivement k et $n - k$ (Lagrange.) En effet chacune ne peut en avoir davantage et elles ne peuvent en avoir moins, car toutes les racines doivent se retrouver dans la congruence $f(x)\,\varphi(x) \equiv 0$.

Euler avait auparavant démontré cette proposition, dans un cas particulier.

Cor. X. Criterium d'Euler. 1° Soit $a^2 \equiv r$, on aura également $(p - a)^2 \equiv r$: la congruence $x^2 \equiv r$ n'a que les deux racines a et $-a$[1], car on peut l'écrire $(x + r)(x - r) \equiv 0$.

Les $p - 3$ entiers inférieurs à p et différents de a et de $-a$ se partagent en $\frac{p-3}{2}$ groupes de deux nombres dont le produit est $\equiv r$. Comme $a(p - a) \equiv -a^2 \equiv -r$, on a, en multipliant ces $\frac{p-1}{2}$ groupes et posant $p = 2m + 1$,

$$(4) \qquad (p - 1)! \equiv -r^m .$$

[1] Pour abréger, on écrit souvent $-a$ au lieu de $p - a$.

2° Puisque dans certains cas, la congruence $x^2 \equiv z$ a deux racines, il y a, au-dessous de p, des valeurs ρ, de z, qui ne permettent pas de satisfaire à cette congruence[1]. On peut donc former, avec les $p-1$ premiers entiers, $\frac{p-1}{2}$ groupes de deux nombres dont le produit est $\equiv \rho$, et par suite on peut écrire :

$$(5) \qquad (p-1)! \equiv \rho^m .$$

3° La valeur $z = 1$ permet visiblement de satisfaire à la congruence $x^2 \equiv z$: on n'a qu'à faire $x = z = 1$. Donc, puisque le nombre r^m est congru à une constante, on peut écrire

$$r^m \equiv 1^m = 1 , \quad \text{et de là} \quad \rho^m \equiv -r^m \equiv -1 .$$

Ainsi, selon que la valeur de z permet ou ne permet pas de satisfaire à la congruence $x^2 \equiv z$, on a :

$$z^m \equiv \pm 1 .$$

Cette démonstration est due à Lejeune-Dirichlet.

Cor. XI. Représentons par $s_{k,n}$ la somme des n^{es} puissances des k premiers entiers, on a, pour $n < p-1$,

$$(6) \qquad s_{p-1,n} \equiv 0 . \qquad \text{(Gauss et Libri.)}$$

Démonstration de Poinsot (1845). Ecrivons $ax \equiv b$, d'où $(ax)^n \equiv b^n$; il s'ensuit que, pour $a = 1, 2, 3, \ldots p-1$, les restes de $(ax)^n$ seront, dans un certain ordre, les mêmes que ceux de a^n. On a donc, en comparant les deux séries de résultats et additionnant,

$$(x^n - 1)\, s_{p-1,n} \equiv 0 .$$

Prenons pour x une des non-racines de $x^n - 1 \equiv 0$, il viendra la relation annoncée.

Autre démonstration. L'expression $(x+1)^n - x^n$ est la somme des n termes

$$(x+1)^{n-1},\ (x+1)^{n-2}x,\ (x+1)^{n-3}x^2, \ldots x^{n-1} .$$

---

[1] Les valeurs de z sont appelées *résidus* ou *non-résidus* de p, selon qu'elles permettent ou non la réalisation de la congruence $x^2 \equiv z$.

et par suite, elle comprend visiblement n fois le terme x^{n-1}, plus des termes en x^{n-2}, x^{n-3}, ... On a donc :

$$(x+1)^n - x^n = nx^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \ldots Lx + 1\,,$$

A, B, ... désignant des coefficients indépendants de x. Changeant successivement x en 1, 2, 3, ... $a-1$ et additionnant, il viendra :

$$a^n = ns_{a-1,\,n-1} + As_{a-1,\,n-2} + \ldots + Ls_{a-1,\,1} + a\,;$$

de sorte que si $s_{a-1,\,n-2}$, $s_{a-1,\,n-3}$, ... sont des multiples de a et que n ne le soit pas, $s_{a-1,n-1}$ le sera également.

Or $s_{a-1,1}$ est un multiple de a ; il en est donc de même de $s_{a-1,2}$, puis de $s_{a-1,3}$, etc.

Cor. XII. Lemme de Gauss. Divisons par p les $\frac{p-1}{2} = m$ premiers multiples de a ; les restes seront, dans un certain ordre et avec des signes divers, les nombres ± 1, ± 2, ± 3, ... $\pm m$. Posons en conséquence :

$$a \equiv r_1\,,\quad 2a \equiv r_2\,,\quad \ldots\quad ma \equiv r_m\,,$$

on aura, en multipliant, n désignant le nombre des restes négatifs,

$$m\,!\; a^m \equiv r_1 r_2 \ldots r_m = (-1)^n\, m\,!$$

d'où

$$a^m \equiv (-1)^n\,. \tag{7}$$

Application. Soit $a = 2$. Les restes ne sont autres que les produits eux-mêmes 2, 4, 6, ... $2m = p - 1$. Les produits plus petits que $\frac{1}{2}p$ donnent des restes positifs. Or le nombre des produits 2, 4, 6, ... $p - 1$, inférieurs à $\frac{1}{2}p$ est pair, si $p = 8 + 1$ ou $8 + 3$; et il est impair si $p = 8 + 5$ ou $8 + 7$. Mais le nombre total m des produits est pair pour $8 + 1$ ou $8 + 5$, et impair pour $p = 8 + 3$ ou $8 + 7$. Le nombre n des restes plus grand que $\frac{1}{2}p$, est donc pair ou impair selon que $p = 8 \pm 1$ ou $p = 8 \pm 3$.

En résumé, on a :

(8) $$2^m \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Cor. XIII. Théorème d'Euler. Les nombres a et b étant premiers entre eux, on a :

(9) $$a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$$

$\varphi(b)$ désigne, d'après Gauss, le nombre des entiers inférieurs à b et premiers avec lui, $1, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots b-1$.

Démonstration de Gauss. Appelons Π le produit $1\alpha\alpha'\alpha''\ldots(b-1)$, il viendra, en se rappelant le *Cor. IV*,

$$\Pi a^{\varphi(b)} \equiv \Pi, \qquad \text{ou} \qquad \Pi[a^{\varphi(b)}-1] \equiv 0 \pmod{b}$$

d'où la relation (9).

Remarques. 1°. Si b est un nombre premier p, comme $\varphi(p) = p-1$, la formule (9) devient

(10) $$a^{p-1} \equiv 1$$

et constitue le *théorème de Fermat.*

2° *Démonstration de Poinsot.* Joignons de a en a les b sommets d'un polygone ; b étant premier avec a, on retombera sur le point de départ. Autrement celui auquel on aboutit pourrait être considéré comme le point de départ d'un certain polygone fermé. Si on suppose que, dans cette construction, on ne passe que par n sommets, le nombre total des sommets rencontrés en répétant cette construction pour chacun des b sommets, serait ainsi na, nombre divisible par b puisqu'on parcourt une ou plusieurs fois le polygone, n est donc multiple de b et ne peut être que b.

Ayant joint les b sommets de a en a, à partir d'un sommet déterminé, on aura un second polygone de b côtés qu'on traitera de même, ce qui en donnera un troisième ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on retrouve le premier polygone. On aura ainsi u polygones différant entre eux et qui seront tout ou partie des polygones étoilés possibles, lesquels sont au nombre de $\varphi(b)$, d'après ce qui a été dit plus haut. Dans ce second cas, u sera un diviseur de $\varphi(b)$; en effet prenons un des $\varphi(b)$ polygones qui ne se trouvent pas dans la série des

n polygones différents qu'on vient de définir ; on pourra de même en tirer n[1] polygones différant entre eux et différents des premiers ; car les constructions dérivant de la même loi, si un polygone de la première série était identique à un de la seconde, par exemple, les deux séries seraient forcément identiques. Ainsi les polygones non compris dans le premier groupe se partagent également en groupes de n.

Mais le procédé revient à prendre les sommets de a en a, de a^2 en a^2, de a^3 en a^3, ... de a^n en a^n ; or dans ce dernier cas, les sommets sont pris de 1 en 1 : on a donc

$$a^n \equiv 1 \qquad \text{(mod. } b)$$

d'où (9) en élevant à la puissance entière $\frac{\varphi(b)}{n}$.

Cor. XIV. Théorème de Wilson. On a :

$$(11) \qquad (p-1)! \equiv -1$$

Démonstration de Gauss. Associons deux à deux les nombres 2, 3, ... $p-2$; il viendra en multipliant ces $\frac{1}{2}(p-3)$ groupes,

$$(12) \qquad 2.3 \ldots (p-2) \equiv 1 \,,$$

d'où (11) en multipliant par $p-1$.

Remarques. 1°. Ce beau théorème paraît avoir été entrevu par Leibniz ; Waring (*Med. alg.* 1770) en fait honneur à Jean Wilson. La première démonstration en a été donnée par Lagrange en 1771 : il considère l'égalité

$$(\alpha) \qquad (x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) = x^{p-1} + \mathrm{A}x^{p-2} + \mathrm{B}x^{p-3} + \ldots + \mathrm{K}x + \mathrm{L}$$

et compare les deux résultats obtenus, 1° en changeant dans (α) x en $x+1$, 2° en multipliant (α) par $x+p$. Il tire de là les relations

$$(13) \quad \begin{cases} \mathrm{A} \equiv 0\,, \quad \mathrm{B} \equiv 0\,, \ldots \mathrm{K} \equiv 0\,, \quad \mathrm{L}+1 \equiv 0\,. \\ (p-1)\,\mathrm{L} = \mathrm{C}_{p,p} + \mathrm{C}_{p-1,p-1}\,\mathrm{A} + \mathrm{C}_{p-2,p-2}\,\mathrm{B} + \ldots = \\ \qquad 1 + \mathrm{A} + \mathrm{B} + \ldots + \mathrm{K}\,. \end{cases}$$

$$(14) \qquad (x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) - x^{p-1} + 1 \equiv 0\,.$$

[1] Le nombre n des polygones différents obtenus est indépendant en effet de la position des b points : il doit être le même, quel que soit le polygone dont on part.

Si x est nul ou congru à p, la relation (14) donne le théorème de Wilson. Dans les autres cas, il conduit au théorème de Fermat.

2°. Le théorème de Wilson fournit un moyen de reconnaître si un nombre donné est premier; en effet si p était multiple de a, par exemple, a diviserait $(p-1)!$ et par suite ne pourrait diviser $(p-1)!+1$. Malheureusement ce moyen est impraticable à cause des immenses calculs que nécessiterait cette recherche, même dans le cas de nombres peu considérables.

3°. *Généralisation de Gauss.* Le produit des $\varphi(b)$ nombres plus petits que b et premiers avec lui, est de l'une des deux formes ± 1 (mod. b). Poinsot a donné, de ce théorème les trois démonstrations que voici :

Si a est l'un des nombres α, α', α'', ... $b-1$, l'un des nombres $a\alpha$, $a\alpha'$, ... est de la forme 1 (mod. b). Soit $a\alpha \equiv 1$ (mod. b) et supposons d'abord $a=\alpha$, il viendra $a(b-a) \equiv -1$ (mod. b) ; le produit des couples de la forme $a(b-a)$ sera donc ± 1 (mod. b), selon que leur nombre sera pair ou impair. Ce nombre n'est d'ailleurs autre chose que celui des racines de la congruence $x^2 \equiv 1$ (mod. b).

Soit maintenant a différent de α. Les produits analogues à $a\alpha$ seront tous de la forme 1 (mod. b) et aucun des nombres considérés tout à l'heure ne se retrouvera parmi ces derniers, puisqu'à chaque nombre a donnant $a^2 \equiv 1$ (mod. b), ne correspond qu'un nombre $a'=b-a$, donnant $aa' \equiv -1$ (mod. b), et qu'à chaque nombre a, différent de son associé α, ne correspond qu'un seul nombre α tel que $a\alpha \equiv 1$ (mod. b).

Multipliant tous ces couples, on obtient le théorème.

Gauss distingue les cas où il faut le signe $+$ ou le signe $-$, mais nous nous en tiendrons là.

Autre démonstration. Posons $\alpha\alpha'\alpha''\ldots(b-1)=\Pi$; les nombres

$$\Pi,\ \frac{\Pi}{\alpha},\ \frac{\Pi}{\alpha'},\ \ldots\ \frac{\Pi}{b-1}$$

sont tous différents et premiers avec b. Les restes de leur division par b seront les nombres α, α', ... ; de là, en multipliant, la congruence

$$\Pi^{\varphi(b)-1} \equiv \Pi\,, \quad \text{d'où} \quad \Pi^{\varphi(b)} \equiv \Pi^2 \pmod{b}$$

Autre démonstration. Joignons, de α en α, les sommets d'un polygone P, de b côtés, et, de x en x, ceux du deuxième polygone P′ ainsi obtenu, x étant choisi tel que le troisième polygone coïncide avec le premier P. On a ainsi pris les sommets de αx en αx, ce qui produit le même résultat que si on les avait pris de 1 en 1. Ainsi si α est premier avec b, il y aura toujours un nombre x tel que $\alpha x \equiv 1$ (mod. b)[1].

Si $x = \alpha$, et qu'on prenne les sommets de P′ de $b - \alpha$ en $b - \alpha$, on retombera sur le polygone P renversé ; donc $\alpha(b - \alpha)$ revient à -1 ou bien $\alpha(b - \alpha) \equiv -1$ (mod. b).

Ainsi, dans tous les cas, les nombres 1, α, α', ... $b - 1$ peuvent s'associer de manière que leur produit soit de la forme ± 1 (mod. b) : on peut donc écrire

$$\Pi \equiv \pm 1 \pmod{b},$$

selon que le nombre des produits de la forme -1 (mod. b), est pair ou impair[2].

Exercices.

1. La somme des quotients provenant de la division par b des nombres a, $2a$, $3a$, ... $(b-1)\,a$, est égale à $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$. (Gauss).

---

[1] De là, une solution graphique de la congruence $\alpha x - by = 1$. (Poinsot).

[2] Si b est un nombre premier p, la démonstration se simplifie ainsi, d'après Cayley.

D'après ce qui a été dit, *Cor. XIII*, 2°, premier alinéa, b points disposés régulièrement sur une circonférence sont les sommets de $\frac{\varphi(b)+1}{2}$ polygones réguliers de b côtés ; d'où, si q est premier et égal à p, $\frac{1}{2}(p-1)$ polygones.

Or le nombre total des polygones, tant réguliers qu'irréguliers, est évidemment la moitié du nombre des permutations de $p - 1$ objets, puisque ces polygones se reproduisent deux à deux. D'un autre côté, si nous faisons tourner autour de son centre, et successivement des angles $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{4\pi}{p}$, $\frac{6\pi}{p}$, ... $\frac{2(p-1)\pi}{p}$, un polygone irrégulier quelconque, nous obtiendrons $p - 1$ autres polygones irréguliers : le nombre des polygones irréguliers possibles est donc un multiple de p. De là, la relation

$$\frac{1}{2}(p-1)! - \frac{1}{2}(p-1) \equiv 0\,.$$

2. Si $x = \alpha$, $y = \beta$ est une solution de $ax - by = 1$; $x = c\alpha$, $y = c\beta$ en est une de $ax - by = c$.

3. Trouver x tel que $x \equiv \alpha$ (mod. a) et $x \equiv \beta$ (mod. b).

On cherche $bA \equiv 1$ (mod. a) et $aB \equiv 1$ (mod. b), ce qui donne

$$x \equiv Ab\alpha + Ba\beta \qquad (\text{mod. } ab)$$

4. Soit g celui des $b - 1$ premiers entiers positifs qui rend $c - ag$ multiple de b, l'équation $ax + by = c$ a un nombre de solution représenté par la *formule de Paoli,*

$$\mathrm{E}\left(\frac{c - ag}{ab}\right) + 1 .$$

5. La solution de $ax - by = c$ est donnée par la *formule de Libri,*

$$x = \frac{c - 1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=b} \frac{\sin \dfrac{(2c - a) k\pi}{b}}{\sin \dfrac{ak\pi}{b}} .$$

6. Soit μ le plus grand commun diviseur des nombres donnés α, β, γ, ... On peut toujours déterminer les nombres A, B, C, ... de manière qu'on ait

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \ldots = \mu \qquad (\text{Gauss}).$$

7. Résoudre les équations

$$x'y'' - x''y' = a\ , \quad x''y - xy'' = a'\ , \quad xy' - x'y = a''. \qquad (\text{Gauss})$$

8. Soit à résoudre les équations

$$x = ay + \alpha = bz + \beta = cw + \gamma = \ldots$$

a, b, c, ... étant premiers deux à deux. On pose $P = abc \ldots$ et on calcule a', b', c', ... de manière qu'on ait

$$\frac{P}{a}\, a' \equiv 1 \ (\text{mod. } a)\ , \qquad \frac{P}{b}\, b' \equiv 1 \ (\text{mod. } b) \ldots .$$

d'où

$$x = P\left(\frac{a'\alpha}{a} + \frac{b'\beta}{b} + \ldots\right)$$

Le problème est ramené au calcul des associés de $\frac{P}{a}$, ... (Voir exercices n^{os} 10, 11 et 22).

9. *Regula cœci.* Partager A en n parties telles que a fois la première, b fois la deuxième, ... fassent ensemble une somme B.

Supposons que a est le plus petit des nombres $a, b, c, \ldots$ On a :

$$(b-a)y + (c-a)z + \ldots = B - aA,$$

équation de la forme $\alpha y + \beta z + \ldots = C$, qu'on résout en remarquant qu'il y a au moins deux coefficients, α et β par exemple, qui sont premiers entre eux, ce qui permet de poser

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1, \quad \text{d'où} \quad x = \alpha'(C - \gamma\alpha - \ldots) + \beta\lambda,$$
$$y = \beta'(C - \gamma\alpha - \ldots) + \alpha\mu\ldots$$

$\lambda, \mu, \ldots$ désignant des quantités indéterminées.

10. Divisons a par b, b par le reste, ce reste par le second reste, et ainsi de suite, de sorte qu'on ait

$$a = \alpha b + c, \quad b = \beta c + d, \quad c = \gamma d + e, \ldots$$

$\alpha, \beta, \ldots$ sont entiers et $b, c, \ldots$ diminuent jusqu'à ce qu'on parvienne à $m = \mu n + 1$.

Formons les expressions

$$\begin{aligned} &[\alpha] = \alpha = A \\ &[\alpha, \beta] = \beta A + 1 = B, \\ &[\alpha, \beta, \gamma] = \gamma B + 1 = C, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on aura

$$[\alpha, \beta, \ldots \mu][\beta, \ldots \lambda] - [\alpha, \ldots \lambda][\beta, \ldots \mu] = \pm 1.$$

De là le moyen de résoudre $ax - by = \pm 1$[1].

11. Soient $r_1, r_2, r_3, \ldots$ et $q_1, q_2, q_3, \ldots$ les restes et les quotients obtenus successivement en divisant p par $a, r_1, r_2, r_3, \ldots$ Les restes sont tous différents de zéro et décroissent jusqu'à $r_n = 1$. On a :

$$aq_1 q_2 \cdots q_{n-1} \equiv -(-1)^n$$

[1] Les théories que contiennent les exercices 2, 3, 8, 9 et 10 étaient connues des Indiens, comme on le voit chez Brahmegupta et Bhaskara. Mais c'est seulement Bachet qui a commencé à les exposer avec méthode et en détail.

De là, la solution de $ax \equiv \pm 1$. (Binet).

12. a et b étant premiers entre eux, le produit

$$\frac{x^a - 1}{x - 1} \frac{x^b - 1}{x - 1}$$

est divisible par $\frac{x^{ab} - 1}{x - 1}$ (Gauss).

13. Si on peut écrire $a^2 \equiv r$ et $b^2 \equiv - r$, on a : $x^2 \equiv - 1$ (Euler). En effet posons $ax \equiv b$, il viendra $a^2x^2 \equiv b^2 \equiv - a^2$. (Gauss).

14. Soient $a^2 \equiv r$, $b^2 \equiv rs$, on peut écrire $x^2 = s$ (Euler). En effet posons $ax \equiv b$, il viendra $rs \equiv b^2 \equiv a^2x^2 \equiv rx^2$. (Gauss).

15. Soit $a^g \equiv a^h \equiv r$, g et h étant premiers entre eux, on peut écrire $r^z \equiv a$. En effet posons $gx - hy = 1$, il viendra

$$r^x \equiv a^{gx} = a^{hy+1} \equiv ar^y . \qquad \text{(Legendre).}$$

16. Aucun nombre non décomposable en deux carrés entier ne l'est pas non plus en deux carrés fractionnaires (Fermat).

17. L'égalité $ax^2 - y^2 = 1$ ne peut avoir lieu si a n'est pas la somme de deux carrés. (Brahmegupta).

18. Les diviseurs du nombre $a^2 - 3b^2$ sont de l'une des formes quadratiques $\pm x^2 \mp 3y^2$, ou de l'une des formes linéaires 12 ± 1. (Lagrange).

19. Les nombres $a^4 + 1$ et $a^4 - a^2 + 1$ sont respectivement des deux formes linéaires $8 + 1$ et $12 + 1$. En effet on peut les écrire

$$(a^2 - 1)^2 + 1 \quad \text{et} \quad (a^2 - 1)^2 + a^2 = (a^2 + 1)^2 - 3a^2. \quad \text{(Serret).}$$

20. Si l'un des coefficients A, B, est multiple de p, la congruence $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + M \equiv 0$ ne saurait avoir n racines.

Il en est de même si $M \equiv 0$.

Si elle a n racines, a, b, ... on peut l'écrire $A(x - a)(x - b) \ldots \equiv 0$ et l'on a :

$$A(a + b + \ldots) + B \equiv 0 , \quad ab \ldots \equiv \pm M .$$

21. Du *Cor. XI*, déduire la relation

$$s_{p-1,\,p-1} \equiv (p-1)!$$

ainsi que le *Cor. IX*.

22. Posons $a^{\varphi(b)} = kb + 1$, on aura

$$a(ca^{\varphi(b)-1}) - b(ck) = c$$

d'où une solution de $ax - by = c$ (Poinsot). Ainsi l'associé de a relativement à b est

$$x = a^{\varphi(b)-1}$$

23. Trouver x tel que $x \equiv \alpha$ (mod. a) et $\equiv \beta$ (mod. b). On a :

$$x = b^{\varphi(a)}\alpha + a^{\varphi(b)}\beta \qquad (\text{mod. } ab).$$

Ainsi les nombres à la fois des deux formes $3+1$ et $4-1$ sont de la forme $12+7$; ceux des formes $3-1$ et $4+1$, de la forme $12+5$; ceux des formes 3 ± 1 et 4 ± 1, de la forme 12 ± 1.

24. Changeons successivement x et y en $1, \alpha, \alpha', \ldots b-1$ dans la relation $a \equiv xy$ (mod. b) et multiplions, il viendra

$$a^{\varphi(b)} \equiv -\Pi^2 \quad (\text{mod. } b) \qquad \text{d'où} \qquad \Pi^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } b^2)$$

25. Démontrer les relations

$$\frac{(p-1)(p-2)\ldots m}{\left(\frac{p+1}{2}\right)!} \equiv (-1)^m . \qquad (\text{Lebesgue}).$$

$$(a-1)!\,(p-a)! \equiv (-1)^a . \qquad (\text{Lagrange}).$$

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — IX[2]

Question 21.

Quels conseils, en résumé, donneriez-vous : a) à un jeune homme poursuivant ses études mathématiques?

b) A un jeune mathématicien, ayant achevé ses études ordinaires, et désireux de poursuivre une carrière scientifique?

Plus de la moitié de nos collaborateurs ont répondu à ces deux questions. Nous reproduisons leurs réponses presque *in extenso* (sauf celles qui sont à peu près identiques), afin de laisser parler le plus possible nos correspondants.

Nos lecteurs seront à même de juger et de comparer les conseils si nombreux et si utiles destinés à l'étudiant et au jeune mathématicien.

Rép. I (France). — *a)* de ne lire que des livres bien faits, de chercher de bons professeurs et de bien s'assimiler leurs leçons. — *b)* de ne lire que des chefs-d'œuvres, en premier lieu ceux de Gauss dont la perfection est presque inimitable au point de vue de l'invention et de l'exposition, et dont, pour ma part, j'ai tiré le plus grand profit. Ne jamais s'attaquer à des questions de *pure fantaisie* quelque séduisantes qu'elles paraissent : fuir sans cesse les méthodes *artificielles*, quelle que soit leur rapidité (voir plutôt la manière de Gauss et de Chasles). Ch. Méray.

Rép. III (Angleterre). — *a)* Mettre beaucoup d'attention au côté pratique et utile du sujet. — *b)* Ne pas laisser son goût pour les recherches porter atteinte à l'accomplissement des devoirs professionnels qui lui procurent le moyen de vivre. Il tomberait dans la misère et personne ne lui en saurait gré. Bryan.

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905. — 8e année, n° 1, p. 43-48 ; n° 3, p. 217-225 ; n° 4, p. 293-310 ; n° 5, p. 383-385, 1906. — 9e année, n° 2, p. 123-135, n° 3, p. 204-217, 1907.

[2] C'est par erreur que les résultats publiés dans le précédent numéro portent le chiffre VII.

Rép. VII (Allemagne). — Le jeune homme doit se proposer un but bien déterminé. M. CANTOR.

Rép. VIII (Angleterre). — *a)* Il faut chercher les applications à la vie pratique et faire un bon choix de matériel. — *b)* Si vous étudiez l'histoire des sciences mathématiques vous resterez sans faire de progrès. Il ne s'agit pas d'accumuler des connaissances. Le crible vaut mieux que la brouette. (....)

Rép. IX (France). — Travaillez si ça vous plaît, et ce qui vous plaît, sans atteindre la fatigue, la santé étant le bien le plus précieux. On ne doit au travail que l'accomplissement de son devoir professionnel. Le reste est une satisfaction que je vous engage à prendre suivant vos goûts pour embellir votre existence. (....)

Rép. XI (Russie). — *a)* Acquérir des connaissances dans les branches les plus diverses des mathématiques, poursuivre quelque problème par ses propres forces. — *b)* S'attacher à quelque sujet, s'approprier les différentes méthodes et ne pas perdre de vue les progrès de la science. N. DELAUNOY.

Rép. XIV (Angleterre). — S'attacher à l'étude des auteurs classiques. (....)

Rép. XVI (Belgique). — *b)* Tâcher de voyager et de visiter les universités étrangères. Se mettre complètement au courant d'une partie au moins de la science, et la plus élevée possible. — Ne pas se presser de publier. STUYVAERT.

Rép. XXI (Autriche). — Je ne puis que répéter le conseil donné à propos de la question II : Ayez du génie, le reste importe peu.
L. BOLTZMANN.

Rép. XXIII (France). — *a)* Suivez pas à pas votre enseignement ; ne vous découragez jamais ; ne soyez jamais assez satisfait qu'après compréhension bien complète ; exercez-vous sans cesse aux applications ; ne laissez jamais couper le fil conducteur qui vous conduit d'un bout à l'autre d'une année scolaire. Attachez-vous à exposer clairement, soit de vive voix soit par écrit, ce que vous croyez bien savoir. La patience et la suite dans le travail sont les conditions maîtresses de la réussite.

b) Ne persévérez dans la voie mathématique que *si vous êtes sûr* d'en avoir le goût. Suivez vos inspirations. Commencez par refaire personnellement la revision de vos connaissances acquises. Lisez ce qui vous semblera utile, de préférence les maîtres incontestés ; et tout cela fait, allez de l'avant. LAISANT.

Rép. XXIX (Hollande). — *a)* Développer par soi-même ce que l'on a étudié. *b)* S'attacher à une branche spéciale.
JAN DE VRIES.

Rép. XXXI (Allemagne). — *a)* Il doit savoir calculer avec facilité. — *b)* Il doit professer ; « docendo dissimus » est le meilleur conseil à donner à un jeune savant. Arthur VON OETTINGEN.

Rép XXXIII (France). — A un jeune homme non encore licencié je dirai : choisissez une bonne Faculté; comparez le cours aux livres! — A un licencié voulant poursuivre je dirai : Lisez dans toutes les directions pendant 1 ou 2 ans. — Si vous êtes à Paris allez en Sorbonne et au Collège de France. — « Et l'idéal, me disait M. Em. Picard, est de ne pas prendre de notes, et de rédiger le cours en rentrant chez soi ».

S'étant un peu orienté, tâcher d'obtenir les conseils et les encouragements d'un savant compétent en la matière, à qui l'on rend compte, après quelques mois, des résultats obtenus.

R. d'Adhémar.

Rép. XXXVI (Suisse). — *b)* Passer à la pratique de l'enseignement, à un degré quelconque. Le seul but doit être de *bien* enseigner. S'il y réussit, il a rendu un grand service aux mathématiques. Si plus tard il se trouve conduit à une carrière plus élevée, les années consacrées à l'enseignement plus élémentaire ne pourront lui être que très utiles. Beyel.

Rép. XXXVII (France). — *a)* Il doit diriger ses études dans le sens qui l'intéresse le plus. — *b)* Etudier des mémoires originaux et les approfondir. Il est souvent très bon, après avoir étudié un mémoire, de l'abandonner et de le reprendre longtemps après.

Fabry.

Rép. XXXIX (Grèce). — *a)* Ne pas trop lire, mais lire attentivement. Ne jamais aller plus loin sans avoir bien compris ce qui précède. Réfléchir au cours d'une promenade. — *b)* choisir selon ses goûts, une direction dans les branches mathématiques et s'assimiler ce qui a été fait dans ce domaine. Communiquer, si c'est possible, ses recherches à d'autres mathématiciens; on est ainsi amené à mieux formuler ce que l'on a trouvé. Publier, car cela excite le travail personnel. N. Hatzidakis.

Rép. XLI (Ecosse). — *a)* Lire Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, dans l'original. — *b)* Prendre un sujet spécial, le plus à son goût et qui ne soit pas complètement épuisé. ....

Rép. XLIII (France). — *a)* Suivant l'adage : « primum vivere, deinde philosophare », se faire d'abord une position; mais, si l'on veut faire de la science, chercher à la choisir en conséquence.

b) Les études achevées et la licence mathématique passée, s'accommoder à la position. Pour les études mathématiques, acquérir d'abord une forte instruction théorique pure, et s'orienter soit vers les mathématiques pures soit vers les mathématiques appliquées.

Un ingénieur mathématicien doit, d'après moi, chercher à faire des applications dans le domaine de l'ingénieur, quitte à ne pas négliger les mathématiques pures, s'il le peut. Mais il doit d'abord faire une thèse de doctorat mathématique sur un sujet de mathématiques pures (*a fortiori* le dirai-je d'un professeur). (Voir aussi questions 11, 12, 13). Ed. Maillet.

Rép. XLIV (Italie). — 21 *b)* Se consacrer à des recherches scientifiques, car on a besoin d'une grande culture et par conséquent d'une forte préparation. Marletta.

Rép. XLVII (Suisse). — *a)* Etendre le plus possible ses connaissances dans différentes directions. — *b)* Poursuivre en même temps l'étude d'une branche spéciale. Les nouveaux traités sont importants pour le spécialiste ; les lire attentivement. Gubler.

Rép. L (Etats-Unis). — *a)* Embrassez un champ de mathématiques aussi vaste que possible sous la meilleure direction que vous pourrez trouver; examinez en même temps des applications (en vue des mathématiques) ; elles vous fourniront souvent d'utiles éclaircissements.

b) Lire les maîtres, travailler sous la direction de maîtres, et rechercher leur société. (Voir aussi la question 11). Davis.

Rép. LIV (Etats-Unis). — *a)* Ne pas spécialiser trop tôt. S'astreindre à lire l'anglais, le français, l'allemand et l'italien. — *b)* Etudier la branche que l'on préfère en se plaçant sous la direction d'une personne compétente. Coolidge.

Rép. LV (Etats-Unis). — Je déconseillerais à tout le monde de *devenir* un mathématicien; quelqu'un né avec de réelles dispositions pour les mathématiques poursuivra probablement l'étude des mathématiques envers et contre tout. Par contre il doit être donné toutes les facilités possibles à quelqu'un faisant preuve d'un grand talent mathématique. En Amérique en tout cas beaucoup de jeunes gens sont aidés et encouragés par de nombreuses bourses et des conférences attrayantes, à poursuivre les études mathématiques dans les universités.

Leur carrière subséquente pendant 10 ou 15 ans ou même pendant toute leur vie, s'ils continuent les mathématiques, consistera en 3 à 5 heures (ou plus) par jour d'instruction en classe, sans encouragement dans les recherches mathématiques, sauf le plaisir qu'ils en retirent et la bonne opinion de leurs collègues mathématiciens. Le découragement doit venir avant et non après le choix d'une carrière mathématique.

Il devrait y avoir de bonne heure une sélection, et qu'en outre cela vaille la peine d'en être l'objet. Au point de vue des recherches mathématiques en Amérique, un grand progrès résultera directement et indirectement de la nouvelle institution Carnegie de Washington. L.-E. Dickson.

Rép. LVII (Etats-Unis). — *a)* Se vouer tout entier à l'étude et de la manière la plus étendue et la plus féconde. Tenir compte des branches collatérales qui sont utiles.

b) Aller où l'on aura la meilleure instruction et où l'on trouvera les meilleures bibliothèques et les instruments nécessaires. S'attaquer aux problèmes difficiles et apprendre à les résoudre complètement. E.-P. Thompson.

Rép. LX (Suisse). — *a)* Partager si possible son temps entre une université allemande et une université française. La plupart des Américains ont le tort de choisir uniquement les universités allemandes. EMCH.

Rép. LXII (Etats-Unis). — Travailler longuement un sujet car cela a autant de valeur, si ce n'est plus, que l'inspiration.

TALLMAN.

Rép. LXVI (Etats-Unis). — Ne pas se contenter d'à peu près. Ne pas entreprendre de recherche dans aucun domaine sans que le sujet ne vous intéresse particulièrement. SNYDER.

Rép. LXVIII (Etats-Unis). — *a)* Choisir un champ promettant d'être fécond et *travailler*.

b) Même conseil que dans *a)* sauf que maintenant une plus grande concentration est possible. CONANT.

Rép. LXIX (Italie). — 21) A un jeune homme entreprenant les études mathématiques, je recommanderais de se rendre un compte exact de ses forces intellectuelles. S'il se sent vraiment porté vers la science des nombres, s'il voit qu'il peut réussir à laisser une empreinte de lui par des travaux originaux, qu'il étudie avec ardeur. Autrement, qu'il change de voie et il pourra dans une autre carrière jouir de conditions économiques meilleures et il évitera bien des heures de découragement. Un mathématicien ignorant ne sera jamais heureux, tout d'abord parce qu'il pourra difficilement, en Italie du moins, gagner de quoi vivre à son aise et puis parce qu'il ne sera jamais assez ignorant pour ne pas avoir conscience de sa propre ignorance. ....

Rép. LXX (Etats-Unis). — *a)* Ne faites pas des mathématiques le but de votre vie, à moins que vous n'en soyez épris et que vous vous contentiez de rester pauvre dans les biens de ce monde. — *b)* Intéressez-vous à l'humanité à côté de vos études mathématiques; efforcez-vous de devenir, non seulement un homme de science, mais aussi un homme de société. J.-W. YOUNG.

Rép. LXXI (Etats-Unis). — *a)* Etudier sous une bonne direction et s'assimiler quelques ouvrages fondamentaux qui donnent un aperçu de tout le domaine des mathématiques.

b) Choisir un point particulier et s'y attacher jusqu'à ce qu'il arrive à un résultat. Alors il pourra passer à d'autres sujets.

J.-V. COLLINS.

Rép. LXXII (Etats-Unis). — *a)* Son but devrait être d'acquérir une connaissance aussi étendue que possible des divers champs de mathématiques et de leurs méthodes caractéristiques.

b) La réponse à cette question, comme à beaucoup d'autres, dépend dans une si grande mesure de l'individu qu'il est difficile de dire quelque chose de général. Les uns ont besoin de se mettre sous l'influence de maîtres inspirateurs, d'autres de suivre leurs penchants naturels. KELLOGG.

Rép. LXXVIII (Italie). — 21 *a)* Aller étudier dans l'université où enseignent les professeurs qui communiquent la science officielle (locale) du pays, et cela pour ne pas éprouver des désillusions dans sa carrière en se voyant négligé, tandis que d'autres notoirement inférieurs lui seront préférés. Bien des mathématiciens se perdent et n'étudient plus parce qu'ils sont négligés et se heurtent à l'indifférence. ....

Rép. LXXIX (Norvège). — Etudiez les grands maîtres.

A.-S. Guldberg.

Rép. LXXX (Norvège). — Travaillez sérieusement. Publiez peu.

Alf. Guldberg.

Rép. LXXXII (Suisse). — *a)* Voici quelques conseils que nous adressons à nos étudiants dans les « Directions générales concernant le plan des études mathématiques » : « Le développement de l'esprit mathématique ne peut se faire d'une façon rationnelle que si l'étudiant fait preuve de volonté, de persévérance et d'initiative dans le travail. L'acquisition des connaissances mathématiques exige un effort constant. Une fréquentation régulière, non seulement des cours, mais aussi des leçons d'exercices est indispensable. Les notes prises au cours seront aussi brèves que possible; elles devront toujours être revues et développées à la maison, le jour même si possible. Pour ceux des étudiants qui font des mathématiques, leur principal objet d'étude, ces notes devront souvent être complétées à l'aide des traités classiques. Dans tous les cas, il s'agit, non pas d'accumuler des notes et de se livrer à un simple travail de rédaction au point de vue du soin et de l'ordre dans le texte, mais avant tout d'un *travail d'assimilation*. C'est à ce moment-là que l'étudiant se rendra compte s'il a compris l'enchaînement des idées et la méthode employée dans la démonstration... Les cours universitaires ne fournissent pas un exposé dogmatique de la branche traitée; ils doivent être envisagés comme un simple guide et comme un stimulant pour l'étude personnelle ».

En résumé : Ne faites rien à moitié, et surtout, ne faites des mathématiques que si vous vous sentez fortement attiré vers elles.

H. Fehr.

Rép. LXXXIV (Suisse). — Etudiez les bons ouvrages mathématiques tels que ceux d'Euler, Lagrange, Cauchy.

G. Oltramare.

Il nous paraît superflu de commenter longuement ces excellents conseils. Nos jeunes lecteurs y trouveront de nombreux encouragements en vue d'une bonne orientation de leurs études et de leur méthode de travail. Puissent-ils s'en inspirer et les mettre en pratique.

Parmi les aînés beaucoup regretteront peut-être d'avoir été trop livrés à eux-mêmes autrefois sans guide, sans direction aucune (voir les rép. LXIX et LXXVIII), et ils envieront peut-être un peu ceux qui bénéficient aujourd'hui d'une organisation toujours meilleure des études et qui arrivent ainsi à trouver de bonne heure leur véritable maître.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos des polynomes dérivés.

Nous avons eu l'occasion de signaler récemment à M. Ed. COLLIGNON une note *sur les polynomes dérivés*, note assez étrange que l'Académie des sciences de Toulouse a publiée dans ses mémoires (F. T. 10[me] série, VI, 1906, 177-182).

M. Collignon a profité de l'occasion pour nous communiquer quelques remarques intéressantes sur le sujet auquel a trait la note en question. On ne les trouve guère dans les ouvrages, et il nous paraît utile de les signaler. Les deux premières reposent d'ailleurs directement sur la notion de dérivée.

1° — La surface s du cercle de rayon r est πr^2; sa dérivée par rapport au rayon est $2\pi r$, longueur de la circonférence.

2° — De même, le volume v de la sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$, la dérivée par rapport au rayon est $4\pi r^2$, surface de la sphère.

3° — Soit P un polynome entier en x, du degré m; P' son polynome dérivé, qui sera du degré $m - 1$. Soit a une racine de $P = 0$, le polynome P sera divisible par $x - a$, et l'on aura

$$\frac{P}{x - a} = Q$$

en désignant par Q un polynome entier du degré $m - 1$ en x. Prenons les polynomes dérivés des deux membres de cette équation. Il viendra

$$\frac{(x - a)P' - P}{(x - a)^2} = Q'.$$

polynome entier en x du degré $m-2$. Donc

$$\frac{P'}{x-a} - \frac{P}{(x-a)^2}$$

est toujours un polynome entier Q', et par suite, si P est divisible par $(x-a)^2$, P' l'est par $x-a$; ou bien si a est racine double de $P=0$, a est racine simple de la dérivée $P'=0$.

Donc, il est aisé de déduire la théorie des racines égales.

4° — Lorsqu'une fonction V de x et y est telle que les dérivées par rapport à x, ou par rapport à y sont les mêmes, V est une fonction de la somme $x+y$. En effet, il est alors indifférent de faire porter l'augmentation h sur x, sur y, ou sur $x+y$, pour former le rapport

$$\frac{f((x+h)+y)-f(x+y)}{h} = \frac{f(x+(y+h))-f(x+y)}{h} = \frac{f((x+y)+h)-f(x+y)}{h},$$

dont la limite sera la dérivée cherchée.

Considérons, donc, une fonction entière homogène de x et y, savoir

$$V = x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + A_3 x^{m-3} y^3 + \ldots + A_{m-1} x y^{m-1}$$

et cherchons à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients $A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$, pour que V soit une fonction de $x+y$. Nous avons l'identité entre les dérivées partielles

$$\begin{aligned} V'_x = {} & m x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} y + (m-2) A_2 x^{m-3} y^2 \\ & + (m-3) A_3 x^{m-4} y^3 + \ldots + A_{m-1} y^{m-1} \end{aligned}$$

$$V'_y = A_1 x^{m-1} + 2A_2 x^{m-2} y + 3A_3 x^{m-3} y^2 + \ldots + (m-1) A_m x y^{m-2}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} A_1 &= m & \qquad A_2 &= \frac{m(m-1)}{2} \\ 2A_2 &= (m-1) A_1 & A_3 &= \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \\ 2A_3 &= (m-2) A_2 & & \\ &\vdots & &\vdots \\ m A_m &= A_{m-1} & A_m &= \frac{m(m-1) \ldots 1}{2 \cdot 3 \ldots m} = 1 \end{aligned}$$

et il vient le développement du binôme $(x+y)^m$, avec la loi des coefficients.

R. Guimaraès (Elvas, Portugal).

N. D. L. R. — A propos des paragraphes 1° et 2°, on peut observer que les contours dont le périmètre est la dérivée de l'aire ont déjà été étudiés. Voir *I. M.* 1898, Question 1201 et dans le même volume les réponses de MM. Buhl, Barbarin, *Novus*, Tauquembergue, Brocard, Vacca. En résumé la solution du problème est fort simple. Soit un contour dont l'aire A et le périmètre P sont fonctions d'un périmètre a. L'homogénéité exige que l'on ait $A = ka^2$, $P = ha$, k et h étant de simples coefficients.

$$\text{Posons } a = \frac{h\alpha}{2k}. \text{ On aura } A = \frac{h^2\alpha^2}{4k}, \; P = \frac{h^2\alpha}{2k}, \; \frac{dA}{d\alpha} = P.$$

Pour l'unification de la notation vectorielle.

Sous ce titre MM. Burali-Forti (Turin) et Marcolongo (Messine) publient une première note destinée à attirer l'attention des mathématiciens sur la nécessité d'adopter une notation uniforme pour le Calcul vectoriel. Le rôle fécond que joue ce calcul dans les mathématiques appliquées l'a fait adopter comme instrument auxiliaire par un bon nombre de mathématiciens et de physiciens. Son extension serait encore plus rapide si l'on ne se trouvait pas en présence de plusieurs notations et dénominations. Non seulement les symboles varient d'un auteur à l'autre suivant qu'ils se rattachent aux théories de Hamilton ou de Grassmann, mais les dénominations ne sont pas les mêmes. Il est donc tout à fait désirable d'arriver à une entente entre les principaux auteurs des divers pays en vue de l'adoption de dénominations et de notations uniformes et nous encourageons vivement l'initiative de MM. Burali-Forti et Marcolongo. Nous pensons avec eux que c'est là l'une des tâches des congrès internationaux des mathématiciens. Ils comptent du reste soulever la question au prochain Congrès de Rome; les Notes qu'ils se proposent de donner dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* sont destinées à préparer la discussion. Aux documents qu'ils auront réunis viendront sans doute se joindre ceux de la commission allemande dont il est question dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* [1].

H. Fehr.

[1] Prantl, *Ueber eine einheitliche Bezeichnungsweise der Vektorrechnung im technischen u. physikalischen Unterricht*; t. 13, p. 36-40, 1904. — Voir dans le même volume, p. 217-228, Mehmke, *Vergleich zwischen der Vektoranalysis amerikanischer Richtung und derjenigen der italienischer Richtung.*

CHRONIQUE

L'Ecole polytechnique de Paris. Ce qu'on y apprend. Opinion d'un ancien X[1].

Le *Matin* a publié récemment sous la signature de M. Gustave Téry, un article qui produit une assez grosse émotion dans une partie du public français. Cela se comprend ; il y a tant de familles, tant de mères surtout, qui destinent, dès le berceau, leurs fils à la grande école !

D'autre part, à l'autorité de M. Gustave Téry, professeur de l'Université, vient s'ajouter celle de M. André Pelletan, dont M. Téry traduit l'opinion ; or, M. Pelletan, ingénieur des mines, est ancien élève de l'Ecole polytechnique et sous-directeur de l'Ecole supérieure des mines.

La traduction, est-elle bien fidèle ? Malgré la compétence de M. Téry, nous pouvons en douter, connaissant la haute pondération d'esprit de M. Pelletan, qui ne se hasarderait certainement pas à produire des affirmations sans en avoir en main les preuves.

D'après le titre de l'article, « on n'apprend rien » à l'Ecole Polytechnique. D'après l'article lui-même, on n'y apprend pas ce qu'on y devrait apprendre, ce qui est fort différent.

Comme il arrive fréquemment, il y a là un certain nombre de considérations justes, mêlées à une exagération et à des erreurs qui viennent les gâter.

L'Ecole Polytechnique a pour but de fournir aux divers services publics les techniciens qui lui sont nécessaires. Elle y arrive : 1° en se recrutant par un concours difficile, dont on n'a jamais songé à suspecter l'impartialité ; 2° en distribuant un enseignement dont l'objet est de préparer les élèves à suivre les cours des écoles d'application ; 3° en les envoyant, à leur sortie, dans ces écoles d'application, où ils restent, tantôt deux années, tantôt trois, suivant les carrières.

C'est dans ces dernières écoles seulement qu'ils doivent acquérir les connaissances spéciales à leur future profession. S'étonner de ce qu'un élève de l'Ecole Polytechnique ne soit pas capable d'être ingénieur, est aussi raisonnable que s'étonner de ce qu'un enfant, à sa sortie de l'école primaire, ne soit pas forgeron, tailleur ou charpentier.

Créée par la Convention, à une époque où la diffusion des con-

[1] Extrait d'un article du journal *Messidor*, n° du 6 mai 1907.

naissances scientifiques n'existait guère, l'Ecole Polytechnique a rendu d'incontestables services, et joui d'une popularité qui dure encore.

Cela ne veut pas dire qu'elle ait été exempte de reproches. Il y en a deux, graves entre tous, qu'on peut lui adresser, et dont elle doit aujourd'hui faire son *meá culpá*.

Le premier, c'est que, démocratique dans ses origines, elle a créé une véritable aristocratie, à la faveur des monopoles professionnels.

L'autre malheur de l'Ecole Polytechnique, plus grave encore peut-être, c'est de s'être laissé militariser à outrance. Sous prétexte que l'artillerie et le génie exigent quelques connaissances scientifiques, on a recruté, à l'Ecole, la grosse majorité des officiers de ces deux armes; on a essayé de lui attribuer le caractère d'une école militaire, alors que par sa nature même, c'est une école mixte. On l'a fait passer sous la direction du ministère de la Guerre, ce qui est un contre-sens. De la sorte, suivant le mot d'un académicien aussi spirituel que superficiel, cité par M. Téry avec complaisance, on est arrivé à cette définition : « Une école où l'on entre pour être ingénieur, et d'où l'on sort officier d'artillerie ».

Cela peut paraître drôle ; il est difficile cependant de supposer que les canons se fabriquent d'eux-mêmes, et, à ce point de vue, les officiers d'artillerie sont assurément des ingénieurs. Il est non moins paradoxal de prétendre que tout ingénieur n'a pas besoin d'une assez solide instruction scientifique. Mais ce qui est le comble de l'absurdité, dans l'organisation actuelle, c'est la confusion, dans une carrière, d'attributions tout à fait différentes.

Voici un jeune homme qui sort de l'Ecole Polytechnique dans l'artillerie : en quittant l'Ecole d'application de Fontainebleau, il entre comme lieutenant dans un régiment, le cerveau meublé de notions scientifiques assez étendues. Là, il s'occupera de faire panser des chevaux, d'apprendre la théorie, de faire des manœuvres à pied et à cheval, toutes choses pour lesquelles les sciences sont assez inutiles. Il les oublie et en prend le souvenir en dégoût. Après huit ou dix années de cette existence, notre officier, devenu capitaine, sera fréquemment envoyé dans une fonderie de canons ou une manufacture d'armes ; alors ses connaissances scientifiques seraient utiles, mais il les a oubliées.

La vérité, c'est que l'armée a besoin d'hommes techniques, d'ingénieurs, mais qu'à aucun prix on ne devrait confondre leurs fonctions avec celles des officiers de troupe. A ces derniers, une bonne instruction moyenne générale peut être utile ; mais il est aussi peu raisonnable d'exiger d'eux la connaissance des hautes mathématiques, qu'il le serait de demander à un professeur d'équitation de savoir jouer du piano.

La séparation des officiers de troupe et des techniciens s'impose, aussi bien dans l'artillerie ou le génie que dans les autres armes.

Pour le recrutement de ce personnel (celui des techniciens) aussi bien que pour celui des ponts-et-chaussées, des mines, des manufactures de l'Etat, l'Ecole Polytechnique peut rendre encore les plus grands et les meilleurs services.

Mais il faudra pour cela, du même coup, décider que *plus un seul* officier de troupe n'en sortira dorénavant, *dans n'importe quelle arme*. Il faut aussi la soustraire à la néfaste administration de la guerre, et la placer sous l'autorité du ministère de l'intérieur d'où elle relevait jadis, ou mieux, du ministère du travail, si on veut faire de ce dernier une institution sérieuse et viable.

Dans ces conditions, il suffira en moyenne d'un effectif de 100 à 120 élèves par promotion pour fournir à tous les besoins techniques du pays, en ce qui touche les administrations publiques. Les diverses écoles d'application ouvriraient leurs portes aux élèves sortant de l'Ecole Polytechnique, pour une part, et en outre, par voie de concours séparés, à des jeunes gens satisfaisant à des conditions déterminées et qui auraient acquis leurs connaissances en suivant une autre voie.

Telles sont les bases essentielles d'une réforme bien désirable, et que nous ne pouvons qu'esquisser ici ; ne serait-il pas intéressant d'y ajouter un abaissement de la limite d'âge d'entrée, pour éviter aux candidats les inconvénients d'une prolongation démesurée dans les classes de mathématiques spéciales ? C'est à examiner, une fois qu'on sera d'accord sur les principes. Il pourrait être bon, également, de reviser les programmes intérieurs de l'enseignement, sans toutefois oublier jamais que ce dernier a pour but de préparer aux écoles d'application et non pas de faire immédiatement des ingénieurs.

Ce qui est certain, c'est que dans cette école on travaille beaucoup, et on apprend beaucoup. Cela ne veut pas dire qu'on ne puisse, par un travail égal, obtenir de meilleurs résultats encore ; tout est perfectible en ce monde.

Il y a, il faut le reconnaître, un autre moyen de résoudre les questions très graves que nous venons d'indiquer ; cest de supprimer l'Ecole Polytechnique. Ce remède est celui du monsieur qui, ayant un bobo à la jambe, se la fait couper.

Mais, pour tout esprit impartial et sérieux, ce serait là une diminution considérable pour notre pays, un coup funeste porté à sa grandeur scientifique et à son organisation intellectuelle. Ce serait aussi, et il ne faut se lasser de le dire, une mesure antidémocratique au plus haut degré. Malgré tout, par le mécanisme même de ses concours d'admission, l'Ecole Polytechnique n'a cessé de se recruter, et se recrute encore plus que jamais, en énorme majorité, parmi les modestes, les humbles; chaque année, nous y voyons entrer des fils de petits employés, d'agriculteurs, d'ouvriers, qui parviennent, à force de travail, à se créer ainsi une carrière.

Qu'on ne leur permette pas d'en profiter pour reformer une sorte d'aristocratie, une caste priviligiée, on aura raison. Mais fermer à l'élite des enfants du peuple cette porte qui leur est encore ouverte, ce serait, pour des républicains, tirer sur leurs troupes et tourner le dos au progrès.

Un Ancien X.

Note de la Rédaction. — L'article dont on vient de lire un extrait répond comme on le sait à un autre, publié précédemment dans le *Matin*, et que nous regrettons, faute de place, de ne pouvoir donner. Le titre: « On n'apprend rien à Polytechnique » est assez significatif pour en faire deviner l'esprit. A cette thèse s'en ajoutait, ou plutôt semblait s'en ajouter une autre non moins paradoxale, à savoir que les connaissances scientifiques sont inutiles à un ingénieur.

Nous sommes entièrement d'accord avec l'auteur de l'article de *Messidor*, mais, allant un peu plus loin, nous considérons qu'il faut attacher la plus haute importance à la transformation de l'enseignement intérieur de l'Ecole Polytechnique. Les modifications qu'on étudie en ce moment même nous semblent extrêmement dangereuses d'après le peu que nous en connaissons. Le moment venu, nous nous réservons d'y revenir et de les discuter à fond, s'il y a lieu.

Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, Dresde. 1907.

La réunion annuelle a eu lieu, cette année, à Dresde, du 20 au 24 mai, sous la présidence de M. le Prof. Pietzker, président de l'Association et de M. le Prof. Witting, président du comité local. Nous nous bornerons à signaler ici les communications et discussions concernant les mathématiques.

L'une des assemblées générales a été consacrée à la question très importante de la formation des maîtres de l'enseignement scientifique. Elle comprenait une conférence de M. le Professeur Krause (Dresde) et des rapports de MM. Reinhardt (Freiberg) et Löwenhardt (Halle). Dans un exposé très substantiel M. Krause passe en revue les différentes phases par lesquelles a passé l'enseignement mathématique à l'Ecole technique supérieure de Dresde où le nombre des étudiants en mathématiques atteint actuellement le chiffre de 79.

Les rapports de MM. Reinhardt et Löwenhardt insistent, entre autres, sur les exercices pratiques dans les différentes branches scientifiques et sur les travaux dans le séminaire de mathématiques; ils formulent le vœu que les maîtres puissent obtenir des congés et des subsides leur permettant de compléter leurs études.[1]

M. Reinhardt a développé les *thèses* suivantes:

1. La durée des études jusqu'aux examens d'Etat doit être de quatre ans.
2. L'étude des mathématiques pures doit comprendre l'Analyse *et* la Géométrie *y compris la Géométrie descriptive;* il est recommandé de s'occuper aussi de mathématiques appliquées.
3. Dans les cours il y a lieu d'accorder une place convenable aux indications historiques et bibliographiques.
4. Il y a lieu de faire en sorte que, dans les universités, les études ne soient pas retardées inutilement par les cours de physique expérimentale.
5. Les exercices pratiques de Physique doivent être pris dès le premier semestre.
6. Des cours appropriés de Philosophie et de Pédagogie sont nécessaires.

Dans une autre assemblée générale M. Félix Müller (Fridenau) a fait une intéressante conférence sur *Léonard Euler*, et, dans la séance de la section physico-mathématique, on a entendu les communications de M. Brückner (Bautzen) sur la théorie des polyèdres et de MM. Schober (Metz) et Dressler (Dresde) sur l'emploi de modèles mobiles dans l'enseignement.

IIme Centenaire de Léonard Euler.

1. Nous avons rendu compte des séances commémoratives consacrées à la mémoire d'Euler par l'Université de Bâle et par la société mathématique de Berlin. A ces séances viendra s'en ajouter une autre qui sera organisée par l'Association des mathématiciens allemands à l'occasion de sa réunion annuelle qui se tiendra à Dresde du 15 au 21 septembre prochain. Le comité d'organisation s'est assuré toute une série de communications sur le rôle d'Euler dans les divers domaines des mathématiques pures et appliquées. Bornons-nous, pour le moment, à donner les noms des conférenciers inscrits : MM. A. v. Brill (discours d'ouverture), Stäc-

[1] On ne saurait trop appuyer ce vœu dont la réalisation permettrait de maintenir l'enseignement à la hauteur des exigences de la science et de ses application. (*Réd.*)

kel, F. Müller, L. Schlesinger, A. Pringsheim, K. Heun, E. Timerding, E. Brauer, W. Hart, E. Hoppe, R. Gans, F. S. Archenhold.

II. — Le 2e centenaire d'Euler devait nécessairement donner lieu non seulement à des séances mais aussi à des *publications et articles*. En voici une première liste :

1. W. Ahrens, *Hamburger Nachrichten* (Abendausgabe), 13 avril, « Leonhard Euler u. Friederich der Grosse » ; « Leonhard Eulers Werke, *Beilage zur Allgemeinen Zeitung*, 3 mai. — 2. *Frankfurter Zeitung*, 15 avril. G. Landsberg. — 3. *Die Tägliche Rundschau*, 13 avril 1907. — 4. Die *Neue Zürcher Zeitung*, 15 avril. — 5. *Die physikalische Zeitschrift* (no 8, 15 avril, E. Hoppe). — 6. *Die Basler Nachrichten*, 1 mai. — 7. *Das Berner Tagblatt*, article de J. H. Graf (tiré à part en une brochure de 24 p. in 16o. — 8. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, nos 3-4. F. Müller : « Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonard Euler ». — 9. *Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Görlitz*, no 2, 1907, W. Lorey : Leonard Euler (tiré à part en une brochure de 20 p. in-8o, Teubner, Leipzig). — 10. *Bibliotheca mathematica VII* no 4, G. Eneström : Ueber Bildnisse von Leonhard Euler. — 11. S. Schulz-Euler : Leonhard Euler, ein Lebensbild zu seinem 200 Geburtstage nach Quellen und Familienpapieren (37 p. in-16 ; Verlag von Schulz, Frankfurt a. M.). D'après cet auteur la date de naissance d'Euler serait, non pas le 15, mais le 4 avril 1707.

Ce n'est là qu'une première liste. A ces publications viendront se joindre les discours prononcés par MM. Valentin et Kneser devant la Société mathématique de Berlin. Suivant les renseignements que nous avons obtenus de M. le Prof. Jahnke, ces conférences seront publiées dans les *Abhandlungen zur Geschichte des mathematischen Wissenschaften* (Teubner, Leipzig) ; le même volume contiendra trois suppléments importants de M. Kneser sur les progrès que la théorie des variations doit au génie d'Euler, en outre un article bibliographique de M. F. Müller et enfin une partie de la correspondance entre Euler d'un côté, Jean Bernoulli et d'Alembert de l'autre ; cette correspondance, qui se rapporte aux logarithmes des nombres négatifs, a été traduite par M. E. Lampe.

H. F.

Nominations et Distinctions.

M. W. Bjerkness, de l'Université de Stockholm, est nommé professeur de Mécanique et de Physique mathématique à l'Université de Christiania.

M. Daublesky de Sterneck, de l'Université de Czernowitz, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Graz.

M. Kutta, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire de mathématiques appliquées à l'Ecole technique supérieure de Munich.

M. G. Lauricella, à Catania, a obtenu la médaille d'or de mathémathiques de la Société italienne des Sciences.

M. Rudolf Weber, privat-docent a l'Université de Heidelberg, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Rostock.

M. E. B. Wilson, de la Yale University, est nommé professeur à l'Institut technologique de Massachusetts.

MM. C. Arzela, de l'Université de Bologne, et G. Castelnuovo, de l'Université de Rome, ont obtenu le prix royal pour les mathématiques (10,000 fr.) de l'Accademia dei Lincei.

MM. Castelnuovo et Volterra, professeurs à l'Université de Rome, ont été nommés membres honoraires de la « London mathematical Society ».

Nécrologie.

M. F. Aschieri, professeur de Pavie, est décédé le 14 avril 1907 à l'âge de 60 ans.

M. A. Fuhrmann, est décédé à Dresde à l'âge de 67 ans.

M. E. Ritter von Oppolzer, professeur d'astronomie à l'Université d'Insbruck, est décédé le 15 juin à l'âge de 37 ans.

M. F. Siacci, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Naples, colonel dans la réserve, bien connu par ses travaux fondamentaux dans la balistique, est décédé le 30 mai, à l'âge de 68 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1907-1908.

ANGLETERRE

Oxford : *University*. — Lecture List for Michaelmas Term, 1907 (Course begins 14 Oct. — Esson : Analytic geometry of plane curves, 2 ; Synthetic geometry of plane curves, 1. — Elliot : Sequences and series, 2 ; Elementary theory of Numbers, 1. — Love : Magnetism and Electricity : the Mathematical theory, 3. — Turner : Elementary mathematical astronomy, 2. — Plummer : Practical work. — Pedder : Problems in pure mathematics, 1. — Sampson : Solid geometry (continued), 2. — Campbell : Differential equations, 2. — Thompson : Integral calculus, 2. — Hayes : Analytical statics, 2. — Dixon : Hydrostatics, 1. — Gerrans : Tridimensional rigid dynamics, 2. — Haselfoot : Theory of equations, 1. — Kirkby : Projective geometry (elementary), 2. — Jolliffe : Analytical geometry, 2. — Russell : Differential calculus, 2. — Mc Neile : Curve tracing, 1.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1907-1908

Cornell University : *Ithaca, New-York.* — Prof. L. A. Wait : Advanced analytic geometry, 3. — Prof. J. M. Mahon : Theory of potential and spherical harmonics, 3. — Prof. J. H. Tanner : Theory of equations, 2 ; Teacher's course in algebra, 2. — Prof. J. I. Hutchinson : Automorphic functions, 3. — Prof. V. Snyder : Algebraic curves, 3. — Prof. W. B. Fite : Advanced calculus, 3 ; Theory of functions of a real variable, 2. — Dr. F. R. Sharpe : Theory of electrons, 3. — Dr. W. B. Carver : Projective geometry, 3. — Dr. A. Ranum : Differential equations, 2. — Dr. D. C. Gillespie : Linear differential equations, 3. — Dr. C. F. Craig : Theory of probabilities and insurance, 2. — The Olivier mathematical club will met weekly.

Columbia University ; *New-York.* — Prof. F. N. Cole : Theory of groups, 3 ; Theory of invariants, 3. — Prof. James Maclay : Application of the calculus to the theory of surfaces and curves in space, 3 ; Theory of functions of a complex variable, 3. — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry, 3 ; General theory of assemblages, 3. — Prof. H. B. Mitchell : Vector analysis, 2 ; Differential equations, 2. — Prof. Edward Kasner : Differential equations and continuous groups, 3 ; General introduction to higher mathematics, 3. — Dr. G. H. Ling : Modern higher algebra, 3. — Prof. M. I. Pupin : Theory of the potential function, 2 ; Hydrokinetics, 2 ; Partial diffetial equations of physics, 2 ; Special problems, 2. — Prof. A. P. Wills : Mechanics, 2 ; Theory of elasticity, 2 ; Electricity and magnetism, electromagnetic theory of light, 2 ; Thermodynamics, 2.

Johns Hopkins University ; *Baltimore.* — Prof. F. Morley : Vector analysis, 2 ; Higher geometry, 2 ; Seminar, 1 ; Classic authors, 1. — Dr. A. Cohen : Differential equations, 2 ; Elementary theory of functions, 2 ; Introduction to differential equations and vector analysis, 2. — Dr. A. B. Coble : Cremona transformations, 2 (first half year) ; Theory of statistics, 2 (second half year).

Yale University ; *New-Haven (Conn.).* — Prof. J. Pierpont : Introduction to the theory of functions, 2 ; Projective geometry, 2 ; Elasticity and hydromechanics, 2 ; Elliptic functions, 2. — Prof. P. F. Smith : Higher geometry, 2 ; Geometric analysis, 1. — Prof. E. W. Brown : Mechanics, 2 ; Celestial mechanics, 2. — Prof. H. E. Hawkes : Algebra and analytic geometry, 2 ; Teachers'course in geometry, 2 ; Advanced algebra, 2. — Prof. M. Mason : Differential equations, 2 ; Integral equations, 1 ; Conformal mapping and Riemann Surfaces, 1. — Prof. E. B. Wilson : Molecular properties of matter, 2 ; Gravitation and Electrostatics, 1. — Dr. W. A. Granville : Differential geometry, 2. — Dr. L. E. Hewes : Differential equations, 1 ; Geometric transformations of the plane and of space, 2 ; Graphical and numerical computation, 1. — Dr. W. R. Longley : Differential geometry, 2.

ITALIE [1]

Année universitaire 1907-1908.

Bologna ; *Università.* — Arzela : Integrali di Lebesgue ; funzioni armoniche, principio di Dirichlet, serie di Fourier, 3. — Donati : Campi elettromagnetici, dinamica degli elettroni, 3. — Pincherle ; Funzioni analitiche, funzioni algebriche e loro integrali, 3.

Catania ; *Università.* — Lauricella : Teoria del calore ; Teoria della propagazione delle onde, 4 1/2. — Pennacchietti : Complementi di cinematica e di stereodinamica, 4 1/2. — Pieri : Principi di geometria proiettiva iperspaziale, 3. — Severini : Gruppi continui di trasformazioni puntuali, trasformazioni di contatto, 4 1/2.

Genova ; *Università.* — Fubini : Calcolo delle variazioni ; Il principio di Dirichlet-Riemann e i teoremi di esistenza, 3. — Loria : Rappresentazione piana di superficie algebriche ; Trasformazioni razionali nel piano e nello spazio, 3. — Fedone : Funzioni sferiche, di Lamé ed affini, applicazione alla risoluzione di problemi di elettrostatica e di magnetostatica, 3.

Messina ; *Università.* — Bagnera : La teoria delle funzioni theta a più argomenti e i relativi gruppi di caratteristiche, 3. — Marcolongo : Teoria dei fenomeni elettrici ed ottici nei corpi in movimento, 3. — Martinetti : Geometria proiettiva degli iperspazi, 3. — Orlando : Integrali definiti con applicazioni alla fisica matematica, 3 ; Elementi di teoria dei numeri, 2. — Vivanti : Calcolo delle variazioni, 3.

Napoli ; *Università.* — Amodeo : Storia delle scienze matematiche nei secoli XVII, XVIII et nella prima metà del secolo XIX, 3. — Capelli : Gruppi e loro applicazioni analitiche, 4 1/2. — Del Pezzo : Funzioni analitiche e loro rappresentazione sulle superficie riemanniane con speciale trattazione delle funzioni automorfe, 4 1/2. — Montesano : Iperspazi ; Trasformazioni birazionali dello spazio, 4 1/2. — Pinto : Diffrazione, doppia rifrazione, polarizzazione, 4 1/2.

Padova ; *Università.* — D'Arcais : Generalità sulle equazioni differenziali e a derivate parziali ; Funzioni uniformi di variabile complessa, 4 1/2. — Favaro : Storia delle Matematiche in Italia nei secoli XVI e XVII, 3. — Gazzaniga : Teoria dei numeri, 3. — Levi-Civita : Le equazioni differenziali della meccanica ; Trasformazioni di contatto con applicazioni dinamiche ed ottiche, 4 1/2. — Ricci : Teoria del potenziale, elettrostatica, magnetismo, 4. — Severi : Teoria delle funzioni algebriche di una e di due variabili (seconda parte), 3. — Veronese : Geometria iperspaziale, 4 1/2.

Palermo ; *Università.* — Gerbaldi : Geometria differenziale, 4 1/2. — Guccia : Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche 4 1/2. — Torelli : Teoria matematica dell'elasticità, 4 1/2, — Venturi : Teoria della rotazione dei corpi, applicazione alla terra, precessione, nutazione, moti del polo, 4 1/2.

---

[1] Pour les universités italiennes, les cours généraux (tels que ceux d'Algèbre, Géométrie analytique, Géométrie descriptive, Calcul infinitésimal, Mécanique rationnelle, etc.) ne figurent pas dans cette liste. Nous devons ce tableau à l'obligeance de M. Levi-Civita. *(Réd.)*.

Pavia ; *Università*. — Almansi : L'equazione di Laplace e le sue applicazioni nei vari campi della fisica matematica, 3. — Berzolari : Funzioni algebriche e loro applicazioni geometriche, 3. — Pascal : Teoria delle trasformazioni di contatto, e applicazioni, 3.

Pisa ; *Università*. — Bertini : Geometria iperspaziale ; geometria sopra una curva algebrica ; applicazioni varie, 3. — Bianchi : Geometria infinitesimale delle curve e delle superficie con particolare sviluppo della teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche generali, 4 1/2. — Dini : Funzioni armoniche e funzioni di variabile complessa : Sviluppi in serie de Fourier e in serie integrali di equazioni lineari del second'ordine, 4. — Maggi : Teoria dell'equilibrio e del movimento dei corpi elastici e sua applicazione all'ottica, 4 1/2. — Pizzetti : Teoria generale delle perturbazioni planetarie e argomenti connessi, 3.

Roma ; *Università*. — Bisconcini : Teoria matematica dell'elasticità e applicazioni tecniche, 3. — Castelnuovo : Geometria sopra una superficie algebrica, 3. — Cerruti : Calcolo delle variazioni, applicazioni varie alla geometria ed alla meccanica, 3. — Volterra : Elettromagnetismo, 4 1/2 : Problema dei tre corpi, 3:

Torino ; *Università*. — Boggio : Applicazioni alla fisica matematica delle equazioni integrali di Fredholm, 3. — D'Ovidio : Teoria delle forme algebriche, 3. — Morera : Teoria delle forze newtoniane ; Equilibrio delle masse fluide ruotanti, 3. — Segre : Capitoli diversi di geometria della retta, 3. — Somigliana : Propagazione del calore e teoria dei gas, 3.

Circulaire

adressée par M. le Vice-Recteur de l'Académie de Paris à Mmes les directrices et professeurs de mathématiques des lycées et collèges de jeunes filles du ressort

Paris, le 31 janvier 1907.

L'expérience a montré que l'emploi prématuré de la logique pure dans l'enseignement de la géométrie ne donne pas, pour la grande masse des élèves, de bons résultats. Les débutantes ne comprennent rien à cette rigueur extrême qui s'exerce sur des sujets dont elles ont l'intuition immédiate, on les aveugle en voulant les éclairer, on court risque de leur fermer, dès l'entrée, la route que l'on voudrait leur faire parcourir.

La meilleure manière d'initier un enfant à une science est, d'une part, de faire état de ce qu'il sait déjà, de rattacher à ses idées naïves les idées plus précises que l'on veut lui donner, et d'autre part, de l'amener très vite, en le guidant, à résoudre des questions de nature à l'intéresser. C'est la méthode que l'on suit dans l'enseignement de l'arithmétique où un minimum de théorie, lié le plus souvent à des notions déjà familières à l'enfant, s'accompagne au début de beaucoup d'exercices et de problèmes variés. L'enfant accepte volontiers les courtes explications que l'on est bien obligé de lui donner, parce qu'elles cadrent avec les habitudes de sa pensée, et aussi parce qu'on lui fournit immédiatement l'occasion de les mettre lui-même en œuvre et de tirer ainsi, ce qui est une joie, quelque chose de son propre fonds.

Le premier enseignement de la géométrie réussira comme celui de l'arithmétique, s'il est donné dans le même esprit. Les professeurs des lycées de garçons, ceux du moins qui enseignent dans les classes de début, ont déjà été invités par une circulaire en date du 27 juillet 1905[1], à faire appel à

[1] (Voir *L'Ens. Math.*, nov. 1905. *Réd.*).

l'expérience dans l'exposé des faits géométriques, à admettre sans discussion tout ce qui semble évident aux enfants, tout ce qu'une construction suffit à légitimer ; c'est ainsi que l'élève se rend un compte très exact des cas d'égalités des triangles en construisant lui-même sur des données numériques, des triangles dont certains éléments, côtés et angles, ont des valeurs déterminées.

La même circulaire recommande l'emploi systématique de la notion du mouvement ; démonstration par retournement, par rotation, toutes les fois que cela est possible ; glissement d'une équerre le long d'une règle, pour préparer la définition euclidienne des parallèles, etc. — Il apparaît assez que le dessin est appelé à jouer un rôle important dans l'enseignement de la géométrie ainsi conçu, les élèves doivent exécuter très exactement les constructions, tracer par points des lieux géométriques, contrôler, par la mesure directe, l'exactitude des théorèmes métriques.

Si une telle façon de faire a pu être recommandée à juste titre dans les lycées de garçons, il n'est pas douteux qu'elle s'impose davantage encore dans les lycées de jeunes filles. Le fait qu'un grand nombre d'élèves de ces lycées, après avoir suivi le cours obligatoire de géométrie en 3e année, désertent le cours en 4e année, dès qu'il devient facultatif ; témoigne clairement du peu d'intérêt qu'elles ont trouvé à cet enseignement. En conséquence les professeurs chargés du cours de géométrie devront à l'avenir se préoccuper beaucoup moins d'exposer à leurs élèves des théories logiques que de leur donner le sens pratique et la connaissance utile des choses de la géométrie. On considérera que le but poursuivi est atteint si les élèves sont en état de parler correctement à propos des figures, d'effectuer des constructions exactes, de faire au besoin quelques démonstrations de théorèmes non évidents, comme par exemple le théorème de l'angle inscrit. Ainsi préparées, les élèves qui suivront le cours de 4e année pourront être exercées aux démonstrations logiques avec plus de chances de succès.

Comme, malgré tout, une minorité tout au moins abandonnera le cours de géométrie après la 3e année, il est très désirable que des notions de géométrie dans l'espace soit données en 3e année ; elles pourront être bornées à une compréhension exacte et purement expérimentale des faits de parallélisme et de perpendicularité pour les droites et les plans, à l'énoncé des règles pour la mesure des volumes, des prismes et des pyramides.

L. Liard.

Circulaire du Conseil scolaire de la Basse-Autriche

du 10 mai 1907. (2.2862).

aux directeurs des Gymnases et des Ecoles réales.

« En ces derniers temps il a été proposé, à plusieurs reprises, de transformer l'enseignement mathématique aux écoles secondaires supérieures. Ces propositions tendent à développer l'intuition de l'espace et à introduire la notion de fonction et les premières notions de calcul différentiel et intégral ; elles demandent des exercices et problèmes empruntés à d'autres domaines scientifiques et à la vie pratique ; de plus on demande qu'il soit tenu compte des liens entre les mathématiques et d'autres branches notamment la physique et la géométrie descriptive.

Suivant décret du 23 avril 1907, (z. 4748), le Ministre des Cultes et de l'Instruction autorise des essais dans certaines écoles moyennes, afin de permettre l'étude de la réalisation pratique de ces propositions.

Le Conseil scolaire a les pleins pouvoirs pour confier ces essais, provisoirement pendant l'année 1907/08, à ceux des professeurs qui se sont occupés de ces questions et qui possèdent les qualités pédagogiques nécessaires. Bien qu'ils aient toute la liberté quant au programme et à son extension, ils ne devront pas s'écarter des buts des divers enseignements et ne surcharger en aucun cas les élèves.....».

Comme on le voit, les autorités scolaires autrichiennes comprennent qu'il y a lieu de réformer les programmes suivant les vœux qui ont été exprimés dans de nombreuses assemblées, dans celles des naturalistes et médecins allemands comme dans les réunions de professeurs de mathématiques. On sait qu'en France ces réformes ont été introduites depuis plusieurs années.

BIBLIOGRAPHIE

G. Arnoux. — **Arithmétique graphique.** — Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. *(Essais de Psychologie et de Métaphysique positives.)* — 1 vol. gr. in-8, XX-225 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

M. Arnoux est un visuel. « Si j'ai une question à étudier — dit-il dans la préface de son volume — je me demande si la méthode graphique ne pourrait m'en donner la solution... En tout et pour tout, c'est mon seul et unique moyen de comprendre et de travailler. » C'est la méthode graphique qui lui a permis, il y a quelques années, de résoudre et de généraliser le fameux problème des carrés magiques et diaboliques, et c'est à l'aide de la même méthode qu'il a réussi à établir dans son dernier ouvrage les principales propriétés des congruences.

L'emploi de la représentation graphique dans des recherches arithmétiques n'est pas nouveau. Je me bornerai à rappeler les beaux travaux de M. F. Klein sur les formes quadratiques et les recherches de M. Minkowski. Plus récemment, M. Laisant a donné des applications curieuses des procédés graphiques dans son petit volume « Initiation mathématique. »

M. Arnoux s'en sert d'une manière systématique. Voici en quoi consiste sa méthode :

Pour représenter les faits arithmétiques, M. Arnoux a recours à des assemblages de cases qu'il appelle espaces arithmétiques. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait à étudier une fonction explicite ou implicite de deux variables α et β. Ces variables ne prennent, par hypothèse, que des valeurs entières, et lorsqu'on a fait choix d'un module m, le nombre des valeurs différentes de chacune de ces variables est égal à m. Prenons du papier quadrillé et considérons un carré composé de m^2 cases. A chaque couple de valeurs α, β, on fera correspondre une case déterminée du carré, de même qu'en géométrie analytique tout couple de valeurs des coordonnées détermine un point du plan. Dans chaque case on inscrira la valeur correspondante de la fonction. Un certain nombre de cases pourront contenir 2, 3... nombres différents, — de même qu'on pourra avoir des cases blanches ; ce cas se présentera chaque fois que les valeurs correspondantes de la fonction n'appartiendront pas au domaine de rationalité choisi.

M. Arnoux explique comment on peut procéder dans le cas où le nombre des variables est égal ou supérieur à trois. Il suffit alors de considérer une collection de m, m^2... carrés de m^2 cases, rangés dans un ordre déterminé.

Mais revenons à notre carré de m^2 cases. Les valeurs de la fonction étant inscrites dans les cases correspondantes du carré, l'examen attentif du tableau pourra nous révéler certaines particularités dans la distribution de ces valeurs qui sont la traduction graphique de propriétés arithmétiques de la fonction. En donnant au module des valeurs différentes, on éliminera les propriétés particulières et la comparaison des tableaux pourra nous mettre sur la voie de quelque loi générale. On voit que la méthode de M. Arnoux est, comme il le dit fort bien lui-même, la méthode expérimentale dans toute sa pureté. Comme moyen de découvertes, elle peut rendre des services réels. Dans bien des cas, elle fournit en même temps que des propriétés nouvelles, les éléments nécessaires à leur démonstration. Certes il y a des exceptions, et elles ne sont pas rares, mais le bon côté de la méthode de M. Arnoux est qu'elle nous donne toujours des points d'appui, et son utilité est incontestable.

Les deux premiers chapitres du livre de M. Arnoux sont consacrés à l'étude, à l'aide de la méthode graphique, des opérations élémentaires (mod. m) : multiplication, division, etc. On est conduit, par l'examen des tableaux, aux propriétés fondamentales des nombres entiers et des congruences binômes.

Nous passons ensuite à l'étude (mod p) des fonctions rationnelles entières à coefficients entiers, f (x), le module p étant un nombre premier. Les polynômes f (x) peuvent être supposés primaires. On a alors le théorème fondamental suivant qui domine toute la théorie des congruences : une fonction entière primaire ne peut être décomposée en fonctions irréductibles primaires que d'une seule manière.

Pour établir ce théorème, M. Arnoux se sert de figures qu'il appelle espaces décomposants. L'idée fondamentale reste la même. Une fonction f (x) est définie par ses coefficients. On pourra la représenter en écrivant la suite de ces coefficients dans leur ordre. Par exemple le polynôme $x^3 + 3\,x + 5$ s'écrira 1035. Ces coefficients jouent le rôle de coordonnées. A toute fonction f (x) de degré n correspond une case déterminée. On inscrira dans cette case les facteurs irréductibles de f (x). Mais comment trouver ces facteurs ?

Au lieu de décomposer les fonctions f (x) (mod. p), M. Arnoux remonte à ces fonctions en partant des fonctions irréductibles de degrés inférieurs à n, qu'il combine entre elles de toutes les manières possibles. A chacun des produits ainsi obtenus correspond une case déterminée. On aura qu'à inscrire dans cette case les facteurs dont on s'est servi. Dans les cas particuliers considérés par M. Arnoux, tous les produits sont différents (mod. p). Le nombre des produits différents est donc égal à celui des combinaisons. Mais cette propriété est-elle générale ? Le supposer c'est se servir implicitement du théorème fondamental qu'il s'agit de prouver. La propriété est loin d'être évidente ; dans les domaines algébriques, la décomposition peut n'être pas univoque et deux produits $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ peuvent être égaux entre eux, sans que le facteur indécomposable α soit égal à aucun des facteurs indécomposables γ et δ. La démonstration de M. Arnoux aurait donc besoin d'être complétée.

Nous abordons, dans le chapitre suivant, l'étude des congruences générales. M. Arnoux se sert très adroitement des imaginaires de Galois dont il esquisse la théorie en appuyant toujours sur les considérations concrètes. Ses tables de puissances des imaginaires méritent une attention spéciale.

Après ces généralités, nous passons à l'étude des congruences du premier, du second et du troisième degré [1]. Ici, les tables de M. Arnoux jouent un rôle particulièrement important. Elles lui permettent de retrouver la plupart des propriétés caractéristiques de ces congruences.

En résumé, ce qui fait avant tout l'originalité du livre de M Arnoux, c'est sa méthode. Malgré son extrême simplicité elle a permis à M. Arnoux de retrouver les principes essentiels de la théorie des nombres. J'engagerais beaucoup le lecteur à faire l'application de cette méthode à l'étude de problèmes qui n'ont pas été traités par M. Arnoux.

M. Arnoux nous apprend dans la préface que son livre est dû à une collaboration. Comme nom d'auteur il devrait porter à côté du sien, celui de M. C. A. Laisant. C'est en effet M. Laisant qui l'a rédigé. On y retrouve la précision, la clarté et cet art de simplifier les questions les plus ardues que possède à un si haut degré l'auteur de la « Théorie des équipollences » et de l' « Initiation mathématique. »

D. Mirimanoff (Genève).

W. M. Baker. — **Algebraic Geometry**. A new treatise on analytical conic sections. — 1 vol. in-17, 325 23 pp., 6 d., George Bell and Sons, London.

Comme l'auteur le fait remarquer dans sa Préface, ce traité est conforme aux idées nouvelles concernant l'enseignement mathématique. Il est appelé à rendre de grands services à tous ceux qui désirent s'initier d'une façon complète et pratique à la Géométrie analytique élémentaire. L'auteur, s'adressant à des débutants, n'aborde les sections coniques proprement dites qu'après une étude détaillée de la droite et du cercle. Après cela il passe aux courbes du second degré dans l'ordre suivant : Parabole, Ellipse, Hyperbole. Il est à remarquer que cet ordre diffère de celui généralement adopté.

Un des avantages incontestables de ce livre réside dans l'abondance et la variété des exemples ; aucune théorie n'est traitée sans application. Or, il n'est point besoin d'une longue expérience dans l'enseignement mathématique pour se rendre compte de l'utilité des exemples en pareil cas. Rien n'est plus apte à rendre claire une théorie plus ou moins abstraite qu'une application appropriée, et cela est surtout vrai lorsqu'on s'adresse à de jeunes intelligences, auxquelles du reste ce livre est destiné. En outre des exemples traités, l'élève trouvera à la fin de chaque chapitre de nombreux problèmes non

[1] Nous publierons dans un prochain n° une note de M. Mirimanoff sur les congruences du 3me degré se rattachant au livre de M. Arnoux. (*Réd.*).

résolus (les solutions sont données à la fin du volume) et, de temps en temps, des questions de revision.

On notera enfin l'emploi fréquent du papier quadrillé et l'abondance des figures, autant de points qui contribueront au succès de ce petit traité.

J.-P. Dumur (Genève).

H. Bouasse. — **Cours de physique** conforme aux programmes des Certificats et de l'Agrégation de physique. Fascicule I. — *Mécanique physique.* — 1 vol. gr. in-8° de 236 p. ; 6 fr. 50 ; Ch. Delagrave, Paris.

Dans cette Revue et à cette place consacrée d'ordinaire à l'analyse d'ouvrages mathématiques, il est impossible de passer sous silence le cours de physique dont M. Bouasse commence la publication. Quoiqu'il soit, comme l'auteur l'indique, surtout destiné aux physiciens, l'usage des mathématiques y est si constant, si clair, si varié à propos de problèmes dont l'élégance et l'importance se valent, qu'il intéressera à coup sûr bien des mathématiciens. On sait d'ailleurs combien ces derniers, lorsqu'ils font de la physique mathématique, sont portés à ne pas juger très équitablement du sens physique de leurs formules, rapprochant souvent des points analogues au point de vue purement analytique, mais que le physicien hésiterait à rapprocher dans le domaine expérimental.

L'œuvre de M. Bouasse semble très heureusement tenir le milieu entre un traité de Physique mathématique et un traité de Physique tout court.

Le premier fascicule traite de la Mécanique physique.

Les premières lignes séduisent tout de suite en montrant à quelle école philosophique appartient l'auteur. Pas de digressions plus ou moins vides sur l'idée de force. C'est le *travail* qui sert de base à toutes les autres notions. Des variations de longueur, de volume, de coordonnées quelconques, da, db, dc... entraînent un travail élémentaire

$$dT = A\,da + B\,db + C\,dc + \ldots$$

et ce sont les coefficients A, B, C.... qui s'appellent conventionnellement forces, pressions, etc... De telles idées ne seront jamais trop rappelées ni trop mises en évidence à la base de la Mécanique et de la Physique. Les principes généraux de la statique sont éclairés immédiatement par l'étude de systèmes simples (balance, suspension bifilaire, etc.). Nous passons ensuite aux fondements de la dynamique et au fonctionnement des machines à un degré de liberté (pendules simple, composé, à retournement). Le choc des corps, les frottements, les résistances de milieu, sont passées en revue sans aucune peine alors que tout cela semblerait énorme à l'étudiant physicien qui tenterait de se familiariser avec ces notions dans un traité de Mécanique où elles formeraient autant de chapitres distincts.

Le chapitre II consacré à l'hydrostatique contient notamment l'équilibre des corps flottants et la formule barométrique ; il est suivi d'une très intéressante étude de la capillarité (Ch. III) dans laquelle il faut signaler surtout les paragraphes ayant trait à la formation des gouttes et à la détermination de la surface d'un liquide dans le voisinage d'une paroi. La section de cette surface par un plan perpendiculaire à la paroi est une certaine courbe élastique définie par une équation différentielle du second ordre facilement intégrable. Combien de tels exemples pourraient être utilement cités dans les cours de Mathématiques générales et combien l'élève s'y intéresserait plus qu'à des calculs fantaisistes dont il se demande si la nécessité apparaîtra jamais au cours de Physique.

L'écoulement des fluides (Ch. IV), la règle de Torricelli, le théorème de Bernoulli, sont accompagnés de résultats expérimentaux très précis, notamment de l'étude stroboscopique des veines verticales libres. Après la résistance des fluides au mouvement des solides immergés nous abordons (Ch. V) la question de la transmission d'un ébranlement. La question capitale du rôle des équations aux dérivées partielles en Physique apparaît. M. Bouasse a grandement raison d'insister sur ce point si difficultueux en général mais qu'il est possible d'éclairer en s'en tenant tout d'abord a des solutions satisfaisant à des conditions aux limites choisies simplement. Les solutions contenant des fonctions arbitraires sont présentées tout d'abord. C'est la marche qui semblera la plus naturelle d'autant plus que, quelques pages plus loin, les développements trigonométriques sont étudiés. On comprendra alors sans peine, et physiquement pour ainsi dire, que ces développements puissent représenter des fonctions arbitraires puisqu'ils doivent rendre aux limites les mêmes services que les fonctions arbitraires que la première méthode permet d'introduire directement. Et d'ailleurs les préliminaires une fois posés on arrive avec une très grande simplicité a étudier la propagation d'une onde unique, sa réflexion, la transmission adiabatique du son et le principe d'Huyghens sur la propagation d'un ébranlement entretenu par tous les points d'une surface d'onde.

L'hydrodynamique (Ch. VI), déjà abordée à vrai dire dans les questions précédentes, est reprise plus généralement avec la notion du potentiel des vitesses qui existe ou n'existe pas suivant que le mouvement est irrotationnel ou non. Cela conduit à la considération des mouvements tourbillonnaires envisagés soit au sein d'un liquide, soit au sein d'un gaz, mouvements qui offrent des apparences physiques si curieuses surtout dans les cas où l'on peut mettre en évidence l'existence de surfaces ou de lignes de tourbillon.

Le reste de l'ouvrage est consacré à la déformation des solides. En cette matière les travaux personnels de l'auteur sont suffisamment connus pour qu'on puisse les voir transparaître sous une exposition de forme extrêmement originale. L'idée d'hystérésis facile à interpréter géométriquement sépare immédiatement la déformation parfaitement élastique de la déformation ordinaire. Les propriétés de certaines substances comme le caoutchouc, substances qui obéissent pour de grandes déformations à des lois sinon semblables du moins comparables à celles qui régissent les déformations très petites d'autres corps beaucoup moins élastiques tels que les métaux, sont rapprochées immédiatement des propriétés de la déformation parfaitement élastique. Je signale aussi comme une bien intéressante expérience d'acoustique la mesure du module d'Young fondée sur l'étude des vibrations sonores d'une tige. Dans l'étude de la torsion hélicoïdale d'un cylindre on voit nettement l'influence de l'hypothèse préliminaire, facile à vérifier, de la conservation des sections droites.

Le chapitre VIII est consacré aux éléments de la théorie de l'élasticité pour les corps isotropes. C'est d'abord une partie toute théorique, inévitable parce qu'elle est indispensable, et c'est, comme on peut s'y attendre, la partie qui semblera la plus difficile au lecteur dont la science mathématique est restreinte ; cependant, dans la question si délicate de l'équilibre élastique, M. Bouasse peut rapidement présenter des résultats expérimentaux et étudier par exemple l'équilibre d'un tube cylindrique ou d'une enveloppe sphérique. Alors revient la belle question des ondes considérée cette fois dans un solide isotrope. Les équations générales de la déformation qui paraissent si compliquées en général vont cependant donner des résultats simples, élégants et d'une importance capitale si l'on réfléchit notamment à ce que les solides transmettent des ondes transversales qui en optique sont celles transmises par l'éther.

Après l'étude du frottement appliqué entre autres choses aux questions de freinage (Ch. IX) nous passons à l'équilibre et au mouvement vibratoire des cordes. Dans l'équilibre la tension de la chaînette est envisagée dans le cas très réel des chaînettes formées par les fils télégraphiques suspendus, dans le mouvement nous retrouvons pour les vibrations des cordes et des membranes les considérations relatives aux équations aux dérivées partielles et aux séries trigonométriques déjà rencontrées à propos des ondes. Il est encore bien remarquable que la superposition des harmoniques soit une interprétation physique toute naturelle du développement en série trigonométrique.

Le dernier chapitre est consacré à la résonnance et à la vibration des verges si bien que ce premier volume contient en somme l'acoustique. Il est beau d'avoir été jusque là dans une partie consacrée par son titre à la Mécànique physique.

Les volumes suivants auront trait à la Thermodynamique, à l'Electricité, à l'Optique. Heureusement préparés par celui que nous venons de parcourir ils nous apporteront sans doute bien d'autres surprises intéressantes et nouvelles.

A. Buhl (Montpellier).

F. Ebner. — **Leitfaden der technisch wichtigen Kurven.** — 1 vol. in-8°, cart. VIII, 197 p., 93 fig. ; 4 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Ebner a réuni en un exposé systématique les propriétés d'un certain nombre de courbes que l'on rencontre fréquemment en mécanique. Il fait une étude très complète et bien ordonnée de la trajectoire décrite par le sommet C d'un triangle ABC, les points A et B étant astreints à glisser sur deux axes rectangulaires, sur une droite et une circonférence ou sur deux circonférences. La discussion donne lieu à d'intéressants exemples dont les applications pratiques sont mises en évidence.

Dans les deux derniers chapitres sont examinés les paraboles et les hyperboles d'ordre supérieur ($y=ax^n$), et les courbes dites cycliques.

Il y a là non seulement des applications utiles à l'étude de la trajectoire d'un point d'une bielle, mais les professeurs y trouveront aussi d'intéressants exercices de géométrie analytique donnant lieu à des discussions d'une interprétation facile.

Alexander Gleichen. — **Vorlesungen über photographische Optik.** — 1 vol. in-8°, 230 p., 63 fig. ; 9 Mk ; Göschen, Leipzig.

M. Gleichen, qui en 1902 a publié un traité d'optique géométrique très intéressant, expose dans ces « leçons » la théorie des systèmes photographiques. Toute cette théorie se déduit des principes connus de l'optique géométrique (propagation rectiligne de la lumière, lois de réflexion et réfraction, etc.). Le lecteur sera peut-être un peu surpris que la diffraction, tellement importante pour les instruments optiques en général, ne joue aucun rôle dans la théorie des objectifs photographiques. La raison en est, qu'on opère en photographie presque toujours avec des faisceaux d'ouverture relativement grande. Cependant, si le problème au point de vue physique s'en trouve simplifié, il en résulte une plus grande complexité au point de vue géométrique. Mais la plus grande difficulté réside évidemment dans la grandeur du champ. De là, un grand nombre de corrections et de conditions, dont l'auteur expose la théorie avec beaucoup de simplicité et d'élégance. Le mathématicien suivra avec intérêt ces développements, qui contiennent en maints endroits les vues personnelles d'un homme expert.

Partant des principes élémentaires de la formation des images par des surfaces sphériques centrées, l'auteur n'envisage d'abord que la région paraxiale. Il traite ensuite le problème de la délimitation des faisceaux par les diaphragmes, l'achromatisme, la région de *Seidel* et la condition de *Petzval*. Des problèmes plus compliqués et plus généraux de la représentation d'une portion finie de l'espace sont abordées, en faisant intervenir la surface d'onde et la fonction de *Hamilton*. La condition générale pour la formation de l'image sans aberration de deux points voisins de l'axe optique est exposée d'après les vues personnelles de l'auteur. Il en déduit la condition des sinus et la condition de *Herschel*. Le chapitre suivant traite l'astigmatisme. Les formules sont simplifiées par l'introduction du « système rationnel » qui met en évidence certains invariants optiques. (Rayons méridionaux et sagittaux. « Pointe caustique » « Koma. ») Plus loin, l'auteur critique certaines inexactitudes qu'on se permet quelquefois dans la construction des images, en exposant une théorie du « diaphragme naturel » et de la construction des images par « rayons fondamentaux ». Les derniers chapitres sont consacrés aux questions de l'orthoscopie, éclat des images, objectifs symétriques, constructions géométriques des faisceaux réfractés, notes historiques et exemples numériques du calcul des objectifs photographiques.

A. Schidlof. (Genève).

Franz Rogel. — **Das Rechnen mit Vorteil**. Eine gemeinfassliche durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung emphfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. — 1 vol. in-8°. 38 p. ; M. 0,80 ; B. G. Teubner. Leipzig.

Cette brochure rendra d'utiles services à tous ceux qui désirent apprendre à calculer rapidement et avantageusement. Elle s'adresse aux personnes qui sont déjà versées dans les opérations fondamentales de l'Arithmétique et de l'Algèbre et elle a pour but de simplifier, dans la mesure du possible, ces opérations et ces calculs de façon à permettre à ceux qui en prendront connaissance de perdre le moins de temps possible.

L'auteur passe d'abord en revue les quatre opérations fondamentales : Addition, Soustraction, Multiplication, Division ; il traite spécialement les cas particuliers qui peuvent se présenter et indique les principaux moyens de preuves dont on dispose. Il faut noter également les chapitres concernant la multiplication complémentaire, la multiplication ordonnée, la multiplication abrégée et enfin celle des nombres approchés. On retrouve du reste les mêmes chapitres dans la Division..

L'auteur traite en terminant des puissances (carrés et cubes) et des Racines (racines carrées et cubiques et racines cinquièmes).

En outre des moyens abréviatifs connus, l'on en trouvera dans ce petit livre d'autres qui le sont moins et qui jusqu'à présent n'avaient pas été répandus. C'est donc un mérite de plus pour l'auteur d'avoir fait œuvre de vulgarisation, et il est à souhaiter que ce petit volume parvienne entre les mains de tous ceux que cette question intéresse.

J.-P. DUMUR, (Genève)

M. SIMON. — **Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert.** — 1 vol. in-8° cart. 278 p. ; 8 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce volume, qui fait partie des rapports publiés par l'Association des mathématiciens allemands (suppléments, Tome I), donne un aperçu du développement de la Géométrie élémentaire au cours du XIX^{me} siècle. Dans le premier chapitre on trouve d'utiles indications historiques et bibliographiques concernant la Géométrie élémentaire, sa méthodologie, ses traités et recueils d'exercices. L'auteur examine ensuite, dans les chapitres suivants, des questions particulières, telles que la théorie des parallèles, la circonférence, la mesure des aires, etc... les relations métriques dans l'espace, la Trigonométrie.

Le texte proprement dit est clair et très condensé ; chaque paragraphe est accompagné de renseignements bibliographiques très nombreux. En les examinant on ne peut qu'admirer le soin que l'auteur a apporté à cette importante étude bibliographique que nous signalons à tous ceux qui enseignent la Géométrie élémentaire. Elle a sa place bien marquée dans toutes les bibliothèques d'Ecoles normales, de Gymnases et de Lycées.

Gaston TARRY. — **Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7.** — Grand in-8 (28×19) ; 1 fr. 25 : Gauthier-Villars, Paris.

L'Auteur se propose de construire de nouvelles Tables pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers, pour les douze premiers millions, en les réduisant au moindre volume.

Pour atteindre ce but, il a imaginé un nouveau procédé, qui présente l'avantage de substituer aux divisions successives du nombre considéré, par les différents nombres premiers p, des additions *mentales* de nombres inférieurs à la moitié de p. Ainsi, la multiplication apportée est équivalente à celle introduite par les logarithmes dans le calcul des divisions.

Comme exemple d'application de la nouvelle méthode, il fait paraître sous le nom de « Tablette des cotes... » une Table des facteurs premiers des nombres de 1 à 100489.

Suivant l'accueil qui sera fait à cette publication, il verra s'il doit poursuivre ou abandonner son projet.

Dans une note publiée dans le *Bull. de la soc. philomatique* de Paris, 1907, M. Tarry donne la théorie des tablettes des cotes pour la recherche des facteurs premiers d'un nombre inférieur à $N = 317^2 = 100489$ et non divisible par 2, 3, 5 ou 7.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

American Journal of Mathematics, edited by Fr. MORLEY. Vol. XXIX, 1907 ; The Johns-Hopkins Press, Baltimore.

Nos 1 et 2 (janvier-avril 1907). — G.-A. MILLER : The groups wich contain less than Fifteen operation of Order Two. — LENNES : Concerning the Improper Definite Integral. — AKERS : On the augmence of axes in a Bundle of linear Line complexeo. — H. Sisam : On septic serolls Having a rectilinear Directrix. — Study : Beiträge zur Nicht- Euklidischen Geometrie. — Eisenhardt : Certain Triply Orthogonal systems of surfaces.

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, publicados sob a Direcçao de F. Gomes Teixeira. — Vol. I. Impreno da Universidade, Coinbra.

Vol. I, Nos 3 et 4. — J. Neuberg : Sur quelques complexes de droites. — Lazzeri : Aggrupamenti prospetivi di ordinè n e specie $p+1$. — Haton de la Goupillière : Centre de gravité du temps de parcours.

Vol. II, No 1. — Niels Nielsen : Sur les séries de fonctions sphériques.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. CCCIII Rendiconti. Vol. XV. Juillet-décembre 1906, Rome.

P. Burgatti : Sull'estensione del metodo d'integrazione di Riemann all'equationi lineari d'ordine n con due Variabili indipendenti. M. de Franchis) Le superficie, più volte irregolari, di 5o ordine con punti tripli. — Id : Le superficie irrationali di 5o ordine con infinite coniche. — F. Enriques : Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali. — H. Lebesgue : Les fonctions dérivées. — B. Levi : Ancora alcune osservazioni sulle funzioni derivate. — E.-E. Levi : Su un lemma del Poincaré. — Id : Richerche sulla teoria delle funzioni automorfe. — G. Morera : Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali. — U. Sbrana : Le superficie di Serret negli spazi a curvatura costante. — F. Severi : Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli. — E. Almansi : Sulle equazioni dell'elasticità. — Id : Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici. — G. Lauricella : Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema del l'elettrostatica e sulla integrazione delle equazioni dell'elettricità.

Bollettino di matematica, giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle scuole Medie, diretto dal Dott. Alberti Conti, con la cooperazione del Dott. Umberto Scarpis. Anno. VI, 1907 ; Bologna.

Nos 1 à 4 (janvier-avril 1907). — Vannini : Sulle approssimazioni numeriche. — Galvani : Sulla risoluzione dei problemi geometrici col metodo delle equipollenze. — Carollo : Sulla divisibilità dei numeri. — Ghezzi : Sulla divisibilità dei numeri. — Doria : Importanza del calcolo delle espression aritmetiche. — Piccole note. — Revista bibliografica.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — 1907. 1er semestre. T. CXLIV. — Gauthier-Villars, Paris.

7 janvier. — Schoenflies : Sur un théorème de Heine et un théorème de Borel. — Lecornu : Sur les turbines à axes flexibles.

14 janvier. — E. Rémoundos : Sur les points critiques d'une classe de fonctions. — Merezyng : Sur le mouvement des liquides à grande vitesse par conduite très large. — Boggio : Sur les potentiels d'un volume attirant dont la densité satisfait à l'équation de Laplace.

21 janvier. — Fréchet : Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées. — Jacob : Sur la résistance et l'équibre élastique des tubes frottés. — Tsoncalas et Vlahavas : Sur les hélices de propulsion. — Ferber : Sur les hélices propulsives.

28 janvier. — E. Waelsch : Sur les fonctions sphériques et leurs multipèdes. — M. d'Ocagne : Sur la représentation par points alignés de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale. — P. Duhem. : Sur la propagation des quasi ondes de choc. — G. Koenigs : Sur la courbure des cour-

bes enveloppes dans le mouvement le plus général d'un corps solide dans l'espace.

4 février. — Z. Geouze : Quadrature des surfaces courbes. — Tsongalas et Vlahavas : Etude comparative des hélicoptères et des aéroplanes.

11 février. — Lebesgue : Sur le problème de Dirichlet. — Baire : Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à $n+p$ dimensions.

18 février. — P. Boutroux : Sur la croissance des intégrales des équations différentielles du premier ordre. — E. Maillet : Sur les fonctions quasi entières et quasi méromorphes. — Koenigs : Construction du rayon de courbure des courbes enveloppes dans le mouvement le plus général d'un corps solide.

25 février. — L. Remy : Sur certaines surfaces liées aux fonctions abéliennes de genre trois. — Jouguet : Remarque sur les ondes de choc. — Crussari : Sur quelques propriétés de l'onde explosive

4 mars. — N. Nielsen : Sur les formules d'addition des fonctions sphériques.

16 mars. — Koenigs : Sur les déformations élastiques qui laissent invariables les longueurs d'une triple infinité de lignes droites.

18 mars. — F. Riesz : Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. — T. Lalesco. — Sur les solutions périodiques des équations différentielles linéaires. — Lebesgue : Sur le problème de Dirichlet. — Barré : Sur les hélices considérées comme génératrices d'une surface. — Hilleret : Sur la méthode des isopérimètres.

25 mars. — Lecornu : Sur une généralisation du mouvement de Poinsot.

2 avril. — Buhl : Sur une extension de la méthode de sommation de M. Borel.

8 avril. — Eug. Barré : La surface engendrée par une hélice circulaire. — Stekloff : Sur un problème d'analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. — F. Riesz : Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholen.

22 avril. — Gambier : Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. — Popovici : Sur les équations aux intégrales réciproques.

29 avril. — G. Humbert : Sur les représentations d'un entier par une somme de dix ou de douze carrés. — Goldziher : Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Krygowski : Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonométriques. — Barré : Sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire. — M. d'Ocagne : Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale par un nomogramme conique. — Jacob : Intégramètre à lame coupante.

6 mai. — Bertrand Gambier : Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. — Ch. Michel : Sur certaines congruences de droites.

13 mai. — E. Picard : Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles. — Ernest Fischer : Sur la convergence en moyenne. — S. Bernstein : Méthode générale pour la résolution du problème de Dirichlet. — Ed. Maillet : Sur les fractions continues arithmétique et les nombres transcendants. — M. d'Ocagne : Sur la représentation des équations d'ordre nomographique 4 à 3 et à 4 variables. — Canovetti : Sur la résistance de l'air au mouvement des corps.

2. Livres nouveaux :

R. d'Adhémar. — **Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.** — 1 vol. in-8° écu, 86 p. ; cartonné. (*Collection Scientia*) ; prix : 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

P. Crantz. — **Arithmetik u. Algebra.** — Zum Selbstunterricht. I. — 1 vol. in-8° écu, 128 p. ; cart. (Collection *Aus Natur- u. Geisteswelt*) ; 1 Mk 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Gaet. Fazzari. — **Breve Storia della Matematica.** Dai tempi antichè al medio evo. — 1 vol. in-16, 268 p. ; 4 L. ; R. Sandron, Palerme.

C. Hawkins. — **Elementary Trigonometry.** (Dent's Series of mathematical and scientific Text Book for Schools). — 1 vol. in-16, cart. 310 p. ; 4 6 (with answers) ; Dent & C°. London.

F. Klein u. R. Schimmack. — **Der mathematischen Unterricht an höheren Schulen.** Teil. I. Von der Organisation des mathem. Unterrichs. — 1 vol. cart. in-8°. 236 p. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

C. A. Laisant. — **La Mathématique, Philosophie, Enseignement.** 2^me édition, revue et corrigée. — 1 vol in-8° cart. 243 p. ; 5 fr. , Gauthier-Villars, Paris.

Wilh. Lorey. — **Leonhard Euler.** — 1 broch. in-8°. 20 p. ; B.-G., Teubner, Leipzig.

Loria. — **Vorlesungen über darstellende Geometrie** Deutsch von Fr. Schütte. I : Die **Darstellungsmethoden.** — 1 vol. in-8°, relié ; 219 p. ; 6 M. 80 ; B. G. Teubner. Leipzig.

H. Müller. — **Vierstellige Logarithmen-Tafeln** für die Hand der Schüler zusammengestellt. — 1 fasc, cart., 8 p. ; 25 pf. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

H. Müller u. M. Kutnewsky. — **Aufgabensammlung.** Ausgabe B. II., 2. Auflage. — 1 vol. cart., 304 p. - prix : 3 Mk ; B.-G. Teubner, Leipzig.

H. Müller. — **Einführung in die Differential- u. Integralrechnung** zum Gebrauch an höheren Schulen. — 1 vol. cart. in-8°, 38 p. ; 1 M. 20 ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. Richter. — **Dreistellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln.** — 1 broch. in-16. 10 p., 0 M. 20 ; B. G. Teubner. Leipzig.

Gaston Tarry. — **Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7.** — Gr. in-8° (28 × 19) ; prix 1 fr: 25 ; Gauthier-Villars, Paris.

P. Treutlein. — **Mathematische Aufgaben** aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen. X Teil : Aufgaben. — 1 vol. in-8° relié, 158 p. ; 2 M. 80 ; B. G. Teubner Leipzig.

K. G. Volk. — **Die Elemente der neueren Geometrie.** Unter besonderer Berücksichtung des geometrischen Bewegungsprinzips. Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten u. zum Selbstudium bearbeitet. Mit 93 zum grossen Teil zweifarbigen Figuren im Text. 1 vol. cart. in-8° 77 p. ; 2 M. 20 ; B. G. Teubner. Leipzig.

H. Weber u. J. Wellstein. — **Encyklopädie der Elementar-Mathematik.** Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. III : **Angewandte Mathematik.** — 1 vol. gr. in-8°, relié. 666 p. ; 14 ; M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

ERRATUM

N° de mai, p. 201, ligne 13, supprimer le nom de M. G. Combebiac.

SUR LA DISCUSSION ET LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER DEGRÉ

1. — Cette théorie est capitale dans toute l'Analyse mathématique, et cependant son exposition n'a jamais eu une limpidité suffisante pour ne laisser aucune obscurité dans l'esprit des élèves. C'est ainsi que dès le Baccalauréat, le cas de deux inconnues, le seul exigé, est presque toujours évité par les candidats quand il est laissé à leur choix parmi trois sujets de composition, et que, pendant les 38 années de ma carrière d'examinateur, je n'en ai pour ainsi dire pas rencontré un seul qui ait pu me faire sur cette question des réponses ne soulevant aucune objection.

Ce manque de netteté tient d'abord à la nature synthétique presqu'à l'excès, des moyens employés. On commence, en effet, par construire des expressions spéciales, les déterminant, au gré de règles ne laissant apercevoir avec la question, aucun rapport même éloigné, et on poursuit à l'aventure, par des passes de prestidigitation exécutées sur ce matériel dont rien, en dehors de la réussite, ne vient expliquer la nécessité et l'exacte adaptation. D'autre part, et c'est en bonne partie une conséquence de ces vues artificielles, on s'obstine à prendre pour thème du sujet, un système où le nombre des équations est égal à celui des inconnues (comme si l'égalité de ces deux nombres était une donnée imposée par quelque fatalité). et *dont la nature n'a pas été précisée autrement ;* c'est à peu près comme si l'on voulait faire la théorie de l'équation du deuxième degré, sans distinger le cas où le coefficient de x^2 est nul, de celui où il ne l'est pas. Une telle marche conduit à des formules de résolution exigeant une discussion dont les incidents sont très variés, dont il est quasi-impossible de renfermer les résultats dans un seul énoncé bref et précis.

Mais l'obscurité disparait, dès que l'on consent à raisonner sur les systèmes *réduits* ; j'y vais revenir[1], en simplifiant toute la question dans une mesure et sous une lumière qui me paraissent ne laisser plus rien à désirer.

2. — Etant donné un système quelconque d'équations simultanées du premier degré, dans chacune desquelles tous les termes ont été reportés au premier membre, on marque les rôles relatifs joués dans la question par les coefficients, en les écrivant en *abaque*, c'est-à-dire en inscrivant leurs notations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, disposées par *files* horizontales ou *lignes*, et simultanément par files verticales ou *colonnes*, cela de manière que les coefficients des diverses inconnues x, y, z,... et le terme indépendant d'elles dans chaque équation, soient toujours placés sur une même ligne, et que, dans les diverses équations du système, ceux de chaque même inconnue, les termes indépendants aussi, le soient toujours sur une même colonne.

S'il existe quelque groupe de solutions x', y', z',... chaque équation montrera que son terme indépendant est la somme des produits des coefficients de x, y, z,... par les mêmes quantités $-x'$, $-y'$, $-z'$..., ce que nous exprimerons en disant que, dans l'abaque du système, la colonne des termes indépendants est *composée homolinéairement de celles des coefficients de x, y, z,... au moyen des multiplicateurs $-x'$, $-y'$, $-z'$,... afférents à ces dernières colonnes.*

Si, d'autre part, quelque ligne de l'abaque est pareillement composée de ses autres lignes, le premier membre de l'équation correspondante est une fonction linéaire et homogène de ceux des autres équations, *homolinéaire* dirons-nous pour abréger ; il s'annule ainsi en même temps qu'eux tous simultanément, cette équation est satisfaite par tout groupe de solutions appartenant aux autres équations seulement;

[1] V. mon *Exposition nouvelle de la theorie des formes linéaires et des déterminants.* — 1884 Gauthier-Villars.

on peut donc la supprimer en réduisant au système de ces dernières seulement, tout le proposé dont le sort est le même.

Ces premières observations font pressentir le rôle dominant joué dans la question par cette notion de composition d'une file, de nom, ou *sens*, quelconque, relativement à ses homonymes, ou *parallèles ;* nous commencerons donc par développer tout ce qui s'y rattache immédiatement.

3. — Nous écrirons l'abaque

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots,\ g_1,\ h_1, \\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots,\ g_2,\ h_2, \\ a_3,\ b_3,\ c_3,\ \ldots,\ g_3,\ h_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_M,\ b_M,\ c_M,\ \ldots,\ g_M,\ h_M, \end{array}\right.$$

notation montrant d'elle-même ce que nous entendrons par *les lignes* 1, 2, 3,..., M, par *les colonnes* $a, b, c\ldots, g, h$, et nous nommerons : *ses éléments,* toutes les quantités $a_1, b_1, c_1 \ldots, g_1, h_1, a_2, \ldots, \ldots, a_M, b_M, c_M, \ldots, g_M, h_M$, indistinctement, qui le composent, *sa hauteur*, le nombre M de ses lignes, *sa largeur*, le nombre de ses colonnes que nous représenterons par N, ce qui donne MN pour le nombre total des éléments. Des éléments en nombre quelconque sont *enfilés* s'ils appartiennent à quelque même file, *enlignés* ou *encolonnés* suivant le cas.

D'après cela, si la colonne a est composée (homolinéairement) des autres (2), c'est qu'il existe entre $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_M$ et tous leurs enlignés dans les autres colonnes, les relations uniformes

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = \beta b_1 + \gamma c_1 + \ldots + \varkappa g_1 + \eta h_1, \\ a_2 = \beta b_2 + \gamma c_2 + \ldots + \varkappa g_2 + \eta h_2, \\ a_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_M = \beta b_M + \gamma c_M + \ldots + \varkappa g_M + \eta h_M, \end{array}\right.$$

où $\beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \eta$ sont les multiplicateurs afférents aux colonnes dont la première est composée. La composition de la ligne 1 au moyen des autres s'exprimerait par

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \dots + \lambda_M a_M\,, \\ b_1 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 + \dots + \lambda_M b_M\,, \\ c_1 = \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_1 = \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 + \lambda_4 h_4 + \dots + \lambda_M h_M\,, \end{cases}$$

les multiplicateurs afférents à ces dernières lignes étant ici $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_M$.

4. — Nous faciliterons beaucoup le langage en disant que, pour certaines valeurs des éléments, l'abaque est *vanescent* ou *invanescent, par ses files d'un sens donné,* selon que quelqu'une de ces files est composée de ses parallèles, (2), (3), ou qu'aucune d'elles ne l'est.

Il est utile de noter les observations suivantes.

I. *La vanescence de l'abaque, comme son invanescence, est indépendante des ordres dans lesquels ses lignes et colonnes peuvent être écrites.* Car une modification dans ces dispositions ne fait que changer l'ordre de succession des équations dans le système (2) ou (3), et celui des termes du second membre dans chaque équation.

II. *Par ses files du sens donné, l'abaque est toujours vanescent :*

1° *Quand une de ces files contient des éléments tous nuls* Car s'il s'agit des colonnes par exemple et de la première, les relations (2) auront lieu en y prenant

$$\beta = \gamma = \dots = \varkappa = \eta = 0\,.$$

2° *Quand l'abaque partiel laissé par l'ablation de quelques-unes de ces files est lui-même vanescent de la manière indiquée.* Car si l'on a par exemple

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3\,, \\ b_1 &= \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3\,, \\ &\dots\dots\dots \\ h_1 &= \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3\,, \end{aligned}$$

on rendra les relations (3) exactes en y prenant

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \ldots = \lambda_M = 0 \ .$$

3° *Quand les éléments sont tous nuls dans quelques files de l'autre sens, si l'abaque partiel laissé par l'enlèvement de ces dernières est vanescent de la manière considérée.* Car s'il en est ainsi pour les lignes montrant les indices 1, 2, et si les M — 2 dernières relations (2) ont lieu, les 2 premières ont lieu d'elles-mêmes, toutes forcément ainsi, puisque

$$a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = h_1 = 0 \ ,$$

et

$$a_2 = b_2 = c_2 = \ldots = h_2 = 0 \ .$$

III. *La vanescence de l'abaque par les files d'un sens, entraîne celle de l'abaque partiel qu'y laisse la suppression de files quelconques de l'autre sens.*

5. — La question qui nous occupe ramène à chaque instant, des polynomes entiers par rapport aux MN éléments de l'abaque, regardés comme autant de variables indépendantes, qui, *non nuls identiquement, le deviennent chaque fois que ces variables prennent des valeurs pour lesquelles l'abaque est vanescent par ses files d'un sens donné*, (**4**), qui présentent en outre le caractère particulier *d'être homolinéaire par rapport aux éléments de chacune de ces files, considérés isolément.* Nous les nommerons des *covanescents* de l'abaque, *pour ses files du sens indiqué.*

Nous commencerons par étudier leur structure, en supposant qu'il *s'agit des lignes* pour fixer les idées, en représentant par **L** un polynome indéterminé parmi ceux qui ont la forme précisée ci-dessus relativement aux éléments *des lignes,* puis en cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit un covanescent *pour les lignes.*

I. *Soit*

$$\mathbf{L} = A_1 a_1 + B_1 b_1 + \ldots + G_1 g_1 + H_1 h_1 \tag{4}$$

l'ordination de ce polynome par rapport aux éléments de la ligne 1 *de l'abaque, par exemple, où*

$$A_1 \, , \, B_1 \, , \, \ldots \, , \, G_1 \, , \, H_1 \tag{5}$$

sont indépendants des éléments de cette ligne,

$$(6) \qquad a_1, b_1, \dots, g_1, h_1 .$$

Si $M = 1$, *les quantités* (5) *se réduisent à des constantes.*

Si $M > 1$, *il faut que* A_1, *soit indépendant des éléments de la colonne aussi de* a_1, *covanescent en outre (pour les lignes) de l'abaque partiel* $\{a_1\}$ *laissé dans* (1) *par la suppression de ces deux files non parallèles contenant* a_1 ; *et de même pour* $B_1, \dots, G_1, H_1$, *relativement aux colonnes de* $b_1, \dots, g_1, h_1$, *et aux abaques partiels* $\{b_1\}, \dots, \{g_1\}, \{h_1\}$.

1° Quand $M = 1$, les éléments (6) sont les seuls composant l'abaque, et les quantités (5), qui n'en dépendent pas, sont ainsi des constantes.

2° Quand $M > 1$, ces polynomes (5) sont, comme **L**, homolinéaires par rapport aux éléments d'une autre ligne quelconque i,

$$(7) \qquad a_i, b_i, \dots, g_i, h_i ,$$

et, pour A_1, on a ainsi

$$(8) \qquad A_1 = A_{1,a} a_i + A_{1,b} b_i + \dots + A_{1,g} g_i + A_{1,h} h_i .$$

où $A_{1,a}, \dots, A_{1,h}$ ne dépendent d'aucun des éléments des lignes (6), (7).

En attribuant maintenant la valeur commune 0 à tous les éléments de ces deux lignes, autres que a_1, a_i, l'une au moins de celles-ci devient composée de l'autre (**3**) quels que soient a_1, a_i, ce qui rend l'abaque vanescent (par les lignes), donne en conséquence $\mathbf{L} = 0$. Car, si a_1 est nul aussi, ou bien a_2, tous les éléments d'une même ligne s'évanouissent (**4**, II, 1°). Sinon, $a_1 = (a_1 : a_i)\, a_i$ par exemple, et la ligne d'indice 1 est composée de celle d'indice i, le multiplicateur de celle-ci étant $a_1 : a_i$. Or ces attributions numériques réduisent A_1 à $A_{1,a} a_i$ (8), **L** par suite à $A_{1,a} a_1 a_i$ (4) ; d'où $A_{1,a}\, a_1\, a_i = 0$, quels que soient a_1, a_i, ceci exigeant $A_{1,a} = 0$.

L'indice i étant arbitraire, on voit que A_1 est bien indépendant de tout élément de la colonne des a.

3° Quand l'abaque partiel $\{a_1\}$, à $M-1$ lignes et $N-1$ colonnes, savoir

$$(9)\quad \left\{\begin{matrix} b_2, & c_2, & \dots, & g_2, & h_2, \\ b_3, & . & . & . & h_3, \\ . & . & . & . & . \\ b_M, & c_M, & \dots, & g_M, & h_M. \end{matrix}\right.$$

devient vanescent, le suivant à $M-1$ lignes et N colonnes,

$$\begin{matrix} 0, & b_2, & c_2, & \dots, & g_2, & h_2, \\ 0, & b_3, & . & . & ., & h_3, \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & b_M. & c_M, & . & ., & h_M. \end{matrix}$$

le devient aussi (**4**, II, 3°), et encore, quel que soit a_1, cet autre

$$\left.\begin{matrix} a_1, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, \\ 0, & b_2, & c_2, & \dots, & g_2, & h_2, \\ 0, & b_3, & . & . & ., & h_3, \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & b_M, & c_M, & \dots, & g_M. & h_M, \end{matrix}\right\} \quad (Ib., 2°),$$

auquel le proposé (1) se réduit, pour

$$b_1 = c_1 = \dots = g_1 = h_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = a_3 = \dots = a_M = 0 .$$

Or ces attributions numériques réalisées dans (4) réduisent **L** à $A_1 a_1$, puisque A_1 est indépendant, tant de ces $2(M-1)$ éléments, que de a_1 (2°). Quel que soit a_1, on a donc

$$A_1 a_1 = 0 , \quad \text{d'où} \quad A_1 = 0 ,$$

ceci montrant que A_1 est un covanescent de l'abaque $\{a_1\}$ figuré en (9).

4° Pour les autres polynomes du groupe (5), les raisonnements sont les mêmes, sauf des notations différentes.

II. Désormais, nous supposerons > 1, la hauteur M de l'abaque, ainsi que sa largeur N, et nous dirons *défilés*, des éléments en nombre quelconque, dont deux ne sont jamais enfilés (**3**). Tels sont : a_1, b_2, ou a_2, b_1, ou a_1, b_2, c_3, ou b_1, a_2,

c_3, ou a_1, b_2 c_3, d_4, etc., ou..., groupes dans chacun desquels deux éléments quelconques ne sont, ni enlignés, ni encolonnés.

Dans le développement général (en termes élémentaires dissemblables) du polynome L *ordonné par rapport à la totalité des éléments de l'abaque, il faut que tout terme de coefficient* $q \neq 0$, *soit le produit de* q *par* M *élément défilés.*

Car si un tel terme contenait deux facteurs variables enlignés, le polynome L ne serait pas linéaire par rapport aux éléments de la ligne de ces facteurs *(supr.)*. S'il contenait deux facteurs variables encolonnés, l'ordination de L par rapport aux éléments de la ligne de l'un d'eux, e_i, donnerait à e_i un coefficient non indépendant de tous les éléments de la colonne des e (I). S'il contenait moins de M facteurs de ce genre, le même polynome ne serait pas homogène par rapport aux éléments de quelque même ligne *(supr.)*

En d'autres mots, il faut que les notations des M éléments facteurs d'un tel terme, montrent les M indices différents 1, 2, 3, ..., M, affectant M lettres différentes aussi.

III. — On forme les *arrangées* de ν objets différents, de nature quelconque, en les concevant simultanément (avec ou sans figuration par l'écriture) dans tous les ordres de succession réalisables. Deux arrangées sont *identiques*, quand chacun des ν objets est au même rang dans l'une et dans l'autre, *différentes* quand il n'en est pas ainsi. On sait que le nombre des arrangées différentes est 1. 2. 3.... ν.

Une *permutation* de ces objets dans une arrangée est un déplacement simultané de tout ou partie seulement d'entre eux, qui la change en un autre (identique parfois, à la rigueur). Elle prend le nom spécial de *transposition* de deux objets, dans le cas très remarquable, où, ν étant > 1, elle consiste à déranger deux objets seulement, pour remettre chacun d'eux à la place que l'autre occupait.

La transposition de deux files parallèles de l'abaque (I) est leur transposition définie à l'instant, moyennant conception préalable de l'abaque comme une arrangée de toutes les files de ce sens, considérées chacune comme un seul objet. Cela posé :

Il faut que la transposition de deux lignes quelconques, i, j, dans la notation du polynome L, *change son signe sans modifier sa valeur, c'est-à-dire plus proprement, qu'elle équivaille à sa multiplication par* — 1, *changeant ainsi* L *en* — L.

1° L'ordination de L par rapport aux éléments de ces deux lignes, considérés indistinctement, ne donne que des termes de la forme

$$Q e_i f_j ,$$

où les éléments ordonnateurs mis en évidence sont notés par deux lettres différentes, comme leurs indices, le coefficient Q ne dépendant que des éléments de l'abaque, étrangers, tant aux colonnes de lettres e, f, qu'aux lignes considérées, d'indices i, j. Car si l'un de ces deux éléments manquait, L ne serait pas homogène par rapport à tous ceux de sa ligne ; si leurs lettres étaient identiques, le développement général de L contiendrait des termes $\neq 0$ dont les facteurs e_i, e_j seraient encolonnés (II) ; si le polynome Q dépendait de quelque élément appartenant à une des quatre files exclues, un fait analogue impossible se présenterait d'une manière ou de l'autre. Cette ordination donne donc

$$(10) \qquad \mathrm{L} = (\mathrm{P}'a_i b_j + \mathrm{P}''b_i a_j) + (\mathrm{Q}'a_i c_j + \mathrm{Q}''c_i a_j) + \ldots$$
$$+ (\mathrm{T}'g_i h_j + \mathrm{T}''h_i g_j) ,$$

le nombre total des termes étant N (N — 1), les coefficients tels que Q, ayant été représentés par

$$(11) \qquad \mathrm{P}', \mathrm{P}'', \mathrm{Q}', \ldots , \mathrm{T}'' ,$$

et les deux termes dont les éléments ordonnateurs appartiennent à chaque paire de colonnes, ayant été toujours groupés entre parenthèses pour plus de clarté.

2° En donnant ensuite les noms α, β, γ, ..., $\varkappa$, η, à N quantités absolument indéterminées, puis faisant

$$a_i = a_j = \alpha , \; b_i = b_j = \beta , \; \ldots \; . \; g_i = g_j = \varkappa , \; h_i = h_j = \eta ,$$

et représentant par Λ ce que **L** devient ainsi, il vient, d'après le développement précédent,

$$\Lambda = (P' + P'')\,\alpha\beta + (Q' + Q'')\,\alpha\gamma + \dots + (T' + T'')\,\varkappa\eta\,,$$

parce que les polynomes (11) sont tous indépendants des éléments des lignes dont les indices sont i, j, et tous les termes du second nombre sont dissemblables. Mais, en même temps, l'abaque est devenu vanescent, parce que, les deux lignes considérées ayant été rendues identiques, l'une d'elles prise à volonté est composée de l'autre au moyen du multiplicateur 1. On a donc par définition $\Lambda = 0$, quelles que soient $\alpha, \beta, \dots, \varkappa, \eta$; ceci entraîne

$$P' = -P'' = P\,,\ Q' = -Q'' = Q\,,\ \dots\,,\ T' = -T'' = T\,,$$

où P, Q, ..., T représentent les valeurs communes des deux membres de chaque égalité, donne par suite au développement (10), la forme

$$L = P(a_i b_j - b_i a_j) + Q(a_i c_j - c_i a_j) + \dots + T(g_i h_j - h_i g_j)\,.$$

3° Or la transposition des lignes considérées modifie cette expression, de la même manière que celle des indices i, j seulement, change donc **L** en

$$\begin{aligned} &P(a_j b_i - b_j a_i) + Q(a_j c_i - c_j a_i) + \dots + T(g_j h_i - h_j g_i) \\ &= -P(a_i b_j - b_i a_j) - Q(a_i c_j - c_i a_j) - \dots - T(g_i h_j - h_i g_j) \\ &= -\mathbf{L}\,. \end{aligned}$$

IV. *Quand* $M = 1$, *le polynome* **L** *est toujours un covanescent de l'abaque considéré.*

Quand $M > 1$, *il suffit pour qu'il en soit ainsi, que* **L** *soit changé en* — **L** *par la transposition de deux lignes quelconques.*

1° Si $M = 1$, l'abaque ne peut devenir vanescent que par l'attribution de la valeur commune 0 à tous les éléments de sa ligne unique. Or cette attribution annule **L** puisqu'il est homolinéaire par rapport à tous ces éléments.

2° Si $M > 1$, **L** s'évanouit :

α. — Quand les éléments de quelque même ligne de l'abaque prennent tous la valeur 0, puisqu'il est linéaire et homogène par rapport à eux.

β. — Quand deux lignes sont identiques; car en nommant $'\mathbf{L}$ ce en quoi $\mathbf{L}$ est changé par la transposition de ces deux lignes, l'hypothèse donne

$$'\mathbf{L} = -\mathbf{L}\,,$$

outre

$$'\mathbf{L} = \mathbf{L}$$

en fait, à cause de l'identité de ces lignes, et ces deux relations entraînent bien $\mathbf{L} = 0$.

γ. — Quand quelque ligne, la première pour fixer les idées est composée des autres. Car on a, pour les éléments de cette ligne, des expressions telles que les seconds membres de (3), expressions dont la substitution dans $\mathbf{L}$, homolinéaire par rapport à ces éléments, donne

$$\mathbf{L} = \lambda_2 . \mathbf{L}_2 + \lambda_3 . \mathbf{L}_3 + \ldots + \lambda_{\mathrm{M}} . \mathbf{L}_{\mathrm{M}}\,,$$

où $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, ..., $\mathbf{L}_{\mathrm{M}}$ représentent respectivement ce que devient $\mathbf{L}$ par la substitution à sa première ligne, de celles d'indices 2, 3, ..., M successivement. Or, ayant par ce qui précède $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 = \ldots = \mathbf{L}_{\mathrm{M}} = 0$ (β), on a aussi $\mathbf{L} = 0$.

Comme l'abaque est vanescent dans le premier des trois cas ci dessus (α), dans le dernier (γ) [renfermant le second (β)], et ne peut l'être dans aucun autre, le polynome $\mathbf{L}$ en est bien un covanescent.

V. *Quand* $\mathrm{M} > \mathrm{N}$, *l'abaque ne possède aucun covanescent.*

Car, s'il en existait un, son ordination par rapport à tous les éléments de l'abaque contiendrait quelque terme de la forme $qa_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots g_\varkappa h_\eta$, le coefficient constant q étant $\neq 0$, et les M lettres étant toutes différentes, ainsi que les indices (II). Or ceci est impossible pour les lettres, puisque leur nombre N est supposé $<$ M.

[Si la détermination $\mathbf{L} = 0$ identiquement, n'avait été exclue (*supr.*) comme dénuée d'intérêt, on pourrait dire ici que cette détermination est le seul covanescent de l'abaque (*Cf.* **11**, *inf.*)].

En conséquence, *nous supposerons désormais* $\mathrm{M} \leqq \mathrm{N}$.

VI. *Avec les colonnes de l'abaque* (1), *associées de toutes les manières possibles en groupes de* M *chacun, formons les abaques partiels*

$$(12) \qquad \{a'\}, \ \{a''\}, \ \{a'''\}, \ldots ;$$

dans le développement général du polynome **L** *supposé covanescent de l'abaque proposé, nommons*

$$(13) \qquad l', \ l'', \ l''', \ldots,$$

la somme des termes dont les notations impliquent exclusivement les lettres des M *colonnes de* $\{a'\}$ (11), *puis semblablement, celles des termes analogues relativement à* $\{a''\}$, $\{a'''\}$,... *successivement. Les polynomes* (13) *sont des covanescents des abaques* (12) *respectivement, du proposé aussi, et la somme de tous*,

$$(14) \qquad l' + l'' + l''' + \ldots,$$

reproduit **L**.

Inversément, si (13) *sont des covanescents quelconques des abaques* (12), *leur somme* (14) *en est un du proposé.*

1° Le groupe l' par exemple, est un covanescent de $\{a'\}$, parce que les attributions, aux éléments des colonnes de $\{a'\}$, de valeurs le rendant vanescent, à ceux des autres colonnes de (1), de la valeur commune 0, rendent ce dernier vanescent, (4, II, 3°), annulent ainsi **L**, en même temps que la seconde réduit ce polynome à l'.

2° Le même groupe est un covanescent de (1), parce que la vanescence de cet abaque entraîne celle de $\{a'\}$ en particulier (4, III), annule par suite son covanescent l'.

3° La somme (14) est égale à **L**, parce que tout terme de ce polynome, a été placé dans une des parties de cette somme et dans une seule.

4° Si les polynomes (13) sont des covanescents des abaques partiels (12), la nullité de tous, celle de leur somme (14) par suite, sont assurées par la vanescence de l'abaque (1), entraînant celle de chacun des abaques (12) (4, III). Donc cette somme est un covanescent du proposé.

6. Ce théorème ayant ramené la construction des covanes-

cents de l'abaque (1), à M lignes et N ($\geqq$ M) colonnes, à la recherche de ceux des abaques partiels (12), dans chacun desquels les lignes et les colonnes sont en nombre tous deux $=$ M, il nous reste à nous occuper de ces derniers, que nous dirons *carrés* et *d'ordre* M. Nous raisonnerons sur le type

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\,,\ b_1\,,\ c_1\,,\ \ldots\,,\ e_1\,,\ f_1\,, \\ a_2\,,\ b_2\,,\ c_2\,,\ \ldots\,,\ e_2\,,\ f_2\,, \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ a_M,\ b_M,\ c_M,\ \ldots\,,\ e_M,\ f_M, \end{array}\right.$$

noté au moyen de M lettres, a, b, c,..., e, f, dont nous représentons par l un covanescent hypothétique, *pour ses lignes,* toujours.

I. *L'ordre* M *étant supposé* $>$ 1, *et une colonne de l'abaque carré* (15) *ayant été choisie arbitrairement, ainsi qu'un élément dans celle-ci,* a_1 *pour fixer les idées, tout covanescent* l *de cet abaque est de la forme.*

$$(16)\qquad \mathrm{l} = a_1\mathrm{l}_{1,a} - a_2\mathrm{l}_{2,a} - \ldots - a_M\mathrm{l}_{M,a}$$

où ont été représentés : par $\mathrm{l}_{1,a}$ *quelque covanescent de l'abaque partiel, encore carré mais d'ordre* M — 1,

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_2\,,\ c_2\,,\ \ldots\,,\ e_2\,,\ f_2\,, \\ b_3\,.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\,,\ f_3\,, \\ \quad .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ b_M,\ c_M,\ \ldots\,,\ e_M,\ f_M, \end{array}\right.$$

que laisse dans le proposé la suppression simultanée de la ligne et de la colonne de a_1, *par* $\mathrm{l}_{2,a}$, $\mathrm{l}_{3,a}$, ..., $\mathrm{l}_{M,a}$, *ce que devient* $\mathrm{l}_{1,a}$ *quand on y substitue* b_1, c_1, ..., e_1, f_1, *à ses éléments figurant dans les lignes* 2, 3, ..., M *de l'abaque* (17), *enlevées tour à tour.*

Réciproquement, si $\mathrm{l}_{1,a}$ *est un covanescent de l'abaque partiel* (17), *cette formule donne pour* l *un covanescent du proposé* (1).

1° *Le polynome* l *est homolinéaire, par rapport aux éléments*

$$(18) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_M$$

de la colonne considérée.

Dans la formule (4), l'élément a_1 n'entrant ni dans A_1, ni dans aucune partie du second membre autre que A_1a_1, le terme en a_1 de l'ordination de **L** par rapport à cet élément *seulement* est précisément A_1a_1, et ceux de provenances analogues relativement à $a_2, \ldots, a_M$ sont, de même, $A_2a_2, \ldots, A_Ma_M$, empruntés aussi aux ordinations successives de **L** par rapport aux éléments des lignes 2, 3, ..., M.

L'application de ces observations à l'ordination de l par rapport aux (18) conduit donc à

$$(19) \qquad 1 = A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_Ma_M + A_0,$$

et on remarquera : que $A_1, A_2, \ldots, A_M, A_0$ sont, comme l, des polynomes tous homolinéaires par rapport aux éléments d'une ligne quelconque de l'abaque (15) ; que le dernier A_0 ne dépend que de ceux de l'abaque partiel

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{l} b_1,\ c_1,\ \ldots,\ e_1,\ f_1, \\ b_2,\ c_2,\ \ldots,\ e_2,\ f_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_M,\ c_M,\ \ldots,\ e_M,\ f_M, \end{array}\right.$$

restant de (15) après suppression de la colonne considérée (18) ; que tout autre A_i ne dépend que des éléments laissés dans celui-ci (20) par la suppression de sa ligne i (**5**, I).

Si maintenant on rend l'abaque (20) vanescent par les lignes, avec attribution simultanée de la valeur 0 aux quantités (18), on rend vanescent aussi l'abaque considéré (15) (**4**, II 3°), ce qui annule l, et on réduit à A_0 le second membre de (19). Il en résulte que A_0 prend alors la valeur 0, ceci montrant que ce polynome est un covanescent de l'abaque partiel (20) pour ses lignes, puisque nous avons remarqué tout à l'heure qu'il est homolinéaire par rapport aux éléments de chacune de ses files de ce sens.

Mais le même abaque n'a aucun covanescent de ce sens qui ne soit nul identiquement, parce que ses colonnes et lignes sont en nombre $M - 1 < M$ (5, V). D'où $A_0 = 0$ identiquement, puis

$$(21) \qquad 1 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_M a_M \qquad (19),$$

ce que nous voulions prouver.

2° *On a*

$$(22) \quad A_1 = 1_{1,a}, \; A_2 = -1_{2,a}, \; A_3 = -1_{3,a}, \; \dots, \; A_M = -1_{M,a}.$$

La première de ces formules résulte de ce que, dans l'ordination (4), A_1 est un covanescent de l'abaque partiel (9) se réduisant ici à (17).

Pour établir la seconde, transposons dans (21) les lignes 1, 2, ce qui donne

$$'1 = {}'A_1 a_2 + {}'A_2 a_1 + {}'A_3 a_3 + {}'A_4 a_4 + \dots + {}'A_M a_M,$$

en représentant par $'1$, $'A_1$, ... ce que $1, A_1, \dots$ sont devenus, et ajoutons les deux relations membre à membre. A cause de $1 + {}'1 = 0$ (5, III), il vient ainsi

$$0 = (A_1 + {}'A_2) a_1 + (A_2 + {}'A_1) a_2 + (A_3 + {}'A_3) a_3 + \dots$$
$$+ (A_M + {}'A_M) a_M,$$

puis

$$(23) \qquad A_1 + {}'A_2 = 0, \; A_2 + {}'A_1 = 0, \dots$$

parce que l'identité précédente a lieu quels que soient les éléments (18).

Comme A_1 ne dépend que des éléments des $M - 1$ dernières lignes de l'abaque partiel (20), la transposition exécutée a pour effet d'y remplacer seulement $b_2, c_2, \dots, e_2, f_2$ par $b_1, c_1, \dots e_1, f_1$. On en conclut $'A_1 = 1_{2,a}$ à cause de la première des formules (22), déjà établie, puis $A_2 = -{}'A_1 = -1_{2,a}$ à cause de la seconde identité (23), c'est-à-dire la seconde des mêmes formules ; et les transpositions de la même ligne 1 avec celles d'indices 3, 4, ..., M successivement, conduisent semblablement à toutes les autres.

3° La combinaison de ce qui précède (1°), (2°) montre que 1 ne peut avoir que la forme donnée par la formule (16).

4° Si $1_{1,a}$ désigne maintenant un covanescent quelconque de l'abaque (17), $l_{2,a}$, $l_{3,a}$, ... , $l_{M,a}$ rempliront visiblement la même fonction pour les abaques partiels $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, ..., $\{a\}_M$ dérivés de celui-ci $\{a_1\}$ par la substitution de la ligne b_1, c_1, ..., e_1, f_1, à ses lignes d'indices 2, 3,..., M successivement ; et ces M polynomes, celui l que fournit la formule (16) par suite, sont homolinéaires par rapport aux éléments de toute ligne de l'abaque total considéré (15), comme on l'apercevra facilement.

Ensuite, représentons généralement par *(i, j)*, la transposition des lignes *i*, *j* de cet abaque (15) et, sur la formule (16), exécutons cette opération en supposant d'abord, $i = 1$, en considérant par exemple (1, 2). Si l'on note les résultats par les mêmes lettres accentuées, il vient ainsi

$$\begin{aligned} 'l &= a_2{}'l_{1,a} - a_1{}'l_{2,a} - a_3{}'l_{3,a} - \cdots - a_M{}'l_{M,a} \\ &= -(a_1\, l_{1,a} - a_2\, l_{2,a} - a_3\, l_{3,a} - \cdots - a_M\, l_{M,a}) = -l\,. \end{aligned}$$

Car $'l_{1,a} = l_{2,a}$, $'l_{2,a} = l_{1,a}$ ce qu'on apercevra immédiatement, et $'l_{3,a} = -l_{3,a}$, ... , $'l_{M,a} = -l_{M,a}$, comme résultats de la même transposition opérée dans $l_{3,a}$, ... , $l_{M,a}$ covanescents des abaques $\{a_3\}$,..., $\{a_M\}$, qui tous contiennent les lignes dérivées des deux transposées par la suppression de leurs éléments a_1, a_2 (5, III). Et les mêmes moyens montreront que l est encore changé en $-$ l par les autres transpositions analogues (1, 3), ..., (1, M).

Enfin, la transposition quelconque *(i, j)* où $i \neq 1, j \neq 1$, équivaut aux trois (1, *i*), (*i*, *j*), (*j*, 1) opérées successivement, la première sur l, la seconde sur $'l$ résultat de la première, la troisième sur $''l$ résultat de la seconde, conduisant à un résultat final $'''l$. Après ces dernières, la ligne 1 est effectivement revenue à la première place, et chacune de celles d'indices *i*, *j* se fixe à la place de l'autre. Or, d'après ce qui précède, $'l = -l$, $''l = -'l = l$, $'''l = -''l = -l$, parce que, chaque fois, la transposition a déplacé la première ligne de l'abaque laissé par la précédente, ceci montrant que la transposition quelconque *(i, j)*, comme (1, 2), (1,3), ..., (1, M), change l en $-$ l.

L'expression (16) de l est donc un covanescent de l'abaque considéré (15) puisqu'elle remplit les deux conditions requises à cette fin (5, IV).

II. *Quel que soit son ordre* M, *l'abaque carré* (15) *possède une infinité de covanescents s'obtenant tous en multipliant un seul d'entre eux par une constante indéterminée* Γ ($\neq 0$).

1° Ceci est vrai pour $M = 1$, car l'abaque se réduit à a_1 et Γa_1 en est un covanescent évident, le seul possible, en outre, puisqu'il doit être linéaire et homogène par rapport à l'unique élément a_1 de sa ligne unique.

2° Pour $M > 1$, le théorème subsiste s'il a lieu pour la valeur $M - 1$ de l'ordre. Car, dans la formule (16), $l_{1,a}$ covanescent de l'abaque (17), carré aussi et d'ordre $M - 1$ seulement, est déterminé par hypothèse, à un facteur constant près ; $l_{2,a}$, $l_{3,a}$, ... , $l_{M,a}$ et l par suite le sont donc, au même facteur près.

3° Il est donc général, puisqu'il est vrai pour $M = 1$ (1°), puis de là pour $M = 2, 3, \ldots$, (2°).

III. Il est utile d'appliquer ce qui précède au calcul des covanescents l_1, l_2, l_3, des abaques carrés d'ordres 1, 2, 3.

1° $$M = 1 .$$

(24) L'abaque est $\begin{Bmatrix} a_1 \end{Bmatrix}$; $\quad l_1 = \Gamma a_1 .$ (II, 1°).

2° $$M = 2 .$$

(25) L'abaque est $\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Bmatrix}$; $l_2 = a_1 . \Gamma b_2 - a_2 . \Gamma b_1$ (*Ib.* 2°), (1°)

$$= \Gamma (a_1 b_2 - a_2 b_1) .$$

3° $$M = 3 .$$

$$\text{L'abaque est } \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix}$$

$$l_3 = a_1 . \Gamma (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 . \Gamma (b_1 c_3 - b_3 c_1) - a_3 . \Gamma (b_2 c_1 - b_1 c_2) \qquad \text{(II, 2°), (2°)}$$
$$= \Gamma \left[a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) - a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2) \right] .$$

On apercevra facilement que le développement général de l_M contient le terme $\Gamma a_1 b_2 c_3 \ldots f_M$ dont les facteurs éléments sont notés par des lettres de rangs égaux à leurs indices. On dit que ces éléments appartiennent à la *diagonale principale* de l'abaque considéré (15), allant de son angle supérieur gauche à son angle inférieur droit, et on nomme *principal* le terme en question.

IV. *Tout covanescent d'un abaque carré* (15), *pour ses lignes, l'est aussi pour ses colonnes. Et réciproquement.*

1° Dans l'alinéa I, nous avons constaté que I, covanescent pour les lignes, est homolinéaire par rapport aux éléments d'une colonne quelconque.

2° Pour $M = 1$, les deux points en question résultent immédiatement de la nature de la formule (24).

3° *Pour* $M = 2$, *la transposition des deux colonnes change* I *en* $-$ I. Car cette opération change le dernier membre de la formule (25) en

$$\Gamma(b_1 a_2 - b_2 a_1) = - \Gamma(a_1 b_2 - a_2 b_1) \,.$$

4° *Pour* $M > 2$, *la transposition de deux colonnes quelconques change* I *en* $-$ I, *s'il en est ainsi pour la valeur* $M - 1$, *de l'ordre.*

Construisons une formule telle que (16), en ordonnant I par rapport aux éléments $a_1, \ldots, a_M$ d'une colonne autre que les deux en question; la transposition de celles-ci ne fait, par hypothèse, que multiplier par -1, $\mathrm{I}_{1,a}$, $\mathrm{I}_{2,a}$, ..., $\mathrm{I}_{M,a}$, covanescents d'abaques dont l'ordre commun est $M - 1$ seulement; elle change donc I en $-$ I.

5° Ceci a lieu pour toute valeur de M, puisque c'est vrai pour $M = 2$ (3°), 4°).

6° Comme ainsi (1°), (5°), I remplit pour les colonnes, les conditions reconnues suffisantes au n° 5, IV, la partie directe de notre théorème est actuellement démontrée.

7° La réciproque résulte immédiatement de ce que l'abaque reste carré quand on prend, pour lignes et colonnes, les files qui étaient auparavant des colonnes et des lignes.

V. A cause de cette identité des rôles joués dans un abaque carré par les colonnes et par les lignes, un covanescent est multiplié par -1 à chaque transposition de deux files parallèles quelconques, par $(-1)^k$ en conséquence, après de telles transpositions, faites dans l'un et l'autre sens indistinctement, en nombre total k.

VI. Parmi les covanescents des abaques carrés, il est naturel de préférer la considération de ceux dont les notations sont les plus simples; ils sont donnés par les formules de l'alinéa III quand on y prend $\Gamma = 1$. On les a nommés les *déterminants* de leurs abaques, et on les représente par les notations de ceux-ci, renfermées entre deux filets verticaux. On a ainsi

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} & |a_1| = a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, \\ & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

On peut dire que chacun d'eux est celui des covanescents de son abaque, dont le terme principal *(Ib.)* est pourvu du coefficient $+ 1$.

VII. La réciprocité entre les lignes et les colonnes (IV) permet de construire tout aussi bien les déterminants par ordinations relatives aux lignes, celles-ci étant substituées aux colonnes maniées dans l'alinéa III. Au lieu des formules (26), on aurait ainsi

$$|a_1| = a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Ces formules montrent en passant, que le déterminant d'un abaque carré (15) est identique à celui de l'abaque symétrique au proposé par rapport à sa diagonale principale *(Ib.)* c'est-à-dire déduit de lui par transposition de chaque paire d'éléments symétriques par rapport à cette diagonale.

Pour éviter des fautes de signes dans la notation et le maniement des déterminants, il est essentiel de ne pas perdre de vue l'observation V.

7. — *Tous les covanescents de l'abaque* (1) (*quelconque, sauf des lignes et colonnes en nombre* $M \leqq N$) *s'obtiennent en prenant la somme des déterminants* δ', δ'', ... *des abaques*

partiels carrés (12), *multipliés respectivement par des constantes indéterminées,* Γ', Γ'' ... Conséquence immédiate de ce qui a été dit au nº 5, VI, puis ci-dessus (6, II).

Cette proposition confère à ces polynomes δ', δ'', .., le rôle de covanescents *fondamentaux* de l'abaque en question, en ramenant à leur seule considération celle de tous. Effectivement, ceux-ci se forment au moyen d'eux, comme nous venons de le dire ; et la nullité de tous, en même temps qu'elle comprend celle des déterminants puisque ceux-ci figurent dans leur groupe général, est entraînée par elle, parce que δ' δ'', ... servent de coefficients aux indéterminées Γ', Γ'',..., dans l'expression générale des covanescents.

On remarquera que *l'abaque considéré est invanescent quand* δ', δ'',..., *ne sont pas tous* $= 0$. Car ils le seraient tous, s'il y avait vanescence.

Ces polynomes δ' δ'' ..., sont les *déterminants (majeurs)* de l'abaque (1). Leur nombre est visiblement $[N(N-1)\ldots(N-M+1)]:[1.2.3\ldots M]$.

8. — Un abaque peut être vanescent de plusieurs manières qu'il est temps de préciser.

L'entier v étant $\leqq M$, nous dirons que l'abaque (1) est v *fois vanescent*, si on peut y assigner v lignes dont chacune soit composée des M — v autres, ces dernières formant un abaque partiel invanescent.

Nous nommerons encore *déterminants de classe* c du même abaque (*mineurs, si* $c > 0$, *majeurs, si* $c = 0$), ceux (majeurs) des abaques partiels, laissés dans le proposé par la suppression successive de toutes les associations possibles de c de ses lignes (7). Leurs ordre et nombre sont $M - c$ et

$$\left\{ [M(M-1)\ldots(M-c+1)] : [1.2\ldots c] \right\}$$
$$\times \left\{ [N(N-1)\ldots(N-M+c+1)] : [1.2\ldots(M-c)] \right\}.$$

9. — *Pour que l'abaque* (1) *soit* v *fois vanescent* (par ses lignes), *il faut et il suffit que ses déterminants soient tous nuls dans les classes* $<$ v, *mais non dans la classe* v (8).

I. *Si cette vanescence multiple a lieu, tous les déterminants mineurs en question sont nuls.*

1° *Étant données ω, $<\omega'$, files parallèles, de ω' éléments chacune,*

$$(27) \qquad (1), (2), \ldots, (\omega),$$

tout déterminant d'ordre ω' est nul, quand son abaque est formé de files

$$(28) \qquad (1'), (2'), \ldots, (\omega')$$

dont chacune est composée de celles du groupe précédent (27).

Ceci est vrai :

α. — Si le déterminant considéré $|[\omega], (1')|$ comporte ω files (différentes ou non) dont chacune appartient au groupe (27) avec une seulement de l'autre (28). Car les relations de la composition supposée pour celle-ci peuvent être écrites symboliquement.

$$(1') = \lambda_1 (1) + \lambda_2 (2) + \ldots + \lambda_\omega (\omega)$$

et donnent (5, *in init.*).

$$|[\omega], (1')| = \lambda_1 |[\omega], (1)| + \lambda_2 |[\omega], (2)| + \ldots + \lambda_\omega |[\omega], (\omega)|,$$

où les multiplicateurs λ_1, λ_2, ..., λ_ω affectent des détermi nants tous nuls comme comportant chacun deux files au moins identiques dans un même sens ;

β. — Si, comme $|[\omega - 1], (1'), (2')]|$, son abaque contient $\omega - 1$ files (27) avec deux autres de (28) ; car les relations de composition propres à l'une de ces dernières, permettent comme ci-dessus (α) de lui donner une forme homolinéaire par rapport à ω déterminants nuls encore parce qu'ils rentrent dans le type précédent (*Ib.*) ;

γ. — Si, comme $|[\omega - 2], (1'), (2'), (3')]|$, il comporte $\omega - 2$ et 3 files des groupes (27) et (28) ; raisonnement tout semblable, appuyé sur (β) ; ...

Et ainsi de suite, jusqu'au bout, en modifiant chaque fois l'abaque du déterminant par la suppression d'une file (27) et son remplacement par une file (28).

2° Si, dans l'abaque en question, (M — V) représente le groupe des lignes dont est composée chacune de celles du surplus (v), une ligne quelconque est toujours composée des M — v de ce groupe, ceci ayant lieu de soi si elle en fait partie, par hypothèse si elle appartient au surplus. Tout déterminant d'une classe $\varphi < \mathrm{v}$ est donc nul, parce que, son ordre $M - \varphi$ étant $> M - \mathrm{v}$, ses $M - \varphi$ lignes sont ainsi composées de mêmes autres en nombre $M - \mathrm{v} < M - \varphi$ (1°).

II. *Soient $\mu > \nu$ deux entiers, quelconques autrement, puis*

$$(29) \qquad \alpha_0\,,\ \beta_0\,,\ \ldots\,,\ \delta_0\,,\ \varepsilon_0\,,\ \varphi_0\,,\ \ldots\,,\ \eta_0$$

une ligne de ν éléments, puis

$$(30) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\,,\ \beta_1\,,\ \ldots\,,\ \delta_1\,,\ \varepsilon_1\,,\ \varphi_1\,,\ \ldots\,,\ \eta_1\,, \\ \alpha_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \eta_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ \alpha_\mu\,,\ \beta_\mu\,,\ \ldots\,,\ \delta_\mu\,,\ \varepsilon_\mu\,,\ \varphi_\mu\,,\ \ldots\,,\ \eta_\mu\,, \end{array}\right.$$

μ autres, chacune de ν éléments encolonnés entre eux ainsi qu'avec les précédents, et formant, par leur réunion, un abaque dont les déterminants (majeurs) ne sont pas tous $= 0$. Si la ligne (29) *est composée des autres* (30), *l'abaque de hauteur $\mu + 1$ formé par leur réunion totale a ses déterminants (majeurs) tous nuls, et réciproquement.*

1° Si une telle composition a lieu, l'abaque en question est vanescent, d'où la nullité de tous ses déterminants (7).

2° Si ces déterminants (d'ordre $\mu + 1$) sont tous nuls, il en est ainsi, en particulier, pour les $\nu - \mu$ d'entre eux où μ mêmes colonnes de $\{(29), (30)\}$ sont respectivement associées à chacune des $\nu - \mu$ autres. En outre, il en est encore ainsi pour les μ donnés par le groupement de ces μ colonnes immuables avec chacune d'elles-mêmes répétée successivement, puisque un quelconque d'entre eux comporte toujours deux colonnes identiques.

Dans ces $(\nu - \mu) + \mu = \nu$ déterminants, indistinctement, les $(\mu + 1)^{\text{èmes}}$ colonnes sont toutes celles de l'abaque $\{(29), (30)\}$; mais, dans leurs ordinations par rapport aux éléments d'indices 0, 1, 2, ..., $\mu + 1$ de la colonne volante, les coefficients de ces éléments restent les mêmes, parce qu'ils ne dépendent que des μ colonnes immuables qui sont communes à tous ces déterminants. Ils forment la suite

$$\Delta_0, -\Delta_1, -\Delta_2, \ldots, -\Delta_\mu,$$

où sont représentés : par Δ_0 le déterminant de l'abaque carré d'ordre μ, laissé dans celui des μ colonnes immuables par la suppression de sa ligne 0, par Δ_i généralement, ce qui devient Δ_0, quand, à sa ligne i, on substitue cette ligne 0 (6, VI). La nullité des ν déterminants précités (d'ordre $\mu + 1$) donnera ainsi les ν relations

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta_0\alpha_0 - \Delta_1\alpha_1 - \Delta_2\alpha_2 - \ldots - \Delta_\mu\alpha_\mu = 0,\\
\Delta_0\beta_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_\mu\beta_\mu = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_0\delta_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_\mu\delta_\mu = 0,\\
\Delta_0\varepsilon_0 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta_\mu\varepsilon_\mu = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_0\eta_0 - \Delta_1\eta_1 - \Delta_2\eta_2 - \ldots - \Delta_\mu\eta_\mu = 0.
\end{array}\right.$$

Si maintenant μ colonnes de l'abaque (30) donnent un déterminant non nul, on pourra faire en sorte que Δ_0 soit celui-ci, c'est-à-dire prendre pour les μ colonnes immuables de $\{(29), (30)\}$, celles précisément dont les précédentes font partie. La division des relations (31) par $\Delta_0 \neq 0$ est alors possible, et les met sous une forme montrant immédiatement, que la ligne (29) est bien composée de celles de l'abaque (30).

III. Si dans la classe v, quelque déterminant de l'abaque proposé (1) est $\neq 0$, il appartient à titre majeur, à l'abaque des M — v lignes qui ont formé les siennes, et cet abaque est invanescent (7). Si, en outre, tous sont nuls dans la classe v — 1, où leur ordre est M — v + 1, il en est ainsi en particulier, pour les déterminants (majeurs) de l'abaque formé par les M — v lignes ci-dessus et une autre quelconque. Cette dernière est donc composée des premières (II).

10. — *Quand* M = N, *l'abaque* (1), *alors carré, est vanescent par ses files d'un sens, autant de fois que par celles de l'autre* (8).

A cause de la réciprocité existant entre les lignes et les colonnes de tout abaque carré (6, IV), un déterminant mineur, de classe quelconque c, d'ordre M — c par suite, du proposé *considéré comme formé de lignes*, est majeur, aussi bien pour l'abaque des M — c colonnes dont les siennes font partie, que pour celui des M — c lignes qui ont formé les siennes. Le mineur en question en est donc un de même classe c pour le proposé *considéré comme formé de colonnes*, ceci entraînant immédiatement l'exactitude de notre énoncé (9).

11. — *Quand* M > N, *l'abaque* (1) *est vanescent par ses lignes,* M — N *fois au moins.*

Car il l'est autant de fois que l'abaque carré obtenu en lui ajoutant M — N colonnes de zéros (4, II 3°), et celui-ci est vanescent M — N fois au moins : par ses colonnes, parce que ses déterminants de classes < M — N, d'ordres > N par suite, comportent tous une colonne au moins de zéros, par ses lignes aussi, en conséquence (10), (*Cf.* 5, V).

12. — On *réduit* un abaque donné, *relativement à ses lignes*, par exemple, en en extrayant quelques unes de nature et en nombre tels, *que leur abaque partiel, dit réduit, soit invanescent, et que, d'elles seulement, toutes celles du proposé soient composées.* A cette fin, on trie d'après la règle suivante, les lignes de l'abaque, passées en revue dans un ordre de succession quelconque :

Chaque nouvelle ligne examinée est placée dans l'abaque réduit, si les lignes antérieurement conservées pour lui sont en nombre inférieur à la largeur N *de l'abaque, et si, avec celle en question, elles forment un abaque dont les déterminants ne sont pas tous* = 0. *Elle est au contraire rejetée, si ce nombre est* = N, *ou bien si ces déterminants sont tous nuls.*

En effet, on aperçoit immédiatement : qu'au moment de l'essai d'une ligne quelconque, l'abaque de celles antérieurement conservées est invanescent (7) ; qu'en cas de rejet cette ligne était bien composée de celles qui forment cet abaque (9, II, 2°), (11).

On notera que : *la hauteur de l'abaque réduit ne peut* *surpasser la largeur du proposé (Ib.) ; une ligne comprenant exclusivement des éléments $= 0$ est toujours à rejeter ; quand toutes sont de cette nature, l'abaque réduit disparaît.*

13. — Nous passons aux équations du premier degré, dont nous considérerons un système comportant des inconnues $x, y, z, \ldots, s, t, \ldots, u, v$, des équations, en nombres quelconques n, M, ces dernières étant

$$
(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + e_1 t + f_1 u + \ldots g_1 v + h_1 w + k_1 = 0 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_M x + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + k_M = 0 , \end{array} \right.
$$

dont les coefficients $a_1, \ldots, \ldots, \ldots, k_M$ doivent être conçus en un abaque à M lignes, à $n + 1$ colonnes.

I. *Au système* (32), *on peut substituer son réduit, c'est-à-dire celui qui a pour coefficients les éléments de l'abaque laissé par la réduction de celui du proposé, opéré relativement aux lignes* (**12**).

Car tout groupe de solutions du proposé appartient à son réduit ne comprenant que des équations du premier. Et, comme il est visible que les premiers membres du proposé sont tous composés homolinéairement de ceux du réduit, tout groupe de solutions de celui-ci, puisqu'il annule ces derniers, annulera aussi les premiers, vérifiera en conséquence la totalité des équations considérées.

Désormais donc, nous raisonnerons exclusivement sur un système réduit, comportant ainsi dans son abaque, des lignes en nombre $m \leqq n + 1$, m équations par conséquent. Nous l'écrirons

$$
(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots + e_1 t + f_1 u + \ldots + g_1 v + h_1 w + k_1 = 0 , \\ a_2 x + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + h_2 w + k_2 = 0 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_m x + b_m y + \ldots + e_m t + f_m u + \ldots + g_m v + h_m w + k_m = 0 . \end{array} \right.
$$

et nous le dirons *surabondant*, *complet* ou *incomplet*, selon que m sera $= n + 1$, $= n$ ou $< n$.

Nous figurerons encore son abaque

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1\ ,\ b_1\ ,\ c_1\ .\ \dots\ ,\ e_1\ ,\ f_1\ ,\ \dots\ .\ g_1\ .\ h_1\ ,\ k_1\ . \\ a_2\ ,\ b_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ g_2\ ,\ h_2\ ,\ k_2\ , \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_m,\ b_m,\ c_m,\ \dots\ ,\ e_m\ ,\ f_m\ .\ \dots\ ,\ g_m\ ,\ h_m\ ,\ k_m\ . \end{array}\right.$$

II. *Le système réduit* (33) *est impossible quand il est surabondant.*

Car l'existence de solutions x', y',..., v', w' entraînerait la vanescence de l'abaque (34) par les colonnes, sa dernière étant alors composée des autres au moyen des multiplicateurs $-x'$, $-y'$,..., $-v'$, $-w'$, par les lignes en même temps, puisqu'il est carré (10). Or ceci n'a pas lieu, puisqu'il est supposé réduit.

III. *Non surabondant, il est impossible encore, quand l'abaque partiel* $\{a, b, \dots, g, h\}$ *formé dans* (34) *par les seuls* n *colonnes de coefficients des inconnues est vanescent.*

S'il possédait quelque groupe de solutions x', y',..., la colonne k de l'abaque total (34) serait composée des autres avec les multiplicateurs $-x'$ $-y'$, ... Moyennant quoi, chacun des déterminants (majeurs) de cet abaque, où la colonne k intervient, pourrait être mis sur forme d'une expression homolinéaire par rapport à n déterminants du même abaque auxquels cette colonne est étrangère, les coefficients de cette expression étant $-x'$, $-y'$, ... Les déterminants indépendants de la colonne k étant $= 0$, puisque l'abaque $\{a, b, \dots, g, h\}$ est supposé vanescent, les autres le seraient encore, tous ceux de l'abaque (34) aussi, et, contrairement à l'hypothèse, le système (33) ne serait pas réduit.

IV. *Non surabondant, il est possible quand l'abaque* $\{a, b, \dots, g, h\}$ (III) *est invanescent. Il est alors déterminé s'il est complet, indéterminé s'il est incomplet, cette indétermination consistant en ce qu'on peut choisir arbitrairement les valeurs de tout groupe de* $n - m$ *inconnues, tel, que les coefficients des* m *autres soient les éléments d'un déterminant* $\neq 0$, *en ce que, de plus, les valeurs correspondantes de* *ces m autres inconnues s'expriment par des fonctions linéaires déterminées des n — m premières.*

1° Si le système est complet, l'adjonction d'une ligne de zéros à son abaque (34) rend celui-ci vanescent par les lignes, par les colonnes en même temps, puisqu'il est devenu carré (**10**). Comme, en outre, la suppression de sa colonne k laisse un abaque partiel invanescent (par les colonnes) parce que le déterminant des colonnes $a, b, \ldots, g, h$ de (34) est supposé $\neq 0$, cette colonne k est composée des autres (**9**, II, 2°), et il suffit évidemment de multiplier par — 1 les multiplicateurs de cette composition pour en déduire un groupe de solutions du système considéré.

Ce groupe $x', y', \ldots w'$ est unique. Car si un autre x'', y'', ..., w'' existait encore, l'une au moins des différences $x'' - x' = \xi$, $y'' - y' = \eta, \ldots, w'' - w' = \psi$, la première pour fixer les idées, serait $\neq 0$; les substitutions successives de l'un et l'autre groupes dans chacune des équations du système, suivies de la soustraction des résultats, conduiraient à

$$\left\{\begin{array}{l} a_1\,\xi + b_1\,\eta + \ldots + h_1\,\psi = 0\,, \\ a_2\,\xi + b_2\,\eta + \ldots + h_2\,\psi = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ a_m\xi + b_m\eta + \ldots + h_m\psi = 0\,, \end{array}\right.$$

et la division de ces égalités par ξ supposé $\neq 0$, montrerait, dans l'abaque $\{a, b, \ldots, g, h\}$, ici carré, que la colonne a est composée des autres, qu'il est ainsi vanescent par les colonnes, par les lignes en conséquence, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les multiplicateurs des colonnes $a, b, \ldots, g, h$ de l'abaque (34) agrandi d'une ligne de zéros, dans les formules exprimant la composition de la colonne k au moyen de celles-ci, se calculeront comme au n° **9**, II, 2°. Puisqu'il suffit de les multiplier par — 1 pour obtenir $x'\ y' \ldots$, on aura les formules

$$x' = -\frac{\Delta a}{\Delta k}\,,\ y' = -\frac{\Delta b}{\Delta k}\,,\ \ldots\ldots\,,\ w' = -\frac{\Delta h}{\Delta k}\,, \tag{35}$$

où ont été représentés : par Δ_k, le déterminant de l'abaque

$\{a, b, \ldots, g, h\}$, par $\Delta_a, \Delta_b, \ldots, \Delta_h$ ce qu'il devient par la substitution de sa colonne k faite successivement à chacune des autres $a, b, \ldots, h$.

2° Si le système (33) est incomplet, soient $a, b, \ldots, e$ un des groupes de m colonnes de son abaque (34), qui, par hypothèse, donnent des déterminants $\neq 0$, et représentons par $K_1, K_2, \ldots, K_m$, les groupes de termes, linéaires en $u, \ldots, v, w$, qui, dans les diverses équations, ont des coefficients notés au moyen des autres lettres $f, \ldots, g, h, k$. Ce système peut être écrit

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots + e_1 t + K_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x + b_m y + \ldots + e_m t + K_m = 0, \end{array}\right.$$

et sa résolution par rapport à $x, y, \ldots, t$, faisable comme ci-dessus (1°) parce qu'il est complet à ce point de vue, conduit bien facilement à ce qui nous reste à établir, observation faite que, dans les formules (35), Δ_k est indépendant des k, que $\Delta_a, \Delta_b, \ldots, \Delta_h$ en sont des fonctions homolinéaires.

3° Il n'est pas sans intérêt de remarquer que le cas d'un système incomplet comprend à la rigueur celui où il est complet. Pour cette cause, il serait facile de traiter les deux ensemble, de fondre notamment le sous-alinéa 1° dans le suivant (2°). C'est ce que nous ferons pour la démonstration suivante.

14. *Le système (33) étant réduit et possible, toute équation du premier degré* $(E)_0$ *que ses solutions vérifient aussi, est composées homolinéairement des siennes.*

Supposant $\neq 0$, le déterminant Δ des coefficients des m inconnues $x, y, \ldots t$, nous mettrons le système sous la forme (36), l'équation $(E)_0$ sous une forme analogue en marquant ses coefficients de l'indice commun 0, et nous considérons l'abaque carré, d'ordre $m + 1$,

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0\,,\ b_0\,,\ \ldots\,,\ e_0\,,\ K_0\,, \\ a_1\,,\ b_1\,,\ \ldots\,,\ e_1\,,\ K_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m,\ b_m,\ \ldots\,,\ e_m,\ K_m. \end{array}\right.$$

Le fait que toutes les solutions du système satisfont à l'équation $(E)_0$, assure, quelles que soient les valeurs attribuées à u, ..., v, w, la composition de la colonne K de l'abaque (37) au moyen des autres ; d'où sa vanescence par les colonnes, puis par les lignes (**10**), puis la composition de la première de celles-ci au moyen des autres, puisque le déterminant Δ est $\neq 0$ (**9**, II, 2°) ; et, en nommant λ_1, λ_2,..., λ_m les multiplicateurs de cette composition. on a

$$(38) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \;, \\ b_0 = \lambda_1 b_1 + \quad . \quad . \quad . \quad + \lambda_m b_m \;, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ e_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m \;, \end{array} \right.$$

$$(39) \qquad K_0 = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \ldots \lambda_m K_m \,.$$

En ayant égard à ce que λ_1,..., λ_m ne dépendent que des éléments des m colonnes a, b,..., e de l'abaque (37) *(loc. cit.)*, puis égalant les coefficients de u, ... , v, w dans les deux membres de (39), cette équation se décompose en les égalités

$$\begin{array}{l} f_0 = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m \;, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ g_0 = \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m \;, \\ h_0 = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_m h_m \;, \\ k_0 = \lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_m k_m \;, \end{array}$$

constituant avec (38) toutes celles que nous avions à établir.

15. — Dans le développement général du déterminant d'un abaque carré, d'ordre quelconque M, (**5**, II), la transposition de deux lignes produit sur la notation, le même effet que celle des indices correspondants, les lettres restant immobiles *(Ib.* III) ; celle de deux colonnes équivaut de même à celle des lettres correspondantes, les indices conservant cette fois leurs places primitives. Appuyés sur ces observations, des raisonnements tout semblables à ceux du n° **6**, I conduisent bien facilement à *l'ordination du déterminant par rapport à ceux d'abaques partiels en nombre quelconque i, formés par la décomposition de celui du proposé en des grou-*

pes déterminés de m_1, m_2, ... m_i files toutes parallèles dans un sens donné, ces i entiers étant quelconques aussi, sous la seule condition de donner M *par somme.*

Pour $i = 2$, cette opération a une grande importance, mais dans des questions sur lesquelles il n'y a pas lieu de revenir ici. Pour $i = $ M, entraînant $m_1 = m_2 = ,..., = m_i = 1$, elle fournit le développement général du déterminant, obtenu par de simples manipulations d'un seul terme arbitrairement choisi ; pour $2 < i <$ M, elle conduit à des formules variées. Comme ces dernières sont inutiles, comme le développement général, qui ne l'est pas moins en théorie quand on se place à notre point de vue, ne sert à rien pour les calculs numériques à cause de sa prolixité, il serait tout à fait oiseux d'entrer dans les détails.

16. — Terminons par un théorème fort simple, mais indispensables dans des questions importantes.

Tout déterminant est un polynome premier.

Si celui de l'abaque (15) que nous représentons par Δ. est décomposable en deux facteurs entiers δ', δ'', et si l'élément a_1 par exemple, entre effectivement dans δ', ni lui, ni aucun autre élément d'une file φ contenant a_1 ne peuvent entrer dans δ''. Car autrement $\Delta = \delta' \delta''$ ne serait pas homolinéaire par rapport aux éléments de cette file. De même, et puisque ainsi tous les éléments de φ entrent dans δ', aucun autre d'une file contenant un de ceux-ci, aucun élément de l'abaque en conséquence, ne peut entrer dans δ''. Ce facteur δ'' se réduit donc à une constante, moyennant quoi, tout diviseur δ' de Δ lui est égal à un facteur constant près ; c'est ce qu'il y avait à prouver.

Ch. Méray (Dijon).

PARALLÉLISME ET TRANSLATION RECTILIGNE

Première Partie.

1. Quand un plan mobile glisse sur un plan fixe de manière que la droite qui joint deux points A et B du plan mobile soit constamment assujettie à coïncider avec une droite fixe Δ du plan fixe, on dit que le plan mobile est animé d'un mouvement de *translation rectiligne*, dont la direction est celle de la droite Δ, soit dans un sens, soit dans le sens contraire.

Soit M un point du plan mobile non situé sur AB. En traçant MA et MB on forme un triangle

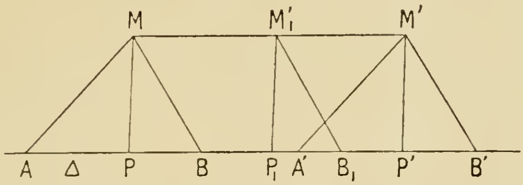


Fig. 1.

çant MA et MB on forme un triangle *invariable* que sa base entraîne par suite de son glissement sur la droite Δ. Soit MP la hauteur issue du point M. Dans le déplacement considéré du triangle MAB le sommet M décrit une *ligne* dont tous les points sont à la même distance $MP = l$ de la droite Δ.

Mais *a priori* on ne peut affirmer que le point M décrit une *ligne droite*.

Mais on peut vérifier facilement, au moins dans une *petite étendue*, que si le triangle a été amené de la position MAB à la position M'A'B' (fig. 1), le point M s'est déplacé, dans ses diverses positions sur le *segment* de droite MM'.

Supposons en effet que Δ soit une arête d'une règle maintenue fixe sur une feuille de dessin ; que le triangle MPB soit une face d'une équerre appliquée sur la même feuille et que l'on fait glisser en appuyant le côté PB de l'angle droit contre la règle. Après avoir déplacé l'équerre pour l'amener de la position MPB à la position M'P'B', traçons la droite MM' ; si nous amenons l'équerre dans une autre position quelconque M_1 P_1 B_1 entre les deux premières, nous constatons que le sommet M_1, autre position quelconque du sommet mobile M se trouve sur le *segment* de droite MM'.

Cette vérification expérimentale ayant lieu sur des segments de droite de longueurs différentes, on se trouve conduit à l'axiome suivant :

Axiome. — Dans un mouvement de translation rectiligne *on considère comme évident* qu'un point quelconque M du plan mobile décrirait une *droite indéfinie* si le mouvement se continuait indéfiniment soit dans un sens, soit en sens contraire.

2. Comme première conséquence de cet axiome nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème I. Quand un point mobile se meut dans un plan fixe de manière à rester constamment à la même distance l d'une droite Δ de ce plan, si l'on considère *comme évident* que le point mobile décrit une *droite indéfinie* D, la *perpendiculaire* menée à la droite Δ de chacune des positions du point mobile est également perpendiculaire à la droite D. — Démonstration : Soit M une certaine position du point mobile (fig. 2) ; menons MP perpendiculaire à la droite Δ, et d'une autre position *quelconque* A du point mobile menons AB perpendiculaire à la droite Δ. On a par hypothèse AB = MP = l. Autour de MP, considérée comme une droite indéfinie, faisons tourner le demi-plan situé à sa gauche pour l'appliquer sur le demi-plan situé à sa droite. Le point B prendra sur la droite Δ une position B', symétrique de B par rapport à la perpendiculaire MP sur la droite Δ ; le seg-

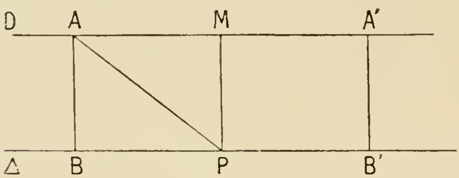


Fig. 2.

ment de droite BA se placera en B′A′ perpendiculairement à la droite Δ et le point A′ se confondra avec une nouvelle position du point mobile.

Mais, *si l'on considère comme évident* que les diverses positions A, A′, M etc., etc. du point mobile appartiennent à une même droite D, le segment MA′ est le prolongement du segment AM de cette droite D. Or les deux angles adjacents PMA et PMA′ sont égaux par symétrie ; donc la droite PM, perpendiculaire sur la droite Δ, est aussi perpendiculaire sur la droite D.

Pour démontrer qu'il en est de même de BA par exemple, traçons la droite PA ; nous formons deux triangles PMA et PBA qui sont rectangles l'un au point M et l'autre au point B ; ils ont la même hypoténuse PA et un côté de l'angle droit égal : $PM = BA = l$; donc ces triangles sont égaux et on a d'abord $AM = BP$. On a en outre : $\widehat{APB} = \widehat{PAB}$ et $\widehat{PAM} = \widehat{APB}$. Or la somme des deux angles aigus au point P vaut un droit ; donc il en est de même de la somme des angles aigus au point A. Donc : la droite AB, perpendiculaire à la droite Δ, l'est également à la droite D. On peut donc conclure que :

La perpendiculaire menée à la droite Δ de chacune des positions du point mobile est également perpendiculaire à la droite D.

C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque les segments BA, PM, etc., sont perpendiculaires sur la droite D et ont tous la même longueur l, on voit que les distances à la droite D des divers points de la droite Δ sont les mêmes que les distances à la droite Δ des divers points de la droite D. Il y a donc, à ce point de vue, *réciprocité* entre les droites D et Δ.

3. Rectangle. — Le quadrilatère ABPM de la figure précédente a ses quatre angles droits ; on l'appelle un *rectangle.* On vient de prouver que la diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux et que les côtés opposés de ce rectangle sont égaux 2 à 2. Pour construire un rectangle il suffit donc de mener à une droite Δ, d'un même côté, en

deux points différents B et P, deux perpendiculaires de même longueur l, BA et PM, puis de tracer la droite AM.

En effet, si un point mobile se déplace dans le plan de la figure et au-dessus de Δ de manière à rester toujours à la distance l de Δ, il passera nécessairement par A et par M; or il décrit une droite D, donc cette droite coïncide avec AM; dès lors les droites BA et PM, perpendiculaires à Δ, le sont à la droite AM; donc le quadrilatère ABPM est bien un rectangle.

Si on traçait la seconde diagonale BM il est facile de démontrer qu'elle est égale à la première. En outre leur point de rencontre est le milieu de chacune d'elles.

Somme des angles d'un triangle.

4. *1^er^ cas.* Triangle rectangle. — On a le théorème suivant :

Théorème II. Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires.

Considérons en effet le rectangle ABPM (fig. 2). La diagonale PA le partage en deux triangles rectangles égaux ABP et PMA. L'angle BAP a pour complément l'angle PAM, lequel est égal à l'angle APB. Donc dans le triangle rectangle ABP les deux angles aigus sont complémentaires. Or, ce triangle étant donné, on pourrait construire comme on vient de l'indiquer le rectangle ABPM; donc, d'une manière générale on peut dire : Dans tout triangle rectangle les deux angles aigus sont complémentaires.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Dans tout triangle rectangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

En effet : L'un des angles est droit et la somme des deux autres est égale à un droit; donc la somme des trois angles est égale à deux droits.

C. Q. F. D.

2^e^ cas. Triangle quelconque. — On a le théorème suivant :

Théorème III. Dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux droits.

Du sommet A par exemple d'un triangle ABC, concevons que l'on mène la perpendiculaire AP sur le côté opposé BC. Si le point P est entre B et C l'angle A se trouve partagé en deux parties A_1 et A_2 dont il est la somme. Dans le triangle rectangle APB l'angle A_1 est le complément de l'angle B et on a : $A_1 + B = 1^{dr}$; de même le triangle rectangle APC donne : $A_2 + C = 1^{dr}$. En ajoutant ces relations membre à membre et remarquant que $A_1 + A_2 = A$ on obtient : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$.

Si le point P est d'un même côté des points B et C, à droite de C par exemple, on aura : $A = A_1 - A_2$; et les triangles rectangles APB et APC donneront : $\widehat{A_1} + \widehat{B} = 1^{dr}$ puis $\widehat{A_2} + (2^{dr} - \widehat{C}) = 1^{dr}$. Donc : par différence on obtient : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2^{dr} = 0$ et par conséquent $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{dr}$ C. Q. F. D.

Remarque. — Soit CF le prolongement du côté BC d'un triangle ABC ; l'angle ACF est appelé *angle extérieur* au point C ; il a pour supplément l'angle $\widehat{C}$ du triangle ; il est donc égal à la somme $\widehat{A} + \widehat{B}$ des deux autres ; ainsi : Dans tout triangle un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.

Corollaire. — Le théorème qui précède conduit au suivant :

Théorème. — Dans tout polygone convexe la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois 2^{dr} que le polygone a de côtés, moins deux.

Soit n le nombre des côtés, la somme en question aura pour expression $(n - 2)$ fois 2^{dr} ou $(2n - 4)^{dr}$. Nous nous bornons à l'énoncé du théorème en ajoutant que la somme des angles extérieurs est constante et toujours égale à 4^{dr}.

Remarque particulière. — On sait que dans la géométrie non-euclidienne la somme des angles d'un triangle est inférieure à 2^{dr}. Soit $\delta = 2^{dr} - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$, et désignons par S l'aire du triangle ABC. La constante K d'une telle géométrie peut se représenter par le rapport $\frac{S}{\delta}$ (Voir la note B sur le Postulatum d'Euclide dans la géométrie de M. Hadamard). A cause de l'axiome du début, qui a donné naissance au *rec-*

tangle, nous avons $\delta = 0$ et par suite $K = \infty$, ce qui établit la différence essentielle entre la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne.

Deuxième partie.

1. En tenant compte du théorème I, nous nous servirons du mot *parallèle* en lui attribuant une signification spéciale qui nous permettra de tirer parti de la définition suivante :

Définition. — On dit qu'une droite D *est* PARALLÈLE *à une droite* Δ *quand les deux droites sont dans un même plan et que la première a tous ses points à la même distance de la seconde.*

Cette définition se justifie à l'aide du théorème suivant :

Théorème I. Si deux droites sont perpendiculaires à une 3e, *l'une d'elles est parallèle à l'autre.*

Démonstration. — Dans le plan de la figure 3 considérons deux droites D et Δ respectivement perpendiculaires à la droite LL', la première au point A, la seconde au point B, nous allons prouver que la droite D est parallèle à la droite Δ, c'est-à-dire, puisqu'elles sont déjà dans le même plan, que les divers points de la droite D sont à la même distance $AB = l$ de la droite Δ. Soit

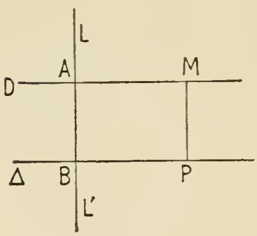


Fig. 3.

un point P quelconque de la droite Δ, menons par ce point, du côté de la droite D la perpendiculaire PM à la droite Δ et prenons $PM = BA = l$. Si on trace AM on formera un rectangle ABPM (3, 1re partie). Le côté AM de ce rectangle est par suite perpendiculaire sur LL' au point A et par suite se confond avec la droite D qui est la seule perpendiculaire possible en ce point à la droite LL'. Le point M est donc sur la droite D et sa distance MP à la droite Δ est égale à l ou AB. Or dans le rectangle ABPM on a $AM = BP$. On peut donc considérer le point M comme un point quelconque de la droite D, puisque le point P est un point quelconque de Δ. Donc :

La droite D a ses divers points à la même distance l de la droite Δ ; elle est donc parallèle à cette droite. C. Q. F. D.

Remarque. — Il est bon d'observer que BA, PM, etc., etc. peuvent être considérées comme des perpendiculaires menées des divers points de Δ à la droite D ; elles ont d'ailleurs toutes la même longueur BA = *l*. On voit ainsi, qu'au point de vue de la distance à l'une des deux droites des divers points de l'autre, il y a *réciprocité* entre les deux droites D et Δ.

Il suit de là que : Si la *première* est parallèle à la *seconde*, réciproquement la *seconde* est parallèle à la *première*.

On peut donc, conformément à l'usage, énoncer comme il suit le théorème précédent :

Théorème I. — Si deux droites, situées dans le même plan, sont perpendiculaires à une 3e, ces droites sont parallèles.

Corollaire. — Chacun des segments de droite AB, MP, etc. est à la fois perpendiculaire à la droite D et à la droite Δ, et de plus ils ont la même longueur *l* ; on est ainsi conduit à la double propriété suivante :

1° *Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre ;*

2° *Deux droites parallèles sont partout également distantes.*

On fait fréquemment usage de cette double propriété.

2. *Théorème II. — Si deux droites D et D′ sont parallèles à une même droite Δ, ces droites sont parallèles.*

Démonstration. — Dans le plan de la figure, qui est celui des trois droites, soit LL′ une perpendiculaire quelconque à la droite Δ. Cette droite LL′ est perpendiculaire à chacune des droites D et D′ qui sont parallèles à Δ. Donc, en vertu du théorème précédent les droites D et D′ sont parallèles.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si deux droites parallèles D et D′ ont un point commun M, ces droites se confondent.

Démonstration. — En effet soit LL′ la perpendiculaire à la droite D par exemple au point M, elle est aussi perpendiculaire à sa parallèle D′. Les deux droites D et D′ étant perpendiculaires à LL′ au même point M, se confondent.

C. Q. F. D.

Autrement: Les divers points de D' par exemple sont, comme le point M, à une distance nulle de la droite D et réciproquement: donc ces deux droites ont tous leurs points communs et par suite se confondent.

C. Q. F. D.

3. *Théorème III. Par un point extérieur à une droite on peut mener une parallèle à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

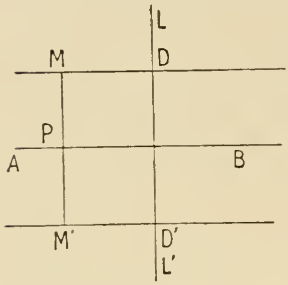


Fig. 4.

Démonstration. — Soit M un point extérieur à la droite AB (fig. 4). Menons à cette droite une perpendiculaire LL', et du point M menons la perpendiculaire MD sur LL'. Cette droite sera parallèle à AB puisque l'une et l'autre sont perpendiculaires sur LL'. Donc :

1° On peut mener par le point M une parallèle à AB.

Imaginons par le point M une autre parallèle à AB : on aurait deux droites parallèles à AB et par suite ces deux droites seraient parallèles ; mais à cause de leur point commun M elles se confondraient. Donc :

2° On ne peut mener par le point M qu'une seule parallèle à la droite AB.

C. Q. F. D.

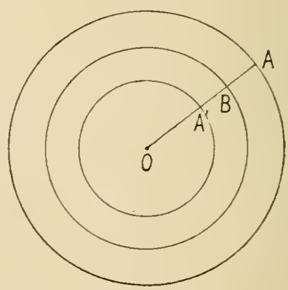


Fig. 5.

Remarque. — Soit $MP = l$ la distance du point M à la droite AB : si du même côté de AB on se donne un point arbitraire du plan, sa distance à la droite AB sera supérieure à l s'il est au-dessus de MD, et inférieure à l s'il est placé entre MD et AB. On voit ainsi que :

La parallèle menée par le point M à la droite AB est, d'un côté de cette droite le *lieu* des points qui en sont à la distance $MP = l$.

Soit M' le symétrique du point M par rapport à la droite AB. La parallèle M'D' à cette droite menée par le point M' est évidemment de l'autre côté de cette droite le *lieu* des points qui en sont à la distance l. Le lieu complet des points situés à la distance l de la droite AB est donc l'ensemble des deux parallèles MD et M'D'.

Il en résulte immédiatement que le lieu des points équidistants des deux parallèles MD et M'D' est la droite AB, c'est-à-dire la parallèle menée aux deux premières par un point P qui en est équidistant.

Une question analogue se présente quand on considère le lieu des points situés à une distance $l < R$ d'une circonférence de centre O et de rayon $OB = R$. On *augmente* ou on *diminue* chaque rayon, c'est-à-dire chaque *normale* à la courbe d'une même longueur l. On obtient ainsi deux circonférences de rayon $OA = R + l$, et $OA' = R - l$, concentriques à la première.

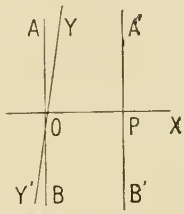


Fig. 6.

De pareilles courbes sont appelées *courbes parallèles.*

Dans l'exemple choisi on peut constater que la circonférence proposée est le lieu des points qui sont situés à la distance l des deux autres.

Théorème IV. — Si deux droites AB et A'B' sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

Soit Y'Y (fig. 6) une droite qui rencontre AB au point O et qui fait avec elle l'angle aigu AOY. Menons au point O la perpendiculaire OX sur AB. Cette droite est perpendiculaire sur A'B', soit P leur point de rencontre. L'angle YOX est le complément de l'angle aigu AOY, donc cet angle est aigu.

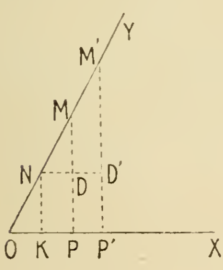


Fig. 7.

Nous sommes donc conduits à démontrer le théorème suivant :

Théorème V. — Toute droite perpendiculaire à un côté d'un angle aigu rencontre l'autre.

Lemme préliminaire. — Soit (fig. 7) un angle aigu ayant pour côtés les demi-droites OX et OY. Sur le côté OY par exemple prenons un segment ON de longueur l et soit $NK = d$ la distance de son extrémité N au côté OX ; si l'on prend sur OY des segments OM, OM′, etc. de même origine O et de longueurs

$$2l\,,\ 3l\,,\ 4l$$

les distances MP, M′P′, etc. de leurs extrémités au côté OX seront respectivement

$$2d\,,\ 3d\,,\ 4d\,,\ \text{etc., etc.}$$

Démonstration. — Soit OM $= 2\,l$; prouvons d'abord que MP $= 2\,d$. Pour cela menons MD perpendiculaire sur MP et par suite parallèle à OX. On observe que dans les deux triangles rectangles MPO et NKO les angles aigus en M et en N ont le même complément : l'angle aigu YOX ; donc si on considère les deux triangles rectangles MDN et NKO, on constate qu'ils ont leurs hypoténuses égales, MN $=$ NO $= l$ et un angle aigu égal ; donc ces triangles sont égaux et l'on a par suite MD $=$ NK $= d$. Mais dans le rectangle MKPD on a DP $=$ NK $= d$; donc MP $= 2\,d$. On verrait de même que si OM′ $= 3\,l$ on a M′P′ $= 3\,d$ et ainsi de suite. De sorte que si un segment OM pris sur le côté OY croît indéfiniment il en sera de même de la distance de son extrémité M à l'autre côté de l'angle aigu. Cela posé soit (fig. 8) un angle aigu YOX, nous allons montrer qu'une perpendiculaire quelconque au côté OX par exemple a deux points de part et d'autre du côté OY. Menons la demi-droite OZ perpendiculaire sur OX, du côté de OY. L'angle ZOY est le complément de l'angle YOX, c'est donc un angle aigu.

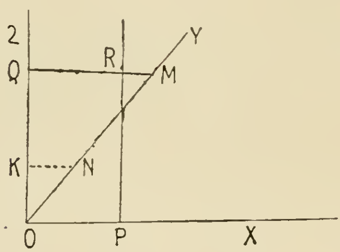


Fig. 8.

Prenons sur OY un segment ON $= l$ et soit NK $= d$ la distance de son extrémité N au côté OZ. Sur OX prenons une longueur *arbitraire* OP. Nous aurons soit OP $= nd$, soit $nd <$ OP $< (n + 1)\,d$, n désignant un nombre entier. Dès lors, si sur OY nous prenons un segment OM égal ou supérieur à $(n + 1)\,l$, ce qui est toujours possible, quelque grand que soit le nombre entier n, la distance MQ du point M au côté OZ de l'angle aigu ZOY sera égale ou supérieure à $(n+1)d$. On aura par suite QM > OP. Soit sur QM un segment QR = OP, le point R sera entre le point Q et le point M. Or la perpendiculaire en P sur OX est parallèle à OZ et, comme à droite de OZ, c'est le lieu des points situés à la distance PO de OZ, elle passe par le point R situé dans l'angle ZOY. Donc :

La perpendiculaire en un point quelconque P au côté OX a deux points P et R de part et d'autre du côté OY ; donc cette perpendiculaire doit rencontrer OY. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si deux droites AB et A′B′ sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

Démonstration. — Soit Y′Y (fig. 6) une droite qui rencontre AB au point O, il faut prouver qu'elle rencontre sa parallèle A′B′. Pour cela menons en O la perpendiculaire OX sur A′B′. Cette droite qui est aussi perpendiculaire sur AB fait avec la demi-droite OY un angle aigu YOX complémentaire de l'angle aigu AOY. Soit P le point de rencontre de OX avec A′B′ ; la droite PA′ perpendiculaire au côté OX de l'angle aigu YOX doit rencontrer le côté OY.

Donc la droite Y′Y qui rencontre AB en O doit rencontrer sa parallèle A′B′. C. Q. F. D.

Remarque. — L'angle P est droit et l'angle POY est aigu ; leur somme est donc inférieure à deux droits ; si on remplace POY par son supplément POY′ on aura une somme supérieure à deux droits. La rencontre aura lieu du côté de OP où cette somme est inférieure à 2 droits.

On appelle *sécante* une droite qui rencontre deux droites parallèles.

Angles formés par deux droites parallèles coupées par une sécante.

Théorème VI. — Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante :

1° Deux angles correspondants sont égaux ;

2° Deux angles alternes-internes sont égaux;

3° Deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Démonstration. — Considérons (fig. 9) les deux parallèles AB et A'B' coupées en C et C' par la sécante SS'. Nous allons prouver d'abord que les angles correspondants $\widehat{SCB}$ et $\widehat{SC'B'}$ sont égaux. Pour cela, d'un point arbitraire M de CS menons MP perpendiculaire sur AB et par suite sur sa parallèle A'B' qu'elle rencontre en P'. Les deux triangles rectangles MPC, MP'C' ont un angle aigu commun au point M. Cet angle a pour complément d'une part $\widehat{SCB}$ et d'autre part $\widehat{SC'B'}$; donc ces deux angles correspondants sont égaux. C. Q. F. D.

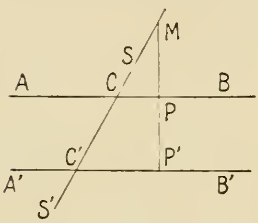


Fig. 9.

Les deux autres parties de l'énoncé sont des conséquences immédiates de la première.

Théorème VII. — Réciproquement : Deux droites coupées par une sécante sont parallèles :

1° Si deux angles correspondants sont égaux ;

2° Si deux angles alternes-internes sont égaux ;

3° Si deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Démonstration. — Supposons (fig. 13) que la sécante SS' rencontre en C et C' les deux *droites* AB et A'B' de manière que les angles correspondants SCB et SC'B' soient égaux. D'un point M de CS menons MP' perpendiculaire sur A'B' et soit P son point de rencontre avec AB. Dans le triangle rectangle MP'C' l'angle en M a pour complément l'angle MC'B'. Or, par hypothèse $\widehat{SCB} = \widehat{SC'B'}$; donc dans le triangle MPC la somme des angles aigus en M et en C vaut un droit ; donc l'angle P est droit. Donc MP' perpendiculaire sur A'B' est aussi perpendiculaire sur AB. Il en résulte que les droites AB et A'B' perpendiculaires sur une même droite sont parallèles. C. Q. F. D.

Les deux autres réciproques se ramènent à la première.

Corollaire. — Si deux angles ont leurs côtés parallèles deux à deux, soit de même sens, soit de sens contraires, ces angles sont égaux.

Si deux des côtés sont parallèles et de même sens et les deux autres parallèles de sens contraires, les deux angles sont supplémentaires.

Enfin, comme autre conséquence on démontre que :

Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires ils sont égaux s'ils sont de même nature, et ils sont supplémentaires quand ils sont de nature différente.

Translation rectiligne d'une figure plane. Composition de deux translations.

6. Parallélogramme. — Si on coupe un système de deux droites parallèles AB, A′B′, par deux sécantes parallèles AA′ et BB′, on forme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles 2 à 2; un tel quadrilatère s'appelle un *parallélogramme*.

On démontre facilement qu'une diagonale AB′ par exemple la partage en deux triangles égaux. On a par suite : AB = A′B′ et AA′ = BB′. Donc :

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux 2 à 2. On dit habituellement : Les portions de deux droites parallèles comprises entre parallèles sont égales.

On voit de même que dans un parallélogramme deux angles opposés sont égaux et que deux angles consécutifs sont supplémentaires. Enfin, signalons encore la propriété suivante :

Si dans un quadrilatère deux côtés sont à la fois égaux et parallèles la figure est un parallélogramme.

Cela posé, reportons-nous au début de la *première partie*. Par une translation rectiligne de direction Δ le triangle MAB a passé de sa première position a une 2e M′A′B′. Si on considère les côtés AM et A′M′ on constate qu'ils forment avec la sécante Δ deux angles correspondants égaux $\widehat{A'} = \widehat{A}$. Donc AM et A′M′ sont deux droites parallèles. Il en est de même de BM et de B′M′. D'ailleurs, dans le déplacement considéré, le sommet M est resté constamment à la même distance MP de la droite Δ ; il a donc décrit un segment de droite MM′ parallèle à la droite Δ.

On voit par conséquent que le quadrilatère AA′M′M est un parallélogramme ainsi que le quadrilatère BB′MM′.

On a donc $AA' = MM'$ et de même $BB' = MM'$.

Un point quelconque de la figure mobile, non situé sur la directrice Δ forme avec le segment AB de cette droite un triangle invariable analogue au triangle MAB ; son déplacement s'effectue par conséquent dans les mêmes conditions que celui du point M. On peut donc énoncer le théorème suivant :

7. *Théorème.* — Dans la translation rectiligne d'une figure plane dans son plan :

1° Les divers points de la figure mobile décrivent des droites parallèles à la directrice Δ de la translation et par suite parallèles entre elles ;

2° Quand la figure a été amenée d'une première position à une deuxième ses divers points ont décrit des segments de droites de même longueur ;

3° D'une manière générale : Deux positions quelconques d'un segment de droite, non parallèle à la directrice Δ, sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

Corollaire. — Quand deux droites D et D′ sont parallèles on peut toujours amener l'une d'elles en coïncidence avec l'autre par une translation tout à fait arbitraire.

Démonstration. — En effet coupons le système des deux parallèles par deux sécantes parallèles quelconques AA′ et BB′ ; nous obtenons un parallélogramme AA′B′B. Faisons subir à la droite D une translation égale et parallèle à AA′ ; le segment AB se déplacera parallèlement à lui-même et comme $AA' = BB'$ les points A et B viendront simultanément coïncider, le premier avec A′ et le second avec B′ ; dès lors, la droite D coïncidera avec sa parallèle D′.

C. Q. F. D.

Certains auteurs invoquent cette propriété pour *définir* le parallélisme de deux droites ; ils utilisent en outre la composition de deux translations rectilignes, propriété par laquelle nous allons terminer cette étude.

8. Composition de deux translations rectilignes de directions différentes.

Par une translation parallèle à la direction Δ et de grandeur AA' un segment de droite AB de la figure mobile est venu en $A'B'$, ce qui donne le parallélogramme $AA'B'B$. Par une autre translation de directrice Δ' égale à $A'A''$ le segment de droite $A'B'$ est venu en $A''B''$ et on a le parallélogramme $A'A''B''B'$.

Or on sait que $A''B''$ est égal et parallèle à AB, donc la figure $AA''B''B$ est également un parallélogramme. On pourra par conséquent par une translation *unique* égale et parallèle à AA'' amener le segment de droite AB sur $A''B''$.

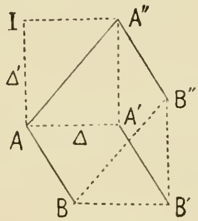


Fig. 10.

Or le déplacement du segment AB entraîne celui des divers points de la figure et on peut observer que : *La translation unique AA'' est la diagonale du parallélogramme $AA'A''I$ dont les côtés AA' et AI représentent les directions et les grandeurs des translations rectilignes composantes.*

V. Hioux (Paris).

SUR LES CONGRUENCES DU TROISIÈME DEGRÉ[1]

Dans le chapitre IX de son Etude des fonctions arithmétiques M. Arnoux établit, à l'aide de sa méthode graphique, les propriétés caractéristiques des congruences du troisième degré. Ces propriétés ne sont pas nouvelles, mais je les crois peu connues ; et il ne serait peut-être pas inutile de rappeler qu'elles se déduisent très simplement d'un théorème impor-

[1] A propos du livre de M. G. Arnoux : « Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques ». — (Voir l'analyse de l'ouvrage dans le précédent n°, p. 326-329. *Réd.*).

tant de M. L. Stickelberger, retrouvé par M. Voronoï et généralisé par M. Hensel.

Supposons que le module soit un nombre premier p supérieur à 3.

La congruence générale du 3^e degré se ramène alors à la forme

$$(1) \qquad x^3 + bx + a \equiv 0 \pmod{p},$$

a et b étant deux nombres entiers.

M. Arnoux pose

$$R \equiv \frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}.$$

Voici alors comment s'énoncent les propriétés retrouvées par M. Arnoux :

(1er cas) $\qquad p$ est de la forme $3k - 1$.

Si $R \equiv 0$, la congruence (1) a trois racines réelles dont deux égales.

Si R est un résidu quadratique, il y a une seule racine réelle.

Si R est un non-résidu, le nombre des racines réelles est égal tantôt à trois et tantôt à zéro.

(2me cas) $\qquad p$ est de la forme $3k + 1$.

Si $R \equiv 0$, la congruence a encore trois racines réelles, dont deux égales.

Si R est un résidu quadratique, le nombre des racines réelles est égal tantôt à trois et tantôt à zéro.

Si R est un non-résidu, il y a une seule racine réelle.

On voit que les fonctions R se comportent d'une manière inverse, suivant qu'on a $p \equiv -1$ ou $p \equiv 1 \pmod{3}$. Mais la différence dans les énoncés ne tient pas à la nature des choses : elle disparaît, si à la place de R on introduit le discriminant de l'équation. Soit D ce discriminant. On a

$$D = -4b^3 - 27a^2,$$

d'où

$$D = -3 \,.\, 6^2 R.$$

Or -3 est un non-résidu pour les nombres p de la forme $3k-1$ et un résidu pour les nombres p de la forme $3k+1$.

On aura donc dans les deux cas :

Si $D \equiv 0$, la congruence (1) a trois racines réelles, dont deux égales.

Si D est un résidu quadratique, le nombre des racines réelles est égal à 3 ou à 0.

Si D est un non-résidu, il y a une seule racine réelle.

La première de ces trois propriétés se démontre immédiatement. En effet, lorsque $D \equiv 0$, la congruence (1) admet les racines $x_1 \equiv -\frac{3a}{2b}$ et $x_2 \equiv \frac{3a}{b}$ et la première de ces racines est double.

Je supposerai donc que D n'est pas divisible par p.

Voici maintenant en quoi consiste le théorème de Stickelberger-Voronoï. Soit

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

une congruence d'un degré quelconque n. Soient D son discriminant, v le nombre des facteurs irréductibles de $f(x)$ (mod. p). Je supposerai $p > 2$. On a alors

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-v}.$$

$\left(\frac{D}{p}\right)$ étant le symbole de Legendre.

Or dans le cas d'une congruence du 3ᵉ degré, $n=3$. Si donc D est un résidu, l'exposant $3-v$ est pair, par conséquent $v = 3$ ou 1 ; dans le premier cas le nombre des racines réelles est égal à trois, dans le second à zéro. Si au contraire D est un non-résidu, $3-v$ est impair, d'où $v=2$, et par conséquent le nombre des racines réelles est égal à 1.

Je tiens à ajouter que ces résultats avaient été établis d'une manière différente par M. Voronoï dans une thèse publiée en 1894 (v. Verhandlungen des III. intern. math. Kongr., p, 189).

Une question se pose : Quelle est la valeur de v dans le cas où le discrim. D est un résidu quadratique ? Est-elle égale à 1 ou à 3 ? Une difficulté analogue se présente dans le cas d'une congruence du 4ᵉ degré. Pour trouver la valeur de v, on pourrait se servir d'une propriété des congruences irréductibles que je voudrais rappeler.

Soient $f(x) \equiv 0$ (mod p) une congruence irréductible de degré n et x_0 l'une de ses racines (imaginaires)[1]. Les n racines de la congruence sont alors x_0, $x_1 = x_0^p$, $x_2 = x_0^{p^2}$, ..., $x_{n-1} = x_0^{p^{n-1}}$.

Il en résulte immédiatement que toute fonction cyclique entière et à coefficients entiers de ces racines est congrue à un nombre entier (mod. p), pourvu que les substitutions cycliques correspondantes soient des puissances quelconques de $(x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$.

Soit maintenant $n = 3$ et posons $D \equiv d^2$. Considérons la fonction

$$M = (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)^3 ,$$

α étant une racine $\not\equiv 1$ de $z^3 - 1 \equiv o$ (mod. p). Supposons d'abord que $p \equiv 1$ (mod. 3); α est alors un nombre entier, M une fonction cyclique à coefficients entiers; si donc $\nu = 1$, M est congrue à un nombre entier; si $\nu = 3$, la somme $x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2$ est un entier et M est un résidu cubique. Et l'on retombe sur le critérium de M. Arnoux: $\nu = 3$, si le nombre M ou

$$\frac{3}{2}\left[- 9a + (\alpha - \alpha^2)\, d\right] \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2}\left[- 9a + \sqrt{-3}\, .\, d\right]$$

est un résidu cubique (mod. p).

Supposons maintenant que $p \equiv -1$ (mod. 3). M est une fonction cyclique dans le domaine $[\sqrt{-3}]$. Pour que $\nu = 3$, il faut qu'on ait

$$M^{\frac{p^2-1}{3}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p) .$$

Ces résultats peuvent du reste être établis d'une manière directe (comp. l'ouvrage de M. Arnoux).

Dans le cas d'une congruence du 4e degré on pourrait se servir de la fonction cyclique $(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2$.

D. Mirimanoff (Genève).

[1] On peut supposer par exemple que x_0 est une des racines de l'équation $f(x) = 0$.

SUR UN THÉORÈME DE M. HAMEL

1. — M. Hamel a démontré le théorème suivant dans les *Mathematische Annalen* (Vol. 60, 1905 : « Ueber eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ » :

« Il existe une *base* de tous les nombres, c'est-à-dire, il existe un ensemble de nombres a, b, c, ... tels que tout nombre x peut être représenté univoquement par une expression de la forme

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots ,$$

où les coefficients α, β, γ ..., qui ne sont pas nuls, sont rationnels et en nombre fini ».

Il est bien aisé de déduire du théorème énoncé l'existence d'infinies solutions discontinues de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y) ,$$

dont toute fonction de la forme

$$f(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c)$$

est solution, les valeurs de la fonction $f(x)$ correspondant aux membres de la base étant supposées arbitrairement choisies.

Mais il est aisé d'en déduire aussi la possibilité de la décomposition de tout nombre x du continu en un produit d'un nombre fini de puissances rationnelles d'autres nombres formant un ensemble numérable. Nous nous proposons de définir cet ensemble en nous appuyant de considérations analogues à celles qui ont conduit au premier, et indépendamment de celui-ci.

« Il existe un ensemble de nombres m, n, p, ... tels que tout nombre x du continu peut être représenté univoquement sous la forme

$$x = m^{\mu} \cdot n^{\nu} \cdot p^{\pi} \dots \qquad (2)$$

où les exposants $\mu, \nu, \pi \ldots$ différents de zéro sont rationnels et en nombre fini. »

Les considérations suivantes se fondent sur le théorème de Zermelo, affirmant la possibilité de bien ordonner un ensemble quelconque (*Mathem. Annalen*, vol. 58). On sait que pour qu'un ensemble soit dit bien ordonné (ou série bien ordonnée) il faut et il suffit :

Qu'il existe un premier élément de l'ensemble;

Qu'il existe un premier élément de tout ensemble dont tous les éléments sont éléments de l'ensemble considéré.

Nous disons que les nombres a, b, c... sont nombres de la base I, et les nombres $m, n, p, \ldots$ nombres de la base II.

2. — Soit, par rapport à un bon ordre déterminé du continu, m le premier élément : il est aussi le premier des nombres de la base II. Nous supposons éliminés tous les nombres dont la forme est m^μ (μ rationnel et quelconque).

Il suit de l'hypothèse de bon ordre, que l'ensemble des éléments qui ne sont pas puissances rationnelles de m a un premier élément, soit n. Cet élément est le second des nombres de notre base. Nous supposons qu'on élimine à présent tous les nombres qui se laissent décomposer dans le produit d'une puissance rationnelle de m et d'une puissance rationnelle de n : le premier des éléments de l'ensemble résidu, par hypothèse le nombre p, est le troisième des nombres de la base II. Et ainsi de suite.

Supposons que X soit l'ensemble des nombres qui, dans le bon ordre considéré, précèdent x.

Nous disons que x appartient à la base, s'il n'est pas possible de poser

$$x = m^\mu \,.\, n^\nu \,\ldots\ldots\, r^\rho$$

où $m, n, \ldots r$, sont en nombre fini et appartenant à X, et $\mu, \nu, \ldots, \rho$ rationnels.

On déduit de cette définition que, si $m, n, \ldots r$ appartiennent à la base, on ne peut avoir

$$m^\mu \,.\, n^\nu \ldots\ldots r^\rho = 1 \,. \tag{3}$$

car autrement il serait possible de poser

$$r = m^{\mu'} \cdot n^{\nu'} \ldots\ldots$$

$\mu', \nu', \ldots$ rationnels. Et il suit de l'impossibilité de (3) que, si une décomposition de la forme (2) est possible, elle l'est d'une seule manière. Car on aurait

$$x = m^{\mu'} \cdot n^{\nu'} \cdot p^{\pi'} \ldots \; ; \quad x = m^{\mu} \cdot n^{\nu} \cdot p^{\pi} \ldots$$

$$m^{\mu' - \mu} \cdot n^{\nu' - \nu} \cdot p^{\pi' - \pi} \ldots\ldots = 1 \, .$$

Mais il est aussi évident que tout nombre du continu, qui ne peut être décomposé dans le produit d'un nombre fini de puissances rationnelles d'éléments de la base, appartient à celle-ci.

Supposons en effet que Y′ soit l'ensemble des nombres, qui n'appartiennent pas à la base et n'admettent pas une décomposition de la forme (2), et supposons que y soit le premier élément de Y′. On a de la précédente définition l'appartenance de y à la base : Y′ n'aurait donc de premier élément, ce qui serait contraire au théorème de Zermelo.

La proposition énoncée est ainsi démontrée dans sa totalité.

Ugo Broggi (Rome).

SUR LA POLARITÉ DANS LES COMPLEXES DU SECOND DEGRÉ (ORDRE ET CLASSE)

Cette note est basée sur la propriété des droites d'un complexe du second degré (ordre et classe) appartenant à un plan π, d'envelopper une courbe de la seconde classe.

1. — Soit Φ un complexe de second degré donné. Un plan π passant par un point donné P rencontre le complexe Φ suivant une conique, la polaire de P par rapport à cette conique est une droite p. Lorsque le plan π décrit la gerbe de som-

met P, la droite p décrit une congruence. Cette congruence est linéaire, car dans chaque plan π il ne peut y avoir qu'une droite p.

2. — Soit d une droite fixe de l'espace. Le pôle de la droite d par rapport à la conique du complexe Φ située dans un plan π passant par d, est un point D. Lorsque le plan π décrit le faisceau d'axe d, le point D parcourt une courbe du 5^e^ ordre coupant 4 fois d.

3. — Soit c_n une courbe gauche d'ordre n. Un plan π de l'espace rencontre cette courbe en n points. Les polaires de ces n points par rapport à la courbe du complexe du plan π sont n droites. Comme dans un plan π quelconque, il ne peut y avoir au maximum que n droites qui sont les polaires de points de c_n, le lieu de ces droites est une congruence de l'ordre et de la classe n.

A une droite donnée, on peut donc encore faire correspondre une congruence linéaire.

Ce paragraphe fait entrevoir une question intéressante: Trouver le lieu d'une cubique gauche telle que sa polaire soit formée par ses bisécantes.

4. — Soit S_n une surface du n^{ieme} ordre. Un plan π la rencontre suivant une courbe d'ordre n. Les droites polaires des points de cette courbe par rapport à la conique du complexe Φ du plan π enveloppent une courbe de n^{ieme} classe. On peut donc dire que la figure polaire d'une surface d'ordre n est un complexe de degré n.

5. — Inversement, à une complexe G_n d'ordre n, correspond une surface S_n d'ordre n. On peut aussi lui faire correspondre un autre complexe formé par les tangentes à la surface S_n. Ce complexe sera généralement d'un ordre supérieur à n.

Pour $n = 2$, on obtient une correspondance entre les complexes du second ordre.

Ces questions peuvent être étendues à des complexes d'ordre plus élevé.

L. Godeaux (Mons).

A PROPOS DE L'ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

Réflexions sur les réponses[1] aux questions 11, 12 et 13

par V. Bobynin (Moscou).

Les questions 11, 12 et 13 peuvent être rattachées aux questions 4 et 5, puisque, comme ces dernières, elles fournissent l'opinion des mathématiciens sur l'importance de la lecture dans le domaine de l'investigation mathématique. Effectivement elles se trouvent dans un rapport étroit avec les questions déjà citées dans notre dernier article[2], concernant la négligence dans l'enseignement de la lecture des œuvres mathématiques.

Et, comme il a déjà été dit, cette négligence de la lecture dans l'enseignement se traduit au commencement en une sorte de protestation inconsciente et avec le temps elle dégénère chez beaucoup de mathématiciens en une négation consciente de l'importance de la lecture. Leur opinion est si arrêtée qu'on ne peut pas la vaincre même avec cette vérité, claire *a priori*, qui dit que sans lecture il est facile de refaire les recherches déjà faites. Les représentants de cette idée que la lecture est moins utile que les investigations personnelles s'excusent devant la science et l'humanité, par la raison que si la recherche de ce qu'on a déjà trouvé apparaît comme une véritable perte de temps, c'est quand même un profit pour l'investigateur lui-même.

Sur les 36 réponses à la question 11[3] il y en a 6 qui

---

[1] Voir l'*Enseignement Mathmatique*, 8e année, n° 6, p. 467-475.

[2] Voir l'*Enseignement Mathematique*, 9e année, p. 135-141.

[3] *Question 11.* D'une manière générale quelle est la part d'importance que vous attribuez aux lectures en matière de recherches mathématiques ? Quels conseils donneriez-vous à ce sujet à un jeune mathématicien pourvu de l'instruction classique habituelle ?

nient complètement l'importance de la lecture. Cette négation est très prononcée dans les deux réponses suivantes :

« L'érudition me paraît une cause de l'impuissance ; les belles découvertes sont dues à des mathématiciens qui s'occupaient fort peu de ce que les autres avaient trouvé. » Rép. XXVII, WEILL).

« La méthode que je conseillerai à un jeune mathématicien, celle que je crois féconde pour trouver des choses originales, c'est de laisser germer en lui une pensée mathématique, de ne toucher aux livres qui peuvent le renseigner sur les travaux précédemment faits dans le voisinage de cette pensée, que le jour où il se sentira impuissant à avancer plus loin. Je ne parle que du mathématicien jeune et désintéressé n'ayant pas à donner à ses recherches un but précis. Mais pour certains travaux, pour ceux qui correspondent particulièrement aux thèses de doctorat et en général aux travaux d'érudition et d'histoire mathématique, il est naturel de réunir d'abord, sur une fiche, tous les renseignements que l'on pourra découvrir sur le travail dont le plan a été arrêté. » (Rép. LXXV, G. DE LONGCHAMPS).

A ces deux réponses on peut encore joindre la réponse de M. Bryan, aux questions 12 et 13 : « Je n'ai jamais le temps. Il est plus facile d'examiner soi même une question que de lire ce que d'autres ont écrit là-dessus. »

Cette même négation apparaît encore, mais sous une forme plus ou moins nette, dans les réponses XIII, XV, XXI, LVII, LXXXI, LXXXIV.

Réponse XIII d'un mathématicien anglais :

« Je conseille à un jeune mathématicien de s'arrêter à une de ses propres idées et de l'approfondir. D'autres idées naissent avant que le but soit atteint. Il importe peu s'il constate plus tard que d'autres ont examiné ces questions avant lui. Il est fort probable qu'il en sera ainsi pour ses premières recherches. En Angleterre nous fournissons aux jeunes gens trop de problèmes et d'idées tandis que le travail personnel n'est pas assez développé, l'étudiant ne se trouve pas encouragé à prendre confiance en lui-même.

Réponse XV d'un mathématicien allemand :

« Ce n'est qu'une fois que je crois avoir trouvé quelque chose de nouveau que j'examine la question dans les ouvrages et les périodiques en vue de comparer mes résultats à ceux obtenus par d'autres. D'après mon expérience personnelle, je conseille aux jeunes mathématiciens qui auraient la tendance à s'isoler de se charger de rapports sur le développement de tel point ou de monographies afin d'avoir à étudier ce qu'ont fait les autres. On peut aussi réagir contre l'isolement par des entretiens ou la correspondance avec des collègues s'occupant des mêmes questions et en fréquentant les réunions et congrès de mathématiciens. »

Réponse XXI. L. Boltzmann : « Je n'ai qu'un conseil à donner aux jeunes mathématiciens : ayez du génie. »

Réponse LXXXI d'un mathématicien hollandais, J. Vaes :

« Il vaut mieux développer un sujet d'abord soi-même ; cela exige beaucoup de temps, mais c'est fructueux. Celui qui commence à lire tout ce qui a été écrit sur une question court le danger de ne jamais commencer ses propres inventions. »

A ces réponses il faut ajouter le 2 suivantes :

La réponse LVII d'un mathématicien des Etats-Unis E. P. Thompson : « Ceux qui se sont tracés leur propre direction semblent témoigner de plus d'originalité que ceux qui sont élèves d'autres. »

Réponse LXXXIV d'un mathématicien suisse G. Oltramare : « Je préfère ne pas m'assimiler les idées des autres. »

Quelques auteurs trouvent que la lecture ne contribue en rien aux investigations personnelles, mais qu'elle évite pourtant la répétition de vérités déjà trouvées. Considérant la lecture comme un mal inévitable, ils estiment qu'on doit la limiter autant que possible au strict nécessaire.

Les uns conseillent de consacrer peu de temps à la lecture (Rép. XI, LV).

D'autres, conseillent de ne pas pénétrer dans les détails (Rép. LXXVI, LVIII). La réponse XXXVI engage à lire autant qu'il est nécessaire pour pouvoir s'orienter dans l'objet de ses recherches.

Quelques réponses demandent que l'on soumette la lecture au tempérament et aux goûts.

Un mathématicien français (Rép. IX) écrit :

« L'importance des lectures varie, je crois, avec les tempéraments. Ceux qui lisent facilement ont tout avantage à commencer par là ; il est plus attrayant de penser d'abord et de ne lire que quand on est à court d'idées pour se donner un nouvel élan. Je m'abstiens de tout conseil. Le travail scientifique doit être un plaisir. Chacun prend son plaisir où il le trouve. »

Un autre mathématicien français, M. C. A. Laisant dit :

« Récapitulez bien vos connaissances classiques ; complétez-les par la lecture des maîtres. Mais ne poursuivez vos lectures qu'autant qu'elles vous intéressent ; ne vous acharnez pas : et surtout, obéissez à vos goûts, et à votre tempérament. Si une idée personnelle heureuse vous vient, suivez-là sur l'heure, faudrait-il pour cela interrompre vos lectures. » (Rép. XXIII).

Les réponses XXXVI, XLVI et LII conseillent de limiter la lecture à la connaissance des nouveautés dans les sciences mathématiques.

Plusieurs mathématiciens estiment qu'on doit se limiter à la lecture de certains traités classiques (Rép. XXXIII), de mémoires originaux (Rép. XXXV, XXXVI) ou des chefs-d'œuvres de la littérature mathématique (I.L.).

Le troisième groupe des réponses sur la question 11 comprend les auteurs qui affirment l'absolue nécessité de lire les œuvres mathématiques dans le but des recherches. Ces derniers point de vue se présentent tout à fait clairement dans les réponses V, VI, VII, XVIII, XX, XXV, XXVI, LXIX, LXXXIV. En voici quelques extraits :

« J'attribue à la lecture une grande influence sur les travaux personnels. Il me paraît donc important que dans les séminaires on engage tout particulièrement les étudiants à la lecture des auteurs classiques dans le domaine des mathématiques. » (Rép. VI, Allemagne).

« Je ne me place qu'au point de vue de l'histoire ; je dirai : Tout lire, chaque ouvrage vous apprend quelque chose. » (Rép. VII, Moritz Cantor).

« La lecture en matière de recherches mathématiques est certainement très importante. Elle fournit des idées nouvelles et suscite l'invention. » (Rép. XVIII d'un mathématicien italien.)

Réponse XX d'un mathématicien français :

« Je tiens pour très important d'avoir lu les ouvrages mathématiques. Le souvenir qu'une question a été traitée dans tel ou tel ouvrage est extrèmement important à fixer. »

Réponse XXV d'un mathématicien hollandais H. de Vries :

« Les lectures sont importantes, parce qu'elles donnent des points de vue nouveaux qu'on ne trouverait peut être pas soi-même. »

Réponse XXVI du mathématicien français J. Richard :

« L'importance des lectures est énorme ; mais il faut donner la préférence aux traités, car les mémoires sont souvent difficiles à comprendre, l'auteur supposant connus beaucoup de choses qu'ont peut ignorer. »

Réponse LXIX d'un mathématicien italien :

« J'attache une très grande importance aux lectures : c'est par les lectures qu'on apprend de nouvelles méthodes de recherches. »

Réponse LXXXIV d'un mathématicien suisse M. G. Oltramare :

« Les lectures sont très importantes, elles donnent des idées. Il est donc nécessaire de lire beaucoup et de causer avec les gens instruits. »

D'autres réponses s'expriment sous une forme moins catégorique. Elle mériteraient aussi d'être reproduites. Faute de place nous nous bornerons à renvoyer les lecteurs aux pages 467 à 475 du t. VIII de cette *Revue*. Voir les réponses XII, XXXII, XLIV, XLV, XLIX.

L'utilité de la lecture est affirmée nettement par 6 réponses et moins clairement par 5 autres. Ce petit nombre de réponses conseillant la lecture nous invite à approfondir leur cause. Nous avons déjà insisté sur le fait que cela provient tout d'abord de la négligence dans l'enseignement. Mais d'autres causes encore sont possibles. L'utilité de la lecture pour les recherches mathématiques ne peut laisser de doute. Il est tout à fait clair que pour faire progresser la science avec sûreté, sans répéter les choses déjà faites, il faut être au niveau de l'état actuel de la science. Mais pour cela il faut beaucoup lire même en réduisant le temps des recherches. Si l'on envisage le développement actuel que prend la littérature mathématique, il est même douteux qu'il reste du temps pour les recherches.

Les plus ardents préconiseurs de la lecture ne peuvent nier la vérité de tels raisonnements. Quelques-uns d'entre eux peuvent chanceler dans leurs opinions sur la lecture, et les autres peuvent commencer à la restreindre.

Dans la vie scientifique cette situation a provoqué les moyens de l'écarter. Cela a donné lieux à des publications bibliographiques fournissant un compte rendu des nouvelles œuvres de la littérature mathématique. Elles ont précisément été rappelées par la *Rédaction* en tête de l'étude des questions 11 à 13. Malgré toute l'importance de ces publications ce moyen est un palliatif; du reste, aucun des auteurs des réponses ne le cite.

Un moyen radical qui consiste à amener la lecture au strict minimum sans nuire à son but peut seul fournir l'histoire des mathématiques, si elle veut atteindre le but principal qu'on lui assigne : guider les travaux des investigateurs. Pour cela, elle doit fournir aux savants la possibilité d'être au courant de la littérature scientifique sans avoir besoin de l'approfondir et les garantir contre les questions déjà résolues ou contre celles dont il est encore trop tôt de s'occuper. Il n'y a que la réponse L. de E. W. Davis qui attire l'attention sur l'importance de l'histoire des mathématiques et cela montre combien cette importance est peu répandue chez les mathématiciens. E. W. Davis conseille, quoique vaguement, de réunir l'étude de l'histoire à la lecture des œuvres mathématiques. Il sent plutôt cette importance qu'il ne la reconnaît. Enfin, ce qui est encore le plus important, c'est que l'historien bien connu M. Moritz Cantor (réponse VII) ne dit rien à ce propos.

Après l'aperçu général des réponses à la question 11, il ne reste que peu à dire sur les réponses aux questions 12 et 13 [1]. Dans la réponse I, M. Meray se prononce négativement à propos de la question 12. Il dit : « Ça été trop peu ma

[1] 12 — Avant d'entamer un travail, cherchez-vous tout d'abord à vous assimiler les travaux qui ont été produits sur le même sujet.

13. — Préférez-vous au contraire laisser à votre esprit son entière liberté, sauf à vérifier ensuite par des lectures sur le sujet, la part qui vous est personnelle dans les résultats que vous avez obtenus.

méthode. » Les réponses suivantes tendent à restreindre la lecture.

« Il serait fatigant et inutile d'étudier *tous* les ouvrages concernant un certain sujet. Il suffit de savoir que son propre travail fournira du nouveau, (tout au moins au point de vue de la méthode) » (Rép. IV, ZINDLER).

« Je n'entreprends en général ces recherches que lorsque je possède déjà quelques résultats. » (Rép. VI).

« Oui, s'il s'agit de travaux d'une certaine étendue. » (Rép. XXV, H. DE VRIES).

Voir aussi les réponses XXVI et XLV.

Les réponses V, XXII, XXXIX, XLVI, ne donnent qu'une simple affirmation, par contre les X, XV, XX, XXIII, ne mettent pas en pratique la méthode de la question 12.

En considérant les réponses aux questions 13, il faut mettre au premier rang celles dont les auteurs se servent également des méthodes de la 12e et 13e question. Parmi ces réponses se trouvent les suivantes :

« Toujours et aussi complètement qu'il m'est possible. » (Rép. XVIII).

« L'une ou l'autre suivant le cas. » (Rép. XXXII, LERCH).

« Après avoir pendant plusieurs années concentré mon attention sur plusieurs branches des mathématiques, je suis arrivé à distinguer les sujets qui ont été approfondis de ceux qui ne l'ont pas été. Je continue alors moi-même les travaux sans m'occuper de la bibliographie, en réservant cette partie assez ennuyeuse jusqu'au moment où j'ai obtenu quelque résultat. » Rép. LV, L. E. DICKSON. »

A ce même groupe, il faut ajouter la réponse XXX, d'un mathématicien norvégien M. C. Störmer, qui, à propos de la question 12 dit : « Seulement avant la rédaction définitive », et à propos de la 13e question : « Oui, pendant les premières recherches. »

La préférence de la méthode 13 à la méthode 12 s'exprime dans les réponses IV et XXIII. D'autre part dans la réponse I, M. Ch. Meray dit : « Je l'ai habituellement préféré et j'ai le travers de ne pas aimer à comparer mes travaux à ceux d'autrui. »

Comme conclusion à l'examen des réponses aux questions 12 et 13, il reste à remarquer que trois de ces réponses IV, XXX, XLIV expriment un phénomène remarquable qui a une importante signification historique. En laissant sans réponses la question 11, ils ont montré qu'ils ne se sont jamais arrêtés sur la question de l'importance de la lecture pour les investigations mathématiques. Les auteurs de ces questions par les réponses aux questions 12 et 13 ont montré en même temps qu'en réalité ils ont suivi les routes qui prouvent l'importance de la lecture. De sorte que dans les procédés de leurs investigations ils se sont guidés non pas par leur pensée propre, mais par l'indication de l'expérience qui les met vis-à-vis de la nécessité d'entreprendre telle ou telle action.

L'habitude de se rendre compte non seulement des sujets accessoires dans le procédé de l'investigation, mais même d'une chose aussi importante que la lecture apparaît à beaucoup de mathématiciens comme un phénomène étrange. Tout le procédé du travail créateur non seulement dans la partie qui par sa nature reste inconsciente, mais aussi dans la partie qui peut et doit être consciente, est tout à fait inconnue pour ces mathématiciens. Que peuvent dévoiler de pareils savants à l'histoire des sciences sur les procédés de leurs découvertes? Peut-on les croire compétents dans de pareilles questions qui les touchent de si près?

Ce jugement qui semble être si sévère n'a pas en vue de diminuer le mérite des investigateurs, ce qui serait mal à propos, mais plutôt de montrer que l'opinion de d'Alembert n'est pas conforme à la réalité; cette opinion, qui a trouvé tant d'adeptes, croit les investigateurs modernes capables de reproduire les méthodes des anciens créateurs de la géométrie, en retrouvant les voies de leurs investigations personnelles.

(Traduction de Mlle Byck, Genève.)

CHRONIQUE

Association scientifique espérantiste.

La plupart des grands journaux quotidiens ont rendu compte du 3e Congrès universel d'Espéranto qui a siégé à Cambridge du 10 au 17 août 1907. Nous nous bornerons à signaler ici un des résultats les plus importants qui a été la fondation définitive de l'Association scientifique espérantiste (*Scienco Asocio Esperantista*), qui existait déjà depuis le congrès de Genève (1906), mais qui n'avait pas encore pris de titre officiel. On sait qu'un bureau (*Scienca Oficejo*) avait été installé à Genève, rue Bovy-Lysberg, sous la direction de M. René de Saussure, pour préparer son organisation.

L'Association scientifique espérantiste a rencontré un accueil très sympathique en Angleterre. L'adhésion la plus importante est celle du célèbre physicien J.-J. Thomson, professeur à l'Université de Cambridge et lauréat du prix Nobel. L'Association compte aujourd'hui plus de 700 membres; elle possède un organe mensuel, publié à Genève sous le titre *Internacia Scienca Revuo*.

La cérémonie de fondation a eu lieu dans une des salles de l'Université de Cambridge, sous la présidence de M. le général Sebert, membre de l'Institut de France. Sur la proposition de ce dernier, M. le professeur Dr Ad. Schmidt, directeur de l'Observatoire magnétique de Potsdam, est nommé président de l'Association scientifique. Le bureau est alors constitué comme suit : premier vice-président, professeur J.-J. Thomson; deuxième vice-président, B. Benoît, directeur du bureau international des poids et mesures, Paris; secrétaire général, R. de Saussure, Genève; secrétaires adjoints, C. Bourlet, professeur à l'Ecole des arts et métiers, Paris et W. Schmurlo, ingénieur (Russie). Le bureau central de l'Association aura son siège à Genève. Enfin, un comité de neuf membres est adjoint au bureau : M. le général Sébert (France), MM. Ed. Huntington, professeur à l'Université de Harvard (Etats-Unis), Villaréal, doyen de la Faculté des sciences de Lima (Pérou), professeur R. Codorniu, ingénieur en chef des eaux et forêts (Espagne), H. Pellat, professeur de physique au Collège de France (France), professeur A. Meazzini, géologue (Italie), Dr K. Bein, médecin-oculiste (Pologne), Dr K.-B. Aars, membre de l'Académie des sciences (Norvège), Fournier d'Albe, physicien-électricien (Irlande).

La séance s'est terminée par l'adoption du vœu suivant proposé par le secrétaire général : « Les membres de l'Association scientifique espérantiste réunis à Cambridge, le 15 août 1907, sont d'avis que l'emploi d'un système de *monnaie auxiliaire internationale* serait très utile et ils expriment le désir que tous les espérantistes l'utilisent ». Il est à noter, du reste, que déjà presque tous les journaux espérantistes font usage de la monnaie de compte internationale[1] proposée par M. de Saussure.

Dans sa dernière séance plénière, le 3e Congrès d'Espéranto a adopté le rapport concernant la fondation de l'Association scientifique et il a ratifié le vœu émis par cette association.

Le prochain congrès d'Espéranto aura lieu l'année prochaine en Allemagne, probablement à Dresde.

Nominations et Distinctions.

M. M. Brendel, de l'Université de Göttingue, est nommé à la chaire de mathématiques nouvellement créée à l'Académie des sciences sociales et commerciales de Francfort-a.-M.

M. Clairin, maître de conférences, est nommé professeur de mathématiques générales à l'université de Lille.

M. Drach, professeur de mécanique rationnelle appliquée à la Faculté des Sciences de Poitiers, est nommé professeur de calcul différentiel et intégral à la dite Faculté.

M. M. Grossmann, privat-docent à l'Université de Bâle, est nommé professeur ordinaire de géométrie descriptive à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, en remplacement de M. W. Fiedler, qui prend sa retraite.

M. G. Lauricella, de l'Université de Catania, a été nommé membre correspondant de l'Académie dei Lincei.

M. Maurice Lévy, professeur au Collège de France, est promu commandeur de la Légion d'honneur.

M. G. Morera, de l'Université de Turin, membre correspondant de l'Académie dei Lincei, a été nommé membre ordinaire.

M. Paraf, maître de conférences, est nommé professeur de mathématiques générales à l'Université de Toulouse.

M. Prandtl, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Göttingue.

M. Vavasseur, maître de conférences, est nommé professeur de calcul différentiel et intégral à l'Université de Lyon.

Privat-docents. — Sont admis en qualité de privat-docents :

M. A. Kopff, pour l'Astronomie, à l'Université de Heidelberg;

---

[1] Voir *Internacia Scienca Revuo*, mai et août 1907.

M. L. Schutka, pour les mathématiques, à l'Université de Vienne;

M. O. Toeplitz, pour les mathématiques, à l'Université de Göttingue;

M. G. Vitali, pour le calcul infinitésimal, à l'Université de Gênes.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1906-1907 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität.* — Schwarz: Analyt. Geometrie, 4; Anwendungen d. ellipt. Funktionen, 4; Ueber einige Aufgaben der konformen Abbildung. 2; Mathem. Kolloquien; Seminar. — Frobenius: Zahlentheorie, 4; Seminar. — Schottky: Th. der Kurven und Flächen, 4; Lineare Differentialgleichungen und automorphe Funktionen, 4; Seminar. — Hettner: Ueber unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche, 2. — Knoblauch: Differentialrechnung, 4; Uebungen dazu; Theorie der elliptischen Funktionen, 4. — Landau: Integralgleichungen, 4. — Schur: Theorie der algebraischen Gleichungen, 4; Ueber Gruppen linearer Substitutionen, 2. — Lehmann-Filhès: Integralrechnung, 4; Uebungen dazu. — Aschkinas: Elemente der höheren Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung in den Naturwissenschaften. — Foerster: Geschichte der alten Astronomie; Theorie und Kritik der Zeitmessung. — Bauschinger: Einleitung in die Mechanik des Himmels, 3; Präzession und Nutation. — Struve: Einleitung in die Störungstheorie, 3; Uebungen im Beobachten. — Scheiner: Spektralanalytische Theorien; Astrophysikalisches Kolloquium. — Ristenpart: Gemeinverständliche Einführung in die Astronomische Erdkunde, 1 $^1/_2$; Sternkataloge, 1. — Marcuse: Allgemeinverständliche Himmelskunde, 1 $^1/_2$; Theorie und Praxis geographisch- und nautisch-astronomischer Ortsbestimmungen, 2. — Helmert: Schwerkraft und Erdgestalt, 1; Methode der kleinsten Quadrate. — Rubens: Mathematische Ergänzung zur Experimentalphysik, 1. — Warburg: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik, 2. — Weinstein: Einleitung in die mathematische Physik I, 3. — Neesen: Elementare Mechanik, 2. — Valentiner: Vektorentheorie mit Anwendungen auf die theoretische Physik.

Bonn; *Universität.* — Study: Einleitung in die Funktionentheorie, 4; Einleit. in die Quaternionentheorie, 1; Seminar. — London: Differential- und Integralrechnung II, 4; Uebungen dazu, 1; Synthet. Geometrie, 2; Uebungen in darst. Geometrie; Seminar. — Kowalewski: Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 4 ; Uebungen dazu, 1 : Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen, 2. — Schmidt : Partielle Differentialgleichungen, 4. — Mönnichmeyer : Methode der kleinsten Quadrate. — Küstner : Sphärische Astronomie, 3 ; Fixsternkunde, 1 ; Praktische Uebungen (mit Mönnichmeyer). — Kayser : Physikalisches Kolloquium. — Kaufmann : Mechanik und Elastizitätslehre, 4. — Bucherer : Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, 2.

Braunschweig ; *Technische Hochschule.* — Dedekind : Elemente der Zahlentheorie ; Einl. in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Fricke : Analyt. Geometrie und Algebra ; Diff.- und Integralrechnung ; Einf. in die Funktionentheorie ; Trigon. Reihen und harmonische Analyse ; Vektorentheorie. — Hohenner : Grundzüge der Geodäsie mit Übungen ; Höhere Geodäsie ; Methode der kleinsten Quadrate ; Grundzüge der sphär. Astronomie mit Übungen. — Ludwig : Darst. Geometrie mit Übungen ; Grundzüge der höh. Mathematik ; Geometrie der Lage ; Geometrie der Bewegung ; Ausgew. Kapitel aus der elementaren Geometrie. — Schlink : Techn. Mechanik I mit Übungen und Repet. ; Techn. Mechanik II (Hydraulik) mit Übungen und Repet. ; Analyt. Mechanik. — Weber : Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik. — Wernicke : Statik starrer und elastisch fester Körper.

Breslau ; *Universität.* — Rosanes : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Seminar. — Sturm : Th. der geometr. Verwandschaften II, 3 ; Integralrechnung, 2 ; Geschichte der Mathematik, 1 ; Seminar. — Kneser : Funktionentheorie, 4 ; Prinzipien der Elementarmathematik, 2 ; Seminar. — Lummer : Physikalisches Kolloquium. — Franz : Theorie der Bahnrechnung der Kometen, Planeten und Doppelsterne, 3 ; Uebungen dazu, 2 ; Methode der kleinsten Quadrate und Ausgleichung der Beobachtungsfehler, 1 ; Astrophysik, 2.

Dresden ; *Technische Hochschule.* — Krause : Höh. Mathematik II ; Höh. Algebra ; Seminar. — Disteli : Darst. Geometrie II ; Analyt. Geometrie der Flächen II. Grades. — Heger : Kartenentwürfe. — Helm : Höh. Mathematik IV ; Analyt. Mechanik ; Potentialtheorie ; Wahrscheinlichkeitslehre ; Ausgew. Kapitel aus der mathem. Physik. — Naetsch : Elementare Algebra und Analysis ; Einl. in die Theorie der part. Differentialgleichungen ; Übungen zur höh. Mathematik IV. — Grübler : Techn. Mechanik.

Erlangen ; *Universität.* — Gordan : Differentialrechnung, 4 ; Invarianten, 4 ; Seminar. — Noether : Analyt. Geometrie I, 4 ; Funktionentheorie, 4 ; Geometr. und analyt. Uebungen.

Freiburg ; *Universität.* — Lüroth : Analyt. Geometrie der Ebene und Differentialrechnung ; Variationsrechnung ; Seminar. — Stickelberger : Analyt. Mechanik, Höhere ebene Kurven ; Seminar. — Weingarten : Theorie der Deformation der krummen Oberflächen. — Loewy : Die technischen Grundlagen des Versicherungswesen ; Uebungen dazu ; Algebr. Analysis ; Besprechung algebr. Fragen. — Königsberger : Elemente der partiellen Differentialgleichungen und ihre physikalischen Anwendungen, mit Uebungen.

Giessen ; *Universität.* — Pasch : Funktionentheorie ; Seminar. — Netto : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Differentialgeometrie, 2 ; Determinanten, 2 ; Seminare. — Grassmann : Synthet. Geometrie, 3 ; Darst. Geometrie mit Uebungen II, 2 + 3. — Fromme : Geometrische und physikalische

Optik, 4; Mathematische Geographie und Elemente der Astronomie, 2; Kolloquium.

Göttingen; *Universität.* — KLEIN: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, 4; Seminar. — HILBERT: Theorie der part. Differentialgleichungen, 4; Einführung in die Theorie der Funktionen unendlich vieler Variablen (Integralgleichungen), 2; Seminar. — MINKOWSKI: Funktionentheorie, 4; ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, 2; Seminar. — RUNGE: Graphische Methoden, insbesondere graphische Statik, 4; Uebungen dazu, 2; Seminar. — WIECHERT: Vermessungswesen II, Höhere Geodäsie, Nautik, Vorlesung und praktische Uebungen, 4; Thermodynamik, 4; Polarlicht, 1; Seminar; Geophysikalisches Praktikum. — PRANDTL: Hydrodynamik und Aerodynamik, 3; Seminar; Praktikum. — N. N.: Die mathematische Technik der Versicherungswesens, 3; Seminar; Arbeiten auf dem Gebiet der Störungstheorie. — SCHWARZSCHILD: Astrophysik, 3; Seminar. — AMBRONN: Sphär. Astronomie, 3; Uebungen für Anfänger: Beobachtungen auf der Sternwarte. — ZERMELO: Die mathematischen Grundlagen der Logik, 2. — HERGLOTZ: Algebra, 4; Uebungen in der Behandlung und Anwendung von Differentialgleichungen (mit Abraham und Carathéodory). — CARATHÉODORY: Differential- und Integralrechnung II, 4; Uebungen dazu. — KOEBE: Flächen 2. Grades mit Uebungen, 2; Konforme Abbildung, 2. — RIECKE: Seminar (ausgewählte Probleme der Mechanik). — VOIGT: Mechanik, 4. — ABRAHAM: Elastizitätstheorie, 2. — BESTELMEYER: Elektrizität und Materie, 1; Mathematische Ergänzungen hierzu, 1. — KRÜGER, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3, mit Uebungen.

Greifswald; *Universität.* — THOMÉ: Mechanik II, 4, Algebraische Flächen und Raumkurven, 2; Seminar. — ENGEL: Differentialgeometrie, 4; Uebungen dazu, 1; Theorie der Transformationsgruppen, 4; Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 1. Ordnung (Fortsetzung), 2; Seminar. — VAHLEN: Algebra, 4; Uebungen zur Algebra und Determinantentheorie, 1; Darstellende Geometrie. — MIE: Elementarmathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1. — HOLTZ: Mechanik mit Experimenten, 1; Physik der Gestirne, 1. — STARKE: Theoretische Mechanik, 2; Uebungen dazu. — SCHREBER: Masse und Messen, 2.

Halle; *Universität.* — CANTOR: Theorie der ellipt. Funktionen, 4; Ausgew. Kapitel der analyt. Mechanik, 2; Seminar. — WANGERIN: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, 4; Integralrechnung mit Uebungen, 4; Seminar. — GUTZMER: Variationsrechnung, 4; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Axonometrie und Perspektive; Seminar. — EBERHARD: Numerische Gleichungen und iterierte Funktionen, 2; Zahlentheorie II, 2; Mathematisches Kolloquium. — BERNSTEIN: Theorie und Anwendung der bestimmten Integrale, 4; Uebungen dazu, 1; Versicherungsmathematik, 1. — BUCHHOLZ: Mechanische Quadratur, 1; Sphär. Astronomie und Theorie der astron. Instrumente, 1; Anwendung der Variationsrechnung auf Himmelsmechanik, 1. — BERNDT: Mathem. Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1.

Hannover; *Technische Hochschule.* — KIEPERT: Höhere Mathematik I, 10; Variationsrechnung, 1; Geometrie der Lage, 2. — STÄCKEL: Höhere Mathematik I B, 6; Vektoranalysis, 1; Praxis der trigonometrischen Reihen, 1. — RODENBERG: Darst. Geometrie, I, 9; Darst. Geometrie II, 9. —

Wieghardt : Grundzüge der höheren Mathematik für Architekten und Chemiker, 4.

Heidelberg ; *Universität.* — Koenigsberger : Analyt. Mechanik, 4 ; Ausgew. Kapitel der Integralrechnung, 2 ; Elliptische Funktionen, 2; Seminar. — Cantor. Differential- und Integralrechnung, 4 ; Uebungen dazu, 1 ; Politische Arithmetik, 2. — Koehler : Analyt. Geometrie des Raumes, 4. — Boehm : Ebene und sphär. Trigonometrie und verwandte Zweige der Elementarmathematik, 4 ; Uebungen zur analyt. Mechanik, 2. — Bopp : Ausgew. Kapitel aus der Geschichte der Mathematik, 1 ; Lektüre einer klassischen mathematischen Arbeit, 1. — Valentiner : Theorie der Bahnbestimmung II, 3.

Jena ; *Universität.* — Thomae : Differentialgleichungen, 4 ; Seminar. — Haussner : Integralrechnung mit Uebungen, 5 ; Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Algebra, 4 ; Proseminar ; Seminar. — Frege : Analyt. Mechanik, 4 ; Begriffschrift, 1. — Rau : Graphostatik, 3 ; Graphische Uebungen, 3 ; Technische Thermodynamik, 3 ; Demonstrationen und Uebungen dazu. — Knopf : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3 ; Sphär. Astronomie, 3. — Auerbabh : Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, 4.

Karlsruhe ; *Technische Hochschule.* — Schur : Darst. Geometrie I, II mit Übungen ; Graph. Statik mit Übungen. — Wedekind : Höh. Mathematik I mit Übungen. — Krazer : Höh. Mathematik II ; Ellipt. Funktionen. — Faber : Übungen in den Grundlehren der höh. Mathematik ; Arithmetik und Algebra ; Ebene und sphär. Trigonometrie ; Elementare und analytische Geometrie des Raumes. — Heun : Mechanik mit Übungen ; Mechanisches Seminar ; Elemente der Mechanik ; Elementarmathematik. — Haid : Praktische Geometrie ; Höhere Geodaesie ; Methode der kleinsten Quadrate. — Sieveking : Einführung in die mathematische Physik.

Kiel ; *Universität.* — Pochhammer : Theorie der algebr. Kurven und Flächen, 3 ; Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen, 3 ; Seminar. — Heffter : Elemente der Algebra und Determinantentheorie, 3 ; Differentialgeometrie, 4 ; Seminar. — Landsberg : Integralrechnung, 4 ; Uebungen dazu ; Ausgew. Kapitel der Theorie des Potentials und der partiellen Differentialgleichungen, 3. — Weinnoldt : Ausgew. Kapitel der technischen Mechanik, besonders graphische Statik, 3. — Harzer : Ueber neuere Resultate auf dem Gebiete der Störungstheorie, besonders über Poincarés Arbeiten, 4 ; Ueber Interpolationsrechnung, 1. — Kobold : Methode der kleinsten Quadrate, 2 ; Uebungen auf der Sternwarte. — Strömgren : Astronomische Geographie, 1 ; Spezielle Störungen, 1.

Königsberg ; *Universität.* — Meyer : Analyt. Geometrie des Raumes, 3 ; Uebungen dazu, Ellipt. Funktionen, 4 ; Seminar. — Schœnflies : Integralrechnung, 4 ; Einführung in die darst. Geometrie, 2 ; Uebungen dazu, 2 ; Seminar. — Saalschütz : Einführung in die algebr. Analysis, 4 ; Untersuchungen über die Gleichungen zwischen den Anfangsgliedern von Differenzreihen, 2 ; Algebr. Uebungen. — Battermann : Einleitung in die Mechanik des Himmels, 2 ; Allgemeine Astronomie, 1. — Cohn : Sphärische Astronomie, 3 ; Die Figur der Erde, 1.

Leipzig ; *Universität.* — Neumann : Analyt. Mechanik, 4 ; — Mayer : Variationsrechnung, 4. — Hölder : Ellipt. Funktionen, 4 ; Seminar. — Rohn :

Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Darst. Geometrie, 2; Uebungen dazu (mit Liebmann), 2. — HAUSDORFF: Differential- und Integralrechnung, 4; Uebungen dazu. — LIEBMANN: Theorie und Anwendung der Determinanten, 2; Nichteuklidische Geometrie, 2. — BRUNS: Instrumentenkunde, 4; Praktische Analysis, 2; Uebungen auf der Sternwarte (mit Peter). — PETER: Stellarastronomie, 2.

Marburg; *Universität.* — HENSEL: Zahlentheorie, 4; Ellipt. Funktionen, 3; Proseminar; Seminar. — NEUMANN: Algebr. Auflösung der Gleichungen, 4; Analyt. Mechanik II, 2; Seminar. — v. DALWIGK: Integralrechnung, 4; Uebungen dazu; Darstellende Geometrie II, 2; Graphische Statik, 2. — JUNG: Algebr. Analysis, 3; Grundlagen der Geometrie, 1. — FUETER: Flächentheorie, 3; Komplexe Multiplikation, 1.

München; *Universität.* — LINDEMANN: Differentialgleichung, 5; Theorie der Abelschen Funktionen, 5; Seminar. — VOSS: Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Analyt. Mechanik I, 4; Seminar. — PRINGSHEIM: Elementare Theorie der unendlichen Reihen und analogen Grenzprozesse, 4; Elemente der Funktionstheorie, 5. — DŒHLEMANN: Darst. Geometrie I, 5: Uebungen dazu, 3; synth. Geometrie, 4; Uebungen dazu, 1; Die Linie und das Licht als Mittel der Raumdarstellung in der bildenden Kunst. — BRUNN: Mengenlehre, 4. — HARTOGS: Integralrechnung und Ergänzungen zur Differentialrechnung, 6. — PERRON: Elementare Geometrie und Trigonometrie, 3. — SOMMERFELD: Kinetische Gastheorie, 3; ausgewählte Fragen der Thermodynamik, 2; Seminar. — GRÆTZ: Ueber die Fortschritte der exakten Wissenschaften, 1. — v. SEELIGER: Die Grundlehren der Astronomie, 4; Astronomisches Kolloquium. — GROSSMANN: Sphärische Astronomie II, 2; Uebungen dazu.

München; *Technische Hochschule.* — v. BRAUNMÜHL: Höh. Mathematik I mit Übungen; mathematisch-historisches Seminar. — v. DYCK: Höh. Mathematik III mit Übungen; Funktionentheorie nach Cauchy und Riemann; Seminar. — FINSTERWALDER: Grundzüge der höh. Mathematik mit Übungen; Kurventheorie; Seminar. — BURMESTER: Darst. Geometrie mit Übungen. SCHMIDT: Vermessungskunde mit Praktikum; Landesvermessung; Katastertechnik; Geodätisches Praktikum III; Kartierungsübungen. — FÖPPL: Techn. Mechanik II (graphische Statik) und III (Festigkeitslehre); Übungen zur graph. Statik. — KUTTA: Elementare Mathematik mit Übungen; Trigonometrie. — BISCHOFF: Ausgleichungsrechnung (Praktikum); Mechanisches und graphisches Rechnen. — FISCHER: Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung. — GROSSMANN: Elemente der Astronomie.

Münster; *Universität.* — KILLING: Differential- und Integralrechnung II, 4; Uebungen dazu; Analytische Mechanik I, 4; Unterseminar. — v. LILIENTHAL: Analyt. Geometrie II, 4; Krümmungstheorie der Kurven und Flächen, 4; Oberseminar. — DEHN: Darst. und synth. Geometrie mit Uebungen, 6; Elementare Algebra, 2. — PLASSMANN: Methode der kleinsten Quadrate; Sphär. Trigonometrie und sphär. Astronomie; Ueber den Mond; Uebungen im astronomischen Beobachten und Rechnen. — HEYDWEILLER: Elementarmathematische Ergänzungen zur Elementalphysik.

Rostock; *Universität.* — STAUDE: Differential- und Integralrechnung, 4; Ellipt. Funktionen, 4; Seminar. — WEBER: Vektoranalysis, 1; Uebungen dazu: Physikalisches Seminar, 1.

Strassburg; *Universität.* — Reye: Analyt. Geometrie des Raumes (Neuere Methoden); Mathematische Theorie der Elastizität fester Körper; Seminar. — Weber: Differential- und Integralrechnung; Differentialgleichungen der mathematischen Physik; Seminar. — Simon: Grundbegriffe der Mathematik (und Mechanik). — Wellstein: Ausgew. Kapitel der Funktionentheorie; Determinanten und Matrizen; Seminar. — Timerding: Anal. Geometrie der Ebene; Uebungen dazu; Graphische Statik; Uebungen dazu; Vektoranalysis; Seminar. — Epstein: Einführung in die höhere Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften; Seminar. — Becker: Bahnbestimmung der Planeten, Kometen und Meteore; Elemente der höheren Geodäsie: Astron. Kolloquium; Astron. Beobachtungen. — Wirtz: Ausgewählte Kapitel aus der Astrophysik.

Stuttgart; *Technische Hochschule.* — Mehmke: Darst. Geometrie mit Uebungen; Analyt. Mechanik mit Übungen; Seminar. — Reuschle: Kurvendiskussion in Beispielen; Analyt. Geometrie des Raumes; Ausgew. Kapitel aus der neueren analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes einschliesslich Invariantentheorie; Differential- und Integralrechnung II mit Übungen; Seminar. — Bretschneider: Repetitionen in niederer Mathematik. — Wölffing: Elemente der Differential- und Integralrechnung mit Übungen; Funktionentheorie I. — Roth: Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde. — Stübler: Niedere Analysis; Auflösung numerischer Gleichungen; Über die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. — Fischer: Trigonometrie mit Übungen. — Kriemler: Technische Mechanik mit Übungen. — Hammer: Praktische Geometrie mit Übungen; Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen; Abbildungen der Erdoberfläche auf die Ebene (Kartenprojektionen) mit Übungen; Höhere Geodäsie.

Tübingen; *Universität.* — von Brill: Einführung in die höhere Mathematik, 4; Theorie der algebraischen Kurven, 3; Seminar. — von Stahl: Höhere Analysis II, 4; Partielle Differentialgleichungen, 3: Seminar. — Maurer: Theorie der Binärformen, 2; Darst. Geometrie, 1; Uebungen dazu, 2.

Würzburg; *Universität.* — Prym: Differentialrechnung mit Einleitung in die höhere Analysis, 4; Uebungen dazu; Seminar. — Rost: Theorie der algebr. Kurven, 3; Axonometrie und Perspektive, 1; Invariantentheorie, 4; Sphär. Astronomie mit prakt. Uebungen auf der Sternwarte, 2; Proseminar: a) Analyt. Geometrie der Ebene, 2; b) Determinantentheorie, 2; Seminar; a) Nichteuklidische Geometrie, 2; b) Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten (täglich). — v. Weber: Part. Differentialgleichungen, 4; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Ergänzungen und Uebungen zur Geometrie der Kegelschnitte, 2.

ANGLETERRE

Cambridge; *University.* — List of Lectures proposed for Mathematics. The courses of lectures will begin as follows: in the *Michaelmas Term* on Monday October 14, *Lent Term* on Thursday January 16, *Easter Term* on Monday April 27. — Forsyth: Differential Geometry; 3. — G.-H. Darwin: Dynamical Astronomy, (Michaelmas Term, 3); Figure of the Earth (Elementary) and Orbits of Planets (Lent Term, 3). — R. S. Ball : Planetary Theory (M. T., 3) ; Theory of Screws (L. T., 3). — Larmor : Electricity and Magnetism. (M. T., 3) ; Electrodynamics with optical applications (L. T., 3) ; Thermodynamics and Theory of Gases. (Short Course.) (E. T., 3). — Hinks : Demonstrations in Practical Astronomy. — *Observatory* : Practical work. — Thomson : Properties of Matter (M. T., 3) ; Electricity and Matter (M. T., 2) ; Electricity and Magnetism (L. T. & E. T., 3) ; Discharge of Electricity through Gases (L. T., 2). — Searle : Heat. 9 (M. T. 3) ; Electrical and Magnetic Measuraments L. T. & E. T., 3). — Wilson : Light. (M. T. & L. T., 3). — Hobson : Spherical Harmonics and Allied Functions (M. T., 3) ; Differential Equations and Expansions of Mathematical Physics (L. T., 3). — Baker : Introduction to Theory of Functions (M. T., 3) ; Theory of Groups (M. T., 3) ; Solid Geometry (for Part I (L. T., 3) ; Theory of Functions (L. T. & E. T., 3). — Herman : Hydrodynamics. — Richmond : Analytical Geometry (M. T., & L. T., 3) ; Projective Geometry (E. T.). — Whitehead : Principles of Mathematics (M. T. & L. T) ; Non-Euclidean Geometry. — Barnes : Linear Differential Equations (M. T.) ; Hypergeometric Series (L. T.). — Berry : Elliptic Functions, Bessel Functions and Fourier Series (for Part I) (L. T.) ; Elliptic Functions (for Part II) (L. T.) ; Elliptic Functions (Theory of Transformation) (E. T.). — Bennet : Line Geometry (L. T.). — Munro : Hydrodynamics and Sound (M. T.) ; Line Geometry (E. T.). — Bromwich : Potential Theory and its Applications (M. T. & L. T.). — Grace : Invariants and Geometrical Applications (M. T., 3). — Young : Theory of Invariants (L. T.) ; Discontinuous Groups (L. T.). — Hardy : Integral Functions (E. T.).

AUTRICHE-HONGRIE

Kolozvar (Hongrie) ; *Université*. — Schlesinger : Surfaces et courbes gauches, 5 ; Mécanique céleste, 3 ; Séminaire, 2. — Valyi : Analyse algébrique, 3 ; Trigonométrie, 2 ; Courbes et surfaces algébriques, 3 ; Exercices, 1 ; Séminaire, 1. — Fejér : Calcul différentiel et intégral, 4 ; Série de Fourier, 2 ; Exercices, 1. — Klug : Géometrie descriptive I, 2 ; II, 2 ; Géometrie projective, 2 ; Exercices. 2. — Farkas : Mécanique analytique, 4 ; Théorie des vecteurs, 3 ; Séminaire, 2.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

(Suite.)

University of Chicago (October 1 to June 15). The total number of hours is indicated. — E. H. Moore : Selected chapters in analysis, 48 h. ; Theory of functions of a complex variable, 24 ; Seminar, theory of functions of a real variable, 24. — O. Bolza : Advanced integral calculus, 96 ; Calculus of variations, 96. — H. Maschke : Solid analytics and determinants, 48 ; Algebraic analysis, 48 ; Projective synthetic geometry, 48 ; Differential geometry, 96 ; Partial differential equations, 48. — L. E. Dickson : Finite groups with applications to algebra and linear substitution groups, 96. — H. E. Slaught : Differential equations with applications, 48. — J. W. A. Young : Introduction to the theory of numbers, 48. — A. C. Lunn : Analytic mechanics, 48.

— K. Laves : Analytic mechanics, 96. — F. R. Moulton : Introduction to celestial mechanics, 96 ; Planetary perturbations, 96.

Harvard University (Cambridge, Mass.) — W. E. Byerly : Differential et integrel calculus, II, 3 ; Trigonom. series (with Prof. Peirce) 3. — Peirce : Hydromechanics, 3, — Osgood : Elements of mechanics, 3 ; Infinite series et products (first half year), 3 ; Theorie of functions of a complex variable (second half year) 3. — M. Bôcher : Introduction to modern geometry and modern algebra, 3 ; Vector analysis and quaternions, 3 ; The proporties of polynomials (first half year), 3 ; Definite integrals and integral equations (second half year) 3. — Bouton : Elementary theory of differential equations (second half year) 3 ; Geometric transformations, 3. — Whittemore : Theory of functions I, 3 ; Theory of the figure of the earth (second half year), 3. — Coolidge : Algeb. plane curves, 3.

University of Illinois. — Shattuck : Differential equations and calculus of variations, 3. — Townsemd : Theory of functions, 3 ; Seminar, 2. — Miller : Theory of numbers, 3 ; Theory of determinants, 2. — Rietz : Theory of average and actuarial theory, 3. — Stebbins : Method of least squares, 2. Haskins : Solid analytic geometry, 3 ; Spherical harmonics and the potential function, 3. — Miss White : Teacher's course, 2. — Neikuk : Theory of equations, 3. — Sisam : Modern geometry and algebraic surfaces. 3 Crathorne : Partial differential equations, 2.

Indiana University. — R. J. Aley : Theory of numbers, 2 ; Differential equations, 3 (autumn, winter) ; Mathematical pedagogy, 2 (s). — S. C. Davisson : Modern analytic geometry, 2 (a, w) ; Theory of surfaces, 2 ; Noneuclidean geometry, 2 (w, s). — D. A. Rothrock : Advanced calculus, 3 ; Quaternions with applications, 3 (a, w) ; Potential functions, 2 (w, s). — U. S. Hanna : Substitution groups, 3 (a) ; Galois theory of equations, 3 (w). — C. Haseman : Partial differential equations, 3.

SUISSE

Basel ; *Universität.* — Hagenbach-Bischoff : Die Begriffe der Mechanik in der Physik. — H. Kinkelin : Diff.- u. Integralrechn., 3 ; best. Integrale, 2 ; Wahrscheinlichkeits- u. Versicherungsrechn., 2 ; Uebg. math. Sem., 1. — K. von der Mühll : Analyt. Mechanik mit Uebg., 4 ; math. Physik. — Riggenbach : Sphär. Trigonometrie u. Einleit. in die sphär. Astronomie. — Flatt : Päd. Sem., math. Abt., 3 ; Repet. der Geometrie, 1 ; math. Uebg., 1. — Spiess : Analyt. Geometrie des Raumes, 4.

Bern ; *Universität.* — Graf : Kugelfunkt. m. Repetit., 3 ; Besselsche Funkt. m. Repetit., 3 ; Bestimmte Integr. m. Repetit., 3 ; Funktionentheorie, 2 ; Elem.-Math., 3 ; Differentglg., 2 ; Renten- u. Versicherungsw., 2 ; Different.- u. Integralrechn., 2 ; Math. Seminar m. G. Huber, 2. — Ott : Integralrechn., 2 ; Analyt. Geom. d. Ebene, II. Teil, 2. — G. Huber : Mechanik d. Himmels, 2 ; Fouriersche Reihen u. Integr. m. Anwend. auf d. Physik, 3 ; Theorie d. Raumkurven u. abwickelbaren Flächen, 2 ; Theorie u. Anwendung d. Determinanten, 1 ; Math. Seminar m. Graf, 1. — Benteli : Darst. Geom., Kurven, Strahlenflächen, regul. Polyeder., 2 ; Darst. Geom., Ueb.

u. Repetit., 2; Prakt. Geom., I. Teil. 1; Konstrukt. Perspektive. 1. — Moser : Theorie d. Versicherungs-Reserven ; Math.-versicherungsw. Seminar, 2. — Crelier : Synth. Geom. d. Raumes, 2; Chapitres choisis de Géométrie, 2. — Bohren : Anwendung best. Integrale u. d. Versicherungswesen, 2.

Genève ; *Université*. — C. Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3. Exerc. 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Conférences d'analyse, 2. Exerc. 2. — H. Fehr : Eléments de mathématiques supérieures, 3. Exerc. 2 ; Géométrie projective, 1 ; Conférences d'algèbre et de géométrie. 1 ; Séminaire de Géométrie supérieure, 2. — R. Gautier : Astronomie générale, 2. — R. de Saussure : Mécanique des fluides. 1 ; Géométrie du mouvement, 2.

Lausanne ; *Université*. — Amstein : Calcul diff. et intégral ; Exerc. ; Théorie des fonctions. — Joly : Géométrie descriptive ; Epures ; Géométrie analyt. ; Géométrie de position ; Courbes planes. — Mayor : Mécanique ration.; Exerc.; Phys. mathem.; Statique graphique. — Maillard : Calcul infinitésimal appliqué aux sciences ; Astronomie sphérique; Astronomie mathém. et mécanique céleste. — Jaccottet : Chap. choisis de la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Neuchâtel ; *Académie*. — Isely : Calcul infinitésimal ; Géométrie supérieure. — Kollros : Algèbre supérieure. — Le Grand Roy : Astronomie ; Elém. de mécanique céleste. — Jaquerod : Mécanique analyt. ; Phys. mathém. — Gaberel : Problèmes de Mécanique ; Th. des fonctions.

Zurich ; *Ecole polytechnique*. — Section normale des sciences mathématiques. — Hirsch : Differentialrechn., 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2 ; Diff. gleichungen, 4; Uebgn. dazu, 1 ; Lineare Diff. gleichungen, 2. — Franel : Calcul différentiel, 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 2 ; Th. des équations différentielles, 4 ; Exerc., 1. — Geiser : Analyt. Geometrie, 4 ; Repet., 1. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebg., 4 ; Geometrie d. Lage, 4. — Lacombe : Géom. descript., 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4 : Géom. de Position avec exerc., 3. — Hurwitz u. Lacombe : Mathem. Seminar, 2. — Hurwitz : Zahlentheorie, 4. — Herzog : Mechanik II, 4; Repet., 1; Uebgn., 2. — Rosenmund : Vermessungskunde, 3; Repet., 1; Erdmessung, 2; Geodät. Praktikum, 2. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 3 ; Theorie der Finsternisse, 2.

Cours libres : Beyel : Rechenschieber mit Uebgn., 1 ; Darst. Geometrie, 2 ; Projekt. Geometrie, 2. — Dumas : Calcul des probabilités, 2. — J. Keller : Repet. d. darst. Geometrie, 2 ; Uebgn. in Diff. u. Integralrechn. — Kraft : Geom. Kalkül I, 2; II, 2; geschichtl. Entwicklung der Mathematik, 1, 1 ; Das graphische Rechnen.

Zurich ; *Universität*. — H. Burckhardt : Diff. u. Integralrechn., 4 ; Uebgn., 1 ; Analyt. Mechanik, 2; Vektoranalysis, 2; Sem , 1. — Wolfer : (voir ci-dessus). — Weiler : Darst. Geom. I. 4 ; analyt. Geometrie, 4 ; math. Geographie, 2. — Gubler : Alg. Analysis, 2 ; Sphär. Trigonometrie, 1 ; Determinanten, 1.

BIBLIOGRAPHIE

W. M. Baker. — **Elementary Dynamics**, vol. relié, 13 × 19 cm, 318 p.; 4 sh 6; Georges Bell and Sons, Londres.

C'est la deuxième édition de ce petit traité. Voici une brève énumération des matières traitées dans les 23 chapitres :

La vitesse, l'accélération; composition des vitesses et des accélérations. Mouvement rectiligne et curviligne ; mouvement des projectiles.

Le travail, la puissance. — Le choc des corps.

Les procédés graphiques sont largement employés dans l'étude des mouvements variés et dans la balistique.

Le livre donne une bonne idée de l'allure générale de l'enseignement de la dynamique en Angleterre. Chaque chapitre est accompagné de problèmes. Les solutions sont données dans un appendice

O. D. Chwolson. — **Traité de Physique**, ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande, suivie de Notes sur la Physique théorique par E. et F. Cosserat. — *Tome Premier*, en 3 fascicules, gr. in-8°; 1er fasc. 407 p., 16 fr.; 2me fasc. 153 p., 8 fr.; 3me fasc. 312 p., 12 fr. — Librairie Hermann, Paris.

Ce traité de Physique a été traduit sur les éditions russe et allemande par M. Davaux; il a été entièrement revu et augmenté par l'auteur. L'accueil qu'il rencontrera auprès des lecteurs de langue française sera certainement des plus favorables et nous tenons à insister tout particulièrement sur cette importante publication. On se trouve en effet en présence d'un traité moderne conçu sur un plan entièrement nouveau quant à la forme et au fond de l'exposé.

L'ouvrage comprendra quatre volumes. Le premier volume de l'édition française est paru ; il a été publié en trois fascicules. Le *premier fascicule* (407 p.) débute par des considérations générales sur l'objet et les hypothèses de la Physique et sur les états de la matière ; il est consacré à la mécanique générale et aux méthodes et instruments de mesure. Il se termine par une Note sur la théorie des intégrateurs par M. E. Davaux. C'est en quelque sorte une introduction générale à l'étude de la Physique ; nous la signalons particulièrement à l'attention des professeurs et des étudiants. Ils y trouveront entre autres, une excellente étude du mouvement vibratoire harmonique et de la propagation des vibrations par rayonnement, ainsi qu'une intéressante Note de MM. Eug. et Fr. Cosserat sur la Dynamique du point et du corps invariable.

Voici les titres des chapitres de la mécanique :

Du mouvement. — De la force. — Travail et énergie. — Mouvement vibratoire harmonique. — Propagation des vibrations par rayonnement. — La gravitation universelle. — Eléments de la théorie du Potentiel. — La pesanteur. — Dimensions des grandeurs physiques. — Note de MM. Eug. et Fr. Cosserat.

Les méthodes et instruments de mesure donnent lieu aux chapitres suivants : Remarques générales sur les mesures physiques. — Quelques instruments auxiliaires. — Mesure des longueurs, des surfaces, des angles, des volumes, des forces et des masses, du temps, de l'intensité de la pesanteur et de la densité moyenne de la terre. — Note sur les intégrateurs.

L'auteur passe ensuite, dans le *second fascicule*, à l'étude de *l'état gazeux des corps*, puis il consacre le *troisième fascicule* à *l'état liquide et l'état solide des corps*. En voici les divisions :

Etat gazeux des corps : La densité des gaz. — La tension des gaz. — Baromètres, manomètres et machines pneumatiques. — Corps à l'état gazeux au contact avec des corps à l'état gazeux, liquide ou solide — Principe de la théorie cinétique des gaz. — Le mouvement des gaz et leur dissociation.

Etat liquide des corps : Propriétés fondamentales et constitution des liquides. — Densité, compressibilité et tension superficielle des liquides. — Cohésion et capillarité. — Dissolution des corps solides et des liquides. — Diffusion et osmose. — Frottement à l'intérieur des liquides. — Mouvement des liquides. — L'état colloïdal.

L'Etat solide des corps. — La matière à l'état solide. — Densité des corps solides. — Déformation des corps solides. — Frottement et choc.

Toutes ces questions sont présentées avec beaucoup de précision et fournissent un très bon tableau de l'état actuel des recherches. L'auteur a toujours soin de les accompagner de nombreuses indications bibliographiques destinées à guider l'étudiant dans l'étude de sujets à approfondir.

Il va de soi que l'auteur suppose connus du lecteur les éléments d'Analyse.

Le second volume sera consacré à l'énergie rayonnante ; le troisième traitera de la chaleur et le quatrième de l'électricité.

H. F.

Ch. Fabre. — **Traité pratique de Photographie stéréoscopique.** — 1 vol. gr. in-8°, 207 p. ; 6 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L'Enseignement mathématique a consacré une série de notes aux vues stéréoscopiques et à leur emploi dans les écoles. Il convient de les compléter en signalant encore cet ouvrage sur la photographie stéréoscopique. Il s'agit d'un traité pratique qui initie le lecteur d'une manière rapide et claire à l'obtention des images stéréoscopiques. L'auteur examine d'abord les appareils et leurs accessoires, puis il étudie les négatifs et les positifs stéréoscopiques, les épreuves en couleurs, ainsi que les appareils d'observation. Ces nombreux renseignements et conseils seront très précieux à ceux qui font de la photographie stéréoscopique.

La préparation des vues stéréoscopiques par la photographie se perfectionne chaque jour et elle se développera toujours plus, grâce aux nouvelles plaques donnant d'une façon complète et absolument remarquable la photographie des couleurs. Le volume de M. Fabre est donc appelé à rendre d'utiles services.

W. Felgentraeger. — **Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage.** — 1 vol. VI et 310 p. gr. in-8°, 125 fig., relié ; 8 Mk. ; Teubner., Leipzig.

La balance de précision, qui parmi tous les appareils de mesure permet d'effectuer les comparaisons les plus exactes, forme le sujet de nombreuses publications anciennes et récentes. En satisfaisant aux exigences toujours croissantes des différentes branches de la science et de la technique, la construction de ces instruments est arrivée à un haut degré de perfectionnement. Cependant et malgré l'importance du sujet, la plupart des traités de physique et de mécanique, visant des buts plus généraux, se bornent à quelques indications théoriques et quelques descriptions sommaires.

Le livre de M. Felgentraeger, réunissant en un seul volume les nombreuses questions de détail rattachées à ce sujet, fait donc œuvre utile et sera accueilli avec reconnaissance. Voici un résumé des matières traitées dans cet ouvrage : Théorie (statique et dynamique) de la balance.—Le fléau.—Axes, suspensions, plateaux. — Dispositifs des lectures. — Fourchette. — Mécanismes pour poser, échanger, déplacer les poids — La cage. — Les instruments complets. — Emplacement, ajustement, détermination des limites d'exactitude et des constantes d'une balance — Pesées et méthodes de pesées. — Tables numériques.

L'auteur part d'une théorie générale qui suppose les axes des plateaux et l'axe du fléau disposés d'une façon quelconque. L'équation d'équilibre à laquelle on parvient est fort compliquée. On la simplifie en admettant le parallélisme et l'horizontalité des trois axes approximativement réalisés. En outre l'angle de déviation est supposé petit. L'auteur en néglige toutes les puissances supérieures à la troisième et il fait remarquer que pour les applications, il suffit de tenir compte de la première puissance seulement. La discussion des conditions d'exactitude, de justesse et de sensibilité est approfondie plus qu'on ne le fait habituellement.

Au point de vue dynamique l'auteur envisage l'oscillation de la balance comme résultant des oscillations des deux charges et de celle du fléau et il tient compte de l'amortissement. Il résume ensuite les conclusions de la théorie complète en trois conditions, qu'il trouve contradictoires. La réalisation exacte des conditions théoriques est donc impossible, et c'est au constructeur qu'incombe la tâche de chercher une issue convenable. Il le fera de différentes façons selon le but auquel la balance est destinée, c'est-à-dire suivant la grandeur de la charge maximum et suivant la précision exigée.

A ces considérations théoriques se rattache l'étude critique des diverses parties d'une balance. Nous ne suivrons pas l'auteur dans cet exposé minutieux qui forme la plus grande partie de l'ouvrage, mais nous en recommandons la lecture. Le lecteur, même s'il n'était pas d'accord avec toutes les vues de l auteur, puisera dans le livre des renseignements très variés et très intéressants sur le progrès réalisé à l'heure actuelle et sur des problèmes dont la solution est réservée à l'avenir. A. Schidlof. (Genève).

Ernest Lebon. — **Géométrie cotée et Géométrie descriptive.** Conforme aux Programmes du 27 juillet 1905, classes de première C et D. — 1 vol. in-8°, 190 p., 3 fr. ; Delalain frères, Paris.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler les ouvrages de Géométrie descriptive de M. Lebon. Dans cette nouvelle édition, entièrement refondue, l'auteur a tenu à suivre l'ordre général des Programmes du 27 juillet 1905. Conformément à ces programmes l'ouvrage débute par les principes de Géométrie cotée (p. 1-50) ; la seconde partie est consacrée à la projection orthogonale sur deux plans : notions et problèmes concernant le point, la droite, le plan et les polyèdres.

Ce manuel constitue un excellent livre de texte dans une première étude de la Géométrie descriptive. Il prépare en même temps le lecteur au *Traité* de Géométrie descriptive du même auteur. H. F.

KLEIN et SCHIMMACK. — **Der mathematische Unterricht an höheren Schulen.** Teil I : Von der Organisation das mathem. Unterrichts. — 1 vol. relié, in-8°, 236 p.; Teubner, Leipzig.

On sait qu'en Allemagne l'enseignement secondaire supérieur fait en ce moment l'objet d'études très approfondies auxquelles prennent part professeurs et savants des divers milieux intéressés, depuis l'enseignement élémentaire jusqu'à l'université. Cette coopération donne une grande importance aux débats ; il est réjouissant de constater qu'elle existe non seulement entre les divers degrés d'une même branche, mais aussi entre les branches connexes. Il suffit de rappeler à ce propos les travaux de la commission d'enseignement nommée par les naturalistes et médecins allemands.

M. Klein y a pris une part importante. Il estime avec raison que l'Université doit collaborer à ces réformes et, après avoir pris position dans de nombreux débats publics, il a développé ces questions dans des conférences universitaires qui ont été rédigées par M. Schimmack.

La *première partie* de ses *Conférences sur l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires* donne un exposé d'ensemble de l'organisation de l'enseignement depuis les premières notions jusqu'aux mathématiques supérieures. L'auteur compte pouvoir consacrer un deuxième volume à certaines questions de l'enseignement de l'Arithmétique et de l'Algèbre et un troisième volume à la Géométrie, de manière que les maîtres soient bien renseignés sur les développements et la portée de certains chapitres des mathématiques.

Dans l'Introduction, l'auteur rappelle les récentes publications et conférences consacrées à ces réformes, puis il donne un tableau des différentes catégories d'écoles en Prusse. Dans les chapitres suivants, il examine tour à tour l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires, dans les établissements secondaires supérieurs, dans les écoles de jeunes filles, dans les écoles techniques moyennes et dans les établissements universitaires. Pour chacune de ces catégories, il étudie le plan d'études, les méthodes, les manuels, la formation des maîtres et les réformes désirables à l'heure actuelle. L'ouvrage se termine par la reproduction des rapports sur l'enseignement mathématique présentés à Breslau et à Meran.

Il est inutile d'insister longuement sur la portée de ces conférences très documentées que nous nous empressons de signaler à tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement mathématique. H. F.

FR. REIDT. — **Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen.** 2te Auflage, revidiert u. mit Anmerkungen versehen von Dr. H. SCHOTTEN. — 1 vol. in-8°, 269 p., G. Grote, Berlin.

L'ouvrage de Reidt sur la méthodologie des mathématiques est bien connu dans les pays de langue allemande où, depuis vingt ans, il fournit d'utiles conseils et renseignements à ceux qui débutent dans l'enseignement. Il a largement facilité la tâche du jeune maître en attirant son attention sur une foule de points très importants dans la pratique de l'enseignement et, grâce à cette nouvelle édition, il continuera à rendre de nombreux services.

Dans la première partie de l'ouvrage, l'auteur examine d'une manière générale ce que doit être l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires et supérieurs : but et méthodes de cet enseignement. Puis dans une seconde partie, la plus développée, il passe en revue l'enseignement des différentes branches mathématiques, depuis l'arithmétique jusqu'aux éléments du calcul différentiel et intégral.

Comme le fait remarquer très justement M. Schotten, qui a revu et annoté cette édition, l'auteur n'envisage que le côté purement logique des mathématiques, tandis que de nos jours il y a lieu de tenir compte en outre des applications, dans une large mesure, afin de montrer comment les mathématiques interviennent dans d'autres branches scientifiques. M. Schotten a tenu conserver à l'ouvrage sa forme primitive en se bornant à ajouter çà et là des annotations concernant principalement les nouveaux programmes.

H. F.

G. Vivanti. — **Elementi della teoria delle Funzioni poliedriche e modulari.** — 1 vol. double in-16, V-433 p., de la collection des manuels Hoepli; 3 L., Ulrico Hoepli, Milan.

MM. Poincaré et Klein, par leurs remarquables études sur les fonctions fuchsiennes et leurs profondes recherches touchant la théorie des équations différentielles linéaires, ont ouvert aux géomètres l'un des plus beaux et des plus vastes champs d'investigation de la science mathématique contemporaine. Hermite, avec ses travaux sur les fonctions modulaires, et M. Schwarz, en considérant l'inversion du rapport de deux solutions de l'équation hypergéométrique, avaient été des précurseurs.

L'élégant petit volume de M. Vivanti initie le lecteur à ces belles questions : il l'engage à pénétrer plus en avant dans le champ des fonctions polyédriques et modulaires et lui fait prévoir la riche moisson de découvertes que promet l'étude approfondie des fonctions automorphes générales.

Elémentaire, si l'on veut, ce livre suppose néanmoins une certaine maturité et exige que l'on soit au courant des principaux résultats de la théorie des fonctions, de celle des nombres, de la géométrie de situation et de l'algèbre supérieure. Il se compose de deux parties : la première traitant des groupes polyédriques et modulaire, la seconde, des fonctions correspondantes.

L'intérêt de la première gît dans le fait que M. Vivanti utilise systématiquement, et autant qu'il le peut, des méthodes géométriques. Ce procédé enlève, il est vrai, peut-être un peu de leur rigueur aux démonstrations. Mais, rendues ainsi plus intuitives, elles plaisent davantage et paraissent finalement, toutes choses égales d'ailleurs, plus convaincantes.

Au début, un exposé quelque peu sommaire et abstrait des propriétés générales des groupes finis, suivi de deux chapitres relatifs aux substitutions et pseudo-substitutions linéaires. Ce dernier terme désigne l'opération appelée par M. Klein substitution de seconde espèce et dont le propre est de transformer un point quelconque en un autre, image du premier par rapport à un cercle que définit l'opération elle-même. Viennent des considérations sur les polyèdres réguliers convexes, dont l'existence est admise sans autre et dont les propriétés servent à la définition complète des groupes polyédriques existants. Une projection stéréographique, sur le plan de la variable complexe, permet d'aboutir ensuite aux expressions analytiques des substitutions de chacun de ces groupes. Pour terminer un dernier chapitre, fort détaillé et suffisamment étendu, consacré au groupe modulaire et à ses sous-groupes. L'auteur, conformément à ses principes, évite de s'appuyer sur les propriétés du groupe arithmétique Il préfère, au contraire, aboutir à ce dernier après avoir pris comme point de départ le domaine fondamental correspondant.

La seconde partie comprend les fonctions qui se rattachent aux groupes précédents. L'auteur indique le moyen de les obtenir et après avoir étudié les relations auxquelles elles conduisent, fait voir comment elles interviennent dans la résolution des équations algébriques du troisième, du quatrième et du cinquième dégré.

Le manuel clair, net et précis de M. Vivanti, est, d'après son propre dire, une introduction aux célèbres leçons de M. Klein sur l'icosaèdre et les fonctions modulaires, dont la lecture se trouve, de la sorte, grandement facilitée. Il peut servir aussi de fil conducteur dans l'étude des mémoires originaux, qui, quels qu'ils soient, sont toujours d'un accès assez difficile, lorsque l'esprit, au préalable, n'a pas appris à s'orienter.

G. Dumas (Zurich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaires des principaux périodiques:

American Mathematical Monthly, (The), published unter the Auspices of the University of Chicago, edited by B. F. Finkel, Herb. Slaught & Léon E. Dickson. Vol. XIV, 1907.

Bibliotheca mathematica. Zeitschr. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften, herausgegeben von G. Eneström. 3. Folge, Band 7, Teubner, Leipzig.

Nos 3 et 4. — T. L. Heath : The fragment of Anthemius on burning mirrors and the « Fragmentum mathematicum Bobiense ». — Heinrich Suter : Über den Kommentar des Muhammed Ben Abdelbâqi zum zehnten Buche des Euklides. — G. Eneström : Über zwei angebliche mathematische Schulen im christlichen Mittelalter. — G. Eneström ; Die geometrische Darstellung imaginärer Grössen bei Wallis. — Gino Loria : Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens (270-281). — G. Eneström, A. Sturm, C. Grönblad : Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantor's « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen : Eine neue Schrift des Archimedes. — Yoshio Mikami : Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts. — H. Bateman : The correspondence of Brook Taylor. — G. Eneström : Über Bildnisse von Leonhard Euler. — David Eugène Smith : A mathematical exhibit of interest to teachers. — F. Rudio, G. Eneström,

A. Favaro : Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ». — Vermischte historische Notizen. — Anfragen. — Rezensionen. — Neu erschienene Schriften. — Wissenschaftliche Chronik.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXV. Paris.

Fasc. 1. — Etat de la Société Mathématique de France au commencement de l'année 1907. — Règlement voté à l'Assemblée générale, le 20 juin 1888, modifié à la séance du 10 janvier 1907. — L. Lecornu : Sur l'extinction du frottement. — G. Fontené : Extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres réticulés. — Ed. Maillet : Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville. — Félix Lucas : Note relative aux points d'intersection des courbes algébriques. — L. Remy : Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre. — Ch. Bioche : Sur les surfaces du troisième et du quatrième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une courbe de quatrième ordre et de quatrième classe. — T. Lalesco : Sur le groupe des équations trinomes. — A. Pellet : Construction des rayons de courbure d'une classe de courbes et de surfaces.

Fasc. 2. — Goursat : Sur les séries entières et les approximations successives. — Lecornu : Sur une généralisation du mouvement de Poinsot. — Barré : Sur un élément géométrique nouveau des surfaces. — Auric : Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle ambiguë du second degré. — Niewenglowski : Sur les équations

$$x^2 - ay^2 = 1 \quad \text{et} \quad x^2 - ay^2 = -1. —$$

Appell : Sur l'extinction du frottement. — Popovici : Sur le problème des multiplicateurs réciproques. — de Sparre : Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement de glissement. — Comptes rendus des séances.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. — Tome XXXI, 1907. Paris, Gauthier-Villars.

Janvier-juillet 1907. — G. Darboux : Sur deux mémoires de Poisson relatifs à la distribution de l'électricité. — G. Koenigs : Sur la formule d'Euler Savary et sa construction géométrique. — A. Myller : Sur les équations intégrales. — Lalesco : Sur la dérivée des potentiels de simple et de double couche. — R. Baire : Sur la non-applicabilité de deux continus à n et $n+p$ dimensions. — Bounitzki : Un système particulier d'équations intégrales. — A. Buhl : Sur de nouvelles applications de la théorie des résidus. — W. Wirtinger : Sur le théorème de M. Hadamard relatif aux déterminants. Comptes rendus et analyses. — Revue des publications académiques et périodiques.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer in Jena.-B. 16, 1907 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

1. Heft. — Satzungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für das Jahr 1907. — Kassenbericht. — Alfred Pringsheim : Über das Fourier'sche Integraltheo-

rem. — Fr. Meyer : Anwendung des erweiterten Euklid'schen Algorithmus auf Resultantenbildungen. — Georg. Landsberg : Über die Totalkrümmung. — W. Schlink : Über Stabilitätsuntersuchungen von Raumfachwerken. — A Voss. — Zur Erinnerung an Gustav Bauer.

2. Heft. — Otto Blumenthal : Über ganze transzendente Funktionen — G. Faber : Über Reihen nach Legendres'schen Polynomen. — Paul Koebe : Übec konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche. — G. Hessenberg : Potenzen transfiniter Ordnungszahlen. — Eugen Meyer : Über die Analogie zwischen der Geometrie der Punktprojektivitäten einer Geraden und der Geometrie der Kreise einer Ebene. — Oskar Perron : Was sind und sollen die irrationalen Zahlen ?— E. Lampe : Rede zur Enthüllungsfeier des Hauck-Denkmals.

3 u. 4. Heft. — Félix Müller : Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler. (Mit dem Bildnis Leonhard Eulers als Titelbild). — C. Juel : Über nicht-analytische Raumkurven. — R. v. Lilienthal : Über ebene Kurvennetze ohne Umwege. — P. Stäckel : Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen. — F. Hartogs : Über neuere Untersuchungen auf dem. Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln. — M. Krause : Über die Darstellung der stetigen Funktionen durch Reihen von ganzen rationalen Funktionen. — Reinhold Müller : Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene, — H.-E. Timerding : Wilhelm Ritter. — A. Voss : Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches. — Berichtigungen zum Nekrolog. « Zur Erinnerung an Gustav Bauer.

A signaler, en tête du nr 1 (p. XXIII-LIV), l'annuaire détaillé des membres, au nombre de 670 et contenant pour chacun d'eux la date de naissance avec des indications sur les études suivies et sur les fonctions dans l'enseignement,

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel, Georg Reimer, Berlin.

Band CXXXII. Heft I u. 2. — Georg Landsberg : Über Reduktion von Gleichungen durch Adjonktion. — Michael Bauer : Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Grössen. — Michael Bauer : Über Gleichungen ohne Affekt. — Rudolf Rothe : Untersuchungen über die geodatische Abbildung zweier Flächen konstanten Krümmungsmasses auf einander. — M. Lange : Die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln in einem zu ihrer Zentrallinie symmetrischen elektrostatischen Felde. — P. Kokott : Verallgemeinerung eine Satzes von Gudermann über sphärische, einander berührende Kreise. — J. Schur : Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. — Niels Nielsen : Sur les séries de fonctions cylindriques. — L.-W. Thomé : Über eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variationsrechnung. — C. Kostka : Bemerkungen über symmetrische Funktionen.

No 3. — H. Weber : Ueber zyklische Zahlkörper. — E. R. Neumann : Ueber eine neue Reduktionsmethode bei hydrodynamischen Problemen. — M. Stuyvaert : Congruences de triangles cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices. — E. Jacobsthal : Ueber die Darstellung der Primzählers der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate.

No 4. — L. Schlesinger : Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

— R. Fueter : Die Theorie der Zahlstrahlen II. — Felix Bernstein : Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. — R. Heger : Zur Geometrie auf der Kugel. — Osc. Perron : Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen. — Preisaufgabe der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für 1910.

Mathesis, Recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Série 3. Tome VII, 1907. Gand, Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

Janvier-Mai 1907. — M. Bertrand : Exposé élémentaire du mouvement elliptique des planètes. — N. Agronomof : Sur un quadrangle orthogonal. — C. E. Wasteels : Formule relative à certains volumes dans les quadriques à centre. — A. Claeys : Sur des points d'inflexions que l'on rencontre en stéréotomie. — A. Aubry : Notes historiques et analytiques. — J. Neuberg : Involution et évolution. — J. Neuberg : La trisection de Maclaurin. — J. Tummers : Sur les transversales angulaires d'un triangle. — C. Servais : Sur les quadriques homofocales. — Noaillon : Résolution graphique de l'équation du troisième degré.

Mémoires de la Société royale de Liège, 3e série, T. VI.

J. Fairon : Sur la représentation de la forme biquadratique binaire. — N. Stuyvaert : Sur les points singuliers des lieux géométriques. — J. Fairon : Remarques sur un faisceau de coniques. — A. Versluys : Sur les nombres pluckériens de la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques possédant des courbes doubles. — Kapteyn : Recherches sur les fonctions cylindriques. — G. Cesaro : Trajectoire lumineuse et distance zénithale dans une atmosphère fournie de couches planes parallèles. — A. Versluys : De l'influence d'un contact ordinaire ou stationnaire de deux surfaces sur la développable circonscrite à ces deux surfaces. — W. Kapteyn : Sur un calcul numérique d'une série. — G. Cesaro : Centre de gravité du triangle sphérique. — A. Gol : Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. — Neuberg : Sur l'hypocycloïde à non rebroussements.

Monatshefte für Mathematik u. Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — T. XVIII, 1907 ; Eisenstein u. Co ; Wien.

Fasc. 3 et 4. — P. Roth : Ueber Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden vom Geschlechte zwei und drei. — J. Plemelj : Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie. — J. Neuberg : Ueber orthologische Tetraeder. — G. Pick : Ueber die zu einer ebenen algebraischen Kurve gehörigen transzendenten Formen und Differentialgleichungen. — V. Furlan : Ueber das Mertenssche Postulat $|\sigma(n)| \leq \sqrt{n}$ — L. Klug : Ueber die Orte der Punkte, aus welchen ein Kreis durch spezielle Kegel projiziert wird. — E. Oekinghaus : Die Rotationsbewegungen der Langgeschosse während des Fluges. — P. Ernst : Ein Analogon zur Mannheimschen Kurve. — G. Pick : Zur Theorie der hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE
SUR LE THÉORÈME DE FERMAT

Non hic... qui abaco numeros...
scit risisse. Pers. 1.

Première Partie.

L'Arithmétique avant Fermat.

Le théorème de Fermat marque une ère décisive dans l'histoire de la théorie des nombres. Jusque là, celle-ci était surtout algébrique et consistait principalement dans l'analyse indéterminée et dans la recherche et les applications des identités, ce qui n'est qu'une partie, — importante il est vrai, — mais accessoire de cette science. Un coup d'œil sur l'histoire de l'arithmétique pure avant Fermat fera mieux sentir l'importance des découvertes de ce grand géomètre [1]. Il fournira une introduction historique au théorème de Fermat dont nous donnerons une étude élémentaire dans un prochain article.

C'est dans l'école de Pythagore que paraissent avoir été émises les premières considérations, — probablement plutôt senties que raisonnées, — sur les nombres *premiers* ou *composés*, les nombres *parfaits*, *amiables*, etc., ainsi que sur les *irrationnelles* et les *formes quadratiques*, dont l'avènement fut préparé par diverses remarques sur les développements des produits $(a \pm b)^2$ et $(a + b)(a - b)$, et par diffé-

[1] Si nous écrivions une histoire de la théorie des nombres, il y aurait lieu de signaler celles des nombres figurés, des nombres polygones, des suites sommables, des combinaisons, des différences, de la formule du binome, des suites récurrentes, des fractions continues, de la théorie des équations, toutes choses que la théorie des nombres met à contribution. Mais notre but est beaucoup plus modeste et ne vise que l'arithmétique proprement dite.

[2] Les trois entiers x, y, z forment ce qu'on appelle un *triangle rectangle en nombres entiers*, ou simplement un *triangle;* x et y en sont les *cathètes*, z, l'*hypoténuse*. Les Egyptiens s'étaient bien aperçus que le triangle 3, 4, 5 est rectangle, mais c'est Pythagore qui paraît avoir démontré et généralisé cette proposition arithmético-géométrique.

rentes solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ [2]. On voit donc posés, dès cette époque, les deux grands problèmes de la théorie des nombres : la composition arithmétique des nombres et leur représentation par une *forme*. Les premiers théorèmes étaient d'abord de simples remarques évidentes trouvées fortuitement ; de nouvelles propositions moins évidentes durent être justifiées pour en montrer la généralité ; et c'est ainsi que peu à peu se créa le mode de présentation des théories, mode qui acquit toute son ampleur chez Euclide, et est encore suivi aujourd'hui dans les livres élémentaires.

Toutefois cette arithmétique se ressentait de son origine géométrique : privée des secours de l'algèbre symbolique, elle empruntait celui de la géométrie ; aussi les énoncés abstraits étaient-ils traduits graphiquement, et les démonstrations, tout intuitives, facilitées par des raisonnements sur des figures, ce qui empêchait la généralisation des théorèmes. D'autre part, l'absence d'une bonne méthode de numération rendait très difficiles les opérations numériques et par suite l'étude des propriétés des nombres. On doit donc d'autant plus admirer la théorie complète et rigoureuse de l'arithmétique élémentaire qu'Euclide a insérée dans ses *Eléments* et dont nous allons rappeler seulement les énoncés.

VII. 1. *Etant donnés deux nombres, retranchons le plus petit du plus grand ; agissons de même sur le reste et le plus petit ; et ainsi de suite : si nous arrivons au reste* 1, *les deux nombres proposés sont premiers entre eux.*

2, 3. *Trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs, de trois grandeurs.*

5, 7. *Tout diviseur de* a *et de* b *divise* a + b *et* a — b.

16. *ab = ba.*

23, 24, 25. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, il en est de même de* ac *et de* bc, *et réciproquement. De plus tout diviseur de* a *est premier avec* b.

26. *Le produit de deux nombres premiers avec un troisième l'est avec ce dernier.*

27. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, tout multiple de* a *l'est avec* b.

28. *Si* a *et* b *sont respectivement premiers avec* α *et* β, aα *l'est avec* bβ.

29, 30. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, il en est de même de* a^n *et de* b^n, *ainsi que de* a + b *et de* a. *La réciproque est vraie.*

31. *Tout nombre premier est premier avec un nombre qui n'en est pas multiple.*

32. *Si un nombre premier divise* ab, *il divise* a *ou* b.

35, 36, 38. *Trouver le p. p. c. m. de plusieurs nombres.*

37. *Le p. p. c. m. de deux nombres divise tout multiple de l'un quelconque de ces nombres.*

41. *Trouver le plus petit nombre ayant des diviseurs donnés.*

IX. 12. *Tout nombre premier qui divise* a^n *divise* a.

13. *Si* p *est premier, aucun nombre plus petit ne divise* p^n.

14. *Le produit de plusieurs nombres premiers n'est divisible par aucun autre nombre premier.*

15. *Si les trois nombres* a, b, c *sont premiers dans leur ensemble, et que* $b^2 = ac$, *chacun d'eux est premier avec la somme des deux autres.*

20. *Les nombres premiers sont en plus grand nombre qu'un nombre quelconque* (en nombre illimité)[1].

21 à 34. Théorie des nombres pairs et des nombres impairs.

36. *Si* $2^n - 1$ *est un nombre premier, son produit par* 2^{n-1} *est un nombre parfait.*

X. Ce livre est consacré à la théorie des irrationnelles de la forme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, théorie qui a perdu tout intérêt depuis l'adoption de la représentation algébrique des identités. Elle se ramène aux divers cas de la relation

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\,.$$

On y trouve aussi ce qui suit :

29, lemme 1. *La solution générale du triangle est :*

$$x = ka^2 - kb^2\,, \quad y = 2kab\,, \quad z = ka^2 + kb^2\,.$$

[1] La démonstration de ce théorème, qui repose comme on sait sur la considération de l'expression $2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 17 \ldots p + 1$, témoigne qu'Euclide savait que celle-ci peut ne pas représenter un nombre premier.

117. *La diagonale du carré est incommensurable avec le côté.* Supposons qu'on puisse représenter le rapport de ces deux grandeurs par celui des deux nombres a et b, qu'on peut supposer premiers entre eux : on aura $a^2 = 2b^2$, ce qui demande que a soit un nombre pair 2α, et par suite que b soit impair. On aurait ainsi $4\alpha^2 = 2b^2$ ou $2\alpha^2 = b^2$ et b serait pair. Le nombre b serait ainsi pair et impair, ce qui démontre l'absurdité de la supposition.

Après Euclide, on peut citer : la sommation de Σn et de Σn^2, par Archimède ; les études de ce dernier et d'Apollonius sur la numération ; le *crible* d'Eratosthène ; et ces théorèmes, probablement pythagoriciens, recueillis par divers auteurs :

$\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2$. (Epaphroditus.)

$8t_n + 1$ *est un carré.* (Plutarque.)[1]

Si on partage les nombres impairs en groupes de 1, 2, 3, ... *termes, la somme de chaque groupe est un carré.* (Nicomaque.)

La somme de deux triangulaires successifs est un carré. (id.)

Tout carré est de l'une des formes $\dot{3}$ *ou* $\dot{3} + 1$[2] *et de l'une des formes* $\dot{4}$ *ou* $\dot{4} + 1$. (Théon de Smyrne.)

Les fractions $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots \frac{\alpha}{a}, \frac{2a+\alpha}{a+\alpha}, \dots$ *tendent en oscillant vers la valeur de* $\sqrt{2}$. (id.[3])

Si on additionne les chiffres de la somme de trois entiers consécutifs dont le plus grand est un multiple de 3, *puis les chiffres de cette somme, et ainsi de suite, on arrivera au nombre* 6. (Jamblique.)

Quoique Diophante ait traité exclusivement par l'algèbre[4] les questions qui nous sont restées de lui, il a au plus haut point servi la cause du progrès de l'arithmétique : d'abord en suggérant diverses théories sur l'existence ou le nombre des solutions de ses problèmes, dont la plupart sont de véri-

---

[1] t_n représente le n^e triangulaire, $\frac{n(n+1)}{2}$.

[2] Multiple de 3 ou multiple de 3 augmenté de 1.

[3] Ajoutons que c'est chez Théon qu'on voit la première idée des carrés magiques.

[4] Son artifice le plus employé consiste à ramener le problème à rendre carré le nombre $a^2 + ax + b$: il égale cette expression à $(x + n)^2$, ce qui lui donne $x = \frac{n^2 - b}{a - 2n}$, n étant un nombre entier arbitraire. C'est la première idée de la *méthode des coefficients indéterminés*.

tables théorèmes sur diverses équations quadratiques indéterminées [1], souvent très difficiles et même encore aujourd'hui inaccessibles à toute démonstration ; — ensuite par sa considération des formes des diviseurs numériques. Il sait en effet qu'*un nombre* $2n + 1$ *ne peut être une somme de deux carrés si* n *est impair ;* en outre il paraît admettre qu'*on peut décomposer un entier quelconque en une somme de quatre carrés* (IV, 31) et savoir que *les diviseurs d'une somme de deux carrés premiers entre eux sont de la forme linéaire* $4 + 1$ *et de la forme quadratique* $x^2 + y^2$, car il dit (V, 12) qu'*un nombre impair ne peut être une somme de deux carrés qu'autant que, divisé par son plus grand facteur carré, le quotient n'est pas de la forme* $4 - 1$, et (VI, 15) que *l'équation* $15x^2 - 36 = y^2$ *ne peut avoir lieu parce que* 15 *n'est pas la somme de deux carrés.* — Il tente de résoudre ce problème : *de combien de manières un nombre donné peut-il être polygone*, c'est-à-dire de la forme $\frac{(x + 1)(xy + 2)}{2}$? Il connaît l'identité de Fibonacci, car il observe (III, 22) que 65 peut se décomposer en deux carrés de deux manières différentes, parce que ce nombre est le produit de deux sommes de deux carrés. Il donne d'ailleurs plusieurs identités algébriques intéressantes, mais dont l'arithmétique ne saurait tirer parti.

Les Indiens ont beaucoup cultivé l'analyse indéterminée des deux premiers degrés ; leurs méthodes étaient du reste plus générales que celles de Diophante, qui se contentait d'une seule solution ; et en outre ils recherchaient des solutions entières, tandis qu'il suffisait au célèbre Alexandrin que la sienne fût rationnelle. Au point de vue qui nous occupe, il convient de citer : la résolution des équations $ax - by = c$ et $x^2 - ay^2 = 1$ au moyen des fractions continues, résolution qu'ils semblent avoir toujours crue possible ; cette remarque que l'équation $ax^2 - y^2 = 1$ n'est possible que si a est la somme de deux carrés, et la méthode pour passer de la solution de l'équation $x^2 - ay^2 = 1$ à celles de $x^2 - ay^2 = b$. Ces découvertes se trouvent, la première

---

[1] Telles que la suivante : *Trouver trois nombres tels qu'en augmentant ou diminuant leur somme de chacun d'eux, on obtienne six carrés.*

chez Aryabhata, les autres chez Brahmegupta, qui en sont peut-être les auteurs. C'est chez les Indiens qu'ont probablement pris naissance la preuve par 9 et celles par 7 et par 11 : la considération des résidus de puissances leur était du reste familière.

L'arithmétique est redevable de quelques progrès aux Arabes : ainsi Thebit ben Korra a donné cette formule de nombres amiables :

$$(3 \,.\, 2^n - 1)(3 \,.\, 2^{n-1} - 1)\, 2^n \text{ et } (9 \,.\, 2^{n-1} - 1)\, 2^n \,;$$

et un autre auteur dont le nom est inconnu, cette remarque que *toute hypoténuse est de l'une des formes* $12 + 1$, $12 + 5$, et l'identité

$$(a^2 + b^2)^2 \pm 4ab\,(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 \pm 2ab)^2$$

comme solution des équations simultanées

$$x^2 + y = z^2 \,, \quad x^2 - y = w^2 \,,$$

ou de l'équation unique $2x^2 = z^2 + w^2$. Diophante a été connu d'eux vers l'an mil : c'est ainsi que Al-Kadjandi a annoncé l'impossibilité de décomposer un cube en deux autres cubes [1].

Les premiers algébristes italiens s'instruisirent chez les Arabes, qui certainement ont quelque part dans les nouveautés que Léonard de Pise (Fibonacci) a fait connaître en Europe. Toujours est-il que c'est dans le *Liber abaci* de ce dernier qu'on voit pour la première fois cette règle, de diviser un nombre par tous les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée, pour s'assurer s'il est premier ; et la célèbre série récurrente 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, ..., dont il définit les termes par le dénombrement mensuel de couples de lapins, en supposant que chaque couple en produit un autre à l'âge de deux mois et disparaît ensuite ; — et dans son *Liber Quadratorum*, que *la différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de* 8 ; l'identité célèbre de laquelle il résulte que *le produit de deux sommes de deux*

[1] Diophante avait montré qu'un carré peut toujours se décomposer en deux carrés entiers ou fractionnaires, et paraît avoir tenté d'étendre ce théorème aux cubes.

carrés est, de deux manières différentes, la somme de deux carrés; que la raison de trois carrés en progression arithmétique, laquelle est de la forme $4ab(a^2 - b^2)$, est un multiple de 24 et qu'elle ne saurait être un carré; enfin qu'on ne saurait avoir à la fois

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = w^2 ,$$

ni avoir

$$x^4 - y^4 = z^4 .$$

Ces trois dernières affirmations ont été données sans preuves satisfaisantes : Fermat les a retrouvées et démontrées.

On voit, dans Planude, l'équivalent de la formule $\Delta^4 n^4 = 24$; — dans Campanus (*Præcl. liber elem. Eucl.* Venise, 1482), la première idée de la méthode retrouvée par Fermat et appelée par lui la *descente infinie*[1]; — dans Paciolo (*Summa de Aritmetica*, Venise 1494), la publication de diverses études de Fibonacci et des Arabes; — dans Charles de Bouvelles (*Opuscula*, Paris, 1511), ces deux théorèmes : *les nombres parfaits sont de la forme* $9 + 1$ et *tout nombre premier est de l'une des formes* 6 ± 1[2]; — dans Stifel (*Arithmetica integra*, Nürnberg, 1544), plusieurs théorèmes, dont les suivants : *les deux nombres* 220 *et* 284 *sont amiables; la formule* $2 . 4^n - 1$ *ne donne que des nombres premiers*[3]; n *étant premier avec* 3, on a :

$$\frac{2^{2^n 3^k} - 1}{2^{2^n} - 1} \equiv 0^4 ; \qquad \text{(mod. 7)}$$

tout entier est de la forme $a + 3b + 9c + 27d + 81e + \dots$, les coefficients $a, b, c, \dots$ pouvant prendre les valeurs -1,

---

[1] Campanus démontre géométriquement ainsi qu'*aucun nombre ne peut être divisé en moyenne et extrême raison :* en posant

$$(\alpha) \qquad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad a > b , \quad a - b = c , \quad b - c = d , \quad c - d = e , \dots$$

on aura successivement

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad b > c , \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad \text{et} \quad c > d , \dots$$

on pourra ainsi trouver une suite indéfinie d'entiers décroissants et répondant à la question Or une suite d'entiers positifs ne peut décroître indéfiniment. L'égalité (α) est donc impossible en nombres entiers.

Ce passage tout à fait inconnu a été remarqué pour la première fois par Genocchi.

[2] *Int. Math.* 1894, p. 122. Voir Ed. Luces, *Th. des n.* (Paris, 1891), p. 424.

[3] Théorème inexact. On sait qu'*aucune expression algébrique finie ne peut représenter que des nombres premiers.* (Euler.)

[4] « Septenarius, quemlibet numerum componit et numerat, qui colligitur ex tribus, sex, nouem, aut duodecim terminis, proportionalitatis duplœ, quadruplœ, aut sedecuplœ. »

0, 1 ; enfin une méthode de recherche d'un nombre pensé qu'on peut rendre par cette remarquable relation

$$\mathrm{R}\,\frac{(a+1)\,\mathrm{R}\,\frac{x}{a} + a^2\mathrm{R}\,\frac{x}{a+1}}{a(a+1)} = x$$

x étant inférieur à $a(a+1)$, et le symbole $\mathrm{R}\,\frac{x}{n}$ désignant le reste de la division de x par n [1].

Bachet, dans la première édition de ses *Prob. plaisants et dél.* (Lyon, 1612), annonçait la solution de l'équation $ax - by = c$, a, b et c étant premiers entre eux; il la donne dans la seconde édition, publiée en 1624, et démontre l'existence, la périodicité et le calcul des solutions, en faisant voir que *si* b *est premier avec* a, *les valeurs de* $\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{b}}$ *sont toutes différentes, de* $\mathrm{x} = 1$ *à* $\mathrm{x} = \mathrm{b} - 1$, *et se reproduisent ensuite périodiquement*[2], et que *la relation* $\mathrm{ax} - \mathrm{by} = \mathrm{c}$ *entraîne cette autre* $\left(\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)\mathrm{x} - \mathrm{by} = \mathrm{c}$.

---

[1] Cette fonction ne nous paraît pas avoir été étudiée systématiquement jusqu'ici ; elle semble cependant devoir conduire à des exercices intéressants. Ainsi

$$\mathrm{R}\,\frac{a}{n} + \mathrm{R}\,\frac{b}{n} \equiv \mathrm{R}\,\frac{a+b}{n} \qquad (\mathrm{mod.}\ n)$$

$$\mathrm{R}\,\frac{a}{n}\,\mathrm{R}\,\frac{b}{n} \equiv \mathrm{R}\,\frac{ab}{n} \qquad (\mathrm{mod.}\ n)$$

$$\mathrm{R}\,\frac{b\mathrm{R}\,\frac{a}{n}}{n} = \mathrm{R}\,\frac{ab}{n}$$

$$a > b > \mathrm{R}\,\frac{a}{b} > \mathrm{R}\,\frac{a}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}} > \mathrm{R}\,\frac{a}{\mathrm{R}\,\frac{a}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}} > \mathrm{R}\,\frac{a}{\mathrm{R}\,\frac{a}{\mathrm{R}\,\frac{a}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}}} > \ldots \qquad (\text{Binet.})$$

$$a > b > \mathrm{R}\,\frac{a}{b} > \mathrm{R}\,\frac{b}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}} > \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}{\mathrm{R}\,\frac{b}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}} > \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{R}\,\frac{b}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}}{\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}{\mathrm{R}\,\frac{b}{\mathrm{R}\,\frac{a}{b}}}} > \ldots \qquad (\text{Euclide.})$$

La théorie des fonctions $\mathrm{R}\,\frac{ax}{b}$, $\mathrm{R}\,\frac{x^2}{b}$ et $\mathrm{R}\,\frac{a^x}{b}$ sont bien connues ; celle de $\mathrm{R}\,\frac{a}{x}$ n'a pas encore été étudiée.

[2] Dans notre dernier article, nous avons omis de dire que le *lemme fondamental* est de Bachet (*Ens. Math.* 1907, p. 286).

Bachet a encore rendu un service éminent à la science des nombres, par sa publication du Diophante (Paris, 1621), qu'il a traduit en latin et commenté. Parmi ses remarques, nous mentionnerons ce théorème qui porte son nom : *tout entier est la somme de quatre carrés au plus*[1], et qui a eu des conséquences importantes.

Mais c'est surtout à Frénicle que revient l'honneur d'avoir ouvert les nouvelles voies où devait s'illustrer Fermat. On connaît quelques-unes de ses découvertes par les *Lettres* de Descartes, les *Varia Opera* de Fermat et ses traités arithmétiques publiés seulement en 1729. Citons les théorèmes et problèmes suivants :

Il y a toujours l'une des cathètes d'un triangle qui est multiple de 3, *et une qui est multiple de* 4. *L'un des trois côtés est multiple de* 5. *La somme et la différence des cathètes est de l'une des formes* 8 ± 1.

Trouver le plus petit nombre qui soit n *fois hypoténuse. Trouver* n *triangles ayant même surface.*

Il paraît avoir remarqué avant Fermat la méthode de la descente infinie, l'impossibilité de la surface d'un triangle d'être représentée par un carré, la propriété des nombres premiers de forme $4+1$ d'être la somme de deux carrés, et divers problèmes d'analyse indéterminée. Sa méthode de démonstration était un tâtonnement ou *exclusion* méthodique, qu'il indique par des exemples et qu'il employait très habilement. Une très grande pratique étant nécessaire pour l'emploi de cette méthode, il paraît peu utile de la mentionner autrement.

Descartes, dans la solution de plusieurs problèmes qui lui furent proposés, a montré ce qu'il eût pu produire s'il avait cultivé l'arithmétique. Outre la solution de plusieurs questions diophantines, il fait voir (*Lettres*, Paris, 1667) que *les nombres* $4-1$ *ne peuvent être des carrés ni des sommes de deux carrés* ; que *les nombres* $8-1$ *ne peuvent être des carrés ni des sommes de deux ou de trois carrés* ; que *si* $3a-1$, $6a-1$ *et* $18a^2-1$ *sont des nombres premiers, le nombre* $2a(18a^2-1)$ *et la somme de ses diviseurs sont amiables*[1] ; que

[1] Théorème laissé sans démonstration jusqu'à Lagrange.

si $\sigma a = (3 + 4k) a$[2] *et que* a *soit multiple de* 3 *et non de* 9, *on a*

$$\frac{a}{3} = \frac{1}{2 + 3k} \sigma \frac{a}{3} ;$$

que *si* a *est multiple de* 3 *et non de* 45, *et que* $a = \frac{1}{2} \sigma a$, *on a*

$$45a = \frac{1}{3} \sigma(45a) ;$$

que *si* a *est multiple de* 3 *mais non de* 819, *et que* $a = \frac{1}{2} \sigma a$, *on a*

$$273a = \frac{1}{3} \sigma(273a) ;$$

que *si* a *n'est divisible ni par* 31, *ni par* 43, *ni par* 127, *ni par* 1024, *on a*

$$\frac{Aa}{\sigma(Aa)} = \frac{Ba}{\sigma(Ba)}, \quad A = 2^{13}\ 43 \,.\, 127 , \quad B = 31 ,$$

théorèmes qui servent de types et permettent de multiplier indéfiniment les solutions des *nombres aliquotaires*[3]. On voit dans les mêmes *Lettres* qu'en 1638, de S^te Croix, autre arithméticien insigne, connaissait le théorème des nombres polygones, extension de celui de Bachet ; que Descartes savait que *les seuls nombres parfaits pairs sont ceux d'Euclide* et que, *s'il y en a d'impairs, ils sont de la forme* $pp'^2p''^2 \ldots$, p, p′, p″, ... désignant certains nombres premiers[4]. Ajoutons que, dans le t. XII du *B. Bon.* (Rome, 1879), on voit que Descartes avait trouvé ces propositions par le moyen de la relation $\int(ab) = \int(a) \int(b)$. (Ch. Henry, *Rech. sur les man. de Fermat.*) Tous ces travaux de Descartes sont de 1638.

Dans les *Cogitata physico-mathematica* (Paris, 1644), de Mersenne, on trouve les énoncés des résultats qu'on vient de voir relatifs aux nombres aliquotaires, et en outre les propositions que voici, dues probablement à Fermat :

---

[1] Descartes applique ces formules aux cas de $a = 2$, ce qui lui donne le couple de Stifel, de $a = 8$ et de $a = 64$.

[2] σn représente la somme des diviseurs de n, $\int n$ la somme de n et de ses diviseurs, c'est-à-dire $\sigma n + n$.

[3] Ed. Lucas (l. cit.) donne une restitution très plausible des démonstrations de ces théoremes. Voir aussi les *Comm. Arith.* d'Euler.

[4] Voir Lionnet (*Nouv. An.*, 1879), Sylvester (*Comptes Rendus*, 1888), Stuyvært (*Mathesis*, 1896).

Les seules valeurs de n *donnant pour* $2^n - 1$ *des nombres premiers, jusqu'à* n = 257, *sont* 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257[1].

Le plus petit nombre ayant cent diviseurs est 12676506002282294014967032053760, *et la* 66e *puissance de ce nombre multipliée par la quatrième de cet autre* 847288609443 *donnerait le plus petit nombre ayant un million de diviseurs.*

Dans son fameux *Traité du triangle arithmétique*, divulgué en 1654, mais publié seulement en 1665, Pascal a donné une théorie complète des nombres figurés, des combinaisons et du développement de $(a + b)^n$, toutes choses connues des Indiens et des Arabes, mais non démontrées et d'ailleurs incomplètement traitées jusque là[2]. Pascal démontre les formules relatives à ces trois théories, fait voir les relations qu'elles ont entre elles, les applique aux questions de probabilité, à l'expression générale de Σx^n qu'on ne connaissait que pour les onze premières valeurs entières de n et en tire la démonstration de la formule

$$\int_0^a x^n\, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} ,$$

ainsi qu'un grand nombre de théorèmes remarquables, dont ceux-ci :

$C_{a+b,\,a} = C_{a+b,\,b}$.

$C_{a,\,b}$ *est divisible par* b !

Le nombre total des combinaisons de n *objets est* $2^n - 1$[3].

Mais c'est surtout dans sa méthode de démonstration que Pascal a bien mérité de la science, méthode applicable à une foule de questions où il s'agit d'une suite indéterminée de nombres : elle consiste à montrer qu'une certaine propriété supposée vérifiée pour l'entier n, l'est encore pour $n + 1$, de

[1] Les neuf premiers de ces nombres étaient déjà connus. Le nombre 67 paraît mis pour 61. L'assertion de Mersenne a été vérifiée, sauf pour les nombres premiers 71, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229, 241 et 257.

[2] En Europe, le calcul des coefficients du développement de $(a + b)^n$ à l'aide de ceux de $(a + b)^{n-1}$ a été d'abord indiqué par Stifel (l. cit.) ; et le calcul des coefficients à l'aide de ceux qui les précèdent dans la même puissance, l'a été par Briggs (*Trigonometria britannica*, Goude, 1633). Voir *Mathesis*, 1907, p. 63.

[3] Cette proposition a été publiée d'abord par Schooten. Voir plus loin.

sorte que si, par l'examen direct, on prouve qu'elle l'est pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, etc. Il démontre ainsi les deux formules principales des nombres figurés

$$C_{a,b} = C_{a,b-} + C_{a-1,b-1}$$

$$C_{a,1} + C_{a,2} + C_{a,3} + \cdots + C_{a,b} = C_{a+1,b}\,.$$

Wallis, dans sa célèbre *Arithmetica infinitorum* (Oxford, 1655), a introduit dans la science, des idées nouvelles et hardies, qui furent critiquées; elles devaient cependant aboutir à la découverte de vérités importantes. Nous voulons parler de la relation

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}\,,$$

de l'*interpolation* des termes de la suite $1, \frac{2}{3}, \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}, \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}, \ldots$ qu'il suppose être différentes valeurs d'une fonction continue et qu'il représente par une courbe.

Schooten (*Exercitationum mathematicarum*, Leyde, 1657), a fait voir que le nombre total des combinaisons de n objets est $2^n - 1$, et a donné la liste des plus petits nombres ayant respectivement 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... 100 diviseurs, lesquels sont 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, ...

Le premier écrit où il est question des travaux arithmétiques de Fermat, est le *Commercium epistolicum*, de Wallis (Oxford, 1658). On y trouve les énoncés de différentes questions importantes dont celles-ci :

Trouver un cube qui, ajouté à ses diviseurs donne un carré, et un carré qui ajouté à ses diviseurs produise un cube ;

l'équation dite de Pell, $x^2 - ay^2 = 1$, dont Brouncker donne la solution pour $a = 13$[1];

les équations

$$x^2 + 2 = y^3\,, \quad x^2 + 4 = y^3\,, \quad a^3 + b^3 = x^3 + y^2\,;$$

[1] E_ω désignant la valeur de la partie entière du nombre non entier ω. la solution de Brouncker revient à poser $x = (E\sqrt{13})\,y + a$, d'où $4y^2 = 6ay + a^2 - 1$ et de là une expression $4y_1 = 3a + \sqrt{13a^2 - 4}$ de la valeur de y; on pose de même $y = (Ey_1)\,y + b$; et ainsi de suite. — La justification de cette solution n'a été donnée que par Lagrange.

l'impossibilité de partager un cube en deux autres cubes, et celle de trouver un triangle dont l'aire soit un carré ;

l'expression $2^{2^n} + 1$ *représente un nombre premier*[2]*;*

tout nombre premier de la forme 4 + 1 *est une somme de deux carrés ; tout nombre premier de la forme* 3 + 1 *divise* $x^2 + 3y^2$; *tout nombre premier*[2] *de la forme* 8 — 1 *est une somme de trois carrés.*

Mais c'est surtout dans la réédition, par le fils de Fermat, du *Diophantus* de Bachet (Toulouse, 1670), que l'on voit les monuments du génie de Fermat. Nous en citerons ce qui suit :

l'impossibilité de l'équation $x^a + y^a = z^a$, pour $a > 2$, non encore démontrée en général.

Si p *désigne un nombre premier de la forme* 4 + 1, *les équations*

$$x^2 + y^2 = p^{2n-1} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = p^{2n}$$

ont chacune n *solutions ;*

le produit $(a^2 + b^2)^{2n-k}(c^2 + d^2)^k$ *est, de* n *manières, la somme de deux carrés :* de là, le moyen de *déterminer le nombre de fois qu'un nombre peut être hypoténuse, ou un nombre qui soit* n *fois hypoténuse ;*

résoudre

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3 ;$$

théorème des nombres polygones : *tout entier est la somme de* n n^{gones} ;

trouver une infinité de triangles ayant même aire ;

l'aire d'un triangle ne peut s'exprimer par un nombre carré ; ce qui revient à dire qu'on ne saurait avoir $xy(x^2 + y^2) = z^2$. C'est la seule proposition sur la démonstration de laquelle Fermat ait laissé quelques indications. Il la démontre par la descente infinie dont nous avons déjà parlé[3]. Sa démonstration a été rétablie par Euler.

---

[1] Euler a reconnu que cette proposition est fausse. Fermat, qui la destinait à faciliter la recherche des nombres parfaits, y revient quatre autres fois, dans les écrits qui nous restent de lui. Il paraît l'avoir cherchée très longtemps.

[2] Legendre a reconnu que cette proposition a lieu pour un nombre impair quelconque de cette forme.

[3] S'agit-il de faire voir qu'une certaine propriété ne convient pas à un nombre désigné ? On cherchera un nombre plus petit qui jouisse de cette propriété, s'il en est de même du premier. De là un troisième nombre plus petit et dans les mêmes conditions. En continuant ainsi, on obtiendrait une suite infinie d'entiers décroissants, ce qui est absurde. L'hypothèse du point de départ est donc fausse. Voir par exemple *Mathesis*, 1905, p. 8.

La publication également posthume d'une partie de la correspondance de Fermat (*Opera varia*, Toulouse, 1679), permet d'apprécier encore mieux les découvertes de l'illustre géomètre, et quel regret on doit avoir de ce qu'il n'a pu faire connaître ses méthodes arithmétiques, que les savantes méthodes actuelles n'ont pu remplacer. On peut mentionner ce qui suit :

Tout nombre composé de trois carrés ne peut l'être de deux, même en fractions (*lettre à Mersenne*, 1636).

La méthode de *Maximis* [1] sert pour la recherche des nombres aliquotaires. Les nombres 672 et 120 sont doubles de la somme de leurs diviseurs [2], 220 et 284 sont amiables de même que 17296 et 18416 [3]. Sommation des bicarrés et des nombres figurés. (*Diverses lettres à Roberval*, 1636.)

Il parle des progressions géométriques commençant à l'unité, dont il a envoyé de belles propositions à Frénicle; il rappelle qu'il a démontré qu'*aucun nombre de la forme* 4 — 1 *n'est composé de deux carrés, ni entiers ni fractionnaires*; enfin il avance que *tout diviseur premier d'une somme de deux carrés premiers entre eux ne peut être de la forme* 4 — 1, ce qui sert pour reconnaître si un nombre donné est premier (*lettre à Roberval*).

Nous sommes arrivé à l'importante *Lettre à Monsieur de* ***, dont il est nécessaire de donner une analyse détaillée. Fermat parle de certaines progressions dont les propriétés servent à trouver les diviseurs des nombres de la forme $a^n \pm 1$, et énonce ainsi le célèbre théorème qui a gardé son nom : «... il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuie les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions géométriques, qui est tel :

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances — 1, de quelque progression que ce soit, et l'exposant de ladite puissance est sous-multiple du nombre premier — 1. Et après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont

[1] Le calcul différentiel.

[2] Voir sur ce sujet *Lettres de Descartes*, t. III, p. 392.

[3] Ces quatre nombres ont été trouvés par Descartes. Voir plus haut. Euler a longuement traité de ces nombres (Voir ses *Commentationes Arithmeticæ*, t. I, p. 402; t. II, pp. 627 et 637).

multiples de l'exposant de la première satisfont de même à la question. »

Ainsi on a :

$$3^1 \equiv 3\,,\quad 3^2 \equiv 9\,,\quad 3^3 \equiv 1 \qquad \text{(mod. 13)}$$

donc l'exposant 3 divise 13 — 1, et de plus $3^{3k} \equiv 1$ (mod. 13).

Si le *gaussien*[1], t de a est impair, on ne saurait avoir $a^x + 1 \equiv 0$. Ainsi $2^{11} \equiv 1$ (mod. 23); donc 23 ne divise aucun nombre de la forme $2^x + 1$. Si, au contraire, t est un nombre pair 2τ, on a . $a^\tau + 1 \equiv 0$.

La difficulté de l'application de cette théorie est dans la recherche du nombre premier p tel qu'on ne puisse écrire $a^x + 1 \equiv 0$, c'est-à-dire tel qu'il divise $a^t - 1$, t étant impair. Elle sert dans la recherche des nombres parfaits et à donner la raison de ce que, par exemple, $2^{37} \equiv 1$ (mod. 223).

Fermat donne encore ces deux théorèmes: *si* p *est un nombre premier de forme* 4 — 1, *et qu'on puisse trouver deux nombres* a *et* b *tels que* $a^{2k+1} \equiv b$, *on aura* $a^t \equiv 1$ *avec* t *impair*[2]. — *Aucun diviseur de* $a^2 - 2$ *n'est de la forme* $x^2 + 2$. (*Lettre à Monsieur de* ***, 1640.)

Si p *est premier, les diviseurs de* $2^p - 2$ *sont de la forme* 2ph *et deux de* $2^p - 1$, *de la forme* 2ph + 1. *(Lettre à Mersenne.)*

Il indique différents nombres aliquotaires *(lettre à Carcavi)*, et énonce les propositions suivantes: *On arrive au théorème des nombres polygones en démontrant que tout nombre premier* 4 + 1 *est une somme de deux carrés. — Tout nombre premier* 3 + 1 *est de la forme* $x^2 + 3y^2$; et *tout nombre premier* 8 + 1 *ou* 8 + 3, *de la forme* $x^2 + 2y^2$. (*Lettre à Pascal*, 1654.)

Malgré de longues et minutieuses recherches, les écrits contenant les méthodes de Fermat n'ont pas pu être retrouvés, sauf trois lettres intéressantes, non datées, la seconde

---

[1] On appelle ainsi, d'après Ed. Lucas (l. cit.), l'exposant t de la plus petite puissance de a qui donne $a^t \equiv 1$, au lieu de la longue et vague dénomination de Gauss: *exposant appartenant à* a.

[2] Ce qui revient à dire que *a étant* résidu *de* p = 4 — 1, *on ne saurait avoir* $a^x + 1 \equiv 0$. Cela fait voir que Fermat sait que si a est résidu de p, en posant $p = 2m + 1$, on a: $a^m \equiv 1$, et que si pour k impair on a: $a^k \equiv 1$, on ne peut avoir pour $h < k$, $a^h \equiv -1$.

envoyée à Frénicle et la troisième à Huygens, et publiées dans le *B. Bon.* (l. cit.). Nous en donnons ici ce qu'il y a de plus important.

Tout impair non carré est autant de fois la forme $x^2 - y^2$ *qu'il est le produit de deux facteurs.* Soit à trouver les facteurs de $n = 2027651281$; par l'extraction de la racine carrée, on trouve $n = 45029^2 + 40440$. Le carré suivant surpasse n de $2 \cdot 45029 + 1 - 40440 = 49919$, nombre non carré, ce que ses deux derniers chiffres indiquent suffisamment. Le carré qui suit surpasse n de $49619 + 2 \cdot 45029 + 3 = 139680$, nombre non carré. Continuant ainsi, on trouve à la dixième opération, $45041^2 = n + 1020^2$; de là la décomposition $n = 46061 \cdot 44021$.

p *désignant un nombre premier, le nombre* $\frac{2^p + 1}{3}$ *est de la forme* $2ph + 1$. *Si* ab *n'est pas de la forme* 2^n, *le nombre* $2^{ab\cdots} + 1$ *se décompose aisément en ses facteurs* [1].

Enfin, dans la lettre à Huygens, Fermat apprend qu'il se servait de sa méthode de la descente pour démontrer : qu'*aucun facteur de la formule* $a^2 + 3b^2$ *ne peut être de la forme* $3 - 1$: *que la surface d'un triangle ne peut être un carré ni entier ni fractionnaire* ; que *tout nombre premier* $4 + 1$ *est une somme de deux carrés* ; le théorème de Bachet ; la solution de l'équation de Pell ; l'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$; que *l'équation* $x^2 + 2 = y^3$ *a l'unique solution* $x = 5$: que *l'équation* $x^2 + 4 = y^3$ *n'a pas d'autres solutions que celles-ci* $x = 2$, $x = 11$. Il annonce que *l'équation* $(2x^2 - 1)^2 = 2y^2 - 1$ *n'a qu'une solution qui est* $x = 2$; et qu'il a des règles pour résoudre l'équation $ax^2 + b = y^2$, ou démontrer son impossibilité, et de même pour les équations simultanées $ax + b = y^2$, $ax + c = z^2$.

Maintes fois des doutes ont été émis, non sur la bonne foi de Fermat, mais sur la valeur de ses démonstrations ; il faut reconnaître que le seul de ses théorèmes qui ait été reconnu faux était énoncé par lui comme non démontré. D'ailleurs, le cas échéant, il reconnaît lui-même l'imperfection de cer-

---

[1] Par exemple, a, b, ... étant impairs, il est divisible par $2^a + 1$, par $2^b + 1$, par $2^{ab} + 1$, ... et chacun de ces facteurs est divisible par 3.

taines de ses méthodes, particulièrement dans la recherche des diviseurs numériques[1]. D'un autre côté, il a assez vivement critiqué Wallis de s'être servi de la simple induction dans les démonstrations de son *Arith. inf.* pour qu'on ne puisse croire qu'il avait agi de même. La science, en s'étendant et se perfectionnant, a perdu de sa simplicité, et il n'y a guère lieu de s'étonner que les procédés élémentaires de Frénicle, de S^te^-Croix et de Fermat nous échappent; et, même retrouvés, ils ne pourraient peut-être plus nous servir, l'habitude étant perdue des longs calculs numériques que ne craignaient pas d'entreprendre ces savants non encore habitués aux calculs de l'algèbre, plus mécaniques et moins suggestifs.

Nous terminons notre historique qui sera continué par l'*Œuvre arithmétique* d'Euler, de Lagrange, de Legendre et de Gauss par cette remarque que Fermat ne paraît avoir étudié que dans Euclide, Diophante, Viète et Bachet: ses découvertes paraissent avoir été faites entre 1630 et 1638 et avoir eu pour origine la considération des nombres parfaits ainsi que diverses questions proposées par Frénicle.

Deuxième Partie

Étude élémentaire sur le théorème de Fermat.

1. — *Lemmes*[2] I. *L'expression* $a^k - b^k$ *est algébriquement divisible par* $a - b$. De plus *si* k *est pair*, *elle l'est par* $a + b$; *si* k *est impair* $a^k + b^k$ *est divisible par* $a + b$.

En outre, *si* k *est multiple de* n, *et dans ce cas là seulement*, $a^k - b^k$ *est divisible par* $a^n - b^n$. Plus généralement, *si* θ *est le* p. g. c. d. *de* k *et de* n, $a^\theta - b^\theta$ *sera le* p. g. c. d. *de* $a^k - b^k$ *et de* $a^n - b^n$. Et ainsi des autres expressions.

[1] Cependant, dans une lettre à Mersenne de 1643, il donne la décomposition en facteurs d'un nombre de douze chiffres, qui lui avait été proposé.

[2] Nous donnons ces différents lemmes pour rendre cet article tout à fait indépendant des précédents (*Ens. Math.*, 1907, pp. 24 et 286).

Il suit de là qu'on a :

$$(1)\qquad (a + bh)^k \equiv a^k,\ (bh - 1)^{2k} \equiv 1,\ (bh - 1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{b}$$

II. Dans cette identité d'Euler[1]

$$(2)\qquad (1 + a)(1 + b)\dots(1 + l) = 1 + a + b(1 + a) + \dots + l(1 + a)\dots(1 + k),$$

changeons a, b, c, ... en $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}$, ... il viendra la formule des nombres figurés

$$(3)\qquad 1 + C_{n,1} + C_{n+1,2} + C_{n+1,3} + \dots + C_{n+\nu-1} = C_{n+\nu,\nu};$$

d'où l'identité de Nicole,

$$(4)\qquad 1.2.3\dots n + 2.3\dots(n + 1) + 3.4\dots(n + 2) + \dots + \nu\dots(\nu + n - 1) = \frac{\nu\dots(\nu + n)}{n + 1}.$$

III. *Le nombre*

$$C_{a,b} = \frac{a(a - 1)(a - 2)\dots(a - b + 1)}{b\,!}$$

est entier (Pascal). De plus, si p est premier, on a

$$(5)\qquad C_{p,n} \equiv 0 \qquad \text{(Euler)}$$

IV. On a :

$$(6)\qquad (a + b)^n = a^n + C_{n,1}a^{n-1}b + \dots + C_{n,n-1}ab^{n-1} + C_{n,n}b^n \qquad \text{(Briggs)}$$

d'où, à cause de (5), si p est premier,

$$(7)\qquad (a + b)^p \equiv a^p + b^p \qquad \text{(Euler)}$$

V. Posons

$$x^n = x(x - 1)\dots(x - n + 1) + Ax\dots(x - n + 2) + \dots + Mx(x - 1) + x,$$

A, B, ... L, M désignant des coefficients qu'il n'est pas indispensable de déterminer, on aura :

[1] Pour d'autres applications de cette identité, voir *Progreso Matematico*, 1900, p. 401 et *Mathesis*, 1907, p. 147.

$$x^{n+1} - x^n = x(x-1)\dots(x-n) + \mathrm{A}x\dots(x-n+1) + \dots +$$
$$\mathrm{M}x(x-1)(x-2) + x(x-1)\,;$$

d'où, sommant de $x = 1$ à $x = p - 1$, et posant

$$s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (p-1)^k\,,$$

$$s_{n+1} - s_n = \frac{p\dots(p-n-1)}{n+2} + \mathrm{A}\,\frac{p\dots(p-n)}{n+1} + \dots +$$
$$\mathrm{M}\,\frac{p\dots(p-3)}{4} + \frac{p\dots(p-2)}{3}$$

Par suite si

$$n < p - 1\,,$$

on a :

$$s_{n+1} - s_n \equiv 0\ [1].$$

Or

$$s_1 = \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0\,,$$

donc

$$s_2 \equiv 0\,,\ s_3 \equiv 0\,,\ \dots$$

(8) $$s_n \equiv 0\,. \qquad (n < p-1)$$

(9) $$s_{p-1} \equiv -(p-1)\,!$$

VI. Supposons que la congruence du n^e degré $\mathrm{F}(x) \equiv 0$ ait $n + 1$ racines, et soient $a, b, \dots c$ les $p - n - 2$ non-racines ; la congruence du $(p-2)^e$ degré

$$(x-a)(x-b)\dots(x-c)\,\mathrm{F}(x) \equiv 0$$

aurait évidemment $p - 1$ racines. Or soit $\mathrm{A}x^{p-2} + \mathrm{B}x^{p-3} + \dots + \mathrm{L}x + \mathrm{M} \equiv 0$ cette dernière congruence ; en y faisant successivement $x = 1, 2, 3, \dots p - 1$ et faisant intervenir le lemme V, on aurait en sommant,

$$\mathrm{M}(p-1) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad -\mathrm{M} \equiv 0$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $\mathrm{M} \equiv 0$, chose impossible, puisque le produit M de toutes les racines ne peut être multiple de p.

Il est donc impossible que la congruence $\mathrm{F}(x) \equiv 0$ ait plus de n racines.

---

[1] Quand le module n'est pas explicitement indiqué, il s'agit du nombre premier p.

Cor. Si la congruence $F(x) \equiv 0$ a n racines et que son premier membre puisse se décomposer en deux facteurs entiers $f(x)$, $\varphi(x)$, de degrés k et $n-k$, les deux congruences ont respectivement k et $n-k$ racines. (Lagrange).

VII. Posons

$$0 < k \pm 1 < 5\,, \quad kA^2 \pm B^2 = nn'\,, \quad n > n'\,,$$
$$k(A - n'a)^2 \pm (B - n'b)^2 = n'n'',$$

et prenons a et b tels qu'on ait

$$A - n'a < \frac{n'}{2} \gtrless B - n'b\,;$$

il viendra

$$n'n'' < \frac{k \pm 1}{4}\, n'^2 \leq n'^2 \qquad \text{d'où} \qquad n'' < n'.$$

Or, en tenant compte de cette identité d'Euler

$$(10) \quad (kA^2 \pm B^2)(kA'^2 \pm B'^2) = (kAA' \mp BB')^2 \pm k(AB' - A'B)^2,$$

on a :

$$(nn')(n'n'') = (kA^2 \pm B^2 - kAA'n' \mp BB'n')^2 \pm k(BA' - AB')^2 n'^2\,.$$

d'où, en remplaçant $kA^2 \pm B^2$ par nn',

$$nn'' = (n - kAA' \mp BB')^2 \pm k(BA' - AB')^2\,.$$

On a ainsi un second multiple de n inférieur au proposé, et de la forme $\alpha^2 \pm k\beta^2$.

Opérant de même sur cette expression, on en tirera un troisième multiple nn''' de la même forme et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au nombre n lui-même, puisque les nombres $n, n', n'', \ldots$ sont de plus en plus petits. Le nombre n est donc de l'une des formes $kx^2 \pm y^2$ ou $x^2 \pm ky^2$.

Ainsi *les diviseurs de* $A^2 + 3B^2$, *de* $A^2 + 2B^2$ *et de* $A^2 + B^2$ *sont respectivement des formes* $x^2 + 3y^2$, $x^2 + 2y^2$ et $x^2 + y^2$. *Ceux de* $A^2 - 3B^2$ *peuvent se mettre sous l'une des deux formes* $x^2 - 3y^2$, $3x^2 - y^2$. Et, à cause des identités

$$x^2 - 2y^2 = 2(x - y)^2 - (x - 2y)^2$$
$$x^2 - 5y^2 = 5(x - 2y)^2 - (2x - 5y)^2\,,$$

on peut encore dire que *les diviseurs de* $A^2 - 2B^2$ *et de* $A^2 - 5B^2$ *peuvent se mettre respectivement sous les formes* $x^2 - 2y^2$ *et* $x^2 - 5y^2$.

Le principe de cette démonstration est dû à Lagrange, qui a prouvé ainsi que *tout diviseur d'une somme de quatre carrés est lui-même une somme de quatre carrés*. Euler avait ouvert la voie, en essayant de démontrer de cette manière les cas de $A^2 + B^2$, de $A^2 + 2B^2$ et de $A^2 + 3B^2$.

2. — Les nombres a, b étant premiers entre eux, on peut se demander quelles sont les propriétés des restes obtenus en divisant par b les multiples ou bien les puissances de a. L'étude du premier cas a fait l'objet de notre précédent article. Le second cas va nous occuper ; mais auparavant, il convient de montrer, par quelques exemples, comment on peut souvent abréger le calcul direct des restes.

1° Soit à trouver $R\,\dfrac{7^{160}}{641}$. La division des nombres $7, 7^2, 7^4, 7^8, 7^{16}, 7^{32}, 7^{64}, 7^{128}$ donne les restes 7, 49, 343, 478, 288, 255, 284, -110, -79 ; donc

$$7^{160} \equiv -284.79 \equiv -1 \qquad \text{(mod. 641) (Euler)}$$

2° Trouver le reste de la division de 3^{1000} par 13. On a $3^3 \equiv 1$ (mod. 13), et comme $1000 \equiv 1$ (mod. 3), il s'ensuit $3^{1000} \equiv 3$ (mod. 13). (Gauss).

3° Soit à trouver les restes des puissances de $a = 189$ divisées par $b = 191$.

On trouve directement les restes 1, 189, 4, 183, 16, 159, 64, 63, ... On a ainsi :

$$a^7 \equiv a^6 - a^0\,, \quad \text{d'où} \quad a^8 \equiv a^7 - a^1\,,\ a^9 \equiv a^8 - a^2\,, \ldots \quad \text{(mod. 191)}$$

De même, pour $b = 19$ et $a = 3, 4, 5, 6$, on pourra utiliser les relations

$$2a^2 + 1 \equiv 0\,,\quad a^2 - a - 1 \equiv 0\,,\quad a^2 - a - 1 \equiv 0\,,$$
$$a^2 + 2 \equiv 0 \qquad \text{(mod. 19) (Desmarets)}$$

4° Enfin nous ferons remarquer que, pour les restes des puissances de $a = \dfrac{b \pm 1}{2}$, on a :

$$2a \pm 1 \equiv 0\,,\ 2a^2 \pm a \equiv 0\,,\ 2a^3 \pm a^2 \equiv 0\,, \ldots \qquad (\text{mod. } b)$$

3. — *Si* a *est premier avec* b, *il y a toujours dans la progression* a, a^2, a^3, ... a^{b-1}, *au moins un terme* a^t *qui, divisé par* b *donne le reste* 1. *Les restes suivants se reproduisent périodiquement.* (Euler 1759). Aucun reste n'étant nul, parmi les b premiers restes, il y en a au moins deux qui sont égaux. Posons en conséquence :

$$a^x \equiv c \ , \ a^y \equiv c \ , \quad \text{il viendra} \quad a^y(a^{x-y} - 1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } b)$$

ce qui démontre la première partie de la proposition. La deuxième se vérifie en observant que de $a^t \equiv 1$, $a^n \equiv \alpha$ (mod. b), on tire $a^{t+n} \equiv \alpha$ (mod. b).

Cor. I. Si t est le *gaussien*[1] de a, tous les restes qui précèdent sont différents. Autrement le raisonnement de tout à l'heure ferait voir qu'il y a une puissance plus petite qui donne le reste 1, et t ne serait pas le gaussien de a.

II. De ce qu'on peut toujours écrire $a^t \equiv 1$ (mod. b), on conclut que tout entier a premier avec b a toujours un *associé* $\alpha = a^{t-1}$, c'est-à-dire un nombre tel que $a\alpha \equiv 1$ (mod. b).

III. a et c étant premiers avec b, on peut toujours écrire

$$a^t \equiv 1 \ , \ c^s \equiv 1 \ , \quad \text{d'où} \quad a^t - c^s = kb \qquad (\text{mod. } b)$$

multipliant par c et posant $ca^{t-1} \equiv x$, $kc \equiv y$ (mod. b), cette équation devient

$$(\alpha) \qquad ax - by = c \ ,$$

Ainsi, a *et* c *étant premiers avec* b, *on peut toujours trouver un nombre* x < b, *tel que la relation* α *ait lieu.*

Autrement. Les b nombres

$$a^{b-1},\ a^{b-2}c\ ,\ a^{b-3}c^2,\ \dots\ a^2c^{b-3},\ ac^{b-2},\ c^{b-1}$$

sont incongrus à b : il y en a donc au moins deux qui sont congrus entre eux. Posons en conséquence :

$$a^{k-1}c^{b-k} \equiv a^{k-1+h}c^{b-k-h} \qquad (\text{mod. } b)$$

ce qui donnera

$$(\beta) \qquad c^h \equiv a^h \qquad (\text{mod. } b)$$

[1] Exposant de la plus petite puissance de a qui donne $a^x \equiv 1$ (mod. b).

Il existe donc un nombre h inférieur à b permettant de satisfaire à (β). Le reste de la démonstration s'achève comme tout à l'heure.

IV. *Si* $a^x \equiv 1$ (mod. b), x *est forcément un multiple du gaussien* t.

V. Les t restes sont évidemment premiers avec le diviseur b, de sorte que si, avec Gauss, on désigne par $\varphi(b)$ le nombre des entiers plus petits que b et premiers avec lui, on a $t \leqq \varphi(b)$.

Si $t < \varphi(b)$, soient 1, α, α'', ... les t restes, et β, γ, δ, ... les autres nombres inférieurs à b et premiers avec lui. En divisant par b les nombres β, $\beta\alpha$, $\beta\alpha'$, $\beta\alpha''$, ... on aura t restes différant entre eux et différents des premiers, puisque, en posant, par exemple,

$$a^f \equiv \alpha \,, \quad a^g \equiv \alpha' \qquad \text{(mod. } b)$$

aucune des expressions suivantes, où $f < g < t$,

$$\beta a' - \beta a \equiv \beta a^f(a^{g-f} - 1) \,, \quad \alpha' - \beta\alpha \equiv a^f(a^{g-f} - \beta) \quad \text{(mod. } b)$$

ne peut se réduire à un multiple de b ; car a^{g-f} n'est ni $\equiv 1$ (mod b), ni $\equiv \beta$ (mod. b), puisque $g - f < t$ et que le reste correspondant ne peut être que α, ou α', ou α'', ...

Opérons de même sur les restes γ, δ, ... nous finirons par épuiser complètement la suite des nombres $< b$ et premiers avec lui. Cette suite est donc partagée en groupes de t termes et par suite $\varphi(b)$ est un multiple de t. Par conséquent t est égal à $\varphi(b)$ on à un diviseur de $\varphi(b)$. (Euler 1758).

4. — *Théorème d'Euler. Si les nombres* a *et* b *sont premiers entre eux, on a :*

$$(11) \qquad a^{\varphi(b)} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } b)$$

En effet $\varphi(b)$ est un multiple de t, d'après le corollaire qui précède.

5. — *Théorème de Fermat.* Si b est un nombre premier p, on a $\varphi(p) = p - 1$, d'où

$$(12) \qquad a^{p-1} \equiv 1 \,.$$

Autrement. De (7) on tire :

$$(x + 1)^p - x^p \equiv 0 \,,$$

d'où, en changeant successivement x en $a - 1$, $a - 2$, ... 3, 2, 1 et additionnant, la relation

$$(13) \qquad a(a^{p-1} - 1) \equiv 0\,,$$

identique à (12). (Euler 1748).

Cor. I. Quel que soit l'entier x, on a :

$$(14) \qquad x^p - x \equiv 0\,. \qquad \text{(Euler)}$$

La grande importance du théorème de Fermat résulte de ce fait caractéristique que la congruence (14) quoique non identique, est satisfaite pour x quelconque. Il fait partie du petit nombre de ces vérités simples et fécondes, — telles qu'en géométrie, le théorème de Pythagore et celui des triangles semblables, — lesquelles, condensant en une seule idée un grand nombre de principes en apparence distincts, — parce que la faiblesse de notre intelligence nous empêche de voir qu'ils n'en font souvent qu'un seul vu sous des aspects différents, — nous permettent de ménager nos efforts dans la conquête de nouvelles vérités et d'envisager de nouveaux buts. Aussi les diverses généralisations élémentaires qui ont été données de ce théorème sont-elles restées à peu près sans emploi et ne présentent-elles guère d'autre intérêt que celui d'exercices isolés.

II. Puisque $p - 1$ est un nombre impair, on a, en posant $p = 2m + 1$:

$$(15) \qquad (a^m + 1)(a^m - 1) \equiv 0$$

Les deux facteurs du premier membre ne peuvent avoir d'autre facteur commun que 2 ; on a donc :

$$(16) \qquad a^m + 1 \equiv 0 \text{ ou } a^m - 1 \equiv 0$$

III. *Théorème de Wilson*. De (9) et de (12), on tire

$$(17) \qquad (p-1)! + 1 \equiv 0$$

IV. 1° Supposons $p = 4q + 1$ et soit $x = a$ une des non-racines de $(x + 1)^{2q} - x^{2q} \equiv 0$. Puisque $(a + 1)^{4q} - a^{4q} \equiv 0$, il s'ensuit que $(a + 1)^{2q} + a^{2q} \equiv 0$. Ainsi $p = 4 + 1$ *divise toujours une somme de deux carrés.* D'ailleurs aucun nombre premier $p = 4 - 1$ ne peut diviser $x^2 + y^2$; en effet on a : $x^{p-1} - y^{p-1} \equiv 0$; donc en posant $p = 2m + 1$, on voit que $(x^2)^m + (y^2)^m$ ne peut être $\equiv 0$. Or cette expression est divisible par $x^2 + y^2$ puisque m est impair ; donc a fortiori p ne peut diviser $x^2 + y^2$ (Euler).

2° Selon que u et v sont de même parité ou de parité différente, $u^2 + uv + v^2$ peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2u+v}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{u}{2}\right)^2.$$

Donc si $x = a$ est une non-racine de $(x+1)^{2n} - x^{2n} \equiv 0$, le nombre $p = 6k + 1$ étant premier, on aura :

$$[(a+1)^{2k} - a^{2k}]\,[(a+1)^{4k} + (a+1)^{2k}a^{2k} + a^{4k}]$$
$$= (a+1)^{6k} - a^{6k} \equiv 0\,;$$

donc $p = 6 + 1$ divise $y^2 + 3z^2$ (Euler).

V. Chacune des congruences $x^m + 1 \equiv 0$, $x^m - 1 \equiv 0$ a m racines (lemme VI).

La congruence $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ a les $p - 1$ racines 1, 2, 3,... $p - 1$, ou si l'on veut, les nombres ± 1, ± 2, $\pm 3, \ldots \pm m$. De là, les relations

$$(18)\qquad (x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) - x^{p-1} + 1 \equiv 0$$

$$(19)\qquad (x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-m^2) - x^{p-1} + 1 \equiv 0.$$

Ces deux congruences, bien que du degré $p - 2$, ont $p - 1$ racines : elles sont donc identiques, et, en les développant, les coefficients seront tous $\equiv 0$ (Lagrange).

VI. Plus généralement, si f est un diviseur de $p - 1$, la congruence $x^f - 1 \equiv 0$ a f racines (Euler). Ainsi selon que $p = 4 \mp 1$, la congruence $x^4 - 1 \equiv 0$ a deux ou quatre racines.

VII. 1° Soit $p = 4q + 1$, on aura pour certaines valeurs de x,

$$x^{2q} + 1 \equiv 0.$$

donc $p = 4 + 1$ *divise une somme de deux carrés et est par suite une somme de deux carrés.* (Fermat). On utilise le lemme VII.

2° Soit $p = 8q + 1$, il viendra

$$0 \equiv x^{4q} + 1 = (x^{2q} \mp 1)^2 \pm 2q\,(x)^2$$

par conséquent $p = 8 + 1$ *divise certains nombres des deux formes* $y^2 \pm 2z^2$ *et par suite il est de ces deux formes.* (Lemme VII).

3° Soit $p = 8q + 3$; la valeur $x = 2$ rend incongru à p le second facteur du produit $(x^{4q+1} + 1)(x^{4q+1} - 1)$, puisqu'il est alors de la forme $2y^2 - 1$, laquelle ne convient pas à la forme $8q + 3$, que y soit pair ou qu'il soit impair. On a donc :

$$0 \equiv 2^{4q+1} + 1 = 2y^2 + 1\,.$$

ce qui fait voir que *les nombres premier* $8 + 3$ *sont diviseurs de nombres de la forme* $2y^2 + z^2$ *et par suite sont de la même forme.*

4° Soit $p = 8q + 7$; on a :

$$0 \equiv (2^{4q+3} + 1)(2^{4q+3} - 1)\,.$$

p ne peut diviser $2^{4q+3} + 1$, ni par suite $2^{4q+4} + 2$, car il serait de la forme $2y^2 + 2$, qui ne peut se réduire à la forme $8q + 7$. On a, par conséquent :

$$0 \equiv 2^{4q+4} - 2 \equiv y^2 - 2\,.$$

Donc *les nombres premiers* $8 + 7$ *sont diviseurs de* $y^2 - 2z^2$ *et sont de la même forme.*

5° La comparaison de ces quatre théorèmes fait voir que leurs réciproques sont vraies.

6° Si $p = 3 + 1$, la congruence $x^3 - 1 \equiv 0$ a trois racines, puisque son premier membre divise $x^{p-1} - 1$. Soit a une de ces racines ; on aura :

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad a^2 + a + 1 \equiv 0 \quad \text{et} \quad (2a + 1)^2 + 3 \equiv 0.$$

Donc *tout nombre premier* $3 + 1$ *divise* $x^2 + 3y^2$, *et par suite est de la même forme.*

7° Soit $p = 5 + 1$; il viendra, en appelant a une des racines de $x^5 - 1 \equiv 0$,

$$(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \equiv 0. \quad \text{d'où} \quad (2a^2 + a + 2)^2 - 5a^2 \equiv 0\,.$$

Donc *tout nombre premier* $5+1$ *divise* $x^2 - 5y^2$, *et par suite est de la même forme.*

8° Enfin soit $p = 7+1$ et soit a une racine de $x^7 - 1 \equiv 0$; il viendra :

$$(2a^3 + a^2 - a - 2)^2 + 7(a^2 + a)^2 \equiv 0.$$

Donc *tout nombre premier* $7+1$ *divise* $x^2 + 7y^2$.

Ces démonstrations sont dues à Euler (1°, 2°, 7° et 8°) et à Lagrange (3°, 4° et 6°). Gauss a fait voir que A et A′ désignant certains polynomes entiers en a, selon que $p = 4 \pm 1$, on a :

$$4\,\frac{a^p - 1}{a - 1} = A^2 \pm pA'^2 ;$$

mais la *loi de réciprocité,* qui sera donnée plus tard, dispense d'entrer dans plus de détails à ce sujet.

6. — Si t est le gaussien de a, p est de la forme $th + 1$ (Euler). En effet t divise $p - 1$, donc $p \equiv 1$ (mod. t).

Cor. I. Si t est premier, tout facteur premier impair de $a^t - 1$, qui ne l'est pas de $a - 1$ est de la forme $2th + 1$. De plus, il est de la forme quadratique $x^2 - ay^2$, car de $a^t - 1 \equiv 0$, on tire

$$\left(a^{\frac{t+1}{2}}\right)^2 - a \equiv 0.$$

II. Si t est premier, tout facteur premier de $2^t - 1$ est de de la forme $2th + 1$ (Fermat), et de l'une des formes 8 ± 1, car il divise $2^{t+1} - 2$, qui est de la forme $x^2 - 2$. (Euler).

Ainsi les facteurs premiers de $2^{31} - 1$ étant à la fois $62 + 1$ et 8 ± 1, on trouvera aisément qu'ils appartiennent à l'une des formes $248 + 1$, $248 + 63$. Essayant la division par les nombre premiers de ces deux formes, Euler s'est assuré que $2^{31} - 1$ est premier, comme l'avait affirmé Fermat.

III. Tout diviseur impair p de $a^t + 1$ est de la forme $2th + 1$. En effet p divise $a^{2t} - 1$; or il ne divise aucun nombre $a^n - 1$, où n serait diviseur de $2t$, car il diviserait aussi $a^t - 1$, ce qui ne peut être, puisqu'il divise $a^t + 1$, et que les deux nombres $a^t - 1$ et $a^t + 1$ n'ont d'autre diviseur commun que 2.

Application. Fermat avait pensé que la formule $2^{2^n} + 1$ ne renferme que des nombres premiers. Euler a prouvé ainsi l'inexactitude de cette proposition. Les diviseurs de $2^{32}+1$ sont de la forme $64+1$; or les nombres premiers de cette forme $< \sqrt{2^{32}+1}$ sont 193, 257, 449, 641... Essayant la division de $2^{32}+1$ par ces nombres, on trouve qu'elle réussit avec 641 [1].

Depuis, on a trouvé de même que pour $n = 5, 6, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38$, le nombre $2^{2^n}+1$ est composé. Il y en a probablement une infinité dans ce cas.

Cette méthode d'Euler a été l'objet d'importantes extensions. Voici la plus simple, due à Ed. Lucas: *les diviseurs de* $2^{32}+1$ *sont de la forme* $128+1$ (7, *Appl.*). On a donc à considérer seulement les nombres premiers de cette forme, dont le premier est 641. L'examen des diviseurs à exclure est ainsi considérablement réduit.

7. — *Résidus et non-résidus.* Le reste de la division de a^m par p est, comme on sait, 1 ou — 1. Le nombre a est appelé *résidu* de p dans le premier cas et *non-résidu* dans le second [2]: la raison de ces dénominations est que, suivant qu'on a $a^m \equiv \pm 1$, on peut ou on ne peut écrire $x^2 \equiv a$. En effet :

1° Supposons qu'on pût écrire $x^2 \equiv a$ avec $a^m \equiv -1$, on aurait

$$x^{p-1} \equiv a^m \equiv -1 ,$$

ce qui est faux, car $x^{p-1} \equiv 1$; a n'est donc pas un résidu.

2° Soit $a^m \equiv 1$, on a la congruence

$$x^{p-1} - a^m \equiv 0$$

qui a $p-1$ racines. Or le premier membre est divisible par $x^2 - a$, donc la congruence $x^2 - a \equiv 0$ a deux racines, et a est résidu.

Cor. 1. *Le produit de plusieurs nombres est un résidu ou un non-résidu selon que le nombre des non-résidus qui entrent comme facteurs dans ce produit est pair ou impair.*

---

[1] On peut être surpris que Fermat, qui avait fait tous les frais de cette démonstration, en ait laissé l'honneur à Euler. D'après Plana, il ne paraît pas avoir non plus remarqué les deux formes des diviseurs de $2^t - 1$. (*Mém. sur la th. des n,* Turin, 1859.)

[2] Nous rappelons que partout m est mis pour $\frac{p-1}{2}$.

II. *La congruence*

$$x^2 - ay^2 \equiv b \tag{α}$$

est toujours possible (Lagrange). Il faut démontrer qu'au moins un résidu de p est de la forme $ay^2 + b$, ou que la congruence

$$(ay^2 + b)^m \equiv 1 \tag{β}$$

pou toujours avoir lieu. Or la congruence conjuguée $(ay^2 + b)^m \equiv -1$ est du degré $p - 1$ et ne saurait avoir $p - 1$ racines. Elle a donc au moins une non-racine, qui satisfait à (β) et par suite à (α).

III. Si $p = 4 + 1$, a et $-a$ seront ensemble résidus ou non-résidus. Si $p = 4 - 1$, l'un est résidu et l'autre non-résidu. On a en effet, selon l'un ou l'autre cas,

$$a^m(-a)^m = \pm (a^2)^m .$$

IV. 1° Si $p = 8 \pm 1$, on aura :

$$2y^2 \equiv x^2 \quad \text{d'où} \quad 2^m y^{p-1} \equiv x^{p-1} ,$$

ou bien

$$2^m \equiv 1 . \qquad (p = 8 \pm 1) \tag{18}$$

2° Si $p = 8 + 3$, on aura :

$$2y^2 \equiv - x^2 , \quad \text{d'où} \quad 2^m y^{p-1} \equiv - x^{p-1} \equiv -1 .$$

Donc

$$2^m \equiv -1 . \qquad (p = 8 + 3) \tag{19}$$

3° Si $p = 8 + 5$, p ne peut être de la forme $x^2 - 2y^2$; on ne peut donc écrire $2^m \equiv 1$ et par suite on a :

$$2^m \equiv -1 . \qquad (p = 8 + 5) \tag{20}$$

4° En résumé on a :

$$2^m \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} . \tag{21}$$

Applications. 1° *Selon que* p *est de l'une des formes* 8 ± 1 *ou de l'une de celles-ci* 8 ± 3, p *divise* $2^m - 1$ *ou* $2^m + 1$. (Euler.)

2° Soit $p = 8hk + 1$ un diviseur premier de $2^{4h} + 1$ (6, III). k est pair; autrement, en élevant à la puissance de degré impair k la congruence $2^{4h} \equiv 1$, on aurait $2^m \equiv -1$ ce qui ne peut être puisque 2 est résidu de p. Ainsi tout diviseur de $2^{4h} + 1$ est de la forme $16h + 1$. (Ed. Lucas.)

8. — *Racines primitives.* On appelle *racine primitive* de p un nombre dont les $p - 1$ premières puissances divisées par p donnent pour restes la totalité des nombres 1, 2, 3, ... $p - 1$.

Le nombre premier p *a* φ(p — 1) *racines primitives* (Euler). Démonstration de Gauss. 1° Décomposons $p - 1$ en ses facteurs premiers, et soit $p - 1 = 2^{\omega} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ soit g une des non-racines de $x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1$, et posons

$$g^{\frac{p-1}{a^{\alpha}}} \equiv \mathrm{A}\,, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A}^{a^{\alpha}} \equiv g^{p-1} \equiv 1\,.$$

L'exposant de toute puissance inférieure de A congrue à l'unité doit diviser a^{α} et elle ne peut être que de la forme $\mathrm{A}^{a^{\alpha-k}}$. Or ce nombre ne peut être congru à 1, puisque son multiple

$$\mathrm{A}^{a^{\alpha-1}} \equiv g^{\frac{p-1}{a}}$$

ne l'est pas : on peut donc toujours trouver un nombre A tel que a^{α} soit congru à l'exposant de la plus petite puissance congrue à 1 (gaussien de A).

2° Soient B, C, ... les nombres formés de la même manière avec b^{β}, c^{γ}, ... et posons $(\mathrm{ABC}\ldots)^t \equiv 1$. L'un des facteurs premiers de $p - 1$, a par exemple, divise donc $\frac{p-1}{t}$, et par suite

$$(\alpha) \qquad (\mathrm{AB}\ldots)^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1\,.$$

Or les nombres b^{β}, c^{γ}, ... divisent $\frac{p-1}{a}$, donc on a :

$$\mathrm{B}^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1\,, \quad \mathrm{C}^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1\,, \ldots$$

et par suite, à cause de (α)

$$A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 .$$

a^α diviserait donc $\frac{p-1}{a}$, ce qui est faux, car $\frac{p-1}{a^{\alpha+1}}$ n'est pas entier. Le nombre $p-1$ est donc le gaussien de (AB...).

3° [1] Soit R la racine primitive (AB...) dont l'existence vient d'être prouvée. Si θ est le *p. g. c. d.* de $p-1$ et de h, on a :

$$(R^h)^{\frac{p-1}{\theta}} = (R^{\frac{h}{\theta}})^{p-1} \equiv 1 .$$

Si $\theta > 1$, le gaussien de (R^h) est $< p-1$, et (R^h) n'est pas une racine primitive. Si $\theta = 1$, h est premier avec $p-1$ et, en appelant t le gaussien de (R^h), on a :

$$R^{ht} = (R^h)^t \equiv 1 ;$$

donc ht est diviseur de $p-1$ et ne peut être que $p-1$.

Ainsi (R^h) sera racine primitive ou non selon que h sera ou ne sera pas premier avec $p-1$.

Cor. I. a, b, c, ... désignant les nombres inférieurs à $p-1$ et premiers avec lui, les termes de la suite R, R^a, R^b, ... sont congrus à toutes les racines primitives.

II. Conservant les mêmes notations, on verra que parmi les racines primitives, R, R^a, R^b, ... il y en a deux dont la somme des exposants est égale à $p-1$. Les racines primitives sont donc associées et par suite leur produit est $\equiv 1$. (Gauss.)

III. Les racines non-primitives ne sont autres que les résidus des puissances dont les exposants ne sont pas premiers avec $p-1$. Ainsi : 1°, 2 et 3 étant les facteurs premiers de $13-1$, les racines non-primitives de 13 sont les résidus quadratiques et les résidus cubiques de ce nombre.

2° Si p est de la forme 2^h+1, (ce qui a lieu pour $h = 2$, 4, 8, 16), les racines primitives se confondent avec les non-résidus quadratiques.

3° Si h étant premier, $p = 2h+1$ (les valeurs $p = 7$, 11,

[1] Cette troisième partie de la démonstration avait été donnée antérieurement par Euler.

23, 47, 59, 83, 107. 167, 179, 227, 263, ... sont dans ce cas), les racines primitives sont également les non-résidus, sauf le non-résidu $p - 1 = 2h$.

IV. Les racines de $x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1$, $x^{\frac{p-1}{b}} \equiv 1$, ... sont toutes non-primitives ; donc la congruence

$$\frac{(x^{p-1} - 1)X}{\left(x^{\frac{p-1}{a}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{b}} - 1\right)\ldots} \equiv 0 .$$

donne toutes les racines primitives, X désignant la congruence ayant pour racines les racines communes aux facteurs du dénominateur.

Quand $p - 1$ est de la forme $2^{\omega}a^{\alpha}$, on a :

$$X = x^{\frac{p-1}{2a}} - 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{x^{\frac{p-1}{2}} + 1}{x^{\frac{p-1}{2a}} + 1} \equiv 0 ,$$

pour la congruence des racines primitives. Le premier membre divisant $x^{p-1} - 1$, la congruence a toutes ses racines, lesquelles sont ainsi au nombre de

$$\frac{p-1}{2} - \frac{p-1}{2a} .$$

Par exemple, pour $p = 13$ on trouve la congruence $x^4 - x^2 + 1 \equiv 0$, dont les quatre racines, 2, 6, 7, 11. sont les racines primitives de 13. (Cauchy.)

Exercices.

I. Posons

$$1^q + 2^q + 3^q + \ldots + n^q = s_{n.q} , \quad 1^q - 2^q + 3^q - \ldots \pm n^q = \sigma_{n,q} :$$

on aura :

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{2n,q} \equiv 0 , \text{ dans tous les cas ;} \\ \sigma_{n-1,q} \equiv 0 , \ n \text{ impair et } q \text{ pair ;} \\ s_{n-1,q} \equiv 0 , \ n \text{ et } q \text{ impairs, } n > q ; \\ s_{n,q} - 2\, s_{\frac{n-1}{2},q} \equiv 0 , \ n \text{ et } q \text{ pairs ;} \end{array}\right\} \pmod{n}.$$

2. Tout nombre premier, autre que 2 et 5, divise une infinité de nombres formés de chiffres 9 (Crelle) ou de chiffres 1 (Plateau).

3. On a :

$C_{p-1,n-1} \equiv 0 \pmod{n}$ (D. André.)

$C_{p-1,n} \equiv \pm 1$ (Catalan.)

$(pq)!$ multiple de $(q!)^p\, p!$ (Weill.)

4. 1° Si le gaussien t de a est un nombre pair 2τ, a^τ donne le reste $b-1$, ainsi que $a^{t+\tau}$, $a^{2t+\tau}$, ... Autrement a^t ne pourrait être $\equiv 1 \pmod{b}$.

2° Si t est impair, $b-1$ ne fait pas partie des t restes. (Euler.)

3° Si t est pair, on a $a^{t+k} \equiv -a^{\tau-k} \pmod{b}$.

4° Si $a^p \equiv 1 \pmod{b}$ et que p soit un nombre premier, p divise t. (Euler.)

5° Si b est un nombre premier de la forme $4+1$, t ne peut être impair puisque -1 fait partie des t restes.

5. 1° a^n et a^{t-n} étant évidemment associés, les restes qui en proviennent en divisant par b, sont associés deux à deux, sauf le reste $b-1$ quand il a lieu.

2° Si α est l'associé de a relativement à b, les deux périodes de restes de a^x et de α^x sont formées de mêmes nombres dans des ordres inverses. En effet, soit $a^n - \alpha^{t-n} \equiv c \pmod{b}$, il viendra $a^t - (a\alpha)^{t-n} \equiv ca^{t-n}$; donc $c = 0$.

3° La somme des t restes est congru à b (Gauss). On le voit en faisant la somme

$$a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^{t-1}.$$

4° Le produit des t restes est $\equiv \pm 1 \pmod{b}$ selon que t est pair ou impair. Ce produit est en effet congru au produit $a^1 a^2 \ldots a^{t-1}$ (Gauss).

6. Si $a^f \equiv r$ et $a^{f+g} \equiv rs \pmod{b}$, on a : $a^g \equiv s$ (mod. b. (Euler).

7. $A + M$ étant incongru à p, la congruence $Ax^{p-1} + \ldots + M \equiv 0$ ne saurait avoir toutes les racines $1, 2, \ldots p-1$, car

en y faisant successivement $x = 1, 2, 3, \dots p - 1$ et additionnant, on aurait $A + M \equiv 0$, à cause de (8) et (9).

8. La période de la fraction décimale provenant de la division de a par p a un nombre de chiffres qui est un diviseur de $p - 1$ (Gauss).

9. On a :

$$(a + b + c + \dots + l)^p \equiv a^p + b^p + c^p + \dots + l^p . \quad \text{(Gauss.)}$$

Cette relation se démontre, d'après Serret, en changeant successivement dans (7) b en $b + c$, etc.

10. La solution de la congruence $gx \equiv k$ est $x \equiv kg^{p-2}$.

En général soit $gx - hy = k$. Décomposons h en ses facteurs premiers et soit $h = a^\alpha b^\beta \dots$; $(1 - g^{a-1})^\alpha$ est divisible par a^α, $(1 - g^{b-1})^\beta$ l'est par b^β, ... ; donc on a :

$$gG = 1 - (1 - g^{a-1})^\alpha (1 - g^{b-1})^\beta \dots = 1 - hH$$

d'où

$$x = Gk \ , \ y = Hk .$$

Cette solution est due à Gauss. On a aussi, avec Libri,

$$x = \frac{(g^{a-1} - 1)^{A\alpha} (g^{b-1} - 1)^{B\beta} \dots + 1}{g} k$$

A, B, ... désignant des entiers quelconques.

11. Si a et $b = a - k$ sont premiers avec p, on a :

$$\frac{a^{p-1} - b^{p-1}}{k} \equiv 0 .$$

12. Si $a^k \equiv b^k$ on ne peut avoir $a^{k-1} \equiv b^{k-1}$ car il s'ensuivrait $a^{k-1} b \equiv b^k \equiv a^k$ et $a \equiv b$. On ne peut donc écrire $a^{p-2} \equiv b^{p-2}$, et les restes de la division de x^{p-2} par p donnent la série $1, 2, 3, \dots p - 1$.

On peut donc toujours écrire $x^{p-2} \equiv a$, et cette congruence a une racine unique.

De là la relation $ax \equiv x^{p-1} \equiv 1$. Ainsi le nombre a a toujours un associé, qui est unique.

13. 1° Si $a^\alpha \equiv 1$, on a :

$$\alpha^m \equiv a^m \ , \quad \text{car} \quad 0 \equiv \alpha^{2m} - 1 \equiv \alpha^m (\alpha^m - a^m) .$$

Plus généralement, si a est une racine de $Ax^k + \ldots + M \equiv 0$, son associé α en est une de $Mx^k + \ldots + A \equiv 0$, ce qu'on démontre en posant $x\xi \equiv 1$ et multipliant la première congruence par ξ^k.

2° Si $a^\alpha \equiv 1$, on a :

$$a^{p-k} \equiv \alpha^{k-1}.$$

3° Les restes des divisions de a^{p-k} et de a^{k-1} par p sont associés.

14. Si k est premier avec $p - 1$, on peut toujours résoudre la congruence $x^k \equiv r$ (Sophie Germain). En effet si on avait, par exemple, $a^k \equiv b^k$, en posant $ky - (p-1)z = 1$, cette congruence deviendrait

$$a^{ky} \equiv b^{ky} \quad \text{d'où} \quad a^{(p-1)z+1} \equiv b^{(p-1)z+1} \quad \text{ou} \quad a \equiv b,$$

ce qui est absurde.

On voit d'ailleurs que la valeur de x n'est autre que le reste ξ de la division de r^y par p, puisqu'on a :

$$\xi^k \equiv (r^y)^k \equiv r^{(p-1)z+1} \equiv r \equiv x^k, \quad \text{d'où} \quad x \equiv \xi.$$

15. Démontrer les relations suivantes :

$$2^{p-2} \equiv m + 1 \; ; \quad (p-2)^{p-2} \equiv m \; ; \quad \left(\frac{p \pm 1}{2}\right)^{p-2} \equiv \pm 2 \; ;$$

$$2^m - \left(\frac{p+1}{2}\right)^m \; ;$$

$$\left(\frac{p \mp 1}{4}\right)^m \equiv 1, \; (\text{pour } p = 4 \pm 1) \; ; \quad \frac{a^{p(p-1)} - 1}{p} \equiv 0 \; ;$$

$$a^{(b-2)^p - b} \equiv 1 \; ;$$

$$s_{p-1,\, p-1} \equiv -1 \; ; \quad s_{p-1,\, p} \equiv 0 \; ; \quad 2s_{m,\, p-1} \equiv -1 \; ; \quad s_{m,\, p} \equiv 0 \; ;$$

$$\sigma_{p-1,\, p-1} \equiv 0 \; ; \quad s_{2a,\, p} + a(2a+1)^p \equiv 0 \; ; \quad \sigma_{4a,\, p} + (2a)^p \equiv 0 \; ;$$

$$\sigma_{4a+1,\, p} - (2a+1)^p \mp 0 \; ; \quad s_{m,\, 2a} \equiv 0 \; (\text{pour } 2a < p - 2) \; ;$$

$$a^{p-1} \equiv (p-1)^a \equiv 0 \; (\mp, \text{ selon que } a \text{ est pair ou impair}) \; ;$$

$$\left(\frac{n}{p}\right)^{p-1} + \left(\frac{n}{q}\right)^{q-1} + \ldots + \left(\frac{n}{r}\right)^{r-1} \equiv 1 \; (\text{mod. } pq \ldots r),$$

$p, q, \ldots r$, nombres premiers.

16. Soient p, q, r, ... s, des nombres premiers qui ne divisent pas a et tels que $p - 1$ soit multiple de $q - 1$, de $r - 1$, ... de $s - 1$; $a^p - a$ est divisible par le produit $pqr \ldots sa$ (Euler). En effet $a^{p-1} - 1$ peut s'écrire

$$(a^{\mathrm{Q}})^{q-1} - 1 \, . \quad \text{ou} \quad (a^{\mathrm{R}})^{r-1} - 1 \, , \ldots$$

En outre le produit suivant est entier

$$(a^{p-1} - 1)\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \ldots\right).$$

17. Soit $p - 1 = qr$. Si $\mathrm{A}a^q \equiv \mathrm{B}b^q$, A, a, B et b étant premiers avec p, on aura : $\mathrm{A}^r \equiv \mathrm{B}^r$. (Euler.) En effet $\mathrm{A}^r a^{p-1} - \mathrm{B}^r b^{p-1}$ est divisible par $\mathrm{A}a^q - \mathrm{B}b^q$ et par suite par p, de même que $\mathrm{A}^r a^{p-1} - \mathrm{A}^r b^{p-1}$. On a ainsi $b^{p-1}(\mathrm{A}^r - \mathrm{B}^r) \equiv 0$.

On a des cas particuliers intéressants avec $\mathrm{A} = b = 1$, $\mathrm{B} = b = 1$, $\mathrm{B} = 1$, etc.

18. 1° Si f et g sont deux facteurs de $p - 1$ ayant ε comme *p. g. c. d.* on pourra poser $f\mu - g\nu = \varepsilon$, d'où, si on désigne par a une racine commune de $x^f - 1 \equiv 0$ et de $x^g - 1 \equiv 0$, il viendra $1 \equiv a^{f\nu} \equiv a^{g\mu + \varepsilon} \equiv a^\varepsilon$. Donc les racines de $a^\varepsilon - 1 \equiv 0$ sont les racines communes aux deux congruences données.

Ainsi si f et g sont premiers entre eux, les deux congruences n'ont d'autre racine commune que 1.

Si $g = p - 1$, la congruence $x^f - 1 \equiv 0$ n'a pas d'autres racines que celles de $x^\varepsilon - 1 \equiv 0$. On peut ainsi se contenter d'étudier la congruence $x^\varepsilon - 1 \equiv 0$, où ε est un diviseur premier de $p - 1$.

Autre exemple. k et l désignant deux facteurs premiers de $p - 1$, les racines communes à $x^{\frac{p-1}{k}} - 1 \equiv 0$ et à $x^{\frac{p-1}{l}} - 1 \equiv 0$ sont celles de $x^{\frac{p-1}{kl}} - 1 \equiv 0$.

2° Soient k, l, ... les facteurs premiers de f. Si a est une non-racine des congruences $x^{\frac{f}{k}} - 1 \equiv 0$, $x^{\frac{f}{l}} - 1 \equiv 0$, ... les solutions de $x^f - 1 \equiv 0$ sont 1, a, a^2, ... a^{f-1}. Supposons en effet qu'on ait $a^c \equiv a^d$, d'où $a^{d-c} \equiv 1$; en appelant θ le *p. g. c. d.* de $d - c$ et de f, on peut écrire :

$$fy - (d - c)z = \theta \quad \text{d'où} \quad 1 \equiv (a^f)^y \equiv a^{(d-c)z+\theta} \equiv a^\theta ;$$

on aurait ainsi l'une ou l'autre des relations $a^{\frac{f}{k}} - 1 \equiv 0$, $a^{\frac{f}{l}} - 1 \equiv 0$, contrairement à l'hypothèse.

3° Si $a^k \equiv r$, on aura $r^{\frac{p-1}{k}} \equiv 1$, donc, en divisant les puissances r, r^2, r^3, ... par p, on trouvera le reste 1 avant r^{p-1}. Les résidus de p sont dans ce cas, puisque 2 est un facteur premier de $p - 1$.

4° Supposons $\alpha^h \equiv 1$ et soit θ le *p. g. c. d.* de h et de $p - 1$. On aura :

$$h\mu - (p-1)\nu \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad a^\theta \equiv \alpha^{h\mu} \equiv 1 \quad \text{et} \quad x^{p-1} - \alpha^\theta \equiv 0 .$$

Le premier membre de cette dernière congruence est divisible par $x^{\frac{p-1}{\theta}} - \alpha$, donc la congruence $x^{\frac{p-1}{\theta}} - \alpha \equiv 0$ a $\frac{p-1}{\theta}$ racines.

Soit $h = 2$, on a $\theta = 2$ et la valeur $\alpha = -1$ répond ou ne répond pas à la question selon que $p = 4 \pm 1$; donc, dans les mêmes cas, la congruence $x^2 + 1 \equiv 0$ a ou n'a pas de racines.

5° Soit t le gaussien de a. La division de a, a^2, ... a^t par p donne pour restes les t racines de $x^t - 1 \equiv 0$ et par suite les périodes des restes sont formées des mêmes nombres.

Ainsi la période de m restes comprend tous les résidus.

Pour $p = 19$, les puissances des nombres 5, 6, 9, 16, 17 donnent des périodes composées des nombres 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17.

6° Euler, à qui sont dues, en principe, toutes ces propositions, remarque aussi que :

Si $\alpha^h \equiv \beta^h$ et si a n'est pas multiple de p, on a :

$$\alpha x^{\frac{p-1}{h}} - \beta a^{\frac{p-1}{h}} \equiv 0 ;$$

si $ab^h \equiv c^h$, on peut écrire :

$$ax^h \equiv d^h \quad \text{et} \quad ad^h \equiv y^h .$$

19. Si la congruence $F(x \equiv 0$, de degré $n < p - 1$, a n racines, $F(x)$ est un diviseur de $x^{p-1} - 1$. Si elle en a k, $(k < n)$, $F(x)$ et $x^{p-1} - 1$ ont un diviseur commun du degré k. (Gauss.)

20. 1° Si $p - 1$ est le produit de q par un nombre impair et que a soit incongru avec p, on ne saurait avoir $x^q + a^q \equiv 0$. (Euler.) Posons en effet $x^{p-1} - a^{p-1} \equiv 0$, on ne peut avoir $x^{p-1} - a^{p-1} \equiv 0$, ni a fortiori, $x^q + a^q \equiv 0$.

2° Si $p - 1$ est le produit de q par un nombre pair, p divise $x^{2q} + 1$.

Ainsi $p = 13$ divise $x + 1$, $x^2 + 1$, $x^3 + 1$, $x^6 + 1$, ce qui revient à dire que 12 est résidu *linéaire*, *quadratique*, *cubique* et *sextique* de 13.

$p = 4 + 1$ divise $x^2 + 1$; $p = 8 + 1$ divise $x^4 + 1$; $p = 16 + 1$ divise $x^8 + 1$; ... $p - 1$ est donc résidu quadratique de $p = 4 - 1$, résidu *biquadratique* de $p = 8 + 1$, résidu *octique* de $p = 16 + 1$, ...

21. Si $p = 4 - 1$, on peut toujours trouver x et y tels que $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0$. (Euler.) Démonstration de Lagrange. Posons

$$X = \frac{x^{p-1} + (y^2 + 1)^m}{x^2 + (y^2 + 1)} = x^{p-3} - x^{p-5}(y^2 + 1) + \ldots$$

$$Y = (y^2 + 1)^m - 1 =$$

$$= [(y^2 + 1) - 1]\,[(y^2 + 1)^{m-1} + (y^2 + 1)^{m-2} + \,.\,.\, + 1]\,.$$

L'expression $\frac{Y}{y^2}$ étant du degré $p - 3$ en y, $\frac{Y}{y^2} \equiv 0$, et par suite $Y \equiv 0$, ont au moins deux non-racines. De même, y étant ainsi déterminé, X peut devenir incongru à p pour deux valeurs au moins de x. On peut ainsi déterminer x et y de manière que XY soit incongru à p. Or on a identiquement :

$$(x^2 + y^2 + 1)\,XY = (x^{p-1} - 1)\,Y + [(y^2 + 1)^{p-1} - 1]\,.$$

Le second membre est $\equiv 0$, puisque $x < p$ et que, quel que soit y, p ne divise pas $y^2 + 1$. Donc p divise le premier membre et par suite $x^2 + y^2 + 1$, si x et y ont les valeurs déterminées plus haut.

22. Tout nombre premier $p = 4 + 1$ divise une somme de deux carrés; tout nombre premier $p = 4 - 1$ divise une somme de trois carrés. (Euler.) Seconde démonstration de Matrot. On a:

$$(\alpha) \qquad x^m - 1 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad x^m + 1 \equiv 0$$
$$s_{p-1,\,m} \equiv 0$$

par conséquent moitié des nombres 1, 2, 3, ... $p - 1$ satisfont à l'une des congruences (α) et l'autre moitié à l'autre. Soit $p = 4 + 1$ et soit a une racine de la seconde (α): le premier membre est une somme de deux carrés, car alors $m = \frac{p-1}{2}$ est pair.

Soit $p = 4 - 1$. Considérons deux nombres consécutif b, $b + 1$, satisfaisant l'un à la première (α), l'autre à la seconde, chose toujours possible, puisque 1 fait partie des m nombres qui vérifient la première. Cela posé, on a:

$$(\beta) \qquad b^m - 1 \equiv 0 \;, \; (b+1)^m + 1 \equiv 0 \;. \qquad (\gamma)$$

Multipliant (β) par b et (γ) par $b + 1$, puis ajoutant, il vient :

$$b^{m+1} + (b+1)^{m+1} + 1 \equiv 0 \;.$$

Les exposants $m + 1$ sont pairs, car dans ce second cas, m est impair.

23. Tout diviseur d'une somme de quatre carrés est lui-même une somme de quatre carrés (Lagrange). Démonstration analogue à celle du lemme VII.

On tire de là le théorème de Bachet, en se servant des propositions de l'exercice précédent.

24. Les diviseurs premiers de $a^t + b^t$ sont de la forme $2th + 1$. (Euler).

25. Les diviseurs de $2^p - 1$ sont de l'une des formes

$$8ph + 1,\; 8ph + 2(2 \pm 1)\,p + 1 \qquad (p = 4 \pm 1)$$

(Plana.)

26. Si $p = 4 + 1$ divise $a^2 \pm kb^2$, il divise un autre nombre de la forme $x^2 \mp ky^2$. Si $p = 4 - 1$ divise $a^2 \pm kb^2$, il n'en divise aucun de la forme $x^2 \mp ky^2$, et, quel que soit l, il divise $x^2 + ly^2$ ou $x^2 - ly^2$.

Si p divise des nombres appartenant aux formes $x^2 - ky^2$, $x^2 - ly^2$, il en divise également un appartenant à la forme $x^2 - kly^2$.

Si p ne divise ni $x^2 - ky^2$ ni $x^2 - ly^2$, il divise $x^2 - kly^2$.

27. Voici un exemple de l'emploi des imaginaires dans la théorie des nombres.

1° On a :

$$(1 + i)^{4h} = (2i)^{2h} = - 2^{2h},$$

d'où pour $p = \mathbf{4} \pm 1$,

$$(1 + i)^p = (- 1)^{\frac{p \pm 1}{4}} (1 \pm i) 2 .$$

Développant le premier membre et comparant les parties réelles, il vient

$$(- 1)^{\frac{p \pm 1}{4}} 2^m \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 2^m \equiv (- 1)^{\frac{p \mp 1}{4}} .$$

2 est donc résidu ou non selon que $\frac{p \mp 1}{4}$ est pair ou impair, c'est-à-dire selon qu'on a $p = \mathbf{8} \pm 1$ ou $p = \mathbf{8} \pm 5$ (Lebesgue).

2° Pour $p = \mathbf{3} \pm 1$, on a :

$$(1 + \sqrt{-3})^p = (- 1)^{\frac{p \mp 1}{3}} 2^{p-1} (1 \pm i) ,$$

d'où

$$(- 3)^m \equiv \pm (- 1)^{\frac{p \mp 1}{3}} 2^{p-1} \equiv \pm (- 1)^{\frac{p-1}{3}} \equiv \pm 1 .$$

Donc -3 est résidu de $p = \mathbf{3} + 1$ et non résidu de $p = \mathbf{3} - 1$. Comme $(\pm 3)^m = (- 1)^m 3^m$, 3 est résidu de $\mathbf{12} \pm 1$ et non résidu de $\mathbf{12} \pm 5$, (Libri.)

28. Soient ρ un non résidu de p et k un diviseur de $p + 1$; la congruence

$$\frac{(x + \sqrt{\rho})^k - (x - \sqrt{\rho})^k}{\sqrt{\rho}} \equiv 0 .$$

a $k - 1$ racines. (Lagrange.) En effet le premier membre est un diviseur de celui de la congruence

$$\frac{(x + \sqrt{\rho})^{p+1} - (x - \sqrt{\rho})^{p+1}}{\sqrt{\rho}} \equiv 0 ,$$

laquelle est du degré p et a p racines, puisque son premier membre développé devient

$$2(p+1)(x+x^{p^m}) \equiv 2(p+1)(x^p - x).$$

29. Vérifier que $2^p - 1$ est divisible par

$$23,\ 47,\ 233,\ 223,\ 431,\ 439,\ 167,\ 263,$$

$$\text{pour } p = 11,\ 23,\ 29,\ 37,\ 43,\ 73,\ 83,\ 131.$$

Les deux premiers et le quatrième cas sont de Fermat, les autres d'Euler.

On se sert, pour cette vérification, de la méthode d'Euler, nº 2, 1º.

29. Démonstration du théorème de Fermat, par la supposition de b premier, dans les nºs 3 et 4.

Formons le tableau

$$\begin{array}{llllll}
1, & a, & a^2, & a^3, \ldots & a^t \equiv 1, \\
2, & 2a, & 2a^2, & 2a^3, \ldots & 2a^t \equiv 2, \\
3, & 3a, & 3a^2, & 3a^3, \ldots & 3a^t \equiv 3, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(p-1), & (p-1)a, & (p-1)a^2, & (p-1)a^3, \ldots & (p-1)a^t \equiv p-1.
\end{array}$$

Si $ka^f \equiv la^g$, on a : $ka^{f+\theta} \equiv la^{g+\theta}$. Donc si un terme de la l^e rangée est congru à un de ceux de la k^e, ces deux rangées sont identiques, à l'ordre près des termes. La k^e rangée contenant t termes différents, il y a donc t rangées identiques à la k^e, et les termes des autres rangées sont entièrement différents des premiers. Supposons que la première de ces autres rangées soit la h^e : il y aura de même t rangées identiques à celle-ci et leurs termes différeront de ceux des autres. La première des $p-1-2t$ rangées non éliminées fournira également $t-1$ autres rangées identiques. Et ainsi de suite : on voit que les $p-1$ rangées seront disposées en groupes de t termes identiques chacun. (Desmarets.)

30. Déduire le théorème d'Euler de celui de Fermat. On a :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a^{(p-1)p} \equiv 1 \pmod{p^2}, \quad \ldots \quad a^{(p-1)p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}$$

soit $b = p^f q^g \ldots$, p, q désignant des nombres premiers. On peut écrire :

$$a^{(p-1)p^{f-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p^f}, \quad a^{(q-1)q^{g-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{q^g}, \ldots$$

Posons $\psi(b) = (p-1)\, p^{f-1}\, (q-1)\, q^{g-1} \ldots$ Les premiers membres des congruences qui précèdent sont tous diviseurs de $a^{\psi(b)} - 1$: donc, en multipliant,

$$a^{\psi(b)} - 1 \equiv 0 \pmod{b}.$$

Or on sait que la fonction $\psi(b)$ représente celle qui a été désignée par $\varphi(b)$. Cette démonstration est d'Euler.

31. Le nombre des solutions $\geqq 0$ et $< p$ de la congruence $ax^2 - by^2 \equiv c$ est $p \mp 1$ selon que (ab) est résidu ou non résidu. (Libri.)

32. Le nombre des termes de la période décimale de $\frac{1}{p}$ n'est autre chose que le gaussien de 10, de sorte que si la période a $p - 1$ chiffres, 10 est racine primitive de p (Gauss.) Ceci a lieu pour $p = 7$, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313...

33. Si a est une racine non primitive, aucun reste provenant de la division des puissances de a n'est racine primitive. Car de $a^t \equiv 1$ et $a^b \equiv r$, on tire $r^t \equiv 1$.

34. On n'a pas de méthode générale pour découvrir les racines primitives d'un nombre premier donné. L'exemple suivant, de Gauss, montrera suffisamment le procédé préconisé par cet illustre géomètre. Soit $p = 73$; l'essai du nombre 2 donne $2^9 \equiv 1$, donc 2 n'est pas racine primitive. Essayons le nombre 3, qui ne fait pas partie de la période qu'on vient d'obtenir : on trouve $3^{12} \equiv 1$; 3 n'est pas non plus racine primitive, mais on tire de ces résultats cette relation

$$\left(2^{\frac{9}{9}} \cdot 3^{\frac{12}{9}}\right)^{36} = 54^{36} \equiv 1 \qquad \pmod{73}$$

qui suggère l'essai de 54, dont la période ne comprend pas le nombre 5. Ce dernier, essayé, fait voir que c'est une racine primitive.

Les remarques suivantes facilitent la recherche dans certains cas.

1° p étant de la forme $4 - 1$, si m est le gaussien de R, $-$ R est racine primitive. (Jacobi.)

2° p étant $4+1$, m le gaussien de a et $R^2 \equiv a$, R et — R sont racines primitives. (Id.)

3° p étant $8+5$, m le gaussien de a et $R^2 \equiv -a$, R est racine primitive. (Id.)

4° Si $p = 3q+1$, que q soit le gaussien de a et que $R^3 \equiv a$, R est racine primitive. (Id.)

5° R est généralement racine primitive quand $p = 8q+5$, si $R^2 \equiv -1$; quand $p = 16q+9$, si $a^2 \equiv -1$ et $R^2 \equiv a$; quand $p = 12q+1$. Si $R^{4q+2} \equiv R^{2q+1} - 1$; quand $p = 6q+1$, q désignant un nombre non multiple de 3, si $a^q = \pm 1$, $b^3 \equiv -1$ et $R \equiv \pm ab$. (Desmarets.)

35. Si R est racine primitive, — R l'est ou ne l'est pas selon que $p = 4 \pm 1$ (Cauchy).

Dans le premier cas, si h est pair, $(-R)^h = R^h$; si h est impair, $(-R)^{h+m} \equiv -R^{h+m} \equiv R^h$, puisque — R est non-résidu.

Dans le second cas, R étant non-résidu, — R est résidu et par suite racine non primitive.

36. On a :

$$R^a + R^{2a} + R^{3a} + \ldots + R^{(p-1)a} \equiv s_{p-1,\,a}.$$

Le premier membre est $\equiv -1$ si a est multiple de $p-1$ et dans le cas contraire, il est $\equiv 0$, puisqu'il peut s'écrire

$$\frac{R^{(p-1)a} - 1}{R^a - 1} R^a.$$

De même on a $R^1 R^2 R^3 \ldots R^{p-1} \equiv (p-1)!$ Or le premier membre est égal à $R^{pm} \equiv -1$.

On a ainsi d'autres démonstrations des théorèmes de Libri et de Wilson. La seconde est d'Euler.

37. Soit θ le *p. g. c. d.* de $p-1$ et de h; la division des puissances $1^h, 2^h, 3^h \ldots$ par p donne $\frac{p-1}{\theta}$ restes différents (Euler). Si R est une racine primitive, les $\frac{p-1}{\theta}$ restes de 1, $R^\theta, R^{2\theta}, R^{3\theta}, \ldots R^{(p-1)\theta}$ sont tous différents et se reproduisent périodiquement. Soit $R^g \equiv r$, r peut prendre toutes les valeurs de 1 à $p-1$, et comme on peut écrire $hx - (p-1)\,y = \theta$, on a :

$$(r^x)^h \equiv r^{(p-1)y+\theta} \equiv r^\theta \equiv R^{g\theta} .$$

x est évidemment premier avec $p - 1$, donc le reste de r^x prend toutes les valeurs 1, 2, 3, ... $p - 1$, et on peut mettre r au lieu de r^x. On peut donc dire que r^h a les mêmes valeurs que $R^{g\theta}$.

En particulier, si h est premier avec $p - 1$, il y a $p - 1$ restes différents. Si $h = 2$, il y en a $\frac{p-1}{2} = m$, qui sont les résidus quadratiques. En général, le nombre des résidus de puissances $h^{\text{èmes}}$ est $\frac{p-1}{h}$.

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

(A propos d'un récent article de M. *Lehr*[1]).

Dans divers ouvrages sur la géométrie descriptive on ne fait presque aucune mention des projections de deux droites perpendiculaires. Même dans les récentes *Leçons sur la Géométrie descriptive* de M. Loria, qui contiennent un grand nombre de particularités très intéressantes, on ne trouve que quelques indications sur cette question. Je me propose de développer ici une démonstration simplifiée de la condition donnée par M. Lehr pour les projections de deux droites perpendiculaires (théorème III^{me} de l'article cité).

Les projections orthogonales $g'g''$, $h'h''$ de deux droites g et h étant données, menons par le point commun des projections horizontales et par l'intersection des projections verticales deux droites m et n perpendiculairement à la direction de la ligne de terre. Nous obtiendrons ainsi deux triangles que l'on peut considérer comme deux projections d'un tétraèdre $ABCD$. Les arêtes AB et CD sont toujours per-

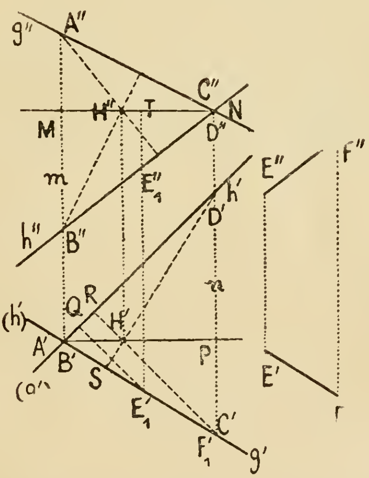
[1] L'Enseign. math., IX^e année, p. 119; 1907.

pendiculaires; s'il en est de même pour deux autres arêtes opposées, par exemple $g = AC$ et $h = BD$, les arêtes AD et BC seront aussi perpendiculaires et, d'après un théorème connu de stéréométrie, le tétraèdre sera *orthocentrique*, c'est-à-dire, les quatre hauteurs auront un *point commun* H.

Les projections verticales des hauteurs du tétraèdre passant par les sommets A et B, sont deux hauteurs du triangle $A''C''B''$, et les projections horizontales sont sur la hauteur $A'P$ du triangle $C'A'D'$. Les hauteurs du tétraèdre passant par les sommets C et D ont leurs projections horizontales sur les hauteurs correspondantes du triangle $C'A'D'$, et leurs projections verticales sont unies sur la hauteur MN du triangle $A''C''B''$.

Si donc les droites g et h sont perpendiculaires, les orthocentres H'' et H' des triangles $A''C''B''$ et $C'A'D'$ seront sur la *même droite perpendiculaire à la ligne de terre*, c'est-à-dire, le tétraèdre $ABCD$ sera orthocentrique. Or, les projections g' et h' pourront être changées entre elles.

On voit immédiatement que la condition donnée pour H' et H'' est nécessaire; elle est suffisante parce qu'un tétraèdre



orthocentrique (dont deux arêtes perpendiculaires sont $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$) doit avoir trois couples des arêtes opposées perpendiculaires.

En considérant la figure, nous aurons les égalités

$$-A''M \,.\, B''M = A'R \,.\, A'D' = MH'' \,.\, MN\,,$$

ce qui est précisément la condition donnée par M. *Lehr*. On peut écrire aussi

$$-A''M \,.\, B''M = A'S \,.\, A'C'\,.$$

Si deux *longueurs* $\overline{AD}$ et $\overline{EF}$ sont données, on démontre aisément que la condition de perpendicularité reste vraie.

Par une translation on peut faire coïncider le point F'' avec le point C'', et on peut faire passer le prolongement de la projection horizontale $(\overline{E_1'F_1'})$ par A' ; le point extrême $E'E''$ vient alors en $E_1'E_1''$.

Soit QR la projection de la longueur $E_1'F_1'$ sur $A'D'$. De ce qu'on aura

$$TE_1'' : QR = MB'' : A'R\,,$$

il résultera la même condition comme auparavant :

$$-A''M \,.\, E_1''T = A'D' \,.\, QR\,.$$

Dans l'enseignement, la démonstration exposée peut être admise avant de l'étude des transformations et les moyens qui se trouvent appliqués appartiennent plus à la géométrie descriptive qu'au calcul.

G. Majcen (Agram).

SUR LA NATURE DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

On peut distinguer, au sujet des axiomes de la Géométrie, trois opinions philosophiques différentes. *L'empirisme, le nominalisme, le Kantisme.* La première considère les axiomes comme fournis par l'expérience, la seconde voit en eux des définitions, ou dans le langage philosophique, des jugements analytiques. Enfin pour Kant ces jugements ne sont ni expérimentaux, ni analytiques. Ce sont des jugements synthétiques à priori.

En cherchant à préciser davantage le sens de ces diverses opinions, au lieu de trois façons de voir, je suis conduit à en distinguer quatre.

1° La science géométrique est fondée sur des axiomes ou hypothèses arbitrairement choisies. Une proposition est dite vraie, si elle est une conséquence logique de ces hypothèses. Il y a alors une infinité de géométries, également vraies (séparément) mais contradictoires entre elles.

2° C'est l'expérience qui fournit les axiomes. La base de la science est ainsi expérimentale, son développement est déductif.

3° Les axiomes sont des définitions. On nomme droites, plans, distances, etc. des objets ou notions satisfaisant a ces axiomes. Comme on le verra tout à l'heure cette troisième façon de voir est totalement différente de la première.

4° Les axiomes ne sont ni expérimentaux, ni arbitraires. Ce ne sont point non plus des définitions. Ils s'imposent à nous non parce que l'expérience nous les fournit, mais parce que sans eux l'expérience serait impossible. C'est l'opinion Kantienne.

J'examine successivement ces quatre façons de voir.

I. — La première façon de voir peut être appelée *l'opinion logique.* Elle n'est nullement fausse, et il est nécessaire de l'adopter pour étudier les fondements de la géométrie. M. Hilbert, M. Peano, et les autres géomètres assez nombreux qui se sont livrés à cette étude, se sont placés à ce point de vue. Seulement la géométrie envisagée ainsi demeurera purement abstraite. Pour pouvoir l'appliquer à l'étude du monde extérieur il faut se placer à un point de vue différent.

II. — La seconde façon de voir est *l'empirisme*. On regarde les premières notions de la géométrie comme des notions expérimentales. Prenons la notion de distance, la plus simple de toutes. On la définira en se servant d'un corps solide invariable. Ceci n'est pas sans présenter quelques difficultés.

En premier lieu il paraît difficile de définir ainsi les très grandes distances, celles des astres par exemple. Cette difficulté est réelle, non insurmontable.

En second lieu on n'a pas de corps solide rigoureusement invariable. La distance est donc une notion un peu floue. De plus les corps se dilatent par la chaleur. Si l'on dit : cette barre de platine conservera *par définition* sa longueur partout, la distance ainsi définie ne possèdera pas les propriétés Euclidiennes. Si l'on dit : Cette barre de platine indiquera la distance après qu'on aura fait une correction de température, il faut définir pour que cela soit clair et la température, et la correction à faire. C'est d'une complication extravagante.

D'autre part si l'expérience seule nous démontre la vérité des axiomes, comment savons-nous qu'ils sont vrais partout. Et il y a dans l'espace d'immenses régions où les corps solides ne peuvent subsister. Une règle solide en platine, cela n'a de sens ni dans le soleil, ni dans les étoiles ou les nébuleuses.

Je laisse de côté bien d'autres difficultés. La géométrie purement empirique n'est pas soutenable. Nous verrons cependant qu'il s'introduit dans la géométrie, pour les applications un certain genre d'empirisme.

III. — D'après la troisième opinion les axiomes de la géométrie sont des *définitions*. On nomme droite, plan, distance etc. des objets auxquels s'appliquent les axiomes. Ceux-ci servent ainsi de définition aux notions premières.

Cette façon de voir est séduisante. Un philosophe irréfléchi l'adoptera sans hésiter. Or elle est radicalement fausse. Je vais montrer pourquoi.

J'aurai besoin de supposer définie la position d'un point. J'admettrai que la position d'un point peut être déterminée par la donnée de 3 nombres $\alpha\,\beta\,\gamma$. Je n'indique pas comment on peut, étant donné le point trouver ces 3 nombres. Cela importe peu. Je nomme ces 3 quantités les coordonnées provisoires du point.

Je prends maintenant 3 fonctions de $\alpha\,\beta\,\gamma$; je nomme ces fonctions X Y Z. Ce seront (je les appelle ainsi) les coordonnées définitives du même point.

Soient 2 points (X, Y, Z ; X_0, Y_0, Z_0). Je nomme *distance* de ces deux points l'expression :

$$\rho = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}\,.$$

Nommons *plan*, l'ensemble des points dont les coordonnées X Y Z vérifient une équation du premier degré. Nommons *droite* l'intersection de deux plans ; *déplacements*, les transformations n'altérant pas la distance. Avec ces définitions toute la géométrie euclidienne s'établira sans peine. Les axiomes seront vrais.

Mais les fonctions X Y Z restent dans ce qui précède indéterminées. En changeant ces fonctions on a d'autres objets vérifiant les mêmes axiomes. Donc les axiomes ne définissent nullement les objets auxquels ils s'appliquent.

On peut encore montrer cela de la façon suivante. Les mots *droite*, *plan*, *etc*. ayant leur sens ordinaire, effectuons une transformation T. Changeons le sens des mots. Appelons *plans*, *droites* les figures transformées des plans et des droites par la transformation T. Appelons *déplacement* le transformé d'un vrai déplacement par la transformation T. Après ce changement du sens des mots la géométrie euclidienne subsistera. Les axiomes continuant à être vrais, bien que le sens des mots soit changé, sont impuissants à fixer ce sens.

IV. — Passons à *l'opinion kantienne*. C'est la plus ancienne, celle adoptée par Euclide et tous les anciens géomètres. Les axiomes sont évidents par eux-mêmes. Cette évidence selon Kant tient à la nature de notre esprit. La notion de l'espace préexiste à l'expérience ; *elle est une condition sans laquelle l'expérience serait impossible.*

Entrons dans quelques détails, pour bien montrer cela. A quelles conditions pouvons-nous parler d'une figure, d'un ensemble de points, à quelles conditions une figure peut-elle avoir des propriétés ?

Il faut pour cela dans cette figure quelque chose de permanent ; qu'on puisse la concevoir restant identique à elle-même. Le changement lui-même est inconcevable sans quelque chose de fixe, avec quoi on puisse comparer l'objet qui change. On ne peut même désigner la position d'un point dans l'espace, si l'on ne donne à ce point une certaine individualité. Je m'explique. Lorsque je dis : soit P un point, je suppose quelque chose en P ; une petite tache d'encre par exemple. Pendant que je parle la terre se déplace, et une petite tache d'encre occupe une position variable dans l'espace absolu. Cependant je considère P comme étant toujours le même point.

Dans la géométrie abstraite, c'est-à-dire envisagée d'une façon purement logique, le point est un être dont on ne spécifie pas la nature. L'espace au contraire se définit : « l'ensemble des points ».

Au contraire, dans la pratique on ne peut envisager ainsi l'espace, ce serait admettre la possibilité de définir l'immobilité absolue. Le point que je considère dans une épure est immobile sur ma feuille de papier ; il est invariable par rapport à celle-ci, mais entraîné dans l'espace avec elle. Ce n'est pas un point *de l'espace*, c'est un point *du papier*.

Il faut donc, même pour fixer la position d'un point, supposer l'existence de corps invariables, par rapport auxquels les points restent fixes, ou se déplacent.

La notion de figure invariable nous apparaît ainsi non comme un fait expérimental, mais comme une sorte de nécessité logique. *Si l'on n'admet pas cette notion, aucune géométrie n'est possible.*

Cette manière de voir semble donc se justifier assez bien. Il y a cependant des difficultés.

La notion d'invariabilité est, dans cette manière de voir une notion à priori. Les propriétés des figures invariables doivent donc s'en déduire sans qu'on soit obligé de faire intervenir l'expérience, et sans qu'il reste aucun arbitraire dans ces propriétés. En particulier, le postulatum d'Euclide doit être ou vrai ou faux. On ne peut plus dire le postulatum est vrai ou faux selon ce qu'on nomme figure invariable.

Cette difficulté est très grande ; elle a suffi à beaucoup de logiciens pour faire condamner l'opinion kantienne.

On peut présenter la chose autrement. La thèse kantienne est celle-ci : Les axiomes de la géométrie ne sont ni des hypothèses arbitraires, ni des résultats expérimentaux ; ce sont des principes sans lesquels la science de l'espace serait impossible.

L'objection est alors la suivante. Comment se fait-il qu'il y ait une géométrie non euclidienne ? Si le postulatum d'Euclide était nécessaire pour constituer la science de l'espace on ne saurait la constituer sans lui.

Je ne crois pas pourtant l'objection suffisante pour faire tomber la théorie kantienne. Elle oblige seulement à la modifier.

La théorie kantienne, du reste, manque un peu de précision. Il faut supposer, pour faire de la géométrie, la notion de figure invariable. Mais pourquoi faut-il précisément trois points pour fixer une pareille figure ? Pourquoi deux points ont-ils un invariant (la distance) et non pas deux? etc. Pourquoi du reste l'espace a-t-il trois dimensions ?

J'ai examiné successivement les différentes opinions touchant les axiomes. Ces opinions ont toutes quelque chose d'inacceptable.

Pour chercher à sortir de ces difficultés, je présenterai les choses comme il suit : Comme on l'a vu, à propos de l'opinion kantienne, il est nécessaire pour la science, d'admettre l'idée d'un objet restant identique à lui-même. Acceptons donc cette notion. d'ailleurs familière à tout le monde, sans la discuter davantage.

Il faut toutefois, pour que cette notion ait un sens pratique, admettre l'existence réelle de corps restant identiques à eux-mêmes, de corps invariables. Je reviendrai tout à l'heure sur ce point.

Cette notion de l'identité de deux objets, ou d'un objet invariable est vague. Il importe de la préciser. C'est là le rôle des axiomes.

Les axiomes sont donc des propositions ayant pour objet de préciser la notion d'identité de deux objets préexistant en notre esprit.

Il y a des axiomes relatifs à la continuité. Ils ne souffrent aucune difficulté. L'axiome gênant est le postulatum d'Euclide. Il faut le rattacher à l'idée que nous nous faisons d'un objet restant identique à lui-même. *d'un corps invariable.*

Si tout grandissait proportionnellement, nous ne pourrions nous en apercevoir. C'est là une proposition de sens commun ; elle exprime une sorte de *relativité* dans la grandeur. Or, cela revient à affirmer le postulatum d'Euclide. Si le postulatum n'était pas vrai, deux triangles ayant les mêmes angles seraient égaux. On saurait donc qu'un triangle n'a pas changé par la seule mesure des angles. La relativité précédente n'existerait pas.

On peut dire encore. L'idée que nous avons de deux figures identiques est double. On a une première espèce d'identité, telle que deux points A et B ne forme pas toujours la même figure que deux points A′ B′. Deux points ont un invariant. C'est l'idée de *figures égales*. Il y en a une autre ou deux points n'ont pas d'invariant ; c'est la *similitude*.

Cette double notion de l'identité impose le postulatum d'Euclide.

Je reparlerai plus loin du postulatum.

La géométrie ainsi établie est d'abord purement théorique. Elle devient pratique par la remarque suivante : Parmi les corps situés à notre portée, il en est qui demeurent très sensiblement invariables. Il reste quelque difficulté lorsqu'il s'agit de corps très éloignés, tels que les astres. Pour étudier ces corps, il faut se servir des rayons lumineux. La vérification expérimentale de cette proposition : « La lumière se propage en ligne droite, dans un milieu homogène » est insuffisamment précise. Il faut envisager les choses autrement.

La géométrie est la première d'une série de sciences, fondées sur des hypothèses d'un caractère très général, mais dont le développement est logique. Parmi ces sciences se trouve d'abord *la mécanique rationnelle*, puis *l'optique des ondulations*. Cette dernière science rend compte, d'une façon logique, de la propagation rectiligne de la lumière. On se sert du principe dit *des ondes enveloppes*. Avec cette manière de voir la propagation rectiligne de la lumière n'est plus purement empirique. Les raisons qui la font admettre dérivent bien de l'expérience, mais elles possèdent un caractère de généralité plus grand qu'une expérience directe. La principale de ces raisons est celle-ci : Dans le vide l'éther est homogène et isotrope. *C'est en quelque sorte une raison de symétrie.* L'optique fournit en outre un système de mesures absolues. Lord Kelvin a montré dans une de ses conférences, comment une personne transportée loin du système solaire, dans quelque planète du système de Sirius ou de Véga, pourrait, grâce aux propriétés des ondes lumineuses, reconstituer toutes les unités du système métrique ou du système CGS.

Il convient, d'après ce qui précède, d'envisager la géométrie, non comme une science de pure logique, mais comme une sorte d'introduction aux sciences de la nature, à la mécanique, à l'astronomie, à l'optique, et à toutes les branches des sciences physiques. Je ne considère pas les propositions géométriques comme d'une nature essentiellement différente de celles envisagées en physique. Comme ces dernières elles concernent des objets réels, concrets, existants, ou pouvant exister en dehors de l'esprit.

Expliquer l'univers matériel est le but de la science. Cette explication est, à l'heure actuelle bien loin d'être achevée. Cependant la partie déjà construite de la science possède une certaine ampleur. Elle comprend comme je l'ai dit la géométrie, la mécanique, l'optique vibratoire et d'autres parties des sciences physiques. Un coup d'œil jeté sur ces sciences y montre le rôle de la géométrie. Chaque partie de la science est un système fondé sur des hypothèses qui lui sont propres, mais outre ces hypothèses, celles de la géométrie sont toujours requises. La géométrie est comme la charpente, la carcasse, ou le squelette de la science.

Les hypothèses de la géométrie ont, comme nous l'avons dit un caractère particulier d'évidence. En fait on les admet dans le langage courant, et sans elles il serait pour ainsi dire impossible d'énoncer quelque proposition concernant l'espace. Les notions d'égalité, de similitude nous sont très familières. Si le postulatum d'Euclide paraît moins évident que les autres axiomes, cela tient à ce qu'il est mal choisi. Il peut être remplacé par une proposition équivalente, d'un caractère plus évident. On peut le remplacer par la possibilité des figures semblables, comme nous l'avons fait ci-dessus. On peut aussi le remplacer par le suivant : « si une figure plane est mobile dans son plan de telle sorte qu'une des droites de la figure glisse sur une droite fixe, tous les points de la figure décrivent des droites ». C'est la manière de faire de M. Méray. Si l'axiome en question n'était pas vrai, les tiroirs des tables ou des commodes impliqueraient contradiction.

On peut encore admettre, comme le fait je crois Legendre, l'axiome suivant. « Par un point pris dans un angle on peut toujours mener une droite rencontrant les deux cotés de l'angle » ou encore l'énoncé suivant : « Une droite ne peut s'éloigner ou s'approcher d'une autre, de façon que la distance d'un certain point de cette droite à l'autre soit maximum ou minimum ».

L'énoncé suivant : « Autant de triangles égaux qu'on voudra étant placés dans un plan, extérieurs les uns aux autres, on peut toujours les enfermer dans un triangle unique » possède un caractère d'évidence tout particulier.

Du reste la notion de volume telle qu'elle est familière à tout le monde suppose le postulatum d'Euclide. Elle suppose en effet un volume donné rempli de petits cubes juxtaposés. Or le pavage de l'espace avec de petits polyèdres tous égaux entre eux, suppose le postulatum d'Euclide. Il en est de même du reste du pavage du plan.

Pour exposer la géométrie, on peut procéder d'une façon très différente de la façon habituelle. En astronomie on mesure non des longueurs, mais des angles. On se fonde sur la propagation rectiligne de la lumière. Ceci suggère une façon d'exposer la géométrie en la fondant sur la notion d'angle et de ligne droite.

Ces notions étant considérées comme notions premières indéfinissables, ou, si on le préfère, comme des notions empiriques, on définira le plan comme de coutume.

Considérons deux figures se correspondant point par point, de façon que des points en ligne droite correspondent à des points en ligne droite. Si deux droites AB, AC de la première figure font le même angle que les correspondantes A′B′, A′C′ de la seconde. nous dirons que les deux figures sont coangulaires.

Soient A et B deux points d'une figure F, P un plan passant par AB, A′ et B′ *deux points quelconques,* P′ un plan passant par ces deux points. Notre principal axiome sera le suivant : on peut construire une figure F′, coangulaire à F, telle que A′ B′ P′ correspondent à A B P.

Si A coïncide avec A′ et B avec B′, ou si B coïncide avec A′ et A avec B′ on aura deux figures égales.

Cette manière de procéder présente des difficultés. Et il n'est pas question de s'en servir pratiquement pour exposer la géométrie, mais il donne lieu à une remarque assez curieuse, que je veux indiquer. Lorsque l'on adopte comme notion fondamentale la notion de distance, la définition de la droite s'en déduit, de même celle de l'angle, il n'y a plus rien d'arbitraire, le postulatum est vrai ou faux selon ce qu'on nomme distance.

Mais si l'on prend comme notion fondamentale la notion d'angle, la ligne droite ne se trouve pas définie, et l'on peut définir la droite de façon que le postulatum soit vrai ou qu'il soit faux. Le postulatum se trouve ainsi vrai par définition de la ligne droite.

Effectivement, supposant établie la géométrie ordinaire, considérons toutes les transformations n'altérant pas les angles.

D'après un théorème dû à Liouville, le groupe de ces transformations contient des combinaisons d'inversions, homothéties, symétries, inversions. Il change les sphères en sphères, et par suite les cercles en cercles. Une démonstration de ce théorème se trouve dans l'ouvrage de M. Darboux, sur les systèmes orthogonaux. J'en ai donné dans les nouvelles annales (1903) une autre démonstration fondée sur les formules de Codazzi.

Ce groupe de transformations contient un sous groupe formé des transformations laissant inaltérée une sphère S. Lorsque la sphère S est réelle, le groupe est un groupe *Lobatchefkien* ; lorsqu'elle se réduit à un point, le groupe est un groupe *Euclidien* ; lorsqu'enfin, elle est imaginaire, ce sera un groupe *Riemanien*. J'entends par là que ces groupes sont isomorphes des groupes de déplacements dans les géométries de *Lobatchefki*, d'*Euclide*, de *Riemann*. Les lignes isomorphes des droites sont les cercles orthogonaux à la shpère S.

On voit par là que, la notion d'angle étant admise, on est libre de choisir la notion de droite de façon à ce que l'une ou l'autre des trois géométries soit vraie ; adoptons celle d'Euclide. Considérons un des groupes Euclidiens. La sphère S se réduit à un point. Transformons le groupe par une inversion de pôle S. Nous aurons un autre groupe ne laissant inaltéré aucun point. Ce sera, par définition, le groupe des déplacements.

Ceci laisse subsister des difficultés. Nous sommes bien obligés pour étudier ces groupes de supposer établie la géométrie ordinaire.

On oppose quelquefois les propositions scientifiques aux propositions du langage courant. Les programmes de philosophie semblent même consacrer cette opposition. Ils contiennent un paragraphe intitulé : *La connaissance vulgaire et la connaissance scientifique*.

Si l'on se borne à considérer les propositions ayant un caractère géométrique, celles qui énoncent des relations de position, cette opposition n'existe pas. Prenons l'exemple de l'éclipse de soleil, donné par M. Leroy, et discuté par M. Poincaré, dans son livre sur la « Valeur de la Science ». L'ignorant dit : *Il fait noir ;* le savant dit : *l'éclipse a lieu a deux heures*. Cette manière d'opposer la connaissance vulgaire à la connaissance scientifique ne me paraît pas juste. Je ne veux pas en faire une longue critique. Une éclipse résulte d'une relation de position entre trois objets. *Il y a un écran devant la lampe*, est une proposition vulgaire. *La lune passe devant le soleil*, est une proposition de connaissance scientifique ; *il fait noir* est la constatation d'une sensation, non d'une connaissance, ni vulgaire ni scientifique.

Si la lune devant le soleil est quelque chose de plus scientifique qu'un écran devant une lampe, cela tient à bien des raisons qui sautent aux yeux, cela n'empêche pas les deux faits d'être de même nature : Une relation de position entre trois objets dont l'un est lumineux, l'autre opaque et le troisième l'œil d'un observateur.

J. Richard (Dijon).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS[1] — X

Questions 22 et 23.

Questions relatives au mode de vie du mathématicien[2].

22. — *Croyez-vous utile au mathématicien d'observer quelques règles particulières dans l'hygiène : régime, heures des repas, intervalles à observer ?*

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e annee, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905. — 8e année, n° 1, p. 43-48 ; n° 3, p. 217-225 ; n° 4, p. 293-310 ; n° 5, p. 383-385 ; n° 6, p. 463-475, 1906. — 9e année, n° 2, p. 123-135, n° 3, p. 204-217 ; n° 4, p. 306-312, 1907.

[2] L'étude de cette dernière partie a été faite par M. le Dr Ed. Claparède, Directeur du Laboratoire de Psychologie de l'Université de Genève.

23. — *Quelle durée normale quotidienne de sommeil vous semble nécessaire ?*

Le groupe des questions 22 à 28 est intéressant au point de vue de la psychologie du travail, — du travail intellectuel en général plus encore peut-être que du travail mathématique en particulier.

Quelle doit être l'hygiène du travail de l'esprit ? Comment faut-il travailler pour obtenir les meilleurs résultats tout en évitant le surmenage ? — Voilà des questions importantes entre toutes, à une époque comme la nôtre où ce genre de travail occupe une si grande place et fait un si grand nombre de victimes (beaucoup plus qu'on ne croit) !

Comment y répondre, si ce n'est par l'observation empirique des faits ? Il faut constater comment travaillent, *en fait*, ceux qui font preuve d'une activité intellectuelle certaine. Dans ce domaine, en effet, l'*a priori* est dangereux. On rencontre souvent des hygiénistes ou des pédagogues qui, par exemple, préconisent le travail régulier, continu, à des heures fixes, toujours les mêmes ; ou encore qui recommandent le travail du matin et répudient celui du soir. D'autres assurent qu'il ne faut se mettre à sa table de travail que lorsqu'on a déjà, tout préparé dans sa tête, le plan de l'étude que l'on va entreprendre, etc.

Qu'y a-t-il de vrai dans ces affirmations ? Les procédés préconisés s'appliquent-ils à tous les intellectuels, ou seulement à une fraction d'entre eux ?

C'est ce qu'une enquête dans le genre de celle entreprise ici est seule capable de trancher. Une telle enquête peut nous montrer notamment s'il existe des *types* différents de travail intellectuel.

Le travail mathématique nécessite-t-il des règles spéciales d'hygiène ou un régime qui lui soit particulier ? Pour résoudre cette question, il serait nécessaire de comparer les résultats de la présente enquête avec ceux d'autres enquêtes du même genre élaborées dans d'autres groupes d'intellectuels : littérateurs, philosophes, etc. Mais il faudrait, bien entendu, que chacune de ces enquêtes portât sur un nombre extrêmement considérable d'individus.

En attendant le moment, fort éloigné sans doute, où une telle comparaison sera possible, constatons que plusieurs de nos correspondants n'ont pas considéré le travail des mathématiciens comme impliquant des règles d'hygiène à lui particulières, par exemple :

Rép. VII (Allemagne). — Une vie régulière est recommandable à tout homme. M. Cantor.

Rép. IX (France). — Oui, pour les mathématiciens comme pour tout le monde.

Rép. XVI (Belgique). — Hygiène et régime de tous les intellectuels. M. Stuyvaert.

Rép. XXIV (Hollande). — J'aime la vie régulière, mais je ne sais pas si c'est parce que je suis mathématicien. H. de Vries.

Rép. XXXIV (France). — Je crois la question [de l'hygiène] indépendante de toute occupation mathématique et dépendant uniquement du tempérament physique. J. Azaïs.

Rép. XXXVII (France). — La régularité de la vie est utile au mathématicien comme à tout le monde. E. Fabry.

Rép. LXX (Angleterre). — Règles habituelles de l'hygiène.
J.-W. Young.

Rép. LXXIV (Italie). — Observer les mêmes règles générales qui régissent toute autre occupation mentale. G. Pirondini.

Rép. LXXV (France). — Toutes les questions relatives au mode de vie du mathématicien s'appliquent, il me semble, à un travailleur quelconque de la pensée. G. de Longchamps.

Rép. LXXX (Norvège). — Comme pour tout le monde travaillant.
Alf. Guldberg.

Il faut sans doute compter comme étant d'une opinion analogue un certain nombre de correspondants (8) qui ont répondu par un simple *non* à la question 22. Ce *non* peut d'ailleurs s'interpréter de deux façons, la question étant rédigée d'une façon ambiguë. On ne sait pas si ceux qui répondent *non* nient l'utilité de toute hygiène pour les mathématiciens, ou s'ils entendent seulement, ce qui est probable, qu'il n'y a pas pour le mathématicien d'hygiène « particulière » à observer. — Il est donc inutile d'épiloguer longuement sur ces réponses négatives.

Un seul répondant (XXI, Boltzmann) déclare catégoriquement : « Je n'y ai jamais pensé », à la question 22. Le même, à la question 24, remarque qu'on ne saurait assigner aucune règle au travailleur de génie *(Für das Genie gibt es keine Regel).*

Quant aux réponses positives, elles contiennent presque toutes des recommandations qui, si excellentes soient-elles, sont cependant trop banales pour être reproduites en détail. Elles vantent tour à tour la *sobriété* (un seul, Allemand, conseille de « bien manger »), l'*exercice régulier*, les *promenades*, la *tempérance* ou l'*abstinence*, à l'égard des boissons alcooliques, un *sommeil suffisant ;* cinq personnes insistent sur la nécessité de *ne pas travailler après ses repas.*

Voici, à titre d'exemple, quelques échantillons de ces déclarations :

Rép. I (France). — La santé du corps est une nécessité pour le savant, s'il veut produire beaucoup et longtemps : il doit se coucher tôt, il peut alors se lever très tôt aussi, ne dormir que 7 à 8 heures. Il doit manger avec modération, s'assurer de bonnes digestions en ne travaillant *jamais* après ses repas, surtout le soir, s'il veut s'assurer un sommeil profond et réparateur ; prendre un exercice *régulier* n'allant jamais jusqu'à la véritable fatigue.

Ch. Méray.

Rép. II (France). — Oui ! travailler à jeun ou après une très légère collation (café au lait, chocolat léger...), jamais après ses repas, quand on peut être maître de son temps. Al. Audebrand.

Rép. V (Italie). — Lorsque j'étais étudiant, j'ai beaucoup travaillé ; vers 19 ans, j'ai commencé à écrire avec fougue des travaux scientifiques et pendant trois ou quatre années j'en ai beaucoup publié ! De cette façon, j'obtins de bonne heure une chaire à l'Université. Mais ma santé était gâtée... voilà la morale ! Pour avoir trop travaillé dans ma jeunesse, j'ai dû réduire bientôt, trop tôt, mes heures d'études et de travail à un nombre bien petit, hélas ! Et chaque fois que j'ai voulu travailler un peu plus, de nouveaux dérangements dans ma santé m'ont obligé à rebrousser chemin ! Il faut toujours *mesurer* son travail ! (...)

Rép. VI (Allemagne). — Je regarde comme bon de ne plus faire de travail mathématique après les repas. (...)

Rép. XXIII (France). — Il faut se méfier de l'entraînement du travail, qui arrive à faire oublier les repas et l'heure du sommeil. Si on ne s'observe pas, on peut arriver au surmenage et, comme conséquence à l'impuissance intellectuelle. La sobriété, la régularité des repas s'imposent. Je peux encore travailler aussitôt après le repas. En général, ce n'est pas une règle à recommander.

C.-A. Laisant.

Rép. XXIV (France). — La sobriété me semble très recommandable. A. Boutin.

Rép. XXXVI (Suisse). — Lumière, air, soleil, eau. C. Beyel.

Rép. XLIII (France). — Pour moi, une demi-heure ou une heure de repos intellectuel, ou des occupations peu fatigantes après chaque repas. Habituellement, toujours abandonner son travail, sans regret, sans attendre plus de quelques minutes dès que les nécessités usuelles de la vie vous y incitent (repas, besoins naturels, etc.). N'avoir ni trop chaud, ni trop froid (cf. ma note de l'Assoc. fr., Congrès d'Angers, Mém. p. 1203). Être installé à l'aise pour écrire. E. Maillet.

Rép. XLVI (Espagne). — Je conseillerai de ne pas arriver à la fatigue. G. de Galdeano.

Rép. XLIX (France). — Jamais de travaux le soir. Se coucher de bonne heure, lever idem. Huit heures de sommeil en moyenne, repas réguliers. Paul Barbarin.

Rép. LIX (Allemagne). — Vie régulière et interruption du travail par des exercices gymnastiques faciles. A. Tafelmacher.

Rép. LXIX (Italie). — Manger à peine le nécessaire, et surtout boire peu. (...)

Rép. LXXIX (Norvège). — Ne fumez pas trop.

Axel Guldberg.

Rép. LXXXIII (France). — J'ai toujours plus de difficultés à travailler après les repas. (...)

Passons à la *question 23*, relative à la durée nécessaire du *sommeil* quotidien.

Les mathématiciens ont-ils besoin de plus ou de moins de sommeil que le reste des mortels ? Cette question paraît absurde. Elle ne l'est peut-être pas tout à fait. Un psychologue allemand a constaté récemment [1] que le temps de sommeil nécessaire pour dissiper la fatigue mentale variait suivant le genre de travail qui avait occasionné cette fatigue. Ainsi une demi-heure de sommeil suffit à faire disparaître les traces de l'épuisement causé par un travail d'*addition* ; tandis qu'au contraire il a fallu au moins 5 heures de sommeil pour obtenir une restauration analogue après un travail de *mémorisation*.

Nous donnons cet exemple sans vouloir prétendre, bien entendu, qu'on puisse assimiler le travail du mathématicien

---

[1] Weygandt. *Beiträge zur Psychologie des Schlafes*, Congrès de psychologie de Giessen, 1904, et *Zeitsch. f. Psychol.* Bd 39, 1905.

à un travail d'addition ! Mais on pourrait supposer, en voyant la forte différence existant sous le rapport de la fatigabilité, entre un travail d'addition et un travail de mémorisation, qu'une différence physiologique analogue peut exister aussi dans l'accomplissement des travaux intellectuels supérieurs.

Cependant, cette différence existât-elle réellement, il n'est pas évident qu'elle doive se refléter nécessairement dans la durée du sommeil quotidien. Sans doute, le sommeil règle sa durée, dans une certaine mesure sur les besoins qu'il doit satisfaire. Mais combien peu ! Ce n'est pas lorsqu'on est le plus fatigué que l'on dort le mieux; au contraire. C'était le cas pour le savant Boltzmann :

Rép. XXI (Allemagne). — Lorsque je travaille à quelque chose d'une façon intensive, je ne puis dormir plus de 6 heures par jour, souvent encore moins. Par contre, dans les périodes de détente, lorsque je ne fais rien que remplir mes occupations officielles, ou en vacances, je dors de 8 à 9 heures.

Les enfants dorment plus que les adultes. Il paraît certain que le sommeil est un acte instinctif dont les causes sont profondes et tiennent à notre nature biologique ; la durée du sommeil normal paraît dépendre davantage de l'habitude, de l'éducation, du climat et surtout de l'âge, que de la nature du travail effectué par le sujet.

Ces considérations nous font comprendre la discordance relativement forte entre les réponses fournies à la question 23. Voici la statistique obtenue :

Heures de sommeil.	Réponses.
6	2
6-7	1
7	8
7-8	10
8	30
8-9	3
9	7
9-10	2
10	2

Mais, une telle statistique n'a de signification que dans la mesure où l'on tient compte de l'âge. Chacun sait, en effet, que le besoin de sommeil diminue au fur et à mesure que l'on avance dans la vie. Quelques correspondants ont même jugé bon de la noter :

Rép. XXIII (France). — C'est variable suivant les individus. Il m'a fallu 9 heures en moyenne pendant longtemps. Il m'en faut encore au moins 7. C.-A. Laisant.

Rép. XXXVII (France). — 9 ou 10 heures jusqu'à 30 ans, 8 et 7 heures plus tard. E. Fabry.

Répartissons donc les réponses selon les âges (un correspondant a omis d'indiquer le sien) ; étant donné que le nombre de réponses est trop petit pour que l'on puisse tenir compte de chaque unité, ou même de chaque dizaine d'années d'âge, nous ne les subdiviserons qu'en trois groupes : 1° mathématiciens ayant moins de 40 ans ; 2° ayant de 40 à 59 ans ; 3° ayant 60 ans ou plus.

	Nombre de correspondants de chaque catégorie	Moins de 8 h. de sommeil.	8 h de sommeil.	Plus de 8 h. de sommeil.
I. moins de 40 ans	28	9, soit 32 %	12, soit 43 %	7, soit 25 %
II. de 40-59 ans	27	8, » 29 %	14, » 50 %	5, » 20 %
III. de 60 ans et plus	9	4, » 44 %	3, » 33 %	2, » 22 %

On le voit, la plus forte proportion des grands dormeurs se rencontre chez les sujets les plus jeunes, et la plus forte proportion de petits dormeurs, chez les sujets les plus âgés. L'occupation mathématique ne change rien à cette loi biologique. Il est à noter pourtant que les deux mathématiciens qui ont indiqué 10 heures de sommeil ne sont âgés l'un que de 39 ans (Norvégien), l'autre de 45 (Tchèque), et que le doyen de nos correspondants, feu G. Oltramare, de Genève, (89 ans), dormait 8 heures.

La personne qui a le moins besoin de sommeil est un Italien de 49 ans :

Rép. XVIII (Italie). — Il n'est pas nécessaire de plus de 6 heures de sommeil par jour. (...)

Quel heureux collègue !

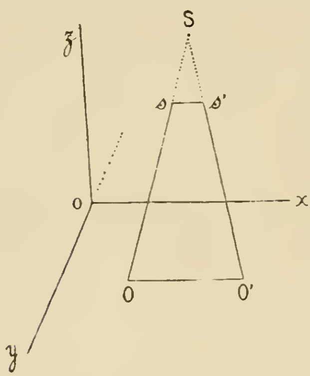
MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Parallaxe stéréoscopique.

Dans le n° 1 de l'année 1907 nous avons publié une démonstration analytique, due à M. Estanave, de la formule qui donne la parallaxe stéréoscopique.

Nous y revenons car M. Estanave nous fait connaître une démonstration géométrique plus élémentaire de cette importante formule.

Rappelons que dans la vision stéréoscopique nous sommes obligé de regarder deux images : l'une seulement visible à l'œil droit l'autre à l'œil gauche. Ces images ne sont pas identiques, on le constate facilement par superposition ; cela d'ailleurs va de soi puisqu'elles sont obtenues par deux objectifs qui n'occupent pas par rapport à l'objet la même position.



Si l'on superpose ces images de façon à faire coïncider les images d'un même point éloigné, de la ligne d'horizon, par exemple ; les images relatives à un point plus rapproché ne coïncident pas et sont d'autant plus écartées latéralement que ce point est plus voisin de l'observateur. C'est à cet écartement latéral de ces images que Helmholtz a donné le nom de *parallaxe stéréoscopique.*

Les rayons lumineux partant d'un point S d'un objet et aboutissant au deux yeux O et O′ percent le plan du dessin en s et s′ qui seront les images stéréoscopiques du point S.

La similitude des triangles sSs′0S0′ donne $\frac{ss'}{00'} = \frac{Ss}{S0} = \frac{\alpha}{\rho}$ en désignant par α et ρ les distances du point S aux plans $x0z$ et au plan parallèle mené par la ligne des yeux 00′, on en déduit $\frac{00' - ss'}{00'} = \frac{\rho - \alpha}{\rho}$ or $00' - ss'$ est la parallaxe stéréoscopique e, 00′ la distance $2a$ entre les deux yeux et $\rho - \alpha$ que nous désignerons par b est la distance du plan du dessin au plan parallèle mené par 00″ on déduit

$$\frac{e}{2a} = \frac{b}{\rho} \quad \text{ou} \quad e = \frac{2ab}{\rho}$$

qui donne la parallaxe stéréoscopique.

CHRONIQUE

Congrès des philologues et professeurs allemands; 7e Réunion de l'Association suisse des professeurs de mathématiques; Bâle, septembre 1907.

La 49e Réunion des philologues et professeurs allemands, qui a eu lieu à Bâle du 23 au 28 septembre, présentait cette année un intérêt tout particulier; aussi l'Association suisse des professeurs de mathématiques organisa-t-elle une séance à Bâle afin d'engager ses membres à suivre les travaux de cet important congrès.

Le comité du Congrès avait annoncé pour les séances générales quatre conférences *sur les rapports de l'Université et de l'Ecole et sur la préparation du personnel enseignant.* Elles formaient l'objet principal, d'un intérêt tout à fait général, et, grâce à la personnalité des conférenciers, elles ont obtenu un plein succès.

M. le Prof. F. Klein a examiné la question au point de vue de l'enseignement des sciences, M. le Prof. P. Wendland (Breslau) à celui de l'antiquité : *a)* langues, *b)* archéologie et hellénisme ; M. le Prof. A. Brandl a parlé au nom des langues modernes et M. le Prof. A. Harnack a étudié la place et le rôle de l'enseignement de l'Histoire et de la Religion.

Dans sa brillante conférence, M. le Prof. Klein a examiné les exigences actuelles concernant la formation des professeurs de l'enseignement des sciences ; elles ont déjà fait l'objet d'une étude très approfondie de la part de la Commission d'enseignement de l'Association des naturalistes et médecins allemands. Le conférencier donne un aperçu du rapport [1] détaillé que cette Commission a présenté au Congrès de la dite Association tenu quelques jours auparavant à Dresde. D'une part l'Ecole demande une préparation à la fois très large, très variée et tout à fait méthodique, tandis que l'enseignement supérieur désire une concentration scientifique. Il s'agit donc de trouver un moyen terme tenant compte de l'ensemble des désiderata. Abordant les questions de détails, M. Klein recommande la séparation des branches scientifiques en deux groupes : sciences mathématiques et physiques; sciences chimi-

[1] En raison de l'importance de ce Rapport l'*Enseignement mathém.* en publiera la traduction dans un prochain numéro.

ques et biologiques. D'autre part il y a lieu de séparer les branches universitaires en branches générales et études spéciales. Cela est devenu indispensable par suite du développement considérable des diverses branches scientifiques. Dans les divers groupes d'études on devra tendre à établir des bases solides et, dès le début, accorder une large place aux exercices et travaux pratiques. M. Klein termine en adressant à l'assemblée un pressant appel en faveur de la coopération toujours plus étroite entre les représentants de l'enseignement secondaire et de l'université.

Section des sciences mathématiques et physiques (X). — M. H. Veillon, professeur à l'Université de Bâle est nommé président.

M. le Prof. Klein remet quelques exemplaires du Rapport sur la préparation des candidats à l'enseignement scientifique élaboré par la Commission d'enseignement de l'Association des naturalistes et médecins allemands. Il attire en particulier l'attention sur la nécessité d'accorder dans le plan d'études une large place aux mathématiques appliquées.

M. Rudio, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, donne lecture d'un travail sur la vie et les travaux de Frédéric Hultsch, philologue et historien des mathématiques ; bien connu par sa publication d'une importante édition de Pappus.

M. Brocke (Zabern) parle des nouveaux programmes projetés pour les mathématiques dans les établissements secondaires supérieurs et les examine au point de vue méthodique. Il rappelle qu'à Strassbourg M. le Prof. Simon a préconisé, il y a plus de vingt ans, le rôle de la théorie des fonctions dans l'enseignement, notamment dans son travail intitulé *Didaktik und Methodik des Rechnen-und Mathematik-Unterrichts* (Baumeister's Handbuch der Erziehungs und Unterrichtslehre, München, 1895). Il estime que l'idée de correspondance géométrique et arithmétique doit avoir un rôle fondamental dans l'enseignement.

M. Klein tient à faire remarquer que la manière dont M. Simon veut présenter les fonctions diffère entièrement de celle que préconise le Rapport de Meran ; elle exigerait la connaissance des variables complexes, tandis qu'il s'agit simplement de la notion de fonction telle qu'on la concevait au XVIIIe siècle. Quant à utiliser l'idée de correspondance, l'orateur l'a souvent recommandée, de sorte qu'il ne peut qu'appuyer cette partie du travail de M. Brocke. Il estime qu'une introduction aux éléments du calcul différentiel est une véritable nécessité, car elle est indispensable à l'enseignement rationnel de la Physique. Il montre quels sont les inconvénients des soi-disantes démonstrations élémentaires où l'on cherche à éviter la notion de fonctions, et cite, à titre d'exemple, la façon dont on obtient l'expression de la force centrifuge $\frac{v^2}{\rho}$ dans l'*Enzyklopädie der Elementar-Mathematik* de

Weber et Wellstein ; les auteurs partent de ν et ϱ constants, puis ils passent au cas de ν et ϱ variable.

La suite de la discussion sur ces questions a été renvoyée à la réunion familière avec l'Association suisse des professeurs de mathématiques.

Parmi les autres travaux présentés à la section des sciences mathématiques et physiques, signalons encore ceux de MM. R. Huber (Berne) sur la théorie des électrons au gymnase ; J. Grimseul (Hambourg) sur les ondes électiques dans l'enseignement (avec démonstrations).

Association suisse des professeurs de mathématiques. — Cette association avait fixé sa séance au 25 septembre afin de permettre à ses membres de prendre part à la conférence de M. le Prof. Klein et aux travaux de la section X. La séance spéciale à l'Association a eu lieu à l'issue des conférences sur l'Université et l'Ecole et a dû être limitée aux affaires administratives. Une nouvelle réunion a été décidée pour le 10 novembre 1907 à *Langenthal.*

Le Comité pour 1907 a été constitué comme suit : Président, M. le Prof. H. Fehr ; secrétaire-caissier, M. le Dr J. Juzi (Zurich) ; membre adjoint, M. le recteur Egli (Lucerne).

Cette séance a été suivie d'une réunion commune avec les membres de la section X du Congrès des Philologues et professeurs allemands et dont le but était d'examiner les demandes de réformes de l'enseignement mathématique en Allemagne.

Séance commune ; discussion [1]. — M. le Prof. H. Fehr souhaite la bienvenue aux mathématiciens allemands, puis il remet la présidence à M. le Dr Flatt, recteur de l'Ecole réale supérieure de Bâle.

Sur la proposition de M. Klein l'assemblée s'occupe tout d'abord de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles dans les écoles supérieures, en ayant spécialement en vue les propositions de la Commission d'enseignement des naturalistes et médecins allemands ; tandis que la discussion concernant la formation des maîtres dans les écoles supérieures est renvoyée à la section pédagogique du Congrès.

M. Laemmel (Zurich) désire, au point de vue des méthodes, un emploi moins fréquent du mode de démonstration euclidien, et une économie dans les démonstrations de l'enseignement mathématique. Dans l'enseignement de la physique, le maître doit se garder de donner une trop grande part aux mathématiques, mais il doit consacrer plus de temps aux théories et aux hypothèses ainsi qu'à leur développement.

[1] Cette dernière partie de ce compte rendu a été traduite par M. Laurent (Genève) d'après le compte rendu officiel établi par M. le prof. Grossmann.

M. le Directeur Bode (Francfort s/Main) déclare que pour celui qui est bien au courant du mouvement pédagogique, l'ancien mode de démonstration a diminué ; cependant on démontre aux élèves encore maintes propositions évidentes par elles-mêmes, et la démonstration ne les rend pas plus claires ; par exemple : le théorème qui dit que lorsque deux cercles sont tangents, la droite qui joint les centres passe par le point de contact. Il réclame aussi pour l'enseignement physique un minimum de mathématiques. M. Bode donne connaissance de quelques résultats obtenus avec cette méthode d'enseignement en présentant des cahiers d'élèves. Dans la troisieme inférieure on dessine des représentations de fonctions simples sur du papier millimètrique, en seconde on obtient les racines de 2 équations du 2e degré ou d'un degré supérieur par le procédé graphique. De cette façon l'élève acquiert une vue nouvelle sur la signification du problème qu'il a à résoudre, et la résolution algébrique des équations qu'on en déduit n'est pas si aride ni si stérile que celle qu'on enseigne actuellement. Il attire l'attention sur une petite brochure de M. Lesser (chez Knauer frères, Francfort s/Main) qui traite de l'introduction et du développement de la notion de fonction, et qui a pour but de montrer comment on peut pratiquement aborder ce sujet.

M. Weill, professeur à Gebweiler, a obtenu au Gymnase d'excellents résultats avec l'introduction méthodique de la notion de fonction. Il estime que dès le début on doit mieux approfondir les notions premières. En ce qui concerne le moment opportun d'introduire l'idée de fonction, les opinions sont franchement divergentes ; il recommande la seconde inférieure comme étant la mieux indiquée et conseille de débuter par exemple par la représentation graphique de $y = x^2$. La recherche de x, y étant donné, conduit naturellement aux nombres irrationnels et à l'extraction de racines. Seulement dans les pays de l'Empire, l'existence fréquente de premières classes combinées où l'on fait les deux examens de maturité, s'oppose à la réalisation de ce projet, ainsi que d'ailleurs le surchargement des programmes. En conséquence seule une transformation intérieure de l'enseignement mathématique peut être tentée, en insistant spécialement et d'une façon systématique sur la notion de fonction. Les résultats que l'on obtiendrait ainsi pourraient alors conduire à supprimer ou à réduire certaines matières, et par cela même à donner un peu de temps pour le calcul infinitésimal.

M. Grimsehl (Hambourg) a toujours considéré la physique comme étant une science de la nature, et en ceci il est en communauté d'idées avec les propositions faites à Méran. Les mathématiques doivent avoir comme mission en physique de simplifier l'expression des lois et de réaliser ainsi une économie, mais à la condition qu'on ait tout d'abord observé objectivement les phénomènes. Par contre il met en garde contre un développement trop détaillé des théories et des hypothèses. L'enseignement physique doit exiger l'introduction des éléments du calcul différentiel, sans lesquels on ne peut pas développer des notions exactes. La notion de fonction se présente d'elle même dans les processus physiques; il rapporte comment, dans des exercices de physique où l'on représentait graphiquement les phénomènes de refroissement, les élèves reconnurent aussitôt la courbe logarithmique. Le concept de fonction doit être introduit le plus vite possible.

M. Geissler (Neleikon, Lucerne) est aussi d'avis que l'enseignement des mathématiques a besoin de réformes ; la question porte seulement sur le « comment » ? Sans nier l'importance de la notion de fonction, l'orateur doute que la question de l'introduction des réformes citées soit mûre et il ne croit pas que le problème de la réforme soit résolu. La majorité des maîtres s'en tient encore à la méthode euclidienne ; cette majorité ne s'est pas encore prononcée ; et il est très à souhaiter qu'elle conserve sa liberté et qu'aucune mesure venue d'en haut ne porte atteinte à cette liberté. De tout cela résulte le danger de donner aux élèves des connaissances décousues, aussi longtemps que l'enseignement logique et l'éducation qui conduisent à la pensée personnelle seront négligés.

M. Brocke (Zabern) ne croit pas la liberté des maître menacée, car il ne s'agit que des propositions et des exemples cités. La notion de fonction peut déjà être présentée en sixième, mais la représentation graphique des équations est à reculer ; l'introduire en troisième inférieure serait prématuré.

L'algèbre et la géométrie doivent tout d'abord se développer indépendamment l'une de l'autre ; pour être unies ensuite par l'introduction de la représentation graphique. Le principe de correspondance et de transformation réciproques doit être introduit plus tôt car il contient l'idée de fonction.

M. F. Klein répond à M. Geissler, que lui aussi, il insiste, d'une façon pressante, pour qu'on opère avec circonspection dans la transformation de l'enseignement, de même que M. le directeur Bode l'a fait dans la séance de section du matin. Au ministère prussien on est aussi d'avis que les programmes doivent donner réellement la liberté et ne rien prescrire ; et on est encore d'avis qu'il n'y a rien à changer à cette façon de voir. Il est aussi d'accord avec M. Geissler pour exiger de la rigueur dans les démonstrations. L'art doit justement consister à amener, par un enseignement bien enchaîné, à la rigueur exigée dans les classes supérieures. L'orateur considère comme nullement suffisantes les mathématiques purement pratiques telles que celles de Perry. Il s'étend encore une fois sur l'expression $\frac{v^2}{\rho}$ et renvoie à la publication de Seeger.

M. Witting (Dresde) remarque que de même qu'on a à préparer dès la sixième la notion de dépendance fonctionnelle, de même on pourrait initier les élèves petit à petit à la représentation graphique. C'est pourquoi il conclut que même dans les classes inférieures l'enseignement doit être donné par des maîtres ayant une culture académique.

M. Grossmann (Bâle) rapporte sur les expériences faites à l'école réale supérieure. Jusqu'à présent, dit-il, nous n'avons pas encore introduit méthodiquement la notion de fonction, par contre le maître s'est donné à tâche, dès les classes moyennes, de mettre en évidence la notion de fonction toutes les fois que l'occasion se présente. La trigonométrie est développée en même temps que les exercices pratiques d'arpentage, la géométrie analytique et la descriptive offrent constamment des exemples de corrélation et de dépendance fonctionnelle. Les éléments du calcul différentiel sont enseignés depuis des années à Bâle, mais jusqu'ici on a apporté plus de soin peut-être qu'il n'était nécessaire, à la différentiation, et pas assez au développement des notions intuitives et de leur application pratique. De même des éléments du calcul différentiel on va pouvoir déduire de nouvelles connaissances en physique et en géométrie. Entre beaucoup d'exemples l'orateur en cite deux appartenant à la géométrie analytique dans l'espace et qui sont propres à montrer à l'élève l'utilité de ses nouvelles notions. Qu'on calcule la distance d'une droite à l'origine, ou la plus courte distance de 2 droites gauches, tout d'abord directement par la géométrie analytique, puis à l'aide du calcul différentiel ; on aura immédiatement convaincu l'élève de la portée de ses nouvelles connaissances.

M. Grimsehl (Hambourg) estime qu'en ce qui concerne l'introduction hâtive des représentations graphiques, on n'a pas lieu de s'en montrer trop avare. La vie ne nous montre que des grandeurs variables et des dépendances fonctionnelles. Les géographes, pour leurs tableaux statistiques, font bien emploi de la représentation graphique dès la sixième, et cela sans hésiter.

M. Epstein (Strassbourg) souhaite la bienvenue au mouvement réformateur de l'enseignement mathématique, et se place au point de vue des écoles techniques moyennes, qui doivent présenter à leurs élèves à peu près les mêmes sujets que les écoles supérieures, mais sous une forme plus pratique. Le malheur est que la plupart des maîtres dans ces écoles enseignent les mathématiques, comme on le fait dans les écoles supérieures. Or la représentation graphique est de toute première importance pour le technicien, et si les élèves à leur entrée étaient déjà familiarisés avec le concept de fonctions, cela allégerait considérablement cet enseignement, par exemple pour les apprentis arpenteurs. Très souvent il importe que le technicien ait le juste sentiment de l'ordre de grandeur des résultats qu'il attend; ce sentiment est à développer et il l'est justement par l'exercice de la pensée sur l'idée de fonction.

M. Flatt (Bâle) fait avant tout ressortir l'importance du lien qui doit unir l'enseignement mathématique à la vie pratique. Combien est instructif, par exemple en arpentage, toute la discussion des problèmes trigonométriques, qui ne sont plus réduits à une pure gymnastique de tables. Il ne faut pas déloger les mathématiques de l'enseignement physique ; à un premier cours élémentaire considérant les phénomènes au point de vue qualitatif, doit faire suite un second cours tenant compte de l'élément quantitatif et s'aidant des mathématiques pour l'exprimer; il recommande qu'à la fin de l'enseignement on fasse un court résumé sur le développement historique de la science. Le calcul différentiel a depuis longtemps sa place à l'école réale supérieure de Bâle.

M. Klein attire l'attention sur le traité de calcul différentiel de Burkhardt (Zurich) paru ces jours derniers chez Teubner; ce sera un guide suggestif pour les professeurs d'écoles moyennes. L'orateur regrette que la question des écoles spéciales n'ait pu être suffisamment étudiée par la commission d'enseignement, à cause de la complexité de la question. Il est très important que les mathématiques et la physique contribuent aussi au développement général et croissant des écoles spéciales. Il prie M. Epstein de bien vouloir communiquer ses expériences et ses recommandations dans la Revue de l'association des mathématiciens allemands.

M. Witting (Dresde) remarque que l'emploi des courbes normales pour résoudre les équations était déjà connu de Newton, et M. Klein ajoute que les Grecs avaient déjà au fond exactement les mêmes idées lorsqu'ils construisaient π à l'aide de la quadratrice coupée par une certaine droite, et que certainement la théorie des lieux géométriques contient déjà l'idée de fonction.

Dans la discussion qui se rapporte à la formation des maîtres, M. Weill (Gebweiler) désire notamment qu'on facilite leur culture ultérieure et propose de soumettre une résolution dans ce sens au congrès des philologues. A Strassbourg, il n'y a eu jusqu'ici qu'une seule fois des cours de vacances.

M. Witting (Dresde) communique que « l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et des sciences naturelles » a déjà pris une résolution dans ce sens. Leipzig, d'une part, et Charlottenbourg, d'autre part, ont dans ce but, inscrit respectivement à leur budget 3000 et 5000 marks.

M. Grimsehl (Hambourg) rapporte les dispositions dignes d'être suivies, de la ville d'Hambourg, qui paye aux participants les indemnités de remplacement, leurs frais de voyage, de séjour et jusqu'à leur suppléant.

M. Burger (Fribourg en Brisgau) dit que dans le Grand Duché de Bade, des cours de vacances ont lieu tous les deux ans, et que leur fréquentation est facilitée par le remboursement des frais de voyage et de séjour.

M. Klein montre que les cours de vacances en Prusse augmentent continuellement; ainsi à Kœnigsberg il y avait un cours portant spécialement sur les sciences mathématiques et naturelles qui a réuni 42 participants ; un autre cours est préparé à Münster, mais il n'est pas encore question de disposition uniforme pour en faciliter l'accès financièrement. A une question de M. Flatt (Bâle) concernant les cours de vacances de Göttingue et de leur fréquentation par des maîtres non prussiens, M. Klein répond qu'à Pâques 1908 il y aura des cours de mathématiques et de physique, mais en tous cas plus tard que d'habitude, à cause de la date tardive des fêtes de Pâques et du congrès international des mathématiciens qui aura lieu auparavant à Rome. La participation des maîtres non prussiens est en soi très désirée.

Association suisse des professeurs de mathématiques, 8me réunion, Langenthal, 10 novembre 1907.

Conformément à la décision prise à Bâle le 25 septembre, l'Association suisse des professeurs de mathématiques s'est réunie à Langenthal, le 10 novembre dernier à 2 heures, à l'Aula de l'Ecole secondaire, sous la présidence de M. H. Fehr. Le principal objet à l'ordre du jour était la conférence de M. le Dr Bützberger (Zurich) sur le savant géomètre suisse Jacob Steiner (1796-1863) : *Jacob Steiner von Uzendorf, Mathematiker und Akademiker in Berlin. Ein Lebensbild nach alten und neuen. Dokumenten, Briefen, Erinnerungen seiner Landsleute und seinem handschriftlichem Nachlass.* C'est une étude biographique très documentée et du plus grand intérêt que M. Bützberger présente à ses nombreux auditeurs comprenant non seulement un grand nombre de membres de l'Association, mais aussi des professeurs et notabilités de la région, ainsi que d'anciens amis et élèves de Steiner. On remarquait, entre autres, M. le prof. Geiser (Zurich), petit neveu de Steiner, et M. le Prof. Kinkelin (Bâle). Le conférencier montre d'abord Steiner comme fils de paysan accompagnant son père au marché de Berne, où il se rendait utile par ses calculs, puis comme élève de Pestalozzi à Yverdon, et enfin à Berlin comme professeur et académicien.

Les manuscrits de Steiner, qui avaient été déposés à la Bibliothèque de la Société helvétique des sciences naturelles, à Berne, ont été revus avec beaucoup de soin. Ils contiennent des travaux inédits et toute une série de problèmes fort remarquables. Ils seront publiés par M. Bützberger, probablement comme supplément aux œuvres de Steiner. Il faut espérer que la remarquable étude biographique de Steiner sera également publiée avec les documents et anecdotes réunis par le conférencier.

A l'occasion de cette séance M. Bützberger avait organisé une exposition de manuscrits, livres, portraits et autres souvenirs de Steiner. Il sera fait une reproduction de l'un des portraits de Steiner, si le nombre des demandes est suffisant (s'adresser à M. le professeur Bützberger, Kantonsschule, Zurich).

La prochaine réunion de l'Association aura lieu à *Baden*, en octobre 1908, en même temps que la réunion de la Société suisse des professeurs de Gymnase. H. F.

IIe Centenaire d'Euler.

Comme suite à la liste des publications qu'a donné lieu le IIe Centenaire d'Euler nous citerons les mémoires suivants qu'on a bien voulu nous communiquer :

12. « *Festakt der Universität Basel* zur Feier des 200ten Geburtstages Leonhard Eulers, Festbericht erstattet von dem Rektor Prof. Dr John Maier. » Dicours de MM. Vondermühll, Backlund, Frobenius, J. Maier, Rudio, Huber. — 13. « Leonhard Euler sein Leben und Wirken. » Conférence de M. Félix Müller à l'assemblée annuelle de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, Dresde. *Unterrichtsblätter f. Mathematik u. Naturwissenschaften*, XIII, n° 5. — 14. « Eulers Verdienste um die elementare Mathematik », von Paul Stäckel. *Zeitsch. f. mathem. u. naturw. Unterricht*, t. 38, n° 4, p. 300-307.

L'Association allemande des mathématiciens a tenu honorer la mémoire d'Euler en organisant pour sa séance annuelle de *Dresde* une série de communications sur Euler. Cette importante réunion, dont nous rendrons compte dans le prochain numéro, ne comprenait pas moins de douze rapports sur l'activité d'Euler dans les divers domaines des sciences pures et appliquées.

Nous signalons d'autre part la communication présentée par M. le Prof. Knoblauch *sur la publication des œuvres d'Euler* à la Société mathématique de Berlin (*Arch. der Mathem. u. Physik*, t. 12, fasc 3, p. 69-72 des *Sitzungsberichte.*) M. Knoblauch préférait à une réimpression des mémoires une étude complète et approfondie des travaux d'Euler, car le savant géomètre a souvent repris les mêmes problèmes dans plusieurs mémoires. Cette étude historique et critique devrait être confiée à une commission de deux ou trois mathématiciens ; l'un se chargerait de la théorie des nombres, l'autre de l'analyse et du calcul des variations et l'autre de la mécanique et de la géométrie. Un pareil exposé permettrait d'éviter des répétitions inutiles et présenterait les résultats obtenus par Euler en tenant compte de l'état actuel des sciences mathématiques.

Le projet de M. Knoblauch nous paraît devoir être examiné avec beaucoup d'attention et il serait désirable que son auteur la soumit au prochain Congrès international des mathématiciens.

H. Fehr.

IIIe Centenaire de Torricelli.

La ville natale de Torricelli se prépare à célébrer, en 1908, le troisième Centenaire de la naissance du grand physicien. La Municipalité de Faenza a estimé qu'elle ne pouvait mieux honorer la mémoire de l'illustre savant, qu'en entreprenant la publication de ses œuvres complètes.

L'exécution de ce projet a été empêchée jusqu'à présent par de nombreuses difficultés ; un travail de préparation de toute la partie inédite avait été commencé déjà par ses contemporains, amis et condisciples, tous de l'école de Galilée, et surtout par Vincent Viviani. Or, ce travail a été repris avec ardeur, par M. Joseph Vassura, docteur ès sciences, prof. de physique au Lycée royal « Morgagni » de Forli, à qui la Municipalité a confié cette charge honorable autant que délicate.

La collection des œuvres de Torriceli comprendra entre autres celles, désormais très rares, qui ont déjà paru, et sa correspondance scientifique. En désirant que l'édition soit complète, la Municipalité de cette Ville s'adresse à tous ceux qui reconnaissent l'intérêt universel d'une publication de la sorte et tout particulièrement à ceux qui pourraient faire savoir s'il existe encore des manuscrits de Torricelli dans quelque bibliothèque publique ou particulière.

Association italienne pour l'avancement des Sciences.

Cette nouvelle association, dont nous avons annoncé la fondation (n° de mars 1907), vient de se constituer définitivement sous le nom de *Società italiana per il progresso delle scienze*. Elle comprend 14 sections : Première section, mathématique, astronomie et géodésie ; seconde section, physique, etc.

La première réunion de la nouvelle société a eu lieu à Parme du 23 au 28 septembre. Elle a choisi comme président pour 1907-1908, à la presque unanimité des suffrages, un mathématicien éminent, M. Vito Volterra, sénateur, professeur de physique mathématiques à l'Université de Rome.

La *section de mathématiques*, *astronomie* et *géodésie* a nommé président M. V. Cerruti, qui a tenu le discours d'ouverture sur *Les mathématiques pures et appliquées dans les réunions précédentes des savants italiens.*

Parmi les communications et les rapports présentés au Congrès, nous signalons les suivants :

U. Amaldi : La théorie des groupes continus de transformations d'après Lie (rapport).

E. Bortolotti : Pour la publication des œuvres complètes de F. P. Ruffini.

P. Burgatti : Sur quelques points de la théorie des équations différentielles.

G. Fubini : Les méthodes récentes pour la résolution du problème de Dirichlet.

A. Garbasso : Le mirage et l'optique des milieux hétérogènes et anisotropes (rapport théorique et expérimental).

G. Lauricella : Sur les équations fonctionnelles.

T. Levi-Civita : Sur la masse électromagnétique (rapport).

R. Marcolongo : Rapport sur la théorie mathématique de l'élasticité.

C. Somigliana : Sur la préparation mathématique des élèves-ingénieurs.

O. Tedone : Sur les équations différentielles de la physique mathématique.

G. Vailati : Sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes.

Un dîner mathématique.

M. Guccia, l'éminent fondateur du *Circolo matematico* de Palerme qui se trouvait dernièrement à Paris, a réuni le 3 novembre dernier, en un dîner intime, quelques uns des mathématiciens français avec lesquels il est en relations personnelles.

L'Académie des Sciences, la Société mathématique de France, et la plupart des publications périodiques importantes s'occupant de mathématiques : *Journal de mathématiques pures et appliquées*, *Bulletin des sciences mathématiques*, *Nouvelles Annales des mathématiques*, *Intermédiaire des mathématiciens*, *Revue du Mois*, *Enseignement mathématique*, *Revue Générale des Sciences*, — s'y trouvaient représentées.

M. Guccia, dans une allocution pleine de charme, a rappelé ses efforts incessants, et couronnés de succès, dont le but a été de créer un groupe mathématique international, le *Circolo mathématico*, et un organe, les *Rendiconti*, qui ont contribué et contribueront au progrès de la science, d'une façon désintéressée, sans aucune distinction de frontières ni de nations. Il a ensuite tenu ses auditeurs au courant des préparatifs pour le Congrès de Rome de

1908, et donné lecture d'un télégramme de M. Vito Volterra, empreint d'une vive cordialité, et manifestant l'espoir que les mathématiciens français répondront avec empressement à l'invitation qui leur est adressée par leurs confrères italiens, pour le 4e Congrès international des mathématiciens.

M. Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, s'est fait en excellents termes l'interprète de tous les convives, pour féliciter M. Guccia de son œuvre si utile à la science, et pour remercier en sa personne les mathématiciens italiens, et M. Vito Volterra en particulier.

Cette réunion est de nature à nous faire concevoir les plus heureuses espérances sur le succès du Congrès de Rome, qui sera une éclatante manifestation internationale, et resserrera les liens de solidarité qui unissent les hommes cherchant sincèrement la vérité, et en font des compatriotes.

Prix de mathématiques.

La Société scientifique de Göttingue a reçu du mathématicien P. Wolfskehl, décédé l'an dernier à Darmstadt, une somme de 100,000 marcs destiné au travail démontrant que l'expression $x^n + y^n = z^n$ *(Fermat)* ne peut être vérifiée pàr des nombres entiers. Jusqu'au moment où le problème sera résolu, les intérêts seront utilisés en faveur des sciences mathématiques.

Nominations et distinctions.

M. Carda, professeur extraordinaire à l'Ecole technique supérieure de Vienne est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Ecole technique supérieure allemande de Prague.

M. A. R. Forsyth, professeur à l'Université de Cambridge, est nommé docteur honoraire de l'Université de Liverpool.

M. Horn est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt.

M. Jolles est nommé professeur titulaire de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

M. Gerh. Kowalewski, professeur à l'Université de Bonn, est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole supérieure des Mines de Clausthal.

M. Lelieuvre est nommé professeur de mécanique rationnelle et appliquée à l'Ecole des Sciences de Rouen.

M. G. Molk, professeur à l'Université de Nancy, est nommé docteur honoraire de l'Université de Giessen.

M. Herglotz, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de Göttingue.

M. STRÖNGEN, privat-docent à l'Université de Kiel, est nommé professeur ordinaire et directeur de l'Observatoire de Copenhague.

M. E. PASCAL, professeur de calcul infinitésimal à l'Université de Pavie, est nommé professeur d'analyse supérieure à l'Université de Naples.

M. PLEMELJ, privat-docent à l'Université de Vienne, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Czernowitz.

M. ROCQUEMONT est nommé professeur de mathématiques appliquées à l'Ecole des Sciences de Rouen.

M. G. TORELLI, professeur de calcul infinitésimal à l'Université de Palerme, est transféré à la même chaire dans l'Université de Naples.

Privat-docent. — Sont admis en qualité de privat-docents :

M. GASSER, pour la Géodésie, à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt.

M. SALKOWSKI, pour la Géométrie descriptive, à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

Nécrologie.

G. SIDLER. — La Suisse vient de perdre un de ses savants les plus distingués en la personne de M. Georg Sidler, professeur de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Berne, décédé subitement le 9 novembre dernier. Né en 1831, Sidler était l'un des plus anciens professeurs de l'Université de Berne. Il prit sa retraite il y a deux ans, après le jubilé que l'Université organisa à l'occasion du cinquantième anniversaire de son enseignement universitaire. Ses publications se rattachent principalement au domaine de l'Astronomie.

MAURICE LOEWY. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Maurice Lœwy, directeur de l'Observatoire de Paris, décédé subitement le 15 octobre 1907, pendant une séance du Conseil des Observatoires astronomiques. Né à Vienne le 15 avril 1833, il entra d'abord à l'Observatoire de cette ville, puis il vint à Paris où il fut appelé par Le Verrier ; il fut nommé astronome adjoint en 1861 et astronome titulaire en 1866. Lœwy, qui s'était fait naturaliser français en 1869, était directeur de l'Observatoire de Paris depuis 1896. Ses nombreux et remarquables travaux le conduisirent à l'Académie des Sciences dont il fut nommé membre en remplacement de Delaunay en 1873. Il possédait à un haut degré les qualités du savant dont la belle vie de continuité dans le travail fut un exemple encourageant pour tous ceux qui travaillèrent autour de lui. Abordant avec une égale facilité tous les domaines de l'astronomie théorique et pratique, Lœwy fut, depuis Bessel, l'un de ceux qui contribuèrent le plus aux progrès des méthodes de haute précision dans les observations astronomiques.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1906-1907 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin ; *Technische Hochschule.* — Dziobek : Höh Mathematik. — Haentzschell : Elemente der Differential-und Integralrechnung und der analyt. Geometrie. — Hettner : Höh. Mathematik. Uebungen zur höh. Mathematik. — Jolles : Darst. Geometrie ; Graphische Statik. — Krigar-Menzel : Allgemeine Mechanik ; Einf. in die kinetische Gastheorie. — Lampe : Höh. Mathematik-Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen. — Scheffers : Darst. Geometrie. — Steinitz : Niedere Analysis und Algebra. Potentialtheorie. Funktionentheorie. — Felgentræger : Mass- und Gewichtswesen Messinstrumente des Chemikers. — Fuchs : Partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. — Gleichen : Einf. in die praktische Optik und Anleitung zur Konstruktion optischer, photographisch-optischer und ophthalmologischer Instrumente. — Gross : Mechanische Wärmetheorie. Ausgew. Kapitel aus der mechanischen Wärmetheorie. Einleitung in die Potentialtheorie. — Kalischer : Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Elektrizitätslehre. — Rothe : Vektoranalysis und die mathematischen Grundlagen der Maxwellschen Elektrizitäts-Theorie ; Uebungen zur Vektoranalysis und mathematischen Theorie der Elektrizität. — Servus : Theorie der Wechselströme. Mechanische Wärmetheorie. — Steinitz : Synthet. Geometrie. — Wallenberg : Repetitorium der höh. Mathematik.

Danzig ; *Technische Hochschule.* — Lorenz : Dynamik starrer Körper. Festigkeitslehre und Hydraulik. — v. Mangoldt : Höh. Mathematik II ; Ausgew. Fragen aus der Elementarmathematik. — Schilling : Darst. Geometrie, Ueb. ; Ausgew. Kap. d. Kinematik. — Sommer : Höh. Mathematik I.

Darmstadt ; *Technische Hochschule.* — Dingeldey : Höh. Math. I. — Fenner : Trigonom. ; Geodäsie ; Höh. Geodäsie ; Geodät. Ueb. ; Ausarb. d. geodät. Vermess. — Græfe : Repet. d. Elem.-Math. ; Höh. Math. ; Geschichte d. Math. — Henneberg : Techn. Mechan. ; Mech. II ; Hydrodynam. — Horn : Höh. Math. I ; Höh. Math. II. — Müller : Darst. Geom. I ; Binäre Formen mit Anw. auf Kurventheorie ; Arbeiten im math. Institut.

AUTRICHE-HONGRIE

Agram (Zagreb, Croatie) ; *Université.* — V. Varicak : Equations diff. 4 ; Théorie des ensembles, 2 ; Séminaire, 2. — D. Segen : Axonométrie, 2 ; Exercices, 2. — J. Majcen : Projection centrale, 2 ; Géométrie analytique du plan, 4. — St. Bohnicek : Analyse algébrique, 4. — L. Stjepanek : Introduction à la mécanique analytique, 2. — S. Hondl : Théorie de l'élasticité, 2.

Brunn ; *Technische Hochschule*. — Waelsch : Mathematik I Kurs 1. — Biermann : Ausgew. Kapitel der höh. Mathematik (Mathematik II. Kurs). Mathem. Näherungsmethoden ; Einige mathematische Probleme der Geographie. — Benze : Wahrscheinlichkeitsrechnung, ; Lehre von der statist. Wahrscheinlichkeit. — Fanta : Versicherungsmathematik,. — Fischer : Elemente der kinematischen Geometrie ; Ausgewählte Kapitel der Infinitesimalgeometrie ; Mathematische Ueb. — Rupp : Darst. Geometrie und konstruktives Zeichnen ; Ausgew. Kapitel der synthetisch-projektiven Geometrie. — Vacat : Niedere Geodäsie, Vermessungsübungen. S. S. 12 Ueb. — Steiner : Elemente der niederen Geodösie.

Graz ; *Universität*. — Dantscher Ritter v. Kollesberg : Analyt. und projekt. Geometrie des Raumes 5 St. — Daurlebsky v. Sterneck : Differential- und Integralrechnung 5. ; Mathematisches Seminar 2 ; Mathemat. Seminar 2. — Streissler : Darst. Geom. I (Orthog. projektionslehre) 3. — Wassmuth : Ueber statistische Mechanik 1.. Uebungen im mathematisch-physik. Seminar 3. — Hillebrand : Theorie der Rotation der Himmelskörper 3 Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate) 2.

Graz ; *Technische Hochschule*. — Hocevar : Mathematik I. Kurs: Algebra un Analysis ; Analytische Geometrie. Vorträge 6, Uebungen, 2. — Peithner Freiherr v. Lichtenfels : Mathematik II. Kurs : Anwendung der Differentialrechnung auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen ; Integralrechnung, Vorträge 4, Uebungen 2. — Stelzel : Elemente der höh. Mathematik, 4. Baumechanik (Baustatik), Vorträge 4, Uebungen 4. — Schüssler : Darst. Geometrie, 4, Uebungen 5 ; Projektive Geometrie I, Vorträge 2, Uebungen 1 ; Projektive Geometrie II, 2 ; Seminarübungen aus darstellender Geometrie (für Lehramtskandidaten), a) Unterseminar 2, b) Oberseminar 2. — Wittenbauer : Allgemeine Mechanik (einschliesslich Elemente der graphischen Statik), 4, Uebungen 1 ; Techn. Mechanik I. Kurs (Elastizitäts- und Festigkeitslehre), Technische Mechanik, II. Kurs (Hydrostatik, Hydraulik, Aerostatik, Aërodynamik). — Klingatsch : Niedere Geodäsie, I. Kurs (Elemente der niederen Geodäsie), Niedere Geodäsie, II. Kurs Höh. Geodäsie (Methode der kleinsten Quadrate ; das Präzisions-Nivellement ; Landesvermessung) ; Sphärische Astronomie.

Innsbruck : *Universität*. — Gmeiner : Analyt. Geometrie der Ebene, 3, Variationsrechnung, 2. Uebungen im mathem. Seminare, 2. — Zindler : Differential- und Integralrechnung, in Verbindung mit Uebungen des mathematischen Seminars, 6 ; Mathematische Seminar, 1. — Menger : Darst. Geometrie. 4. — v. Oppolzer : Sphär. Astronomie, 2 ; Rotation der Himmelskörper, 1 ; Uebungen in der Zeitbestimmung, 6.

Kolozvar (voir le n° de septembre).

Prag ; *Universität*. — Pick : Elemente der Funktionentheorie 3 ; Elemente der Zahlentheorie 2 ; Seminar 2. — Grünwald : Differential- u. Integralrechnung 4 ; Analyt. Geometrie I. — Weineck : Sphär. Astronomie I. 3. —

Oppenheim : Einf. in die höh. Mathematik 3. — Lippich : Vektoren und Vektorfelder mit Anwendung auf das elektromagnetische Feld 4.

Prag ; *Technische Hochschule.* — Vacat : Mathematik I : Elemente der höh. Mathematik ; Ausgew, Kapitel der Differential- u. Integralrechnung (Elliptische Funktionen). — Anton Grünwald : Mathematik II. Differentialgleichungen und deren Anwendung auf Geometrie und Mechanik. — Vacat : Versicherungsmathematik I. Kurs (einschliesslich mathem. Statistik) ; Versicherungsmathematik II. Kurs (einschl. mathem, Statistik) ; Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Eduard Janisch : Darst. Geometrie ; Konstrukt. Uebung. Geometrie der Lage ; Ausgew. Kapitel aus der darstellenden und projektiven Geometrie ; Uebung ; Uebungen in der darst. Geometrie für Vorgeschrittene. — Franz Stark : Enzyklopädie der Mechanik. Mechanik ; Graphische Statik. — Joseph Adamczik : Elemente der niederen Geodäsie ; Höh. Geodäsie ; Grundzüge der sphär. Astronomie ; Anwendung der Geodäsie auf Kulturtechnik.

Wien ; *Universität.* — v. Escherich : Einleitung in die Funktionsthorie. 5. Proseminar für Mathematik, 1, Seminar für Mathematik, 2. — Mertens : Algebra, 5. Uebungen im mathem. Seminar, 2 ; Uebungen im mathem. Proseminar, 1. — Wirtinger : Elemente der Differential- und Integralrechnung (auch für Naturhistoriker, Physiker, Mediziner und Versicherungstechniker, 5 ; Uebungen zu dieser Vorlesung, 1. Mathemat. Seminar 2 ; Mathem. Proseminar, 1. — G. Kohn : Analyt. Geometrie, 4 ; Uebungen, 1 ; Differentialgeometrie, II. — Blaschke : Einf. in die mathemat. Statistik, I, 3. — Carda : Unendliche Gruppen, 2. — Plemelj : Zahlentheorie, 3. — Plemelj u. Hahn : Mathematische Konversatorium (Besprechung neuerer mathematischer Arbeiten). 3 g. — Hahn : Grundlagen der Geometrie, 2. — Hanni : Theoretische Arithmetik. 2. — Schrutka v. Rechtenstamm : Endliege diskrete Gruppen, 2. — Weiss : Berechnung der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen, 4. — Hepperger : Sphär. Astronomie, 4. Methoden zur Berechnung der speziellen Störungen, 1. — Schram : Kalendariographie und Verwandlung von Daten verschiedener Zeitrechnungen (mit besonderer Rücksicht auf Historiker) 1. — Prey : Mechanik des Himmels, 2.

Wien ; *Technische Hochschule.* — Zsigmondy : Mathematik I. — Carda : Mathematik I. — Czuber : Mathematik II ; Grundlehren der höh, Mathematik ; Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reich : Ausgew. Kapitel aus der hoh. Algebra. — Tauber : Versich.-Mathematik. — Blaschke : Einf. in die math. Statistik. — Müller : Darst. Geometrie u. konstr. Zeichnen ; Schraub-, Dreh- u. Schiebflächen in konstruktiver Behandlung ; Seminar für darst Geometrie. — Schmid : Darst. Geometrie ; Projektive Geometrie. — Adler : Die sphär. Behandlung der Flächen u. ihre Beziehungen zur darst. Geometrie. Theorie der geometr. Konstruktionen. — Finger : Mechanik I. — Jung : Mechanik der starren u. flüssigen Körper ; Allgemeine Mechanik ; Hydromechanik. — Kirsch : Mechanik II (Elastizitäts- u. Festigkeitslehre). — Jung. Budau : Hydromechanik. — Finger : Enzyklopädie d. Mechanik ; Analyt. Mechanik. — Pollack : Elemente der niederen Geodäsie ; Praktische Uebungen. — Dolezal : Prakt. Geometrie. — Tinter : Höh. Geodäsie, Sphär. Astronomie ; Uebungen im Beobachten u. Rechnen. Geodätische Rechenübungen. — Prey : Das geometr. u. das trigonom. Nivellement ; Die Bestimmung der Abplattung der Erde aus Schweremessungen.

FRANCE

Paris; *Faculté des sciences.* — G. Darboux, professeur, traitera des principes généraux de la géométrie infinitésimale. Il étudiera en particulier la déformation des surfaces (2 h.). — Des travaux pratiques afférents au certificat de géométrie supérieure seront dirigés par M. Caron. chef des travaux graphiques (1 h.). — Goursat, professeur, traitera des opérations du calcul différentiel et du calcul intégral. Eléments de la théorie des fonctions analytiques (2 h.). — Paul Painlevé, professeur de mathématiques générales, traitera des lois générales de l'équilibre et du mouvement (2 h.). — Appell, professeur de mécanique rationnelle, et M. Blutel (voir aux conférences), exposeront la première partie du cours de mathématiques générales (1 h.). — L. Raffy, professeur, étudiera, dans le développement de diverses théories inscrites au programme de l'agrégation, l'histoire et les méthodes de la géométrie analytique (1 h). — H. Poincaré, professeur. traitera de la théorie de la lune (2 h.). — M. Boussinesq, professeur, exposera la théorie analytique de la chaleur (1 h.). — G. Kœnigs, professeur, traitera de l'étude thermo-dynamique des machines (2 h.), travaux pratiques (1 h.) —E. Borel, professeur adjoint, chargé du cours, traitera, le lundi, de quelques applications de la théorie de la croissance des fonctions, et le mardi, du calcul des probabilités et de ses applications à la statistique et aux sciences expérimentales.

Conférences : L. Raffy, professeur, conférences sur la géométrie supérieure ; conférences sur le calcul différentiel et le calcul intégral. — Hadamard, professeur adjoint, conférences sur le calcul différentiel et intégral; conférences sur l'analyse supérieure. — P. Puiseux, professeur adjoint, conférences sur la mécanique. — M. Blutel, chargé de conférences, conférences sur l'algèbre, en vue du certificat de mathématiques préparatoires à l'étude des sciences physiques. — M. Servant. chef des travaux pratiques de mécanique physique. conférences sur les questions indiquées par le professeur et surveillera l'exécution des travaux pratiques.

BIBLIOGRAPHIE

R. Baire. — **Leçons sur les Théories générales de l'Analyse.** Tome I. — 1 vol. gr. in-8, X-232 pages ; 8 fr. Gauthier-Villars, Paris.

C'est à M. René Baire que revient l'honneur de combler le premier une lacune qui devenait tous les jours plus visible dans l'enseignement de l'Analyse. Les cours de nos facultés publiés dans ces dernières années ne s'appuyaient pas encore sur des théories récentes, telles que celle des ensembles, lesquelles ont cependant déplacé de façon considérable les prémisses sur lesquelles tout cours d'Analyse doit s'appuyer. Certes, les ouvrages dans lesquels on pouvait se familiariser avec ces points de vue nouveaux ne manquaient pas ; je n'en veux pour preuve que l'existence des *Monographies sur la Théorie des Fonctions* publiées par M. Borel ou sous sa direction, collection à laquelle M. Baire a précisément apporté une très intéressante collaboration, mais il semblait toujours que ce soient là des études accessoires que l'on ne devait s'imposer que lorsque l'on voulait aller au delà de ces connaissances classiques qui à l'heure actuelle forment encore le programme de la licence.

M. Baire n'hésite pas à transporter au seuil de son volume les connaissances nouvelles, qui permettent une rigueur parfaite tout en restant simples. Il définit le nombre irrationnel et l'ensemble en adjoignant immédiatement à cette dernière notion celle de borne supérieure ou inférieure. Ces définitions sont interprétées quelques pages plus loin au moyen d'exemples géométriques car l'auteur a pris grand soin de mettre en évidence le rôle de la géométrie quand elle complète de manière intuitive les exposés qui, sans cela, pourraient paraître trop abstraits ou trop détournés. Ainsi la longueur de la circonférence est considérée comme la borne supérieure (ou inférieure) de l'ensemble des périmètres des polygones réguliers inscrits (ou circonscrits).

On sait d'autre part combien les travaux personnels de M. Baire ont approfondi et perfectionné la notion de continuité. Les pages consacrées à ce sujet délicat sont remarquablement claires. Voici une fonction $f(x, y)$ de deux variables rationnelles ; existe-t-il une fonction $F(x, y)$ de variables quelconques égale à $f(x, y)$ en tout point rationnel et de plus continue ? La construction de F en partant de f constitue le *principe d'extension* après lequel nous voyons brièvement que les opérations arithmétiques élémentaires définies dans le champ rationnel sont valables pour les nombres quelconques. Il y a lieu ensuite d'examiner comment ces propriétés analytiques s'étendent aux grandeurs concrètes d'un caractère géométrique ou physique. C'est là que s'introduit la notion de *mesure* et l'étude des conditions nécessaires pour qu'une grandeur soit *mesurable*. Le premier chapitre de l'ouvrage se termine par l'étude des fonctions $\sqrt[m]{x}$, x^y, $\log x$ et par celle des séries, la notion de série étant considérée comme dérivant de celle de limite.

Dans le chapitre II intitulé *Dérivées et intégrales des fonctions de variables réelles*, les notions de dérivation et d'intégration sont étudiées simultanément. Il faut entendre par là que M. Baire a rapproché le plus qu'il lui a été possible l'étude des conditions de dérivabilité et d'intégrabilité en s'appuyant largement bien entendu sur les résultats acquis précédemment dans l'étude de la continuité. Après ces préliminaires il passe aux procédés d'intégration proprement dits puis étudie l'intégrale définie dans le cas où les limites deviennent infinies et les fonctions représentées par des intégrales définies. Après les fonctions implicites et les déterminants fonctionnels les paragraphes consacrés aux dérivées et aux différentielles d'ordre supérieur sont particulièrement dignes de remarque. Comme M. Baire le dit dans sa préface, il n'y a nullement avantage à rapprocher les différentielles d'ordre supérieur de celles de premier ordre en s'efforçant d'atténuer les différences très réelles qui existent entre ces expressions. Mieux vaut mettre rigoureusement et nettement ces différences en évidence car elles répondent à des nécessités analytiques qui peuvent être très diverses. Ainsi, partant de la formule

$$df = f_x' \, dx + f_y' \, dy + f_z' \, dz ,$$

M. Baire n'incite nullement le lecteur à se faire une idée préliminaire de ce que doit être la différentielle seconde $d^2 f$, idée d'après laquelle on devrait *calculer* cette nouvelle expression en considérant dx, dy, dz comme constants dans la formule précédente. En réalité, il y a là une double convention nettement mise en lumière. En premier lieu on attribue à dx, dy, dz des valeurs fixes et df n'est plus fonction que de x, y, z; en second lieu on donne à x, y, z dans la fonction df ainsi obtenue des accroissements respectivement égaux aux valeurs fixes choisies dans la première convention. Ceci est étendu à la formation de la différentielle d'ordre $n + 1$ en partant de la différentielle d'ordre n et l'extrême précision de l'exposé constitue sans doute une nouveauté en tant que forme didactique. Le chapitre se termine par l'étude de la genèse des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles et par l'intégration des différentielles totales.

Dans le chapitre III qui forme la dernière partie de ce premier volume, nous étudions les *Applications et extensions de la notion d'intégrale*. Il s'agit d'abord de l'évaluation des arcs et des aires. M. Baire montre d'abord rigoureusement dans quels cas l'arc et l'aire existent. L'aire notamment est définie indépendamment de la notion de limite ce qui, au premier abord, peut sembler paradoxal. L'aire d'un domaine quelconque est un nombre plus grand que l'aire de tout domaine polygonal contenu et plus petit que l'aire de tout domaine polygonal contenant le domaine considéré.

Dans ces conditions l'aire est bien une limite si l'on veut mais il y a cependant une distinction bien remarquable au point de vue philosophique. L'esprit humain a sans doute conçu une notion telle que l'aire avant d'en concevoir une telle que la limite, cette dernière n'étant venue que quand il a fallu *évaluer* l'aire.

Mais l'intérêt s'augmente encore singulièrement quand l'auteur arrive aux intégrales doubles et notamment à la question capitale du changement de variables dans de telles intégrales. Il étudie d'abord la transformation linéaire qui change un triangle en un triangle de telle sorte que l'aire du triangle transformé soit égale à celle du triangle primitif multipliée par un certain facteur constant $|D|$. A toute aire polygonale décomposable en triangles correspond une aire de même nature, le rapport de ces deux aires étant toujours $|D|$. Dans ces conditions, le changement de variables dans l'intégrale double revient à une semblable transformation de domaine et la présence du facteur $|D|$ dans l'intégrale transformée est ainsi justifiée. Ce résultat est ensuite étendu au cas d'un changement de variables quelconque, $|D|$ étant alors le déterminant fonctionnel habituellement considéré. Je connais des démonstrations plus courtes, mais je n'en connais pas de plus claires, ni de plus rigoureuses.

Dans l'étude des intégrales triples la marche suivie est la même. Le volume est défini dans l'espace par un procédé analogue à celui signalé tout à l'heure quant aux aires planes.

Le changement de variables est étudié d'abord dans le cas d'une transformation homographique changeant un tétraèdre en un tétraèdre, ces volumes jouant le même rôle que les triangles considérés plus haut à propos des intégrales doubles. Comme applications les centres de gravité et les moments d'inertie sont étudiés après les volumes. L'aire d'une surface courbe est aussi définie avec le plus grand soin. La surface est d'abord représentée au moyen de deux paramètres u et v, variables dans un domaine plan carrelé. Si ξ, η, ζ sont les développements tayloriens *arrêtés au premier ordre* des coordonnées x, y, z, on a ainsi des formules linéaires changeant un des carrés du domaine des u, v en un parallèlogramme susceptible de représenter une portion de la surface avec une approximation d'autant plus grande que cette portion est plus petite. Les derniers paragraphes sont consacrés aux intégrales de ligne et de surface ; on retrouve partout la même homogénéité, les mêmes procédés qui montrent combien M. Baire a réfléchi aux fondements de la science du continu et avec quel art délicat il a disséqué cette notion. Attendons nous à retrouver dans le second volume qui sera consacré aux fonctions analytiques toutes les qualités si heureusement réunies dans le premier quant aux fonctions de variables réelles.

A. Buhl (Montpellier).

P. Duhem. — **Etudes sur Léonard de Vinci.** Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. *Première série.* — 1 vol. in-8°, 355 p. ; 12 fr.; Hermann, Paris.

Avant de reposer dans les bibliothèques de Paris, de Milan ou de Windsor, les manuscrits de Léonard de Vinci ont éprouvé des vicissitudes sans nombre. Après la mort de leur auteur, dispersés par des héritiers insouciants, ils tombent entre des mains ignorantes ou habiles ; les unes les négligent, les autres savent les exploiter au profit d'un nouvel auteur.

Les précieuses feuilles voyagent en Europe, d'Italie en Espagne et en Angleterre, les collectionneurs se les disputent, des Mécènes en font cadeau aux bibliothèques et aux musées tandis que les rois les classent dans leur cabinet particulier ; elles servent même de trophée aux vainqueurs et passent d'un pays à l'autre suivant le sort des armes. Enfin, au moment où l'ère des tribulations semblait close, d'autres pillards autrement plus dangereux que les hommes de guerre, arrachaient des manuscrits les plus beaux feuillets qu'il fallut racheter à prix d'or quand le moment fut venu.

C'est le citoyen Venturi qui en 1797, fit connaître par des extraits des manuscrits de Léonard, la valeur des trésors scientifiques cachés sous l'écriture renversée lisible au miroir. Venturi et plus tard Guillaume Libri montrèrent que beaucoup de découvertes attribuées à des savants relativement modernes, tels que Palissy, Tartaglia, Cardan et même Pascal, se trouvaient sinon complètes, du moins en germe dans les œuvres de Vinci. La tradition semblait avoir été rompue entre Léonard et ses successeurs et péniblement, certains principes avaient été redécouverts par la postérité ignorante des œuvres du précurseur. Et peu à peu l'opinion se répandit que le progrès des sciences en Europe avait été retardé de plusieurs siècles, du fait que les travaux de Léonard étaient tombés dans l'oubli. La méconnaissance de ses œuvres aurait stérilisé le génie qui éclate à chaque page des fameux carnets et l'histoire des sciences se bornerait à enregistrer l'avortement de cet effort colossal.

C'est cette opinion que M. P. Duhem s'attache à réfuter dans une série d'études parues dans le *Bulletin italien* et réunies ici en un fort volume de 350 pages.

Ces notices sont consacrées à l'étude des rapports de Léonard avec ses prédécesseurs, ses contemporains et ses successeurs.

Albert de Saxe d'abord, puis l'auteur du *Tractatus Ponderibus* que

M. Duhem appelle le Précurseur, Villalpand, Bernardino Baldi, Thémon, le fils du Juif, Cardan, Roberval et Descartes, Bernard Palissy et tant d'autres. Selon M. Duhem, Léonard n'est pas le grand solitaire autodidacte sans relation avec la science du Moyen-Age et sans influence sur la postérité.

« Léonard » dit l'auteur « ne nous apparaît donc plus comme un génie isolé dans le temps, sans lien avec le passé comme avec l'avenir, sans ancêtres intellectuels comme sans postérité scientifique, nous voyons sa pensée se nourrir des sucs de la science des siècles précédents pour féconder à son tour la science des siècles futurs ; maillon admirablement solide et brillant, il reprend sa place dans la chaîne de la tradition scientifique. »

Certes, si ce résultat est intéressant, la sagacité avec laquelle l'auteur l'établit est digne d'éloge. On se rend compte de la profondeur d'érudition nécessaire pour établir des comparaisons entre les auteurs de cette époque encore si obscure. Les belles publications de Ravaisson Mollien ou de l'Académie des Lyncei nous ont donné les manuscrits de Vinci dans toute leur véracité, la correspondance et les œuvres du P. Mersenne à l'affut de toutes les nouveautés scientifiques de son temps, nous renseignent il est vrai sur beaucoup d'événement oubliés Mais le travail de M. Duhem met en évidence cette continuité latente qui existe dans le développement de la science et cet enchaînement des découvertes scientifiques. Un exemple des plus frappants est cité dans la partie du volume consacrée aux relations de Léonard avec Baldi, Roberval et Descartes. Des idées puisées par Léonard dans les œuvres d'Aristote, de Saint-Thomas d'Aquin ou d'Albert de Saxe, sont commentées à leur tour par Bernardini Baldi. Le P. Messenne provoque les efforts et les recherches de Roberval et de Descartes en leur faisant connaître les travaux de Baldi ; il attire l'attention du jeune Huggens sur certain problème de mécanique que celui-ci résoudra dans son célèbre traité de l'horloge à pendule. Les travaux d'Huggens sont donc issus par filliation directe, à deux siècles de distance, des pensées fécondes de Léonard.

Chacune des études fournit au lecteur un nouvel exemple de cet enchaînement de théories et de découvertes. Voici Cardan, l'auteur *De la Subtilité*, où M, Duhem découvre des analogies et rapprochements avec les notes du Vinci plagiées effrontément. Le livre de Cardan permet à Salomon de Caus d'établir ce grand principe : en aucune machine, le travail résistant ne peut excéder le travail moteur. « Lors donc » dit M. Duhem, ce que nous remontons jusqu'à l'origine des théories qui régissent la mécanique industrielle, nous les voyons naître de ce que Cardan a pris au Vinci.

En Paléontologie, même enchaînement, Cardan démarque Léonard et Bernard Palissy en polémiquant contre Cardan lui emprunte les principes fondamentaux de la Paléontologie.

Et voici la morale de l'histoire. « Comme Villalpand, comme Bernardino Baldi, comme tant d'autres de nos contemporains, Cardan fut un plagiaire ; mais en plagiant les idées de Léonard de Vinci, il les sauva de l'oubli ; grâce à la graude vogue de son livre étrange, il les sema partout et son manque de scrupules leur fit produire les découvertes dont elles portaient le germe. Celui qui mène les pensées humaines fait servir au progrès de la Science les plus petites faiblesses des savants. »

Les « Etudes » de M. Duhem sont remplies de remarques, de faits, d'analogies et constituent un document historique de premier ordre ; c'est un manuel pourrait-on dire, aux fins de s'orienter dans le dédale des auteurs et des plagiaires de la fin du moyen-âge et du commencement des temps modernes. Le lecteur éprouve le délicat plaisir de voir défiler les sophismes, paradoxes, erreurs et vérités que les savants des temps passés ont manié et se sont opposés les uns aux autres.

D'un coup d'œil embrassant plusieurs siècles de recherches, on assiste au développement de la théorie scientifique ; l'enchaînement des idées, la répercussion des œuvres les unes sur les autres, le triomphe des principes que l'expérience a établit provoquent un intérêt croissant de page en page.

Au premier plan, apparaît la figure de Léonard de Vinci et l'on admire cet homme qui s'est assimilé toute la science de son époque, qui a contrôlé et développé les quelques expériences des anciens que la doctrine arabe avait sauvé de l'oubli, qui a pratiqué plus qu'un autre la recherche expérimentale et l'observation des faits et dont le génie a jeté les bases de plusieurs sciences ; il se tient au seuil des temps modernes, pratiquant la méthode scientifique avant la lettre et réunissant dans son vaste cerveau comme dans une lentille, tout les rayons épars, qu'il réunit en un puissant faisceau dont l'éclat nous éblouit encore à quatre siècles de distance.

Alph. Bernoud, (Genève).

P. Treutlein. — **Mathematische Aufgaben** aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen. I. Teil : *Aufgaben.* — 1 vol. in-8°. 158 p., 2 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Comme le titre l'indique, ce livre est un recueil de problèmes ayant été proposés aux élèves des gymnases du Grand Duché de Bade à leurs examens de maturité. Il a été écrit à l'instar de ce qui s'est fait en Prusse, en Bavière, en Wurtemberg et en Autriche où des ouvrages analogues ont déjà paru.

Non seulement ce volume pourra rendre de réels services aux instituteurs et aux élèves des écoles supérieures, par l'abondance et la variété des problèmes qu'il renferme, mais encore son importance en ce qui concerne l'histoire de l'enseignement mathématique dans les gymnases badois est manifeste. A une époque où l'on parle tant de la réforme de cet enseignement, ce point de vue là n'est certes pas l'un des moins essentiels. En consultant les plans d'étude et programmes se rapportant à divers collèges, on peut se rendre compte du but qu'on se propose d'atteindre, et, jusqu'à un certain point, des méthodes d'instruction en vigueur ; mais c'est en examinant les questions et problèmes proposés aux examens que l'on saura si ce but a été réellement atteint, et que l'on sera à même de juger de l'efficacité des méthodes employées.

Ce ne fut pas sans difficultés que l'auteur parvint à rassembler toutes ces questions proposées aux diverses épreuves de maturité. Dans les autres écoles allemandes, il était d'usage d'inscrire ces questions dans les rapports scolaires annuels ; mais ce n'était pas le cas pour les établissements badois. Cependant, après un travail de plusieurs années, l'auteur parvint à réunir 1663 problèmes proposés aux examens de diverses écoles. Pour certaines d'entre elles ces problèmes datent de 1870, pour d'autres de 1880 et pour d'autres enfin de 1890 seulement. En tête de chacun se trouvent indiqués la date de l'examen et le genre d'école où il a été proposé (Gymnasium, Realgymnasium ou Oberrealschule).

Il est à remarquer qu'avant 1868 on ne trouvait dans le Grand Duché de Bade que des « Gymnasien ». C'est de cette époque que datent les « Realgymnasien » qui depuis 1879 sont devenus analogues aux « Gymnasien ».

Quant aux « Oberrealschulen » elles n'apparaissent qu'en 1893. Ces trois sortes d'établissements ont à peu près les mêmes attributions et sont au nombre de 29 (1906). Les personnes qui désirent se renseigner au sujet des programmes et plans d'études de ces écoles trouveront des indications détaillées dans la préface du présent ouvrage.

Voici du reste la matière sur laquelle roulent les problèmes proposés :

I. *Arithmétique et Algèbre :* Equations du 1^{er}, 2^{me} et 3^{me} degré; Equations de degré supérieur au 3^{me}; Analyse indéterminée ; Equations exponentielles ; Progressions arithmétiques et géométriques; Intérêts composés, amortissements, rentes, etc. ; Fractions continues; Analyse combinatoire; Probabilités ; Binome de Newton ; Nombres complexes ; Séries; Maxima et minima ; Expressions indéterminées.

II. *Géométrie :* Géométrie plane ; Goniométrie ; Trigonométrie plane ; Trigonométrie sphérique ; Géométrie de l'espace ; Géométrie analytique (droite, cercle, sections coniques).

Les questions sont cataloguées autant que possible d'après le sujet qu'elles traitent.

Les solutions seront publiées en un volume à part formant la seconde partie de cet ouvrage.

J.-P. Dumur (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaires des principaux périodiques :

Bulletin de la Société Française de Philosophie, publié par X. Léon et André Lalande, 7e année, 1907. — Colin, Paris.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von Emil Lampe. Bande 36. Jahrgang 1905. — G. Reimer, Berlin.

Heft 1 (p. 1 à 528). — Geschichte, Philosophie und Pädagogik. — Algebra. — Niedere und höhere Arithmetik. — Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reihen. — Differential- und Integralrechnung. — Funktionentheorie. — Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Intermédiaires des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Em. Lemoine, Ed. Maillet. A. Grevy. Tome XIV. 1907. — Gauthier-Villars, Paris.

Nieuw Archief vor Wiskunde, revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver. D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. 2^{me} série, VII, 4e fasc., 1907. — Delsman et Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik, revue dirigée par C. Juel et V. Trier ; série A, 18^{me} année ; série B, 18^{me} année ; 1907. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Pædagogisches Archiv. Monatsheft für Erziehung und Unterricht an Hoch, Mittel- und Volksschulen, herausgegeben von Prof. Dr L. Freytag, 49. Jahrg., 1907. — Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par X. Léon. — Arm. Colin, Paris.

15e année, nos 2 et 3. — M. Winter : Sur l'introduction logique à la théorie des fonctions. — E. Borel : La logique de l'intuition en mathématiques. — P. Boutroux : La théorie physique de M. Duhem et les mathématiques.

Revue Scientifique. — 5e série, T. VIII. Paris.

17 et 24 août 1907. — Ch. Méray : Mes « nouveaux Eléments de Géométrie. »

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. Tome XV, 2me partie, octobre 1906, avril 1907. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam 1906,

School Science and Mathematics, A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools, vol. VII, 1907. — Smith and Turton. Chicago.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome IX, fasc. 3 et 5. — Delsmann en Nolthenius. Amsterdam.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. Derde Jaargang, 1907. — Blom & Olivierse, Culemborg.

2. Livres nouveaux :

W. Ahrens. — **Mathematische Spiele** („Aus Natur u. Geisteswelt"). — 1 vol. cart. VI-118 p. ; 1 m. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

P. Bachmann. — **Grundlehren der neueren Zahlentheorie** („Sammlung Schubert"). — 1 vol. cart., 270 p. ; 6 m. 50 ; G. J. Gœschen, Leipzig.

R. Baire. — **Leçons sur les théories générales de l'Analyse.** Tome I. — 1 vol. gr. in-8o, 232 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

F. Bennecke. — **Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen.** — 1 vol. gr. in-4o, 7 p. et 9 planches ; 2 marcs ; O. Salle, Berlin.

Carlo Bourlet. — **Cours abrégé de Géométrie,** II : Géométrie dans l'espace. — 1 vol. cart. in-16, 238 p. ; 1 fr. 80 ; Hachette et Cie, Paris.

G. H. Bryan and H. Pinkerton. — **Geometry of the conic.** (Dent's series of Mathematical Text Books). — 1 vol. cart. 200 p. ; Dent & Co., Londres.

Alb. Conti. — **Elementi di calcolo letterale,** con un' appendice sull' estrazione della radice quadrata e cubica, ad uso della 1a Normale. — 1 vol. in-16, 120 p. ; 1 lira ; Zanichelli, Bologna.

Alb. Conti. — **Elementi di calcolo letterale** per la 3a classe tecnica, — 1 vol. in-16, 120 p. ; 1 lira ; Zanichelli, Bologna.

Fr. Daniëls. — **Essai de Géometrie sphérique en coordonnées projectives.** — 1 vol. gr. in-8o, 280 p. ; (Collectanea Friburgensia) Librairie de l'Université, Fribourg, Suisse.

H. Dingler. — **Grundlinien einer Kritik u. exakten Theorie der Wissen-**

schaften insbesondere der mathematischen. — 1 broch. in-8°, 76 p. ; Th. Ackermann, Munich.

Ed. A. Fouët. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** 2e *Edition*, entièrement refondue. Tome I. Des fonctions en général. — 1 vol. gr. in-8°, 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

F. G.-M. — **Exercices de Géométrie** comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues. *4e édition.* — 1 vol. cart. gr. in-8°, 1228 p.; A. Mame et fils, Tours ; Ve Ch. Poussielque, Paris.

Z. G. de Galdeano. — **Alcunas Consideraciones sobre Filosofia y Enseñanza de la Matemática.** — 1 vol. in-8°, 115 p. ; 2 pes. ; Em. Casañal, Saragosse.

Z. G. de Galdeano. — **Exposicion sumaria de las Teorias matematicas.** — 1 vol. in-8°, 208 p. ; 2 pes. ; Em. Casañal, Saragosse.

S. E. Gubler. — **Grundlehren der Geometrie für Sekundarschule** mit zahlreichen Konstruktions- und Berechnungsaufgaben. — 1 vol. cart. in-8°, 200 p. ; Erziehungsdirektion, Zurich.

J. Lange. — **Synthetische Geometrie der Kegelschnitte** nebst Uebungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. *3. Auflage*, von P. Zühlke. — 1 vol. 68 p ; 1 m 50 ; H. W. Müller, Berlin.

M. d'Ocagne. — **Calcul graphique et nomographie** (Encyclopédie scientifique, Bibliothèque de Mathématiques appliquées dirigée par M. d'Ocagne.) — 1 vol. cart. in-8°, 400 p. et 146 fig. ; 5 fr. ; O. Doin, Paris.

W. Rouse Ball. — **Histoire des mathématiques**, Edition française, revue et augmentée, traduite sur la 3e Edition anglaise par L. Freund. Tome II : Les mathématiques modernes depuis Newton jusqu'à nos jours. — 1 vol. gr. in-8°, 270 p. ; 8 fr. ; Hermann, Paris.

W. Rouse Ball. — **Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes.** Deuxième édition française, par Fitz-Patrick. Première Partie : Arithmétique ; Algèbre ; Théorie des nombres. — 1 vol. 355 p. ; 5 fr. ; Hermann, Paris.

P. Rozé. — **Théorie et usage de la Règle à Calculs.** Règle des écoles ; règle Mannheim. — 1 vol. in-8°, 118 p. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

C.-A. Scott. — **Cartesian plane Geometry.** — Part. I. Analytical conics. (Dent's series of mathematical Text Books). — 1 vol. cart. 428 p. ; Dent & Co., Londres.

T. A. Serret. — **Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung.** Nach Axel Harnacks Uebersetzung. 3. Auflage, neu bearbeitet von G. Scheffers. Zweiter Band: **Integralrechnung.** — 1 vol. relié, 585 p. ; 13 m. ; B. G. Teubner, Leipzig.

K. Schwering. — **Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer.** — 1 vol. relié, 407 p. ; 8 m. ; B. G. Teubner, Leipzig.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et organisation de l'enseignement.

Philosophie et histoire des mathématiques.

MÉLANGES

CHRONIQUE

Congrès et sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire des principaux périodiques.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volumes.

ERRATA

p. 201, ligne 12, supprimer le nom de M. G. Combebiac.

Article de M. B. Porter

p. 273, ligne 6, au lieu de « point fixe » lire « ensemble de points ».
p. 274, lignes 4 et 5, au lieu de « en sortir » lire « s'empiéter ».

Article de M. V. Hioux:

p. 369, ligne 16, au lieu de « $\widehat{APB}$ » lire « $\widehat{APM}$ ».
p. 376, ligne 8, » » » « MD » » « ND ».