LEÇONS
D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE.

Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS.
37285 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS
D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES,

PAR

Jules **TANNERY**,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.
SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE.

TOME SECOND.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

LEÇONS

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE.

CHAPITRE XI.

SÉRIES.

171. **Suites infinies. Limites.** — Dire qu'une suite de nombres u_1, u_2, ..., u_n, ... est infinie, c'est dire qu'après chaque terme de cette suite il y en a un autre. Telle est la suite naturelle 1, 2, ..., n, ...

Dire qu'une suite infinie est donnée, c'est dire qu'on se donne le moyen de calculer chaque terme connaissant son rang, le moyen de calculer u_n quand on se donne n; telles sont les suites

$$1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad \ldots, \quad n^2, \quad \ldots;$$
$$2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots, \quad 2^n, \quad \ldots;$$
$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots;$$
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots.$$

Dire que le $n^{\text{ième}}$ terme u_n de la suite u_1, u_2, ..., u_n, ... a pour limite le nombre A quand n croît indéfiniment (ou pour n infini) c'est dire, en gros, que u_n est très voisin de A, pourvu que n soit très grand, et, d'une façon plus précise, que, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre naturel p tel que la valeur absolue de la différence entre A et u_n soit moindre que ε, pourvu que n soit plus grand que p.

Il revient au même de dire que, quelque petit que soit le nombre positif ε, tous les termes de la suite finissent, à partir de l'un d'eux u_p, par être compris dans l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$: en dehors de cet intervalle, il n'y a qu'un nombre limité de termes de la suite. Ces derniers, pour ce qui concerne l'existence ou la valeur de la limite, n'ont aucune importance.

Par exemple, dans les deux dernières suites écrites plus haut, $\frac{1}{n}$, d'une part, $\frac{n}{n+1}$, de l'autre, ont pour limites respectives o et 1, quand n croît indéfiniment.

Si, sur un axe, on considère une suite de points $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, on dira que le point u_n a pour limite le point A quand n augmente indéfiniment, pour dire que, quelque petite que soit la distance ε, tous les points de la suite finissent, à partir de l'un d'eux u_p, par être à une distance du point A moindre que ε; tous ces points finissent par se trouver compris dans un segment, dont A est le centre et qui est aussi petit qu'on le veut. En dehors d'un tel segment, il n'y a jamais qu'un nombre limité de points de la suite.

L'identité de cette définition et de la précédente, quand on confond, comme on l'a expliqué dans le Chapitre I, les points avec leurs abscisses, saute aux yeux.

Si u_n a pour limite A, quand n augmente indéfiniment, tous les termes de la suite finissent par être compris dans l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$; si donc A n'est pas nul, en prenant ε inférieur à la valeur absolue de A, tous les termes de la suite finiront par avoir le signe de A. Inversement, s'il n'y a pas de termes négatifs dans la suite, la limite A ne peut être négative, puisque, si elle était négative, tous les termes finiraient par être négatifs; la limite ne peut être positive, s'il n'y a pas de termes positifs dans la suite, autrement dit, si tous les termes sont positifs ou nuls, la limite de u_n, pour n infini, ne peut être que positive ou nulle, etc. Plus généralement, si tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux au nombre B, la limite de u_n, pour n infini, ne peut être qu'inférieure ou égale à B, etc.

On écrit que u_n a pour limite A quand n augmente indéfiniment, en écrivant

$$\lim_{n=\infty} u_n = A.$$

Il revient au même d'écrire $\lim\limits_{n=\infty} (u_n - A) = 0$.

Au lieu de dire que u_n a pour limite A quand n augmente indéfiniment, on dit souvent que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite A. Cette façon de parler est un peu vicieuse, parce que l'idée de limite implique celle d'une quantité (ou d'une figure) variable qui s'approche, dans des conditions qu'il faut toujours spécifier, d'une quantité (ou d'une figure) fixe. Toutefois, j'emploierai cette forme de langage, qui est passée dans les habitudes, et qui est commode.

Si l'on a $\lim\limits_{n=\infty} u_n = A$, u_n peut être regardé comme une valeur approchée de A, valeur approchée que l'on sait calculer quand la suite $u_1, u_2, \ldots$ est donnée. Il arrive souvent qu'on n'ait pas d'autre moyen de calculer une quantité A qu'en la regardant comme la limite d'une suite donnée : les termes de cette suite fournissent des valeurs aussi approchées de A qu'on le veut, pourvu qu'on les prenne assez loin dans la suite. C'est ainsi que, en Géométrie élémentaire, on calcule approximativement la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon donné en calculant le périmètre d'un polygone régulier d'un très grand nombre de côtés.

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} u_n = A, \qquad \lim_{n=\infty} v_n = B,$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} (u_n + v_n) = A + B, \qquad \lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = A - B,$$

$$\lim_{n=\infty} (u_n v_n) = AB, \qquad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{B};$$

la dernière de ces égalités suppose toutefois essentiellement que B ne soit pas nul.

Ces propositions reviennent à celles-ci :

On obtient des valeurs aussi approchées qu'on le veut de $A + B$, $A - B$, AB, $\frac{A}{B}$, en substituant à A, B des valeurs suffisamment approchées u_n, v_n; c'est ce que la Note du n° 138, où l'on a appris à calculer l'erreur commise sur le résultat, connaissant les erreurs commises sur les données, montre suffisamment.

172. Il est très important de savoir reconnaître sur une suite donnée $u_1, u_2, \ldots$ si elle a une limite, lors même qu'on ne saurait pas calculer exactement cette limite.

Il y a quelques circonstances où l'on reconnaît aisément l'existence d'une limite.

Supposons que les termes de la suite aillent en croissant, ou plutôt n'aillent jamais en décroissant quand n augmente; autrement dit, on suppose que l'on a $u_{n+1} \geqq u_n$, quel que soit n.

Alors, deux circonstances peuvent se produire :

Ou bien u_n augmente indéfiniment avec n, c'est-à-dire que, si grand que soit le nombre P, les termes de la suite finissent, à partir de l'un d'eux, par être tous plus grands que P : c'est ce qui arrive évidemment dans la suite naturelle $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Ou bien tous les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont inférieurs à un nombre fixe Q, et alors u_n, quand n croît indéfiniment, tend vers une limite A inférieure ou égale à Q.

Qu'il en soit ainsi, c'est ce que le lecteur admettra simplement, s'il le veut. La proposition lui paraîtra assez vraisemblable en considérant les *points* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de l'axe, dont les abscisses sont les *nombres* $u_1, u_2, u_n, \ldots$. Chaque point est, par hypothèse, à droite de celui qui le précède, ou confondu avec lui; alors, ou bien les points s'éloignent indéfiniment, ou bien, s'ils doivent tous rester à gauche d'un point fixe Q, ils viennent s'entasser en avant de quelque point fixe A, dont ils s'approchent indéfiniment, ou sur ce point lui-même; le point A est à gauche de Q ou confondu avec lui.

Au reste la démonstration est aisée en se plaçant au point de vue du Chapitre I.

Supposons que l'on ait $u_{n+1} \geqq u_n$, quel que soit n, et que tous les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ soient inférieurs à Q. Soit a un nombre rationnel quelconque : ou bien il y a dans la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ quelque terme qui est supérieur ou égal à a, ou bien a est plus grand que tous les termes de la suite. Je rangerai le nombre a dans une première classe, ou dans une seconde classe, suivant qu'on sera dans un cas ou dans l'autre. Il y a évidemment des nombres dans les deux classes; dans la seconde figurent tous les nombres rationnels plus grands que Q. Il est bien clair que les deux classes satisfont aux conditions imposées dans le n° 11, et qu'on a ainsi défini une *coupure* qui, à son tour, définit un nombre A.

Or, d'une part, tout nombre rationnel plus grand que A appartient à la seconde classe et est par conséquent plus grand que tous les termes de la suite; il en est de même de tout nombre irrationnel $B > A$, puisqu'il y a des nombres rationnels entre A et B, qui sont plus grands que tous les termes de la suite : donc aucun terme de la suite ne dépasse A.

D'autre part, si ε est un nombre positif quelconque, il y a des nombres rationnels entre $A - \varepsilon$ et A, qui, étant plus petits que A, appartiennent à la première classe ; soit a un tel nombre rationnel ; puisqu'il a été rangé dans la première classe, c'est qu'il y a dans la suite un terme u_p qui est égal ou supérieur à a ; tous les termes suivants, égaux ou supérieurs à u_p, sont aussi égaux ou supérieurs a a ; à partir de u_p, tous les termes de la suite appartiennent donc à l'intervalle $(A - \varepsilon, A)$. Puisque ε est aussi petit qu'on le veut, on a $\lim\limits_{n=\infty} u_n = A$. On voit que A est supérieur ou égal à tous les termes de la suite. S'il était égal à l'un d'eux u_p, il faudrait d'ailleurs que tous les termes de la suite, à partir de u_p, fussent égaux à u_p.

Considérons, par exemple, un symbole formé d'un nombre entier suivi d'une infinité de chiffres décimaux, qui se suivent d'après une loi quelconque : on formera une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ en limitant le symbole au premier, au second, ..., au $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal. La suite ainsi formée sera dans le cas qu'on vient d'étudier, puisque tous les termes sont inférieurs, par exemple, à $u_1 + \frac{1}{10}$; elle aura une limite que l'on sait d'ailleurs être le nombre dont le symbole donné est la représentation décimale (n° 14), sauf dans le cas où les chiffres finiraient par être tous des 9 [1].

On démontrerait de même que, si la suite

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

est telle que l'on ait, quel que soit n, $v_{n+1} \leqq v_n$, et si tous les termes de la suite sont supérieurs à un nombre fixe Q, il existe un nombre B tel que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} v_n = B ;$$

ce nombre est supérieur ou égal à Q ; il est inférieur ou égal à tous les termes de la suite $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$. Il ne peut être égal à l'un d'eux v_p que si l'on a $v_p = v_{p+2} = v_{p+2} = \ldots$.

---

[1] Quelques auteurs donnent le nom de *monotone* à une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ dans laquelle on a toujours $u_{n+1} \geqq u_n$, ou toujours $u_{n+1} \leqq u_n$.

L'exemple tiré d'un symbole tel que celui que l'on a considéré tout à l'heure, que l'on limite successivement au premier, au second, ..., au $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal, mais en forçant, chaque fois, le chiffre auquel on s'arrête, se présente naturellement à l'esprit.

On a, en particulier, assez souvent à considérer un système de deux suites

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots,$$

telles que l'on ait, quels que soient les nombres naturels n et p,

$$u_{n+1} \geqq u_n, \qquad v_{p+1} \leqq v_p, \qquad u_n \leqq v_p.$$

La première suite a une limite A, puisque ses termes ne décroissent jamais et que tous sont inférieurs ou égaux à v_p. Cette limite est supérieure ou égale à un terme quelconque de la première suite; on a $u_n \leqq \mathrm{A} \leqq v_p$. De même la seconde suite a une limite B et l'on a $u_n \leqq \mathrm{B} \leqq v_p$.

Dans le cas où l'on a $\lim\limits_{n=\infty}(v_n - u_n) = 0$, il est clair que les deux nombres A, B, dont la différence est au plus égale à $v_n - u_n$, sont égaux. Dans ce cas u_n fournit une valeur approchée de la limite A, commune aux deux suites, par défaut; v_n en fournit une valeur approchée par excès.

Les deux suites tirées comme on l'a expliqué d'une même représentation décimale fournissent un exemple (¹).

Voici une autre proposition que je signale à cause de son importance, et sur laquelle je dois, sans la démontrer, donner quelques explications.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ait une limite, est la suivante : à chaque nombre positif ε doit correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait $|u_n - u_m| < \varepsilon$, pour tous les nombres naturels n, m supérieurs à p.

Que la condition soit nécessaire, cela est bien évident; si l'on a $\lim\limits_{n=\infty} u_n = \mathrm{A}$, les termes de la suite, à partir de l'un d'eux, sont tous compris dans l'intervalle $(\mathrm{A} - \alpha, \mathrm{A} + \alpha)$, leur différence mutuelle est moindre que 2α; il suffit

(¹) Il suffit, d'ailleurs, que l'on ait, quels que soient les nombres naturels n et p, $u_n < v_p$, $\lim\limits_{n=\infty}(v_n - n_n) = 0$, pour être sûr que les deux suites $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ ont une même limite. *Intr.*, n° 58.

de prendre le nombre positif $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$. Que la condition soit suffisante, c'est ce qui est moins évident : on voit clairement, si elle est vérifiée, que tous les termes de la suite, à partir du $p^{\text{ième}}$, appartiennent à l'intervalle $(u_p - \varepsilon, u_p + \varepsilon)$, qui est d'ailleurs aussi petit qu'on le veut : en substituant les *points* u_n aux nombres u_n, on pressent bien que les points $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ doivent finir par s'entasser auprès d'un point A. La proposition est d'ailleurs susceptible d'une démonstration rigoureuse [1].

173. Voici des exemples de suites qui n'ont pas de limite :

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots,$$
$$-1, \quad 2, \quad -3, \quad \ldots, \quad (-1)^n n, \quad \ldots,$$
$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots,$$
$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad 1+\frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{2p}, \quad \frac{1}{2p+1}, \quad \ldots.$$

Dans la troisième, les termes sont alternativement 0 et 1 ; ils ne peuvent s'approcher indéfiniment d'un même nombre. Dans la dernière, le $n^{\text{ième}}$ terme, si n est pair, est de la forme $1 + \frac{1}{2p}$, il est très voisin de 1 si n (ou p) est très grand ; le $n^{\text{ième}}$ terme, si n est impair, est de la forme $\frac{1}{2p+1}$; il est très voisin de 0 si n (ou p) est très grand. Les termes sont alternativement voisins de 1 et de 0 ; il n'y a pas de nombre fixe dont u_n s'approche indéfiniment, quand n augmente indéfiniment. Cette suite peut être regardée comme obtenue en mélangeant deux suites dont l'une a 1 pour limite et l'autre 0. D'autres circonstances peuvent d'ailleurs se présenter [2].

Parmi les suites $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ qui n'admettent pas de limite, il convient de signaler celles dans lesquelles u_n augmente indéfiniment avec n ; il faut entendre par là, comme on l'a déjà dit un peu plus haut, que, quel que soit le nombre positif P, tous les termes de la suite finissent, à partir de l'un d'eux, par être plus grands que P ; tel est le premier des exemples que l'on a cités en tête de ce numéro ; il est alors commode de dire que u_n tend vers $+\infty$ quand n augmente indéfiniment. Il est aussi commode d'écrire $\lim_{n=\infty} u_n = +\infty$; mais il faut

---

(1) *Intr.*, n° 56.
(2) *Intr.*, n° 59, ..., 64.

bien se rappeler, quand on emploie cette notation, que u_n n'a pas de limite.

S'il arrive que, quel que soit le nombre négatif N, les termes de la suite finissent, à partir de l'un d'eux, par être tous plus petits que N, on dira que u_n tend vers $-\infty$, quand n augmente indéfiniment : tel serait le cas pour la suite $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$. On écrira alors, si l'on veut, $\lim_{n=\infty} u_n = -\infty$.

Enfin, il peut arriver que $|u_n|$ tende vers $+\infty$, sans que u_n tende vers $+\infty$, ou vers $-\infty$; c'est le cas pour la suite $-1, 2, -3, \ldots, (-1)^n n, \ldots$.

Il convient de remarquer que, pourvu que la valeur absolue de u_n augmente indéfiniment avec n, la suite [1]

$$\frac{1}{u_1}, \quad \frac{1}{u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{u_n}, \quad \ldots$$

a une limite : on a évidemment $\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{u_n}\right) = 0$.

Considérons, par exemple, la progression géométrique de raison a,

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^n, \quad \ldots.$$

1° Si a est plus grand que 1, on peut, en désignant par α un nombre positif, poser $a = 1 + \alpha$; on a alors (n° 24) $a^n > 1 + n\alpha$; quand n augmente indéfiniment, il en est de même de $1 + na$, et *a fortiori* de a^n; a^n tend vers $+\infty$, quand n augmente indéfiniment.

2° Si a est négatif et plus grand que 1 en valeur absolue, $|a^n|$ tend vers $+\infty$, quand n augmente indéfiniment; les termes de la suite sont d'ailleurs alternativement positifs et négatifs.

3° Si a est plus petit que 1, en valeur absolue, on peut poser

$$a = \frac{1}{b},$$

en désignant par b un nombre positif ou négatif, mais plus grand que 1 en valeur absolue; la valeur absolue de b^n augmente indéfiniment avec n, celle de $\frac{1}{b^n}$ ou de a^n a 0 pour limite, quand n augmente

---

(1) On en supprimera les termes à dénominateur nul, s'il y en a.

indéfiniment; on a $\lim_{n=\infty} a^n = 0$. Lorsque a est positif, les termes de la suite $a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ s'approchent de 0 en diminuant; lorsque a est négatif, ils se rapprochent de 0 en oscillant autour de 0, puisqu'ils sont alternativement positifs ou négatifs.

4° Si l'on a $a = 1$, tous les termes de la suite sont égaux à 1; on a $\lim_{n=\infty} a^n = 1$.

5° Si l'on a $a = -1$, les termes de la suite sont alternativement égaux à 1 ou à -1; il n'y a pas de limite.

174. Une suite infinie $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ étant donnée, on appelle *série* un symbole tel que

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

où les termes de la suite sont écrits, dans l'ordre donné, comme s'ils étaient ajoutés : $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont les *termes* de la série.

Si la somme s_n des n premiers termes de cette série tend, quand n augmente indéfiniment, vers une limite S, la série est dite *convergente,* et l'on dit que S est sa *somme*. Si la somme s_n des n premiers termes ne tend pas vers une limite, la série est *divergente;* elle n'a point de somme.

Considérons, par exemple, la série

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots,$$

dont les termes forment une progression géométrique de raison a; la somme de ses n premiers termes est

$$1 + a + \ldots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^n}{1 - a};$$

il y a lieu de distinguer quatre cas :

1° Si l'on a $|a| < 1$, on a $\lim_{n=\infty} a^n = 0$, et, par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \frac{a^n}{1 - a} = 0, \qquad \lim \left[\frac{1}{1 - a} - \frac{a^n}{1 - a}\right] = \frac{1}{1 - a};$$

la série est convergente et sa somme est $\frac{1}{1 - a}\cdot$

2° Si l'on a $|a| > 1$, la valeur absolue de a^n grandit indéfiniment, quand n augmente indéfiniment, il en est de même de la valeur absolue de $\frac{a^n}{a-1}$ et de $\frac{a^n}{a-1} - \frac{1}{a-1}$; la valeur absolue de la somme des n premiers termes de la série grandit indéfiniment quand n augmente indéfiniment; la série est divergente.

3° Si l'on a $a = 1$, la formule qui donne, en général, la somme des n premiers termes de la série n'a plus de sens; il est clair que cette somme est égale à n et que la série est divergente.

4° Si l'on a $a = -1$, la somme des n premiers termes est alternativement 1 ou 0; la série est divergente.

175. Quelle que soit la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, si l'on pose

$$s_1 = u_1, \qquad s_2 = u_1 + u_2, \qquad \ldots, \qquad s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

on a évidemment, pour toutes les valeurs de n supérieures à 1,

$$u_n = s_n - s_{n-1};$$

réciproquement, si l'on se donne la suite $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, il est clair que la série dont le premier terme sera $u_1 = s_1$ et le $n^{\text{ième}}$ terme $u_n = s_n - s_{n-1}$, sera telle que la somme de ses n premiers termes soit s_n: puisque l'on a

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) = s_n,$$

suivant que s_n aura, ou non, une limite, la série sera convergente ou divergente.

En prenant, par exemple, $s_n = a^n$, on voit que la série

$$a + a(a-1) + a^2(a-1) + \ldots + a^{n-1}(a-1) + \ldots$$

est convergente si a est plus petit que 1 en valeur absolue; sa somme est alors 0; elle est encore convergente si a est égal à 1; la somme est alors égale à 1; elle est divergente dans tous les autres cas.

Si l'on prend

$$s_n = 1 - \frac{1}{n}, \qquad u_n = \frac{1}{(n-1)n}, \qquad u_1 = s_1 = 0,$$

on voit que la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots$$

est convergente et que sa somme est égale à 1.

176. Les deux séries

$$u_1+u_2+\ldots+u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots,$$
$$u_{p+1}+u_{p+2}+u_{p+3}+\ldots,$$

dont la seconde s'obtient en prenant les termes de la première à partir de u_{p+1}, sont convergentes ou divergentes en même temps.

Si l'on désigne, en effet, respectivement par s_n et par S_n la somme des n premiers termes dans l'une et dans l'autre série, il est clair que l'on a $s_{p+n}=S_n+s_p$; si la première série est convergente, s_{p+n}, lorsque n et, par suite, $p+n$, augmente indéfiniment, tend vers une limite A; $S_n=s_{p+n}-s_p$ tend donc vers la limite $A-s_p$; si la seconde série est convergente, et si sa somme est B, S_n tend vers la limite B quand n augmente indéfiniment, s_{p+n}, dans les mêmes conditions, tend vers la limite $B+s_p$. Si l'une des deux séries est divergente, l'autre ne peut être convergente, puisque, alors, la première serait aussi convergente.

En supposant les deux séries convergentes, on désigne la somme de la seconde série comme le RESTE *de la première série limitée au terme u_p.* La somme de la première série est égale à la somme de ses p premiers termes, augmentée du reste correspondant. Autrement dit, le reste d'une série, limitée au $p^{\text{ième}}$ terme, est l'*erreur* que l'on commet en substituant à la somme de la série la somme des p premiers termes. Désignons ce reste par R_p et par A la somme de la première série, on a

$$A=s_p+R_p,\qquad R_p=A-s_p;$$

il est clair que R_p tend vers la limite 0 quand p augmente indéfiniment.

Si l'on considère, par exemple, la série

$$1+a+a^2+\ldots+a^n+\ldots,$$

et que l'on suppose $|a| < 1$, le reste R_n de cette série, limitée au terme a^{n-1}, est

$$R_n = \frac{a^n}{1-a}.$$

Le reste de la série

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots,$$

limitée au terme $\frac{1}{(n-1)n}$, est $\frac{1}{n}$.

On verra par la suite que, dans un grand nombre de cas, on n'a pas, pour évaluer un nombre, d'autre moyen que de considérer une série dont il est la somme. La somme des p premiers termes est alors une valeur approchée du nombre cherché. La série sera d'autant plus avantageuse que l'erreur commise, ou le reste, sera plus petite. S'il arrive que le reste R_p décroisse très rapidement quand p augmente, la série, dont on dit alors qu'elle est rapidement convergente, sera particulièrement commode.

Bien que l'on sache, par exemple, calculer directement la somme $\frac{1}{1-a}$ de la série $1 + a + a^2 + \ldots$, cette série n'en est pas moins avantageuse pour le calcul de $\frac{1}{1-a}$ quand a est très petit; la somme de ses deux premiers termes fournit une valeur de sa somme qui souvent est très suffisamment approchée; l'erreur est alors $\frac{a^2}{1-a}$.

177. Les propositions suivantes sont des conséquences évidentes de la définition de la somme d'une série et des propositions relatives aux limites que l'on a signalées au n° 171 : a, b désignent des nombres fixes, indépendants de n.

Si les deux séries

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sont convergentes et ont pour sommes respectives U et V, les séries

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots,$$
$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots,$$
$$(au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \ldots + (au_n + bv_n) + \ldots$$

sont convergentes et ont pour sommes respectives

$$aU, \quad U + V, \quad aU + bV;$$

il est à peine utile de dire que la dernière proposition résulte des deux premières. Des propositions analogues s'appliqueraient à trois, quatre, ... séries convergentes.

Si une série est convergente, elle reste convergente quand on modifie quelques-uns de ses termes, en nombre fini; la somme de la seconde série est égale à la somme de la première, plus la somme des différences entre les termes modifiés et les termes primitifs.

En supposant toujours les deux séries (u), (v) convergentes, si l'on a, quel que soit n, $u_n \leqq v_n$, l'on aura $U \leqq V$, et l'on aura certainement $U < V$, si la condition $u_n \leqq v_n$ étant toujours vérifiée, il y a quelque valeur de n pour laquelle on a $u_n < v_n$. La différence $V - U$ est, en effet, la somme de la série

$$(v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \ldots + (v_n - u_n) + \ldots,$$

dont tous les termes sont positifs ou nuls; dans cette série, la somme des n premiers termes est positive ou nulle, elle ne peut avoir une limite négative, quand n augmente indéfiniment : si l'on a, par exemple, $v_3 > u_3$, la somme des n premiers termes, quand n est plus grand que 3, est au moins égale à $v_3 - u_3$; elle ne peut, pour n infini, avoir une limite inférieure à $v_3 - u_3$. $V - U$ est certainement positif.

178. Il est très important de savoir reconnaître si une série donnée

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, ou non : c'est le même problème que celui qui consiste à savoir si la somme s_n des n premiers termes tend, ou non, vers une limite, quand n augmente indéfiniment. On obtient de suite des conditions *nécessaires* pour la convergence, en supposant que s_n tende vers une limite U quand n augmente indéfiniment.

La formule $u_n = s_n - s_{n-1}$, dans laquelle s_n et s_{n-1} finissent, pourvu que n soit assez grand, par être aussi voisins de U que l'on voudra, montre que, dans toute série convergente, le $n^{\text{ième}}$ terme a pour limite o quand n augmente indéfiniment.

Si cette condition n'est pas réalisée, la série est sûrement divergente : telle est, par exemple, la série $1+2+3+4+\ldots$.

Toutefois, cette condition n'est pas suffisante : on verra bientôt que la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

est divergente.

On a, plus généralement,

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}=s_{n+p}-s_n$$

et l'on voit de même que, si la série est convergente, le second membre doit être aussi petit qu'on le veut, pourvu que n soit assez grand.

Si cette condition n'est pas vérifiée, la série n'est pas convergente. Si, d'ailleurs, on constate, pour une valeur déterminée de p, que la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend vers o, on ne peut pas affirmer la convergence de la série.

On a, toutefois, la proposition suivante, qui ne diffère pas d'une proposition que j'ai signalée, sans la démontrer, pour ce qui concerne les limites.

Si à chaque nombre ε on peut faire correspondre un nombre naturel υ tel que l'on ait $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$, pour toutes les valeurs naturelles de n supérieures ou égales à υ et pour toutes les valeurs naturelles de p, la série est convergente.

Je ne m'appuierai pas sur ce théorème, que le lecteur doit toutefois connaître en raison de son importance.

Il importe encore de remarquer que, lorsqu'il ne s'agit que de la convergence ou de la divergence, on peut, en vertu de la proposition établie au n° 176, faire commencer la série où l'on veut, négliger les premiers termes de la série. Cette remarque est commode quand il y a quelque irrégularité dans ces premiers termes.

Enfin, il est clair qu'on peut sans changer la convergence ou la divergence d'une série, sans même en changer la somme, quand cette série est convergente, ajouter ou supprimer autant de termes nuls que l'on veut.

Ces remarques préliminaires faites, je vais m'arrêter sur un cas particulier qui, comme on le verra plus tard, est d'autant plus important que beaucoup d'autres cas s'y ramènent, le cas où tous les termes de la série sont positifs. La remarque précédente permet de faire rentrer dans ce cas les séries dont les termes sont positifs ou *nuls*. En écartant les termes nuls, on simplifie un peu le langage.

179. Soit donc

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

une série dont tous les termes sont positifs, et soit s_n la somme des n premiers termes de cette série; il est clair que l'on a, quel que soit n, $s_{n+1} > s_n$; par conséquent, deux cas sont possibles : ou bien s_n grandit indéfiniment avec n et la série est divergente, ou bien la somme des n premiers termes reste, quel que soit n, inférieure à un nombre fixe A; alors la série est convergente et sa somme est égale ou inférieure à A (nº 172).

Soit, dans ce dernier cas, U la somme de la série. s_n s'approche de U en croissant, quand n augmente; s_n ne peut jamais atteindre et, *a fortiori*, dépasser U, car si l'on avait $s_p = U$, s_{p+1}, s_{p+2} ... dépasseraient U et s'en écarteraient de plus en plus. U est supérieur à la somme des n premiers termes de la série, quel que soit n et, par conséquent, à la somme d'autant de termes pris, comme l'on voudra, dans la série : en effet, on peut prendre n assez grand pour que s_n embrasse tous ces termes. Un nombre a plus petit que U est caractérisé par ce fait qu'on peut trouver un nombre n assez grand pour que s_n soit plus grand que a; en effet, on peut prendre n assez grand pour que le nombre essentiellement positif $U - s_n$ soit plus petit que $U - a$. Il revient au même de dire que les nombres a, plus petits que U, sont caractérisés par ce fait qu'on peut trouver des termes dans la série dont la somme dépasse a, il n'est pas nécessaire que ce soient les n premiers. Les nombres supérieurs ou égaux à U sont plus grands que la somme d'autant de termes qu'on voudra, pris dans la série. U peut être défini par la *coupure* entre les nombres que l'on peut dépasser en faisant la somme d'un assez grand nombre de termes de la série, et les nombres qui sont plus grands que la somme d'autant de termes qu'on voudra, pris dans la série.

Il est clair, d'après cela, que si la série (u), à termes positifs, est convergente, toute série qu'on en déduit en supprimant quelques-uns de ses termes, en nombre fini ou infini, est convergente et a une somme moindre que la proposée.

180. Ces remarques conduisent de suite à la méthode suivante pour reconnaître si une série à termes positifs est convergente ou divergente.

Soit

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

une série à termes positifs, dont on sait si elle est convergente ou divergente; on lui compare la série proposée

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Supposons que la série (v) soit convergente et que l'on ait, pour toutes les valeurs de n, $u_n \leqq v_n$, la série (u) sera convergente, puisque la somme de ses n premiers termes est au plus égale à la somme des n premiers termes de la série (v), et, par suite, à la somme V de cette dernière série; la somme de la série u est inférieure à V [1]. Si on limite les deux séries à des termes de même rang, le reste de la série (u) est inférieur au reste de la série (v).

Supposons que la série (v) soit divergente, et que l'on ait, pour toutes les valeurs de n, $u_n \geqq v_n$; la somme des n premiers termes de la série (v) peut dépasser tel nombre positif que l'on voudra; il en est de même *a fortiori* de la somme des n premiers termes de la série (u), qui est divergente.

On a vu, par exemple, que la série

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots,$$

était convergente; la série

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

---

[1] Je devrais dire, plus exactement, « inférieure *ou égale* à V », il ne peut d'ailleurs y avoir égalité que si tous les termes de la série (u) sont égaux aux termes de la série (v) : les deux séries seraient identiques; il est assez raisonnable d'exclure ce cas; l'observation que je viens de faire pourrait être répétée plusieurs fois dans ce qui suit. Au lieu de répéter à chaque fois que l'égalité ne pouvait avoir lieu que dans un cas très particulier, j'ai préféré supprimer les mots *ou égale* que le lecteur rétablira sans peine.

dont les termes sont manifestement plus petits que les termes correspondants de la première, est convergente. Son reste, si on la limite au terme en $\frac{1}{n^2}$, est plus petit que $\frac{1}{n}$ (n° 176). Le lecteur reconnaîtra sans peine qu'il est plus grand que $\frac{1}{n+1}$, parce que les termes de la série

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots$$

sont respectivement plus grands que les termes correspondants de la série convergente

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\ldots,$$

dont la somme est $\frac{1}{n+1}$.

Ce procédé de comparaison semble bien limité; sans m'arrêter à la remarque déjà faite, qu'il n'est pas nécessaire que la condition $u_n \leqq v_n$, par exemple, soit vérifiée par *tous* les termes de la série (u), mais seulement à partir d'un certain rang, pour pouvoir affirmer la convergence de la série (u) si la série (v) est convergente, j'observerai que la série $av_1+av_2+av_3+\ldots$, où a désigne un nombre positif quelconque, est convergente ou divergente en même temps que la série (v).

Supposons d'abord la série (v) convergente : on examinera le rapport $\frac{u_n}{v_n}$; si l'on peut établir que ce rapport, pour toutes les valeurs de n, est inférieur ou égal à un nombre fixe a (nécessairement positif) les termes de la série (u) étant inférieurs ou égaux aux termes correspondants de la série $av_1+av_2+av_3+\ldots$, on est assuré de la convergence de la série (u); on est, de plus, certain que sa somme est inférieure ou égale à aV, l'égalité ne pouvant d'ailleurs avoir lieu que si l'on a toujours $\frac{u_n}{v_n}=a$. Lorsqu'il ne s'agit que de la convergence, il suffit, puisqu'on peut toujours supprimer les premiers termes, que la condition $\frac{u_n}{v_n}\leqq a$ ait lieu pour toutes les valeurs de n qui dépassent un nombre fixe p. S'il en est ainsi, le reste de la série (u), limitée au $p^{\text{ième}}$ terme, ou plus loin, sera inférieur ou égal au reste correspondant de la série (v) multiplié par a.

Supposons que la série (v) soit divergente; si, à partir d'une certaine valeur de n, le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ est plus grand qu'un nombre positif a (non nul), on peut affirmer que la série (u) est divergente.

Ces règles s'appliquent commodément quand le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ a, pour n infini, une limite l, qui, puisque $\frac{u_n}{v_n}$ est positif, ne peut évidemment être que positive ou nulle.

Si l est positif (sans être nul), on peut affirmer que les deux séries (u), (v) sont convergentes ou divergentes en même temps : en effet, soit ε un nombre positif, plus petit que l, d'ailleurs quelconque; le rapport $\frac{u_n}{v_n}$, qui, lorsque n augmente indéfiniment, tend vers la limite l, finit par être toujours compris entre les deux nombres positifs $l-\varepsilon$, $l+\varepsilon$; on appliquera le raisonnement précédent en prenant $a = l+\varepsilon$ si la série (v) est convergente, en prenant $a = l-\varepsilon$ si la série (v) est divergente.

Si l est nul, on peut affirmer la convergence de la série (u) quand la série (v) est convergente, mais non la divergence de la série (u) quand la série (v) est divergente.

Prenons, par exemple, pour la série (v), la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

dont on a prouvé tout à l'heure la convergence, et comparons-lui la série (u)

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{4a+2b+c} + \ldots + \frac{1}{an^2+bn+c} + \ldots,$$

en supposant que, des trois nombres a, b, c, le premier soit positif et que, en outre, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'ait pas de racines entières et positives, afin que tous les termes de la série aient un sens.

A partir d'un certain rang, tous les termes de cette série sont bien positifs, puisque, pour des valeurs de x suffisamment grandes, le trinome ax^2+bx+c est du signe de son premier terme; quant aux termes du commencement, qui pourraient être négatifs, il n'y a pas lieu d'en tenir compte, s'il ne s'agit que de la convergence. Le rapport des termes de rang n est ici

$$\frac{n^2}{an^2+bn+c};$$

il a pour limite $\frac{1}{a}$, quand n augmente indéfiniment; la seconde série est convergente comme la première.

181. En prenant pour la série (v) une progression géométrique dont la raison est positive, on est conduit à deux règles qui sont d'un usage fréquent, surtout la seconde. Je continue de désigner par (u) la série à termes positifs dont le $n^{\text{ième}}$ terme est u_n.

I. *Si, pour les valeurs de n supérieures à p, on a* $\sqrt[n]{u_n} \leqq \alpha$, *en désignant par* α *un nombre positif plus petit que* 1, *la série* (u) *est convergente, et son reste, quand on la limite au terme* u_p, *est inférieur à* $\frac{\alpha^{p+1}}{1-\alpha}$.

En effet, on a, pour ces valeurs de n, $u_n \leqq \alpha^n$, et les termes considérés de la série (u) sont inférieurs ou égaux à ceux des termes de la série convergente

$$\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^p + \alpha^{p+1} + \ldots,$$

dont le reste, quand on la limite au terme α^p, est $\frac{\alpha^{p+1}}{1-\alpha}$.

Si, pour les valeurs de n supérieures à p, on a $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$, *la série* (u) *est divergente,* puisque ses termes sont supérieurs ou égaux à 1.

Supposons que, lorsque n augmente indéfiniment, $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers une limite l; cette limite ne peut être que positive ou nulle; en désignant par ε un nombre positif quelconque, $\sqrt[n]{u_n}$ finit par être toujours compris dans l'intervalle ($l - \varepsilon$, $l + \varepsilon$).

Si l est plus petit que 1, la série (u) est convergente; on peut prendre en effet ε assez petit pour que $l + \varepsilon$ soit aussi plus petit que 1; on aura $\sqrt[n]{u_n} \leqq \alpha$, en prenant $\alpha = l + \varepsilon$.

Si l est plus grand que 1, la série (u) est divergente; on peut prendre en effet ε assez petit pour que $l - \varepsilon$ soit plus grand que 1, on aura $\sqrt[n]{u_n} \geqq l - \varepsilon > 1$.

Si l est égal à 1, il y a doute. Toutefois, on a déjà dit que, si l'on a $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$, à partir d'une certaine valeur de n, la série est divergente.

Comme on peut toujours, sans changer la convergence ou la divergence de la série proposée, ajouter ou retrancher k termes au commencement de la série, on voit qu'on pourra remplacer, dans ce qui précède, $\sqrt[n]{u_n}$ par $\sqrt[n+k]{u_n}$ ou $\sqrt[n-k]{u_n}$, k étant un nombre naturel fixe.

Considérons, par exemple, la série

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots,$$

où q est un nombre positif; il est clair qu'elle est convergente ou divergente en même temps que la série

$$q + q^4 + q^9 + \ldots + q^{n^2} + \ldots.$$

La racine $n^{\text{ième}}$ du $n^{\text{ième}}$ terme est q^n : lorsque q est plus petit que 1, q^n tend vers la limite 0, quand n croît indéfiniment : la série est convergente; elle est évidemment divergente lorsque q est égal ou supérieur à 1. Lorsque q est plus petit que 1, le reste de la série proposée, quand on s'arrête au terme qui précède $2q^{n^2}$, est inférieur à

$$\frac{2q^{n^2}}{1 - q^n}.$$

Le lecteur reconnaîtra sans peine que la série

$$\frac{x}{a_1} + \left(\frac{x}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{a_n}\right)^n + \ldots,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, désignent des nombres positifs tels que a_n croisse indéfiniment avec n, est convergente quel que soit le nombre positif x.

II. *Si, pour les valeurs de n égales ou supérieures à p, le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *reste toujours inférieur ou égal à un nombre positif* α *plus petit que* 1, *la série* (u) *est convergente, et son reste, quand on la limite au terme* u_p, *est inférieur à* $\frac{\alpha u_p}{1-\alpha}$.

On a, en effet, par hypothèse,

$$\begin{aligned} &u_{p+1} \leqq \alpha u_p, \\ &u_{p+2} \leqq \alpha u_{p+1} \leqq \alpha^2 u_p, \\ &u_{p+3} \leqq \alpha u_{p+2} \leqq \alpha^3 u_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

en sorte que, à partir du terme u_{p+1}, la série proposée a ses termes égaux ou inférieurs à ceux de la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \alpha u_p + \alpha^2 u_p + \alpha^3 u_p + \ldots,$$

dont le reste, quand on la limite au terme en u_p, est égal à $\frac{\alpha u_p}{1-\alpha}$.

En limitant la dernière série au terme u_{p-1}, son reste est $\frac{u_p}{1-\alpha}$: on voit donc que si, pour n supérieur à p, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ reste inférieur ou égal à $\alpha < 1$, on peut prendre $\frac{u_{p+1}}{1-\alpha}$ pour la limite supérieure du reste de la série proposée, limitée au terme u_p.

Si, pour les valeurs de n supérieures ou égales à p, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est toujours supérieur ou égal à 1, la série (u) est divergente, puisque ses termes ne vont pas en décroissant indéfiniment quand n augmente indéfiniment.

Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers une limite l, quand n augmente indéfiniment; il finira par être toujours compris dans l'intervalle $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, ε étant un nombre positif quelconque.

Si l est plus petit que 1, la série est convergente, puisque l'on peut supposer $l+\varepsilon < 1$, et prendre $\alpha = l+\varepsilon$.

Si l est plus grand que 1, la série est divergente, parce qu'on peut supposer $l-\varepsilon \geqq 1$.

Si l est égal à 1, il y a doute; toutefois, si l'on a toujours, à partir d'un certain terme, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1$, on a vu que la série était sûrement divergente.

182. Considérons, par exemple, la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où x est un nombre positif donné, d'ailleurs quelconque. Le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$ est ici

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n} \times \frac{1.2\ldots(n-1)}{x^{n-1}} = \frac{x}{n};$$

il tend vers la limite 0 quand n tend vers $+\infty$; la série est convergente quel que soit x.

Supposons qu'on limite la série au terme $\frac{x^p}{1.2\ldots p}$. Le rapport à ce terme de celui qui le suit est $\frac{x}{p+1}$; ensuite, le rapport d'un terme au précédent est moindre; si donc on suppose $p+1>x$, et si l'on adopte ici la forme $\frac{\alpha u_p}{1-\alpha}$ pour la limite supérieure du reste, on voit que le reste est moindre que

$$\frac{x^{p+1}}{1.2\ldots p}\,\frac{1}{p+1-x},$$

en sorte que la somme de la série peut être mise sous la forme

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}+\frac{x^{p+1}}{1.2\ldots p}\,\frac{\theta_p}{p+1-x},$$

θ_p désignant un nombre positif plus petit que 1.

Cette série et, en particulier, la série

$$(e)\qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\ldots,$$

qui s'en déduit en supposant x égal à 1, tiennent en analyse un rôle considérable; la somme de cette dernière série est un nombre que l'on désigne par e; d'après ce qu'on vient de dire, ce nombre peut être mis sous la forme

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\frac{1}{1.2\ldots p}\,\frac{\theta_p}{p},$$

qui permet de le calculer avec l'approximation qu'on veut; j'y reviendrai bientôt.

Considérons encore les séries

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots,$$

dans lesquelles on suppose que m et x soient des nombres positifs donnés; les rapports du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$ sont respectivement

$$\frac{n}{n+1}x,\qquad \frac{m+n-1}{n}x=\left(1+\frac{m-1}{n}\right)x,$$

ces deux rapports ont pour limites le nombre x quand n augmente indéfiniment; les deux séries sont convergentes quand x est plus petit que 1, divergentes pour $x > 1$. Dans le cas où x est égal à 1, l'application de la règle ne donne rien, sauf pour la seconde série, lorsque m est égal ou supérieur à 1, parce que, alors, le rapport d'un terme au précédent est égal ou supérieur à 1.

Lorsque x est plus petit que 1, le rapport d'un terme au précédent est plus petit que x dans la première série, et aussi dans la seconde, quand m est plus petit que 1; s'il en est ainsi, on peut prendre pour limite supérieure du reste, dans les deux séries, le premier terme négligé multiplié par $\frac{1}{1-x}$; cette règle est en défaut, pour la seconde série, si m est plus grand que 1. Dans ce dernier cas, le rapport d'un terme au précédent va en décroissant quand n augmente. Si le premier terme négligé est $\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}x^n$, le rapport du terme suivant à celui-là est $\frac{m+n}{n+1}x$; en supposant n assez grand pour que ce rapport soit plus petit que 1, on pourra prendre pour limite supérieure du reste,

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}x^n \times \frac{n+1}{n+1-(m+n)x}.$$

183. On voit quel parti l'on peut tirer de la comparaison d'une série (à termes positifs) à une progression géométrique. Toute série à termes positifs, dont on connaît le caractère, peut servir de terme de comparaison. Les séries de la forme

$$(\nu) \qquad \frac{1}{1^{1+\alpha}}+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{1+\alpha}}+\ldots,$$

où α est un nombre quelconque, sont, à cet égard, très précieuses. Une telle série est convergente si α est positif, divergente si α est nul ou négatif ([1]).

On arrive aisément à ce résultat en calculant des limites entre

---

([1]) Si l'on savait que cette série est convergente pour $\alpha=\alpha_0$, on serait sûr qu'elle est convergente pour $\alpha>\alpha_0$: or, on a démontré plus haut que cette série est convergente pour $\alpha=1$: il en résulte immédiatement qu'elle est convergente pour $\alpha>1$.

lesquelles doit être comprise la somme Σ_p de tous les termes de la série (ν) pour lesquels n, écrit dans le système décimal, a un nombre donné p de chiffres. Il y a

$$10^p - 10^{p-1} = 9.10^{p-1}$$

nombres naturels de p chiffres, dont le plus petit est 10^{p-1}, et qui sont tous plus petits que 10^p; par conséquent, si l'on suppose $1+\alpha$ positif, on aura

$$\frac{9.10^{p-1}}{10^{p(1+\alpha)}} < \Sigma_p < \frac{9.10^{p-1}}{10^{(p-1)(1+\alpha)}},$$

ou

$$\frac{9}{10^{\alpha p+1}} < \Sigma_p < \frac{9}{10^{\alpha(p-1)}}.$$

Supposons maintenant α positif; la série à termes positifs

$$(\Sigma) \qquad \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_p + \ldots$$

est certainement convergente, puisque ses termes sont respectivement inférieurs à ceux de la progression géométrique décroissante

$$9 + \frac{9}{10^\alpha} + \frac{9}{10^{2\alpha}} + \ldots + \frac{9}{10^{p\alpha}} + \ldots,$$

dont la raison $\frac{1}{10^\alpha}$ est plus petite que 1.

Il est maintenant bien aisé de voir que la série (ν) est convergente. En effet, quel que soit n, si l'on prend p supérieur au nombre de chiffres de n, la somme des p premiers termes de la série (Σ) contiendra les n premiers termes de la série (ν) et dépassera leur somme qui est, par conséquent, inférieure à la somme de la série (Σ).

J'ajoute, quoique cela ne soit pas nécessaire à la démonstration, que les sommes des deux séries (ν) et (Σ) sont égales : ce qui précède montre que la première ne peut dépasser la seconde; si, maintenant, on se donne p, il suffit de prendre un nombre n qui ait plus de p chiffres, pour être sûr que la somme des n premiers termes de la série (ν), et, par conséquent, la somme de cette série, dépasse la somme des p premiers termes de la série (Σ); la somme de cette dernière série ne peut donc être supérieure à la somme de la série (v); les deux sommes sont égales [1].

Supposons maintenant que α soit nul; on a $\Sigma_p > \frac{9}{10}$; la série (Σ) est alors divergente; mais, comme on vient de le dire, on peut, quel que soit p, prendre n assez grand pour que la somme des n premiers termes de la série (v) dépasse la somme des p premiers termes de la série (Σ), la série (v) ou la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

est divergente. *A fortiori*, la série (v) est divergente quand α est négatif, puisque, alors, ses termes sont respectivement plus grands que les termes correspondants de la série qu'on vient d'écrire.

La série (v), que l'on vient d'étudier, et à laquelle on donne le nom de série *harmonique*, peut servir utilement de terme de comparaison, pour juger de la convergence ou de la divergence d'une série à termes positifs; elle conduit à des critères plus délicats que ceux que l'on a donnés au n° 181, parce qu'elle converge (ou diverge) moins rapidement qu'une progression géométrique.

Supposons, par exemple, que le $n^{\text{ième}}$ terme d'une série (u) s'obtienne en remplaçant x par n dans une fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$: afin que la série (u) ait un sens, on devra supposer que le polynome $\psi(x)$ n'ait pas de racine égale à un nombre naturel, ou, dans le cas où il y aurait de pareilles racines, supprimer de la série les termes, dénués de sens, qui correspondraient à ces racines. Pour des valeurs suffisamment grandes de x, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ conservent un signe constant : tous les termes de la série (u) sont de même signe; je

---

[1] Il y a là un fait général que le lecteur établira sans peine.
Considérons les deux séries

$$(v) \qquad v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$$
$$(\Sigma) \qquad \Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_p+\ldots,$$

et supposons que Σ_1 représente la somme des α_1 premiers termes de (v), Σ_2 la somme des α_2 termes suivants, Σ_3 la somme des α_3 termes suivants, etc., la serie (Σ) est convergente si la série (v) est convergente et a même somme. Réciproquement, et c'est là ce qu'on a établi sur un cas particulier, *si la série (v) a tous ses termes positifs,* la convergence de la série (Σ) entraîne la convergence de la série (v).

supposerai $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de mêmes signes, c'est-à-dire que je supposerai que les termes du plus haut degré soient de mêmes signes dans $\varphi(x)$ et dans $\psi(x)$, afin d'être dans le cas que nous étudions. Si $\varphi(x)$ est de degré supérieur ou égal au degré de $\psi(x)$, les termes de la série (u) ne décroissent pas indéfiniment, la série (u) est divergente. Si le degré de $\psi(x)$ est supérieur de p unités au degré de $\varphi(x)$, on a vu, au n° 64, que la vraie valeur, pour x infini, du rapport $\frac{x^p\varphi(x)}{\psi(x)}$ est égale au rapport k des coefficients des termes du plus haut degré dans $\varphi(x)$ et dans $\psi(x)$; cela revient à dire que $\frac{n^p\varphi(n)}{\psi(n)}$ a pour limite k lorsque n augmente indéfiniment, et que, par conséquent, la série

$$(u) \qquad \frac{\varphi(1)}{\psi(1)} + \frac{\varphi(2)}{\psi(2)} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} + \ldots$$

est convergente ou divergente en même temps que la série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots;$$

la série (u) est donc convergente si l'on a $p \geqq 2$; divergente si l'on a $p = 1$.

184. D'une façon générale, la comparaison d'une série à termes positifs

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

à la série à termes positifs

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

se fait, comme on l'a dit au n° 180, en étudiant le rapport $\frac{u_n}{v_n}$. Il convient de remarquer que si l'on a, pour toutes les valeurs de n qui dépassent p,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

on a, pour ces mêmes valeurs de n,

$$\frac{n_{n+1}}{v_{n+1}} \leqq \frac{u_n}{v_n},$$

et, par conséquent,

$$\frac{u_{p+1}}{v_{p+1}} \geqq \frac{u_{p+2}}{v_{p+2}} \geqq \frac{u_{p+3}}{v_{p+3}} > \ldots,$$

en sorte que, si n est supérieur à p, on a

$$\frac{u_n}{v_n} \leqq \frac{u_{p+1}}{v_{p+1}}.$$

De même si l'on a, pour toutes les valeurs de n qui dépassent p,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

on aura, pour ces mêmes valeurs,

$$\frac{u_n}{v_n} \geqq \frac{u_{p+1}}{v_{p+1}};$$

d'où les conclusions suivantes : Si la série (v) est convergente et si l'on a, pour toutes les valeurs de n qui dépassent p,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la série (u) est convergente et son reste, quand on la limite au $p^{\text{ième}}$ terme, est inférieur au produit par $\frac{u_{p+1}}{v_{p+1}}$ du reste de la série (v) limitée au $p^{\text{ième}}$ terme.

Si la série (v) est divergente, et si l'on a pour toutes les valeurs de n supérieures à p

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la série (u) est divergente.

Ces deux règles contiennent évidemment comme cas particulier les critères du n° 181 relatives au rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; elles font prévoir la possibilité de tirer de la considération des séries harmoniques d'autres critères que ceux de ce n° 181 ; je ne m'y arrêterai pas [1].

185. Une propriété importante des séries à termes positifs est la suivante.

La somme d'une telle série, supposée convergente, est indépen-

---

[1] *Intr.*, n$^{\text{os}}$ 134, 135, 136.

dante de l'ordre de ses termes, ou encore : deux séries à termes positifs, qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes, ont mêmes sommes.

Il y aurait lieu d'expliquer, en général ([1]), ce qu'on entend en disant que les séries

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes. Ces explications ne comportent quelque difficulté que s'il y a, dans l'une des séries, une infinité de termes égaux. Or, on peut écarter ce cas : si, en effet, il y a dans une série une infinité de termes égaux, non nuls, elle ne peut être convergente, puisque le $n^{\text{ième}}$ terme ne tend pas vers la limite o quand n augmente indéfiniment; les séries convergentes étant les seules qui nous intéressent, nous pouvons laisser de côté toute série qui aurait une infinité de termes égaux. Quant aux termes nuls, j'ai déjà dit qu'on pouvait toujours les négliger.

Dès lors, on peut dire que les deux séries (u), (v) ne diffèrent que par l'ordre des termes si tout nombre qui figure comme terme dans la première figure aussi dans la seconde, le même nombre de fois, et si tout nombre qui figure comme terme dans la seconde figure aussi dans la première, le même nombre de fois.

La proposition à démontrer est celle-ci : Si la série (v) a ses termes positifs et est convergente, la série (u), qui n'en diffère que par l'ordre des termes, est aussi convergente et sa somme est égale à celle de la série (v).

Soit, en effet, V la somme de la série (v); V est plus grand que la somme d'autant de termes qu'on voudra pris dans la série (v), donc aussi que la somme d'autant de termes qu'on voudra pris dans la série (u), puisque ces termes figurent dans la série (v); donc la série (u) est convergente et sa somme U est égale ou inférieure à V; le même raisonnement montre d'ailleurs que V est égal ou inférieur à U : on a $U = V$.

186. Ce qu'on a dit des séries à termes positifs pourrait se répéter pour les séries à termes négatifs, avec des changements insignifiants :

([1]) *Intr.*, n° 74.

cela est d'autant plus inutile qu'on passe d'un cas à l'autre en multipliant tous les termes par — 1, ce qui ne change ni la convergence ni la divergence : la somme est changée de signe. La considération des séries dont tous les termes sont de même signe, sauf quelques-uns, en nombre limité, n'apporte non plus rien de nouveau : pour la convergence ou la divergence, il n'y a pas lieu de s'occuper de ces termes. Si la série proposée est convergente, et si, par exemple, tous ses termes, sauf quelques-uns, sont positifs, il est clair que sa somme s'obtiendra en retranchant, de la somme de la série obtenue en ne considérant que les termes positifs, la somme des valeurs absolues des termes négatifs.

Il ne se présente quelque chose de véritablement nouveau que pour les séries qui contiennent une infinité de termes positifs et une infinité de termes négatifs.

Les séries de cette nature se divisent en deux classes : Pour les unes, la série à termes positifs, dont les termes sont les valeurs absolues des termes de la proposée, est convergente; pour les autres, cette série est divergente. Les premières sont dites *absolument convergentes.*

Il faudra justifier cette dénomination et montrer que les séries *absolument convergentes,* au sens qu'on vient de dire, sont *convergentes,* au sens du n° 174, c'est-à-dire que la somme de leurs n premiers termes tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. On établira, en outre, les propositions suivantes :

La somme d'une série absolument convergente est égale à la somme de la série formée par les termes positifs diminuée de la somme de la série formée par les valeurs absolues des termes négatifs. Cette somme est indépendante de l'ordre des termes.

Soit

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

la série proposée; soit, en général, u'_n la valeur absolue de u_n. Par hypothèse, la série des *valeurs absolues*

$$(u') \qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

est convergente. Il en est de même (n° 179) de toute série formée en supprimant autant de termes que l'on veut, par exemple les termes qui proviennent des termes négatifs de (u), ou les termes qui proviennent des termes positifs de (u) :

Soient (P) la première série, (Q) la seconde; je supposerai que, dans (P) et dans (Q), les termes se succèdent dans le même ordre que dans (u). Je désignerai enfin par P et Q les sommes des séries (P) et (Q).

Soient, en général, s_n la somme des n premiers termes de (u), P_n la somme des termes positifs de s_n, $-Q_n$ la somme des termes négatifs; l'un des nombres P_n, Q_n peut d'ailleurs être nul, s'il n'y a pas de termes positifs, ou de termes négatifs, dans s_n; mais, quand n est suffisamment grand, P_n et Q_n contiennent des termes, les premiers termes des séries (P), (Q); quand n augmente, P_n et Q_n augmentent ou, plus exactement, ne diminuent pas; on peut faire augmenter n assez pour que P_n et Q_n embrassent autant de termes qu'on veut dans (P) et dans (Q); on a donc

$$\lim_{n=\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n=\infty} Q_n = Q$$

D'un autre côté, on a, quel que soit n,

$$s_n = P_n - Q_n;$$

par suite, quand n augmente indéfiniment, s_n a une limite, à savoir $P - Q$; la série (u) est convergente et sa somme est $P - Q$. Enfin, cette somme est indépendante de l'ordre des termes, puisqu'il en est ainsi pour chacune des séries (P) et (Q).

En combinant la proposition précédente avec celle du n° **179**, on arrive à la proposition suivante.

Si la série à termes positifs

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

est convergente, la série

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des nombres qui sont tous, en valeur absolue, inférieurs ou égaux à un nombre positif fixe A, est absolument convergente. Son reste, quand on la limite au terme $\alpha_n v_n$, est inférieur, en valeur absolue, au produit par A du reste correspondant de la série (v).

Telle serait, par exemple, quel que soit x, la série

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots.$$

Les séries étudiées au n° 182

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots,$$

dans le cas où x est un nombre positif, sont absolument convergentes, la première, quel que soit x; la seconde, lorsque x est plus petit que 1 en valeur absolue : en effet, quand x est négatif, il suffit de remplacer x par sa valeur absolue; chaque terme est remplacé par sa valeur absolue, et l'on est ramené au cas étudié au n° 182. Le reste de la première série, par exemple, limitée au $(n+1)^{\text{ième}}$ terme est moindre en valeur absolue que

$$\frac{x'^{n+1}}{1.2\ldots n}\times\frac{1}{n+1-x'}$$

en désignant par x' la valeur absolue de x, supposée moindre que $n+1$.

Considérons encore la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots,$$

où m et x sont deux nombres donnés quelconques; désignons par m' et x' les valeurs absolues de x et comparons la série précédente à la série, à termes positifs,

$$1+\frac{m'}{1}x'+\frac{m'(m'+1)}{1.2}x'^2+\ldots+\frac{m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)}{1.2\ldots n}x'^n+\ldots,$$

dont nous savons qu'elle est convergente si x' est plus petit que 1.

Les termes de la série proposée sont manifestement moindres, en valeur absolue, que les termes de cette dernière : la série proposée est donc absolument convergente quels que soient les nombres x et m, pourvu que le premier soit moindre que 1, en valeur absolue.

Il est à peine utile de dire que les critères du n° 181 s'emploient pour reconnaître si une série

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est absolument convergente ou non : on étudiera comment se comportent, quand n augmente indéfiniment, les expressions $\sqrt[n]{u'_n}$, $\frac{u'_{n+1}}{u'_n}$, en désignant, en général, par u'_n la valeur absolue de u_n; si l'on est amené à conclure la convergence de la série, à termes positifs,

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

on sera assuré de la convergence absolue de la série (u).

Remarquons, en particulier, que si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite l, le rapport $\frac{u'_{n+1}}{u'_n}$ tendra, dans les mêmes conditions, vers la limite $l' = |l|$; en sorte que, si l' est plus petit que 1, la série est absolument convergente.

Par exemple, pour la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots$$

dont on vient de s'occuper, au lieu de raisonner comme on a fait, on aurait pu prendre le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$, qui est

$$\frac{m-n+1}{n}x,$$

constater que ce rapport tend vers la limite $-x$ quand n augmente indéfiniment, et en conclure que la série est absolument convergente lorsque le nombre x est, en valeur absolue, plus petit que 1.

Cette série, quand m est un nombre naturel, se réduit évidemment à ses $m+1$ premiers termes, les suivants étant tous nuls; elle n'est autre chose alors que le développement limité de $(1+x)^m$; on verra plus tard que sa somme est encore $(1+x)^m$, quel que soit le nombre m, lorsque la valeur absolue de x est plus petite que 1.

Une série peut d'ailleurs être convergente sans l'être absolument;

on va trouver des exemples de telles séries en étudiant les séries alternées.

187. **Séries alternées.** — On appelle *série alternée* une série dans laquelle les termes sont alternativement positifs et négatifs; telle serait la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots,$$

en supposant tous les nombres u_1, u_2, ..., u_n, ... positifs.

Une telle série est convergente sous les conditions suivantes, dont la dernière d'ailleurs est seule nécessaire :

On a

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 > \ldots \geqq u_n \geqq \ldots,$$

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Supposons, en effet, que ces conditions soient vérifiées, et considérons la somme s_{2n} des $2n$ premiers termes de la série; elle peut s'écrire sous les deux formes

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n},$$

où les quantités entre parenthèses sont positives ou nulles. La première montre clairement que l'on a

$$s_{2n} \geqq 0$$

et

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqq s_{2n};$$

la seconde montre que l'on a $s_{2n} < u_1$. Les sommes s_{2n} vont en augmentant quand n augmente, elles restent inférieures à u_1; elles tendent, quand n augmente indéfiniment, vers une limite positive ou nulle S, inférieure ou égale à u_1; d'ailleurs l'égalité

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$

où u_{2n+1} tend vers o quand n augmente indéfiniment, montre que, dans ces mêmes conditions, s_{2n+1} tend vers la limite S; en résumé, s_m tend vers S quand m croît indéfiniment; la série proposée est convergente, a pour somme S, et l'on a $0 \leqq s \leqq u_1$; la supposition $s = 0$

doit être rejetée, si l'on écarte le cas insignifiant où l'on aurait

$$u_1 = u_2, \quad u_3 = u_4, \quad \ldots, \quad u_{2n-1} = u_{2n}, \quad \ldots.$$

Le reste de la série, si on la limite au terme $(-1)^{n-1} u_n$, peut se représenter par $(-1)^n r_n$, en désignant par r_n la somme de la série alternée

$$u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots,$$

qui satisfait évidemment aux mêmes conditions que la proposée; r_n est positif, si l'on écarte le cas insignifiant où l'on aurait

$$u_{n+1} = u_{n+2}, \quad u_{n+2} = u_{n+3}, \quad \ldots.$$

Il est inférieur ou égal à u_{n+1}. L'égalité

$$S = s_n + (-1)^n r_n$$

montre que s_n est une valeur approchée de S par défaut ou par excès, suivant que le dernier terme conservé est négatif ou positif, que le premier terme négligé est positif ou négatif.

L'erreur commise en prenant s_n au lieu de S est moindre, en valeur absolue, que le premier terme négligé; elle est du même signe que lui. S est plus grand que n'importe quelle somme s_n d'indice pair, plus petit que n'importe quelle somme s_n d'indice impair. Les sommes d'indice impair sont donc plus grandes que les sommes d'indice pair; c'est ce qu'il est aisé de reconnaître directement; elles vont en diminuant quand l'indice va en augmentant; c'est ce qui résulte de la formule

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n-1}).$$

La série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

est convergente sans l'être absolument, puisque la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

est divergente. Elle est d'ailleurs très peu convergente.

La série

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où x est un nombre positif donné, est une série alternée dont on sait, autrement que par les règles précédentes, qu'elle converge absolument. Elle ne satisfait d'ailleurs complètement aux conditions du présent numéro, que si x est plus petit que 1. Si x est plus grand que 1, les valeurs absolues des premiers termes ne vont pas en décroissant; ils décroissent certainement dès que n est plus grand que x; à partir de ce moment, les conditions sont vérifiées; elles le sont, en particulier, pour le reste, dont le premier terme négligé fournit une limite supérieure de l'erreur commise, tandis que le signe de ce premier terme fournit le sens de l'erreur.

Si l'on suppose, par exemple, $x = 10$, les premiers termes de la série sont assez grands; pour trouver un terme plus petit que 1 [1], il faut aller jusqu'à $n = 25$; la somme des vingt-cinq premiers termes de la série fournira une valeur approchée, par défaut, de la somme de la série avec une erreur moindre que 1. Le calcul sera assez pénible. Pour les petites valeurs de x, au contraire, on pourra calculer très aisément la somme de la série, avec une grande approximation.

188. **Séries à termes imaginaires.** — On peut considérer des suites et des séries à termes imaginaires.

Considérons d'abord une suite de nombres réels ou imaginaires $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, et supposons, en général, que l'on ait

$$u_n = a_n + ib_n$$

a_n et b_n étant des nombres réels.

On dira que u_n tend vers la limite $\alpha + i\beta$, où α et β sont deux nombres réels fixes, si la valeur absolue de la différence $u_n - (\alpha + i\beta)$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, si, en d'autres termes, quelque petit que soit le nombre positif ε, cette valeur absolue est moindre que ε, à partir d'une valeur de n suffisamment grande. On écrit alors

$$\lim_{n=\infty} u_n = \alpha + i\beta$$

ou

$$\lim_{n=\infty} (u_n - \alpha - i\beta) = 0.$$

---

[1] Voir dans le *Recueil de formules et de tables numeriques* de Hoüel (Paris, Gauthier-Villars), la table des logarithmes des produits $1.2\ldots n$ jusqu'à 100.

En se reportant à la représentation géométrique des imaginaires, en figurant le point $\alpha + i\beta$, de coordonnées α et β, et le cercle décrit de ce point comme centre avec le rayon ε, on voit que tous les points u_n, à partir d'une certaine valeur de n, devront être situés à l'intérieur de ce cercle. Quelque petit que soit ε, cela devra arriver à partir d'une certaine valeur de n, qui, naturellement, change avec ε. On dit, aussi, dans ces conditions, que le point u_n a pour limite le point $\alpha + i\beta$, quand n augmente indéfiniment.

Chacune des différences $a_n - \alpha$, $b_n - \beta$ est, en valeur absolue, au plus égale à la valeur absolue de $a_n + b_n i - \alpha - \beta i$; si donc on a

$$\lim_{n=\infty} u_n = \alpha + \beta i,$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} a_n = \alpha, \qquad \lim_{n=\infty} b_n = \beta.$$

Réciproquement, ces deux égalités entraînent

$$\lim_{n=\infty} u_n = \alpha + \beta i;$$

il est bien clair, en effet, que, si elles sont vérifiées, le point de coordonnées a_n, b_n finit, pourvu que n soit assez grand, par être et rester aussi voisin qu'on le veut du point de coordonnées α, β. Au reste, on a

$$|a_n + b_n i - \alpha - \beta i| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$$

et les suppositions $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n = \beta$, exigent que les nombres $|a_n - \alpha|$ et $|b_n - \beta|$ puissent devenir et rester plus petits que $\frac{\varepsilon}{2}$, pourvu que n soit assez grand; dans ces conditions, le premier membre sera plus petit que ε.

On voit donc que la recherche de la limite d'une suite à termes imaginaires revient à rechercher des limites de deux suites à termes réels.

Il est clair que, si l'on a $\lim\limits_{n=\infty} u_n = \alpha + \beta i$, on aura

$$\lim_{n=\infty} |u_n| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

189. La série

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

à termes réels ou imaginaires, sera convergente ou non si la somme de ses n premiers termes a, ou non, une limite quand n grandit indéfiniment. Cette limite, si elle existe, est la somme U de la série. Si l'on pose en général $u_n = a_n + b_n i$, la somme des n premiers termes de la série (u) est un nombre imaginaire dans lequel la partie réelle est la somme des n premiers termes de la série

$$(a) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

et dans lequel le coefficient de i est la somme des n premiers termes de la série

$$(b) \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots;$$

dire que la série (u) est convergente, c'est donc dire que les deux séries (a), (b) sont convergentes; réciproquement, si les deux séries (a), (b) sont convergentes et ont pour sommes respectives les nombres A, B, la série (u) sera convergente et sa somme U sera égale à $A + iB$. Si l'une des séries (a), (b) est divergente, la série (u) est divergente.

Le reste d'une série convergente se définit comme pour les nombres réels.

On dit que la série (u) est absolument convergente, si la série à termes positifs,

$$(u') \qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

formée avec les valeurs absolues de ses termes, est convergente.

On est certain que, dans ce cas, la série (u) est convergente; on a, en effet,

$$|a_n| \leqq u'_n, \qquad |b_n| \leqq u'_n,$$

en sorte que les séries (a), (b) sont convergentes (elles le sont même absolument) : la série (u) est donc convergente. Le reste de cette série limitée au terme u_n est, en valeur absolue, inférieur ou égal au reste correspondant de la série (u'), comme on le voit de suite, en faisant augmenter p indéfiniment dans l'inégalité [1]

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leqq u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots + u'_{n+p}.$$

---

[1] L'égalité ne peut avoir lieu que si tous les nombres $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+p}$ sont réels et positifs.

La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes : en effet, les deux séries (a), (b) étant absolument convergentes, leurs sommes ne dépendent pas de cet ordre

Par exemple, la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

où x est un nombre réel ou imaginaire donné, est absolument convergente; en effet, si x' est la valeur absolue de x, x'^n est la valeur absolue de x^n et la série formée par les valeurs absolues des termes est

$$1+\frac{x'}{1}+\ldots+\frac{x'^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

Le reste de la série proposée, quand on la limite au n^{ieme} terme, est moindre, en valeur absolue, que

$$\frac{x'^{n+1}}{1.2\ldots n}\,\frac{n+1}{n+1-x'},$$

en supposant $x' < n+1$.

Si, en particulier, on remplace x par ix dans la série, elle deviendra

$$1+\frac{xi}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3 i}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots.$$

Si l'on suppose maintenant que x soit réel, et si l'on sépare les termes réels et les termes imaginaires, on voit que la somme de cette série sera $A+Bi$, en désignant par A et B la somme des deux séries

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}+\ldots,$$

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}+\ldots.$$

De même, la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots,$$

où m et x sont des nombres imaginaires donnés, est absolument convergente, quel que soit m, si la valeur absolue de x est moindre que 1.

190. **Multiplication des séries.** — Si les deux séries

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

à termes réels ou imaginaires sont absolument convergentes, il en est de même de la série

$$(w) \qquad w_1 + w_2 + \ldots + w_n,$$

où l'on suppose

$$w_1 = u_1 v_1, \qquad w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1, \qquad w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1,$$

et, en général,

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \ldots + u_n v_1;$$

sa somme W est égale au produit des sommes U, V des séries (u), (v).

Je désignerai par U_n, V_n, W_n les sommes respectives des n premiers termes dans les séries (u), (v), (w).

On observera que w_n contient le produit de deux termes quelconques des séries (u), (v) dont les indices forment une somme égale à $n+1$: W_n contient tous les produits analogues dans lesquels les indices forment une somme égale ou inférieure à $n+1$; tous ces termes figurent évidemment dans le produit développé $U_n V_n$, avec d'autres, pour lesquels la somme des indices dépasse $n+1$. Si, d'ailleurs, on se donne le nombre naturel p, on peut prendre n assez grand pour que tous les produits qui figurent dans le produit $U_p V_p$ développé figurent aussi dans W_n : il suffit évidemment de prendre

$$n + 1 > 2p.$$

Ceci posé, supposons d'abord que tous les nombres u_n, v_n soient positifs (1); il en sera de même des nombres w_n; on a d'ailleurs, par

(1) Le raisonnement et les conclusions subsistent lors même que quelques-uns de ces nombres seraient nuls.

les remarques précédentes, $W_n < U_n V_n < UV$; la série (w) est convergente; sa somme W est au plus égale à UV.

Soient A, B des nombres positifs respectivement plus petits que U, V, aussi voisins d'ailleurs qu'on voudra de U, V : on peut prendre p assez grand pour que l'on ait $U_p > A$, $V_p > B$, $U_p V_p > AB$ et, en prenant n assez grand,

$$W > W_n > U_p V_p > AB;$$

AB pouvant être supposé aussi voisin qu'on voudra de UV, on voit que W ne peut être inférieur à UV : il lui est nécessairement égal.

Supposons maintenant que u_n, v_n soient des nombres quelconques, positifs ou négatifs, réels ou imaginaires; désignons par u'_n, v'_n les valeurs absolues de u_n, v_n; les séries à termes positifs

$$(u') \qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

$$(v') \qquad v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_n + \ldots$$

sont convergentes par hypothèses; soient U', V' leurs sommes, U'_n, V'_n les sommes de leurs n premiers termes; la série

$$(w') \qquad w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n + \ldots,$$

où l'on suppose, en général,

$$w'_n = u'_1 v'_n + u'_2 v'_{n-1} + \ldots + u'_n v'_1,$$

est, d'après ce qu'on vient de dire, convergente et sa somme W' est égale à $U'V'$: soit W'_n la somme des n premiers termes.

Je rappelle que si, dans un polynome dont les coefficients sont positifs, on remplace toutes les variables par leurs valeurs absolues, on obtient un nombre positif égal ou supérieur à la valeur absolue du polynome : l'égalité ne peut avoir lieu que si toutes les variables sont réelles et positives ou nulles. Si donc on regarde, pour un instant, w_n comme un polynome dont les variables s'appelleraient u_1, u_2, ..., v_1, v_2, ..., on voit que l'on a $|w_n| \leqq w'_n$: la série (w) est absolument convergente.

D'ailleurs l'expression $U_n V_n - W_n$, si l'on développe le produit $U_n V_n$ et si l'on supprime les termes de ce produit qui figurent dans W_n, ne contient plus que des termes tels que $u_\alpha v_\beta$, où $\alpha + \beta$ est supérieur à $n+1$, c'est encore un polynome en u_1, u_2, ..., v_1,

$v_2, \ldots,$ à coefficients positifs; l'expression $U'_n V'_n - W'_n$ se déduit de $U_n V_n - W_n$ en remplaçant $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ par leurs valeurs absolues; on a donc, pour la même raison que tout à l'heure,

$$|U_n V_n - W_n| \leqq U'_n V'_n - W'_n,$$

le second membre étant positif. Si l'on fait croître n indéfiniment, $U_n, V_n, W_n, U'_n, V'_n, W'_n$ tendront respectivement vers les limites U, V, W, U', V', W'; le second membre de l'inégalité précédente tendra vers o, et l'on aura

$$|UV - W| \leqq 0;$$

comme l'inégalité est impossible, on a $UV = W$.

191. Prenons pour les séries (u), (v) les deux séries absolument convergentes

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où x et y sont des nombres donnés, d'ailleurs quelconques; on aura ici

$$w_1 = 1, \qquad w_2 = \frac{x}{1} + \frac{y}{1}, \qquad \ldots,$$

$$w_{n+1} = \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{y}{1} + \frac{x^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\frac{y^2}{1.2} + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} = \frac{(x+y)^n}{1.2\ldots n}$$

(n° 43). Ainsi la somme de la série

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

est le produit des sommes des séries proposées.

En particulier le produit des sommes des deux séries

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

est égal à 1, quel que soit x.

Si l'on prend, en général, pour les séries (u), (v), les deux séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

où x est un nombre donné tel que les deux séries soient absolument convergentes; on voit que la série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

où l'on suppose $c_0 = a_0 b_0, \ldots,$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,$$

est absolument convergente et que sa somme est égale au produit des sommes des séries proposées. On observera que la règle pour former la série produit est la même que la règle pour former le produit de deux polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x.

Si l'on suppose en particulier, en désignant par p, q des nombres quelconques

$$a_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}, \qquad b_n = \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{1.2\ldots n},$$

les deux séries seront absolument convergentes, en supposant $|x| < 1$. c_n sera un polynome en p, q; si p, q étaient des nombres naturels, les deux séries se réduiraient à des polynomes, les développements de $(1+x)^p$ et de $(1+x)^q$; leur produit serait $(1+x)^{p+q}$; le coefficient de x^n dans le développement de cette dernière expression devrait se réduire à c_n; on doit donc avoir, lorsque p, q sont des nombres naturels,

$$c_n = \frac{(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-n+1)}{1.2\ldots n};$$

mais il est aisé de voir que deux polynomes en p, q qui prennent des valeurs égales pour tous les systèmes de valeurs naturelles attribuées aux variables, sont identiques; l'égalité précédente doit donc être une identité en p, q, en sorte que le produit des sommes des deux séries

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots,$$
$$1 + \frac{q}{1}x + \frac{q(q-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots$$

est égal quels que soient les nombres p, q et quel que soit le nombre x, plus petit que 1 en valeur absolue, à la somme de la série

$$1 + \frac{p+q}{1}x + \frac{(p+q)(p+q-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots.$$

192. Limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour n infini. — L'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, où n est un nombre naturel, est le produit de n facteurs égaux à $1+\frac{1}{n}\cdot$ Quand n est très grand, chacun de ces facteurs est voisin de 1, et il y en a beaucoup; on ne se rend pas compte de la valeur du produit, dont on va montrer qu'il tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

On a, en appliquant la formule du binome,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\,\frac{1}{n^p} + \ldots.$$

On transforme le terme général en divisant par n chacun des p facteurs $n, n-1, \ldots, n-p+1$, qui figurent dans le numérateur de la première fraction, et l'on obtient

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{1.2\ldots p} + \ldots.$$

Le second membre est un développement limité, contenant $(n+1)$ termes, évidemment positifs.

Soit p un nombre naturel fixe, d'ailleurs quelconque, et supposons $n > p$. La somme des $p+1$ premiers termes

$$1 + \frac{1}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{1.2\ldots p}$$

du second membre de l'égalité (1) peut être regardée comme un polynome en $\frac{1}{n}$, dont la valeur, si l'on y remplaçait $\frac{1}{n}$ par 0, serait

$$e_p = 1 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p},$$

dont la valeur diffère donc aussi peu qu'on le veut de e_p, pourvu que $\frac{1}{n}$ soit assez petit, que n soit assez grand : la différence est moindre que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que n dépasse un nombre positif convenablement choisi.

On est ainsi amené à comparer $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la série indéfinie

$$(e) \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p} + \ldots,$$

dont on a établi la convergence, et dont on désigne habituellement la somme par e : la limite, pour n infini, de la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est égale à la somme e_p des $p+1$ premiers termes de cette série.

Dans le second membre de l'égalité (1), on retrouve les premiers termes de la série (e), respectivement multipliés, à partir du troisième, par les facteurs $1-\frac{1}{n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... qui sont tous positifs et plus petits que 1; chaque terme de ce second membre est plus petit que le terme correspondant de la série (e); le second membre est plus petit que la somme des $n+1$ premiers termes de la série (e); il est, *a fortiori*, plus petit que e. On a

$$(2) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Mais, quand n augmente, $\frac{1}{n}$ diminue, les facteurs $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... augmentent, le nombre des termes, dans le second membre de (1), augmente aussi; leur somme $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ augmente avec n; elle reste inférieure à e, elle a donc, quand n augmente indéfiniment, une limite E, inférieure ou égale à e.

D'un autre côté, si l'on se donne le nombre naturel p, on a, en supposant $n > p$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\frac{1}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1.2}$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{1.2\ldots p};$$

la limite du premier membre, quand n augmente indéfiniment, ne peut être inférieure à la limite du second membre; on a donc $E \geqq e_p$; les inégalités $e \geqq E \geqq e_p$, où p peut être supposé assez grand pour que la différence $e - e_p$ soit aussi petite qu'on le veut, montre que E est égal à e.

La limite, pour n infini, de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *est la somme e de la série*

$$1+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\ldots.$$

On a vu au n° 182 qu'on pouvait poser

$$e = 1+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots p}+\frac{1}{1.2\ldots p}\frac{\theta_p}{p},$$

en désignant par θ_p un nombre positif (non nul), plus petit que 1.

On obtient des valeurs approchées de e par défaut et par excès en prenant $\theta_p = 0$, $\theta_p = 1$. On voit ainsi, en prenant $p = 2$, que e est plus grand que 2, plus petit que 3; ce n'est pas un nombre entier; ce n'est pas non plus une fraction $\frac{a}{b}$ à termes entiers; s'il en était ainsi, en effet, on pourrait écrire, en prenant $p = b$,

$$\frac{a}{b} = 1+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots b}+\frac{1}{1.2\ldots b}\frac{\theta_b}{b}.$$

En multipliant par $1.2\ldots b$ et en faisant passer dans le premier membre les $b+1$ premiers termes du second, on en tire évidemment une égalité de la forme

$$\frac{\theta_b}{b} = \text{nombre entier},$$

le premier membre est plus petit que 1 et ne peut être nul; l'impossibilité est manifeste. Donc *le nombre e est irrationnel.*

Hermite a démontré qu'il ne pouvait être racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels.

193. Il est utile de savoir calculer, avec une approximation donnée, la somme d'une série dont on sait calculer chaque terme avec telle approximation que l'on veut.

Je me bornerai au cas des séries à termes réels.

Le procédé le plus régulier, quand on a une limite supérieure du reste de la série limitée au $n^{\text{ième}}$ terme, est de chercher à déterminer n de façon que la valeur absolue de ce reste soit plus petite que l'erreur ε qu'on veut se permettre, d'évaluer grossièrement la différence ε' entre ε et la limite supérieure du reste, puis de calculer chaque terme de façon que la somme des erreurs possibles sur chaque terme soit inférieure à $\varepsilon - \varepsilon'$; si l'on a n termes à calculer, on peut, par exemple, calculer chaque terme avec une erreur moindre que $\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{n}$.

D'ordinaire, on procède d'une façon moins régulière : tout d'abord, on cherche à n'utiliser que des séries qui soient rapidement convergentes; les mathématiciens se sont ingéniés à en trouver de telles pour les cas les plus fréquents et les plus intéressants. Dans ces séries, les termes décroissent rapidement, et le reste est du même ordre de petitesse que le premier terme négligé, ou, au moins, que le dernier terme conservé.

Supposons qu'on veuille avoir le résultat avec une erreur moindre que 10^{-p}, et que l'on calcule chaque terme, sous forme décimale, en conservant $p+q$ décimales; on aura ainsi chaque terme avec une erreur moindre que 10^{-p-q}, et même que $\frac{1}{2}10^{-p-q}$, si l'on a forcé, quand il convenait, le dernier chiffre décimal; on s'arrête dans le calcul des termes lorsque, dans le terme suivant, les $p+q$ chiffres décimaux que l'on devrait garder seront tous des *zéros*.

Supposons qu'on ait ainsi calculé n termes, l'erreur commise sur la somme de ces n termes sera moindre, suivant les cas, que $n\,10^{-p-q}$ ou $\frac{n}{2}10^{-p-q}$. Si l'on représente la valeur absolue du reste par $k\,10^{-p-q}$, le nombre k ne sera pas grand, habituellement, et l'on peut admettre, conformément aux hypothèses que l'on a faites, qu'il sera inférieur à 10; quoi qu'il en soit, l'erreur qui résulte, d'une part, des erreurs commises sur chaque terme et, d'autre part, de ce que l'on a négligé le reste, sera moindre que $(k+n)\,10^{-p-q}$, ou que $\left(k+\frac{n}{2}\right)10^{-p-q}$; il suffira, pour avoir l'approximation désirée, que l'on ait

$$k+n<10^q \quad \text{ou} \quad k+\frac{n}{2}<10^q.$$

On voit que, si l'on suppose $q=2$, $k<10$, le procédé ne se trouverait en défaut que si l'on avait été obligé de calculer plus de 90 termes dans le premier cas, plus de 180 dans le second. La série ne serait guère convergente; on voit même que, si l'on n'a pas trop de termes à calculer, le nombre k peut très bien être supérieur à 10. Si l'on prenait au contraire $q=1$, le résultat serait fréquemment défectueux : d'où la règle que l'on recommande habituellement : calculer deux chiffres de plus qu'on n'en veut garder; s'arrêter quand on ne trouve plus que des zéros; faire la somme et supprimer les deux derniers chiffres.

Sans que j'y insiste, on voit que, en procédant de cette façon, et en calculant chaque terme avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-p-2}$, on pourra, d'ordinaire, avoir le résultat avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-p}$. Si, d'ailleurs, on a quelque scrupule, et que l'on ait une limite supérieure du reste, on pourra toujours s'assurer de ce qu'il en est.

Supposons, par exemple, qu'on veuille avoir le nombre e avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^5}$, en partant de la série qui définit ce nombre; on a écrit ci-dessous les termes de la série, calculés avec une erreur moindre que $\frac{1}{2.10^7}$ près, à partir du terme $\frac{1}{1.2.3}$; les trois premiers, ensemble, forment une somme égale à 2,5; chaque terme se déduit du précédent. On a mis un point à droite des chiffres forcés.

$$\begin{array}{l}
2,5\\
0,1666667\cdot\\
0,0416667\cdot\\
0,0083333\\
0,0013889\cdot\\
0,0001984\\
0,0000248\\
0,0000027\\
0,0000003\cdot\\
\hline
2,7182818
\end{array}$$

On s'est arrêté au terme $\frac{1}{10!} < 3.10^{-7}$, le reste correspondant est plus petit que 3.10^{-8}; on est bien sûr ici, d'après le raisonnement général, que l'erreur commise en ne conservant au résultat que les cinq premiers chiffres décimaux est moindre que $\frac{10^{-5}}{2}$; il est d'ailleurs aisé de voir que l'approximation est plus élevée. Un des termes a été calculé exactement; quatre termes ont été calculés par défaut; de là, et de ce que l'on a négligé le reste, résulte une erreur possible, par défaut, moindre que

$$4.\frac{10^{-7}}{2} + 3.10^{-8} = 23.10^{-8};$$

quatre termes ont été pris par excès, d'où une erreur possible, par excès, moindre que 2.10^{-7}; le nombre e est certainement compris entre les deux nombres obtenus, l'un en ajoutant 3 unités du dernier ordre décimal, l'autre en en ôtant 2 unités, c'est-à-dire entre 2,7182821 et 2,7182816; on est sûr que les cinq premières décimales sont exactes et que la valeur 2,718282 est approchée avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-6}$; *en fait*, les sept décimales calculées se trouvent être exactes, la compensation s'étant faite à peu près entre les erreurs par défaut et les erreurs par excès.

Supposons qu'on veuille calculer la somme, pour $x = \frac{\pi}{2}$, de la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots$$

En prenant pour $\log \frac{\pi}{2}$ la valeur 0,19612, on trouve pour les logarithmes des termes les valeurs ci-dessous, en face desquelles on a mis les nombres correspondants, que l'on prendra pour valeurs des termes de la série

$\frac{x^3}{3!}$	$\bar{1},81021$	0,64597
$\frac{x^5}{5!}$	$\bar{2},90142$	0,07969
$\frac{x^7}{7!}$	$\bar{3},67041$	0,00468
$\frac{x^9}{9!}$	$\bar{4},20432$	0,00016
$\frac{x^{11}}{11!}$	$\bar{6},\ldots\ldots$	0,00000

On a fait ci-dessous, d'une part la somme des termes positifs, d'autre part la somme des termes négatifs. On trouve

1,57080	
0,07969	0,64597
16	0,00468
1,65065	0,65065

On trouve donc 1 pour la somme cherchée; les erreurs se sont compensées et le résultat est exact, ainsi qu'on le verra plus tard.

EXERCICES.

167. Dans une série convergente on enferme tels termes consécutifs que l'on veut entre parenthèses, de manière à regarder leur somme comme effectuée; montrer que la nouvelle série ainsi obtenue est convergente et a même somme que la proposée.

La série

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{7}{8}\right)+\ldots+\left(1-\frac{2^n-1}{2^n}\right)+\ldots$$

est convergente; en est-il de même de la série

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+\ldots?$$

168. Quelle est la somme de la série convergente

$$a+b+a^2+b^2+\ldots+a^n+b^n+\ldots$$

où a, b sont des nombres positifs plus petits que 1?

Comment se comporte le rapport d'un terme au précédent quand n augmente indéfiniment?

169. On se donne la suite indéfinie, admettant 0 pour limite,

$$R_1,\quad R_2,\quad \ldots,\quad R_n,\quad \ldots;$$

on demande l'expression du terme général u_n d'une série

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

dont le reste soit R_n, quand on la limite à u_n.

170. On se donne la suite indéfinie

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots;$$

former une série telle que le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$ soit égal à r_n.

Cas où r_n est égal à $\frac{1}{2}$ si n est pair, à $\frac{1}{3}$ si n est impair; la série à laquelle on parvient alors est convergente?

171. Former une série dans laquelle le rapport du $n^{\text{ième}}$ terme à la somme des n premiers termes soit égale à a^n, en désignant par a un nombre positif plus petit que 1. Cette série est-elle convergente?

172. Former une série dont la somme soit égale à 1 et dans laquelle le rapport du $n^{\text{ième}}$ terme au reste de la série, limitée à ce terme, soit égal à $\frac{1}{n}$.

173. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots,$$

en partant de l'identité

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Plus généralement, la formule à laquelle on parvient en décomposant en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{1.2\ldots p}{x(x+1)\ldots(x+p)}$$

permet de trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1.2\ldots p} + \frac{1}{2.3\ldots(p+1)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p)} + \ldots$$

174. La série

$$\frac{1}{(p+1)^{1+\alpha}} + \frac{1}{(p+2)^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(p+n)^{1+\alpha}} + \ldots,$$

où p est un nombre positif, est convergente quand α est positif. Montrer que sa somme tend vers 0 quand p augmente indéfiniment.

175. Si $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont des nombres positifs, les séries

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$\frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{1+u_2} + \ldots + \frac{u_n}{1+u_n} + \ldots,$$
$$\frac{u_1}{1-u_1} + \frac{u_2}{1-u_2} + \ldots + \frac{u_n}{1-u_n} + \ldots$$

sont convergentes ou divergentes en même temps.

176. Dans les mêmes conditions, il en est de même des deux séries

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$\frac{u_1}{s_1} + \frac{u_2}{s_2} + \ldots + \frac{u_n}{s_n} + \ldots,$$

où s_n désigne la somme des n premiers termes de la première série.

On voit aisément que la seconde série est convergente quand la première est convergente; pour achever la démonstration, il suffit de prouver que la seconde série est divergente quand la première est divergente. On observera que la somme

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+p}}{s_{n+p}}$$

est plus grande que

$$\frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}}{s_{n+p}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}$$

et que, si la première série est divergente, on peut toujours, en se donnant n arbitrairement, prendre p assez grand pour que le second membre soit aussi voisin de 1 qu'on voudra, pour qu'il dépasse $\frac{1}{2}$, par exemple; on peut donc, dans la seconde série, trouver après le $n^{\text{ième}}$ terme assez de termes pour que leur somme dépasse $\frac{1}{2}$ et, cela, quel que soit n, etc.

Appliquer la proposition précédente au cas où l'on a $u_n = 1$, quel que soit n.

177. En désignant par a, b deux nombres positifs donnés, déterminer un nombre A tel que la série dont le $n^{\text{ième}}$ terme est

$$\frac{1}{an+b} - \frac{A}{n}$$

soit convergente.

178. Une fonction rationnelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ étant donnée, dans laquelle le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur entière et positive de x, on peut toujours en retrancher un polynome $P(x)$ et une fraction de la forme $\frac{A}{x}$, où A est une constante, tels que la série dont le terme général est

$$\frac{f(n)}{\varphi(n)} - P(n) - \frac{A}{n}$$

soit convergente.

179. Montrer que l'expression

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

où n est un nombre naturel, tend vers une limite quand n croît indéfiniment.

On a

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2};$$

le second membre est le terme général d'une série convergente dont la somme est la limite de s_n pour n infini.

180. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres positifs tous plus petits que 1, on a

$$o > (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n) > 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

La proposition est évidente pour $n = 2$; elle s'établit ensuite par induction. Elle montre qu'on peut poser

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n) = 1 - \theta(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n),$$

θ etant un nombre compris entre o et 1.

181. Si la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, le produit

$$Q_n = (1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)$$

tend, quand n croît indéfiniment, vers une limite Q, différente de o si aucun des nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'est égal à 1.

On commencera par supposer que tous les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont plus petits que 1; la proposition résulte alors du lemme dont l'énoncé constitue l'exercice précédent. Il est ensuite aisé d'achever la démonstration, puisque, dans la série proposée, les termes finissent certainement par être tous plus petits que 1.

182. Si la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est divergente, le produit

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_n)$$

croît indéfiniment quand n augmente indéfiniment.

Il en est de même, en supposant tous les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ inférieurs à 1, du produit

$$\left(1 + \frac{u_1}{1 - u_1}\right)\left(1 + \frac{u_2}{1 - u_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{u_n}{1 - u_n}\right).$$

Conclure de là que, dans les mêmes conditions, le produit

$$(1 - u_1)(1 - u_2)\ldots(1 - u_n)$$

tend vers 0 quand n augmente indéfiniment.

183. Si la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, le produit

$$p_n = \left(1 - \frac{u_1}{1 + u_1}\right)\left(1 - \frac{u_2}{1 + u_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{u_n}{1 + u_n}\right)$$

tend vers une limite positive quand n augmente indéfiniment; en conclure que le produit

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_n)$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

La même conclusion résulte de ce que ce produit est inférieur à

$$1 + \frac{s_n}{1} + \frac{s_n^2}{1.2} + \ldots + \frac{s_n^n}{1.2\ldots n},$$

où $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

184. Si la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est absolument convergente, le produit

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$$

tend, lorsque n croît indéfiniment, vers une limite qui n'est nulle que si l'un des nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ est égal à -1.

185. On suppose que dans la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette, pour n infini, une limite l; pour quelles valeurs positives du nombre x peut-on affirmer la convergence, ou la divergence de la série

$$u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots?$$

Même question, en supposant que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty}(\sqrt[n]{u_n}) = l'$, montrer que, si les deux expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont, l'une et l'autre, une limite pour n infini, ces deux limites sont égales. Montrer que

$$\sqrt[n]{1.2\ldots n}$$

augmente indéfiniment avec n.

186. Dans la série alternée

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots,$$

où l'on suppose, en général, $u_{n+1} > u_n > 0$, sans supposer d'ailleurs

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0,$$

on désigne, en général, par s_n la somme des n premiers termes.

Montrer que les sommes d'indice pair vont en croissant avec leur indice, que les sommes d'indice impair vont en décroissant; que chaque somme d'indice impair est plus grande que chaque somme d'indice pair, que s_{2n} et s_{2n+1} tendent vers des limites quand n augmente indéfiniment. Sous quelles conditions les limites sont-elles égales?

187. Effectuer le carré et le cube de la série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

où x désigne un nombre plus petit que 1 en valeur absolue.

188. On fait le produit des deux polynomes

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n},$$
$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{1.2\ldots n}.$$

Quel est le second terme du produit, ordonné suivant les puissances ascendantes de x?

189. Effectuer le carré des deux séries

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$
$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots$$

et ajouter les résultats.

190. Calculer au moyen d'une table de logarithmes à cinq décimales l'expression

$$\left(1 + \frac{1}{9999}\right)^{9999}$$

et, au moyen d'une table à sept décimales, l'expression

$$\left(1 + \frac{1}{99999}\right)^{99999}.$$

191. Calculer, avec vingt décimales exactes, la somme de la série

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots$$

pour $q = 0,1$ et, avec trois décimales exactes, la somme de la même série pour $q = 0,9$.

192. Calculer, avec une erreur moindre que 10^{-4}, la somme de chacune des deux séries

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$
$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{3}$.

193. Le même raisonnement que l'on a employé au n° 192 pour montrer que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

a une limite quand n croît indéfiniment et que cette limite est la somme e de la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots$$

permet de montrer que, si x est un nombre positif donné, l'expression

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment, par valeurs naturelles, et que cette limite est la somme de la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

Ce dernier résultat subsiste lors même que x est négatif ou imaginaire.

En effet, la différence entre la somme S de cette série et $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ est la somme de la série

$$\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\right]\frac{x^p}{1.2\ldots p}$$
$$+\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\frac{x^n}{1.2\ldots n}$$
$$+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}+\ldots;$$

et l'on peut déduire de là l'inégalité

$$\left[S-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]<S'-\left(1+\frac{x'}{n}\right)^n$$

où x' désigne la valeur absolue de x et S' la somme de la série

$$1+\frac{x'}{1}+\frac{x'^2}{1.2}+\ldots+\frac{x'^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

CHAPITRE XII.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

§ 1. — GÉNÉRALITÉS.

194. On a dit plus haut qu'un polynome en x, une fraction rationnelle en x, sont des fonctions de x, pour dire que, lorsqu'on se donne la valeur numérique de x, on sait, au moyen d'opérations connues, calculer (¹) la valeur correspondante du polynome ou de la fraction.

S'il s'agit d'une fraction rationnelle, il y a toutefois des valeurs de x pour lesquelles la fonction ne peut être définie, les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule : ces valeurs sont isolées; mais il n'en est pas toujours ainsi.

Si l'on considère, par exemple, l'expression $\sqrt{x^2-1}$ et si, comme je le suppose ici, on ne veut considérer que des nombres réels, les opérations à effectuer n'ont pas de signification pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Soit x une lettre que l'on regarde comme susceptible de prendre n'importe quelles valeurs, et que, pour cette raison, on désigne sous le nom de *variable indépendante;* soient a, a' deux nombres réels quelconques, différents entre eux : on dit que x *appartient* à l'intervalle (a, a') pour dire qu'il est égal soit à a, soit à a', soit à une valeur

---

(¹) Il faut entendre ici le mot *calculer* dans un sens qu'il ne comporte guère : s'il s'agit, par exemple, d'un polynome en x, même d'un polynome à coefficients rationnels, on ne peut pas calculer la valeur de ce polynome pour une valeur irrationnelle de x, ou plutôt on ne peut la calculer qu'approximativement; si les coefficients sont irrationnels, le calcul ne peut être effectué même pour les valeurs rationnelles de x; mais la valeur du polynome peut être *définie* par une coupure, ou comme une limite, pour chaque valeur de x.

comprise entre a et a'; on dit qu'il est *intérieur* à l'intervalle (a, a') pour dire qu'il est compris entre a et a' sans être égal ni à a, ni à a', qu'il satisfait aux inégalités $a < x < a'$, si l'on suppose $a < a'$: a et a' sont les *bornes* de l'intervalle.

Imaginons maintenant une autre lettre y et supposons qu'à chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, a') *corresponde* une valeur définie de y; il faut entendre par là que, si l'on se donne une valeur pour x, on sait calculer ou au moins définir la valeur correspondante de y, au moyen d'opérations que l'on sait effectuer sur le nombre x, ou de toute autre façon. On dit alors que y est une fonction de x, définie dans l'intervalle (a, a'). Au lieu de la lettre y, on emploie souvent, pour désigner une fonction de x, un symbole tel que $f(x)$, $g(x)$, ... Un polynome en x est une fonction de x définie dans tout intervalle; une fraction rationnelle en x est une fonction définie dans tout intervalle auquel n'appartient aucune racine du dénominateur; $\sqrt{1-x^2}$ est une fonction de x définie dans l'intervalle $(-1, +1)$.

On a vu que la somme de la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

était définie pour chaque valeur de x; cette somme est une fonction de x définie dans tout intervalle. Si on la désigne par $\varphi(x)$, le résultat obtenu au n° 290 par la multiplication de deux séries peut s'exprimer en disant que la fonction $\varphi(x)$ jouit de la propriété qu'exprime l'égalité

$$\varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x').$$

Si l'on considère la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots,$$

où l'on regarde m comme un nombre donné, on sait que cette série est convergente pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(-1, +1)$; la somme de cette série est une fonction définie de x dans tout intervalle (a, a') dont les bornes a, a' sont intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$. On ne peut pas dire que la somme soit une fonction définie dans tout l'intervalle $(-1, 1)$, puisqu'on ne sait pas si cette somme a un sens pour x égal à -1 ou à 1.

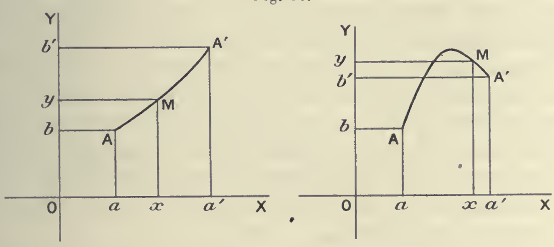
La fonction a^x, où a est un nombre positif donné, a été entièrement définie dans le Chapitre I, au n° 25. J'y reviendrai d'ailleurs au n° 201.

On a rappelé au n° 94 la définition des fonctions *circulaires* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, qui s'introduisent en trigonométrie; les deux premières sont définies dans tout intervalle, la dernière dans tout intervalle auquel n'appartient pas un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. La définition de ces fonctions est *géométrique :* on doit imaginer un cercle idéal, où l'on pourrait mesurer les arcs, pour les points duquel on pourrait mesurer les abscisses et les ordonnées, avec une précision indéfinie qui ne peut être évidemment réalisée ; mais ce cercle que l'on imagine permet des raisonnements rigoureux, et l'on en déduit, en trigonométrie, les belles propriétés de ces fonctions; on verra plus tard, d'ailleurs, comment on peut substituer à la définition géométrique une définition purement analytique.

195. Je n'ai pas besoin d'insister ici sur la représentation graphique des fonctions, avec laquelle le lecteur est déjà familier.

L'ensemble des valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, a') est très bien représenté par le segment de l'axe des x dont les extrémités sont les points d'abscisse a, a'. En parlant du point x de l'axe OX, j'entendrai le point de cet axe dont l'abscisse est x, con-

Fig. 36.



formément aux conventions du Chapitre I. Il est aussi fort commode de se figurer la lettre x comme représentant le *temps*, ou plutôt, afin de fondre ensemble les deux représentations, d'imaginer l'axe des x comme une sorte d'horloge rectiligne, où le temps serait marqué par un point qui se mouvrait d'un mouvement uniforme dans le sens positif, en parcourant l'unité de longueur dans l'unité de temps et qui, à l'origine des temps, passerait à l'origine des coordonnées; l'intervalle (a, a') peut alors être regardé comme un intervalle de temps et l'on peut regarder le point (d'abscisse) x comme se mouvant du point a au point a'.

Soit maintenant $y=f(x)$ une fonction de x définie dans l'intervalle (a, a'), où je suppose $a<a'$; à chaque point x de cet intervalle correspond une valeur de y, un point de l'axe OY dont l'ordonnée est y. En parlant d'un point y de l'axe OY, j'entendrai le point de cet axe dont l'ordonnée est y. A chaque point x de l'intervalle (a, a') correspond aussi un point M du plan, dont les coordonnées sont x et $y=f(x)$.

Admettons, en laissant au mot *courbe* un sens un peu vague que l'on essaiera de préciser peu à peu, que, lorsque le point x se meut du point a au point a', le point M décrive un trait de courbe allant du point A (de coordonnées a, b) au point A' (de coordonnées a', b'). Ce trait de courbe figurera très bien la fonction, et permettra de suivre sur l'axe OY le mouvement du point y correspondant au mouvement du point x. Chaque parallèle à l'axe des y menée par un point d'abscisse x, compris entre a et a', rencontrera le trait de courbe en un point et un seul, dont on lira l'ordonnée y sur l'axe des y. Le point y de cet axe pourra d'ailleurs sortir du segment b, b', les parallèles à l'axe des x peuvent rencontrer le trait de courbe en plusieurs points; il peut y avoir plusieurs valeurs de x, dans l'intervalle (a, a'), auxquelles corresponde la même valeur de y.

Inversement on voit de suite, sur la figure, comment un trait (idéal) reliant A à A' définirait, si les mesures pouvaient être faites avec une précision indéfinie, y comme une fonction de x, pourvu que chaque parallèle à l'axe des y comprise entre A et A' ne rencontre ce trait de courbe qu'en un point. Si la courbe est définie géométriquement, à cette définition correspondront des propriétés de la fonction que l'on pourra déduire de la définition.

De même, dire qu'on connaît le mouvement du point y sur l'axe OY, dans l'intervalle de temps (a, a'), c'est dire qu'à chaque instant x, ou pour chaque position (entre a, a') du point x sur l'horloge rectiligne OX, on connaît la position correspondante du point y, c'est-à-dire que l'on connaît l'ordonnée y de ce point *en fonction* du temps x.

Toutefois, les fonctions qui sont susceptibles de cette représentation graphique ou cinématique constituent une classe particulière de celles qu'on a définies plus haut; pas de représentation graphique, pas de mouvement sans *continuité,* et le lecteur pressent certainement la nécessité de préciser ce mot. D'un autre côté, on n'imagine pas de courbe dont l'ordonnée, quand x croît, n'irait pas ou en croissant, ou en décroissant, ou en restant constante, ou du moins qui ne pourrait pas se décomposer en parties telles qu'il en fût ainsi, pour chacune d'elles ; on n'imagine pas de mouvement qui ne s'effectue pas dans un certain sens, de point qui se meuve sur l'axe des y sans monter ou descendre, qui irait d'un point à un autre sans passer par les points intermédiaires, etc. Ces diverses idées, qu'il importe de préciser, ne sont nullement impliquées dans l'idée générale de fonction telle qu'elle a été présentée au n° 194.

196. **Continuité.** — On dit qu'une fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle (a, a'), est continue dans cet intervalle, pour dire, en gros, qu'à des valeurs très voisines de la variable appartenant à cet intervalle, correspondent des valeurs très voisines de la fonction, que la différence $f(x_1)-f(x_0)$ des valeurs de la fonction qui correspondent aux valeurs x_0, x_1 de x, la *variation* $f(x_1)-f(x_0)$ de la fonction quand x passe de la valeur x_0 à la valeur x_1, est très petite en valeur absolue, quand les nombres x_0, x_1 appartiennent à l'intervalle (a, a') et que la différence $x_1 - x_0$ est très petite en valeur absolue. Il est toutefois nécessaire de préciser encore cet énoncé : d'une part le mot *petit* est vague, d'autre part il pourrait arriver que, pour une petite valeur de $x_1 - x_0$, la différence $f(x_1)-f(x_0)$ fût en effet petite, et qu'elle devînt grande lorsque les valeurs de x_0 et de x_1 se rapprocheraient davantage; une telle supposition est évidemment contraire à l'idée que l'on se fait de la continuité. On évitera toute difficulté en disant que :

La fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, a') est continue dans cet intervalle si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif ε' tel que l'on ait $|f(x_1)-f(x_0)| < \varepsilon$ sous la condition que x_0, x_1 appartiennent à l'intervalle (a, a') et que l'on ait $|x_1 - x_0| < \varepsilon'$.

On dira souvent, et dans le même sens, que la différence

$f(x_1) - f(x_0)$ doit être plus petite, en valeur absolue, que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que la différence $x_1 - x_0$ soit moindre, en valeur absolue, qu'un nombre positif ε', convenablement choisi : ce nombre ε' dépend ordinairement de ε.

Si, par exemple, on considère un cercle, on voit de suite qu'un arc est plus grand que la corde qui le sous-tend, que celle-ci est plus grande que sa projection sur un axe; on voit de suite que, dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, par exemple, la variation de $\sin x$ pour deux valeurs voisines x_0, x_1 est moindre que $|x_0 - x_1|$; on en déduit la continuité de $\sin x$ dans cet intervalle.

Dans le Chapitre II, où l'on a traité des polynomes, on n'a pas démontré la continuité dans un intervalle (ce qui, d'ailleurs, n'offre pas de difficulté), mais seulement la *continuité pour chaque valeur de x*, qu'il me reste à définir en général.

Une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, a') est continue pour une valeur particulière x_0 *appartenant à cet intervalle si la différence $f(x_1) - f(x_0)$ est moindre en valeur absolue que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que x_1 appartienne aussi à l'intervalle (a, a') et que la différence $x_1 - x_0$ soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif ε' convenablement choisi.*

Quand on se donne le nombre x_0 et le nombre positif ε, on doit pouvoir trouver ε'.

C'est bien dans ce sens qu'on a établi la continuité d'un polynome, comme fonction de x, d'abord pour $x = 0$, puis pour une valeur quelconque de x.

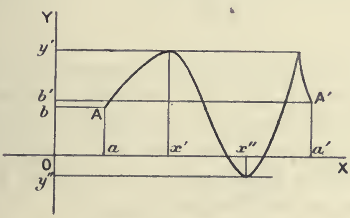
Il est évident que, si une fonction $f(x)$ est continue *dans l'intervalle* (a, a'), elle sera continue pour chaque valeur x_0 de x, appartenant à cet intervalle. Le nombre ε étant donné, on en déduira le nombre ε' *qui conviendra à la fois pour toutes les valeurs de* x_0. La réciproque s'énonce ainsi : Si une fonction $f(x)$ est continue pour chaque valeur x_0 qui appartient à l'intervalle (a, a'), elle est continue dans tout cet intervalle. Cette réciproque n'est pas évidente : à chaque valeur de x_0 et de ε correspond bien un nombre ε'; mais, si l'on se donne seulement ε, il n'est nullement évident qu'on puisse lui faire correspondre un ε' qui convienne à la fois pour toutes les valeurs de x_0. Il y a là un point délicat de la théorie des fonctions, que je laisse de côté. Cette réciproque se trouvera d'ailleurs établie aisément pour des classes étendues de fonctions continues, mais je dois prévenir le lecteur qu'elle est vraie dans sa généralité (¹).

Je ne démontrerai pas non plus d'autres propositions importantes, qui se déduisent logiquement de la définition de la continuité, mais qu'on peut regarder comme intuitives pour les fonctions continues, susceptibles de la représentation graphique ou cinématique qui a été décrite au n° 195, et qui fait correspondre un point de l'axe OY à un point de l'axe OX. Je me contente de les énoncer.

Les valeurs d'une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, a'), restent comprises entre certaines bornes A, A'. Il y a une certaine valeur x' qui peut d'ailleurs être soit a, soit a', soit un nombre intermédiaire, pour laquelle la valeur $f(x')$ de la fonction est supérieure ou égale à toutes les autres : en d'autres termes, on a, quel que soit le nombre x appartenant à l'intervalle (a, a'), $f(x') \geqq f(x)$. De même, il y a une valeur x'', appartenant à l'intervalle (a, a') telle que l'on ait, quel que soit le nombre x appartenant au même intervalle, $f(x'') \leqq f(x)$.

Cela revient à dire, si l'on se reporte à la représentation graphique, que, parmi les diverses positions du point y sur l'axe OY qui correspondent aux positions du point x situé sur l'axe OX en a, a' ou entre a et a', il y a deux positions extrêmes y', y'' qui correspondent

Fig. 37.



à des points x', x'' de l'intervalle ou du segment (a, a'), telles que le point y ne soit jamais au-dessus du point y', au-dessous du point y''; les valeurs de y qui correspondent aux valeurs de x qui appartiennent

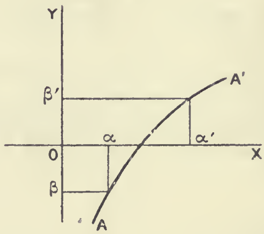
(¹) *Intr.*, n° 162.

à l'intervalle (a, a'), appartiennent toutes à l'intervalle (y'', y'). Au point de vue cinématique, on peut dire que, dans l'intervalle de temps (a, a'), le point y, en se mouvant sur l'axe OY, atteint une position y' au-dessus de laquelle il ne monte pas, une position y'' au-dessous de laquelle il ne descend pas.

On énonce souvent cette propriété des fonctions continues en disant qu'une fonction continue dans l'intervalle (a, a') *atteint* son maximum et son minimum [1].

Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, a') et si α, α' sont deux valeurs de x appartenant à cet intervalle, telles que les nombres $f(\alpha)$, $f(\alpha')$ soient de signes contraires, il y a une valeur x_0 de x comprise entre α, α', telle que, pour cette valeur, la fonction $f(x)$ s'annule : en d'autres termes, il y a une racine x_0 de l'équation $f(x) = 0$ comprise entre α, α'. En effet, le trait de courbe qui joint le point de

Fig. 38.



coordonnées α et $\beta = f(\alpha)$, qui est au-dessous de l'axe des x, au point de coordonnées α' et $\beta' = f(\alpha')$ rencontre nécessairement l'axe des x en quelque point x_0, situé entre les points α et α' de cet axe. Dans l'intervalle de temps (α, α'), un point de l'axe des y qui se meut du point β au point β' ne peut pas ne pas passer par le point O, à un moment x_0 compris entre les époques α, α' [2].

Plus généralement, un point qui se meut d'une position à une autre passe par toutes les positions intermédiaires ; dans la figure 37, le point y qui se meut sur l'axe OY dans l'intervalle de temps (a, a')

---

(1) *Intr.*, n° 161.

(2) *Intr.*, n° 166.

passe par tous les points du segment qui va de y'' à y'; chacune des valeurs de y qui appartiennent à l'intervalle (y', y'') peut être regardée comme correspondant à une valeur de x appartenant à l'intervalle (a, a'). En d'autres termes encore, toute parallèle à l'axe des x menée par un point du segment (y'', y') rencontre le trait de courbe qui figure la fonction dans l'intervalle (a, a').

Ces propositions ne sont pas moins intuitives que la proposition particulière sur laquelle on a insisté tout d'abord; elles peuvent d'ailleurs s'en déduire; si, en effet, y_1 est une valeur de y comprise entre y'' et y', la fonction $f(x) - y_1$, continue dans l'intervalle (a, a'), est négative pour $x = x''$, positive pour $x = x'$; elle doit donc s'annuler pour une valeur x_1 intermédiaire entre x'' et x'.

On peut aller un peu plus loin dans l'étude de cette proposition particulière, qui est extrêmement importante, et dire que la fonction $f(x)$ s'annule un nombre impair de fois entre α et α', parce qu'un trait de courbe ne peut pas passer d'un côté de l'axe des x à l'autre côté de cet axe sans le traverser un nombre impair de fois, qu'un point qui se meut sur l'axe OY, qui part d'un point situé au-dessous de O pour aboutir à un point situé au-dessus doit passer un nombre impair de fois par le point O.

Cette assertion, que la fonction $f(x)$ s'annule un nombre impair de fois entre α et α', paraît claire sur la figure 39, elle tombe évi-

Fig. 39.

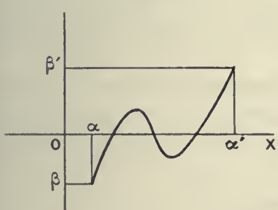
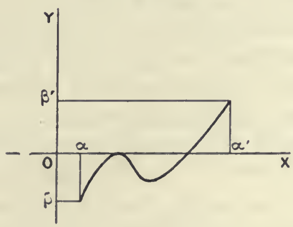
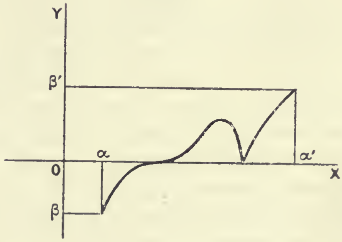


Fig. 40.



demment en défaut dans les figures 40 et 41, et l'on en voit bien la raison : il y a des points où le trait de courbe vient affleurer l'arc des x sans le traverser. Pour conserver à la proposition énoncée sa généralité, on ne comptera pas ces points-là, ou bien on les comptera comme équivalents à un nombre pair de points qui seraient confondus, tandis qu'on comptera pour un nombre impair de points ceux où le trait de courbe traverse l'arc des x, soit de bas en haut, soit de haut en bas. Il sera alors permis de dire que l'équation $f(x) = 0$ a un

Fig. 41.



nombre impair de racines entre α et α', pourvu, toutefois, qu'elle en admette un nombre fini. Si la fonction $f(x)$ s'annulait une infinité de fois entre α et α', la proposition n'aurait plus de sens; d'ailleurs, la représentation graphique ne serait plus possible.

Le lecteur verra sans peine que, lorsque $f(x)$ est un polynome en x, les explications qu'on vient de donner concordent bien avec la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine. Le théorème énoncé est vrai en comptant chaque racine distincte comme équivalant à autant de racines qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Cette notion de l'ordre de multiplicité sera étendue plus tard à d'autres fonctions analogues aux polynomes, mais il n'y a pas lieu d'en donner une définition générale.

Je lui laisse le soin de traduire en langage cinématique ce que l'on vient d'expliquer sur une figure et de reconnaître de la même façon la vérité de la proposition que voici, qui doit être entendue comme la précédente :

Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, a'), si les nombres α, α' appartiennent à cet intervalle, et si les valeurs correspondantes $f(\alpha)$, $f(\alpha')$ de la fonction ont le même signe, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racines comprises entre α et α', ou bien en a un nombre pair.

Lorsqu'une fonction de x n'est pas continue pour une valeur x_0 de x, elle est dite *discontinue* pour cette valeur : Les fractions rationnelles nous ont fourni des exemples de discontinuités : celles-ci se présentaient pour des valeurs *spéciales* de la variable ; il en sera de même pour toutes les fonctions que nous étudierons ici ; *les discontinuités seront toujours exceptionnelles*. Toutefois, il importe de remarquer que les discontinuités que nous avons alors rencontrées étaient d'une nature particulière. Il convient, en raison de leur importance, de s'arrêter sur ces discontinuités spéciales, sur ces valeurs de la variable pour lesquelles on dit qu'une fonction devient infinie, qu'elle passe de $-\infty$ à $+\infty$, etc.

La fonction $\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$, par exemple, est définie pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x=1$ et pour $x=2$; on a expliqué ce qu'il fallait entendre quand on dit qu'elle devient infinie pour $x=1$, qu'elle passe de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque x passe par cette valeur, qu'elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers 2 soit par des valeurs plus petites, soit par des valeurs plus grandes que 2. Ces explications peuvent évidemment être transportées à d'autres fonctions.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (a, a') sauf pour la valeur x_0 ; supposons, en outre, qu'elle soit continue pour toutes les valeurs de x appartenant à cet intervalle, sauf pour $x=x_0$.

On dira que la fonction $f(x)$ est ou devient infinie pour $x=x_0$, si, quel que soit le nombre positif P, la valeur absolue de $f(x)$ dépasse P pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, a') qui sont suffisamment voisines de x_0 ; en d'autres termes, à chaque nombre positif P doit correspondre un nombre positif ε tel que l'on ait $|f(x)|>P$, pourvu que x appartienne à l'intervalle considéré et que l'on ait $|x-x_0|<\varepsilon$. Dans ces conditions, le rapport $\frac{1}{f(x)}$ est aussi voisin de 0 qu'on le veut, pourvu que x soit suffisamment voisin de x_0 ; c'est ce qu'on exprime en disant que ce rapport, qui n'est pas défini pour x_0, a pour limite 0 quand x tend vers 0 [1].

---

[1] On voit que le mot *limite* est pris ici dans un sens analogue mais non identique à celui qu'on lui donnait dans le Chapitre précédent : on considérait alors une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ou plutôt le $n^{\text{ième}}$ terme de cette suite, que l'on peut regarder comme une fonction de la variable n définie pour toutes les valeurs naturelles de cette variable ; c'est quand n grandissait indéfiniment, en ne prenant que de telles valeurs, que u_n s'approchait de sa limite. Ici x peut prendre toutes les valeurs possibles, et c'est lorsque x s'approche de 0, par valeurs quelconques, que $\frac{1}{f(x)}$ s'approche de la limite 0.

Si l'on adopte la définition précédente, il est clair que la fonction $f(x)$, que l'on suppose infinie pour $x = x_0$, finit, lorsque x est très voisin de x_0, par garder le même signe, pourvu que x reste soit plus petit que x_0, soit plus grand que x_0; en effet, si, en considérant deux valeurs α, α' très voisines de x_0 et toutes deux, par exemple, plus petites que x_0, la fonction $f(x)$ était négative pour $x = \alpha$ et positive pour $x = \alpha'$, elle s'annulerait (à cause de la continuité), pour une valeur de x comprise entre α et α', elle ne serait pas plus grande que P en valeur absolue; cela ne peut plus arriver dès qu'on a dépassé la valeur $x_0 - \varepsilon$ à partir de laquelle on a $|f(x)| > P$.

Ceci posé, il peut se faire que la fonction $f(x)$ soit négative pour $x < x_0$, positive pour $x > x_0$; elle passe alors de $-\infty$ à $+\infty$; elle peut être positive avant que x n'atteigne x_0, négative après : elle passe de $+\infty$ à $-\infty$. Elle peut être positive avant et après, négative avant et après; elle devient égale à $+\infty$ dans le premier cas, à $-\infty$ dans le second; les fonctions $\frac{1}{x}$, $\frac{-1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{-1}{x^2}$, discontinues pour $x = 0$, offrent des exemples de ces différents cas. Les figures 20, 21, 22, 23 montrent suffisamment comment se comporte le trait de courbe qui figure la fonction quand x est voisin de 0.

Il peut se faire que la valeur exceptionnelle de x pour laquelle une fonction devient infinie soit précisément une des bornes de l'intervalle dans lequel on considère cette fonction; par exemple, la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie dans l'intervalle $(-1, +1)$, sauf pour les bornes; elle est infinie pour ces bornes.

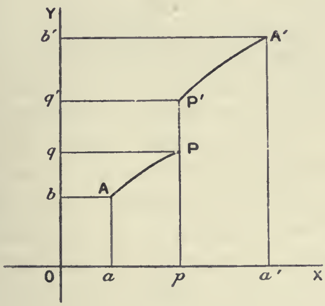
Considérons une fonction $f(x)$ qui soit définie et continue dans l'intervalle (a, a') quelque grand que soit a'. Il peut se faire que, x grandissant indéfiniment, $f(x)$ s'approche d'une valeur limite, ou grandisse indéfiniment, ou se comporte tout autrement; la définition de la limite est pareille à celle qu'on a donnée au n° 171, si ce n'est que, alors, on ne considérait que des valeurs naturelles de la variable n, et que l'on considère maintenant toutes les valeurs de x. On dira que $f(x)$ a une limite A pour $x = +\infty$, lorsque la différence entre $f(x)$ et A sera moindre en valeur absolue que tel nombre ε que l'on voudra, pourvu que x dépasse un nombre positif P convenablement choisi, d'après la valeur de ε. On définira de même la limite pour $x = -\infty$; par exemple, $\frac{1}{x}$ a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

On dira que la fonction $f(x)$ devient égale à $+\infty$ pour $x=+\infty$, si la valeur de la fonction $f(x)$ dépasse tel nombre positif P que l'on voudra, pourvu que x dépasse un nombre positif Q convenablement choisi (d'après P). On définira de même ce qu'il faut entendre quand on dit que $f(x)$ devient égal à $-\infty$ pour $x=+\infty$, à $+\infty$ ou à $-\infty$ pour $x=-\infty$.

Les polynomes ont fourni des exemples de ces diverses circonstances, et le lecteur se rappelle les graphiques correspondants.

Les seules discontinuités dont nous ayons jusqu'à présent des exemples correspondent à des valeurs de x pour lesquelles une fonction devienne infinie. Mais une fonction, tout en étant continue en général, peut offrir d'autres sortes de discontinuités; nous en rencontrerons ainsi qui sont inévitables; un graphique suffira aisément à en faire comprendre la nature.

Fig. 42.



Considérons une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, a') par l'arc de courbe AP lorsque x appartient à l'intervalle (a, p), par l'arc de courbe P′A′ quand x appartient à l'intervalle (p, a'). Désignons par q et q' les ordonnées des points P et P′.

Cette fonction $f(x)$ n'est vraiment définie par la figure que pour les valeurs de x autres que p; pour $x=p$, on ne sait pas si la valeur de la fonction est définie par l'arc AP (elle serait alors égale à q), ou par l'arc P′A′ (elle serait alors égale à q'). Mais, afin d'avoir une fonction qui soit complètement définie, on peut choisir arbitrairement l'une de ces valeurs ou même une autre. Convenons, par exemple, d'attribuer à la fonction $f(x)$, pour $x=p$, la valeur q; alors, pour des valeurs de x, un peu plus petites que p, la fonction est voisine de q, aussi voisine de q qu'on le veut, pourvu que x soit assez voisin de p; pour les valeurs de x un peu plus grandes que p, elle est voisine de q', aussi voisine de q' qu'on le veut pourvu que x soit suffisamment voisin de p. La discontinuité est manifeste; on dit quelquefois que la fonction passe brusquement, pour $x=p$, de la valeur q à la valeur q'. Toutefois, cette façon de parler, qui répond bien à l'aspect de la figure, n'est pas tout à fait correcte ou plutôt n'est pas conforme à la définition précédente, puisque, pour $x=p$, la fonction $f(x)$ *n'atteint* pas la valeur q'.

On peut dire que, lorsque x tend vers p par des valeurs inférieures ou égales à p, $f(x)$ tend vers la limite q, et que, lorsque x tend vers p par des valeurs supérieures à p, $f(x)$ tend vers la limite q'; mais, cette fois, il faut exclure les valeurs égales à p (1).

Bien entendu, il peut se présenter des discontinuités beaucoup plus compliquées; celles que nous avons considérées nous suffiront.

Enfin, il convient encore de rappeler une circonstance qui s'est présentée dans l'étude des fonctions rationnelles. Il peut très bien arriver qu'une fonction qui est, en général, définie et continue dans l'intervalle (a, a') ne soit pas définie pour une valeur exceptionnelle x_0 de cet intervalle, mais qu'on puisse la définir pour cette valeur sans qu'il y ait discontinuité. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la fonction $\frac{2x^2}{x}$, qui n'a pas de sens pour $x=0$, mais qui, pour toutes les autres valeurs de x, est égale à la fonction continue $2x$, en sorte que, si on lui attribue, pour $x=0$, la même valeur qu'à cette fonction $2x$, elle sera toujours continue. D'une façon générale, si la fonction $f(x)$ est définie et continue dans tout l'intervalle, sauf pour $x=x_0$, et s'il existe un nombre A dont $f(x)$ s'approche indéfiniment (2) quand x tend vers x_0 soit par des valeurs plus petites, soit

(1) Le lecteur voit que le mot *limite* est employé dans des sens différents, suivant les cas. Il est nécessaire, toutes les fois qu'on emploie le mot, de se rendre compte de son sens précis dans le cas où l'on a affaire.

(2) D'une façon précise, il faut entendre par là que la différence $f(x)-A$ est moindre en valeur absolue que tel nombre positif ε que l'on veut, pourvu que la différence $x-x_0$, sans être nulle, soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif ε' convenablement choisi (d'après ε). On dit alors aussi que $f(x)$ a pour limite A, quand x tend vers x_0 : la même expression, d'ailleurs, s'emploie aussi bien, et dans le même sens, quand la fonction $f(x)$ est continue pour $x=x_0$ et a pour valeur A; mais on n'a pas alors à exclure la valeur $x=x_0$.

par des valeurs plus grandes que x_0, on peut définir $f(x)$ comme étant égale à A pour $x = x_0$; elle devient alors une fonction continue dans tout l'intervalle, et l'on dit que A est la *vraie valeur* de $f(x)$ pour $x = x_0$.

L'expression de *vraie valeur* s'emploie aussi, par extension, quand il s'agit de la limite d'une fonction pour x infini.

Puisqu'une somme, un produit, un rapport varient très peu quand les termes de la somme, les facteurs du produit, le numérateur et le dénominateur du rapport varient très peu (note du n° 138), il est clair que, si les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont définies dans un intervalle (a, a'), et que, si elles sont continues pour une valeur x_0 appartenant à cet intervalle, il en sera de même des fonctions

$$f(x) + \varphi(x), \quad f(x)\varphi(x), \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)};$$

on doit toutefois, pour la dernière, supposer que $\varphi(x)$ ne s'annule pas pour $x = x_0$; si les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont continues dans tout l'intervalle (a, a'), il en sera de même des fonctions $f(x) + \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$ et du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, si $\varphi(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, a'),

De même, si l'on sait que, lorsque x s'approche de x_0, ou lorsque x grandit indéfiniment, les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ ont pour limites respectives des nombres A, B, il est clair que les fonctions $f(x) + \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ auront pour limites les nombres $A + B$, AB, $\frac{A}{B}$. Il faut toutefois supposer, dans le dernier cas, que B ne soit pas nul.

197. La notion de fonction et celle de continuité, s'étendent aisément au cas de plusieurs variables indépendantes; les polynomes à plusieurs variables nous ont déjà fourni des exemples.

Soient x, y deux lettres que l'on regarde comme susceptibles de prendre toutes les valeurs possibles; si, à chaque couple de valeurs numériques attribuées à ces variables, on fait correspondre une valeur de z, on dira que z est une fonction de x, y; c'est le cas d'un polynome en x, y. Une fonction de x, y peut, d'ailleurs, ne pas être définie pour tous les couples de valeurs de x, y; les mêmes raisons qui nous ont conduit à considérer, pour les fonctions d'une seule variable, des intervalles où doit rester cette variable, nous amènent à limiter le champ de variation des valeurs de x, y. On pourra se borner aux couples de ces valeurs qui, lorsque l'on considère x, y comme les coordonnées d'un point, sont figurés par des points situés à l'intérieur d'un certain contour et sur ce contour, par exemple à l'intérieur et sur la circonférence d'un cercle, à l'intérieur et sur le contour d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. Ces conditions s'expriment analytiquement d'une façon très simple : si x_0, y_0 sont les coordonnées du centre du cercle, et R son rayon, on ne considérera que les couples de valeurs de x, y qui vérifient l'inégalité

$$(1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leqq R^2;$$

si x_0, y_0 sont les coordonnées du centre du rectangle et $2a$, $2b$ les nombres positifs qui mesurent les longueurs de ses côtés, on ne considérera que les couples de valeurs de x, y qui vérifient les inégalités

$$(2) \qquad |x-x_0| \leqq a, \qquad |y-y_0| \leqq b.$$

Si la correspondance est établie entre chaque couple de valeurs x, y qui vérifient ces inégalités et la valeur numérique de z, z sera une fonction de x, y définie dans le cercle ou le rectangle. On comprend, dès lors, ce qu'il faut entendre quand on dit que la fonction est définie pour le point x_0, y_0 et aux environs de ce point; cela signifie qu'on peut regarder le point de coordonnées x_0, y_0 comme le centre d'un cercle ou d'un rectangle qui peut, d'ailleurs, être aussi petit que l'on veut, et dans lequel la fonction est définie.

Si une fonction $f(x, y)$ est définie pour le point x_0, y_0 et aux environs de ce point, on dira qu'elle est continue en ce point pour dire, en gros, que sa valeur change peu quand on remplace x, y par des valeurs respectivement voisines de x_0, y_0 et, d'une façon précise, que la différence $f(x, y)-f(x_0, y_0)$ est moindre en valeur absolue que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que les différences $x-x_0, y-y_0$ soient moindres en valeur absolue qu'un nombre positif ε' convenablement choisi; à chaque nombre positif ε doit correspondre un nombre positif ε'.

Si une fonction $f(x, y)$ est définie dans tout un cercle (et sur la circonférence), dans tout un rectangle (et sur le contour), on dira qu'elle est continue dans ce cercle ou ce rectangle si, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif ε' tel que l'on ait

$$(3) \qquad |f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

pourvu que les points de coordonnées x_1, y_1 et x_0, y_0 appartiennent au cercle ou à sa circonférence, au rectangle ou à son contour, et que l'on ait

$$(4) \qquad |x_1 - x_0| < \varepsilon', \qquad |y_1 - y_0| < \varepsilon'.$$

En adoptant ces définitions, on a des propositions analogues à celles qu'on a énoncées pour les fonctions d'une variable :

Si une fonction est définie, au sens qu'on vient de dire, dans un cercle ou un rectangle, et si elle est continue en chaque point du cercle et de sa circonférence, du rectangle et de son contour, elle est continue dans tout le cercle, ou tout le rectangle, avec la signification qu'on vient de donner à ces mots. Les valeurs qu'elle peut prendre sont alors comprises entre certaines bornes; elle atteint sa valeur maximum et sa valeur minimum. Voici, pour le maximum, le sens précis de ce théorème : si, par exemple, la fonction est définie et continue dans un cercle, y compris sa circonférence, il existe à l'intérieur du cercle, ou sur sa circonférence, un point de coordonnées x', y' tel que l'on ait

$$f(x', y') - f(x, y) \geqq 0$$

pour tous les couples de nombres x, y figurés par des points situés à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle. Je rappelle que cette proposition a été admise dans la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre (n° 112).

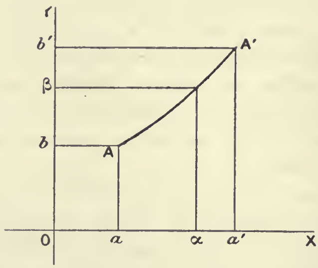
Le lecteur aperçoit, sans que j'insiste, comment on pourra définir une fonction d'un nombre quelconque de variables, et la continuité d'une telle fonction.

Sans doute les interprétations géométriques feront défaut; on ne pourra plus parler d'un cercle, d'un rectangle, etc., mais les inégalités (1), (2), (3), (4) peuvent évidemment être remplacées par des inégalités analogues, avec autant de variables qu'on voudra.

Je reviens aux fonctions d'une seule variable.

198. Fonctions croissantes, décroissantes. — Soit $y = f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, a') où je suppose $a < a'$, on dit qu'elle est croissante dans cet intervalle si, des deux valeurs de $f(x)$ qui correspondent à deux valeurs distinctes quelconques x_0, x_1 appartenant à cet intervalle, la plus grande correspond toujours à la plus grande valeur de x, si en d'autres termes la différence $f(x_1) - f(x_0)$ est toujours de même signe que $x_1 - x_0$, en sorte que le rapport $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est toujours positif, quand les nombres différents x_0, x_1 appartiennent à l'intervalle (a, a'). S'il en est ainsi, le trait AA' qui figure la courbe va en montant vers la droite; le point y de

Fig. 43.

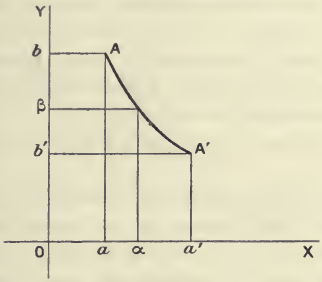


l'axe OY qui correspond au point x de l'axe OX va en montant quand le point x décrit le segment (a, a'); la plus petite valeur de la fonction est atteinte pour $x = a$, la plus grande pour $x = a'$; lorsque x croît de a à a', la fonction $f(x)$ croît de $b = f(a)$ à $b' = f(a')$ en passant par chaque valeur β comprise entre b et b', et en passant seulement une fois par cette valeur; quand x n'a pas atteint α, la valeur de $f(x)$ est inférieure à β; quand x a dépassé α, la valeur de $f(x)$ est supérieure à β.

La fonction $f(x)$, définie et continue dans l'intervalle (a, a'), est décroissante lorsque, quels que soient les nombres distincts x_0, x_1 appartenant à cet intervalle, le rapport $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est toujours négatif; le trait qui figure la fonction va en s'abaissant vers la droite, etc., le point y de l'axe OY descend quand x croît de a à a'; le maximum est atteint pour $x = a$, le minimum pour $x = a'$; la fonction passe une fois par chaque valeur comprise entre $b = f(a)$, $b' = f(a')$.

Lorsqu'on s'est occupé des polynomes ou des fractions rationnelles, on ne s'est pas occupé de la croissance ou de la décroissance de ces fonctions dans un intervalle, mais seulement pour une valeur spéciale de la variable.

Fig. 44.



La fonction $f(x)$ est croissante pour x_0 si le rapport $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est positif pour les valeurs de x_1 suffisamment voisines de x_0 et différentes de x_0; elle est décroissante pour x_0 si le rapport est négatif dans les mêmes conditions.

Il est clair que, si une fonction est croissante dans un intervalle au sens que l'on a dit, elle est croissante pour chaque valeur de x appartenant à cet intervalle; réciproquement, si elle est croissante pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle, elle est croissante dans tout l'intervalle. Cette réciproque, au point de vue logique, aurait besoin d'être démontrée (¹); le lecteur n'éprouve sans doute aucune difficulté à l'admettre.

Il serait bien naturel d'admettre aussi que, si une fonction continue dans l'intervalle (a, a') n'est pas constamment croissante, décroissante ou constante dans cet intervalle, on peut décomposer (a, a') en un nombre fini d'intervalles partiels (a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_p, a') tels que, dans chacun d'eux, la fonction soit ou croissante, ou décroissante, ou constante. En fait, il n'en est pas ainsi : cette possibilité n'est pas logiquement impliquée par la définition de la continuité, et le lecteur

(¹) *Intr.*, n° 167.

doit en être averti; on a donné des exemples de fonctions qui satisfont à la définition de la continuité et qui cependant ne sont, pour aucune valeur de la variable, ni croissantes, ni décroissantes, qui ne sont pas non plus constantes dans un intervalle fini [1].

De telles fonctions échappent à la représentation graphique ou cinématique que l'on a définies plus haut; nous ne pouvons imaginer ni une courbe dont l'ordonnée n'aille pas en croissant ou en décroissant, ni un mouvement rectiligne dans lequel on ne puisse pas dire, à aucun moment, que le mobile avance ou recule. Elles n'interviendront d'ailleurs pas dans la suite de ce livre.

Malgré leur évidence, il n'est pas inutile de résumer les remarques suivantes :

Si A est une constante positive, les fonctions $f(x)$ et $Af(x)$ varient dans le même sens : si la première est croissante ou décroissante dans un intervalle, il en est de même de la seconde. Au contraire, si A est une constante négative, les fonctions $f(x)$ et $Af(x)$ varient en sens contraire; si l'une est croissante dans un intervalle, l'autre est décroissante. Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont toutes les deux croissantes, ou toutes les deux décroissantes, dans un même intervalle, la fonction $f(x)+\varphi(x)$ est croissante, ou décroissante, dans cet intervalle : il en est de même du produit $f(x)\varphi(x)$, si dans cet intervalle les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ restent positives; quand elles sont toutes deux négatives, le produit $f(x)\varphi(x)$ est au contraire décroissant si les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont croissantes, croissant si les deux fonctions sont décroissantes. On reconnaît de même comment varie la différence $f(x)-\varphi(x)$ quand les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ varient en sens contraire. Si la fonction $f(x)$ est croissante dans un intervalle et ne s'annule pas dans cet intervalle, la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est décroissante dans cet intervalle; si la fonction $f(x)$ est décroissante et ne s'annule pas, la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est croissante, etc.

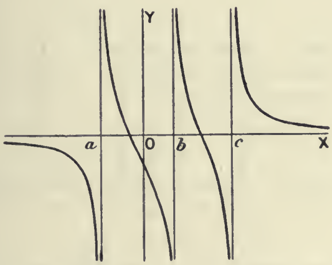
Pour donner une application de ces remarques si simples, considérons la fonction

$$y=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-a}+\ldots+\frac{L}{x-l},$$

(1) *Intr.*, n° 237.

où je suppose que les nombres a, b, c, ..., l soient distincts, et les nombres A, B, C, ..., L positifs. Chacun des termes dont la fonction est la somme est une fonction décroissante de x dans tout intervalle où elle est continue; y est donc une fonction décroissante de x, dans tout intervalle auquel n'appartient aucun des nombres a, b, c, ..., l. D'autre part, quand x traverse en croissant l'une des valeurs a, b, ..., l, pour lesquelles la fonction est discontinue, il est clair que la fonction passe de $-\infty$ à $+\infty$, comme la fraction qui devient infinie; les autres fractions n'influent pas. Enfin, pour x très grand en valeur absolue, chacune des fractions est très voisine de 0, négative si x est négatif, positive si x est positif. Si donc on suppose $a < b < \ldots < l$, on voit que, x croissant de $-\infty$ à a, y décroît de 0 à $-\infty$; pour $x = a$, y passe de $-\infty$ à $+\infty$; quand x croît de a à b, y décroît de $+\infty$ à $-\infty$; pour $x = b$, y passe de $-\infty$ à $+\infty$; quand x croît de b à c, y décroît de $+\infty$ à $-\infty$, etc.; quand x croît de l à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à 0; la forme de la courbe qui représente la fonction est évidente; cette courbe est asymptote à l'axe des x, au-dessous pour la partie négative, au-dessus pour la partie positive; elle est asymptote aussi à chacune des parallèles à l'axe des y menées par les points a, b, ..., l de l'axe des x : le schéma ci-dessous indique suffisamment cette forme.

Fig. 45.



Si l'on se donne une valeur quelconque P, autre que 0, la fonction considérée atteindra cette valeur une fois dans chaque intervalle (a, b), (b, c), ..., (k, l) et une fois seulement; elle atteindra de plus cette valeur pour une valeur de x plus petite que a, si P est négatif, pour une valeur de x plus grande que l si P est positif; en d'autres termes, s'il y a r nombres $a, b, \ldots, l$, l'équation

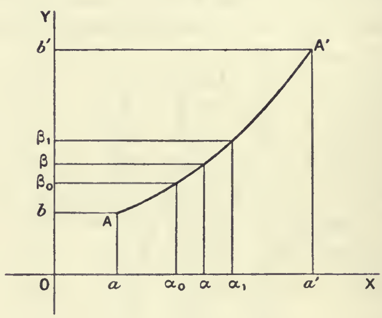
$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}=P$$

aura r racines réelles; on reconnaît de suite, en chassant les dénominateurs, que cette équation est de degré r; elle a donc toutes ses racines réelles et distinctes, distribuées comme on l'a expliqué plus haut.

199. **Fonctions inverses.** — Une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, a') et croissante, ou décroissante, dans tout cet intervalle, offre ceci de précieux que l'équation $y=f(x)$ permet de définir aussi bien x comme fonction de y que y comme fonction de x. Je raisonnerai dans le cas où la fonction est croissante et où l'on a $a<a'$.

On a vu qu'à chaque valeur β appartenant à l'intervalle (b, b') dont les bornes sont les nombres $b=f(a)$, $b'=f(a')$, correspond un nombre α, et un seul, appartenant à l'intervalle (a, a') tel que l'on ait

Fig. 46.



$\beta=f(\alpha)$. Regardons comme se correspondant deux nombres y et x appartenant l'un à l'intervalle (b, b'), l'autre à l'intervalle (a, a') et tels que l'on ait $y=f(x)$; le trait de courbe AA' rend la correspondance très claire : si l'on se donne $x=\alpha$, la valeur correspondante de y s'obtient en menant jusqu'à la courbe une parallèle à OY par le point α de l'axe des x, et en projetant le point d'intersection sur l'axe des y; si l'on se donne $y=\beta$, on trouve la valeur correspondante de x en menant jusqu'à la courbe une parallèle à OX par le point β de l'axe des y et en projetant le point d'intersection sur l'axe des x. Quand x croît de a à a', le nombre correspondant y croît de b à b'; quand y croît de b à b', x croît de a à a'.

Cette correspondance définit aussi bien, ainsi qu'on l'a annoncé, y comme fonction de x, dans l'intervalle (a, a') et x comme fonction de y, dans l'intervalle (b, b'); je désignerai par $F(y)$ cette dernière fonction. Chaque couple de valeurs correspondantes x, y vérifie les deux équations $y = f(x)$, $x = F(y)$, qu'on peut regarder comme équivalentes, étant entendu que, dans la première, x doit appartenir à l'intervalle (a, a'), que, dans la seconde, y doit appartenir à l'intervalle (b, b'). Si, dans $f(x)$, on remplace x par $F(y)$, le résultat est toujours y, si, dans $F(y)$, on remplace y par $f(x)$, le résultat est toujours x.

Des deux fonctions $f(x)$, $F(y)$, chacune est dite *inverse* de l'autre.

On a déjà fait observer que la fonction $F(y)$, dans l'intervalle (b, b') où elle est définie, est croissante; on voit bien sur la figure qu'elle est continue. Il est d'ailleurs aisé de constater qu'elle satisfait, pour une valeur quelconque β de y, à la définition de la continuité.

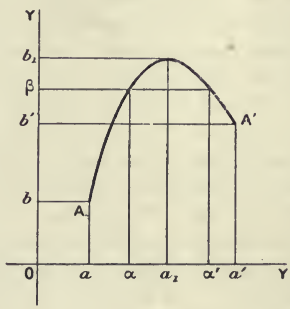
Je supposerai β compris entre b et b'; la modification qu'il y aurait lieu de faire à la démonstration si l'on avait $\beta = b$ ou $\beta = b'$ est insignifiante. Afin d'établir la continuité de la fonction $F(y)$ pour $y = \beta$, il faut prouver que, quelque petit que soit le nombre ε, on a $|F(y) - F(\beta)| < \varepsilon$, pourvu que la différence $y - \beta$ soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif ε' convenablement choisi. Si x est la valeur correspondant à y, $F(y) - F(\beta)$ est la même chose que $x - \alpha$; cette dernière différence sera moindre en valeur absolue que ε, si le point x, de l'axe OX, est entre les deux points α_0, α_1 de cet axe, situés à une distance ε de α; soient β_0, β_1 les points correspondants sur OY; si y est représenté par un point de l'axe OY situé entre β_0 et β_1, le point correspondant x de l'axe OX sera sûrement compris entre les deux points α_0, α_1; il suffira donc de prendre pour ε' la plus petite des distances du point β aux points β_0, β_1, et d'assujettir $y - \beta$ à être moindre que ε' en valeur absolue : on sera sûr que $x - \alpha$, ou $F(y) - F(\beta)$, est moindre en valeur absolue que ε.

De la façon dont varient ensemble les variables x et y, il résulte que, si x ou $F(y)$ tend vers α, y ou $f(x)$ tend vers β; que, si y ou $f(x)$ tend vers β, x ou $F(y)$ tend vers α.

De même, si la fonction $f(x)$ est continue et décroissante dans l'intervalle (a, a'), l'équation $y = f(x)$ définit, sans ambiguïté, x comme une fonction de y pour les valeurs de y comprises entre $f(a')$ et $f(a)$. Cette fonction $F(y)$, inverse de la fonction $f(x)$, est continue et décroissante; ses valeurs appartiennent toutes à l'intervalle (a, a').

Au contraire, si la fonction $f(x)$, que je suppose toujours continue dans l'intervalle (a, a'), est tantôt croissante, tantôt décroissante dans cet intervalle, si le trait de courbe qui la figure va tantôt en montant, tantôt en descendant, en sorte que les parallèles à l'axe OX puissent le rencontrer en plusieurs points qui se projettent sur l'arc OX entre les points a et a' de cet axe, ni ce trait de courbe, ni l'équation $y = f(x)$, jointe à la condition que x soit compris entre a et a', ne suffiront à définir sans ambiguïté, pour les valeurs

Fig. 47.



de y appartenant à l'intervalle borné par la plus petite et la plus grande des valeurs que prend $f(x)$, une fonction continue $F(y)$, qui puisse être regardée comme la fonction inverse de $f(x)$, en ce sens que $f(x)$, quand on y remplace x par $F(y)$, se réduise à y.

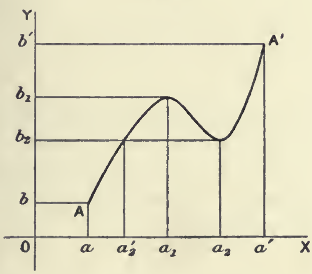
Considérons, par exemple, la fonction $f(x)$ figurée par le trait de courbe ci-dessus (*fig.* 47); quand x croît de a à a_1, y croît de b à b_1; quand x croît de a_1 à a', y décroît de b_1 à b'; quand x croît de a à a', y passe deux fois par une valeur telle que β, représentée, sur OY, par un point situé entre b' et b_1; il y a deux valeurs α, α' de x comprises, l'une entre a et a_1, l'autre entre a_1 et a', qui font acquérir à $f(x)$ la valeur β; si l'on veut qu'il ne corresponde qu'une seule valeur de x à chaque valeur de y appartenant à l'intervalle (b, b'), et que la correspondance soit continue, il est nécessaire de choisir toujours comme valeur de x correspondant à y compris entre b et b', la valeur comprise entre a et a_1, on aura ainsi défini, pour les valeurs de y appartenant à l'intervalle (b, b_1), une fonction continue et croissante $F(y)$ qui satisfera à la condition imposée. Toutefois, si l'on veut dire encore que les équations

$$y = f(x), \qquad x = F(y)$$

sont équivalentes, il ne faut plus considérer les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, a'), mais seulement celles qui appartiennent à l'intervalle (a, a_1), auxquelles correspondent les valeurs de y qui appartiennent à l'intervalle (b, b_1).

Il est d'ailleurs aisé d'imaginer des traits de courbe tels qu'il soit impossible de définir, dans tout l'intervalle (b, b'), une fonction continue $F(y)$, inverse de la fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a, a') : tel serait le cas de la figure 48, sur laquelle je crois inutile

Fig. 48.



d'entrer dans plus d'explications. Mais, en fractionnant l'intervalle (a, a') en trois intervalles partiels (a, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a'), auxquels on fera correspondre les intervalles (b, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b'), on pourra définir trois fonctions continues, inverses de $f(x)$.

Enfin, il importe de se rappeler que le nom de la variable n'importe pas; on dira que $F(x)$ est la fonction inverse de la fonction $f(x)$, pour dire que si, dans cette dernière fonction, on remplace x par $F(x)$, le résultat obtenu n'est autre chose que x.

On donnera plus loin divers exemples de fonctions inverses : un premier exemple simple est fourni par la définition de la fonction x^m pour m rationnel.

Tout d'abord, lorsque m est un nombre naturel, il est clair que la fonction x^m est continue et croissante dans l'intervalle $(0, A)$, quel que soit le nombre positif A; elle croît d'ailleurs de o à $+\infty$ quand x croît de o à $+\infty$. L'équation $y = x^m$, où x et y sont seulement assujettis à être positifs, définit aussi bien x comme fonction de y que y comme fonction de x : elle équivaut à l'équation $x = \sqrt[m]{y}$; la fonction $\sqrt[m]{y}$ est la fonction inverse de la fonction x^m : elle est définie, continue et croissante dans tout l'intervalle $(0, B)$ où B est un nombre positif; elle est égale à $+\infty$ pour $y = +\infty$.

Comme le produit de deux ou de plusieurs fonctions continues est une fonction continue, il est clair que, si p et q sont des nombres naturels, la fonction $(\sqrt[q]{x})^p = x^{\frac{p}{q}}$, qui est le produit de p fonctions égales à $\sqrt[q]{x}$, sera continue dans tout intervalle $(0, A)$ où A est un nombre positif. La fonction

$$x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$$

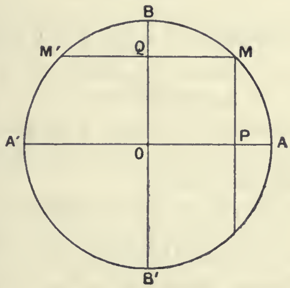
sera une fonction continue dans tout intervalle (a, a') dont les bornes sont des nombres positifs; elle est infinie pour $x = 0$. La continuité de la fonction x^m, pour m rationnel, est ainsi établie, dans tout intervalle à bornes positives. On verra plus tard que cette continuité subsiste quand m est irrationnel.

§ 2. — DÉFINITION DE DIVERSES FONCTIONS.

200. Fonctions circulaires inverses. — Le lecteur n'aura aucune peine à construire les courbes qui représentent les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, et à retrouver sur ces courbes les définitions des fonctions inverses, que je préfère déduire de la définition même de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$.

Figurons le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1; soit A l'origine des arcs, B le point dont l'abscisse circulaire est $+\frac{\pi}{2}$, en sorte que le sens positif, sur la circonférence, est le sens de A vers B; OA et OB sont les directions positives sur les axes des cosinus et des sinus (*fig.* 49).

Fig. 49.



Si l'on pose $x = \sin\alpha$, on sait que, lorsqu'on se donne le nombre x appartenant à l'intervalle $(-1, 1)$, il y a une infinité de valeurs α qui vérifient cette équation, à savoir tous les arcs ayant leur origine en A et dont on obtient l'extrémité par la construction suivante : sur l'axe des sinus, on marque le point Q tel que l'équivalent algébrique du vecteur OQ soit x et, par le point Q, on mène à l'axe OA une parallèle qui rencontre le cercle trigonométrique en deux points M, M' : ils sont les extrémités cherchées; si l'on veut définir α en fonction de x, au moyen de l'équation $x = \sin\alpha$, il est nécessaire de choisir un arc ayant son origine en A et son extrémité en M ou en M' : on lui attribuera d'abord pour extrémité le point M dont l'abscisse est positive, et l'on choisira parmi les arcs qui ont leur origine en A et leur extrémité en M celui qui est le plus petit en valeur absolue : tout ceci revient à dire qu'on choisira pour α celle des solutions de l'équation (en α) $x = \sin\alpha$ qui appartient à l'intervalle

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

on la représente par arc $\sin x$ (arc sinus x ou, plus explicitement, arc dont le sinus est x). Toutes les solutions de l'équation sont comprises dans l'une ou l'autre des formules

$$2k\pi + \text{arc}\sin x, \quad (2k+1)\pi - \text{arc}\sin x,$$

où k est un nombre entier.

La correspondance ainsi définie entre α et x reliés par l'équation

$$x = \sin\alpha$$

et appartenant, α à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et x à l'intervalle $(-1, 1)$, apparaît nettement au lecteur, qui doit voir le point M décrire le demi-cercle B′AB, en montant de B′ vers B, en même temps que le point Q décrit en montant le diamètre B′B; que arc $\sin x$ soit une fonction continue et croissante de x quand x croît de -1 à $+1$, c'est ce que ce mouvement rend visible.

Au reste, on n'a fait qu'appliquer la méthode du n° 198 : quand α croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, la fonction continue $\sin\alpha$ croît de -1 à $+1$, en prenant ainsi toutes les valeurs possibles de -1 à $+1$; donc, inversement, l'équation $x = \sin\alpha$, quand on assujettit α à appartenir à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, définit α comme une fonction continue et croissante de x, dans l'intervalle $(-1, 1)$: c'est cette fonction qu'on représente par le symbole arc $\sin x$.

On a arc $\sin(\sin x) = \pi$, pour x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, puis

$$\text{arc}\sin 0 = 0, \qquad \text{arc}\sin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad \text{arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction arc $\sin x$ est *impaire,* c'est-à-dire qu'elle change de signe sans changer de valeur absolue quand on y remplace x par $-x$.

Lorsque α croît de 0 à π, $\cos\alpha$ décroît de 1 à -1 et prend toutes les valeurs possibles de 1 à -1; pour définir α comme fonction de x dans l'intervalle $(-1, 1)$, on choisira la valeur α, comprise entre 0 et π qui satisfait à l'équation (en α) $x = \cos\alpha$; cette racine se représente par arc $\cos x$ (arc cosinus x ou arc dont le cosinus est x). La fonction arc $\cos x$ est définie et continue pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-1, 1)$; elle décroît de π à 0, quand x croît de -1 à 1; on a $\text{arc}\cos(\cos x) = x$, pour x compris entre 0 et π. Je laisse au lecteur le soin d'établir les égalités

$$\begin{aligned} \text{arc}\cos x + \text{arc}\cos(-x) &= \pi, \\ \text{arc}\sin x + \text{arc}\cos x &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le lecteur doit avoir sous les yeux la construction géométrique de $\text{arc}\cos x$, comme celle de $\text{arc}\sin x$. Il me paraît inutile d'y insister. Toutes les solutions de l'équation (en α) $x = \cos\alpha$ sont comprises dans la formule

$$2k\pi \pm \text{arc}\cos x,$$

où k est un nombre entier.

Lorsque l'extrémité M de l'arc α, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, décrit en montant le demi-cercle B'AB, on voit le point T extrémité du vecteur AT, dont l'équivalent algébrique est $\text{tang}\, x$, décrire l'axe des tangentes de $-\infty$ à $+\infty$; la correspondance entre les valeurs de x et de α liées par la relation $x = \text{tang}\,\alpha$, apparaît nettement quand on assujettit x à être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; la valeur de α qui correspond ainsi à x se représente par le symbole $\text{arc}\,\text{tang}\, x$ (arc tangente x ou arc dont la tangente est x) : la fonction $\text{arc}\,\text{tang}\, x$ est définie et continue pour toutes les valeurs de x; elle croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Toutes les solutions de l'équation (en α) $x = \text{tang}\,\alpha$ sont données par la formule $k\pi + \text{arc}\,\text{tang}\, x$. La fonction $\text{arc}\,\text{tang}\, x$ est impaire; on a

$$\text{arc}\,\text{tang}\, 0 = 0, \qquad \text{arc}\,\text{tang}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \qquad \text{arc}\,\text{tang}\, 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{arc}\,\text{tang}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Le choix que l'on a fait pour définir les fonctions $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$, $\text{arc}\,\text{tang}\, x$ est, dans une certaine mesure, arbitraire. On pourrait par exemple ajouter π à $\text{arc}\,\text{tang}\, x$; on aurait encore une fonction continue. On s'est laissé guider par des raisons de simplicité évidentes, et l'on a voulu en particulier que les fonctions continues $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\,\text{tang}\, x$ s'annulassent pour $x = 0$. Cette condition et la condition de continuité fixent les définitions, comme il est aisé de le voir.

Il paraîtrait peut-être naturel au lecteur de définir la fonction $\text{arc}\,\text{tang}\, x$ comme devant être comprise entre 0 et π; il reconnaîtra sans peine que cette définition est inacceptable : pour x un peu plus petit que o, la fonction ainsi définie serait un peu plus petite que π ; pour x un peu plus grand que o, elle serait un peu plus grande que o ; la discontinuité est évidente ; pour $x = 0$, enfin, il y aurait deux valeurs possibles, o ou π, la fonction ne serait même pas définie. Le lecteur pourra construire la courbe qui représenterait la fonction dont on vient de parler, et se rendre compte, sur sa forme, de la discontinuité et de l'ambiguïté pour $x = 0$. La discontinuité pour $x = 0$ de la fonction $\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}$, assujettie, bien entendu, à être comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, est aisée à reconnaître ; pour x négatif voisin de o, la fonction est voisine de $-\frac{\pi}{2}$; pour x positif voisin de o, elle est voisine de $+\frac{\pi}{2}$; pour $x = 0$, elle n'a pas de sens. Je laisse au lecteur le soin d'établir la relation

$$\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2},$$

où il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que x est positif ou négatif.

Les fonctions $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, quand on se donne x, se calculent aisément au moyen des tables trigonométriques. Pour $\arcsin x$, par exemple, on cherche le logarithme de $|x|$, puis l'arc correspondant, dans la table, que l'on trouvera exprimé en grades et en fractions décimales de grade ; le résultat devra être multiplié [1] par $\frac{\pi}{200}$, et affecté du signe + ou — suivant que x est positif ou négatif.

On aura à utiliser ultérieurement une correspondance entre x et y qui définit aussi bien y comme fonction de x ou x comme fonction de y, et que l'on peut caractériser comme il suit :

Deux valeurs correspondantes de x et de y doivent vérifier l'équation

$$\operatorname{tang} y = n \operatorname{tang} x,$$

où n est un nombre positif donné ; lorsque x est un multiple entier

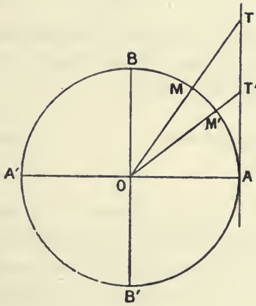
---

[1] La plupart des tables de logarithmes contiennent des tables de multiples de $\frac{\pi}{2}$, qui rendent la multiplication facile.

de $\frac{\pi}{2}$, y lui est égal. Les extrémités des arcs x et y, dont l'origine est en A, tombent toujours dans le même quadrant; la différence entre les arcs y et x est toujours moindre en valeur absolue que $\frac{\pi}{2}$.

Il est très aisé de suivre sur la figure la variation de y avec celle de x. Si l'extrémité de l'arc x est en M, la perspective du point M sur

Fig. 50.



l'axe des tangentes est en T; l'équivalent algébrique du vecteur AT est $\tang x$; du point T, on déduit le point T' tel que l'on ait $AT' = n\,AT$; n étant positif, les points T et T' sont du même côté de A. On mène le diamètre qui passe par T'; on choisit l'extrémité M' de ce diamètre qui se trouve dans le même quadrant que le point M et l'on choisit, pour l'arc y, celui des arcs ayant M' pour extrémité qui diffère de x d'une quantité moindre que $\frac{\pi}{2}$.

Lorsque x est égal à o, les points M, T, T', M' sont en A, $y = 0$; quand x croît, les points M et M' se séparent; il est clair que y croît avec x, et croît de o à $\frac{\pi}{2}$ quand x croît de o à $\frac{\pi}{2}$; quand M est en B, il en est de même de M'; les points T, T' sont à l'infini; quand x est un peu plus grand que $\frac{\pi}{2}$, M est un peu au delà de B. Les points T, T' sont très loin, en bas, sur l'axe des tangentes, le point M' est voisin de B et de M, y est un peu plus grand que $\frac{\pi}{2}$; quand x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, y croît aussi de $\frac{\pi}{2}$ à π; pour $x = \pi$, les points M, M' sont confondus en A', les points T, T' en A; le lecteur continuera de lui-même cette description; il l'étendra sans peine aux valeurs négatives de x et reconnaîtra que, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction y de x ainsi définie est continue et croissante, elle croît aussi de $-\infty$ à $+\infty$. Il pourra aussi construire, en coordonnées rectangulaires, la courbe qui la figure.

Je représenterai cette fonction par $\text{Arc tang}(n \tang x)$; c'est certainement un des arcs dont la tangente est $n \tang x$, mais ce n'est pas celui $\left(\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } +\frac{\pi}{2}\right)$ que l'on a défini comme étant $\text{arc tang}(n \tang x)$, c'est pourquoi j'ai employé un autre symbole.

La fonction $\text{Arc tang}(n \tang x)$ est impaire.

L'une des deux égalités

$$y = \text{Arc tang}(n \operatorname{tang} x), \qquad x = \text{Arc tang}\left(\frac{1}{n} \operatorname{tang} y\right)$$

entraîne l'autre.

Si x et x' sont deux arcs qui diffèrent d'un multiple de π, en sorte que leurs tangentes soient égales, les deux quantités $\text{Arc tang}(n \operatorname{tang} x)$ et $\text{Arc tang}(n \operatorname{tang} x')$ ne pourront différer que d'un multiple de π, puisque leurs tangentes, à savoir $\operatorname{tang}(n \operatorname{tang} x)$ et $\operatorname{tang}(n \operatorname{tang} x')$ sont égales. On a, quel que soit le nombre entier k,

$$\text{Arc tang}[n \operatorname{tang}(k\pi + x)] = k\pi + \text{Arc tang}(n \operatorname{tang} x):$$

en effet la différence $\text{Arc tang}[n \operatorname{tang}(k\pi + x)] - \text{Arc tang}(n \operatorname{tang} x)$ est une fonction continue de x; cette différence, d'autre part, est un multiple de π, qui ne peut varier que brusquement d'un multiple de π; elle est donc constante : or, pour x égal à o, elle est égale à $k\pi$.

Les deux expressions $\text{Arc tang}\left[n \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$ et

$$\text{arc tang}\left[n \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \text{arc tang}\left(\frac{n}{\operatorname{tang} x}\right) = \pm\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\left(\frac{\operatorname{tang} x}{n}\right)$$

ne peuvent différer que d'un multiple de π; il en résulte que la fonction *continue*

$$\text{Arc tang}\left[n \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \text{Arc tang}\left(\frac{\operatorname{tang} x}{n}\right)$$

est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$; elle est donc constante et égale à la valeur $\frac{\pi}{2}$ qu'elle prend pour $x = 0$. On conclut de là, en changeant x en $-x$, l'égalité

$$\text{Arc tang}\left[n \text{ tang}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] - \text{Arc tang}\left(\frac{\text{tang}\, x}{n}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

201. **Fonction exponentielle. Logarithmes.** — Rappelons brièvement la définition de a^x où a est un nombre positif, que je supposerai plus grand que 1.

Lorsque x est un nombre naturel, a^x est le produit de x facteurs égaux à a; en étendant un peu le sens du mot *fonction* (1), on peut dire que a^x est une fonction de x définie dans l'ensemble des nombres naturels.

Les formules

$$a^0 = 1, \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \qquad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha},$$

où p et q désignent deux nombres naturels, et α un nombre rationnel quelconque, fournissent ensuite la signification de a^x quand x est un nombre rationnel quelconque; à ce moment, il est permis de dire que a^x est une fonction définie dans l'ensemble des nombres rationnels.

Enfin quand x est un nombre irrationnel, a^x est défini au moyen d'une coupure (nos 25, 26). Dès lors a^x est une fonction de x définie dans tout intervalle; c'est la *fonction exponentielle*.

Cette fonction, positive pour toute valeur de x, est continue dans tout intervalle; on a en effet montré à la fin du n° 25 que la différence $a^\alpha - a^{\alpha'}$ est plus petite en valeur absolue que le nombre positif ε, pourvu que α, α' soient plus petits en valeur absolue qu'un nombre positif fixe r et que la différence $\alpha - \alpha'$ soit moindre, en valeur absolue, qu'un nombre positif ε' qu'on a appris à calculer, au moyen de ε, et l'on a fait observer, à la fin du n° 26, que ce résultat subsistait quand même α, α' étaient irrationnels; on a observé aussi que l'inégalité $\alpha' > \alpha$ entraînait $a^{\alpha'} > a^\alpha$; cela revient à dire que la fonction a^x est croissante.

Si $a = \frac{1}{b}$ était un nombre positif plus petit que 1, on aurait $a^x = \frac{1}{b^x}$,

(1) *Intr.*, n° 148.

b étant plus grand que 1 ; $\frac{1}{b^x}$ est une fonction continue de x, puisque b^x est une fonction continue, toujours positive ; a^x serait encore une fonction continue ; on voit de suite qu'elle est décroissante. Après cette remarque, je continue de supposer $a > 1$. La fonction a^x jouit de la propriété fondamentale qu'exprime l'égalité

$$a^x a^{x'} = a^{x+x'}.$$

On a encore

$$(a^x)^{x'} = a^{xx'}.$$

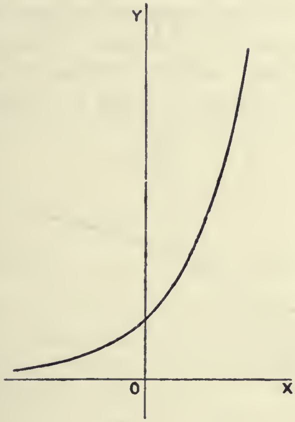
Cette égalité, il est vrai, n'a été établie que pour les valeurs rationnelles de x, x' ; mais, une fois la notion de la continuité acquise, son extension est immédiate. Posons, en effet, $a^x = u$, et regardons pour un instant x' comme un nombre rationnel fixe ; le premier membre de l'égalité à démontrer est $u^{x'}$. C'est, comme on a vu (n° 199), une fonction continue de u, pourvu que cette variable soit positive ; or cette variable est essentiellement positive, puisqu'elle représente a^x. A une petite variation de u correspond une petite variation de $u^{x'}$; or, en vertu de la continuité de a^x, à une petite variation de x correspond une petite variation de u, donc de $u^{x'}$; d'un autre côté, à une petite variation de x correspond une petite variation du produit xx', de l'exposant de $a^{xx'}$, et par conséquent de $a^{xx'}$; si donc x' est un nombre rationnel fixe, les deux membres de l'égalité à démontrer sont des fonctions continues de x. Or ils sont égaux pour toutes les valeurs rationnelles de x, ils sont donc toujours égaux, puisque, pour une valeur irrationnelle de x, ils diffèrent, l'un et l'autre, aussi peu qu'on le veut de nombres que l'on sait être égaux. On a donc $u^{x'} = a^{xx'}$ pour n'importe quelle valeur rationnelle de x'. Si maintenant on laisse fixe le nombre x et par conséquent aussi le nombre positif u, on voit de suite que les deux fonctions (de x') $u^{x'}$, et $a^{xx'}$ sont des fonctions continues de x' ; elles sont égales pour toutes les valeurs rationnelles de x', elles sont toujours égales.

La fonction a^x, toujours positive, continue dans tout intervalle, croît de 1 à $+\infty$ quand x croît de 0 à $+\infty$. Sa variation, pour x négatif, résulte de la formule

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}};$$

la fonction a^x tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$; on peut dire qu'elle croît de o à 1 quand x croît de $-\infty$ à o; la fonction $y = a^x$ est ainsi représentée par la courbe de la figure 51; cette courbe est asymptote

Fig. 51.



à l'axe des x du côté des x négatifs, coupe l'axe des y au point dont l'ordonnée est 1, et monte continuellement vers la droite.

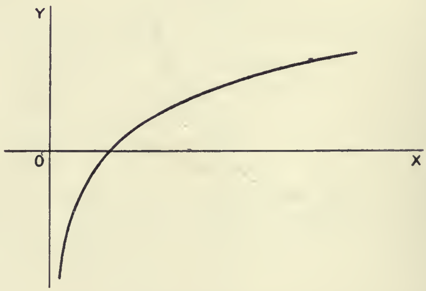
202. La courbe ainsi tracée, ou l'équation $y = a^x$, définit aussi bien x comme fonction de y, pourvu que y soit positif, que y comme fonction de x; la fonction de y ainsi définie, la fonction inverse de a^x, s'appelle le *logarithme de y dans la base a*, et se désigne par $\log_a y$. D'après cela, $\log_a y$ n'est défini que pour les valeurs positives de y; la fonction (de y) $\log_a y$ est continue et croissante dans tout intervalle dont les bornes sont positives; elle est négative quand y est plus petit que 1, nulle pour $y = 1$, positive pour $y > 1$; elle croît de $-\infty$ à o quand y croît de o à 1, de o à $+\infty$ quand y croît de 1 à $+\infty$.

Le lecteur n'a qu'à échanger les lettres y et x pour avoir la définition et les propriétés de la fonction $\log_a x$, définie comme étant l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre positif a pour avoir x, ou, si l'on veut, par l'équation identique

$$a^{\log_a x} = x.$$

La courbe définie par l'équation $y = \log_a x$ ou par l'équation équivalente $x = a^y$ n'est autre que la courbe qui serait définie par l'équation $y = a^x$, si l'on remplaçait l'axe des x par l'axe des y et l'axe des y par l'axe des x, ou, si l'on veut conserver les axes dans la position habituelle, que la courbe symétrique de la courbe définie par l'équation $y = a^x$, par rapport à la bissectrice de l'angle des coordonnées positives; la courbe qui représente la fonction $\log_a x$ a été figurée à part (*fig.* 52). Elle coupe l'axe des x au point d'abscisse 1; en

Fig. 52.



d'autres termes, quel que soit a, le logarithme de 1 est toujours 0. A la propriété fondamentale de la fonction exponentielle

$$a^y \times a^{y'} = a^{y+y'}$$

correspond la propriété des logarithmes, qu'indique l'égalité

$$\log_a(xx') = \log_a x + \log_a x',$$

où x, x' sont des nombres positifs quelconques : si en effet y et y' sont respectivement les logarithmes des nombres x, x' on a

$$x = a^y, \qquad x' = a^{y'}, \qquad xx' = a^y . a^{y'} = a^{y+y'},$$

et la dernière égalité indique bien que le logarithme de xx' est la somme $y + y'$ des logarithmes de x et de x'. De là, ou de l'égalité

$$\frac{a^y}{a^{y'}} = a^{y-y'}$$

résulte l'égalité

$$\log_a \frac{x}{x'} = \log_a x - \log_a x'.$$

Enfin on a, quel que soit le nombre positif b, et quel que soit le nombre x,

$$\log_a b^x = x \log_a b\,;$$

en effet, si l'on désigne par x' le logarithme du nombre positif b, en sorte que l'on ait

$$a^{x'} = b,$$

on aura

$$b^x = (a^{x'})^x = a^{x'x}\,;$$

et cette égalité montre que $x'x$ ou $x \log_a b$ est le logarithme de b^x.

203. A chaque nombre positif a correspond un système de logarithmes dont a s'appelle la *base*; c'est le nombre qui, dans ce système, a pour logarithme l'unité.

Deux cas sont particulièrement à considérer : celui où a est égal à 10, celui où a est égal au nombre e défini au nº 192. Dans le premier cas, les logarithmes sont dits *vulgaires;* dans le second cas, ils sont dits *naturels*, hyperboliques ou néperiens.

Le logarithme vulgaire d'un nombre positif x est ainsi défini comme un nombre y tel que l'on ait $10^y = x$.

Le lecteur est familier avec l'usage de ces logarithmes vulgaires; il connaît les avantages pratiques du choix de la base 10. Si x est un nombre de la forme 10^n, n étant un nombre entier, positif ou négatif, son logarithme sera n; si x est compris entre 10^n et 10^{n+1}, son logarithme sera compris entre n et $n+1$; la partie entière de ce logarithme sera n, la mantisse ou partie décimale du logarithme étant toujours supposée positive. Si x est un nombre plus grand que 1, compris entre 10^n et 10^{n+1}, c'est que la partie entière de x a $n+1$ chiffres; la partie entière (ou caractéristique) du logarithme vulgaire d'un nombre x plus grand que 1, est le nombre de chiffres, diminué d'une unité, de la partie entière de x. Si x est un nombre positif plus petit que 1, compris entre 10^{-m} et 10^{-m+1}, et si on l'écrit sous la forme décimale, on voit que le premier chiffre significatif sera précédé de m zéros, en comptant le zéro qui précède la virgule : le logarithme vulgaire d'un nombre positif A, plus petit que 1, écrit sous forme décimale, a une partie entière (ou caractéristique) négative; la valeur absolue de cette partie entière est égale au nombre de zéros (y compris celui qui précède la virgule) qui, dans la représentation décimale de A, précèdent le premier chiffre significatif. Les caractéristiques, toujours aisées à trouver, ne sont pas inscrites dans les Tables; les mantisses seules sont inscrites pour les nombres de 1 à 1000, 10000, 100000, etc. [1] suivant l'étendue des Tables : elles comportent les quatre, cinq, six ou sept premières décimales du logarithme de ces nombres, la dernière décimale étant forcée s'il y a lieu. La mantisse du logarithme d'un nombre A convient à tous les nombres de la forme A 10^n, n étant un entier positif ou négatif.

On obtient des résultats plus approchés avec des Tables plus étendues et comportant plus de décimales, mais aussi les calculs sont beaucoup plus longs.

Le nombre 10^x dont le logarithme vulgaire est x s'appelle quelquefois *l'antilogarithme du nombre* x; l'usage des tables d'antilogarithmes, pour revenir aux nombres, est fort commode. Toutefois les tables d'antilogarithmes un peu étendues sont peu répandues; le lecteur s'est sans doute servi de Tables à quatre décimales.

Il y en a dans les excellents petits *Traités d'Algèbre* de M. E. Borel [2], dans le *Recueil de Formules et de Tables numériques* de J. Houël, dans les *Tables à cinq décimales* du même auteur, dans les *Nouvelles Tables de logarithmes à cinq et à quatre décimales* du Service Géographique de l'armée [3]. Elles fournissent la partie entière des nombres de la forme $10^{3+\frac{n}{1000}}$, n allant de 0 à 1000.

Si les logarithmes vulgaires ont une utilité pratique considérable, les logarithmes *naturels*, à base e, se présentent en quelque sorte d'eux-mêmes dans la théorie, ainsi qu'on le verra plus tard : le logarithme *naturel* de x, le nombre y tel que l'on ait $e^y = x$, sera repré-

---

(1) Pour des raisons pratiques diverses, en particulier à cause de l'incertitude des résultats de l'interpolation au commencement de la Table, celle-ci est souvent prolongée jusqu'à 2000, 12000, 120000.

(2) Paris, A. Colin.

(3) Paris, Gauthier-Villars.

senté, afin d'éviter toute confusion [1], par le symbole ($\lg x$ et non $\log_e x$).

On passe d'un système de logarithmes à un autre en multipliant tous les logarithmes par un même nombre.

Si, en effet, on désigne par y le logarithme de x dans la base a, on aura, par définition,

$$a^y = x,$$

et, en prenant les logarithmes naturels des deux membres,

$$y \lg a = \lg x;$$

si donc on a le logarithme naturel de x, on obtiendra le logarithme de x dans la base a, en multipliant le logarithme naturel par le nombre $M = \frac{1}{\lg a}$, auquel on donne quelquefois le nom de *module*. Ce nombre M est d'ailleurs aussi égal à $\log_a e$, comme on le voit en faisant $x = e$ dans l'égalité précédente. Inversement, on passe du logarithme d'un nombre, dans la base a, au logarithme naturel en le multipliant par $\frac{1}{M}$. Pour les logarithmes vulgaires ($a = 10$), on a

$$M = 0,434294481903\ldots, \qquad \frac{1}{M} = 2,302585092994\ldots$$

$$\text{log nat} = \frac{1}{M} \times \text{log vulg}, \qquad \text{log vulg} = M \text{ log nat}.$$

Pour passer d'un système à l'autre, il est commode de se servir de tables de multiples de M et de $\frac{1}{M}$.

204. Fonctions hyperboliques. — Nous sommes maintenant en possession des fonctions *élémentaires* les plus simples. Ces fonctions, on peut les combiner d'une infinité de façons; parmi les combinaisons les plus simples, il convient de s'arrêter un instant sur les fonctions *hyperboliques* $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ (sinus hyperbolique,

---

[1] La confusion n'est guère à craindre, puisque, dans les raisonnements théoriques, c'est toujours de logarithmes naturels qu'il est question. Aussi, dans beaucoup d'ouvrages théoriques, on emploie la notation $\log x$ pour désigner les logarithmes naturels; quelques auteurs emploient la notation $L(x)$. Bien entendu, quand on en vient à effectuer les calculs, il faut éviter la confusion.

cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique) définies par les formules

$$(1) \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

ou, en posant $e^x = t$,

$$(2) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{t^2 - 1}{2t}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{t^2 + 1}{2t}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Les fonctions e^x et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ étant toujours continues et ne s'annulant jamais, il est clair que les trois fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ sont continues pour toutes les valeurs de x.

En changeant x en $-x$ dans les formules (1) on voit de suite que $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ sont des fonctions impaires, que $\operatorname{ch} x$ est une fonction paire; en d'autres termes, on a, quel que soit x,

$$(3) \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch} x(-x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x;$$

$t = e^x$ est toujours positif; il en est de même de $\operatorname{ch} x$; $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ sont du même signe que $t^2 - 1$ ou que $t - 1$, puisque $t + 1$ est positif; or $t - 1 = e^x - 1$ s'annule pour $x = 0$, est positif pour x positif, négatif pour x négatif; $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ sont du même signe que x.

Des deux premières formules (1), on tire, par addition et soustraction,

$$(4) \qquad e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$(5) \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x = 1,$$

en résolvant cette équation et l'équation $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ par rapport à $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, on trouve

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

Il résulte de cette formule que $\operatorname{th} x$ est toujours plus petit que 1 en valeur absolue, ce qui, du reste, résulte aussi de la troisième formule (2) : $\operatorname{ch} x$ étant toujours positif, on a

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, \tag{6}$$

en adoptant la signification arithmétique du radical; on a ensuite, à cause de $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \operatorname{th} x$,

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}. \tag{6}$$

Des formules (4) on tire en remplaçant x par $a + b$

$$e^{a+b} = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b), \qquad e^{-a-b} = \operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b);$$

on a d'ailleurs

$$e^{a+b} = e^a . e^b, \qquad e^{-a-b} = e^{-a} . e^{-b}$$

et, par suite, toujours à cause des formules (4),

$$e^{a+b} = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b),$$
$$e^{-a-b} = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b);$$

d'où, en égalant les deux expressions trouvées pour e^{a+b} et les deux expressions trouvées pour e^{-a-b},

$$\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} b),$$
$$\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{sh}(a+b) = (\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b);$$

et finalement, en ajoutant ou en retranchant et divisant par 2,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a; \end{array}\right. \tag{7}$$

on a d'ailleurs

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)} = \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}. \tag{8}$$

Je me dispense d'écrire les formules qui se déduisent de celles-là en changeant b en $-b$.

Le lecteur ne peut pas ne pas être frappé de l'analogie qu'il y a entre toutes ces formules et celles de la trigonométrie relatives aux fonctions $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tang} x$: je laisse de côté les conséquences qu'on pourrait en déduire, les expressions de $\operatorname{ch} 2a$, $\operatorname{sh} 2a$, $\operatorname{th} 2a$ en fonction de $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{th} a$, le calcul au moyen de ces mêmes quantités de $\operatorname{ch}\frac{a}{2}$, $\operatorname{sh}\frac{a}{2}$, $\operatorname{th}\frac{a}{2}$, etc., pour m'arrêter un instant sur la façon dont varient $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, fonctions dont on connaît déjà le signe; à cause des formules (3), il suffit évidemment de considérer les valeurs positives de x. Quand x croît de 0 à $+\infty$, e^x croît de 1 à $+\infty$, $-e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$ croît de -1 à 0; $\operatorname{sh} x$, somme de deux fonctions croissantes, croît de 0 à $+\infty$; quand x croît de $-\infty$ à 0 : $\operatorname{sh} x$ croît de $-\infty$ à 0, la fonction $\operatorname{sh} x$ est toujours croissante.

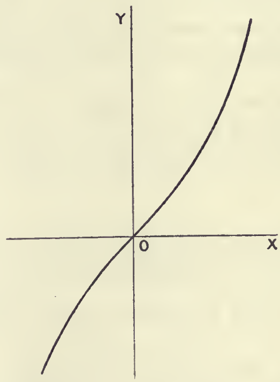
Quand x croît de 0 à $+\infty$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{sh}^2 x$ croissent de 0 à $+\infty$, $\operatorname{ch} x = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}$ croît de 1 à $+\infty$; quand x croît de $-\infty$ à 0, $\operatorname{ch} x$ décroît de $+\infty$ à 1; $\operatorname{ch} x$ est toujours plus grand que 1, sauf pour $x = 0$.

On a enfin

$$\operatorname{th} x = \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{1+t^2};$$

quand x croît de 0 à $+\infty$, $t = e^x$ croît de 1 à $+\infty$, t^2+1 croît de 2 à $+\infty$, $\operatorname{th} x$ croît de 0 à 1, valeur limite qu'il n'atteint pas; quand x croît de $-\infty$ à 0, $\operatorname{th} x$ croît de -1 à 0.

Fig. 53.



Les renseignements qui précèdent suffisent à se rendre compte de la forme des courbes qui figurent les trois fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, courbes dont les équations sont $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$. La seconde de ces courbes porte le nom de *chaînette* (¹); elle est symé-

Fig. 54.

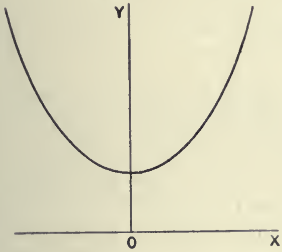
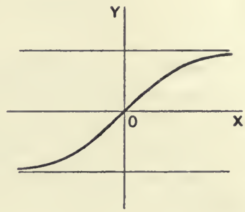


Fig. 55.



trique par rapport à l'axe OY. La première et la troisième sont symétriques par rapport à l'origine. La dernière est comprise entre les deux parallèles à l'axe des x situées à une distance égale à 1 de cet axe; elle est asymptote à ces deux parallèles.

Ces courbes, ou plutôt, celles qu'on obtient en échangeant les axes, ou en faisant tourner les figures autour de la bissectrice de l'angle des coordonnées positives, et qui auraient pour équations

$$x = \operatorname{sh} y, \qquad x = \operatorname{ch} y, \qquad x = \operatorname{th} y,$$

définissent les fonctions inverses des fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, fonctions inverses que quelques auteurs désignent par les notations $\arg \operatorname{sh} x$, $\arg \operatorname{ch} x$, $\arg \operatorname{th} x$; on reconnaît de suite que l'équation (en y) $x = \operatorname{sh} y$ définit y en fonction de x sans ambiguïté, quel que soit x; que l'équation (en y) $x = \operatorname{ch} y$ a deux solutions symétriques si x est plus grand que 1, elles se réduisent à 0 pour $x = 1$; de ces deux solutions on choisira la positive; enfin l'équation $x = \operatorname{th} y$ définit y en fonction de x sans ambiguïté, pour x compris entre -1 et 1. Dans les intervalles où ces fonctions sont définies, elles varient toutes dans le même sens que x. Elles sont d'ailleurs les logarithmes de fonctions simples

(¹) La tangente au point d'abscisse nulle a une pente égale à 1 pour la première et la troisième courbe; elle est horizontale pour la seconde; ces résultats, qui n'interviennent pas immédiatement, deviendront évidents dans le Chapitre suivant.

de x, à savoir

$$
(9) \quad \left\{
\begin{aligned}
\arg \operatorname{sh} x &= \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\\
\arg \operatorname{ch} x &= \lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\\
\arg \operatorname{th} x &= \lg\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},
\end{aligned}
\right.
$$

où les radicaux ont la signification arithmétique. C'est ce que le lecteur reconnaîtra sans peine en se reportant aux équations (2), d'où il est aisé de tirer $t = e^x$ en fonction, soit de $\operatorname{sh} x$, soit de $\operatorname{ch} x$, soit de $\operatorname{th} x$; à chaque fois, le choix de la racine qu'on doit adopter est aisé; x s'exprime ainsi comme le logarithme naturel d'une fonction de $\operatorname{sh} x$, de $\operatorname{ch} x$, ou de $\operatorname{th} x$. Les formules auxquelles on parvient ainsi équivalent, sauf le nom des variables, à celles qu'on vient d'écrire. L'introduction des écritures $\arg \operatorname{sh} x$, etc. n'a rien d'indispensable.

Si l'on pose $\sin y = \operatorname{th} x$, cette équation, considérée comme une équation en y, admet toujours une solution comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, puisque $\operatorname{th} x$ est compris entre -1 et $+1$; c'est, pour employer les notations antérieures, $\operatorname{arc} \sin(\operatorname{th} x)$; on aura alors $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$; le radical doit être pris avec le sens arithmétique, puisque $\cos y$ est essentiellement positif; on a alors $\operatorname{tang} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{sh} x$. Les trois équations

$$
(10) \qquad \sin y = \operatorname{th} x, \qquad \cos y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{tang} y = \operatorname{sh} x,
$$

quand on assujettit y à être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, sont équivalentes; elles définissent une même fonction y de x, que le lecteur pourra s'exercer à représenter par une courbe. Quelques auteurs désignent cette fonction par la notation $\operatorname{Amh} x$ (amplitude hyperbolique de x). Quoi qu'il en soit, les formules (10) permettent de réunir en une seule des tables donnant à la fois les valeurs (naturelles) de $\sin y$, $\cos y$, $\operatorname{tang} y$ et celles de $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ [1].

---

[1] *Voir* J. Hoüel, *Recueil de formules et de Tables numériques*.

205. Fonctions de fonction. — Parmi les moyens de combiner les fonctions connues, l'un des plus importants consiste à composer des fonctions de fonction.

Supposons que $f(x)$ soit une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b) et que les valeurs qu'elle prend, quand x varie de a à b, restent comprises entre les deux nombres A, B; soit maintenant $\varphi(y)$ une fonction de y qui est définie pour les valeurs de y appartenant à l'intervalle (A, B) ou à un intervalle qui comprenne celui-là. Si l'on regarde y comme égal à $f(x)$, $\varphi(y)$ ou $\varphi[f(x)]$ sera une fonction (de fonction) de x; elle sera évidemment définie pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), puisque, à chaque valeur de x, correspond une valeur de y, puis une valeur de $\varphi(y)$. On peut d'ailleurs continuer : si les valeurs de $\varphi(y)$ restent comprises dans un intervalle où la fonction (de z) $\psi(z)$ est définie, on peut regarder $\psi(z)$ comme une fonction de fonction de y, comme une fonction de fonction de fonction de x, etc.

Il y a là une notion générale, très importante, dont le lecteur s'est déjà servi maintes et maintes fois. La fonction $\sin^2 x$ n'est autre chose que la fonction y^2 où y est remplacé par $\sin x$, la fonction $\sqrt{1+\sin^2 x}$ est la fonction $\sqrt{z}$, où l'on a remplacé z par $1+y^2$, et y par $\sin x$. $e^{\lg x}$ peut être regardé comme la fonction (de y) e^y où l'on a remplacé y par $\log x$; $e^{\lg x}$ n'est d'ailleurs autre chose que x (supposé positif).

En me bornant à une fonction de fonction, je veux faire quelques remarques simples ; si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et si la fonction $\varphi(y)$ est continue dans l'intervalle (A, B) auquel on suppose que toutes les valeurs de $f(x)$ appartiennent, il est clair que $\varphi(y) = \varphi[f(x)]$, regardé comme une fonction de x, est une fonction continue dans l'intervalle (a, b); car une petite variation de x n'entraîne qu'une petite variation de $y = f(x)$, laquelle n'entraîne qu'une petite variation de $\varphi(y)$. On a déjà employé ce raisonnement au n° 201.

Si les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$, regardées comme des fonctions de x et de y, sont toutes deux croissantes, l'une dans l'intervalle (a, b), l'autre dans l'intervalle (A, B), la fonction $\varphi(y) = \varphi[f(x)]$, regardée comme une fonction de x, sera manifestement croissante dans l'intervalle (a, b). Le lecteur reconnaîtra qu'elle sera encore croissante, si les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ sont décroissantes, l'une dans l'intervalle (a, b), l'autre dans l'intervalle (A, B). Elle sera décroissante si les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(y)$ varient en sens contraire quand x et y augmentent respectivement dans les intervalles (a, b) et (A, B).

D'après cela, si l'on connaît le mode de variation des fonctions $f(x)$, $\varphi(y)$ quand x et y augmentent, on connaît, par cela même, le sens de la variation de la fonction de fonction $\varphi[f(x)]$. On sait par exemple comment varient les fonctions

$$ax^2 + bx + c, \qquad Ay^2 + By + C\,;$$

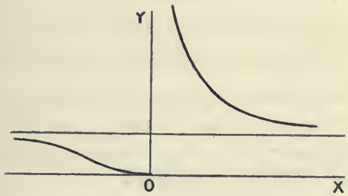
on peut en déduire la façon dont varie le polynome

$$A(ax^2 + bx + c)^2 + B(ax^2 + bx + c) + C.$$

En supposant a positif, on sait que $y = ax^2 + bx + c$ diminue de $+\infty$ à $\frac{b^2 - 4ac}{a}$, puis augmente de cette quantité à $+\infty$ quand x augmente de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, puis de $-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$; il reste à voir comment $Ay^2 + By + C$ varie quand y varie de $+\infty$ à $\frac{b^2 - 4ac}{a}$, ce qui est aisé. Je ne m'y arrêterai pas.

On sait comment $\frac{1}{x}$ varie avec x, comment e^y varie avec y; on sait donc comment varie $e^{\frac{1}{x}}$; les deux fonctions $\frac{1}{x}$, e^y sont, la première toujours décroissante, la seconde toujours croissante; la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ est décroissante dans tout intervalle où elle est continue; elle n'est d'ailleurs discontinue que pour la valeur $x = 0$, qu'il faudra examiner de près. Pour $x = -\infty$, $\frac{1}{x}$ est nul, $e^{\frac{1}{x}}$ est égal à 1 : plus exactement, quand x tend vers $-\infty$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers la limite 1, qu'il n'atteint pas; quand x croît, en restant négatif, $e^{\frac{1}{x}}$ décroît et prend ainsi des valeurs plus petites que 1; quand x tend vers 0 par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers la limite 0; dès que x dépasse la valeur 0, $\frac{1}{x}$ est positif et très grand, $e^{\frac{1}{x}}$ est très grand; on dit que $e^{\frac{1}{x}}$ passe brusquement de 0 à $+\infty$; puis il décroît constamment en s'approchant de la limite 1, quand x tend vers $+\infty$; la courbe qui représente la fonction a donc la forme ci-dessous

Fig. 56.



La branche de gauche est tangente à l'axe des x, à l'origine des coordonnées, ainsi que le lecteur l'établira sans peine à l'aide de théories qui seront développées ultérieurement. Il observera que, à proprement parler, la courbe n'atteint pas cette origine des coordonnées; elle s'en rapproche indéfiniment; mais il est naturel de regarder ce point comme lui appartenant et, en tous cas, la distinction n'est pas possible à faire sur la figure.

On peut multiplier les exemples à l'infini, et construire, au moyen des fonctions connues, des fonctions plus compliquées dont la variation sera aisée à suivre; mais si, dans quelques cas, on aperçoit, sur la fonction donnée, le moyen de profiter des remarques que l'on vient de faire, elles ne constituent pas une méthode générale qui permette de reconnaître le sens de la variation d'une fonction : elles ne s'appliquent pas, par exemple, à la fonction $x+\frac{1}{x}$, somme de deux fonctions dont l'une croît et l'autre décroît. Une méthode générale sera développée dans le Chapitre suivant.

206. La fonction x^m où m est un nombre quelconque est définie pour toutes les valeurs positives de x. Son logarithme est $m\lg x$, on peut donc l'écrire $e^{m\lg x}$; la fonction $m\lg x$ est continue dans tout intervalle dont les bornes sont des nombres positifs, croissante si m est positif, décroissante si m est négatif : il en sera de même de la fonction x^m, qui, lorsque x croît de o à $+\infty$, croît elle-même de o à $+\infty$, ou décroît de $+\infty$ à o, suivant que m est positif ou négatif. On la représentera aisément par une courbe.

Je laisse au lecteur le soin d'établir la propriété qu'exprime l'égalité $x^m x'^m = (xx')^m$.

Il importe de compléter le résultat établi au n° 192 : on y a montré que l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ avait pour limite le nombre e quand n croissait indéfiniment par valeurs naturelles; je vais montrer que la fonction $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, lorsque x augmente indéfiniment en valeur absolue, sans que ses valeurs soient assujetties à être entières, tend vers la limite e, que x croisse par valeurs positives, ou qu'il soit négatif.

Examinons le premier cas et observons d'abord que, si α, β, α', β' sont des nombres positifs, les inégalités

$$\alpha' > \alpha > 1, \qquad \beta' > \beta$$

entraînent

$$\alpha'^{\beta'} > \alpha^{\beta}.$$

On a, en effet,

$$\alpha'^{\beta'} > \alpha'^{\beta}, \qquad \alpha'^{\beta} > \alpha^{\beta},$$

la première inégalité résultant de ce que la fonction a^x est croissante, quand a est plus grand que 1, la seconde inégalité de ce que la fonction x^m est croissante quand m est positif.

Revenons à l'expression $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et désignons par n la partie entière du nombre positif x, on a

$$n \leqq x < n+1, \qquad \frac{1}{n} \geqq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

et, par suite,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, n augmente indéfiniment par valeurs naturelles; $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est compris entre les deux quantités

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}},$$

variables avec n, et qui ont toutes deux pour limite le nombre e, puisque le facteur $1+\frac{1}{n}$ pour la première, le dénominateur $1+\frac{1}{n+1}$ pour la seconde ont pour limite 1 quand n augmente indéfiniment : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tend donc vers la limite e, quand x tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que $x=-x'$ soit négatif : la fonction

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}$$

est définie pour les valeurs de x' plus grandes que 1, qui rendent positive l'expression $1-\frac{1}{x}$: on a d'ailleurs

$$\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}=\left(\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'}=\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'}=\frac{\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1}}{1+\frac{1}{x'-1}};$$

lorsque x tend vers $-\infty$, x' et $x'-1$ tendent vers $+\infty$, le numérateur de la fraction précédente tend vers e, le dénominateur vers 1; la proposition est démontrée.

Il revient au même, en changeant x en $\frac{1}{x}$, de dire que la fonction

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

a pour limite e quand x tend vers 0 par valeurs positives ou négatives, ou encore que cette fonction, quand on lui attribue la valeur e pour $x=0$, est continue pour $x=0$. Son logarithme est

$$\frac{\lg(1+x)}{x},$$

et doit avoir, quand x tend vers 0, une limite égale à $\lg e$, c'est-à-dire à 1. Ainsi la fonction $\frac{\lg(1+x)}{x}$ a pour limite l'unité quand x tend vers 0; si, pour $x=0$, on lui attribue la valeur 1, elle est continue pour cette valeur; elle est alors continue dans tout intervalle dont la borne inférieure est plus grande que -1; il en est de même de la fonction $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, quand on lui attribue la valeur e pour $x=0$.

Considérons encore l'expression $\frac{a^x-1}{x}$ où a est un nombre positi donné ; lorsque x tend vers o, le numérateur tend vers $a^0 - 1 = 0$; posons $a^x = 1 + z$, en désignant par z un nombre qui tend vers o quand x tend vers o ; on aura $x = \frac{\lg(1+z)}{\lg a}$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{z}{\lg(1+z)} \lg a;$$

lorsque z tend vers o, $\frac{\lg(1+z)}{z}$ et $\frac{z}{\lg(1+z)}$ tendent vers 1 ; on voit donc que le premier membre de l'égalité précédente a pour limite $\lg a$ quand x tend vers o (par valeurs positives ou négatives).

Si, en particulier, on fait tendre x vers o par des valeurs de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un nombre naturel, on voit que

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

tend vers la limite $\lg a$ quand n augmente indéfiniment.

EXERCICES.

194. Résoudre les équations

$$10^x + 2.10^{-x} = 3,$$
$$\frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3};$$

on calculera les racines avec trois chiffres significatifs.

195. Résoudre les équations simultanées

$$(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) = 5,2,$$
$$(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) = 0,4;$$

on calculera x et y avec trois chiffres significatifs.

196. Quelles sont les valeurs des expressions

$$\text{arc sin}\left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{4}\right),\quad \text{arc sin}\left(\frac{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}\right),$$
$$\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{4}\right),\quad \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}\right),$$
$$\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}}\right)?$$

197. Que devient la fonction $\text{arc sin}\,x$, quand on y remplace x par $\sin 2\alpha$, α étant un arc compris entre $-\pi$ et $+\pi$? Dans quel cas se réduit-elle à 2α?

198. Que devient la fonction $\text{arc tang}\,\dfrac{a+x}{1-ax}$ quand on y remplace a par $\text{tang}\,\alpha$, x par $\text{tang}\,\xi$?

199. La fonction $\text{arc tang}\,\dfrac{a+x}{1-ax} - \text{arc tang}\,a - \text{arc tang}\,x$ est constante dans tout intervalle auquel n'appartient pas le nombre $\dfrac{1}{a}$; quelle est sa valeur quand x est compris entre $-\infty$ et $\dfrac{1}{a}$, entre $\dfrac{1}{a}$ et $+\infty$?

200. Quelles sont les valeurs de la fonction $\text{arc tang}\,\dfrac{2x}{1-x^2} - 2\,\text{arc tang}\,x$ quand x est compris entre $-\infty$ et -1, entre -1 et $+1$, entre $+1$ et $+\infty$?

201. Quelles sont les valeurs des fonctions $\text{arc cos}(2x^2-1) - 2\,\text{arc cos}\,x$, $\text{arc sin}\,2x\sqrt{1-x^2} - 2\,\text{arc sin}\,x$ quand x varie de -1 à $+1$?

202. Quelle est, avec une erreur moindre que $\dfrac{1}{10^3}$, la valeur de la fonction $\text{Arc tang}(3\,\text{tang}\,x)$ pour $x = 1000$?

203. Exprimer $\text{ch}\,x$ et $\text{sh}\,x$ rationnellement au moyen de $\text{th}\,\dfrac{x}{2}$.

204. Connaissant l'une des trois quantités $\text{sh}\,x$, $\text{ch}\,x$, $\text{th}\,x$, calculer $\text{sh}\,\dfrac{x}{2}$, $\text{ch}\,\dfrac{x}{2}$, $\text{th}\,\dfrac{x}{2}$.

205. Résoudre l'équation

$$A\,\text{ch}\,x + B\,\text{sh}\,x + C = 0.$$

Application numérique : $A = 2$, $B = 1$, $C = -2$. On calculera les racines avec trois chiffres significatifs.

206. Établir les formules

$$\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a+2b) + \ldots + \operatorname{sh}[a+(n-1)b] = \frac{\operatorname{sh}\frac{nb}{2}\operatorname{sh}\left(a+\frac{n-1}{2}b\right)}{\operatorname{sh}\frac{b}{2}},$$

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a+2b) + \ldots + \operatorname{ch}[a+(n-1)b] = \frac{\operatorname{sh}\frac{nb}{2}\operatorname{ch}\left(a+\frac{n-1}{2}b\right)}{\operatorname{sh}\frac{b}{2}}.$$

207. Résoudre l'équation

$$\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \ldots + \operatorname{sh}[a+(n-1)x] = 0.$$

208. Résoudre l'équation

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}(a+x) + \operatorname{ch}(a+2x) + \operatorname{ch}(a+3x) = 4\operatorname{ch} x \operatorname{ch}\frac{x}{2}.$$

209. Montrer que l'expression

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\left(a+\frac{n-1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}},$$

où n désigne un nombre naturel, est toujours croissante.

210. Étudier la variation des expressions

$$\sin^2 x + \sin x + 1, \qquad 2\cos^2 x + \cos x - 1,$$

quand x croît de $-\pi$ à $+\pi$; de

$$\frac{1}{\operatorname{tang} x - 1} + \frac{2}{\operatorname{tang} x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tang} x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tang} x - 1}$$

quand x croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; combien de fois cette expression s'annule-t-elle?

211. Variations de l'expression

$$\frac{A(ax+b)^2 + B(a'x+b')^2}{A'(ax+b)^2 + B'(a'x+b')^2}.$$

Pour quelles valeurs de x cette expression passe-t-elle par un maximum ou un minimum; quelles sont les valeurs de ce maximum ou de ce minimum?

212. La fonction a^x, où a désigne une constante positive, est la seule fonction *continue* qui jouisse de la propriété qu'exprime l'égalité

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

On montrera d'abord, en supposant dans cette égalité $y = 0$, $y = -x$, en y remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$, qu'elle entraîne les suivantes :

$$\varphi(0) = 1 = \varphi(x)\varphi(-x), \qquad \varphi(x) = \left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

La dernière prouve que la fonction $\varphi(x)$ est toujours positive. On établira ensuite les égalités

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n) = \varphi(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n),$$
$$\varphi(\alpha_1)^n = \varphi(n\alpha_1), \qquad \varphi(n) = [\varphi(1)]^n;$$

on montrera que la dernière égalité, établie pour les valeurs naturelles de n, subsiste quand n est une fraction positive à termes entiers, un nombre rationnel quelconque. La continuité supposée de la fonction $\varphi(x)$, la continuité démontrée de la fonction $[\varphi(1)]^x$, montrent ensuite que l'on a pour une valeur irrationnelle de x

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x.$$

213. Montrer que la fonction $\log x$ est la seule fonction continue qui jouisse de la propriété

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

214. Montrer que la fonction ax, où a est une constante, est la seule fonction continue qui jouisse de la propriété

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

CHAPITRE XIII.

DÉRIVÉES.

§ 1. — DÉFINITION ET CALCUL DES DÉRIVÉES.

207. Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, définie et continue dans un intervalle auquel je supposerai que les valeurs considérées de la variable x restent intérieures.

Si l'on considère deux valeurs a, a_1 de la variable, on désigne sous le nom d'*accroissement* de la variable, quand on passe de la valeur a à la valeur a_1, la différence $h = a_1 - a$, et, sous le nom d'*accroissement correspondant* de la fonction, la différence $f(a_1) - f(a)$; ces accroissements peuvent d'ailleurs être positifs ou négatifs. Rien n'est plus naturel que de comparer le second au premier; le rapport

$$\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

peut être regardé comme l'accroissement *moyen*, le *taux* de l'accroissement de la fonction $f(x)$, quand x croît de la plus petite des valeurs a, a_1 à la plus grande.

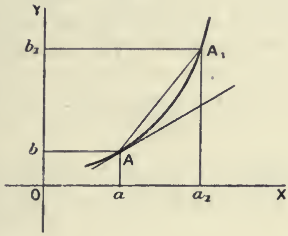
Si ce rapport est positif, la fonction a été, en gros, croissante dans l'intervalle borné par ces valeurs; elle a pu osciller, mais les augmentations l'ont emporté sur les diminutions; elle aura d'autant plus augmenté, en tout, que le rapport est plus grand. C'est le contraire si le rapport est négatif.

Si la fonction $f(x)$, ou l'équation $y = f(x)$, est représentée par une courbe, le précédent rapport est la pente de la droite AA_1 qui joint le point A, de coordonnées a et $b = f(a)$, au point A_1, de coordonnées a_1 et $b_1 = f(a_1)$; l'équation de cette droite est

$$y = b + \frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}(x - a);$$

le second membre est une fonction de x qui s'accroît régulièrement de la quantité $\frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}$ quand x augmente de 1, et qui, pour $x=a$, $x=a_1$, coïncide avec $f(x)$.

Fig. 57.



Le rapport

$$\frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}$$

représente aussi la vitesse moyenne du point de l'axe OY dont l'ordonnée est $y=f(x)$ quand x représente le temps (n° 196).

Lorsque a reste fixe et que a_1 se rapproche de a, que h tend vers 0, il peut arriver que ce rapport tende vers une limite; cette limite, si elle existe, s'appelle la *dérivée* de la fonction $f(x)$ pour $x=a$, et se représente par le symbole $f'(a)$. Supposer l'existence de cette limite, c'est supposer que la droite AA_1, lorsque le point A_1 de la courbe qui figure la fonction $y=f(x)$ se rapproche indéfiniment du point A, admet une position limite, que la courbe admet une tangente en A; la dérivée $f'(a)$ est la pente de cette tangente. C'est supposer encore que le mouvement du mobile de l'axe OY dont l'ordonnée est, à chaque instant x, $y=f(x)$, comporte une vitesse à l'époque a et que cette vitesse est $f'(a)$.

En parlant d'une courbe, d'un mouvement, nous présupposons l'existence (en général) de la tangente à cette courbe en chacun de ces points, de la vitesse à chaque instant du mouvement. A la vérité, l'existence de la dérivée n'est pas impliquée logiquement par celle de la continuité, mais nous ne nous occuperons ici que de fonctions qui sont susceptibles d'une représentation graphique ou cinématique, qui admettent, en général, une dérivée pour chaque valeur a de la variable.

Je dis *en général,* parce qu'il y a des exceptions, fournies par des valeurs isolées de la variable, qui ne choquent nullement la notion intuitive que nous avons d'une courbe ou d'un mouvement.

Dans la définition générale que l'on a donnée de la dérivée de la fonction $f(x)$ pour $x=a$, on n'a nullement supposé que a_1 fût plus grand que a, que h soit positif. S'il y a une dérivée pour $x=a$, le rapport

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

doit tendre vers la limite $f'(a)$ quand h tend vers o, soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives. Les droites AA_1, AA'_1 doivent

Fig. 58.

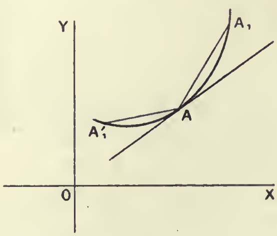
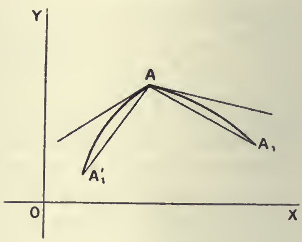


Fig. 59.



tendre vers la même tangente en A, quand le point A_1, ou le point A'_1, se rapprochent de A. Mais on conçoit qu'il en soit autrement et qu'une courbe présente en A un point *anguleux,* que l'on obtienne deux tangentes différentes suivant que l'on fait tendre vers A, soit le point A_1 soit le point A'_1 ; de même on conçoit un mouvement rectiligne où le mobile arrive en un point avec une certaine vitesse et repart immédiatement avec une autre vitesse; il pourra arriver, d'une façon exceptionnelle, que le rapport

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

tende vers une limite quand h tendra vers o par valeurs positives, vers une autre limite quand h tendra vers o par valeurs négatives; à proprement parler, il n'y a pas de dérivée pour $x=a$; on dit quelquefois qu'il y en a deux, une *à droite* et une *à gauche;* de même, la courbe à point anguleux peut être regardée comme formée par la réunion de deux arcs de courbes qui aboutissent au point A et qui ont chacun une tangente différente. Enfin, s'il arrivait que a fût une borne de l'intervalle où la fonction $f(x)$ est définie, si l'on prenait, par exemple, $a=0$ pour la fonction $\sqrt{x^3}$, ou $a=1$ pour la fonction $\sqrt{(1-x)^3}$, les valeurs négatives ou positives de h se trouveraient exclues tout naturellement; en parlant de la dérivée de $\sqrt{x^3}$ pour $x=0$, on entend la dérivée à droite; on entend la dérivée à gauche, quand il est question de la dérivée, pour $x=1$, de $\sqrt{(1-x)^3}$.

La notion de la dérivée est assez importante pour qu'on fasse entrer dans sa définition la définition même du mot *limite;* on dira alors :

La fonction $f(x)$ admet, pour $x=a$, une dérivée $f'(a)$ si la différence entre le rapport

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

et $f'(a)$ est moindre en valeur absolue que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que h soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif ε' convenablement choisi; à chaque valeur de ε doit correspondre une valeur de ε'.

S'il en est ainsi, on aura évidemment

$$|f(a+h)-f(a)|<|h|(|f'(a)|+\varepsilon),$$

sous la condition $|h|<\varepsilon'$, la fonction $f(x)$ sera donc certainement continue pour $x=a$. Si l'on veut, en effet, que la différence $f(a+h)-f(a)$ soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif α, il suffira de prendre, après qu'on a choisi ε et ε', h moindre en valeur absolue que ε' et que

$$\frac{\alpha}{|f'(a)|+\varepsilon}.$$

Lors donc qu'on aura trouvé la dérivée d'une fonction, on sera assuré de sa continuité.

Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle (α, β), c'est-à-dire si elle admet une dérivée pour chaque valeur de x appartenant à cet intervalle, cette dérivée pourra être regardée comme une fonction de x, que l'on désignera par $f'(x)$. Le lecteur reconnaîtra que, pour les fonctions qui sont vraiment susceptibles d'une représentation graphique, la fonction $f'(x)$ doit être continue, en général. Il est impossible de se figurer un trait de courbe qui admette une tangente en chaque point, et où cette tangente varie brusquement de chaque point au point infiniment voisin. On peut dire que la continuité (en général) de $f'(x)$, de la pente de la tangente, est présupposée quand on parle d'une courbe qui représente la fonction $f(x)$. Toutefois, certaines discontinuités au moins, pour des valeurs parti-

Fig. 60.

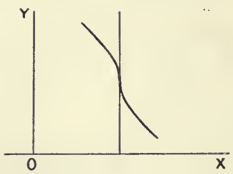
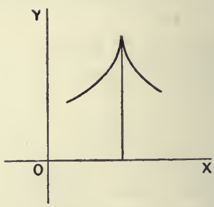


Fig. 61.



culières de la variable, n'ont rien de choquant : telle est, par exemple, l'existence d'une tangente parallèle à l'axe des y pour une certaine valeur de x; pour cette valeur on dira que la dérivée devient infinie.

L'importance de la considération des dérivées pour reconnaître le sens de la variation d'une fonction apparaît immédiatement.

Si la fonction $f(x)$ est croissante pour $x = a$, le rapport

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

est certainement positif pour les valeurs de h suffisamment voisines de 0; sa limite, quand h tend vers 0, est positive ou nulle. Si donc la fonction $f(x)$ est croissante pour $x = a$, sa dérivée $f'(x)$ est positive ou nulle; si elle est décroissante, sa dérivée est négative ou nulle.

On est amené, pour la généralité du langage, à regarder une constante comme une fonction de x, une fonction qui garderait la même valeur quel que fût x. Si la fonction $f(x)$ désigne une constante, on aura, quels que soient x et h, $f(x+h)-f(x)=0$ et, par suite,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

la limite du premier membre, quand h tend vers 0, est évidemment 0; la dérivée d'une constante est toujours nulle.

Si une fonction est croissante dans un intervalle, sa dérivée est toujours positive ou nulle dans cet intervalle.

Si une fonction est décroissante dans un intervalle, sa dérivée est toujours négative ou nulle dans cet intervalle.

Si une fonction est constante dans un intervalle, sa dérivée est constamment nulle dans cet intervalle.

On est tenté d'énoncer les réciproques suivantes :

Si, dans l'intervalle (α, β), la dérivée d'une fonction $f(x)$ est constamment positive, la fonction $f(x)$ est croissante dans cet intervalle. Si la dérivée est constamment négative, la fonction est décroissante dans tout l'intervalle. Si la dérivée est constamment nulle la fonction est constante.

Ces réciproques seraient évidentes s'il était vrai qu'une fonction continue dans un intervalle est nécessairement croissante, décroissante, ou constante, mais on a déjà dit qu'il n'en était pas ainsi. On peut aussi, pour les deux premières, faire le raisonnement suivant: si la dérivée $f'(a)$ de la fonction $f(x)$, pour $x=a$, est positive, il faut que le rapport

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

dont $f'(a)$ est la limite, finisse par être positif, pour des valeurs de h suffisamment voisines de 0 : donc, la fonction $f(x)$ est croissante pour $x=a$; si elle est croissante pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (α, β), elle est croissante dans tout l'intervalle. C'est là une proposition qu'on a déjà admise sans l'avoir démontrée : elle est d'ailleurs vraie. Ce mode de démonstration ne permet pas de prouver qu'une fonction dont la dérivée est nulle dans un intervalle est constante dans cet intervalle.

Je reviendrai ultérieurement sur ces réciproques; je veux toutefois faire remarquer combien elles paraissent évidentes sur la représentation graphique ou cinématique, et chercher en même temps à démêler en quoi consiste cette évidence apparente.

Si, pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle (α, β), la pente de la tangente à la courbe définie par l'équation $y=f(x)$ est constamment positive, on voit en quelque sorte la courbe monter à droite, parce qu'on confond, sur un petit arc, la courbe et la tangente, et que l'ordonnée de la tangente augmente avec l'abscisse; c'est pour la même raison que, si la pente de la tangente est constamment négative, on voit le trait de courbe descendre à droite. Enfin, on n'imagine pas une courbe dont la tangente soit constamment parallèle à l'axe des x, sans que cette courbe se réduise à une parallèle à cet axe. C'est là nos trois réciproques.

Plaçons-nous maintenant au point de vue cinématique : pendant l'intervalle de temps (α, β), le point de l'axe OY dont l'ordonnée est $y=f(x)$ a une vitesse toujours positive; il monte donc toujours. Si sa vitesse est négative, il descend pendant tout le temps (α, β). Si sa vitesse est toujours nulle, il reste toujours au repos. Tout cela semble évident, parce qu'on prend le mot vitesse dans le même sens que dans le mouvement uniforme; on confond, à chaque instant, le mouvement vrai avec un mouvement uniforme de même vitesse.

Les observations qui précèdent n'en font pas moins pressentir la vérité de nos réciproques, qui sera établie rigoureusement un peu plus tard. L'importance de ces réciproques est claire, puisque, si on les admet, la question de savoir comment varie une fonction dans un intervalle est ramenée à la question de savoir quel est le signe de sa dérivée; elle justifie les explications qui précèdent et le détail des règles qui vont suivre pour le calcul des dérivées.

208. **Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient.** — J'emploierai ici les notations suivantes : $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ désignant des fonctions de la variable x, je regarderai la lettre x comme représentant une valeur spéciale (fixe) de cette variable; je désignerai par u, v, w les valeurs correspondantes des fonctions, par u', v', w' celles de leurs dérivées, que l'on suppose exister, par Δx un accroissement de la variable, par $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$ les valeurs $u(x+\Delta x)$, $v(x+\Delta x)$, $w(x+\Delta x)$ qui correspondent à la valeur $x+\Delta x$ de la variable; en sorte que Δu, Δv, Δw, soient les accroissements

$$u(x+\Delta x)-u(x), \quad v(x+\Delta x)-v(x), \quad w(x+\Delta x)-w(x),$$

des fonctions $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ quand on passe de la valeur x de la variable à la valeur $x+\Delta x$, et que les rapports

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

aient pour limites respectives les nombres u', v', w' quand Δx tend vers o.

Soient A, B, C des constantes, je vais montrer que la fonction $Au + Bv + Cw$ a pour dérivée $Au' + Bv' + Cw'$.

En effet, quand la variable passe de la valeur x à la valeur $x+\Delta x$, l'accroissement de la fonction considérée est

$$\begin{aligned} &A(u+\Delta u)+B(v+\Delta v)+C(w+\Delta w)-Au-Bv-Cw \\ &= A\,\Delta u + B\,\Delta v + C\,\Delta w; \end{aligned}$$

le rapport de cet accroissement à celui de la variable peut s'écrire

$$A\frac{\Delta u}{\Delta x} + B\frac{\Delta v}{\Delta x} + C\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Ce rapport, quand Δx tend vers o, tend lui-même vers la limite

$$Au' + Bv' + Cw';$$

en supposant $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$ ou $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, ou $B = 0$, $C = 0$, on a évidemment les théorèmes suivants :

La dérivée de la somme d'un nombre quelconque de fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions.

La dérivée de la différence de deux fonctions est égale à la différence des dérivées de ces fonctions.

La dérivée d'un produit d'une fonction par une constante est le produit, par cette même constante, de la dérivée de cette fonction.

Considérons le produit uv; je vais montrer que sa dérivée est

$$uv' + vu',$$

l'accroissement de ce produit est

$$(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v;$$

le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable peut s'écrire

$$u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Quand Δx varie, les seules quantités qui varient dans cette expression sont $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, Δu; elles tendent respectivement vers v', u', o : l'expression cherchée a donc une limite égale à

$$uv' + vu' + 0\,u' = uv' + vu'.$$

Si l'un des facteurs, v par exemple, était une constante, sa dérivée serait nulle; on retrouve une règle déjà obtenue.

La dérivée d'un produit de deux facteurs est la somme de deux termes dont chacun se déduit du produit en remplaçant l'un des facteurs par sa dérivée. Cette règle s'étend sans peine.

La dérivée d'un produit de n facteurs est une somme de n termes dont chacun s'obtient en remplaçant dans le produit considéré un facteur par sa dérivée.

S'il s'agit, par exemple, d'un produit de trois facteurs uvw, ce produit peut être regardé comme le produit du facteur uv par w; la dérivée du premier facteur est $u'v + uv'$; on doit la multiplier par w et ajouter le produit de uv par w', on trouve ainsi

$$u'vw + uv'w + uvw'.$$

Du cas de trois facteurs on passe à celui de quatre facteurs, etc.

En considérant un produit de m facteurs égaux entre eux, on voit que la dérivée de u^m est $mu^{m-1}u'$.

On appelle *dérivée logarithmique d'une fonction* le rapport de la dérivée de cette fonction à la fonction.

La *dérivée logarithmique* d'un produit de plusieurs facteurs est la somme des dérivées logarithmiques des dérivées de ses facteurs; la dérivée logarithmique de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'une fonction est égale à m fois la dérivée logarithmique de cette fonction.

La dérivée du rapport $\frac{u}{v}$ est égale à $\frac{vu' - v'u}{v^2}$.

En effet, le rapport de l'accroissement de la fonction $\frac{u}{v}$ à l'accroissement Δx de la variable est

$$\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}}{\Delta x}=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)\,\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Quand Δx tend vers o, le numérateur du dernier rapport a pour limite $vu'-uv'$, et le dénominateur a pour limite v^2; l'expression considérée a pour limite $\frac{vu'-v'u}{v^2}$; c'est ce qu'on avait annoncé. On suppose v différent de o.

La dérivée de $\frac{1}{v}$ est $-\frac{v'}{v^2}$.

La dérivée de $\frac{A}{(x-a)^m}$ où A est une constante et m un nombre naturel est $-\frac{mA(x-a)^{m-1}}{(x-a)^{2m}}=-\frac{mA}{(x-a)^{m+1}}$.

La dérivée logarithmique d'un rapport est la différence des dérivées logarithmiques de ses termes.

209. Je passe maintenant à la dérivée des fonctions étudiées antérieurement.

Je désignerai habituellement par x une valeur particulière (fixe) de la variable, par h un accroissement donné à cette variable; l'accroissement correspondant de la fonction sera $f(x+h)-f(x)$, et l'on aura à évaluer la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h tend vers o.

Dérivée d'un polynome. — La dérivée $f'(x)$ d'un polynome $f(x)$ a été définie à un autre point de vue dans le Chapitre II; c'était alors le coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$ ordonné suivant les puissances croissantes de h. L'identité de cette définition avec la définition actuelle se trouve avoir été établie dans ce même Chapitre II, lorsqu'on a expliqué comment on déterminait la pente de la tangente en un point de la courbe qui figure les variations du polynome. Au reste, les règles relatives à la dérivée d'une somme et d'une puissance suffisent à reconnaître que la dérivée du polynome

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

est

$$f''(x) = nA_0x^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \ldots + A_{n-1};$$

c'est la même expression qu'au Chapitre II.

Puisqu'on sait trouver la dérivée d'un polynome et d'un rapport, on sait trouver la dérivée d'une fraction rationnelle. Le lecteur reconnaîtra sans peine que, si la fraction est décomposée en fractions simples, la dérivée s'obtient de suite comme une somme de fractions simples.

Dérivée de a^x. — On doit chercher la limite, pour $h = 0$, de

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h};$$

or on a vu, au n° 206, que le rapport $\frac{a^h - 1}{h}$ avait $\lg a$ pour limite quand h tendait vers 0. La dérivée de a^x est donc $a^x \lg a$.

Le lecteur observera que la limite de $\frac{a^h - 1}{h} = \frac{a^h - a^0}{h}$ est, par définition, la dérivée a^x pour $x = 0$; c'est de cette valeur particulière qu'on déduit l'expression générale.

La dérivée de e^x est $e^x \lg e = e^x$.

Dérivée de $\lg x$. — En désignant par x un nombre positif, on doit chercher la limite, pour $h = 0$, de

$$\frac{\lg(x+h) - \lg x}{h} = \frac{\lg\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h};$$

en posant $h = xz$, le second membre devient

$$\frac{1}{x} \frac{\lg(1+z)}{z};$$

h et z tendent en même temps vers 0; on a prouvé au n° 206 que, lorsque z tend vers 0, $\frac{\lg(1+z)}{z}$ a pour limite 1. La dérivée de $\lg x$ est $\frac{1}{x}$.

S'il s'agissait d'un logarithme pris dans la base a, on aurait (n° 203)

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a},$$

d'où l'on conclut que la dérivée de $\log_a x$ est $\frac{1}{x \lg a}$; en particulier, la dérivée de $\log_{10} x$ (logarithme vulgaire) est $\frac{M}{x}$.

Dérivées de $\sin x$ **et de** $\cos x$. — Elles se déduisent toutes deux de la dérivée pour $x = 0$ de $\sin x$; cette dérivée est, par définition, la limite, pour $h = 0$, de

$$\frac{\sin h - \sin 0}{h - 0} = \frac{\sin h}{h},$$

que l'on sait être égale à 1.

On a

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

et, d'autre part,

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Lorsque h tend vers 0, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1, les expressions $\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$, $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tendent, en raison de la continuité, vers $\sin x$ et $\cos x$. On voit donc que la dérivée de $\sin x$ est $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, que celle de $\cos x$ est $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Dérivées de $\operatorname{tang} x$ **et de** $\cot x$. — Les dérivées des fonctions

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

résultent des précédentes et de la règle relative à un rapport; elles sont respectivement

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \quad \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

La dérivée de $\operatorname{tang} x$ est $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x$.

La dérivée de $\cot x$ est $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$.

210. Dérivées des fonctions inverses. — Considérons deux fonctions $F(x)$, $f(y)$ inverses l'une de l'autre [1] (n° 199). Je suppose que la fonction $F(x)$ soit définie sans ambiguïté, comme on l'a expliqué dans le n° 199, au moyen de l'équation $x = f(y)$, où $f(y)$ est une fonction connue de y, en sorte que, si l'on considère les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, a') et les valeurs de y qui appartiennent à l'intervalle (b, b'), les deux équations

$$x = f(y), \qquad y = F(x)$$

soient équivalentes, les deux fonctions $f(y)$ et $F(x)$ étant continues et variant dans le même sens dans les intervalles respectifs (b, b'), (a, a'). Je suppose en outre que, pour les valeurs de y appartenant à l'intervalle (b, b'), la fonction $f(y)$ de la variable y admette une dérivée $f'(y)$ qui ne soit pas nulle dans l'intervalle (b, b'); je vais montrer que la fonction $F(x)$ de la variable x admet une dérivée et que cette dérivée est égale à $\frac{1}{f'(y)}$. Pour avoir cette dérivée en fonction de x, on doit y remplacer y par $F(x)$.

Si l'on considère deux systèmes x et y, d'une part, $x + h$ et $y + k$, de l'autre, de valeurs correspondantes des variables, on doit avoir

$$\begin{aligned} x &= f(y), & y &= F(x), \\ x + h &= f(y + k), & y + k &= F(x + h), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$h = f(y + k) - f(y), \qquad k = F(x + h) - F(x);$$

regardons x, y comme fixes, h et k comme variables; lorsque l'une de ces dernières quantités tend vers 0, il en est de même de l'autre, en raison de la continuité; la dérivée cherchée est la limite de

---

[1] Le rôle des lettres x et y, ici et dans le n° 199, est interverti.

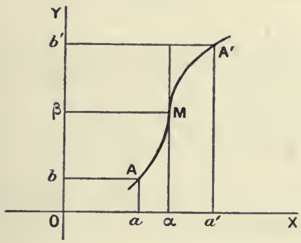
l'expression

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{k}{h}=\frac{k}{f(y+k)-f(y)},$$

lorsque h et, par conséquent, k tendent vers 0; cette limite est l'inverse de la limite du rapport $\frac{f(y+k)-f(y)}{k}$, c'est-à-dire $\frac{1}{f'(y)}$.

Un regard jeté sur la figure éclairera suffisamment la façon dont les choses se passent quand il arrive que la fonction $f'(y)$ s'annule pour une valeur particulière β attribuée à y.

Fig. 62.



Je suppose que, y croissant de b à b', la fonction $f(y)$ croisse de a à a'; inversement, x croissant de a à a', la fonction $F(x)$ croîtra de b à b'.

La fonction $f(y)$ étant croissante dans l'intervalle (b, b') sa dérivée ne peut être que positive ou nulle (nº 207); je suppose que cette dérivée s'annule pour $y=\beta$, valeur à laquelle correspond la valeur α de x. Dire que la dérivée $f'(y)$ s'annule pour $x=\beta$, c'est dire que la tangente à la courbe définie par l'équation $x=f(y)$ est parallèle à l'axe des y; on le voit de suite en intervertissant le rôle des lettres x et y, de l'abscisse et de l'ordonnée, dans le mode habituel de représentation des fonctions. La tangente à la courbe définie par l'équation $y=F(x)$, qui est la même que la précédente, étant parallèle à l'axe OY, il convient de dire que la pente de cette tangente est infinie et que la dérivée de la fonction $F(x)$ est infinie pour $x=\alpha$.

Le lecteur voit comment la courbe traverse nécessairement sa tangente en M.

Le théorème précédent relie les règles qui donnent les dérivées de a^x et de $\lg x$. La dernière fonction peut être regardée comme définie par l'équation $x = e^y$; la dérivée de $\lg x$ est $\frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}\cdot$

En voici d'autres applications.

211. Dérivées des fonctions arc sin x, arc cos x, arc tang x. — La signification de ces fonctions a été précisée au n° 200; elles sont définies respectivement au moyen des équations

$$x = \sin y, \qquad x = \cos y, \qquad x = \operatorname{tang} y;$$

on voit en se reportant à la règle précédente que leurs dérivées respectives sont

$$\frac{1}{\cos y}, \quad -\frac{1}{\sin y}, \quad \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 y}.$$

Pour la première, $\sin y$ étant égal à x, $\cos y$ doit être égal à $\pm\sqrt{1 - x^2}$; mais $y = \operatorname{arc} \sin x$ devant être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, $\cos y$ est positif : la dérivée de arc sin x est $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, en prenant le radical avec la signification arithmétique.

Pour la deuxième, $\cos y$ étant égal à x, $\sin y$ est égal à $\pm\sqrt{1 - x^2}$; mais, puisque y doit être compris entre 0 et π, son sinus doit être positif; la dérivée de arc cos x est $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot$

Pour la troisième, tang y doit être égal à x; la dérivée de arc tang x est $\frac{1}{1 + x^2}\cdot$

Le fait que la somme des dérivées des fonctions arc sin x et arc cos x est nulle pouvait être prévu; il résulte de l'identité

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2},$$

valable pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-1, 1)$.

Dérivées des fonctions hyperboliques inverses. — On a vu au n° 204 comment les fonctions

$$\lg(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \lg\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}},$$

pouvaient être définies au moyen des équations respectives

$$x = \operatorname{sh} y, \qquad x = \operatorname{ch} y, \qquad x = \operatorname{th} y;$$

leurs dérivées respectives seront donc

$$\frac{1}{\operatorname{ch} y}, \quad \frac{1}{\operatorname{sh} y}, \quad \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y};$$

pour la première, on a $x = \operatorname{sh} y$ et, par suite, $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + x^2}$, le radical étant pris avec sa signification arithmétique, puisque $\operatorname{ch} y$ est une fonction essentiellement positive; la dérivée de $\lg(x + \sqrt{1 + x^2})$ est $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Pour la deuxième, on a, $x = \operatorname{ch} y$ et, par suite, $\operatorname{sh} y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$. Dans la détermination choisie pour la fonction inverse de $\operatorname{ch} y$, on suppose y positif; il doit en être de même de $\operatorname{sh} y$, on doit donc prendre $\operatorname{sh} y = \sqrt{x^2 - 1}$; la dérivée de $\lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

La dérivée de $\lg\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ est $\frac{1}{1 - x^2}$.

On donnera tout à l'heure un autre moyen d'obtenir ces trois dérivées.

212. **Dérivée d'une fonction de fonction.** — Soit $u = f(x)$ une fonction de x, admettant une dérivée $u' = f'(x)$. Soit $\varphi(u)$ une fonction de la variable u, qui, regardée comme telle, admet une dérivée $\varphi'(u)$ (¹). Je vais montrer que si, dans $\varphi(u)$, on regarde u comme étant égal à $f(x)$, la dérivée de la fonction de x ainsi obtenue, à savoir $\varphi[f(x)]$, est égale au produit $\varphi'(u)u'$, où il est entendu qu'on doit remplacer u et u' par leurs expressions en fonction de x.

Désignons en effet par x_0, u_0, $\varphi(u_0)$ d'une part, par $x_0 + h$, $u_0 + k$, $\varphi(u_0 + k)$ deux systèmes de valeurs correspondantes de la variable x et des fonctions $u = f(x)$, $\varphi(u) = \varphi[f(x)]$, en sorte que l'on ait

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0), \qquad \varphi[f(x_0 + h)] = \varphi(u_0 + k);$$

on regardera x_0 et u_0 comme fixes, h et k comme variables; à cause

---

(¹) On dit, dans le même sens, que $\varphi'(u)$ est la dérivée de $\varphi(u)$ par rapport à u.

de la continuité, quand h tend vers o, il en est de même de k. La dérivée cherchée de la fonction $\varphi[f(x)]$, pour $x = x_0$, est la limite du rapport

$$\begin{aligned}\frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{h} &= \frac{\varphi(u_0+k)-\varphi(u_0)}{k}\,\frac{k}{h}\\ &= \frac{\varphi(u_0+k)-\varphi(u)}{k}\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\end{aligned}$$

quand h et k tendent vers o ; le dernier membre de la précédente égalité met en évidence l'existence et la valeur de cette limite, qui est bien $\varphi'(u_0)f'(x_0)$.

Je laisse de côté la petite difficulté tenant à ce que, lorsque h tend vers o, k, qui dépend de h, pourrait s'annuler une infinité de fois [1] ; elle ne se présenterait que pour des fonctions singulières prenant une infinité de fois la même valeur ; d'ailleurs le théorème reste vrai dans ce cas encore. Mais je m'arrêterai un instant sur la remarque suivante qui nous sera utile quelquefois :

Il peut se faire, en conservant les notations précédentes, qu'on sache que la fonction de x $\varphi[f(x)]$ admet une dérivée et que l'on sache calculer cette dérivée, mais que, relativement aux fonctions $\varphi(u)$ et $f(x)$, on sache seulement que l'une d'elles, $\varphi(u)$ par exemple, admet une dérivée (par rapport à u) sans que l'on sache calculer la dérivée de l'autre fonction $f(x)$, sans que l'on sache même si cette dérivée existe. Or la démonstration précédente prouve clairement que cette dérivée existe et qu'elle s'obtient en divisant par $\varphi'(u)$ la dérivée de $\varphi[f(x)]$; de même si l'on sait calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$; mais, si l'on ne sait pas calculer la dérivée de $\varphi(u)$ par rapport à u, on voit que cette dérivée s'obtient en divisant par $f'(x)$ la dérivée de $\varphi[f(x)]$.

Si dans la fonction $\psi(v)$ de la variable v, admettant la dérivée $\psi'(v)$ par rapport à la variable v, on regardait cette variable comme étant égale à $\varphi(u)$, puis u comme égal à $f(x)$, $\psi(v)$ serait une fonction de fonction de u, et une fonction de fonction de fonction de x ; en vertu du théorème précédent, la dérivée de $\psi(v)$ regardée comme une fonction de fonction de u, ou la dérivée par rapport à u de $\psi[\varphi(u)]$,

---

(1) *Introd.*, n° 212.

serait

$$\psi'(v)\,\varphi'(u) = \psi'[\varphi(u)]\,\varphi'(u);$$

en vertu du même théorème, la dérivée, par rapport à x, de la fonction $\psi[\varphi(u)]$ où l'on regarde la variable u comme égale à $f(x)$, serait le produit de la dérivée par rapport à u de la fonction $\psi[\varphi(u)]$, par la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ par rapport à x. Finalement la dérivée de la fonction $\psi(v)$ regardée comme une fonction de x est égale à $\psi'(v)\,\varphi'(u) f'(x)$. Il est clair que l'on peut continuer ainsi indéfiniment.

L'importante proposition qu'on vient d'établir permet de relier des règles que l'on a établies séparément.

Ainsi la dérivée de $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ peut se déduire de la dérivée de $\sin x$ et de celle de $\frac{\pi}{2} - x$: si l'on pose pour un instant $u = \frac{\pi}{2} - x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou $\sin u$, devient une fonction de x dont la dérivée (par rapport à x) est $u' \cos u$, en désignant par u' la dérivée de u par rapport à x, qui est ici égale à -1, la dérivée de $\cos x$ est donc $-\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$. De la même façon on voit que la dérivée de $\cot x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ doit être égale à

$$-\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -(1 + \cot^2 x).$$

On a établi, au n° **42**, en se fondant sur une autre définition de la dérivée, que la dérivée du polynome

$$f(x+a) = A_0(x+a)^n + A_1(x+a)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x+a) + A_n,$$

obtenu en remplaçant x par $x + a$ dans le polynome

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

s'obtenait en remplaçant x par $x + a$ dans la dérivée

$$f'(x) = n A_0 x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}$$

du polynome $f(x)$. Il suffit de poser $u = x + a$ pour voir que le polynome $f(x+a) = f(u)$ peut être regardé comme une fonction de fonction, dont la dérivée est $f'(u) \times u'$; ici la dérivée u' de $x + a$

est égale à 1; la dérivée de $f(x+a)$ est donc $f'(x+a)$, en désignant par ce symbole ce que devient le polynome $f'(x)$ quand on y remplace x par $x+a$.

La dérivée de

$$f(\alpha x+\beta) = A_0(\alpha x+\beta)^n + A_1(\alpha x+\beta)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(\alpha x+\beta)+A_n,$$

où l'on suppose que α et β sont des constantes, serait

$$\alpha f'(\alpha x+\beta) = n\alpha A_0(\alpha x+\beta)^{n-1}+(n-1)\alpha A_0(\alpha x+\beta)^{n-2}+\ldots+\alpha A_{n-1},$$

en désignant par $f'(\alpha x+\beta)$ ce que devient la dérivée $f'(x)$ du polynome $f(x)$ quand on y remplace x par $\alpha x+\beta$. Ici $f'(\alpha x+\beta)$ n'est pas la dérivée de $f(\alpha x+\beta)$ par rapport à x.

La règle relative aux fonctions inverses peut aussi être rattachée à la règle relative aux fonctions de fonction :

Si l'on considère en effet la fonction $F(x)$ de la variable x qui définit l'équation $x=f(y)$, on peut, en regardant dans cette équation y comme égal à $F(x)$, observer que $f[F(x)]$ doit être identiquement égal à x, en sorte que la dérivée de cette fonction de fonction doit être identique à la dérivée de x, c'est-à-dire à 1; on doit donc avoir

$$1 = f'(y)\,F'(x),$$

en désignant par $f'(y)$ la dérivée de $f(y)$ par rapport à y. C'est le même résultat qu'au n° 210.

En vertu d'une remarque que l'on a faite plus haut, ce raisonnement ne présuppose pas l'existence de $F'(x)$.

Considérons encore la fonction $y = \operatorname{Arc\,tang}(n\operatorname{tang}x)$ définie au n° 200; on a vu que cette fonction était toujours continue; considérons-la toutefois, dans un intervalle (a, b) auquel n'appartienne aucun multiple impair de $\frac{\pi}{2}$; dans cet intervalle, la fonction $\operatorname{arc\,tang}(n\operatorname{tang}x)$, toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, est continue et ne peut différer de la fonction $\operatorname{Arc\,tang}(n\operatorname{tang}x)$ que par un multiple de π; les deux fonctions ont, dans cet intervalle, la même dérivée; or la dérivée de la fonction $\operatorname{arc\,tang}(n\operatorname{tang}x)$ est

$$\frac{1}{1+(n\operatorname{tang}x)^2}\,\frac{n}{\cos^2 x} = \frac{n}{\cos^2 x+n^2\sin^2 x}.$$

Telle est donc aussi la dérivée de la fonction Arc tang(n tang$x$). Le résultat subsiste lors même que x est égal à $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, k étant un entier quelconque; pour cette valeur de x, en effet, y est aussi égal à $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, en sorte que la dérivée de y est la limite, pour $h=0$, de

$$\frac{\text{Arc tang}\left\{n \,\text{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+h\right]\right\}-(2k+1)\frac{\pi}{2}}{h}.$$

Or le numérateur de cette expression est égal (n° 200) à

$$\text{Arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,h}{n}\right).$$

La limite que l'on veut évaluer n'est autre chose que la dérivée, pour $x=0$, de Arc tang $\left(\frac{\text{tang}\,x}{n}\right)$, c'est-à-dire $\frac{1}{n}$: or c'est là précisément la valeur, pour $x=0$, de

$$\frac{n}{\cos^2 x+n^2\sin^2 x}.$$

Dérivées logarithmiques. Dérivées de u^m. — Si l'on regarde u comme représentant une fonction de x, qui reste positive dans un certain intervalle et qui admette une dérivée u', la fonction (de x) lg$u$ sera définie dans cet intervalle et aura pour dérivée $\frac{u'}{u}$: ce que l'on a désigné plus haut comme la dérivée logarithmique d'une fonction n'est autre chose que la dérivée du logarithme de cette fonction, quand ce logarithme a un sens.

Si, dans l'intervalle des valeurs de x que l'on considère, la fonction u était négative, l'expression lg$u$ n'aurait plus de sens; posons $v=-u$; la fonction lg$v$ est définie dans l'intervalle considéré; sa dérivée, par rapport à x, est $\frac{v'}{v}=\frac{-u'}{-u}=\frac{u'}{u}$. Des deux expressions lg$u$, lg$(-u)$, l'une seulement peut avoir un sens; la dérivée, par rapport à x, de celle qui a un sens est $\frac{u'}{u}$; on peut dire, si l'on veut, que cette dernière expression est la dérivée de lg$|u|$.

Les valeurs de x qui annuleraient u doivent naturellement être exclues.

Si l'on pose, par exemple, $u = x^m$, x étant assujetti à rester positif et m étant quelconque, la dérivée de $\lg x^m$, ou de $m \lg x$, que l'on sait d'ailleurs être $\frac{m}{x}$, devra être égale à $\frac{u'}{u}$; la dérivée u' de x^m est donc égale à $\frac{m}{x} x^m = m x^{m-1}$. On a expliqué plus haut que ce raisonnement ne présuppose pas l'existence de la dérivée de la fonction x^m.

En vertu du théorème des fonctions de fonctions, la dérivée de u^m est $m u^{m-1} u'$, quelle que soit la fonction u, pourvu que cette fonction soit positive et admette une dérivée u'.

En résumé, la règle qui donne la dérivée de u^m lorsque m est un nombre naturel (n° 208) s'applique dans tous les cas.

Il convient d'observer qu'elle s'applique en particulier à une fonction de la forme $\frac{1}{u^m} = u^{-m}$ où m est un nombre entier; la dérivée de cette fonction est $-m u^{-m-1} u'$ ou $\frac{-mu'}{u^{m+1}}$; on pourrait, dans ce cas, appliquer la règle relative à la dérivée d'un rapport; celle qu'on vient de donner conduit de suite au résultat simplifié.

De même, quand on a affaire à un rapport de la forme $\frac{u^p}{v^p}$, où u, v sont des fonctions de x, dont les dérivées sont u', v', il est préférable de l'écrire sous la forme $u^p v^{-q}$ pour trouver sa dérivée

$$p u^{p-1} v^{-q} u' - q u^p v^{-q-1} v' = \frac{p v u' - q u v'}{v^{q+1}} u^{p-1}.$$

La règle qui donne la dérivée de u^m donne aussi la dérivée d'un radical; les dérivées de $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$ sont respectivement $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\frac{-u'}{2u\sqrt{u}}$.

Par exemple la dérivée de $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ est $\frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$.

Pour calculer la dérivée de $\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, déjà obtenue au numéro précédent, on posera $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$; la dérivée cherchée est

$$\frac{u'}{u} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

on reconnaîtra de même que les dérivées de $\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ et de $\lg\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ sont respectivement $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\frac{1}{1 - x^2}$.

Considérons encore la fonction $\lg \operatorname{tang} \frac{x}{2}$ qui est définie quand x varie entre o et π (les limites étant exclues), puisque alors $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ est positive. En posant $u = \operatorname{tang}\frac{x}{2}$, on voit que sa dérivée est $\frac{u'}{u}$. D'ailleurs $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ est une fonction de fonction de x; si l'on pose $v = \frac{x}{2}$, on voit que la dérivée de $\operatorname{tang} v$, par rapport à x, est $\frac{v'}{\cos^2 v} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$; en résumé la dérivée de $\lg \operatorname{tang}\frac{x}{2}$ est

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x};$$

la même dérivée convient à la fonction $\lg\left|\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right|$, où, si l'on veut avoir affaire à une fonction continue, x doit varier dans un intervalle auquel n'appartient aucun multiple de π.

De même la dérivée de $\lg\left|\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ est $\frac{1}{\cos x}$. Le lecteur ramènera aisément un cas à l'autre.

Dans les applications de la règle des fonctions de fonctions, je me suis assujetti, pour une plus grande clarté, à représenter par des lettres distinctes les fonctions qui s'imbriquent les unes dans les autres; le lecteur pourra commencer par faire ainsi, afin de bien reconnaître les fonctions de fonctions; il devra se défaire ensuite de cette habitude et dire, par exemple : la dérivée de $\lg \operatorname{tang}\frac{x}{2}$ est égale à la dérivée $\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}}\right)$ de $\lg\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ par rapport à $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$, multipliée par la dérivée $\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)$ de $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ par rapport à $\frac{x}{2}$, multipliée par la dérivée $\left(\frac{1}{2}\right)$ de $\frac{x}{2}$: la dérivée cherchée est donc

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin x}.$$

L'application de cette règle doit lui devenir très familière; j'en dirai autant de toutes les règles et de tous les exemples des n^{os} 208, 209, 210, 211 et 212, qui doivent être sus par cœur, d'autant que ces règles et ces exemples sont d'un usage continuel. J'insiste d'autant plus sur cette obligation que je crois inutile et même mauvais de confier *beaucoup* de formules à la mémoire. C'est d'ailleurs en les appliquant fréquemment que ces règles et ces formules se fixeront le mieux dans l'esprit. Les règles pour le calcul des dérivées seront complétées aux n^{os} 217 et 219.

213. **Dérivées d'ordre quelconque. Notations.** — Si une fonction $y = f(x)$ admet une dérivée $y' = f'(x)$, cette dérivée, étant une fonction de x, peut admettre elle-même une dérivée que l'on désignera par y'' ou $f''(x)$ et que l'on appelle la dérivée *seconde* de $f(x)$; cette dérivée seconde peut avoir une dérivée $y''' = f'''(x)$, qui sera dite dérivée *troisième* de $f(x)$, et qui sera la dérivée seconde de $f''(x)$; la dérivée $y^{\text{iv}} = f^{\text{iv}}(x)$ de la fonction $f'''(x)$ est la dérivée quatrième de $f(x)$, la dérivée troisième de $f'(x)$, etc. On peut continuer ainsi indéfiniment.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ se représente par $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$. La dérivée $f'(x)$ prend elle-même le nom de dérivée *première*.

Les notations que je viens d'employer ne sont pas les seules usitées; quelques auteurs emploient, pour désigner les dérivées successives de la fonction $f(x)$, les notations

$$\mathrm{D}f(x),\quad \mathrm{D}^2 f(x),\quad \mathrm{D}^3 f(x),\quad \ldots,$$

où il est inutile de dire que les symboles 2, 3, ... ne sont pas des exposants : ils indiquent la répétition d'une même opération.

La notation de Leibniz consiste à représenter la dérivée première d'une fonction y ou $f(x)$ par la notation

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{df(x)}{dx},\quad \frac{df}{dx}.$$

Elle conserve la trace de la définition de la dérivée, la lettre d est l'initiale du mot *différence*. Si l'on regarde pour un instant dx comme un petit accroissement donné à x, comme la petite *différence* entre deux valeurs voisines x et $x + dx$ de la variable, puis dy comme la petite différence entre les valeurs correspondantes y et $y + dy$ de la fonction, le rapport $\frac{dy}{dx}$ sera *voisin* de la dérivée. Nous regarderons ici (au moins jusqu'à ce qu'on ait introduit la notation différentielle) les écritures $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ non comme signifiant un rapport, mais comme de purs symboles représentant le résultat de l'opération qui consiste à prendre la dérivée de y ou de $f(x)$ par rapport à x.

Cette notation a encore l'avantage de spécifier la variable; si, par exemple, $y = \varphi(u)$ est une fonction de la variable u, et si $u = \psi(x)$ est une fonction de x, y pourra être regardé comme une fonction de fonction de x; il y aura lieu de distinguer entre la dérivée $\varphi'(u)$ de y prise par rapport à u, et la dérivée $\varphi'(u)\psi'(x)$ de $y = \varphi[\psi(x)]$ prise par rapport à x; cette distinction se fera naturellement en écrivant $\frac{dy}{du}$ dans le premier cas, et $\frac{dy}{dx}$ dans le second; le théorème des fonctions de fonction pourra alors s'exprimer par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Dans la notation de Leibniz, les dérivées seconde, troisième, ..., $n^{\text{ième}}$ de la fonction y de x se représentent par

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Les chiffres 2, 3, ..., n ne sont pas des exposants, ils rappellent simplement l'*ordre* des dérivées (1).

Voici quelques exemples de cas où la dérivée $n^{\text{ième}}$ s'obtient facilement.

On a vu au Chapitre II la forme des dérivées première, seconde, ..., $n^{\text{ième}}$ d'un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré : cette dernière est une constante, les suivantes sont identiquement nulles.

Si a et b sont des constantes, et n un nombre quelconque, les dérivées première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de $(ax+b)^n$ sont

$$na(ax+b)^{n-1}, \quad n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2}, \quad \ldots,$$
$$n(n-1)\ldots(n-p+1)a^p(ax+b)^{n-p}.$$

---

(1) Au lieu de dire dérivée première, seconde, etc., on dit aussi dérivée du premier ordre, dérivée du second ordre, etc.

Lorsque n est un nombre naturel, l'un des facteurs numériques devient nul dès que p dépasse n. En particulier, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction $\frac{1}{1+x}$ est

$$(-1)^p \frac{1.2\ldots p}{(1+x)^{p+1}}.$$

La dérivée $p^{\text{ième}}$ de

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

est

$$\frac{1.2\ldots p}{2} \frac{(1+x)^{p+1} + (-1)^p(1-x)^{p+1}}{(1-x^2)^{p+1}}.$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de a^x est $a^x(\lg a)^n$; toutes les dérivées de e^x sont égales à e^x.

Les dérivées premières de $\sin x$ et de $\cos x$ peuvent s'écrire $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; on en conclut, de proche en proche, que les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ sont $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; les dérivées successives de l'une quelconque de ces fonctions se reproduisant périodiquement de quatre en quatre.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\lg(1+x)$ est la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{1+x}$; elle est

$$(-1)^{n-1} \frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x)^n}.$$

Soient u, v deux fonctions de x dont on désignera respectivement les dérivées successives par

$$u',\quad u'',\quad \ldots,\quad u^{(n)},\quad \ldots;\qquad v',\quad v'',\quad \ldots,\quad v^{(n)},\quad \ldots;$$

la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit uv est

$$u^{(n)}v + C_1^n u^{(n-1)}v' + C_2^n u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^n uv^{(n)},$$

en désignant par C_1^n, C_2^n, $\ldots$, C_n^n les coefficients de la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un binome (n° 43). Cette formule, qui est souvent utile pour calculer des dérivées $n^{\text{ièmes}}$, se démontre sans peine par induction.

La dérivée de l'expression

$$uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v$$

est

$$uv^{(n+1)} - u'v^{(n)} + u''v^{(n-1)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)} v'$$
$$+ u'v^{(n)} - u''v^{(n-1)} + \ldots - (-1)^n u^{(n)} v' + (-1)^n u^{(n+1)} v;$$

on a écrit sur la première ligne, pour chaque terme, la partie de la dérivée obtenue en prenant la dérivée du second facteur; sur la seconde ligne, l'autre partie. En faisant les réductions, on voit que cette dérivée est égale

$$uv^{(n+1)} + (-1)^n u^{(n+1)} v.$$

214. Dérivées partielles. — Considérons une fonction de plusieurs variables indépendantes, par exemple une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables x, y, z; je la supposerai définie et continue pour toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont aux conditions

$$(1) \qquad A \leqq x \leqq A', \qquad B \leqq y \leqq B', \qquad C \leqq z \leqq C',$$

où A, B, C, A′, B′, C′ sont des nombres donnés; si l'on attribue à y, z des valeurs fixes satisfaisant aux conditions précédentes, $f(x, y, z)$ sera une fonction de x continue dans l'intervalle (A, A′); si elle admet une dérivée, cette dérivée sera dite la dérivée partielle de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à x; elle se représentera par

$$f'_x \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \text{ [1]}.$$

Les dérivées partielles f'_y ou $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_z ou $\frac{\partial f}{\partial z}$, prises par rapport à y et à z, se définiront de la même façon.

Si la fonction $f(x, y, z)$ admet des dérivées partielles pour chaque système de valeurs des variables qui vérifient les conditions (1), il est clair que ces dérivées partielles seront des fonctions de x, y, z définies pour tous ces systèmes de valeurs des variables.

Une dérivée partielle par rapport à une variable se prend en suivant les règles expliquées précédemment; en calculant cette dérivée, on traite les autres variables comme des constantes.

---

(1) Il convient, afin d'éviter les confusions, d'employer un caractère différent (∂) de (d) qui a servi jusqu'ici, pour rappeler qu'il s'agit d'une dérivée partielle.

On a, par exemple, en prenant $f(x,y)=x^y$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y \lg x;$$

on doit supposer x positif.

Si l'on a

$$f(x, y, z)=z \sin\frac{x}{y},$$

on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{y}\cos\frac{x}{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{zx}{y^2}\cos\frac{x}{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\sin\frac{x}{y}$$

Il est à peine utile de dire que les dérivées partielles d'un polynome en x, y, z, ..., que l'on a définies au Chapitre II sont les mêmes expressions que celles qu'on vient de définir.

En parlant d'une fonction $f(x, y, z)$ définie et continue aux environs d'un système de valeurs x_0, y_0, z_0 admettant, pour ce système de valeurs et aux environs, des dérivées partielles continues, j'entendrai qu'il y a un nombre positif ε (non nul) tel que, en posant

$$\begin{array}{lll} A = x_0-\varepsilon, & B = y_0-\varepsilon, & C = z_0-\varepsilon, \\ A' = x_0+\varepsilon, & B' = y_0+\varepsilon, & C' = z_0+\varepsilon, \end{array}$$

la fonction $f(x, y, z)$ soit définie et continue pour toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont aux conditions (1), et admette, au sens qu'on vient de dire, pour ces mêmes valeurs des variables, des dérivées partielles qui soient des fonctions continues de x, y, z.

Tel est le cas, par exemple, de la fonction $z\sin\frac{x}{y}$ pour tout système de valeurs x_0, y_0, z_0 tel que y_0 ne soit pas nul.

Les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z d'une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, dont on vient de parler, sont les dérivées du premier ordre; je suppose que chacune d'elles admette des dérivées premières par rapport à x, y, z, celles-ci seront, pour $f(x, y, z)$, des dérivées secondes; par exemple, les dérivées (premières) de f'_x ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x, y, z, se désigneront par

$$f''_{xx}, \quad f''_{xy}, \quad f''_{xz}$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z};$$

de même

$$f''_{yx}, \quad f''_{yy}, \quad f''_{yz}$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}$$

désignent les dérivées (premières) de f'_y ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à x, y, z, et ainsi de suite. Ces notations se simplifient lorsque l'on peut intervertir l'ordre des dérivations ; c'est ce que l'on peut faire dans le cas des polynomes, comme on l'a montré au Chapitre II ; c'est ce que l'on peut faire, plus généralement, lorsque les dérivées que l'on considère sont des fonctions continues de variables indépendantes ; je le démontrerai un peu plus loin ; je ne m'arrête, pour le moment, qu'à la notation. On a expliqué, à propos des polynomes, la signification du symbole

$$f^{(p)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma},$$

où α, β, γ représentent des nombres entiers, positifs ou nuls, dont la somme est égale à p. La même dérivée $p^{\text{ième}}$ que représente le précédent symbole se représente aussi par

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}.$$

Je répète que cette façon d'écrire ne sera légitimée que lorsqu'on aura prouvé la possibilité d'intervertir l'ordre dans lequel on prend les dérivées.

On a souvent besoin d'écrire un symbole qui représente la *valeur* d'une dérivée partielle pour un système de valeurs attribuées aux variables ; on écrira, par exemple,

$$f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad f^{(p)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x_0, y_0, z_0)$$

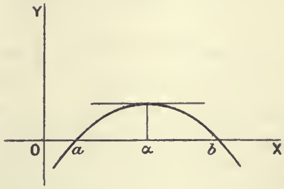
pour désigner ce que deviennent les dérivées seconde et $p^{\text{ième}}$ f''_{x^2}, $f^{(p)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$ quand on y remplace x par x_0, y_0, z_0 ; on écrit aussi quelquefois

$$f''_{x_0^2}, \quad f^{(p)}_{x_0^\alpha y_0^\beta z_0^\gamma}$$

avec le même sens.

215. *Si une fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ dans un intervalle (a, b) et si elle est nulle pour $x = a$ et $x = b$, sa dérivée $f'(x)$ s'annule pour une valeur de x comprise entre a, b et différente de a et de b.*

Fig. 63.



Cette proposition, connue sous le nom de *théorème de Rolle,* revient à dire que, sur l'arc de courbe qui représente la fonction $y = f(x)$ lorsque x croît de a à b, il y a un point d'abscisse α $(a < \alpha < b)$ où la tangente est horizontale.

Sous cette forme la proposition semble intuitive. Le lecteur peut, s'il le veut, se contenter de cette vue, et admettre cette proposition au même titre que les propositions concernant les fonctions continues qu'on lui a demandé d'admettre au n° 196.

Il y a toutefois intérêt à savoir que la démonstration du précédent théorème se ramène à l'une des propositions qu'on vient de rappeler.

Dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ qui, par hypothèse, admet une dérivée, est continue : il nous sera plus tard commode d'avoir observé que la proposition considérée, et la démonstration qui suit, n'impliquent pas l'existence de la dérivée pour les bornes a, b de l'intervalle; mais cette démonstration s'appuie sur la continuité de la fonction $f(x)$ dans tout l'intervalle, bornes comprises; cette continuité est donc essentiellement supposée.

Si la fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), n'est pas nulle dans tout cet intervalle, elle est soit positive, soit négative, pour quelque valeur de x, appartenant à cet intervalle.

Plaçons-nous dans le premier cas, et désignons par α la valeur de x, appartenant à l'intervalle (a, b), pour laquelle la fonction continue $f(x)$ atteint son maximum (n° 196), c'est-à-dire le nombre α

tel que l'on ait $f(\alpha) \geqq f(x)$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, b).

Le nombre $f(\alpha)$ est certainement positif, puisqu'il y a des valeurs de $f(x)$ qui sont positives et que $f(\alpha)$ est supérieur ou égal à ces valeurs. Il suit de là que α n'est égal ni à a, ni à b. Je dis que l'on a $f'(\alpha) = 0$.

En effet, les deux rapports

$$\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}, \qquad \frac{f(\alpha - h) - f(\alpha)}{-h},$$

où h est une variable positive, assujettie à être assez petite pour que les nombres $\alpha + h$, $\alpha - h$ appartiennent toujours à l'intervalle (a, b) tendent vers la même limite $f'(\alpha)$, quand h tend vers 0 ; les numérateurs de ces deux valeurs sont négatifs ou nuls, en vertu de l'hypothèse faite sur $f(\alpha)$; des deux rapports, le premier est négatif ou nul ; sa limite ne peut être positive ; le second est positif ou nul ; sa limite ne peut être négative. Cette limite, qui existe puisqu'il y a une dérivée, et qui n'est ni positive, ni négative, est certainement nulle. La proposition est démontrée. Puisque α n'est ni a, ni b, l'existence de la dérivée pour $x = a$, ou pour $x = b$, n'est pas supposée.

Formule des accroissements finis. — De cette proposition va résulter la suivante :

Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b), le rapport

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

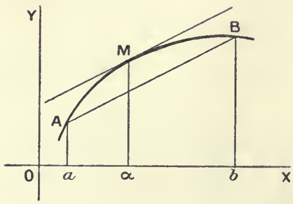
est égal à la dérivée $f'(x)$ pour une valeur de x comprise entre a et b, différente de a et de b.

Remarquons que cette proposition a à peu près le même caractère intuitif que le théorème de Rolle : en effet, si l'on figure la courbe qui représente la fonction $y = f(x)$ dans l'intervalle (a, b), le précédent rapport représente la pente de la droite AB qui joint les deux points A, B correspondants aux valeurs a, b de x ; l'énoncé précédent veut dire qu'il y a sur la courbe un point M dont l'abscisse α est comprise entre a et b, où la tangente est parallèle à AB.

Au reste, ce théorème se ramène au théorème de Rolle en considérant (n° 207) la fonction du premier degré

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Fig. 64.



qui, pour $x = a$ et pour $x = b$, prend les mêmes valeurs $f(a)$ et $f(b)$ que la fonction $f(x)$; la différence

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

entre cette fonction du premier degré et $f(x)$ s'annulera donc pour $x = a$ et pour $x = b$; sa dérivée

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x)$$

s'annulera pour une valeur de x, comprise entre a et b, autre que a et b.

De même que le théorème de Rolle, ce théorème, pourvu que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b), bornes comprises, n'implique pas l'existence de la dérivée aux bornes a, b de l'intervalle.

Le résultat qu'on vient d'établir s'écrit souvent sous la forme qu'on va expliquer.

Si x et $x + h$ sont deux valeurs quelconques de x, appartenant à un intervalle où la fonction $f(x)$ a une dérivée, une valeur quelconque de la variable comprise entre x et $x + h$ pourra être représentée par $x + \theta h$, en désignant par θ un nombre positif (non nul) et moindre que 1. En appliquant le précédent théorème aux nombres x et $x+h$ (au lieu de a et b), on pourra donc écrire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)$$

ou

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h),$$

c'est la formule à laquelle on donne souvent le nom de *formule des accroissements finis.*

Elle permet, en particulier, d'évaluer l'erreur que l'on commet, lorsque, pour calculer la valeur d'une fonction $f(x)$, on substitue à la variable une valeur approchée : soient a la valeur approchée, $a+h$ la valeur exacte, l'erreur est $hf'(a+\theta h)$; elle est donc moindre, en valeur absolue, que $A\alpha$, en désignant par α une limite supérieure de l'erreur commise sur la variable et par A un nombre égal ou supérieur à la plus grande des valeurs absolues de la fonction $f'(x)$, quand x varie de $a-\alpha$ à $a+\alpha$. Il sera, d'ordinaire, aisé d'évaluer A par un calcul grossier. On ne doit pas oublier toutefois que, si la valeur de $f(a)$ n'est pas calculée exactement, l'erreur commise dans le calcul de $f(a)$ peut s'ajouter à celle qu'on vient d'évaluer.

Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer un nombre dont on se donne le logarithme vulgaire et que l'erreur commise sur ce logarithme soit moindre que α; on a ici $f(x)=e^{\frac{x}{M}}$, en désignant par x la valeur exacte du logarithme; l'erreur commise sera donc moindre que $\frac{\alpha}{M}e^{\frac{\xi}{M}}$, en désignant par ξ un nombre compris entre $a-\alpha$ et $a+\alpha$; si l'on suppose ces nombres moindres que 4, on voit que l'erreur sera moindre que

$$\frac{\alpha}{M}e^{\frac{4}{M}}=\alpha\frac{10^4}{M}<2326\alpha,$$

moindre que $\frac{3}{10}$, par conséquent, si l'on suppose $\alpha<10^{-5}$. Le lecteur peut multiplier les exemples de cette nature.

Voici maintenant une application, d'un caractère tout théorique, de la formule des accroissements finis.

Supposons que, lorsque x varie de a à b, la fonction dérivée $f'(x)$ reste inférieure en valeur absolue à un nombre positif fixe L : c'est ce qui arrivera sûrement (n° 196) si elle est continue dans l'intervalle (a, b).

On aura alors, en désignant par x_0, x_1 deux nombres quelconques appartenant à cet intervalle,

$$|f(x_1)-f(x_0)| < \mathrm{L}\,|x_1-x_0|;$$

on voit donc que, si l'on se donne un nombre positif ε, il est possible de lui faire correspondre un nombre $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\mathrm{L}}$ tel que l'on ait certainement

$$|f(x_1)-f(x_0)| < \varepsilon,$$

sous la condition que l'on ait $|x_1 - x_0| < \varepsilon'$ et que les nombres x_0, x_1 appartiennent à l'intervalle (a, b). C'est une proposition que l'on a *énoncée* au n° 196 sous une forme plus générale, sans supposer l'existence de la dérivée.

On verra bientôt l'importance du théorème des accroissements finis pour fonder les propositions relatives à la variation des fonctions. Je vais l'appliquer à la démonstration de quelques règles qu'il me reste à donner pour le calcul des dérivées et, tout d'abord, à démontrer que, pour les fonctions de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre dans lequel on prend les dérivées.

Il suffira (n° 46) d'établir la légitimité de cette interversion dans le cas d'une fonction de deux variables; l'extension est ensuite aisée.

216. Soit $f(x,y)$ la fonction considérée : je suppose que, pour les systèmes de valeurs de x, y que l'on considère et aux environs, elle admette des dérivées partielles du premier ordre continues

$$\varphi(x,y)=f'_x, \qquad \psi(x,y)=f'_y.$$

Mon objet est de démontrer que, si les dérivées partielles $\varphi'_y = f''_{xy}$ et $\psi'_x = f''_{yx}$ sont continues pour le système de valeurs x_0, y_0 attribuées aux variables et aux environs, ces dérivées sont égales.

L'accroissement de la fonction $f(x,y)$, regardée comme une fonction de x seul, quand on passe de la valeur x_0 à la valeur x_0+h est $f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$; c'est une fonction de y, que je désignerai par $g(y)$ et dont la dérivée $g'(y)$ (par rapport à y) est $\psi(x_0+h,y)-\psi(x_0,y)$, puisque $\psi(x_0+h,y)$ et $\psi(x_0,y)$ sont les dérivées respectives, par rapport à y, des fonctions $f(x_0+h,y)$ et $f(x_0,y)$.

L'accroissement $g(y_0+k)-g(y_0)$ de la fonction $g(y)$ quand on passe de la valeur y_0 à la valeur y_0+k est

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)+f(x_0, y_0),$$

et, sous cette forme, il est clair que l'on serait arrivé au même résultat en partant de l'accroissement $f(x, y_0+k)-f(x, y_0)$ de la fonction $f(x, y)$ regardée comme une fonction de y seul, quand on passe de la valeur y_0 à la valeur y_0+k, puis en regardant cette expression $f(x, y_0+k)-f(x, y_0)$ comme une fonction de la seule variable x et en calculant son accroissement quand on passe de la valeur x_0 à la valeur x_0+h. C'est cette remarque évidente qui va nous conduire à la proposition annoncée.

L'accroissement $g(y_0+k)-g(y_0)$ est, en effet, en vertu du théorème des accroissements finis, égal à

$$kg'(y_0+\beta k)=k[\psi(x_0+h, y_0+\beta k)-\psi(x_0, y_0+\beta k)],$$

en désignant par β un nombre positif plus petit que 1, mais, dans le second membre, le facteur que multiplie k peut être regardé comme l'accroissement de la fonction (de x) $\psi(x, y_0+\beta k)$ quand on passe de la valeur x_0 à la valeur x_0+h; en vertu du même théorème, cet accroissement est égal au produit par h de la dérivée (par rapport à x) de cette fonction, pour une valeur $x_0+\alpha h$ de la variable comprise entre x_0 et x_0+h; le dernier membre de l'égalité précédente est donc $hk\psi'_x(x_0+\alpha h, y_0+\beta k)$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} &f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)+f(x_0, y_0)\\ &\quad = hk\psi'_x(x_0+\alpha h, y_0+\beta k): \end{aligned}$$

mais, si l'on avait fait les choses dans l'autre sens, si l'on était parti de l'accroissement $f(x, y_0+k)-f(x, y_0)$ regardé comme une fonction de x, pour calculer l'accroissement de cette fonction quand on passe de x_0 à x_0+h, on serait évidemment arrivé à l'expression $hk\psi'_y(x_0+\alpha' h. y_0+\beta' k)$ en désignant par α', β' des nombres qui, comme α et β, sont compris entre 0 et 1; les deux résultats doivent être égaux et l'on doit avoir

$$\psi'_x(x_0+\alpha h, y_0+\beta k)=\varphi'_y(x_0+\alpha' h, y_0+\beta' k).$$

Les deux fonctions ψ'_x, φ'_y étant, par hypothèse, des fonctions continues, les deux membres, lorsqu'on fait tendre h et k vers 0, ont pour limites respectives $\psi'_x(x_0, y_0)$ et $\varphi'_y(x_0, y_0)$: ces deux quantités sont donc égales; c'est ce qu'il fallait démontrer.

217. **Fonctions composées.** — Soit $f(u, v)$ une fonction des deux variables indépendantes u, v; je suppose que, pour chaque système de valeurs de ces variables que je considérerai et aux environs, la fonction soit continue et admette des dérivées partielles continues.

Regardons maintenant u, v comme des fonctions de la variable indépendante x, continues dans l'intervalle (a, b) et admettant, dans cet intervalle, des dérivées u', v'. Il est bien entendu que les valeurs que prennent u, v quand x appartient à l'intervalle (a, b) sont de celles pour lesquelles les conditions imposées à la fonction $f(u, v)$ sont vérifiées. La fonction $f(u, v)$ devient alors une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b), fonction dont on dit qu'elle est *composée* avec les fonctions u, v; je vais montrer que cette fonction (de x) admet une dérivée (par rapport à x) et que cette dérivée est

$$f'_u u' + f'_v v' \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v'.$$

Ne regardons pas encore u, v comme des fonctions de x, et considérons deux systèmes de valeurs u_0 et v_0, $u_0 + \Delta u_0$ et $v_0 + \Delta v_0$ attribuées aux variables u, v dans la fonction $f(u, v)$; la différence

$$f(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \Delta v_0) - f(u_0, v_0)$$

entre les valeurs de la fonction f qui correspondent à ces deux systèmes de valeurs des variables peut s'écrire

$$[f(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \Delta v_0) - f(u_0 + \Delta u_0, v_0)] + [f(u_0 + \Delta u_0, v_0) - f(u_0, v_0)].$$

Le premier crochet peut être regardé comme l'accroissement de la fonction de la seule variable v, $f(u_0 + \Delta u_0, v)$ quand on passe de la valeur v_0 à la valeur $v_0 + \Delta v_0$ de cette variable; il est donc égal au produit par Δv_0 de la valeur que prend la dérivée par rapport à v de la fonction $f(u_0 + \Delta u_0, v)$ quand on y remplace v par une valeur $v_0 + \theta \Delta v_0$ intermédiaire à v_0, $v_0 + \Delta v_0$; en sorte qu'on peut écrire

$$f(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \Delta v_0) - f(u_0 + \Delta u_0, v_0) = \Delta v_0 \, f'_v(u_0 + \Delta u_0, v_0 + \theta \Delta v_0).$$

On a de la même façon

$$f(u_0+\Delta u_0,\, v_0)-f(u_0,\, v_0)=\Delta u_0 f'_u\,(u_0+\theta'\Delta u_0,\, v_0),$$

θ' désignant un nombre compris entre o et 1. On a finalement

$$(1)\qquad \begin{aligned} &f(u_0+\Delta u_0,\, v_0+\Delta v_0)-f(u_0,\, v_0)\\ &\quad=\Delta v_0 f'_v\,(u_0+\Delta u_0,\, v_0+\theta\Delta v_0)+\Delta u_0 f'_u\,(u_0+\theta'\Delta u_0,\, v_0); \end{aligned}$$

cette égalité a lieu quels que soient u_0, v_0, Δu_0, Δv_0.

Supposons maintenant que l'on considère deux valeurs voisines x_0 et $x_0+\Delta x_0$ de la variable x et désignons maintenant par u_0 et v_0, $u_0+\Delta u_0$ et $v_0+\Delta v_0$ les valeurs correspondantes des fonctions u, v de cette variable; l'accroissement de la fonction (de x) $f(u,\, v)$ quand on passe de la valeur x_0 à la valeur $x_0+\Delta x_0$ sera le premier membre de l'égalité (1), et la recherche de la dérivée de la fonction de x revient à la recherche de la limite de

$$\frac{\Delta v_0}{\Delta x_0} f'_v\,(u_0+\Delta u_0,\, v_0+\theta\,\Delta v_0)+\frac{\Delta u_0}{\Delta x_0}\, f'_u(u_0+\theta'\Delta u_0,\, v_0),$$

quand Δx_0, Δu_0, Δv_0 tendent vers o; or, dans ces conditions, $\frac{\Delta v_0}{\Delta x_0}$, $\frac{\Delta u_0}{\Delta x_0}$ tendent vers les valeurs v'_0, u'_0 des dérivées v', u' des fonctions v, u pour $x=x_0$; les fonctions (des deux variables u, v) f'_v et f'_u étant continues, les expressions

$$f'_v\,(u_0+\Delta u_0,\, v_0+\theta\,\Delta v_0),\quad f'_u\,(u_0+\theta'\Delta u_0,\, v_0)$$

tendent vers les valeurs $f'_v\,(u_0,\, v_0)$, $f'_u(u_0,\, v_0)$ des dérivées partielles f'_v, f'_u pour $u=u_0$, $v=v_0$; il n'y a maintenant aucun inconvénient à supprimer l'indice o et à dire :

La dérivée par rapport à x de la fonction $f(u,\, v)$ *composée* avec les deux fonctions (de x) u et v est $f'_u u'+f'_v v'$.

La proposition qu'on vient d'énoncer peut s'écrire

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Elle s'étend aux fonctions composées avec autant de fonctions u, v, w, ... que l'on veut. Bornons-nous au cas d'une fonction de trois variables $f(u, v,\, w)$, où l'on regardera u, v, w comme des fonctions de x; sous des conditions analogues à celles que l'on a spécifiées au début de ce numéro, on aura pour la dérivée de la fonction de x ainsi composée

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} = f'_u\,u' + f'_v\,v' + f'_w\,w',$$

ainsi qu'il résulte de la suite d'égalités que voici :

$$\begin{aligned}
&f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w) - f(u,\ v,\ w)\\
&\quad = [f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w] - f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w)]\\
&\qquad + [f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w] - f(u+\Delta u,\ v,\ w)]\\
&\qquad + [f(u+\Delta u,\ v,\ w) - f(u,\ v,\ w)]\\
&\quad = \Delta w\, f'_w(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\theta\,\Delta w)\\
&\qquad + \Delta v\, f'_v(u+\Delta u,\ v+\theta'\Delta v,\ w)\\
&\qquad + \Delta u\, f'_u(u+\theta''\Delta u,\ v,\ w).
\end{aligned}$$

Les règles relatives à la dérivée d'un produit uv ou d'un quotient $\frac{u}{v}$ fournissent des applications immédiates des règles précédentes.

On a en effet, par exemple,

$$\frac{\partial(uv)}{\partial u} = v, \qquad \frac{\partial(uv)}{\partial v} = u;$$

la dérivée de uv par rapport à x, lorsque u, v sont des fonctions de x, est donc $vu' + uv'$, en désignant par u', v', les dérivées de u, v.

La dérivée [1] de u^v est

$$vu^{v-1}u' + u^v v' \lg u = u^{v-1}(vu' + uv' \lg v).$$

---

[1] Pour calculer la dérivée d'une fonction comportant ainsi des exposants, il est commode de prendre le logarithme de la fonction; par exemple, en conservant la même signification à u, v on posera $y = u^v$; d'où $\lg y = v \lg u$, puis en prenant les dérivées

$$\frac{y'}{y} = v' \lg u + \frac{u'v}{u},$$

$$y' = u^v\left(v' \lg u + \frac{u'v}{u}\right).$$

Si l'on avait

$$y = x^{\lg x},$$

on en déduirait

$$\lg y = (\lg x)^2,$$

$$\frac{y'}{y} = 2\,\frac{\lg x}{x}, \qquad y' = 2x^{-1+\lg x}\lg x.$$

Si en particulier on suppose $u = x$, $v = x$, on voit que la dérivée de x^x est

$$x^x(1 + \lg x).$$

Si l'on considère les éléments d'un déterminant comme des variables, il est clair que la dérivée partielle du déterminant par rapport à chacun de ses éléments sera le mineur relatif à cet élément. De cette remarque, de la règle précédente, et de la règle relative au développement d'un déterminant par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne, résulte immédiatement la proposition suivante :

La dérivée d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont les éléments dépendent d'une variable, est la somme de n déterminants dont chacun s'obtient en remplaçant, dans le déterminant proposé, les éléments d'une des n colonnes par leurs dérivées respectives, ou les éléments d'une des n lignes par leurs dérivées respectives.

En particulier, si, pour une valeur de la variable, tous les mineurs sont nuls, la dérivée du déterminant est nulle pour cette valeur de la variable.

La règle pour prendre la dérivée d'une fonction composée s'applique aux dérivées seconde, troisième, etc.

Supposons, en conservant les notations antérieures, qu'il s'agisse de la fonction composée $f(u, v, w)$. Sa dérivée première est

$$f'_u\, u' + f'_v\, v' + f'_w\, w'.$$

Chaque terme est un produit et sa dérivée s'obtient par la règle relative aux produits : en prenant les dérivées des seconds facteurs, on obtiendra les termes

$$f'_u\, u'' + f'_v\, v'' + f'_w\, w''$$

qui devront figurer dans la dérivée seconde; devront y figurer aussi les produits de u', v', w' par les dérivées respectives des fonctions (de x) f'_u, f'_v, f'_w : ces fonctions sont des fonctions composées; la dérivée de la première est

$$\frac{\partial f'_u}{\partial u} u' + \frac{\partial f'_u}{\partial v} v' + \frac{\partial f'_u}{\partial w} w',$$

ou

$$f''_{u^2}\, u' + f''_{uv}\, v' + f''_{uw}\, w';$$

la dérivée de la seconde et de la troisième sont respectivement

$$f''_{uv}\,u' + f''_{v^2}\,v' + f''_{vw}\,w',$$
$$f''_{uw}\,u' + f''_{vw}\,v' + f''_{w^2}\,w',$$

et l'on a finalement, pour l'expression de la dérivée seconde,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2} = {} & f'_u\,u'' + f'_v\,v'' + f'_w\,w'' \\ & + f''_{u^2}\,u'^2 + f''_{v^2}\,v'^2 + f''_{w^2}\,w'^2 \\ & + 2f''_{vw}\,v'\,w' + 2f''_{uw}\,u'\,w' + 2f''_{uv}\,u'\,v'.\end{aligned}$$

Cette formule peut s'écrire, si l'on préfère,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2} = {} & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{d^2 w}{dx^2} \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

On peut continuer ainsi.

218. Formule des accroissements finis pour les fonctions de plusieurs variables. — Soit, par exemple, $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables. Je vais donner une expression de la différence

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0),$$

qui peut être regardée comme l'accroissement de la fonction $f(x, y, z)$ quand on passe du système x_0, y_0, z_0 au système $x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l$.

Je suppose que pour chaque système de valeurs que l'on obtient en faisant varier t de 0 à 1 dans les expressions

$$x_0 + ht, \quad y_0 + kt, \quad z_0 + lt,$$

et aux environs de chacun de ces systèmes, la fonction $f(x, y, z)$ soit continue et admette des dérivées partielles continues. Regardons dans la fonction $f(x, y, z)$ les variables x, y, z comme respectivement égales aux fonctions (de t) $x_0 + ht$, $y_0 + kt$, $z_0 + lt$, dont les dérivées (par rapport à t) sont les constantes h, k, l; la fonction $f(x, y, z)$ deviendra alors une fonction (composée de t) dont la dérivée (par rapport à t) sera $hf'_x + kf'_y + lf'_z$: or la différence dont on cherche une expression peut être regardée comme l'accroissement de la fonction (de t)

$$f(x_0 + ht, y_0 + kt, z_0 + lt),$$

quand on passe de la valeur o à la valeur 1 de la variable; elle sera donc égale à l'accroissement 1 de la variable multiplié par une valeur de la dérivée pour une valeur θ de t comprise entre o et 1; en d'autres termes on aura

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) \\ & = hf'_x \ (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z_0 + \theta l) \\ & \quad + kf'_y (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z_0 + \theta l) \\ & \quad + lf'_z \ (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z_0 + \theta l). \end{aligned}$$

C'est la formule cherchée.

Cette formule, comme celle du n° 215, est précieuse pour l'évaluation des erreurs. Supposons qu'on veuille calculer la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ pour un certain système de valeurs de $x, y, z, \ldots$ auxquelles on substitue des valeurs approchées $a, b, c, \ldots$, les erreurs étant moindres respectivement, en valeur absolue, que α, β, γ, ... On verra, comme au n° 215, que l'erreur qui en résulte pour $f(x, y, z, \ldots)$ est moindre, en valeur absolue, que $A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots$, en désignant par A, B, C, ... des nombres positifs, respectivement égaux ou supérieurs aux plus grandes valeurs absolues de $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$, quand $x, y, z, \ldots$ varient respectivement dans les intervalles $(a - \alpha, a + \alpha)$, $(b - \beta, b + \beta)$, $(c - \gamma, c + \gamma)$, ... D'ordinaire, on pourra évaluer les coefficients A, B, C, ... au moyen d'un calcul grossier. Toutefois, l'évaluation de l'erreur par la formule précédente suppose qu'on fasse exactement le calcul de $f(a, b, c, \ldots)$, ce qui, le plus souvent, est impossible ou très fastidieux : on devra donc ajouter à $A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots$ une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation même de $f(a, b, c, \ldots)$. Cette limite supérieure s'obtient encore en s'appuyant sur la formule des accroissements finis; on peut, du reste, ne pas tenir compte de l'erreur commise sur l'évaluation de $f(a, b, c, \ldots)$ lorsqu'on fait les calculs avec une précision telle que l'erreur qui en résulte soit très inférieure à $A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots$.

On peut, d'ailleurs, être amené à partager le calcul en plusieurs étapes, à évaluer les erreurs commises à chaque étape et leur répercussion sur les étapes ultérieures; on aura, au fond, à appliquer plusieurs fois la même méthode.

Quoi qu'il en soit, en regardant la formule $A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots$ comme exacte, on observera d'abord qu'elle contient, comme cas particuliers, les règles données dans la note du n° 138 pour l'évaluation de l'erreur commise sur une somme, un produit, un quotient.

Cette formule, en supposant connus les coefficients A, B, C, ..., permet de résoudre les deux problèmes fondamentaux de la théorie des erreurs, celui que l'on a posé d'abord, et le problème inverse : lorsqu'on veut calculer la valeur d'une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ avec une erreur moindre qu'un nombre positif donné ε, avec quelle approximation faut-il connaître ces nombres $a, b, c, \ldots$ que l'on substituera aux valeurs exactes de $x, y, z, \ldots$? On a alors à résoudre, par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, l'inégalité $A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots < \varepsilon$. Le problème comporte une indétermination évidente, dont on profitera pour le mieux. Si les coefficients A, B, C,... sont peu différents, on pourra prendre tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ inférieurs au quotient de ε par la somme $A + B + C + \ldots$; dans le cas contraire, on pourra prendre, par exemple, $\alpha < \frac{\varepsilon}{nA}$, $\beta < \frac{\varepsilon}{nB}$, $\gamma < \frac{\varepsilon}{nC}$, $\cdots$ en supposant qu'il y ait n nombres $x, y, z, \ldots$. Il arrive d'ailleurs fréquemment, dans les applications, que certains des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont connus : on retranchera de ε la somme de ces nombres respectivement multipliés par leurs coefficients; la différence doit être positive pour que le problème soit possible : il se ramène évidemment à la résolution d'une inégalité de la même forme que celle qu'on vient de considérer.

Supposons maintenant qu'on veuille réduire en nombres une formule : dans cette formule peuvent figurer certains nombres qui résultent de mesures forcément inexactes, ou de calculs antérieurs, dont les résultats ne sont qu'approchés, il peut y figurer aussi des nombres (comme π ou e) qu'on peut avoir avec telle approximation qu'on veut, mais auxquels il faudra bien, pour faire les calculs, substituer des nombres approchés. On remplacera par des lettres, dans la formule, tous les nombres auxquels on devra substituer des valeurs approchées ; la formule prend alors l'apparence d'une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ et l'on est ramené aux problèmes précédents.

Soit, par exemple, à calculer $\sqrt{a(\lg b)^2 - c \sin\frac{\pi}{2}d}$, où l'on suppose $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $b = 72,5$, $c = 0,087$, $d = 0,373$; relativement aux trois derniers nombres, on suppose que chacun d'eux est connu avec une erreur moindre qu'une unité de l'ordre du dernier chiffre.

En regardant, pour un instant, les lettres a, b, c, d comme des variables, on aura, pour appliquer la méthode précédente, à calculer des nombres positifs A, B, C, D respectivement supérieurs aux valeurs absolues des dérivées partielles

$$\frac{(\lg b)^2}{2\,\mathrm{R}}, \quad \frac{2\frac{a}{b}\log b}{2\,\mathrm{R}}, \quad \frac{-\sin\frac{\pi}{2}d}{2\,\mathrm{R}}, \quad \frac{-c\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}d}{2\,\mathrm{R}},$$

où R a été mis à la place du radical ; un calcul très grossier, où l'on pourra s'aider de tables à un petit nombre de décimales, permet de reconnaître que, dans les limites où l'on suppose que a, b, c, d restent compris, R reste supérieur à 3, et qu'on peut prendre $\mathrm{A} = \frac{35}{10}$, $\mathrm{B} = \frac{1}{100}$, $\mathrm{C} = \frac{1}{10}$, $\mathrm{D} = \frac{3}{100}$; les nombres β, γ, δ sont ici donnés et sont égaux respectivement à 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3} : dans l'expression $\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma$ de l'erreur, la partie $\mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma + \mathrm{D}\delta$ est connue ; elle est inférieure à $10^{-3} + 2.10^{-4}$; il serait déraisonnable de prétendre obtenir le résultat avec une approximation d'un ordre supérieur au millième ; il serait déraisonnable de calculer $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ avec un très grand nombre de chiffres décimaux : si on le calculait avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-4}$, et si tous les calculs ultérieurs étaient faits exactement, on pourrait compter que l'erreur finale serait moindre que 2.10^{-3}. Cette supposition, qu'on fait exactement les calculs ultérieurs, est d'ailleurs absurde, puisqu'on ne peut avoir les valeurs exactes des logarithmes, de la racine, ... ; mais, si l'on fait les calculs avec une table à cinq décimales, on peut compter que les erreurs provenant de ces calculs n'affecteront pas la troisième décimale du résultat (¹).

Pour effectuer le calcul, on cherchera le nombre dont le logarithme serait égal à $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\pi + 2\log(\log 72,5) - 2\log \mathrm{M}$, et l'on en retranchera le

(¹) C'est là un point dont le lecteur pourra se convaincre par un raisonnement analogue à celui du n° 215, pour le passage des logarithmes aux nombres.

nombre dont le logarithme serait égal à la somme des logarithmes de 0,087 et du sinus de 37 grades, 3 dixièmes; on extraira, toujours au moyen des logarithmes, la racine carrée de la différence. On trouve ainsi 3,8201; on pourra compter que le nombre 3,82 est approché avec une erreur moindre qu'un centième. Des tables à quatre décimales auraient suffi pour parvenir au nombre 3,82.

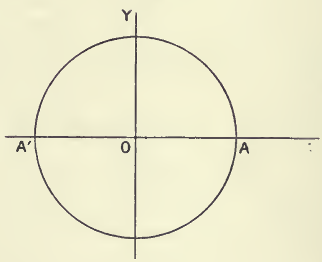
219. Fonctions implicites. — Considérons l'équation

$$x^2+y^2-r^2=0; \tag{1}$$

on en tire $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$; si dans l'équation (1) on remplace y par l'une ou l'autre de ces expressions, son premier membre se réduit identiquement à 0.

L'équation (1) définit deux fonctions de x, à savoir $\sqrt{r^2-x^2}$ et $-\sqrt{r^2-x^2}$, dont chacune est continue dans l'intervalle $(-r, +r)$. Ceci apparaît aussi clairement sur la figure. L'équation (1) représente

Fig. 65.



le cercle de centre O et de rayon r, c'est-à-dire que le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'équation (1) est le cercle qu'on vient de dire, la fonction $\sqrt{r^2-x^2}$ est représentée par le demi-cercle supérieur, la fonction $-\sqrt{r^2-x^2}$ par le demi-cercle inférieur; les arcs de courbe qui représentent ces deux fonctions et dont chacun n'est rencontré qu'en un point par les parallèles à l'axe des y se raccordent aux points A, A′, où les tangentes sont parallèles à cet axe.

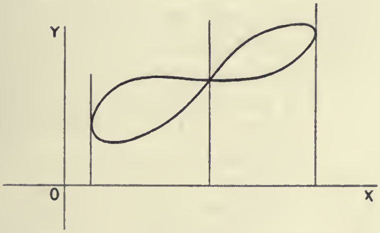
Regardons, dans l'équation (1), y comme égal à l'une des deux expressions $\sqrt{r^2 - x^2}$, $-\sqrt{r^2 - x^2}$, dont on sait d'ailleurs qu'elles admettent une dérivée pour les valeurs de x *intérieures* à l'intervalle $(-r, r)$, et désignons par y' la dérivée de y (par rapport à x). La dérivée du premier membre est $2x + 2yy'$; ce premier membre étant identiquement nul, il en est de même de sa dérivée; on a donc

$$y' = -\frac{x}{y};$$

où il est entendu qu'on doit regarder y comme égal à l'une des fonctions $\sqrt{r^2 - x^2}$, $-\sqrt{r^2 - x^2}$; et, en effet, on retrouve ainsi un résultat déjà obtenu.

Sous certaines conditions relatives à la continuité de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées partielles, le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'équation $f(x, y) = 0$ est une courbe, qui peut d'ailleurs être composée d'une ou plusieurs branches. Ces branches peuvent être décomposées en arcs de courbe tels que chacun d'eux ne soit rencontré qu'en un point par une parallèle à l'axe des x; ces arcs de courbe sont limités, le plus souvent, à des points où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des y, comme dans l'exemple précédent. Ils peuvent aussi être limités à des points *multiples* de la courbe, où elle se croise elle-même; par exemple dans la figure 66, la courbe en 8

Fig. 66.

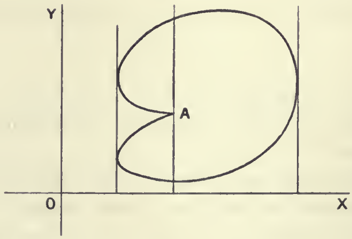


peut être partagée en quatre arcs dont chacun n'est rencontré qu'en un point par les parallèles à l'axe des y. On peut d'ailleurs la décomposer en deux arcs seulement.

La courbe de la figure 67, qui présente en A un point de *rebroussement,* se décompose en quatre parties.

En outre, il peut y avoir des branches de courbe qui s'éloignent indéfiniment, soit que les deux coordonnées grandissent indéfini-

Fig. 67.



ment, soit qu'une seule grandisse indéfiniment. Telles sont les principales circonstances qui peuvent se présenter pour les courbes algébriques, c'est-à-dire pour les courbes définies par une équation $f(x, y) = 0$ dont le premier membre est un polynome. D'autres circonstances peuvent se présenter pour d'autres courbes, dont il peut arriver, par exemple, qu'une branche s'arrête brusquement.

Est-il utile de dire au lecteur que tout ceci n'est qu'une description destinée à lui faire connaître, sans démonstration, comment les choses se passent dans les cas les plus simples ?

Quoi qu'il en soit, admettons qu'on ait isolé, dans la courbe définie par l'équation $f(x, y) = 0$, un trait continu limité à deux points dont les abscisses sont a, b et qui ne soit rencontré qu'en un point par les parallèles à l'axe des y; cela revient à dire qu'on a défini dans l'intervalle (a, b) une certaine fonction continue $y = \varphi(x)$, telle que l'expression $f(x, y)$, quand on y remplace y par $\varphi(x)$, soit nulle pour toutes les valeurs de x considérées. Si l'on sait résoudre par rapport à y l'équation $f(x, y) = 0$, si, par exemple, cette équation est une équation du second degré en y, $\varphi(x)$ est une des racines de cette équation. Si l'on ne sait pas effectuer cette résolution, on peut imaginer qu'on sache, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, b), choisir, parmi les diverses racines que peut avoir l'équation (en y) $f(x, y) = 0$, celle qui est égale à $\varphi(x)$. On a alors défini, dans l'intervalle (a, b), y comme une fonction *implicite* de x [1].

Supposons de plus que le trait de courbe considéré admette une tangente en chacun de ses points, ou que la fonction $\varphi(x)$ admette une dérivée pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), il sera aisé de calculer cette dérivée.

Lorsque dans l'expression $f(x, y)$ on regarde y comme désignant $\varphi(x)$, cette expression est nulle, quelle que soit la valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b). Cette expression devient ainsi une fonction composée de x, qui est nulle dans tout cet intervalle : il en est de même de sa dérivée par rapport à x ; or cette dérivée, d'après la règle du n° 217, s'obtient en multipliant la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x par la dérivée de x, qui est 1, et en ajoutant le produit de la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à y par la dérivée $\varphi'(x)$ ou y' de y ; on a donc $f'_x + y' f'_y = 0$, et, par suite, en supposant f'_y différent de 0,

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y},$$

où il est bien entendu que, dans le second membre, y doit être toujours supposé égal à $\varphi(x)$.

Si f'_x était nul pour quelque valeur de x, la tangente au point correspondant de la courbe serait parallèle à l'axe des x : sans que j'insiste sur ce point, le lecteur reconnaîtra, par raison de symétrie, que, si f'_y est nul sans que f'_x le soit, la tangente doit être parallèle à l'axe des y, et qu'il convient de dire que la dérivée y', qui à proprement parler n'existe pas, devient infinie. Mais, pour un point de la courbe où l'on aurait à la fois $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, la méthode précédente ne donne absolument rien. Un tel point (au moins pour les courbes algébriques) est dit *multiple* [2].

---

(1) Lorsque y est exprimé au moyen de x de manière que l'on sache quels calculs il faut effectuer sur x pour avoir y, lorsque, par exemple, y est une de ces fonctions élémentaires de x étudiées dans le Chapitre précédent, ou une combinaison de ces fonctions, y est une fonction *explicite* de x. Pour peu que le lecteur y réfléchisse, il reconnaîtra que la distinction entre les mots *implicite* et *explicite* regarde la forme et non le fond.

(2) L'étude de ces points, où il arrive que deux ou plusieurs branches de la courbe peuvent se croiser, est en dehors du cadre de ce livre.

Supposons par exemple qu'on ait

$$f(x, y) = \lg \sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{tang}\frac{y}{x};$$

je ne m'arrête pas à construire la courbe définie par l'équation $f(x, y) = 0$, ni à isoler sur cette courbe un *trait* qui satisfasse aux conditions imposées; je me borne, pour calculer la dérivée de y par rapport à x, à appliquer les règles précédentes : on aura

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} - \frac{y'x-y}{x^2+y^2} = 0,$$

d'où

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

La règle qu'on vient d'expliquer aurait besoin d'être complétée en démontrant l'*existence* de ces traits de courbe continus que l'on a admise, et l'*existence* d'une tangente en chacun de leurs points ([1]). On démontre que, si le système de valeurs x_0, y_0 attribuées aux variables x, y vérifie l'équation $f(x, y) = 0$, si, pour ce système et aux environs, la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées continues, et si la dérivée partielle f'_y n'est pas nulle pour ce système, il y a effectivement un trait de courbe et un seul qui passe par le point dont les coordonnées sont x_0, y_0 et que, en ce point, il y a une tangente dont la pente est la valeur de $-\frac{f'_x}{f'_y}$ pour $x = x_0$, $y = y_0$. En partant d'un autre point, sur ce trait de courbe, on arrive à le prolonger, et ainsi de proche en proche, tant que les conditions imposées à $f(x, y)$ et à ses dérivées sont vérifiées.

La règle pour calculer la dérivée de la fonction implicite de x définie par l'équation $f(x, y) = 0$ s'applique en particulier au calcul de la dérivée d'une fonction *inverse* d'une fonction donnée (n° 210). Ce cas particulier a été isolé, d'une part en raison de son importance, d'autre part parce que l'existence de la fonction inverse et de sa dérivée a pu être mise facilement en évidence.

La même règle s'applique au calcul des dérivées successives. Si, par exemple, on veut, en reprenant les notations précédentes, calculer

---

([1]) *Introd.*, n° 221.

la dérivée $\varphi''(x)$ ou y'' de la fonction $\varphi(x)$, on partira de l'équation

$$f'_x + y' f'_y = 0,$$

et l'on regardera, dans cette équation, y comme égal à $\varphi(x)$, y' comme égal à $\varphi'(x)$; elle est alors vérifiée pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, b), la dérivée du premier membre est nulle; on la prendra encore par la règle du n° 217; elle est

$$y'' f'_y + f''_{x^2} + y' f''_{xy} + y' [f''_{xy} + y' f''_{y^2}],$$

en sorte que l'on a, pour déterminer y'', l'équation du premier degré

$$y'' f'_y + f''_{x^2} + 2y' f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2} = 0.$$

Il est bien entendu, que, dans le premier membre de cette équation, on doit supposer y égal à $\varphi(x)$, y' égal à $-\frac{f'_x}{f'_y}$.

Si, pour la valeur de x considérée, f'_y était nul, en sorte que y' fût infini, l'équation précédente n'aurait plus de sens, bien qu'elle semble se réduire à une équation du second degré en y'; je me borne à dire que cette équation

$$y'^2 f''_{y^2} + 2y' f''_{xy} + f''_{x^2} = 0,$$

dans le cas où l'on a $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ et où ses racines sont réelles et distinctes, donne les pentes des deux tangentes aux traits de courbe qui passent par le point (multiple) considéré, à moins que les trois dérivées partielles du second ordre f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} ne soient nulles pour les coordonnées de ce point. Cette assertion devient évidente si l'on admet l'existence de ces deux traits de courbe et l'existence de leurs tangentes.

On peut évidemment continuer de la même façon.

220. Changement de variables. — Supposons qu'on se donne une fonction de x, $y = f(x)$, et qu'on veuille substituer à x une autre variable t, liée à x par une relation telle que $x = \varphi(t)$; on n'aura qu'à remplacer, dans $f(x)$, x par $\varphi(t)$; c'est là le cas le plus simple du changement de variable : la règle relative aux fonctions de fonctions permet de calculer les dérivées successives de $f(x)$ considéré comme une fonction (de fonction) de t, connaissant les dérivées par rapport à x de $f(x)$ et les dérivées par rapport à t de $\varphi(t)$.

Supposons maintenant que x et y soient des fonctions données de t

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

y peut être regardé comme une fonction de x définie de la manière suivante : l'équation $x = \varphi(t)$ définit t comme fonction de x; regardant t comme cette fonction de x dans $\psi(t)$, y est la fonction de x définie par les deux équations précédentes; on peut se proposer de calculer les dérivées de y par rapport à x.

Désignons par $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ les dérivées par rapport à t des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, par t'_x la dérivée de t regardé comme la fonction de x que définit l'équation $x = \varphi(t)$, par y'_x la dérivée de la fonction de x que l'on obtient en remplaçant, dans $\psi(t)$, t par la fonction de x que définit l'équation $x = \varphi(t)$; on a (nos **210**, **212**)

$$t'_x = \frac{1}{\varphi'(t)}, \qquad y'_x = \psi'(t)\, t'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Supposons maintenant qu'on veuille avoir la dérivée seconde de y regardé toujours comme la même fonction de x.

On partira de l'égalité $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ où l'on doit regarder toujours t comme la fonction de x définie par l'équation $x = \varphi(t)$ et l'on prendra la dérivée par rapport à x en appliquant la règle des fonctions de fonction; on aura ainsi

$$\begin{aligned} y''_x &= \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{\varphi'^2(t)}\, t'_x \\ &= \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}; \end{aligned}$$

on obtiendra de même les dérivées troisième, quatrième, ..., toutes ces dérivées sont exprimées en fonction de t, et il est sous-entendu que t désigne la fonction de x définie par l'équation $x = \varphi(t)$.

Si, par exemple, on suppose

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t,$$

on aura

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot\frac{t}{2},$$

$$y''_x = -\frac{1}{4\sin^4\dfrac{t}{2}} = -\frac{1}{y^2}.$$

Les problèmes de cette nature peuvent être multipliés et compliqués à plaisir; les règles relatives aux fonctions de fonction et aux fonctions implicites suffisent à les résoudre.

Des questions analogues se posent pour les fonctions de plusieurs variables et leurs dérivées partielles.

Imaginons, par exemple, qu'on ait une fonction de trois variables $\varphi(x, y, z)$ et qu'on y remplace x, y, z par des fonctions de u, v,

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v);$$

la fonction $\varphi(x, y, z)$ deviendra une fonction de u, v dont les dérivées partielles par rapport à u, v seront, en vertu de la règle des fonctions composées (nº 217),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi'_x f'_u + \varphi'_y g'_u + \varphi'_z h'_u,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi'_x f'_v + \varphi'_y g'_v + \varphi'_z h'_v,$$

où il est entendu que, dans φ'_x, φ'_y, φ'_z, x, y, z doivent être regardés comme respectivement égaux à $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$.

§ 2. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LA VARIATION DES FONCTIONS. FONCTIONS PRIMITIVES. DÉRIVÉES ET FONCTIONS PRIMITIVES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE A COEFFICIENTS IMAGINAIRES. ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS PRIMITIVES.

221. Je reviens maintenant, pour en établir les réciproques, aux propositions fondamentales du nº 207 :

Soit $f(x)$ une fonction admettant, dans l'intervalle (a, b), une dérivée $f'(x)$; on a vu que, si la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b), sa dérivée est, dans cet intervalle, positive ou nulle; que, si la fonction est décroissante dans l'intervalle (a, b), sa dérivée est négative ou nulle; que, si la fonction est constante dans l'intervalle (a, b), sa dérivée y est constamment nulle.

Réciproquement, *si, dans l'intervalle* (a, b), *la dérivée* $f'(x)$ *n'est jamais négative, et si elle n'est pas nulle pour toutes les valeurs de* x *appartenant à un intervalle partiel* (a', b') *compris* *dans l'intervalle* (a, b), *la fonction* $f(x)$ *est croissante dans ce dernier intervalle.*

Il faut, pour le prouver, montrer que, si x_0, x_1 sont deux valeurs de x telles qu'on ait

$$(1) \qquad a \leqq x_0 < x_1 \leqq b,$$

on a $f(x_0) < f(x_1)$: le théorème des accroissements finis fournit l'égalité

$$(2) \qquad f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0) f'(\xi),$$

où ξ désigne un nombre compris entre x_0 et x_1 ; le second membre est positif ou nul : on a donc $f(x_1) \geqq f(x_0)$, sous les seules conditions imposées. De deux choses l'une, ou bien dans l'intervalle (x_0, x_1) la fonction $f(x)$ est constante et, dans tout l'intervalle (x_0, x_1), la dérivée $f'(x)$ est nulle; c'est une hypothèse que l'on a exclue; ou bien, pour quelque valeur x' comprise entre x_0 et x_1, la fonction $f(x)$ prend une valeur $f(x')$ différente de $f(x_0)$; on doit alors, à cause des inégalités $a < x_0 < x' < x_1 < b$, avoir $f(x_0) \leqq f(x') \leqq f(x_1)$; mais, la supposition $f(x_0) = f(x')$ étant exclue, il faut bien que $f(x_0)$ soit plus petit que $f(x')$ et, *a fortiori*, que $f(x_1)$. La proposition est démontrée.

J'ai exclu, dans la démonstration qui précède, le cas où la dérivée n'existerait pas pour quelque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b). Si, toutefois, on est assuré de la continuité de la fonction dans tout l'intervalle, le fait qu'il y ait quelques valeurs de x (en nombre fini) pour lesquelles la dérivée n'existe pas, n'importe nullement pour ce qui est de la variation de la fonction, pourvu que la dérivée reste positive ou nulle dans l'intervalle, sauf pour ces valeurs isolées où elle n'existe pas.

Tout d'abord, en effet, s'il y a une dérivée pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), sauf pour les bornes a, b, la démonstration subsiste entièrement puisque le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis (n° 215) ne supposent pas l'existence de la dérivée, pour les bornes a, b, lorsque la fonction est continue. Si, maintenant, il y a, à l'intérieur de l'intervalle, une valeur α de x (et une seule) pour laquelle la dérivée n'existe pas, la démonstration précédente prouve que la fonction est croissante dans l'intervalle (a, α), dans l'intervalle (α, b) ; elle est donc croissante dans tout l'intervalle (a, b). Le reste est évident.

On démontre de même la proposition suivante :

Si, dans l'intervalle (a, b), la dérivée $f'(x)$ n'est jamais positive et si elle n'est pas nulle pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle partiel (a', b') compris dans (a, b), la fonction $f(x)$ est décroissante dans ce dernier intervalle.

Enfin, *si, dans l'intervalle (a, b), la dérivée $f'(x)$ est constamment nulle, la fonction $f(x)$ est constante dans cet intervalle.*

L'égalité (2) subsiste, en effet, quels que soient les nombres x_0, x_1 appartenant à l'intervalle (a, b) ; or, le second membre est nul ; on a donc $f(x_1) = f(x_0)$; deux valeurs quelconques de la fonction $f(x)$ sont égales ; la fonction $f(x)$ est constante dans tout l'intervalle.

Si l'on considère, par exemple, la fonction $\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}$, qui est définie et continue dans tout intervalle auquel n'appartient pas o, sa dérivée sera

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0 ;$$

cette fonction est donc constante dans l'intervalle considéré. Quand x s'approche de o par valeurs positives, la fonction considérée tend évidemment vers $\frac{\pi}{2}$; telle est la valeur de la fonction considérée dans tout intervalle à bornes positives ; on voit de même, en faisant tendre x vers o par valeurs négatives, que la fonction proposée est égale à $-\frac{\pi}{2}$ dans tout intervalle à bornes négatives. Elle n'a pas de sens, et n'a pas de dérivée, pour $x = 0$. Il faudrait donc se garder de lui appliquer le précédent théorème dans un intervalle auquel appartiendrait o.

La méthode pour étudier la variation d'une fonction $f(x)$ qui admet, en général, une dérivée, est fondée essentiellement sur les théorèmes précédents. J'y reviendrai au Chapitre XV.

222. Fonctions primitives. — On appelle *fonction primitive d'une fonction $f(x)$* une fonction $F(x)$ dont la dérivée est $f(x)$; par exemple, $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ est une fonction primitive de x^m, $\operatorname{arc\,tang} x$ est une fonction primitive de $\frac{1}{1+x^2}$, $ax+b$ est une fonction primitive de la constante a regardée comme une fonction de x.

Lorsqu'on a une fonction primitive de $f(x)$ il est aisé de les obtenir toutes :

Supposons que la fonction $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) et que la fonction $F(x)$ admette, dans cet intervalle, $f(x)$ comme dérivée; elle sera forcément continue dans cet intervalle. Soit $\Phi(x)$ une autre fonction qui, dans le même intervalle, admette la même dérivée $f(x)$. La dérivée de la différenee $\Phi(x)-F(x)$ sera nulle pour toutes les valeurs de x appartenant à cet intervalle; ce sera donc une constante C; on aura

$$\Phi(x)=F(x)+C;$$

réciproquement, il est clair que toute fonction obtenue en ajoutant une constante à $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$, ou, si l'on veut, est une fonction primitive de $f(x)$.

On appelle *équation différentielle* (du premier ordre) une relation entre la variable x, une fonction inconnue y de cette variable et sa dérivée (première) y'. Une *solution* de cette équation différentielle, c'est une fonction $\varphi(x)$ telle que, si l'on remplace dans cette équation y par $\varphi(x)$ et y' par $\varphi'(x)$, l'équation soit vérifiée quel que soit x (¹). Le problème qui consiste à trouver les fonctions primitives d'une fonction donnée $f(x)$ est le même problème que celui qui consiste à trouver toutes les solutions de l'*équation différentielle* $y'=f(x)$. (La fonction inconnue y ne figure dans cette équation que par sa dérivée.) On obtient toutes les solutions de cette équation différentielle en ajoutant à une de ces solutions $F(x)$ [à une fonction primitive de $f(x)$] une *constante arbitraire* C. Si l'on veut avoir une solution qui prenne une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable, il suffira de déterminer C par la condition $F(x_0)+C=y_0$; la fonction cherchée est $F(x)-F(x_0)+y_0$.

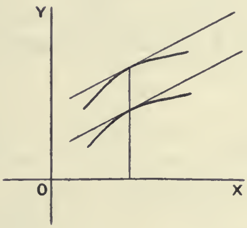
Remarquons que la recherche d'une fonction primitive de la fonction donnée $f(x)$ revient à déterminer une courbe $y=F(x)$, telle

(¹) Au moins dans un certain intervalle (a, b); on dit alors que $\varphi(x)$ est une solution dans cet intervalle.

que sa pente, en chaque point, soit une fonction donnée $f(x)$ de l'abscisse.

Le fait que toutes les courbes qui répondent à la question se déduisent de l'une d'elles par une translation parallèle à l'axe des y, n'a rien qui doive étonner le lecteur : deux courbes dont l'une se

Fig. 68.



déduit ainsi de l'autre ont évidemment des tangentes parallèles (de même pente) en des points de même abscisse ; la courbe dont l'équation est $y = F(x) - F(x_0) + y_0$ est celle des courbes considérées qui passe par le point de coordonnées x_0, y_0. Il va sans dire que ceci suppose que x_0 appartienne à un intervalle où la fonction $F(x)$ est continue.

Par exemple, toutes les courbes dont la pente est proportionnelle à l'abscisse x sont les paraboles dont l'équation est de la forme

$$y = \frac{a}{2} x^2 + C,$$

a est le coefficient de proportionnalité.

Supposons que la variable x représente le temps ; trouver une fonction primitive de $f(x)$, c'est trouver un mouvement rectiligne dans lequel la vitesse soit $f(x)$ à chaque instant x. Par exemple, un mobile dont la vitesse est constante et égale à v_0 se meut, sur l'axe des y, d'un mouvement uniforme défini par l'équation $y = v_0 x + b$; la constante b représente l'ordonnée du mobile à l'origine du temps. D'une façon générale, si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, tout mouvement sur l'axe des y dans lequel la vitesse est $f(x)$ à l'instant x sera défini par une équation de la forme $y = F(x) + C$; on pourra déterminer la constante C de manière à avoir la loi

$$y = F(x) - F(x_0) + y_0$$

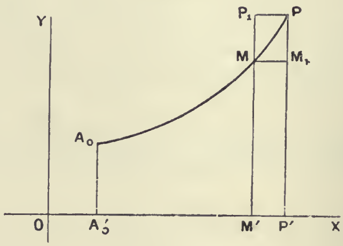
du mouvement du mobile qui, à l'époque x_0, passe au point d'ordonnée y_0.

Les fonctions primitives sont susceptibles d'une autre interprétation géométrique qui, outre son importance, a cet intérêt de rendre leur existence manifeste. Il convient, en effet, de remarquer que les raisonnements précédents supposent l'existence d'*une* fonction $F(x)$ dont la dérivée est $f(x)$.

Aire d'une courbe. — Je supposerai dans ce qui suit que les valeurs de x que l'on considère appartiennent à un intervalle (a, b) où la fonction donnée $f(x)$ est continue.

Pour simplifier, je supposerai aussi qu'elle soit positive dans le même intervalle; soient A_0, M deux points du trait de courbe qui

Fig. 69.



représente la fonction $f(x)$, ayant pour abscisses x_0 et $x > x_0$; je regarderai le premier point comme fixe, le second comme variable.

Ceci posé, l'aire curviligne $A'_0 A_0 M M'_1$ comprise entre les deux ordonnées $A'_0 A_0$, $M'M$, l'axe des x et la courbe, est un nombre déterminé quand on se donne x_0 et x [1]. Cette aire est une fonction de x, que je représenterai par $\varphi(x)$ et que je désignerai comme étant l'aire

[1] On suppose, bien entendu, que l'unité de surface est le carré construit sur l'unité de longueur.

de la courbe comptée à partir de la droite $A'_0 A_0$; d'après les suppositions que l'on a faites, cette fonction $\varphi(x)$, définie pour $x > x_0$, est positive et s'annule pour $x = x_0$. Si l'on donne à x un accroissement positif $h = M'P'$, l'accroissement correspondant de $\varphi(x)$ sera l'aire curviligne $M'MPP'$; la continuité de la fonction $\varphi(x)$ est évidente sur la figure : on va en évaluer la dérivée. L'aire curviligne $M'MPP'$ est comprise entre les deux rectangles $M'MM_1P'$ et $M'P_1PP'$ dont la base est $M'P' = h$ et dont les hauteurs respectives sont $M'M = f(x)$, $P'P = f(x+h)$; dans la figure, le premier rectangle est le plus petit, parce qu'on a supposé la fonction $f(x)$ croissante quand la variable croît de OM' à OP'; ce serait l'inverse si elle était décroissante. Dans les deux cas, les quantités

$$hf(x), \quad \varphi(x+h) - \varphi(x), \quad hf(x+h)$$

se suivent par ordre de grandeur, croissante ou décroissante; il en est de même des quantités

$$f(x), \qquad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}, \qquad f(x+h);$$

il suit de là et de la continuité de la fonction $f(x)$ que le rapport $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ a pour limite $f(x)$ quand h tend vers o, puisqu'il est compris entre deux nombres dont l'un est $f(x)$ et dont l'autre tend vers $f(x)$ quand h tend vers o; cela revient à dire que la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée et que cette dérivée est $f(x)$. Le raisonnement a été fait en supposant h positif; on le refera sans peine en supposant h négatif.

Ainsi, l'aire $A'_0 A_0 MM'$ est une fonction primitive de $f(x)$. Si $F(x)$ désigne une fonction primitive quelconque de $f(x)$, on devra avoir, en désignant par C une constante convenable, $\varphi(x) = F(x) + C$; on détermine cette constante en écrivant que la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x = x_0$ et l'on en déduit

$$\varphi(x) = F(x) - F(x_0).$$

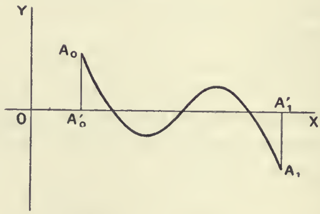
Pour obtenir l'aire comprise entre l'axe des x, une courbe définie par l'équation $y = f(x)$ et deux parallèles à l'axe des y qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1, entre lesquelles on suppose *que la fonction $f(x)$ soit continue, on cherche une fonction primitive $F(x)$ de $f(x)$; l'aire cherchée est la différence* $F(x_1) - F(x_0)$.

On a toutefois supposé, dans ce qui précède, que la fonction $f(x)$ était positive entre x_0 et x_1, et que l'on avait $x_1 > x_0$: dans ces conditions, l'aire qu'on a évaluée est essentiellement positive. Conservons d'abord la première supposition $f(x) > 0$, pour nous débarrasser de la seconde.

Si l'on avait $x_1 < x_0$, en vertu du même raisonnement, l'aire considérée serait $F(x_0) - F(x_1)$. Il est naturel d'adopter toujours pour cette évaluation l'expression $F(x_1) - F(x_0)$, en convenant de regarder l'aire, évaluée à partir de la droite $A'_0 A_0$, comme négative quand le point M' est à gauche de A'_0. Dans ces conditions, la formule $F(x_1) - F(x_0)$ convient dans tous les cas. Supposons maintenant que, dans l'intervalle considéré, la fonction $f(x)$ soit négative; il suffit de changer la direction positive de l'axe des y, pour être ramené au cas précédent et reconnaître que l'expression $|F(x_1) - F(x_0)|$, où $F(x)$ désigne encore une fonction primitive de $f(x)$, représentera toujours la valeur absolue de l'aire comprise entre l'axe des x, le trait de courbe, les deux parallèles à l'axe des y qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1; la formule $F(x_1) - F(x_0)$ représente la même aire regardée comme négative si x_1 est plus grand que x_0, comme positive si x_1 est plus petit que x_0.

Enfin, si dans l'intervalle (x_0, x_1) la fonction $f(x)$ change de signe,

Fig. 70.

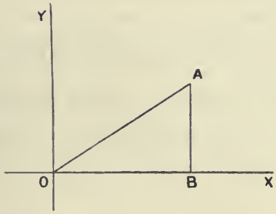


si la courbe traverse l'axe des x, la formule $F(x_1) - F(x_0)$, où $F(x)$ désigne toujours une fonction primitive de $f(x)$, représente une somme algébrique d'aires, dont les unes sont situées au-dessus de l'axe des x, dont les autres sont situées au-dessous : si l'on a $x_1 > x_0$, les premières sont regardées comme positives, les secondes comme négatives; c'est l'inverse si x_1 est plus petit que x_0.

En adoptant ces conventions, la formule $F(x) - F(x_0)$ conviendra toujours pour évaluer l'aire de la courbe comptée à partir de la droite $A'_0 A_0 (x = x_0)$. Si l'on veut, au contraire, évaluer les aires en les regardant comme essentiellement positives, il sera nécessaire de tenir compte des changements de signe de $f(x)$ et d'évaluer séparément des aires qui correspondent à des intervalles où $f(x)$ garde un signe constant.

Soit, par exemple, à évaluer l'aire du triangle rectangle OAB; l'équation de la droite OA sera $y = \frac{b}{a} x$, en désignant par a, b les

Fig. 71.

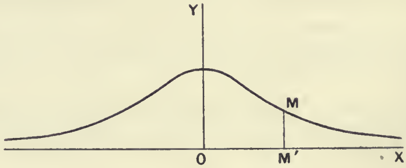


coordonnées du point A, c'est-à-dire les deux côtés OB, BA de l'angle droit du triangle rectangle. La fonction $\frac{1}{2} \frac{b}{a} x^2$ est une fonction primitive de $\frac{b}{a} x$; la différence $\frac{1}{2} \frac{b}{a} a^2 = \frac{ab}{2}$ des valeurs qu'elle prend pour $x = a$ et $x = 0$ représentera l'aire cherchée. Il est aisé de déduire de là la règle relative à l'aire d'un triangle quelconque, qui peut toujours être décomposé en deux triangles rectangles.

Considérons maintenant la courbe définie par l'équation $y = \frac{1}{1 + x^2}$; la forme de cette courbe est représentée ci-dessous; évaluons l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe, l'axe des y et la droite M'M.

La fonction arc tang$x$ est une fonction primitive de $\frac{1}{1 + x^2}$; elle s'annule pour $x = 0$; la différence arc tang$x - 0 =$ arc tang$x$ représente l'aire cherchée. Si l'on suppose, par exemple, que l'abscisse de M soit $\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'aire cherchée sera $\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Si l'on suppose que x augmente indéfiniment par valeurs positives, $\operatorname{arc\,tang} x$ tend vers $\frac{\pi}{2}$; il en est de même de l'aire; c'est ce qu'on exprime souvent en

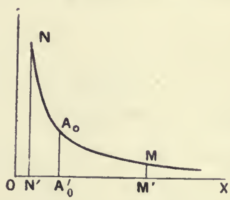
Fig. 72.



disant que l'aire comprise entre l'axe des y, la courbe et son asymptote est finie et égale à $\frac{\pi}{2}$.

Considérons encore la courbe définie par l'équation $y = \frac{1}{x}$; la fonction $\frac{1}{x}$ est discontinue pour $x = 0$; conformément à ce qui a été dit plus haut, on ne la considérera que dans des intervalles auxquels o

Fig. 73.



n'appartient pas; j'évaluerai l'aire de la courbe à partir de la droite $A'_0 A_0$ en supposant l'abscisse de A_0 égale à 1 : $\log x$ est une fonction primitive de $\frac{1}{x}$, l'aire $A'_0 A_0 MM'$ sera, en désignant par x l'abscisse du point M supposée *positive*, $\lg x - \lg 1 = \lg x$; elle devra être regardée comme positive pour $x > 1$, comme négative pour $x < 1$.

On observera que les aires, comptées à partir de $A'_0 A_0 (x = 1)$, qui correspondent à deux points M, N dont les abscisses sont inverses, sont égales en valeur absolue.

Ici l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote n'est pas finie, puisque $\log x$ croît indéfiniment avec x.

Je suis parti des propriétés connues des fonctions $\operatorname{arc\,tang} x$, $\lg x$; mais il faut remarquer que la recherche des fonctions primitives de $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{x}$ se serait certainement imposée si l'on n'avait pas étudié antérieurement les fonctions $\operatorname{arc\,tang} x$, $\lg x$. Ces dernières fonctions auraient pu être définies comme les aires de courbes particulièrement simples. De cette définition même on aurait pu déduire leurs propriétés. Je ne développerai pas cette déduction; je n'en indique la possibilité que pour faire soupçonner au lecteur cette nécessité de créer des fonctions nouvelles, afin de représenter les fonctions primitives qui ne peuvent s'obtenir au moyen des fonctions antérieurement connues.

J'aurai à revenir plus tard sur la recherche des fonctions primitives, dans des cas simples où elles peuvent s'exprimer au moyen des fonctions algébriques, exponentielles, circulaires, logarithmiques, etc. Je me borne pour le moment à dire que cette recherche est essentiellement fondée sur les résultats obtenus dans le présent Chapitre, et en particulier sur les expressions des dérivées que l'on a calculées, expressions qu'il faut avoir toujours présentes à l'esprit, afin de reconnaître de suite, sur une de ces expressions, quelle est sa fonction primitive.

La remarque suivante, relative aux fonctions de fonction, sera d'un usage courant : soit u une fonction de x et $f(u)$ une fonction de u, que l'on peut ainsi regarder comme une fonction de fonction de x. Soit $F(u)$ une fonction primitive de $f(u)$ quand on regarde u comme la variable; en d'autres termes la dérivée de $F(u)$, par rapport à u, est $f(u)$. $F(u)$, en y regardant u comme une fonction de x, sera une fonction primitive de $f(u)\,u'$, en désignant par u' la dérivée de u par rapport à x; ainsi $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{1+u^2}$, $\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$ admettent comme fonctions primitives $\lg u$, $\operatorname{arc\,tang} u$, $\operatorname{arc\,sin} u$, les expressions

$$\frac{2x}{1+x^2}, \qquad \frac{a}{a^2+x^2} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

admettent comme fonctions primitives $\lg(1+x^2)$, $\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\cdot$

La fonction

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\frac{1}{a}\operatorname{sgn} a}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

admet comme fonction primitive $\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$ ou $-\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$, suivant que a est positif ou négatif, etc. Signalons encore cette proposition évidente :

Si $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont des fonctions primitives des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ et si A, B sont des constantes, la fonction $AF(x)+B\Phi(x)$ est une fonction primitive de $Af(x)+B\varphi(x)$. Par exemple $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}$ est une fonction primitive de $\frac{1}{x^2+a^2}$.

223. **Fonctions à coefficients imaginaires.** — Jusqu'ici, quand on a parlé de dérivées ou de fonctions primitives, on a toujours supposé que la variable et les fonctions dont on parlait étaient réelles.

La notion de dérivée et, par suite, de fonction primitive, s'étend, sous certaines conditions, à des variables et à des fonctions imaginaires; mais cette extension est entièrement en dehors du cadre du présent livre. A la vérité, pour ce qui concerne les dérivées, cette extension a été donnée au Chapitre VII quand il s'agit d'un polynome. Mais, pour les polynomes, on a adopté une définition de la dérivée autre que celle qui a été l'objet du présent Chapitre : l'une des raisons que l'on avait pour cela était d'éviter toute confusion dans l'esprit du lecteur. Cette notion de la dérivée d'un polynome, où la variable est imaginaire, est indispensable pour certaines théories relatives aux équations algébriques et aux courbes algébriques. Dans le présent Ouvrage, elle n'interviendra que pour ce qui concerne les équations algébriques, et c'est avec intention qu'elle a été présentée indépendamment de la notion de limite. Partout ailleurs, *la variable sera supposée essentiellement réelle ;* tout en se tenant à cette conception de la variable, il est commode de parler de la dérivée ou de la fonction primitive d'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, mais qui contient des coefficients imaginaires. Une telle fonction sera définie dans un intervalle (a, b), à bornes réelles, si on sait la mettre sous la forme $\varphi(x)+i\psi(x)$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions réelles de la variable x, définies dans cet intervalle ; elle sera *continue* dans le même intervalle si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont continues ; *par définition*, sa dérivée (par rapport à x) sera $\varphi'(x) + i\psi'(x)$, en désignant par $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ les dérivées de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$.

En adoptant cette définition, on reconnaît sans aucune peine que les règles pour prendre la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un rapport de deux fonctions s'appliquent sans modification à ces fonctions. Il en est de même pour la règle relative aux puissances entières, positives ou négatives, qui se déduisent des règles précédemment rappelées.

Par exemple, les dérivées des fonctions

$$1 + ix - (1 + i)x^2, \quad \frac{1}{x + i}, \quad \cos x + i \sin x$$

sont respectivement

$$i - 2(1 + i)\,x, \qquad -\frac{1}{(x + i)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{2x}{(1 + x^2)^2}\,i,$$
$$-\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x).$$

La fonction primitive d'une fonction de la forme $\varphi(x) + i\psi(x)$ sera par définition une fonction admettant pour dérivée $\varphi(x) + i\psi(x)$: si $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des fonctions primitives de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, $\Phi(x) + i\Psi(x)$ sera une fonction primitive de $\varphi(x) + i\psi(x)$; la fonction primitive la plus générale de cette dernière fonction sera $\Phi(x) + i\Psi(x) + A + iB$, en désignant par A, B des constantes arbitraires, puisque $\Phi(x) + A$, $\Psi(x) + B$ sont les fonctions primitives les plus générales de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$; par exemple, $\cos x + i \sin x$ est une fonction primitive de $i(\cos x + i \sin x)$, $\frac{1}{x + i} = \frac{x - i}{x^2 + 1}$ est une fonction primitive de $\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\,i$; il en résulte que $\frac{x}{x^2 + 1}$, $\frac{-1}{x^2 + 1}$ sont des fonctions primitives de $\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, $\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

EXERCICES.

215. Calculer les dérivées des fonctions

$$x \lg x - x,$$

$$\frac{1}{2a} \lg \left| \frac{a-x}{a+x} \right|,$$

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{bx}{a}} \qquad (ab > 0),$$

$$\frac{1}{2} \lg \frac{1+\sin x}{1-\sin x},$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$

$$x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2),$$

$$\sqrt{1-x^2} + \lg \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right|,$$

$$x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tang} x)^2,$$

$$\frac{x}{2} \Big[\sin(\lg x) - \cos(\lg x) \Big],$$

$$\frac{x}{2} \Big[\sin(\lg x) + \cos(\lg x) \Big],$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \lg \left| ax + b + \sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c} \right| \qquad (a > 0),$$

$$\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \qquad (ac-b^2 > 0),$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \lg \left| \frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} \right| \qquad (b^2-ac > 0),$$

$$\frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} \qquad (a < 0,\ b^2-ac > 0),$$

$$\frac{2\sqrt{x^2+1}}{4} \left(x^2 + \frac{5}{2} \right) + \frac{3}{8} \lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a(ac-b^2)}} \lg \left| \frac{a\sqrt{ax^2+2bx+c} - \sqrt{a(ac-b^2)}}{ax+b} \right| \qquad [a(ac-b^2) > 0],$$

$$\arcsin(\operatorname{th} x), \quad \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right), \quad \lg \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|,$$

$$\frac{1}{\sin a}\lg\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|,\quad \frac{1}{\cos a}\lg\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-ab}}\lg\frac{a-bx+2\sqrt{x}\sqrt{-ab}}{a+bx}\quad (ab<0),$$

$$x^{\lg x},\quad (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} 2x}.$$

216. De l'identité

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

déduire les suivantes

$$1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n=\frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2},$$

$$1.2+2.3x+\ldots+(n+1)(n+2)x^n$$
$$=\frac{2-(n+2)(n+3)x^{n+1}+2(n+1)(n+3)x^{n+2}-(n+1)(n+2)x^{n+3}}{(1-x)^2}.$$

217. De l'identité

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

déduire une expression de

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx.$$

218. Former les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$, $\cos^3 x$.

219. Calculer la dérivée seconde de e^u, u étant une fonction de x dont les dérivées première et seconde sont u' et u''; vérifier que cette dérivée seconde s'annule identiquement quand on suppose $u=\lg x$.

220. Calculer les dérivées des fonctions

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)-\operatorname{arc\,tang} x,\quad \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)-2\operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)-3\operatorname{arc\,tang} x,\quad \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-2\operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\operatorname{arc\,tang} x,\quad 2\arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}-x,$$

$$\lg\sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}-x,\quad \lg\left(\operatorname{sh} x+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\right)-x,$$

$$x^{\frac{1}{\lg x}},$$

et expliquer les résultats trouvés.

221. Avec quelle approximation peut-on connaître un arc (exprimé en grades) quand on connaît le logarithme vulgaire de son sinus avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-5}$?

1° Quand ce logarithme est plus petit que $\log \sin \frac{\pi}{4}$;

2° Quand il est compris entre $\log \sin \frac{\pi}{4}$ et $\log \sin \frac{2\pi}{5}$;

3° Quand il est compris entre $\log \sin \frac{2\pi}{5}$ et $\log \sin \frac{87x}{200}$?

Avec quelle approximation peut-on connaître un arc, connaissant le logarithme de sa tangente avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-5}$?

222. Si l'on pose $y = \cos(n \operatorname{arc} \cos x)$, en désignant par n un nombre naturel, on sait (n° 109) que y est un polynome en x, du degré n, dans lequel tous les termes sont de même parité, et dans lequel le terme de degré le plus élevé est $2^{n-1}x^n$; montrer que les expressions

$$(1-x^2)y'^2 + n^2(y^2-1),$$
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y$$

s'annulent identiquement quand on y remplace y par ce polynome, y' et y'' par ses dérivées première et seconde.

Si l'on pose $y = A_0 x^n + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_p x^{n-2p} + \ldots$, et si l'on écrit que l'expression $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y$ est identiquement nulle, on obtient une relation entre deux coefficients consécutifs du polynome y. Calculer les coefficients de ce polynome. (Voir *Ex.* 37 et n° 351.)

223. Montrer que $\operatorname{ch}\left[n \lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]$ est un polynome en x de degré n, en supposant que n soit un nombre naturel. Trouver l'expression explicite de ce polynome.

Si n est un nombre naturel impair, les expressions

$$\sin(n \operatorname{arc} \sin x), \quad \operatorname{sh}\left[n \lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]$$

sont des polynomes en x; trouver les expressions explicites de ces polynomes.

224. Montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{1+x^2}$ est de la forme $\frac{P_n}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynome en x, de degré n, dont tous les termes sont de même parité; calculer le coefficient du terme en x^n.

225. Si l'on pose $y = \frac{1}{1+x^2}$, l'identité

$$y(1+x^2) = 1$$

conduit (n° 213) à la suivante

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+2(n+2)xy^{(n+1)}+(n+2)(n+1)y^{(n)}=0,$$

où $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ désignent les dérivées $n^{\text{ième}}$, $(n+1)^{\text{ième}}$, $(n+2)^{\text{ième}}$ de y. Déduire de là que l'expression

$$(1+x^2)P''_n-2nxP'_n+n(n+1)P_n$$

s'annule identiquement quand on y remplace P_n par le polynome défini à l'exercice précédent, P'_n et P''_n par ses dérivées première et seconde.

Former l'expression explicite du polynome P_n.

Déterminer trois polynomes A, B, C tels que l'expression

$$AP_{n+2}+BP_{n+1}+CP_n$$

soit identiquement nulle.

226. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $y=e^{-x^2}$ est de la forme $e^{-x^2}P_n$, en désignant par P_n un polynome de degré n, dont tous les termes sont de même parité; calculer le coefficient du terme du plus haut degré dans ce polynome.

De l'identité $y'+2xy=0$ déduire une relation de la forme

$$Ay^{(n+2)}+By^{(n+1)}+Cy^{(n)}=0,$$

où A, B, C sont des polynomes. En déduire une relation de la forme

$$A_1P''_n+B_1P'_n+C_1P_n=0,$$

où A_1, B_1, C_1 sont des polynomes. Utiliser cette relation, qui doit être identiquement vérifiée par le polynome P_n et ses dérivées, pour obtenir l'expression explicite de ce polynome. Déterminer trois polynomes A_2, B_2, C_2 tels que l'on ait identiquement

$$A_2P_{n+2}+B_2P_{n+1}+C_2P_n=0.$$

227. Former les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction

$$\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}.$$

228. Sachant que y est une fonction (implicite) de x, définie par l'équation

$$x^2+y^2=e^{2\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}},$$

on demande de calculer la dérivée seconde et la dérivée troisième de y par rapport à x. Ces dérivées peuvent-elles s'annuler?

229. Quelle est la dérivée seconde de $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$?
Quelle est la fonction primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{(ax^2 + 2bx + c)^3}}$?

230. Montrer que, si y est une fonction de x définie par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

où A, B, C, ..., F sont des constantes, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{y''^2}}$ est un polynome du second degré. — On résout l'équation par rapport à y, et l'on s'appuie sur le résultat de l'exercice précédent.

231. Sachant que l'expression $e^x(x^2 + 3x + 2)$ admet une fonction primitive de la forme $e^x P$, où P est un polynome en x, déterminer cette fonction primitive.

232. Sachant que l'expression $(3x - 1)\cos x + (1 - 2x)\sin x$ admet une fonction primitive de la forme $P\cos x + Q\sin x$, où P, Q sont des polynomes, trouver ces polynomes.

CHAPITRE XIV.

SÉRIES DE FONCTIONS.

§ 1. — SÉRIES DONT LES TERMES SONT DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE. SÉRIES ENTIÈRES EN x.

224. **Continuité.** — Nous avons déjà eu l'occasion de considérer des séries dont les termes étaient des fonctions de x [1] : telle était, par exemple, la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont on a montré qu'elle était convergente (et même absolument convergente) pour toutes les valeurs de x; la somme de cette série est une fonction de x, définie quel que soit x.

Soit, en général,

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions de x définies dans l'intervalle (a, b); si, pour chaque valeur de x appartenant à cet intervalle, la série

$$(f) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

est convergente, sa somme sera une fonction définie de x qu'on pourra calculer, avec telle approximation qu'on voudra, pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b).

En désignant cette somme par $F(x)$, on pourra poser

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

où il est entendu que le second membre représente la somme de la

(1) La variable x est supposée réelle jusqu'au n° 228.

série qui y figure. Inversement, si l'on part d'une fonction donnée $F(x)$ et si l'on trouve une série telle que (f) qui soit convergente, pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b), et dont la somme soit, pour chacune de ces valeurs, égale à $F(x)$, on dit qu'on a développé $F(x)$ en série sous la forme $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$.

C'est ainsi que, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, où α est un nombre positif plus petit que 1, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots.$$

Le second membre est un développement en série du premier, suivant les puissances entières et positives de x.

Supposons, en revenant au cas général, qu'il existe une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *tels que, d'une part, la série*

$$(\alpha) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

soit convergente, et que, d'autre part, on ait, pour chaque valeur de x *appartenant à l'intervalle* (a, b), $|f_1(x)| \leqq \alpha_1$, $|f_2(x)| \leqq \alpha_2$, ... *et, en général,* $|f_n(x)| \leqq \alpha_n$; *il est clair que la série* (f) *sera absolument convergente pour toutes les valeurs de* x *appartenant à l'intervalle* (a, b).

Supposons en outre que, dans ce même intervalle, toutes les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *soient continues, je dis que la somme* $F(x)$ *de la série* (f) *sera aussi continue dans l'intervalle* (a, b).

Soit, en effet, x_0 une valeur quelconque de x appartenant audit intervalle; il faut prouver qu'à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif ε' tel que l'on ait

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \varepsilon$$

pourvu que h soit moindre, en valeur absolue, que ε', et que $x_0 + h$ appartienne, comme x_0, à l'intervalle (a, b).

Désignons en général par $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série (f) et par $R_n(x)$ le reste correspondant de cette même série, c'est-à-dire la somme de la série absolument convergente, quand x appartient à l'intervalle (a, b),

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots;$$

désignons aussi par r_n le reste de la série (α) limitée au terme α_n, c'est-à-dire la somme de la série convergente, à termes positifs, $\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots$. On aura, quelle que soit la valeur de x, appartenant à l'intervalle (a, b), $R_n(x) \leqq r_n$, et, d'autre part,

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

On en déduit, sous la seule condition que x_0 et $x_0 + h$ appartiennent à l'intervalle (a, b),

$$\begin{aligned} |F(x_0+h) - F(x_0)| &= |S_n(x_0+h) - S_n(x_0) + R_n(x_0+h) - R_n(x_0)| \\ &\leqq |S_n(x_0+h) - S_n(x_0)| + |R_n(x_0+h)| + |R_n(x_0)| \\ &\leqq |S_n(x_0+h) - S_n(x_0)| + 2r_n. \end{aligned}$$

Ceci posé, puisque la série (α) est convergente, on peut choisir n assez grand pour que l'on ait $r_n < \frac{\varepsilon}{3}$; n étant ainsi fixé, la fonction $S_n(x)$, somme de n fonctions continues, est elle-même continue pour $x = x_0$; on peut donc faire correspondre au nombre positif ε un nombre positif ε' tel que, sous la seule condition que $x_0 + h$ appartienne à l'intervalle (a, b) et que la valeur absolue de h soit inférieure à ε', l'on ait

$$|S_n(x_0 + h) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

de cette inégalité et de la précédente résulte l'inégalité

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

sous la condition que $x_0 + h$ appartienne, comme x_0, à l'intervalle (a, b) et que l'on ait $|h| < \varepsilon'$; la proposition est démontrée.

Par exemple, la série

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$$

est absolument convergente quel que soit x, puisque ses termes sont inférieurs ou égaux, en valeur absolue, aux termes correspondants de la série numérique, à termes positifs,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

et que, d'autre part, ses termes sont des fonctions continues de x dans tout intervalle; sa somme est donc une fonction de x, continue dans tout intervalle.

225. **Séries entières en** x. — Parmi les séries dont les termes sont des fonctions continues de x, les séries qui sont de la forme

$$(a) \qquad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

tiennent en Analyse un rôle considérable; a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... sont des constantes numériques que j'appellerai les *coefficients de la série :* celle-ci est *donnée* quand on se donne la suite de ses coefficients.

Considérons d'abord le cas où tous les coefficients a_0, a_1, ..., a_n, ... sont des nombres positifs (ou nuls); pour une valeur positive de x, tous les termes de la série (a) sont positifs (ou nuls); la somme de la série, si elle est convergente, est positive.

La série (a) étant donnée, il peut se faire qu'elle ne soit convergente pour aucune valeur positive de x; ce serait le cas, comme le lecteur s'en assurera sans peine en appliquant les règles du n° 181, pour les séries

$$1+x+(2x)^2+\ldots+(nx)^n+\ldots,$$
$$x+1.2x^2+1.2.3x^3+\ldots+1.2.3\ldots nx^n+\ldots.$$

Écartons ce cas. Si la série est convergente pour une valeur positive α, il est clair qu'elle sera convergente pour les valeurs positives de x inférieures à α, puisque, pour de telles valeurs, les termes de la série (a) seront inférieurs aux termes correspondants de la série numérique

$$a_0+a_1\alpha-a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n+\ldots;$$

la somme de la série (a) sera inférieure à la somme de celle qu'on vient d'écrire.

Il peut, enfin, arriver que la série (a) soit convergente pour toute valeur positive de x; telle est la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

Supposons que la série (a) soit convergente pour certaines valeurs positives de x, divergente pour d'autres. Si la série est convergente pour $x=\alpha$, divergente pour $x=\beta$, les nombres α et β étant positifs, on a certainement $\alpha<\beta$, car les suppositions $\beta=\alpha$ ou $\beta<\alpha$ entraîneraient, d'après ce qu'on a dit un peu plus haut, la convergence de la série (a) pour $x=\beta$. Si donc on imagine que les nombres positifs soient rangés en deux classes, dont la première contienne tous les nombres pour lesquels la série est convergente, la seconde tous les nombres pour lesquels elle est divergente, tous les nombres de la première classe seront plus petits que les nombres de la seconde classe; on définit ainsi une coupure qui, à son tour, définit un nombre positif A, nombre que ne surpasse aucun nombre de la première classe, qui ne surpasse aucun nombre de la seconde classe : tous les nombres plus petits que lui appartiennent certainement à la première classe; quand x est un de ces nombres, la série (a) est convergente. Tous les nombres plus grands que A appartiennent sûrement à la seconde classe; quand x est l'un de ces nombres, la série est divergente. D'ailleurs A peut appartenir à la seconde classe ou à la première; en d'autres termes, la série peut être divergente ou convergente pour $x=\text{A}$.

Si l'on considère, par exemple, la série

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

on sait que pour $0<x<1$ elle est convergente; elle est divergente pour x égal à 1 ou plus grand que 1.

Si l'on considère, au contraire, la série

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots,$$

elle est convergente pour $x=1$, divergente pour $x>1$ (n° 183); ce dernier point résulte de la considération du rapport d'un terme au précédent (n° 181), rapport dont la limite est x, pour n infini.

Observons encore que si, pour le nombre positif x_0, tous les termes de la série (a) sont inférieurs ou égaux au nombre positif B, la série (a) est convergente pour tout nombre positif x_1 plus petit que x_0 : en effet, on a par hypothèse, quel que soit n, $a_n x_0^n < B$ et, par suite, $a_n x_1^n < B \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n$; donc, pour $x = x_1$, les termes de la série (a) sont inférieurs aux termes de la progression décroissante

$$B + B\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + B\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \ldots + B\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n + \ldots.$$

Pour $x = x_1$, la série (a) est convergente : tous les nombres positifs plus petits que x_0 appartiennent à la première classe définie plus haut; x_0 peut d'ailleurs appartenir ou non à cette classe.

226. Ne supposons plus positifs (ou nuls) tous les coefficients de la série

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

et désignons, en général, par a'_n la valeur absolue de a_n, la série

$$(a') \qquad a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_n x^n + \ldots$$

sera dans le cas que l'on vient d'étudier.

Si cette dernière série est convergente pour le nombre positif $x = \alpha$, la série (a) sera absolument convergente pour toute valeur de x telle que l'on ait $|x| \leqq \alpha$; dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ sa somme sera une fonction continue de x.

Tout ceci résulte du n° 214, puisque, pour toutes ces valeurs de x, les termes de la série (a) sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux aux termes (tous positifs ou nuls) de la série convergente, à termes numériques,

$$a'_0 + a'_1 \alpha + a'_2 \alpha^2 + \ldots + a'_n \alpha^n + \ldots.$$

Soit, maintenant, x_0 un nombre quelconque autre que o et x'_0 sa valeur absolue.

Si la série (a) est absolument convergente pour $x = x_0$, la série (a') est convergente pour $x = x'_0$; on est dans le cas précédent; la série (a) est absolument convergente pour $|x| \leqq x'_0$.

Si la série (a) est convergente pour $x = x_0$, mais non absolument, ses termes tendent vers o quand n augmente indéfiniment; leurs valeurs absolues, à partir de l'un d'eux $a_p x_0^p$, sont moindres que tel nombre positif ε que l'on voudra. Soit B un nombre plus grand que ε et que les valeurs absolues de tous les termes qui précèdent $a_p x_0^p$, tous les termes de la série (a'), pour $x = x'_0$, seront plus petits que B; donc, pour α positif et plus petit que x'_0, la série (a') est convergente : la série (a) est absolument convergente pourvu que l'on ait $|x| \leqq \alpha$.

Ceci posé, ou bien la série (a') n'est convergente pour aucune valeur positive de x, ou bien elle est convergente pour toutes les valeurs positives de x, ou bien elle est convergente pour toutes les valeurs positives de x inférieures à un certain nombre positif A et divergente pour toutes les valeurs positives de x supérieures à A.

Dans le premier cas, la série (a) n'est convergente que pour $x = 0$, car, si elle était convergente pour une autre valeur x_0, la série (a') serait convergente pour n'importe quel nombre positif plus petit que x'_0.

Dans le second cas, la série (a) est absolument convergente quel que soit x; sa somme est une fonction continue dans tout intervalle.

Dans le troisième cas, la série (a) est absolument convergente pourvu que l'on ait $|x| < A$; elle est divergente pour tout nombre x_0 dont la valeur absolue x'_0 est supérieure à A; car, si elle était convergente pour un tel nombre, la série (a') serait convergente pour tout nombre positif compris entre A et x'_0. Dans ce troisième cas, si α est un nombre positif plus petit que A, la somme de la série (a) est une fonction continue de x dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$; on peut dire encore que cette somme est une fonction continue pour toute valeur de x *intérieure* à l'intervalle $(-A, A)$; mais, pour les bornes, la série (a) peut être divergente; elle peut aussi être convergente (absolument ou non), comme on le voit sur les séries

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \mp \frac{x^n}{n} \pm \ldots,$$

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots,$$

où A est égal à 1.

J'appellerai *intervalle de convergence* de la série (a) l'intervalle $(-A, A)$ à l'*intérieur* duquel elle est absolument convergente, tandis qu'elle est divergente pour les valeurs de x extérieures à cet intervalle. Il est aisé de déterminer cet intervalle, ou le nombre A, quand l'une des quantités $\sqrt[n]{a'_n}$, $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$ a une limite pour n infini : supposons, en effet, que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{a'_n}) = l;$$

on aura évidemment

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{a'_n x'^n}) = l x';$$

la série (a') sera donc convergente si l'on a $x' < \frac{1}{l}$, divergente si l'on a $x' > \frac{1}{l}$; on a $A = \frac{1}{l}$; on voit de même que A est l'inverse de la limite de $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$.

On en conclut, en passant, que les deux expressions $\sqrt[n]{a'_n}$, $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$, si elles ont des limites pour n infini, ont des limites égales.

227. Aux observations précédentes, qui regardent la convergence des séries de la forme

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

et la continuité des fonctions qu'elles définissent, il convient d'en ajouter quelques autres qui se présentent d'elles-mêmes.

Supposons d'abord que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ soient positifs ou nuls, et que la série soit convergente dans l'intervalle (0, A), A étant un nombre positif; sa somme dans cet intervalle est une fonction continue de x, on voit de suite que cette fonction est croissante dans cet intervalle.

Considérons le cas où la série (a), dont je suppose toujours les coefficients positifs, est convergente quel que soit x, sa somme sera une fonction croissante de x, pour toute valeur positive de x. Désignons cette fonction par $F(x)$; on aura en supposant $x > 0$

$$F(x) > a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n;$$

lorsque x croît indéfiniment, il en est de même du second membre et, *a fortiori*, de $F(x)$; on peut même ajouter que $F(x)$ croît plus rapidement que n'importe quel polynome $P(x)$. On entend par là que la valeur absolue du rapport $\frac{F(x)}{P(x)}$ tend vers $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$, ou, ce qui revient au même, que le rapport $\frac{P(x)}{F(x)}$ tend vers o quand x tend vers $+\infty$. Désignons, en effet, par $P_1(x)$ le polynome qui se déduit de $P(x)$ en y remplaçant chaque coefficient par sa valeur absolue, on aura évidemment, pour $x > 0$, $P_1(x) \geqq P(x)$, et, par suite,

$$\left|\frac{P(x)}{F(x)}\right| \leqq \frac{P_1(x)}{F(x)} < \frac{P_1(x)}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}.$$

On peut toujours prendre n assez grand pour que le degré du dénominateur de la fraction rationnelle qui figure au dernier membre soit plus grand que le degré du numérateur; dans ces conditions, cette fraction rationnelle tend vers o, quand x tend vers $+\infty$; il en est de même, *a fortiori*, du premier membre.

On démontre de même, en désignant par m un nombre positif quelconque, que le rapport $\frac{x^m}{F(x)}$ tend vers o quand x tend vers $+\infty$; au reste, cela résulte du théorème précédent pour m entier; si m n'est pas entier, soit m' un entier plus grand que m; on a

$$\frac{x^m}{F(x)} = \frac{x^{m'}}{F(x)} \frac{1}{x^{m'-m}};$$

dans le second membre, les deux facteurs tendent vers o quand x tend vers $+\infty$.

Les conclusions précédentes s'appliquent, en particulier, à la somme de la série toujours convergente

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Ne supposons plus que les coefficients de la série

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

soient positifs et désignons, en général, comme dans le numéro précédent, la valeur absolue de a_n par a'_n, en sorte que la série

$$(a') \qquad a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_n x^n + \ldots$$

ait ses coefficients positifs ou nuls. Supposons enfin, en désignant par α un nombre positif, que la série (a) soit absolument convergente pour les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, ce qui revient à dire que la série (a') est convergente pour $x=\alpha$.

Appelons $S_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes de la série (a), $R_n(x)$ le reste correspondant, en sorte que l'on ait, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$,

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

en désignant par $F(x)$ la somme de la série; $R_n(x)$ est égal au produit de x^{n+1} par la somme de la série

$$a_{n+1} + a_{n+2}x + a_{n+3}x^2 + \ldots,$$

somme dont la valeur absolue est au plus égale à la somme ρ de la série convergente à termes positifs

$$a'_{n+1} + a'_{n+2}\alpha + a'_{n+3}\alpha^2 + \ldots;$$

on pourra donc poser $R_n(x) = Mx^{n+1}$, en désignant par M un nombre dont on sait que sa valeur absolue est, au plus, égale à ρ, puis

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + Mx^{n+1};$$

on a déjà appelé l'attention, au Chapitre II, sur l'analogie des fonctions qui sont susceptibles d'une représentation de cette forme et des polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable, pour les valeurs de celle-ci qui sont voisines de o. Je suppose que l'on ait pris n assez grand pour que les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne soient pas tous nuls.

La forme précédente apprendrait, si on ne le savait déjà, que la fonction $F(x)$ est continue pour $x=0$. Elle montre que, si a_0 n'est pas nul, la fonction $F(x)$ ne peut s'annuler pour les valeurs de x qui sont suffisamment voisines de o; que, si a_0 est nul, la fonction $F(x)$ s'annule pour $x=0$, mais ne s'annule pas pour les valeurs de x, autres que o, et suffisamment voisines de o; la fonction $F(x)$ ne peut, quand on se donne le nombre naturel n, être mise que d'une seule façon sous la forme précédente; il en résulte, puisqu'on peut prendre n aussi grand qu'on le veut, que deux séries entières en x ne peuvent avoir la même somme, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ sans être identiques terme à terme; en d'autres termes, il n'y a qu'une série entière en x dont la somme, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, soit égale à la fonction $F(x)$. C'est ce qu'on exprime encore en disant qu'une fonction de x ne peut être *développée* que d'une seule façon suivant les puissances entières et positives de x.

Le premier des termes $a_1 x$, $a_2 x^2$, ..., $a_n x^n$, dont le coefficient n'est pas nul, fait connaître dans quel sens la fonction $F(x)$ varie pour $x = 0$.

228. **Séries entières à coefficients et à variables imaginaires.** — Jusqu'ici j'ai supposé réels les coefficients et la variable; il est bien aisé de voir que plusieurs des résultats obtenus plus haut s'étendent au cas où l'on a affaire à une série à coefficients imaginaires et où la variable est imaginaire; soit

$$(a) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une série entière en z dont les coefficients a_0, a_1, ..., a_n, ... peuvent être réels ou imaginaires; je désignerai, en général, par a'_n la valeur absolue de a_n, par r la valeur absolue de z; la valeur absolue de $a_n z^n$ sera $a'_n r^n$ et la série à termes positifs

$$(a') \qquad a'_0 + a'_1 r + a'_2 r^2 + \ldots + a'_n r^n + \ldots,$$

sera la série des valeurs absolues des termes de la série (a). Dire que la série (a) est absolument convergente pour une valeur particulière z_0 (non nulle), dont la valeur absolue est r_0, revient à dire que la série (a') est convergente pour $r = r_0$; cette dernière sera convergente pour les valeurs positives de r plus petites que r_0 : la série (a) est absolument convergente pour toutes les valeurs de z dont la valeur absolue est inférieure ou égale à r_0. Si la série (a') est convergente pour toutes les valeurs (positives) de r, la série (a) est absolument convergente quel que soit z; sa somme est ce que l'on appelle une fonction *entière* [1] de z. Si la séric (a') est convergente pour les

---

[1] Rationnelle entière si la série se réduit à un polynome, transcendante entière dans le cas contraire.

valeurs positives de r inférieures à A, divergente pour les valeurs de r supérieures à A, la série (a) est absolument convergente pour les valeurs de z telles que l'on ait $|z| < A$, elle n'est pas absolument convergente pour les valeurs de z telles que l'on ait $|z| > A$; elle n'est pas du tout convergente, car, si elle était convergente pour un nombre réel ou imaginaire z_0 dont la valeur absolue surpasserait A, la valeur absolue $a'_n r_0^n$ de $a_n z_0^n$ tendrait vers o quand n augmente indéfiniment; il résulterait de là, comme au n° 215, que tous les termes de la série (a') pour $z = z_0$ seraient inférieurs à un nombre fixe B et que cette série (a') serait convergente pour les valeurs de r comprises entre A et r_0, contrairement à la supposition.

En se reportant à la représentation géométrique des nombres imaginaires que l'on a expliquée au Chapitre VI, on voit que, dans ce cas, les points qui représentent les nombres réels ou imaginaires pour lesquels la série (a) est absolument convergente remplissent l'*intérieur* d'un cercle décrit du point o comme centre avec un rayon égal à A; pour les nombres figurés par des points *extérieurs* à ce cercle, la série n'est pas convergente; sur la circonférence même du cercle, la série peut être convergente, absolument ou non, ou divergente. Ce cercle prend le nom de *cercle de convergence*.

Si l'on décrivait du point o comme centre un cercle de rayon moindre que A, il serait aisé de voir que, pour tous les points situés à l'intérieur de ce cercle ou sur sa circonférence, la somme de la série est une fonction continue de z, en adoptant, pour la continuité, la même définition que pour les polynomes (n° 107). Il suffirait pour cela de raisonner comme au n° 214. J'y insiste d'autant moins que l'étude des fonctions d'une variable imaginaire est en dehors des limites du présent Livre. Les séries à termes imaginaires n'interviendront un peu plus tard que pour relier les propriétés de certaines fonctions de variables réelles.

229. **Dérivée.** — Je reviens maintenant aux séries de la forme

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

où les coefficients $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ sont réels, ainsi que la variable x; je continuerai de désigner, en général, par a'_n la valeur absolue de a_n et par x' la valeur absolue de x; je suppose que la série à coefficients positifs

$$(a') \qquad a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_n x^n + \ldots$$

soit convergente, pour $x = \alpha$, en désignant par α un nombre positif; en sorte que la série (a) est absolument convergente pour les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ et que sa somme $F(x)$ est, dans cet intervalle, une fonction continue de x; mon but est de démontrer le théorème suivant :

Si x_0 désigne un nombre intérieur à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, la fonction $F(x)$ admet une dérivée $F'(x)$, égale à la valeur pour $x = x_0$ de la somme de la série

$$(1) \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

dont je montrerai qu'elle est absolument convergente à l'intérieur de l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$.

Soit, en désignant par x'_0 la valeur absolue de x_0, $\beta = \alpha - x'_0$; le nombre positif β est évidemment le plus petit des deux nombres positifs $\alpha - x_0$, $x_0 + \alpha$; en sorte que, si l'on assujettit la variable h à rester dans l'intervalle $(-\beta, \beta)$, on sera sûr que le nombre $x_0 + h$ appartiendra toujours à cet intervalle $(-\alpha, \alpha)$ dans lequel la convergence absolue de la série (a) est assurée : c'est ce que je suppose essentiellement dans la suite.

Dans ces conditions, la valeur du rapport $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$, dont on prétend évaluer la limite quand h tend vers 0, est la somme de la série convergente

$$a_1 \frac{(x_0+h) - x_0}{h} + a_2 \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} + \ldots + a_n \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} + \ldots,$$

obtenue en retranchant terme à terme (n° 177) les deux séries convergentes

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1(x_0+h) + a_2(x_0+h)^2 + \ldots + a_n(x_0+h)^n + \ldots, \\ a_0 + \quad a_1 x_0 \quad + \quad a_2 x_0^2 \quad + \ldots + \quad a_n x_0^n \quad + \ldots, \end{array}$$

et en divisant ensuite chaque terme par h.

Or, on a, pour toutes les valeurs de h autres que o,

$$\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}=C_1^n x_0^{n-1}+C_2^n x_0^{n-2}h+\ldots+C_n^n h^{n-1},$$

en désignant par C_1^n, C_2^n, ... les coefficients numériques du développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un binome.

Désignons par $\varphi_n(h)$ le second membre de cette égalité; c'est un polynome en h; c'est donc, dans l'intervalle $(-\beta, \beta)$, une fonction continue de h; on va montrer qu'il en est de même de la somme de la série

$$(2)\qquad a_1\varphi_1(h)+a_2\varphi_2(h)+\ldots+a_n\varphi_n(h)+\ldots,$$

toujours égale à $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ quand h n'est pas nul.

Si l'on admet qu'il en est ainsi, il est clair que la limite de cette somme, quand h tend vers o, doit être égale à la valeur

$$a_1\varphi_1(0)+a_2\varphi_2(0)+\ldots+a_n\varphi_n(0)+\ldots,$$

qu'elle prend pour $h=0$, c'est-à-dire à la somme de la série

$$a_1+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\ldots+na_nx_0^{n-1}+\ldots;$$

cette somme sera donc la valeur, pour $x=x_0$, de la dérivée de la fonction $F(x)$. C'est la partie principale de la proposition énoncée, dont la démonstration est ainsi ramenée à prouver la continuité de la série (2); or, en se reportant à la définition de $\varphi_n(h)$ et en désignant par h' la valeur absolue de h, on voit que l'on a

$$\begin{aligned}|\varphi_n(h)| &\leqq C_1^n x_0'^{n-1}+C_2^n x_0'^{n-2}h'+\ldots+C_n^n h'^{n-1}\\ &\leqq C_1^n x_0'^{n-1}+C_2^n x_0'^{n-2}\beta+\ldots+C_n^n\beta^{n-1},\end{aligned}$$

le dernier membre de ces inégalités n'est autre chose que le nombre positif

$$\frac{(x_0'+\beta)^n-x_0'^n}{\beta}=\frac{\alpha^n-x_0'^n}{\beta},$$

on aura donc, pour toutes les valeurs naturelles de n,

$$|a_n\varphi_n(h)|\leqq a_n'\frac{\alpha^n-x_0'^n}{\beta},$$

en sorte que les valeurs absolues des termes de la série (2) sont inférieures ou égales aux termes, tous positifs ou nuls, de la série

$$a'_1 \frac{\alpha - x'_0}{\beta} + a'_2 \frac{\alpha^2 - x'^2_0}{\beta} + \ldots + a'_n \frac{\alpha^n - x'^n_0}{\beta} + \ldots,$$

qui est certainement convergente (n° 177), puisqu'on l'a obtenue en retranchant, terme à terme, deux séries convergentes, puis en divisant chaque terme par β. Il résulte de là, d'une part, que la série (2) est absolument convergente, pour toutes les valeurs de h (y compris o) qui appartiennent à l'intervalle $(-\beta, \beta)$ et, d'autre part, puisque les termes de cette série sont des fonctions continues de a, que sa somme est une fonction continue de h, dans cet intervalle (n° 224); c'est ce qu'il fallait établir.

On a prouvé que la série

$$(1) \qquad a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

qui n'est autre que la série (2) pour $h = 0$, était absolument convergente pour $x = x_0$, c'est-à-dire pour n'importe quelle valeur *intérieure* à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$: le raisonnement ne s'étend pas aux bornes de l'intervalle. Si, toutefois, en supposant $\alpha' > \alpha$, la série proposée (a) se trouvait être absolument convergente dans l'intervalle $(-\alpha', \alpha')$, il est clair qu'on pourrait substituer l'intervalle $(-\alpha', \alpha')$ à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ et la convergence absolue de la série (1) serait assurée pour $x = \pm \alpha$; on serait aussi certain que sa somme serait égale, pour $x = \pm \alpha$, à la dérivée de la fonction $F(x)$. On voit, d'après cela, qu'on peut énoncer les propositions suivantes :

Si la série proposée (a) est convergente quel que soit x, la série (2) est aussi convergente quel que soit x, et sa somme est toujours la dérivée de la somme $F(x)$ de la série (a).

Si la série (a) est convergente pour certaines valeurs de x et divergente pour d'autres valeurs de x, il y a, comme on sait, un intervalle $(-A, A)$ tel que la série (a) soit absolument convergente pour les valeurs de x intérieures à cet intervalle et divergente pour les valeurs de x qui lui sont extérieures; la série (1) est absolument convergente comme la série (a) pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-A, A)$. Il est aisé de reconnaître qu'elle est divergente pour toute valeur x_0 extérieure à cet intervalle; si, en effet, elle était convergente pour $x = x_0$, elle serait absolument convergente pour tous les nombres dont la valeur absolue est moindre que celle de x_0, et, en particulier, pour ceux de ces nombres dont la valeur absolue dépasse A; en désignant par x'_1 la valeur absolue d'un tel nombre, la série à termes positifs

$$a'_1 + 2a'_2 x'_1 + \ldots + n a'_n x_1'^{n-1} + \ldots$$

serait donc convergente; mais les termes de cette série dépassent les termes correspondants de la série divergente

$$a'_1 x'_1 + a'_2 x_1'^2 + \ldots + a'_n x_1'^n + \ldots.$$

La contradiction est évidente.

On voit que l'*intervalle de convergence* $(-\text{A}, \text{A})$ est le même pour la série proposée (a) et la série dérivée (1).

Il peut toutefois arriver que la série (a) soit convergente pour $x = \pm \text{A}$ et que la série (1) soit divergente pour l'une ou l'autre de ces valeurs.

La proposition établie sur la série (a) s'applique naturellement à la série (1); puis à celle qu'on en déduit de la même façon, etc. : on arrive évidemment à la proposition suivante :

Les séries

$$\begin{array}{l}
a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,\\
1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,\\
1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + 3.4 a_4 x^2 + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
1.2\ldots p a_p + 2.3\ldots(p+1) a_{p+1} x + 3.4\ldots(p+2) a_{p+2} x^2 + \ldots\\
\qquad + (n-p+1)(n-p+2)\ldots n a_n x^{n-p} + \ldots
\end{array}$$

ont toutes le même intervalle de convergence $(-\text{A}, \text{A})$; *à l'intérieur de cet intervalle, la somme de chacune d'elles est la dérivée de la somme de la précédente;* en d'autres termes, leurs sommes respectives sont $\text{F}(x)$, $\text{F}'(x)$, $\text{F}''(x)$, ..., $\text{F}^{(p)}(x)$, ...

Pour $x = 0$, chacune des sommes se réduit au premier terme de la série ; on a donc

$$a_0 = \text{F}(0), \quad a_1 = \frac{\text{F}'(0)}{1}, \quad a_2 = \frac{\text{F}''(0)}{1.2}, \quad \ldots, \quad a_p = \frac{\text{F}^{(p)}(0)}{1.2\ldots p}, \quad \ldots,$$

en désignant par F(o), F′(o), F″(o), ... les valeurs, pour $x = 0$, de la fonction $F(x)$ et de ses dérivées successives; on en conclut la formule importante

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0) + \ldots.$$

Elle suppose essentiellement que la fonction $F(x)$ peut être développée en une série procédant suivant les puissances entières et positives de x, puisque c'est ce développement qui a été notre point de départ; elle donne une seconde démonstration de ce fait que, la fonction $F(x)$ étant donnée, le développement en série entière ne peut se faire que d'une seule façon.

Fonction primitive. — De même qu'on peut obtenir, sous forme de série, la dérivée de la fonction $F(x)$ somme de la série (a), on peut obtenir une fonction primitive de $F(x)$: et telle sera évidemment la somme de la série

$$(3) \qquad a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a^2}{3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

si l'on admet la convergence absolue de cette série à l'intérieur de l'intervalle (— A, A); or, cette convergence est évidente; si, en effet, la série (a') est convergente pour le nombre positif α, la série à termes positifs

$$a'_0 \alpha + a'_1 \alpha^2 + a'_2 \alpha^3 + \ldots + a'_n \alpha^{n+1} + \ldots$$

sera convergente et, *a fortiori*, la série

$$a'_0 \alpha + \frac{a'_1}{2} \alpha^2 + \frac{a'_2}{3} \alpha^3 + \ldots + \frac{a'_n}{n+1} \alpha^{n+1} + \ldots,$$

dont les termes sont plus petits. Puisque l'intervalle de convergence d'une série est le même que celui de la série dérivée, il est clair que l'intervalle de convergence de la série (3) est (— A, A).

Si l'on désigne par $F_1(x)$ la somme de la série (3), toute fonction primitive de la fonction $F(x)$, dans l'intervalle (— A, A), sera, comme on l'a vu, de la forme $F_1(x) + C$, où C est une constante : on peut dire que $F_1(x)$ est celle des fonctions primitives de $F(x)$ qui s'annule pour $x = 0$.

L'analogie des propriétés des séries entières qu'on vient d'établir avec celles des polynomes est manifeste.

§ 2. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE QUELQUES FONCTIONS SIMPLES. FORMULES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

230. Voici quelques applications directes des résultats du numéro précédent :

On a pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots;$$

on aura donc, dans le même intervalle, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

$$\frac{1.2}{(1-x)^3} = 1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \ldots + (n-1)nx^{n-2} + \ldots,$$

$$\frac{1.2\ldots(p-1)}{(1-x)^p} = 1.2\ldots(p-1) + 2.3\ldots px + 3.4\ldots(p+1)x^2 + \ldots \\ + (n-p+2)(n-p+3)\ldots nx^{n-p+1} + \ldots;$$

cette dernière formule peut s'écrire

$$\frac{1}{(1-x)^p} = (1-x)^{-p} = 1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p+1)}{1.2}x^2 + \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}x^3 \\ + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{1.2\ldots r}x^r + \ldots,$$

ou, en changeant x en $-x$, et en remplaçant p par $-n$,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-r+1)}{1.2\ldots r}x^r + \ldots.$$

Cette dernière formule est valable pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$ et pour les valeurs *entières et négatives* du nombre n : elle est vraie, comme on le sait, pour les valeurs naturelles de n; seulement, dans ce cas, tous les termes de degré supérieur à n disparaissent, parce que leurs coefficients sont nuls; elle peut donc être regardée comme l'extension au cas des exposants entiers et négatifs de la formule du binome.

Pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$, la fonction $-\lg(1-x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1-x}$; toute fonction primitive de $\frac{1}{1-x}$ est, dans cet intervalle, de la forme $C - \lg(1-x)$. Si l'on veut que cette fonction s'annule pour $x = 0$, il faut prendre $C = 0$: on a donc

$$-\lg(1-x) = \lg\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

ou, si l'on préfère,

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$.

Observons que, pour les valeurs de x extérieures à cet intervalle et même pour la borne inférieure $x = -1$, la série diverge; elle est convergente, pour $x = 1$, mais non absolument; la démonstration précédente ne prouve pas que l'on ait

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

cette égalité, toutefois, est vraie.

La dérivée de $\operatorname{arc\,tang} x$ est $\frac{1}{1+x^2}$; $\operatorname{arc\,tang} x$ est la fonction primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule pour $x = 0$; de la formule

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

on déduit donc la formule

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

valable pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$; elle subsiste, il est vrai, pour le cas où x est ± 1 et l'on a

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots,$$

mais cela ne résulte pas de la démonstration précédente.

La fonction $\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, inverse de la fonction $\operatorname{th} x$, a pour dérivée $\frac{1}{1-x^2}$; on en conclut l'égalité, valable pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$,

$$\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

qui résulte d'ailleurs de ce que l'on a

$$\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\lg(1+x) - \frac{1}{2}\lg(1-x),$$

et des développements antérieurement obtenus pour $\lg(1+x)$ et $\lg(1-x)$.

231. Les résultats précédents suffisent déjà à montrer l'importance des propositions établies au n° **229** : en partant d'une série entière dont on connaît la somme, on obtient de nouveaux développements en série entière en prenant les dérivées ou la fonction primitive.

Voici d'autres applications obtenues en cherchant des fonctions qui vérifient une *équation différentielle* (du premier ordre) (n° **222**). J'ai déjà fait observer que le problème qui consiste à trouver la fonction primitive d'une fonction donnée était une question de la même nature. La solution générale de ce dernier problème s'obtient en ajoutant une constante arbitraire à n'importe quelle solution particulière, et le problème devient déterminé si l'on se propose de trouver une fonction dont la dérivée soit donnée et qui, pour une valeur particulière de la variable, prenne une valeur donnée. Des circonstances analogues se rencontreront dans les questions qui vont être traitées.

Proposons-nous de chercher une fonction y de x, qui, pour toutes les valeurs de x, soit égale à sa dérivée, qui, en d'autres termes, vérifie l'équation différentielle $y' = y$. Nous connaissons déjà une fonction qui répond à la question, c'est la fonction $z = e^x$. Il est aisé d'en déduire toutes les autres; en effet, les deux égalités $y' = y$, $z' = z$ entraînent $y'z - yz' = 0$, ou

$$\frac{y'z - yz'}{z^2} = 0.$$

Le premier membre est la dérivée de $\frac{y}{z}$; cette dérivée devant être nulle quel que soit x, il faut que $\frac{y}{z}$ soit une constante C; en d'autres termes, toute fonction qui répond à la question est égale à la fonction e^x multipliée par un facteur constant [1]. Lors même qu'on ne connaîtrait pas la fonction e^x, le raisonnement précédent montrerait que, s'il y a une fonction $f(x)$ qui soit égale à sa dérivée, toute fonction égale à sa dérivée sera de la forme $\mathrm{C}f(x)$. On pourra déterminer la constante C par la condition qu'elle prenne une valeur déterminée pour une valeur donnée de x, par exemple la valeur 1 pour $x = 0$: il n'y a qu'une seule fonction, toujours égale à sa dérivée, qui pour $x = 0$ soit égale à 1.

On peut présenter les choses à un point de vue géométrique : le problème posé revient à celui-ci : trouver toutes les courbes planes telles que la pente de la tangente soit constamment égale à l'ordonnée du point de contact. La courbe dont l'équation est $y = e^x$ (*fig.* 52) répond à la question. Il en est de même de toutes celles que l'on en déduit, en multipliant toutes les ordonnées par un nombre constant. C'est là un fait dont il est bien aisé de se rendre compte géométriquement. Nous savons de plus que toutes les courbes qui répondent à la question peuvent se déduire de l'une d'entre elles par la construction qu'on vient d'indiquer. Enfin, comme il est évident sur la figure, il y a une de ces courbes, et une seule, qui passe par un point donné :

---

[1] On pourrait encore raisonner comme il suit : si l'égalité $y' = y$ entraîne $\frac{y'}{y} = 1$, le premier membre de cette dernière égalité est la dérivée de $\log|y|$; cette dérivée devant être égale à 1, il faut que $\log|y|$ soit égal à $x + c'$, en désignant par c' une constante et, par conséquent, que y soit égal à $\pm e^{x+c'} = \pm e^{c'}\mathrm{C}^r$; en désignant par e le facteur constant $\pm e^{c'}$, on trouve, comme plus haut, $y = \mathrm{C}e^x$. Le raisonnement employé dans le texte ne suppose pas qu'on connaisse la fonction logarithmique, ni ses propriétés.

cela revient à dire qu'on peut déterminer la fonction cherchée par la condition que, pour une valeur donnée de x, elle prenne une valeur donnée. Que ce dernier problème n'admette jamais qu'une solution, cela correspond à ce fait évident que deux des courbes considérées ne se rencontrent jamais.

Cherchons en particulier s'il y a une fonction développable en une série entière

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

qui soit égale à sa dérivée

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots.$$

Puisque les sommes de deux séries ne peuvent être égales pour toutes les valeurs de x sans que les séries soient identiques terme à terme, on voit que, si la série (a) répond à la question, on doit avoir

$$a_1 = a_0, \qquad 2a_2 = a_1, \qquad 3a_3 = a_2, \qquad \ldots, \qquad n a_n = a_{n-1}, \qquad \ldots.$$

Réciproquement, la série (a) répondra évidemment à la question, si tous les coefficients vérifient les équations précédentes. De ces équations, on tire successivement

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_0}{2.3}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{a_0}{1.2.3\ldots n}, \qquad \ldots;$$

la série la plus générale qui réponde à la question s'obtient en multipliant par un nombre arbitraire a_0 les termes de la série

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont on sait qu'elle est convergente quel que soit x. On a vu plus haut que toute solution du problème posé s'obtient en multipliant une solution particulière par une constante arbitraire; on est donc parvenu, par le procédé employé, à la solution la plus générale du problème posé.

On aurait pu encore raisonner comme il suit :

Si une fonction $f(x)$ est telle qu'on ait toujours $f'(x) = f(x)$, on aura

$$f''(x) = f'(x) = f(x),$$
$$f'''(x) = f''(x) = f(x), \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(x) = f(x).$$

En particulier toutes ces dérivées doivent être égales pour $x = 0$; désignons par a_0 leur valeur commune; on a vu plus haut que, si la fonction $f(x)$ est développable en une série entière en x, on doit avoir

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1} + x^2\frac{f''(0)}{1,2} + \ldots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

On doit donc avoir

$$f(x) = a_0\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots\right);$$

réciproquement, on voit directement que la fonction ainsi trouvée répond à la question.

Si l'on détermine la constante a_0 par la condition que la fonction $f(x)$ soit égale à 1 pour $x = 0$, on aura évidemment $a_0 = 1$; la fonction $f(x)$ se réduira certainement alors à la fonction e^x; on a donc, pour toutes les valeurs de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

J'insiste sur ce fait que, si l'on n'avait pas étudié antérieurement la fonction e^x, cette fonction se présenterait très naturellement sous la forme

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

comme la solution la plus simple de l'équation différentielle $y' = y$. On a vu au n° **217** comment la forme même de la série mettait en évidence le sens de la variation de $\varphi(x)$ pour x positif. La propriété $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$ apparaît comme une application immédiate de la règle pour la multiplication des séries : elle apparaît d'ailleurs aussi très aisément sur la propriété $\varphi'(x) = \varphi(x)$ qui entraîne immédiatement la propriété $\varphi'(x+\alpha) = \varphi(x+\alpha)$ en désignant par α une constante quelconque : cette dernière égalité montre que la fonction $\varphi(x+\alpha)$ est aussi une fonction égale à sa dérivée; elle ne peut donc différer de $\varphi(x)$ que par un facteur constant C; or l'égalité $\varphi(x+\alpha) = C\varphi(x)$, en y faisant $x = 0$, montre que l'on doit avoir $C = \varphi(\alpha)$: c'est la propriété fondamentale; de cette propriété et de l'égalité $\varphi(0) = 1$, on déduit l'identité

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$$

qui montre de suite que la fonction $\varphi(x)$ est encore croissante quand x est négatif, et qu'elle tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

Soit a un nombre positif quelconque; on a (n° 202)

$$a^x = e^{x \lg a}$$

et, par suite,

$$a^x = 1 + \frac{x \lg a}{1} + \frac{x^2 \lg^2 a}{1.2} + \ldots + \frac{x^n \lg^n a}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Observons encore que les formules

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

donnent immédiatement, en ajoutant, en retranchant, et en divisant par 2,

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \ldots.$$

Ces formules renseignent immédiatement sur la façon dont varient les fonctions $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$. On voit d'abord que la première est paire, la seconde impaire; elles sont toutes deux croissantes pour x positif; elles croissent indéfiniment, et plus rapidement que n'importe quelle puissance de x, quand x tend vers $+\infty$ (n° 227).

La fonction $(1+x)^m$ est définie, quel que soit d'ailleurs le nombre m, pour x intérieur à l'intervalle $(-1, 1)$; elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{1+x},$$

ou

$$y'(1+x) - my = 0;$$

on voit comme tout à l'heure que toute solution de cette équation doit se déduire d'une solution particulière z en la multipliant par une constante: toute fonction qui, mise à la place de y, vérifie cette équation pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, est de la forme $C(1+x)^m$; la fonction $(1+x)^m$ elle-même est caractérisée par ce fait qu'elle satisfait à l'équation et qu'elle se réduit à 1 pour $x=0$.

Cherchons s'il y a une série de la forme

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

qui vérifie cette équation différentielle; dans le produit par $1+x$ de la série dérivée

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

le coefficient de x^{n-1}, c'est-à-dire $(n-1)a_{n-1} + na_n$, doit être égal à ma_{n-1}; l'égalité $na_n = (m-n+1)a_{n-1}$ doit avoir lieu pour toutes les valeurs naturelles de n. Réciproquement, si tous les coefficients d'une série convergente vérifient cette équation, la somme de la série vérifie assurément l'équation différentielle $y'(1+x) - my = 0$: or la relation précédente donne successivement

$$a_1 = \frac{m}{1} a_0, \quad a_2 = \frac{m(m-1)}{1.2} a_0, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} a_0, \quad \ldots;$$

par conséquent, la série cherchée s'obtient en multipliant par la constante a_0 les termes de la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots;$$

on a vu au n° 182 que cette série est convergente pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$; puisque, pour $x=0$, la somme de la série est égale à 1, on a, pour toutes les valeurs de x considérées,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots;$$

cette formule, jusqu'ici, n'avait été établie que pour les valeurs *entières* de m ; elle est due à Newton.

En y changeant m en $-m$, elle devient

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots ;$$

elle permet de développer les expressions telles que

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}};$$

en y remplaçant, par exemple, x par $-x^2$ et m par $-\frac{1}{2}$, elle donne la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^{2n} + \ldots$$

qui est encore valable pourvu que x soit intérieur à l'intervalle $(-1, 1)$; le premier membre est la dérivée de la fonction arc $\sin x$, dont on obtiendra donc le développement en formant la fonction primitive de la série qui figure au second membre; la constante arbitraire se détermine par la condition que la fonction primitive soit nulle pour $x = 0$, comme arc $\sin x$; on obtient ainsi

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots ;$$

cette formule est valable à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$. On établira de même la formule

$$\lg\left(x + \sqrt{1+x^1}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

dans laquelle le premier membre est la fonction inverse de $\text{sh}\, x$. Elle est valable pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$.

On pourrait obtenir par un procédé analogue les développements en série entière des fonctions $u = \sin x$, $v = \cos x$ en partant de ce que ces fonctions vérifient les équations différentielles $u' = v$,

$r' = -u$ (¹). On va les déduire tout à l'heure d'une formule générale.

232. On a montré au n° **229** que, si une fonction $F(x)$ pouvait, dans un intervalle $(-\alpha, \alpha)$, être regardée comme la somme d'une série entière absolument convergente, cette série avait nécessairement la forme

$$F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0) + \ldots;$$

d'où un moyen évident pour obtenir le développement en série entière d'une fonction donnée $F(x)$, si ce développement est possible. Prenons, par exemple, pour $F(x)$ l'une ou l'autre des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, dont les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ sont respectivement $\sin\left(x + \frac{p\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(x + \frac{p\pi}{2}\right)$, en sorte que l'on a, dans le premier cas, $F^{(p)}(0) = \sin \frac{p\pi}{2}$, c'est à savoir o si p est pair, 1 ou -1 si p est un multiple de 4 plus 1 ou plus 3, et, dans le second cas, $F^{(p)}(0) = \cos \frac{p\pi}{2}$, c'est-à-dire o si p est impair, 1 ou -1 si p est le double d'un nombre pair ou le double d'un nombre impair; les seuls développements possibles pour $\sin x$ et $\cos x$ sont les suivants :

$$(1)\quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{1.2.3\ldots(2p+1)} + \ldots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{1.2.3\ldots 2p} + \ldots; \end{cases}$$

mais, bien qu'on ait démontré, au n° **182**, la convergence, pour toute valeur de x, des deux séries qui figurent dans les seconds membres, on ne peut affirmer, en se fondant sur le raisonnement qui précède, que les sommes de ces deux séries soient respectivement égales à $\sin x$ et à $\cos x$.

En admettant toujours la possibilité de développer, dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, la fonction $F(x)$ en une série entière absolument convergente, il est clair qu'on peut mettre cette fonction sous la forme

$$F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0) + \frac{M x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)},$$

(¹) Voir *Exercice* 253.

M étant une fonction de x dont on sait seulement qu'elle reste, en valeur absolue, inférieure à un nombre positif fixe, quand x appartient à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$; il est naturel de chercher à obtenir quelque évaluation de cette fonction, qui fournisse un renseignement sur le reste de la série considérée quand on n'en conserve que les $p+1$ premiers termes.

Plus généralement, sans même supposer que la fonction $F(x)$ soit développable en série entière, et en supposant seulement que cette fonction admette, dans tout l'intervalle $(0, x_0)$, des dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$ afin que l'expression qu'on va écrire ait un sens et que les raisonnements qui suivent soient légitimes, on peut se proposer d'évaluer la différence

$$F(x) - F(0) - \frac{x}{1} F'(0) - \frac{x^2}{1.2} F''(0) - \ldots - \frac{x^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0).$$

Désignons par $\frac{M_0 x_0^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}$ la valeur de cette différence pour $x = x_0$, M_0 étant un nombre inconnu dont on va obtenir une évaluation; posons pour cela

$$\varphi(x) = F(x) - F(0) - \frac{x}{1} F'(0) - \frac{x^2}{1.2} F''(0) - \ldots \\ - \frac{x^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0) - \frac{M_0 x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)};$$

la fonction $\varphi(x)$ admet certainement, dans l'intervalle $(0, x_0)$, des dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$, puisqu'on l'obtient en ajoutant un polynome à $F(x)$, qui admet de telles dérivées : ces dérivées sont successivement

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= F'(x) - F'(0) - \frac{x}{1} F''(0) - \ldots - \frac{x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} F^{(p)}(0) - \frac{M_0 x^p}{1.2\ldots p}, \\
\varphi''(x) &= F''(x) - F''(0) - \frac{x}{1} F'''(0) - \ldots - \frac{x^{p-2}}{1.2\ldots(p-2)} F^{(p)}(0) - \frac{M_0 x^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\varphi^{(p)}(x) &= F^{(p)}(x) - F^{(p)}(0) - \frac{M_0 x}{1}, \\
\varphi^{(p+1)}(x) &= F^{(p+1)}(x) - M_0.
\end{aligned}$$

Or la fonction $\varphi(x)$, en vertu de la façon même dont elle a été formée, s'annule pour $x = x_0$; elle s'annule évidemment, à cause de sa forme, pour $x = 0$; donc (n° 215), sa dérivée s'annule pour un nombre x_1, compris entre o et x_0, différent de o et de x_0; $\varphi'(x)$ s'annulant, d'une part, pour $x = x_1$, et s'annulant évidemment, d'autre part, pour $x = 0$, $\varphi''(x)$ s'annulera pour un nombre x_2 compris entre o et x_1, et ainsi de suite : $\varphi^{(p)}(x)$ s'annulera pour un nombre x_p compris entre o et x_{p-1}; $\varphi^{(p+1)}(x)$ s'annulera pour un nombre x_{p+1} compris entre o et x_p, par conséquent entre o et x_0, et différent de l'un et de l'autre; on a donc

$$M_0 = F^{(p+1)}(x_{p+1}).$$

C'est l'évaluation que l'on voulait obtenir; on peut écrire

$$F(x_0) = F(0) + \frac{x_0}{1} F'(0) + \ldots + \frac{x_0^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0) + \frac{x_0^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} F^{(p+1)}(x_{p+1}),$$

x_{p+1} étant un nombre dont on sait seulement qu'il est compris entre o et x_0, et différent de o et de x_0.

Cette formule est valable, quel que soit le nombre x_0, pourvu que les conditions imposées relativement à l'intervalle $(0, x_0)$ soient vérifiées. Rien n'empêche maintenant d'effacer l'indice o, pourvu qu'on sache que x appartienne à un intervalle (A, B), dont le nombre o fasse partie, dans lequel la fonction $F(x)$ admette des dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$, et d'écrire

$$(2) \qquad \begin{aligned} F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots \\ + \frac{x^p}{1.2\ldots p} F^{(p)}(0) + \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} F^{(p+1)}(\theta x), \end{aligned}$$

en désignant par θ un nombre compris entre o et 1, différent de o et de 1, afin que le produit θx, qui, dans la nouvelle formule, remplace x_{p+1}, désigne un nombre compris entre o et x.

On voit qu'une fonction $F(x)$, qui pour o et les valeurs voisines admet des dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$, se comporte à peu près comme un polynome, pourvu toutefois que la dérivée $(p+1)^{\text{ième}}$ reste, dans le voisinage de o, moindre en valeur absolue qu'un nombre positif fixe ([1]).

([1]) Je dirai souvent, pour abréger, qu'une fonction $f(x)$ est *bornée* dans un intervalle (a, b), ou aux environs de a, pour dire que la valeur absolue de cette fonction, quand x appartient à cet intervalle, ou reste suffisamment voisin de a, reste comprise entre deux nombres positifs fixes. On suppose ici que la dérivée $(p+1)^{\text{ième}}$ de la fonction $F(x)$, aux environs de o, est *bornée*.

Dans ces conditions, la formule précédente fournit des expressions approchées très simples de $F(x)$ quand x est voisin de o, à savoir

$$F(o),\quad F(o)+xF'(o),\quad F(o)+xF'(o)+\frac{x^2}{2}F''(o),\quad \ldots.$$

Il est bien aisé d'avoir une formule analogue qui rendra les mêmes services pour les valeurs de x voisines d'un nombre a, que je suppose appartenir à un intervalle (A', B') dans lequel la fonction $F(x)$ admette des dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$; il suffira de poser $x=a+h$, en désignant par h une nouvelle variable, assujettie à la condition de rester dans l'intervalle $(A'-a, B'-a)$, qui contient évidemment le nombre o, afin que $a+h$ reste dans l'intervalle (A', B'); la fonction (de h) $F(a+h)$ admettra dans l'intervalle $(A'-a, B'-a)$ des dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$ et ces dérivées s'obtiendront, en vertu du théorème des fonctions de fonction, en remplaçant x par $a+h$ dans $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^{(p)}(x)$; on aura donc, sous les conditions imposées,

$$(3)\qquad F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\ldots \\ +\frac{h^p}{1.2\ldots p}F^{(p)}(a)+\frac{h^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}F^{(p+1)}(a+\theta h),$$

en désignant toujours par θ un nombre compris entre o et 1.

Dans les formules (2) et (3), les derniers termes

$$\frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}F^{(p+1)}(\theta x),\qquad \frac{h^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}F^{(p+1)}(a+\theta h)$$

qui contiennent un nombre inconnu θ, s'appellent *termes complémentaires* [1].

---

[1] A ces formules, qui sont évidemment équivalentes, sont attachés respectivement les noms de Maclaurin et de Taylor. Cette dénomination est un peu impropre; Maclaurin et Taylor n'ont pas considéré d'expressions limitées, avec un terme complémentaire, mais bien les séries *illimitées*

$$F(o)+\frac{x}{1}F'(o)+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}F^{(p)}(o)+\ldots,$$
$$F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\ldots+\frac{h^p}{1.2\ldots p}F^{(p)}(a)+\ldots,$$

qui, sous certaines conditions, ont respectivement pour sommes $F(x)$ et $F(a+h)$. C'est d'ailleurs ces séries qui tiennent le rôle le plus important. Le terme complémentaire, sous la forme précédente, a été donné par Lagrange. La formule (4) contient, comme cas particulier ($p=o$), la formule des accroissements finis.

Le lecteur n'a pas manqué d'apercevoir l'analogie qu'il y a entre ces formules et celles qu'on a obtenues pour les polynomes; il prévoit certainement les conséquences qu'on en peut tirer pour l'étude d'une fonction dans le voisinage d'un nombre donné : on reviendra plus tard sur ces conséquences. C'est, pour le moment, de leur application aux développements en série qu'il est question.

Les formules (2) et (3), en raison de la façon dont l'une a été déduite de l'autre, sont manifestement équivalentes; les raisonnements qui s'appliquent à l'une s'appliquent à l'autre. Il suffira de raisonner sur la première, en supposant que x appartienne à un intervalle (A, B), contenant o, où la fonction donnée admette des dérivées de tous les ordres possibles.

Le terme complémentaire peut être regardé comme la différence entre $F(x)$ et la somme des $p+1$ premiers termes de la série

$$F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}F^{(p)}(0)+\ldots,$$

dont tous les termes suivent la même loi. Si cette différence tend vers o quand p augmente indéfiniment, c'est que la somme des $p+1$ premiers termes de cette série a pour limite $F(x)$ quand p augmente indéfiniment, c'est donc que la série est convergente et a pour somme $F(x)$. Réciproquement, pour que la série soit convergente et ait pour somme $F(x)$, il faut que la différence considérée, ou le terme complémentaire, tende vers o quand p augmente indéfiniment.

Sous la condition (nécessaire et suffisante) que le terme complémentaire tende vers o quand p augmente indéfiniment, on peut donc écrire

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots.$$

Le terme complémentaire peut alors être regardé comme le *reste* de la série qui figure au second membre, limitée au terme en x^p, c'est-à-dire que l'on a

$$F^{(p+1)}(\theta x)=F^{(p+1)}(0)+\frac{x}{p+2}F^{(p+2)}(0)+\frac{x^2}{(p+2)(p+3)}F^{(p+3)}(0)+\ldots.$$

Il y a un cas où l'on reconnaît très facilement que le terme complémentaire tend vers o lorsque p augmente indéfiniment, c'est celui où l'on sait que les dérivées $F^{(p)}(x)$, dans l'intervalle considéré, restent, quel que soit x et quel que soit le nombre naturel p, moindres en valeur absolue qu'un nombre positif fixe P. Le terme complémentaire est alors moindre, en valeur absolue, que

$$\frac{\mathrm{P}x'^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)},$$

en désignant par x' la valeur absolue de x. Or c'est là le terme d'une série absolument convergente, et, par suite, ce terme doit tendre vers o quand son rang augmente indéfiniment.

Cette remarque s'applique aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$ dont les dérivées sont au plus égales à 1 en valeur absolue; on en conclut que les formules (1) sont légitimes quel que soit x. La même remarque s'applique à la fonction e^x dont les dérivées restent toujours moindres que le nombre fixe e^{A} pourvu que x soit moindre, en valeur absolue, que le nombre positif A, en sorte que l'on peut écrire

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} + \ldots;$$

c'est une nouvelle démonstration de la formule établie au n° 231; l'égalité est valable pourvu que x soit moindre que A en valeur absolue, c'est-à-dire quel que soit x, puisque A est quelconque.

Ici, le terme complémentaire est assez simple pour être utilisé; on peut écrire, en désignant par θ un nombre positif moindre que 1,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x_2}{1.2} + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} + \frac{x^{p+1}e^{\theta x}}{1.2\ldots(p+1)}.$$

En s'adressant à la formule de Taylor, on obtiendrait le résultat suivant :

$$\begin{aligned} e^{a+h} &= e^a + \frac{h}{1}e^a + \frac{h^2}{1.2}e^a + \ldots + \frac{h^p}{1.2\ldots p}e^a + \ldots \\ &= e^a\left(1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{h^p}{1.2\ldots p} + \ldots\right) = e^a.e^h. \end{aligned}$$

C'est une nouvelle démonstration de la propriété fondamentale de la fonction e^x.

On a obtenu pour les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\lg(1+x)$, $(1+x)^m$, $\lg(x+\sqrt{1+x^2})$, $\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ des développements simples, dont la loi est facile à retenir ou à retrouver. Pour les fonctions $\operatorname{tang} x$ et $\operatorname{th} x$, la loi du développement est notablement plus compliquée; quant au calcul des premiers termes, on peut le faire en se servant de la formule (1) ou par des procédés qu'on va expliquer.

233. L'application de la formule générale (2) du numéro précédent et l'étude du terme complémentaire sont très aisées pour les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$; pour les autres fonctions, dont on a obtenu autrement le développement, cette application est notablement plus pénible que les procédés que l'on a décrits. L'étude du terme complémentaire, en particulier, est assez difficile.

Dans beaucoup de cas, la forme de ce terme complémentaire n'a pas grand intérêt : ce qui importe seulement c'est son existence, et le fait que dans la formule (2), par exemple, le coefficient de x^p est une fonction bornée dans l'intervalle que l'on considère; et cette importance tient à l'analogie entre les propriétés d'un polynome ordonné suivant les puissances de x et d'une expression de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \lambda x^{p+1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont des constantes et λ une fonction de x bornée pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$.

Rappelons en particulier que si une fonction $F(x)$, (dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, peut être mise sous la forme précédente, elle ne peut être mise sous cette forme que d'une seule façon; il en résulte que si la même fonction peut, dans le même intervalle, être mise sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_q x^q + \mu x^{q+1},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont des constantes, où μ est, comme λ, une fonction bornée, on a nécessairement (n° 32), en supposant $q > p$,

$$\alpha = a_0, \qquad \alpha = a_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = a_p,$$
$$\lambda = \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} x + \ldots + \alpha_q x^{q-p} + \mu x^{q+1-p}.$$

Ces remarques faites, il est aisé, dans bien des cas, d'avoir les premiers termes d'un développement limité tel que ceux que nous venons de considérer, sans se préoccuper de savoir si le développement illimité en série de Maclaurin est possible et dans quelles conditions il est possible, questions que je ne puis traiter ici.

Supposons d'abord que pour deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ on soit assuré, pour un intervalle $(-\alpha, \alpha)$, de développements limités tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \lambda x^{p+1},$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p + \mu x^{p+1},$$

où $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_p$ sont des constantes et λ, μ des fonctions bornées dans l'intervalle considéré. On voit de suite le moyen d'obtenir des développements analogues pour les fonctions $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\,g(x)$, et l'on voit aussi que, dans ces développements, les coefficients des puissances de x, jusqu'à x^p, sont des constantes qui ne dépendent que de $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_p$, nullement des fonctions λ, μ; le produit $f(x)\,g(x)$, par exemple, se mettra sous la forme

$$f(x)\,g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_p x^p + \nu x^{p+1},$$

en posant

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_p &= a_0 b_p + a_1 b_{p-1} + \ldots + a_p b_0. \end{aligned}$$

La loi de formation des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_p$ est la même que si l'on multipliait deux séries indéfinies, ou deux polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes, mais en ne gardant que les termes de degré inférieur à $p+1$. Quant à la fonction ν, dont la valeur exacte n'importe pas, il suffit de savoir qu'elle existe et qu'elle est bornée, dans l'intervalle considéré.

On peut obtenir aussi le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, lorsque b_0 n'est pas nul, en suivant exactement la même règle que pour la division des polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x et en s'arrêtant quand le reste est divisible par x^{p+1}.

Les coefficients des termes écrits au quotient ne dépendent encore que des coefficients $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_p$; les fonctions λ, μ n'interviennent que dans le reste : on parvient par le calcul que l'on vient de décrire à une formule telle que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k_0 + k_1 x + \ldots + k_p x^p + \frac{\rho x^{p+1}}{g(x)}$$

qui fournit des expressions approchées de $\frac{f(x)}{g(x)}$ pour des valeurs de x suffisamment voisines de o : ces valeurs doivent appartenir à un intervalle $(-\beta, \beta)$ intérieur à $(-\alpha, \alpha)$ et dans lequel $g(x)$ ne s'annule pas. On voit très aisément que, dans ces conditions, la fonction $\frac{\rho}{g(x)}$ est bornée.

Dans tous ces calculs, les fonctions λx^{p+1}, μx^{p+1} n'interviennent pas; on se dispense de les écrire; on les remplace, si l'on veut, par des points; en fait, on calcule comme avec des polynomes dont on ne garderait que les premiers termes.

Si, par exemple, on veut avoir une expression du genre de celle que nous considérons, pour $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et si l'on ne veut pas garder de termes de degré supérieur au troisième, on se rappellera qu'il est inutile de garder dans les développements de $\sin x$ et de $\cos x$ des termes de degré supérieur à 3, on remplacera $\sin x$ et $\cos x$ respectivement par $x - \frac{x^3}{6}$ et $1 - \frac{x^2}{2}$, on effectuera la division du premier polynome par le second, en s'arrêtant, au quotient, avant qu'on ait un terme de degré supérieur à 3; on trouve ainsi $x + \frac{x^3}{3}$ et l'on écrit

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

Si l'on avait gardé plus de termes dans les développements de $\sin x$ et de $\cos x$, calculé plus de termes au quotient, les deux premiers termes écrits au quotient auraient toujours été les mêmes. Le polynome $x + \frac{x^3}{3}$, quand x est très voisin de o, est une expression approchée de $\operatorname{tang} x$; à la vérité ce calcul ne donne pas de limites pour l'approximation; mais on verra plus tard que des expressions de ce genre rendent néanmoins de grands services : il est aisé de voir que le terme suivant serait un terme en x^5 et l'on peut admettre (sans préciser) que l'erreur commise, quand x est très voisin de o, est *comparable* à x^5.

Il est à peine utile de dire qu'il serait absurde d'utiliser la précédente formule pour des valeurs de x voisines de $\frac{\pi}{2}$, ou qui dépasseraient $\frac{\pi}{2}$, puisque, pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ s'annule.

Dans la pratique, on opère le plus souvent comme il suit : on écrit les premiers termes de $f(x)$ et les premiers termes de $g(x)$ comme s'il s'agissait d'une division, en mettant des points après les derniers termes écrits; on fait la division comme s'il s'agissait de polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x, mais en ayant soin de s'arrêter au quotient avant d'être obligé de se servir des termes qu'on n'a pas écrits, soit au dividende, soit au diviseur.

Je reviendrai tout à l'heure sur le cas où b_0 est nul, et où ainsi on peut mettre en facteur, dans $g(x)$, une certaine puissance de x; on obtient, en suivant la même méthode, des formules d'approximation qui sont extrêmement utiles, mais qui n'appartiennent plus au même type.

Supposons que l'on ait une fonction $\varphi(y)$ de la variable y qui, dans l'intervalle $(-\beta, \beta)$, puisse se mettre sous la forme

$$b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p + \mu y^{p+1},$$

en désignant par b_0, b_1, ..., b_p des constantes et par μ une fonction de y, bornée dans l'intervalle $(-\beta, \beta)$; supposons de plus que y soit une fonction de x, s'annulant pour $x = 0$, et susceptible d'être, pour les valeurs de x qui appartiennent à un intervalle $(-\alpha, \alpha)$, mise sous la forme

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \lambda x^{p+1},$$

en désignant par a_1, a_2, ..., a_p des constantes et par λ une fonction de x bornée dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$; en restreignant suffisamment cet intervalle, on pourra évidemment s'arranger pour que les valeurs de y qui correspondent à celles de x appartiennent à l'intervalle $(-\beta, \beta)$. La fonction $\varphi(y)$ pourra, dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, être regardée comme une fonction de x; elle pourra être mise aussi sous la forme d'une sorte de polynome. En effet, on pourra d'abord mettre sous cette forme (par de simples multiplications) $y^2, y^3, \ldots, y^p$, et, dans les expressions que l'on obtiendra, les coefficients des puissances de x, de degré moindre que $p+1$, ne dépendront, en vertu de ce que l'on a dit, que de a_1, a_2, ..., a_p, nullement de la fonction λ; en substituant ensuite les expressions trouvées dans le polynome en y, $b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p$, et en ne gardant que les termes en x de degré inférieur à $p+1$, on obtiendra un polynome

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_p x^p$$

dont les coefficients ne dépendent que de $b_0, b_1, \ldots, b_p, a_1, a_2, \ldots, a_p$: dans les termes négligés, on pourra mettre x^{p+1} en facteur, et l'on aura bien mis $\varphi(y)$ sous la forme cherchée

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_p x^p + \nu x^{p+1},$$

où ν est une fonction de x bornée dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$.

Ici encore les termes complémentaires n'interviennent pas; on peut les remplacer par des points; il suffit de faire attention à ne pas garder dans le résultat des termes qui dépendraient de ceux qu'on a négligés.

Supposons par exemple qu'on veuille des expressions approchées de

$$\sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \lambda x^{p+1}},$$

pour les petites valeurs de x, plaçons-nous dans le cas où a_0 n'est pas nul; on doit supposer a_0 positif pour que l'expression précédente soit réelle quand x est voisin de o; elle pourra se mettre sous la forme $\sqrt{a_0}\sqrt{1+y}$, en posant

$$y = \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_p}{a_0} x^p + \frac{\lambda}{a_0} x^{p+1}.$$

On n'aura plus qu'à appliquer la méthode précédente en s'appuyant sur la formule

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + \ldots.$$

On trouvera par le même procédé des expressions approchées pour une puissance quelconque, ou pour le logarithme de

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \lambda x^{p+1}.$$

Ici encore, en faisant les calculs, on se dispensera d'écrire les termes complémentaires. Les coefficients, jusqu'à celui de x^p, ne dépendent que de $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

Soit, par exemple, à chercher une expression approchée de $\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2}}$ pour les petites valeurs de x et supposons qu'on veuille s'arrêter aux termes en x^3. On aura

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2}} &= (1-2x\cos\alpha+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1+\frac{1}{2}(2x\cos\alpha-x^2)+\frac{3}{8}(2x\cos\alpha-x^2)^2 \\
&\quad+\frac{5}{16}(2x\cos\alpha-x^2)^3+\ldots \\
&= 1+x\cos\alpha+\frac{3\cos^2\alpha-1}{2}x^2+\frac{(5\cos^2\alpha-3)\cos\alpha}{2}x^3+\ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on voulait avoir une expression approchée de la même fonction, valable pour les petites valeurs de α, en se bornant aux termes en α^4, on l'écrirait

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\left(1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24}+\ldots\right)}} &= \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+x\alpha^2-\frac{x}{12}\alpha^4+\ldots}} \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{1-x}\left[1+\frac{x}{(1-x)^2}\alpha^2-\frac{x}{12(1-x)^2}\alpha^4+\ldots\right]^{-\frac{1}{2}};
\end{aligned}$$

la quantité que multiplie $\frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{1-x}$ est égale à

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\alpha^2-\frac{x}{12(1-x)^2}\alpha^4+\ldots\right]+\frac{3}{8}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\alpha^2-\frac{x}{12(1-x)^2}\alpha^4\right]^2+\ldots \\
&= 1-\frac{x}{2(1-x)^2}\alpha^2+\frac{x(1-7x+x^2)}{24(1-x)^4}\alpha^4+\ldots.
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{\sqrt{1-2x\cos\alpha+x^2}} = \frac{1}{1-x}-\frac{x}{2(1-x)^3}\alpha^2+\frac{x(1-7x+x^2)}{24(1-x)^5}\alpha^4+\ldots.$$

Soit encore, en désignant par α une constante, la fonction

$$\begin{aligned}
(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\lg(1+\alpha x)} &= e^{\frac{1}{x}\left(\frac{\alpha x}{1}-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\ldots\right)} \\
&= e^{\alpha-\frac{\alpha^2x}{2}+\frac{\alpha^3x^2}{3}-\ldots} \\
&= e^{\alpha}\times e^{-\frac{\alpha^2x}{2}+\frac{\alpha^3x^2}{3}-\ldots}.
\end{aligned}$$

Le second facteur du dernier membre est égal à

$$1+\frac{1}{1}\left(-\frac{\alpha^2 x}{2}+\frac{\alpha^3 x^2}{3}+\ldots\right)+\frac{1}{1.2}\left(-\frac{\alpha^2 x}{2}+\frac{\alpha^3 x^2}{3}-\ldots\right)^2+\ldots$$
$$=1-\frac{\alpha^2}{2}x+\frac{(8+3\alpha)\alpha^3}{24}x^2+\ldots.$$

On peut donc écrire

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}\left[1-\frac{\alpha^2}{2}x+\frac{(8+3\alpha)\alpha^3}{24}x^2+\ldots\right],$$

et l'on voit, en particulier, que, lorsque x s'approche de *zéro*, $(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$ tend vers la limite e^{α}.

Des méthodes analogues s'appliquent au calcul d'expressions approchées de fonctions *implicites* de x, valables pour les valeurs de x, voisines de *zéro*.

Considérons, par exemple, l'équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey=0,$$

qui définit y comme une fonction implicite de x s'annulant pour $x=0$ (n° 219). Admettons que cette fonction puisse se mettre, dans un intervalle $(-\alpha, \alpha)$, sous la forme

$$y=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p+\lambda x^{p+1};$$

on va chercher à déterminer les constantes a_1, a_2, ..., a_p; en remplaçant, dans le polynome $Ax^2+2Bxy+\ldots$, y par cette expression, on le mettra sous une forme analogue, où les coefficients des différentes puissances de x devront être nulles. En écrivant qu'il en est ainsi, on obtiendra une suite d'équations qui permettront de calculer successivement a_1, a_2, a_3, ..., a_p; le calcul des trois premiers coefficients est effectué ci-dessous :

$$2D+2Ea_1=0,$$
$$A+2Ba_1+Ca_1^2+2Ea_2=0,$$
$$2Ba_2+2Ca_1a_2+2Ea_3=0,$$
$$a_1=-\frac{D}{E},\qquad a_2=\frac{\Delta}{2E^3},\qquad a_3=\frac{(CD-BE)\Delta}{2E^5},$$

en posant $\Delta = 2\,\mathrm{BDE} - \mathrm{AE}^2 - \mathrm{CD}^2$; on a donc

$$y = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}x + \frac{\Delta}{2\,\mathrm{E}^3}x^2 + \frac{(\mathrm{CD}-\mathrm{BE})\Delta}{2\,\mathrm{E}^5}x^3 + \ldots.$$

On a supposé implicitement E différent de o; si E était nul, on ne serait pas dans le cas où s'applique le théorème fondamental relatif à l'existence des fonctions implicites, puisque la dérivée partielle par rapport à y du polynome $\mathrm{A}x^2 + 2\,\mathrm{B}xy + \ldots + 2\,\mathrm{E}y$ serait nulle pour $x = 0, y = 0$.

Si, pour une fonction $f(x)$, on a trouvé une expression abrégée du type

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \lambda x^{n+1},$$

et si l'on sait (ou si l'on admet) que la dérivée et la fonction primitive de $f(x)$ sont susceptibles d'être mises sous cette forme, il est clair que l'on pourra écrire pour la dérivée $f'(x)$ et pour celle des fonctions primitives qui s'annule pour $x = 0$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \mu x^n,$$
$$\mathrm{F}(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \nu x^{n+2}.$$

234. Une fonction de x ne peut pas toujours se mettre, pour les valeurs de x voisines de o, sous cette forme

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \lambda x^{p+1},$$

que l'on vient de considérer; les fonctions $\lg x$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, par exemple, ne sont pas susceptibles d'être mises sous cette forme. Toutefois les méthodes que l'on vient d'expliquer permettent très souvent d'obtenir des expressions approchées, plus ou moins différentes de celles que l'on vient de considérer, mais qui n'en rendent pas moins de grands services.

Revenons, par exemple, au quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ de deux fonctions

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

J'ai écarté précédemment le cas où b_0 était nul : Supposons de suite que l'on ait

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \ldots, \quad a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0,$$
$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad \ldots, \quad b_{n-1} = 0, \quad b_n \neq 0,$$

le quotient se mettra sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^m f_1(x)}{x^n g_1(x)},$$

en posant

$$f_1(x) = a_m + a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \ldots,$$
$$g_1(x) = b_n + b_{n+1} x + b_{n+2} x^2 + \ldots,$$

et l'on pourra, en appliquant la méthode exposée plus haut, mettre le rapport $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ sous la forme

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{A}_p x^p + \Lambda x^{p+1},$$

en désignant par A_0, A_1, ..., A_p des constantes qui ne dépendent que de $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+p}, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_{n+p}$ et par Λ une fonction bornée dans un petit intervalle $(-\alpha, \alpha)$. Il ne restera plus qu'à multiplier par x^{m-n} l'expression obtenue; lorsque m est supérieur ou égal à n, on retombera sur une expression approchée qui appartient au type considéré jusqu'ici, expression qui sera valable pour les petites valeurs de x, et mettra en évidence la façon dont le rapport considéré se comporte pour ces valeurs : on voit, par exemple, que, si m est plus grand que n, le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ s'approche de la limite o quand x tend lui-même vers o, que, si m est égal à n, le même rapport tend vers la limite $\frac{a_m}{b_m}$, quand x tend vers o. Si au contraire n est plus grand que m on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{A}_0}{x^{n-m}} + \frac{\mathrm{A}_1}{x^{n-m-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{n-m-1}}{x} + \mathrm{A}_{n-m} + \ldots + \Lambda x^{p+1+m-n}.$$

Je suppose que l'on ait pu pousser les calculs assez loin pour que $p + 1 + m - n$ soit positif.

On voit la différence entre l'expression à laquelle on parvient ainsi et celles que nous avons considérées jusqu'ici; celles-ci, abstraction faite du terme complémentaire, étaient de vrais polynomes en x, ordonnés suivant les puissances de x; nous avons ici des termes en $\frac{1}{x}$, ou en x^{-1}; l'expression à laquelle on parvient, en faisant toujours abstraction du terme complémentaire, est encore ordonnée suivant les puissances croissantes de x, mais elle contient des termes à exposants négatifs; elle se compose d'abord d'une partie fractionnaire, ou plutôt d'un polynome en $\frac{1}{x}$, sans terme constant,

$$\frac{A_0}{x^{n-m}} + \frac{A_1}{x^{n-m-1}} + \ldots + \frac{A_{n-m-1}}{x},$$

puis d'un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de x

$$A_{n-m} + A_{n-m+1}x + \ldots + A_p x^{p+m-n};$$

ce polynome est enfin suivi du terme complémentaire. Le polynome en x et le terme complémentaire sont continus pour $x = 0$; leur somme, quand x tend vers 0, tend vers la limite A_{n-m}; le polynome en $\frac{1}{x}$ et le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ deviennent infinis quand x tend vers 0 et la différence entre le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ et le polynome en $\frac{1}{x}$ tend vers A_{n-m}; le polynome en $\frac{1}{x}$ est d'ailleurs le seul polynome en $\frac{1}{x}$ sans terme constant tel qu'en le retranchant de $\frac{f(x)}{g(x)}$ la différence tende vers une limite finie. Ces circonstances sont exactement celles qu'on a rencontrées au Chapitre IV quand on s'est occupé des fractions rationnelles; les calculs qui conduisent à ce polynome en $\frac{1}{x}$, dont on comprend bien qu'il joue le rôle essentiel quand on s'approche de 0, sont d'ailleurs exactement les mêmes que ceux que l'on a faits alors (n° 61).

On a, par exemple,

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \ldots,$$
$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \ldots,$$
$$\frac{1}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{17}{120}x + \ldots,$$
$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + \ldots.$$

Considérons encore l'expression $\sqrt{x - x^2 + x^3}$; elle n'est réelle, pour les valeurs de x voisines de 0, que si x est positif; on l'écrira

$$\sqrt{x}\sqrt{1 - x + x^2}$$

et l'on calculera, comme il a été expliqué, une expression approchée pour $\sqrt{1 - x + x^2}$, en s'arrêtant au terme que l'on voudra; en se limitant au terme en x^2, on trouve

$$\sqrt{1 - x + x^2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \lambda x^3,$$

$$\sqrt{x - x^2 + x^3} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} + \lambda x^{\frac{7}{2}};$$

au lieu d'avoir des puissances entières de x, on a des puissances fractionnaires.

Considérons enfin l'expression $\lg \sin x$, en supposant x positif très petit, elle est égale à

$$\begin{aligned}\lg\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right) &= \lg x + \lg\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \ldots\right)\\ &= \lg x + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \ldots\right)^2 + \ldots\\ &= \lg x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \ldots.\end{aligned}$$

L'expression approchée que l'on obtient ainsi pour $\lg \sin x$ se compose du terme $\lg x$ et d'une expression analogue à un polynome; $\lg x$ devient infini quand x s'approche de 0; mais la décomposition précédente peut être cependant utile, parce que la fonction $\lg x$, que l'on a réduite en tables, est une des fonctions les plus connues : on trouvera d'ailleurs, à la fin du présent Chapitre, des renseignements sur la façon dont elle devient infinie quand x s'approche de 0.

235. Jusqu'ici on n'a cherché d'expressions approchées que pour le cas où la variable était voisine de 0; on n'a, si l'on veut étudier une fonction $f(x)$ pour les valeurs voisines de a et en obtenir des expressions approchées, qu'à poser $x = a + h$, et à chercher des expressions de la fonction $f(a + h)$ pour les valeurs de h voisines de 0, on est ramené au cas précédent.

Il convient de dire un mot du cas où l'on considère des valeurs de x très grandes en valeur absolue; on pose alors $x = \frac{1}{z}$ et l'on est encore ramené au cas précédent. On trouvera dans beaucoup de cas des polynomes en z, ou des sommes de polynomes en z^{-1} et en z, ordonnés suivant les puissances croissantes de z, suivis d'un terme complémentaire du type $\frac{\lambda}{x^{n+1}}$, λ restant borné quand x est très grand en valeur absolue.

Soit, par exemple, l'expression $\sqrt{x^2 - x + 1}$ dont on voudrait savoir comment elle se comporte pour les valeurs de x grandes en valeur absolue, et pour laquelle on désire obtenir des expressions approchées : on a

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \operatorname{sgn} x \frac{\sqrt{1 - z + z^2}}{z};$$

on a, en s'arrêtant au terme en z^3

$$\sqrt{1 - z + z^2} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{3}{8} z^2 + \lambda z^3,$$

et, par suite,

$$\operatorname{sgn} x \sqrt{x^2 - x + 1} = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \frac{1}{x} + \frac{\lambda}{x^2};$$

λ étant borné quand z s'approche de o, ou quand x tend vers $\pm\infty$. Le second membre est alors ordonné suivant les puissances *décroissantes* de x; on voit par exemple ici que, pour de grandes valeurs positives de x, $\sqrt{x^2 - x + 1}$ est à peu près égal à $x - \frac{1}{z}$; la différence entre $\sqrt{x^2 - x + 1}$ et $x - \frac{1}{2}$ tend vers o quand x tend vers $+\infty$.

On se dispense souvent d'écrire $x = \frac{1}{z}$. On écrira par exemple ici, en supposant x positif,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - x + 1} &= x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots\right] \\ &= x\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} + \ldots\right] = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \ldots.\end{aligned}$$

Considérons encore l'expression $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, où je supposerai que x désigne un nombre fixe et que m tende vers $\pm\infty$. On posera $m=\frac{1}{z}$ et l'on fera tendre z vers o; l'expression donnée prend la forme $(1+xz)^{\frac{1}{z}}$; c'est, sauf la différence des notations, une expression qu'on a étudiée au nº 233, où l'on a vu qu'on pourrait écrire

$$(1+xz)^{\frac{1}{z}}=e^x\left[1-\frac{x^2}{2}z+\frac{(8+3x)x^3}{24}z^2+\ldots\right];$$

on a donc

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=e^x\left[1-\frac{x^2}{2}\frac{1}{m}+\frac{(8+3x)x^3}{24}\frac{1}{m^2}+\ldots\right].$$

Lorsque m est très grand en valeur absolue, z est très voisin de o; la quantité entre crochets est très voisine de 1, aussi voisine de 1 qu'on le veut, pourvu que m soit suffisamment grand. On voit en particulier que, lorsque m grandit indéfiniment, l'expression $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a pour limite e^x. Le cas particulier où x est égal à 1 a été étudié au nº 192.

236. Applications au calcul numérique des valeurs d'une fonction donnée. — Les divers développements que l'on a appris à former servent à divers objets, soit que ces développements soient des séries illimitées, dont la loi est connue, soit que ces développements soient limités et ne puissent être utilisés qu'aux environs d'une valeur donnée. Leur objet essentiel est le calcul des valeurs que prend la fonction pour des valeurs données de la variable : on va en donner des exemples tout à l'heure. Les développements illimités, dont on connaît la loi, permettent souvent aussi de reconnaître certaines propriétés des fonctions, dans l'intervalle de convergence. On en a vu un exemple pour la fonction e^x. Les développements limités servent surtout à reconnaître l'allure de la fonction qu'ils représentent pour les valeurs voisines d'une valeur donnée.

Pour ce qui est des calculs numériques, les développements en série entière seront surtout avantageux pour les petites valeurs de x : théoriquement ils peuvent servir dans tout l'intervalle de convergence; les développements de e^x, $\sin x$, $\cos x$ permettent de calculer ces fonctions quel que soit x; mais il conviendra de se servir des propriétés connues de ces fonctions pour ramener le calcul au cas où les valeurs de x sont petites. S'il s'agit, par exemple, du sinus d'un arc x, on pourra toujours en ramener le calcul au calcul du sinus ou du cosinus d'un arc (¹) x compris entre o et $\frac{\pi}{4} = 0,785\ldots$. Pour un tel arc, les séries

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots$$

appartiennent à ce type de séries alternées où les termes vont en décroissant et où ainsi le dernier terme négligé permet de reconnaître le signe de l'erreur et fournit une limite supérieure de l'erreur. En se bornant aux termes écrits, on voit que les formules précédentes fournissent des valeurs approchées par défaut de $\sin x$ et de $\cos x$ et que les erreurs commises sont respectivement moindres que

$$\frac{\pi^9}{4^9.1.2\ldots9}, \quad \frac{\pi^8}{4^8.1.2\ldots8};$$

en cherchant les logarithmes (vulgaires) de ces quantités on reconnaît que les caractéristiques de ces logarithmes sont respectivement $\bar{7}$ et $\bar{6}$, en sorte que les erreurs sont certainement moindres que 10^{-6} et 10^{-5}; pour les petites valeurs de x, les derniers termes seront évidemment négligeables.

Logarithmes. — La formule

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

n'est valable qu'à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$; elle peut cependant servir à calculer les logarithmes des nombres naturels de proche

---

(¹) Si cet arc est exprimé en degrés ou en grades, on n'oubliera pas de l'exprimer en parties du rayon.

en proche; en désignant en effet par n un tel nombre et en faisant, dans la formule précédente, $x = \frac{1}{n}$, elle devient

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \quad \ldots;$$

si l'on connaissait lg 2, cette formule permettrait de calculer lg 3, lg 4, ...; les calculs, assez longs pour les petites valeurs de n, deviendraient faciles dès que n est un peu grand : toutefois la formule précédente peut être remplacée par une autre qui est beaucoup plus avantageuse.

On a établi au n° 230 la formule

$$(1) \qquad \lg\frac{1+x}{1-x} = 2\frac{x}{1} + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \ldots$$

valable à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$; en posant

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}, \qquad x = \frac{1}{2n+1},$$

x sera un nombre positif, au plus égal à $\frac{1}{3}$, si l'on prend pour n un nombre naturel; on aura donc, en remplaçant x par $\frac{1}{2n+1}$,

$$(2) \qquad \lg(n+1) - \lg n = 2\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \ldots;$$

cette formule est appropriée au calcul; en s'arrêtant dans le second membre au terme

$$\frac{2}{2p-1}\,\frac{1}{(2n+1)^{2p-1}},$$

le reste sera un nombre positif, moindre que

$$\frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{(2n+1)^{2p+1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2p+3}} + \ldots\right]$$
$$= \frac{1}{2n(n+1)(2p+1)(2n+1)^{2p-1}}.$$

Si l'on veut calculer lg 2 de cette façon, on fera $n = 1$ dans l'égalité (2) et l'on aura

$$\lg 2 = 2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{3^5} + \ldots.$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme $\frac{2}{2p-1}\frac{1}{3^{2p-1}}$ sera moindre que

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(2p+1)3^{2p-1}};$$

si l'on veut, par exemple, calculer lg2 avec 7 décimales on appliquera la méthode du n° 193; en calculant chaque terme avec 9 décimales, on constatera que le terme $\frac{2}{17.3^{17}}$ ne fournit plus que des zéros; d'ailleurs on reconnaît, sur l'expression précédente, que l'erreur commise en s'arrêtant au huitième terme $\frac{2}{15.3^{15}}$ est moindre que

$$\frac{1}{4.17.3^{15}} < \frac{11}{10^{10}},$$

l'erreur totale sera moindre que $\frac{8}{10^9} + \frac{11}{10^{10}} < \frac{1}{10^8}$; elle ne pourrait influer sur la septième décimale que si la huitième était un 9; s'il en était ainsi, on devrait pousser l'approximation plus loin, mais ce n'est pas le cas ici et l'on obtient avec sept décimales exactes [1]

$$\lg 2 = 0{,}6931471.$$

Les calculs, un peu longs au début, deviennent bientôt plus aisés; le troisième terme de la série, puis le second deviennent négligeables.

C'est des logarithmes vulgaires (à base 10), plutôt que des logarithmes naturels que l'on a besoin (n° 203).

On les calculera au moyen de la formule

$$\log_{10}(n+1) - \log_{10} n = 2M\frac{1}{2n+1} + \frac{2M}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{2M}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \ldots,$$

---

(1) Si l'on veut avoir lg2 à $\frac{10^{-7}}{2}$ près, on doit forcer la dernière décimale.

où M désigne l'inverse du logarithme de 10, que le procédé précédent permet d'obtenir [1].

On a

$$M = 0,43429448\ldots.$$

237. Interpolation dans les tables de logarithmes. — Le lecteur connaît les règles qui permettent de trouver le logarithme d'un nombre qui ne figure pas dans la table, ou de trouver le nombre qui correspond à un logarithme. Il est aisé de justifier ces règles.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on se serve d'une table à cinq décimales donnant les logarithmes (vulgaires) des nombres entiers de 1 à 10 000 : on y trouvera les mantisses des logarithmes (vulgaires) des nombres ayant moins de cinq chiffres, avec une erreur moindre qu'une demi-unité du dernier ordre décimal.

Je supposerai, pour ce qui est du premier problème, qu'on ait à chercher le logarithme vulgaire d'un nombre $A+\alpha$, dont la partie entière A est comprise entre 1000 et 10000, et, pour le second problème, qu'on cherche un nombre $A+\alpha$, compris entre 1000 et 10 000 dont on connaît le logarithme vulgaire $M\lg(A+\alpha)$; c'est toujours à ces deux cas, en effet, que se ramènent les deux problèmes.

Dans le premier cas, la règle consiste à prendre pour $M\lg(A+\alpha)$ la valeur $M\lg A + \alpha[M\lg(A+1) - M\lg A]$; l'erreur qui résulte de cette règle même est le produit par M de

$$\begin{aligned}
&\lg(A+\alpha) - \lg A - \alpha[\lg(A+1) - \lg A] \\
&= \lg\left(1+\frac{\alpha}{A}\right) - \alpha\lg\left(1+\frac{1}{A}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha^2}{2A^2} + \frac{\alpha^3}{3A^3} - \ldots\right) - \alpha\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{3A^3} - \ldots\right) \\
&= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2} - \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{3A^3} + \frac{\alpha(1-\alpha^3)}{4A^4} - \ldots;
\end{aligned}$$

la série qui figure au dernier membre appartient au type du n° 187; sa somme est moindre que $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2}$; comme α est moindre que 1, le produit $\alpha(1-\alpha) = \frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ est moindre que $\frac{1}{4}$, et la somme de

---

[1] Pour obtenir $\lg 10$ il suffit de calculer $\lg 2$ et

$$\lg 5 = 2\lg 2 + \frac{2}{11} + \frac{2}{3}\frac{1}{11^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{11^5} + \ldots.$$

la série est moindre que $\frac{1}{8A^2} < \frac{10^{-6}}{8}$; puisque M est moindre que $\frac{5}{10}$, on voit que l'erreur résultant de l'application de cette règle est moindre que 10^{-7}. A cette erreur peut d'ailleurs s'ajouter celles qui proviennent de l'inexactitude de la valeur de $M\lg(A+1) - M\lg A$, de ce qu'on ne garde que les premiers chiffres dans le produit de cette différence par α, enfin de l'inexactitude de $M\lg A$.

Considérons maintenant le problème inverse; on connaît le logarithme vulgaire d'un nombre inconnu $A+\alpha$, logarithme vulgaire qui est compris entre $M\lg(A+1)$ et $M\lg A$, lesquels figurent dans la table; A et $A+1$ sont des nombres entiers compris entre 1000 et 10000; on prend pour α la valeur approchée

$$\frac{M\lg(A+\alpha) - M\lg A}{M\lg(A+1) - M\lg A};$$

l'erreur qui résulte de l'application de cette règle est

$$\frac{\lg(A+\alpha) - \lg A}{\lg(A+1) - \lg A} - \alpha = \frac{\lg\left(1+\frac{\alpha}{A}\right) - \alpha\lg\left(1+\frac{1}{A}\right)}{\lg\left(1+\frac{1}{A}\right)};$$

on a vu plus haut que le numérateur de cette fraction est inférieur à $\frac{1}{8A^2}$; le dénominateur, égal à $\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{3A^3} - \ldots$, est plus grand que $\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2}$; l'erreur est donc moindre que

$$\frac{1}{8A^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2}\right)} = \frac{1}{8A-4}.$$

Comme cette erreur est plus petite que $\frac{1}{1000}$, la règle est justifiée; car il ne viendra à l'esprit de personne d'utiliser cette règle pour calculer trois chiffres décimaux au nombre inconnu; l'incertitude sur la valeur de $\log(A+1) - \lg A$ ne le permet évidemment pas (1).

(1) L'erreur qui provient de cette incertitude devient très notable quand on s'approche de 10000 et que les différences deviennent petites : si l'on désigne par p, q les nombres entiers que l'on substitue en fait aux valeurs exactes de

$$10^5[M\lg(A+\alpha) - M\lg A], \quad 10^5[M\lg(A+1) - M\lg A],$$

et par ε, η des limites supérieures des erreurs commises ainsi, la différence entre $\frac{M\lg(A+\alpha) - M\lg A}{M\lg(A+1) - M\lg A}$ et $\frac{p}{q}$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{q-\eta} + \frac{\eta}{q-\eta}\,\frac{p}{q}$; or, comme q descend au-dessous de 5, on voit que l'erreur que l'on commet de ce fait peut être voisine de $\frac{1}{10}$.

238. Constante d'Euler. — La formule

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots,$$

où n désigne un nombre naturel, montre que l'on peut écrire, en désignant par ε_n un nombre positif plus petit que $\frac{1}{2}$,

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

En ajoutant membre à membre à cette égalité celles qu'on en déduit en y remplaçant n par 1 [1], 2, 3, ..., $n-1$, on trouve

$$\lg(n+1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon_1}{1^2} - \frac{\varepsilon_2}{2^2} - \ldots - \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg(n+1) = \frac{\varepsilon_1}{1^2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{n^2};$$

supposons que l'on fasse croître n indéfiniment; comme la série à termes positifs

$$\frac{\varepsilon_1}{1^2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{n^2} + \ldots$$

est manifestement convergente (n° 183), on voit que le premier membre tend vers une limite, à savoir la somme C de la série précédente.

On a donné à ce nombre

$$C = 0,5772156649\ldots$$

le nom de *constante d'Euler;* il joue un rôle important dans diverses questions d'analyse.

Le fait que la différence

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment met bien en évidence la divergence de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

et la nature de cette divergence.

---

[1] A la vérité la relation n'est pas établie pour $n = 1$; qu'elle soit exacte, même pour ce cas, c'est ce qui résulte de la valeur de $\lg 2$.

Calcul de π. — Il est aisé de tirer de la formule

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

valable pour les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$ une formule convenable pour le calcul de π.

Observons d'abord que les formules

$$2\,\text{arc tang}\, a = \text{arc tang}\frac{2a}{1-a^2}, \qquad \text{arc tang}\, a - \text{arc tang}\, b = \text{arc tang}\frac{a-b}{1+ab},$$

où a, b désignent des nombres positifs moindres que 1, résultent immédiatement des formules

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}^2\alpha}, \qquad \text{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}.$$

Je vais me servir de ces formules pour le calcul de la tangente de l'arc $4\,\text{arc tang}\frac{1}{5} - \text{arc tang}\, 1$, que l'on peut prévoir être assez petit; on a successivement

$$2\,\text{arc tang}\frac{1}{5} = \text{arc tang}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \text{arc tang}\frac{5}{12},$$

$$4\,\text{arc tang}\frac{1}{5} = \text{arc tang}\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \text{arc tang}\frac{120}{119},$$

$$4\,\text{arc tang}\frac{1}{5} - \text{arc tang}\,1 = \text{arc tang}\frac{\frac{120}{119}-1}{\frac{120}{119}+1} = \text{arc tang}\frac{1}{239};$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,1 &= 4\,\text{arc tang}\frac{1}{5} - \text{arc tang}\frac{1}{239}\\ &= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots\right)\\ &\quad - \frac{1}{239} + \frac{1}{3.239^3} - \frac{1}{5.239^5} + \dots.\end{aligned}$$

Je laisse au lecteur le soin de montrer sur ces séries que le nombre

$$16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7.5^7}\right) - \frac{4}{239}$$

est une valeur approchée de π, par défaut, avec une erreur moindre que 2.10^{-6}.

§ 3. — CAS OU LA VARIABLE EST IMAGINAIRE. FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES. FRACTIONS RATIONNELLES.

239. Fonction exponentielle pour les valeurs imaginaires de la variable. Formules d'Euler. — Dans toutes les applications qui précèdent, on a supposé la variable réelle. L'importance de la théorie des séries entières à variable imaginaire, qui a pour point de départ le théorème du n° 228, apparaîtra très suffisamment sur les exemples que je vais traiter.

On a démontré, au n° 231, l'égalité

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots, \tag{1}$$

pour toutes les valeurs *réelles* de z, et l'on a observé au n° 189 que la série qui figure au second membre est convergente, lors même que z est imaginaire. Quand $z = x + iy$ est imaginaire, e^z n'a pas de sens jusqu'ici. Convenons de *définir* e^z, lorsque z est imaginaire, comme la somme de la série qui figure au second membre de l'égalité (1); la fonction e^z est maintenant définie pour toutes les valeurs de z; la propriété fondamentale

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'} \tag{2}$$

subsiste quels que soient z et z'; on a établi en effet au n° 190 que le produit des sommes des deux séries

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{1.2} + \ldots + \frac{z'^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

c'est-à-dire le produit $e^z . e^{z'}$, était toujours égal à la somme de la série

$$1 + \frac{(z+z')}{1} + \frac{(z+z')^2}{1.2} + \ldots + \frac{(z+z')^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

or cette somme, par définition, n'est autre chose que $e^{z+z'}$.

Il suit de là que l'on a

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}: \tag{3}$$

cette égalité est vraie, quels que soient x et y : supposons d'abord que ces deux nombres soient réels; on a, par définition,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1} + \frac{i^2y^2}{1.2} + \frac{i^3y^3}{1.2.3} + \dots \\ &= 1 + \frac{iy}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{iy^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{1.2.3\dots 2n} + \dots \\ + i\left[\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{1.2.3\dots(2n+1)} + \dots\right], \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{4}$$

ainsi qu'il résulte des formules

$$\left\{\begin{aligned} \cos y &= 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \dots, \\ \sin y &= \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \dots, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

établies au n° 232 pour toutes les valeurs *réelles* de y. On a donc (¹), en supposant x et y réels,

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y); \tag{6}$$

en d'autres termes e^x est la valeur absolue de e^{x+iy}, y en est l'argument trigonométrique.

Les formules (5) ont été établies pour les valeurs réelles de y; il est assez naturel de faire pour ces formules ce que l'on a fait pour la relation (1), c'est-à-dire de s'en servir pour définir $\cos y$ et $\sin y$ lorsque y est imaginaire; cela est légitime puisque, d'une part, $\cos y$

(¹) Cette formule pourrait, si l'on voulait, servir de définition à e^z, quand $z = x + iy$ est imaginaire; il serait aisé d'en déduire la relation (2).

et $\sin y$ n'ont de sens, jusqu'ici, que pour les valeurs réelles de y et que, d'autre part, les séries qui figurent dans les seconds membres des égalités (5) sont convergentes quelle que soit la valeur, réelle ou imaginaire, de y. Adoptons cette définition.

On voit de suite que l'égalité (6) subsiste alors quels que soient les nombres réels ou imaginaires x et y; en effet, on a observé déjà que l'égalité (3) était vraie dans tous les cas; les égalités, non numérotées, qui sont entre les égalités (3) et (4) subsistent, que y soit réel, ou imaginaire, et l'égalité (4) résulte alors de ces égalités-là et des égalités (5) qui servent maintenant de définition à $\sin y$ et à $\cos y$.

Il est aisé de reconnaître que les propriétés fondamentales des fonctions $\cos y$ et $\sin y$ subsistent. D'abord les formules (5) montrent de suite que l'on a

$$\cos(-y) = \cos y, \qquad \sin(-y) = -\sin y.$$

Si maintenant on change y en $-y$ dans l'égalité (4), elle devient

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y, \tag{4 bis}$$

et cette égalité est vraie, comme celle d'où on l'a tirée, que y soit réel ou imaginaire; de cette égalité et de l'égalité (4) on tire les relations, dues à Euler,

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \tag{7}$$

En changeant dans les formules (7) y en iy, elles deviennent

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \qquad \sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i},$$

ou

$$\cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}, \qquad \frac{1}{i} \sin iy = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2};$$

lorsque y est réel, les seconds membres ne sont autre chose que les fonctions $\operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} y$ définies au n° 204; en d'autres termes on a, lorsque y est réel,

$$\cos iy = \operatorname{ch} y, \qquad \sin iy = i \operatorname{sh} y. \tag{8}$$

Ces formules subsistent, que y soit réel ou imaginaire, si l'on convient de définir, dans tous les cas, $\operatorname{ch} y$ et $\operatorname{sh} y$ par les formules

$$\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2};$$

elles montrent que l'introduction des fonctions $\operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} y$ n'est pas indispensable, si l'on veut bien considérer des sinus et cosinus à variable imaginaire; il est toutefois commode de les conserver, précisément pour les calculs qui ne portent que sur des quantités réelles.

Les relations

$$\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1, \qquad \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \qquad \ldots$$

ont été déduites de la définition des fonctions $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{sh} a$, ... et de la propriété fondamentale $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$; elles subsistent, ainsi que leurs démonstrations, quels que soient a et b; elles équivalent, en vertu des relations (8), aux formules fondamentales de la Trigonométrie; au surplus, je vais reprendre la déduction de ces dernières formules au moyen des formules (7); c'est exactement le même calcul qu'au n° 204.

En multipliant membre à membre les égalités (4) et (4 *bis*) et en remarquant que, en vertu des règles du n° 90, le produit $(\cos y + i \sin y)(\cos y - i \sin y)$ est égal à $\cos^2 y + \sin^2 y$, on trouve

$$1 = \cos^2 y + \sin^2 y.$$

On a, quels que soient a, b, en vertu des formules (7)

$$\cos(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2}, \qquad \sin(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i},$$

puis, à cause des relations (1) et (4),

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b).$$

En effectuant la multiplication indiquée dans le dernier membre par la règle du n° 90, on trouve

$$e^{i(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b);$$

puis, en changeant a, b en $-a$, $-b$

$$e^{-i(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b - i(\sin a \cos b + \cos a \sin b);$$

d'où, en portant dans les expressions de $\cos(a+b)$ et de $\sin(a+b)$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;$$

il suffira de changer b en $-b$, pour avoir les expressions de $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$.

Les formules précédentes permettent de séparer la partie réelle et la partie imaginaire de $\cos z$, $\sin z$ quand z est imaginaire. Si, en effet, on pose $z = x + iy$, en désignant par x et y des nombres réels, on aura par ces formules et les formules (8)

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y;$$

les parties réelles et les parties imaginaires sont mises en évidence.

On définit, quel que soit z, $\operatorname{tang} z$ par la formule

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

On a déjà dit que la considération des dérivées d'une fonction d'une variable imaginaire était en dehors des limites du présent ouvrage, mais qu'on s'y permettait la considération de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle, comportant des coefficients imaginaires. Telle est la fonction e^{u+iv}, où u et v désignent des fonctions réelles de la variable réelle x. Je vais montrer que la dérivée de cette fonction, définie comme au n° 223, est $e^{u+iv}(u'+iv')$, en désignant par u', v' les dérivées de u et de v; en effet, par définition, la fonction e^{u+iv} n'est autre chose que

$$e^u \cos v + ie^u \sin v,$$

dont la dérivée s'obtient en prenant séparément les dérivées de la partie réelle et de la partie imaginaire (n° 223); cette dérivée, d'après les règles établies pour les variables réelles, est

$$\begin{aligned} e^u \cos v . u' - e^u \sin v . v' &+ i[e^u \sin v . u' + e^u \cos v . v'] \\ &= e^u u'(\cos v + i \sin v) + ie^u v'[\cos v + i \sin v] \\ &= e^u (\cos v + i \sin v)(u' + iv') = e^{u+iv}(u' + iv'). \end{aligned}$$

Inversement, la fonction primitive de $e^{(u+iv)}(u'+iv')$ est

$$e^{u+iv}+A+iB,$$

en désignant par A, B des constantes arbitraires.

On déduira de là sans peine, en conservant les mêmes notations, que les dérivées des fonctions $\cos(u+iv)$, $\sin(u+iv)$ sont respectivement $-(u'+iv')\sin(u+iv)$, $(u'+iv')\cos(u+iv)$.

On n'oubliera pas que les fonctions $\lg z$, $\arcsin z$, $\arccos z$ n'ont pas été définies pour z imaginaire.

240. Digression sur la fonction exponentielle. — La beauté et la simplicité des résultats obtenus en introduisant des variables imaginaires n'ont pas manqué de frapper le lecteur : les liens qui se trouvent ainsi établis entre la fonction exponentielle et les fonctions circulaires sont extrêmement remarquables. Il ne sera pas inutile de faire ressortir ici le rôle de la fonction exponentielle, dont les propriétés se trouvent un peu disséminées dans différents Chapitres.

La signification de a^x étant supposée connue lorsque x est un nombre naturel, on a défini successivement, dans le Chapitre I, a^x $(a>0)$ pour les valeurs fractionnaires, négatives, irrationnelles de x; cette définition implique la démonstration d'une suite de propriétés relatives aux radicaux. La voie suivie est naturelle, mais longue et quelque peu fastidieuse; la même observation s'applique aux extensions successives de la proposition fondamentale

$$a^x . a^y = a^{x+y}.$$

La fonction a^x, une fois définie pour toutes les valeurs réelles de x, il n'y a pas de difficulté à reconnaître qu'elle est continue et comment elle varie. La définition du logarithme dans une base quelconque comme fonction inverse de la fonction exponentielle est toute naturelle.

Pour arriver à la notion de la base e des logarithmes naturels, on établit que l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers une limite quand m augmente indéfiniment, et l'on parvient ainsi à la série qui définit le nombre e. La méthode par laquelle on parvient à la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est, à la vérité, fort intéressante, d'autant qu'elle s'applique à beaucoup d'autres questions analogues; mais il serait tout aussi naturel, au lieu de se poser la question qui a conduit à la série, d'envisager la série e elle-même ou plutôt la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont la convergence (absolue) s'établit immédiatement. Cette convergence une fois établie, il est clair que la somme de cette dernière série définit une fonction $E(x)$, dont on aperçoit de suite qu'elle est continue et qu'elle est croissante pour $x > 0$ (n° 225). La propriété

$$E(x)\,E(y) = E(x+y)$$

résulte immédiatement de la règle pour la multiplication des séries, règle dont la démonstration est fort naturelle. Cette propriété fait connaître de suite l'allure de la fonction $E(x)$ pour x négatif; elle entraîne immédiatement les suivantes

$$E(x_1)\,E(x_2)\ldots E(x_n) = E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$
$$[E(x)]^n = E(nx), \quad E(n) = [E(1)]^n,$$

où n est un nombre naturel; si l'on pose $E(1) = e$, la dernière égalité montre que, si x est un nombre naturel, $E(x)$ est égal à e^x, c'est-à-dire au produit de x facteurs égaux à e. Que le lecteur veuille bien oublier, pour un moment, tout ce qui concerne le calcul des radicaux, les exposants fractionnaires, négatifs, irrationnels et ne retenir que la définition des exposants dans le cas où ces exposants sont des nombres entiers, positifs : e^x n'a de sens pour lui que dans le cas où x est un tel nombre; il devient alors légitime de définir dans tous les cas la fonction e^x comme étant la somme $E(x)$ de la série précédente, puisque, dans le seul cas qu'il connaisse, cette définition se raccorde avec l'ancienne. La fonction logarithmique (le logarithme naturel) se définit alors comme la fonction inverse de e^x.

Il est, dès lors, aisé de construire une fonction qui, pour toutes les valeurs de x, se raccordera avec la fonction a^x et jouira de la propriété $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y)$. On observera d'abord que la fonction $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, quelle que soit la constante λ, jouit évidemment de cette dernière propriété; pour $x = 1$, elle se réduit à a si l'on a $e^\lambda = a$ ou $\lambda = \lg a$, ce qui suppose $a > 0$; d'ailleurs, quel que soit le nombre naturel n, on a alors, en vertu de la propriété fondamentale,

$$[\varphi(x)]^n = \varphi(nx),$$
$$a^n = [\varphi(1)]^n = \varphi(n);$$

la fonction $e^{x \lg a}$ coïncide avec la fonction a^x, pour toutes les valeurs naturelles de n, c'est elle qu'on prendra comme définition de a^x pour toutes les valeurs réelles de x. Il revient au même de définir cette fonction a^x par l'égalité $\lg(a^x) = x \lg a$.

La propriété qu'exprime l'égalité

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

établie lorsque y est un nombre naturel, est vraie quel que soit y; en effet, le logarithme du premier membre est

$$y \lg a^x = xy \lg a$$

comme celui du second. Cette égalité, en supposant que x soit une fraction $\frac{p}{q}$ et que y soit égal au nombre naturel q, montre que l'on a

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p, \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

La propriété fondamentale $a^x a^y = a^{x+y}$ montre d'ailleurs qu'on a

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

et, par suite,

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

Enfin, l'égalité

$$a^x b^x \ldots l^x = (ab \ldots l)^x,$$

où a, b, ..., l sont des nombres positifs, apparaît en constatant que les logarithmes des deux membres sont égaux. Toutes les propositions concernant le calcul des radicaux et des exposants fractionnaires, positifs ou négatifs, établies au Chapitre I, apparaissent ainsi immédiatement.

Quant à la propriété du nombre e d'être la limite, pour m infini, de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, ou à la propriété plus générale de la fonction e^x d'être la limite, pour $m = \pm\infty$, de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, elle a été établie au n° 235.

Tout ce qu'on vient de dire concerne les valeurs réelles de la variable x.

Observons maintenant que, si des considérations géométriques n'avaient pas conduit à introduire les fonctions $\cos x$ et $\sin x$, on aurait été amené à introduire ces fonctions en étudiant ce que devient la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$

pour les valeurs purement imaginaires de x; on a vu plus haut comment les propriétés de ces fonctions $\cos x$, $\sin x$ apparaissent aisément de ce point de vue. Il resterait, toutefois, à définir le nombre π qui pourrait être regardé comme le double du plus petit nombre positif qui annule la fonction [1]:

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots.$$

241. Développement en série des fractions rationnelles. — La formule du binome

$$(1) \qquad (1+z)^m = 1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\ldots$$

a été établie en supposant m et z réels et $|z|<1$.

Je me bornerai, dans ce qui suit, au cas où m est un nombre entier, positif ou négatif.

Lorsque m est un nombre entier positif, le second membre de l'égalité (1) se réduit à un polynome de degré m; l'égalité est vraie quel que soit z, réel ou imaginaire.

Supposons maintenant que $m = -n$ soit un entier négatif. La série est absolument convergente, que z soit réel et imaginaire, pourvu que l'on ait $|z|<1$, comme je le suppose dans ce qui suit.

On a le droit de multiplier la série par le polynome

$$(1+z)^n = 1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2+\ldots,$$

---

[1] *Intr.*, n° 198.

d'après la règle de la multiplication des séries, puisque la série (1) est absolument convergente et que le second membre de l'égalité précédente peut être regardé comme une série absolument convergente. Lorsque z est réel, le produit doit être égal à 1, sous la seule condition $|z| < 1$.

Dans le produit ordonné suivant les puissances de z, les coefficients des puissances de z doivent être nuls, le terme constant doit être égal à 1. Mais les valeurs de ces coefficients ne dépendent nullement de la valeur de z; quel que soit z, réel ou imaginaire, pourvu que l'on ait $|z| < 1$, le produit de la série

$$1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots$$

par le polynome

$$1 + \frac{-m}{1} z + \frac{(-m)(-m-1)}{1.2} z^2 + \ldots,$$

ou $(1+z)^{-m}$, est égal à 1; cela revient à dire que l'on a, pour toutes les valeurs de z,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots.$$

Ce résultat est important pour le développement en série d'une fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ désignent des polynomes en x.

On a vu (n° 65) qu'une telle fraction pouvait se mettre sous la forme d'un polynome en x, $\mathfrak{P}(x)$, qui n'existe d'ailleurs que si le degré du dénominateur $\varphi(x)$ ne dépasse pas celui du numérateur $f(x)$, et d'une somme de termes de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$: A est une constante, a une racine réelle ou imaginaire du dénominateur $\varphi(x)$, m est un nombre naturel qui ne dépasse pas l'ordre de multiplicité de cette racine. Il suffit évidemment, pour obtenir le développement cherché, de développer en série chacun des termes.

Supposons d'abord que a ne soit pas nul. On a

$$\frac{A}{(x-a)^m} = \frac{(-1)^m A}{a^m\left(1-\frac{x}{a}\right)^m} = \frac{(-1)^m A}{a^m}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m},$$

on n'aura qu'à appliquer la formule

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m} = 1 + \frac{m}{1}\frac{x}{a} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{x^3}{a^3} + \ldots,$$

valable pourvu qu'on ait $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, ou $|x| < |a|$, et à multiplier chaque terme par $\frac{(-1)^m A}{a^m}$ pour avoir le développement cherché.

Si $\varphi(x)$ n'admet pas de racines nulles, chaque terme pourra se développer comme on vient de l'expliquer; tous les développements sont valables à la fois lorsque la valeur absolue de x est inférieure à la plus petite des valeurs absolues des racines. Sous cette condition, la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sera développable en une série entière en x. Lorsqu'on effectue la division de $f(x)$ par $\varphi(x)$, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, on obtient successivement les termes de cette série.

Si $\varphi(x)$ admettait une racine nulle d'ordre de multiplicité p, on pourrait, en posant $\varphi(x) = x^p \psi(x)$, commencer par développer $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ en série entière en x, puis on diviserait chaque terme par x^p, on obtiendrait, pour la fraction rationnelle, un développement procédant suivant les puissances entières et croissantes de x qui commencerait par des termes de degré négatif; l'ensemble de ces termes constitue ce polynome en $\frac{1}{x}$, sans terme constant, que l'on peut retrancher de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, de manière que la différence reste finie quand x s'approche de o (n° 61). Le développement auquel on parvient ainsi est encore valable pourvu que x soit moindre, en valeur absolue, que la plus petite des valeurs absolues des racines de $\varphi(x)$ qui ne sont pas nulles.

On peut aussi obtenir un développement de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ qui procède suivant les puissances décroissantes de x ou plutôt suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Reprenons le terme $\frac{A}{(x-a)^m}$, on peut l'écrire

$$A x^{-m}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-m}.$$

On a d'ailleurs, en supposant $\left|\frac{a}{x}\right| < 1$, ou $|x| > |a|$,

$$\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-m} = 1 + \frac{m}{1}\frac{a}{x} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3} + \ldots,$$

et il suffit, pour avoir le développement cherché, de multiplier chaque terme par $\frac{A}{x^m}$; chaque terme fournit un développement analogue; tous ces développements sont valables pourvu que la valeur absolue de x soit plus grande que la plus grande des valeurs absolues des racines de $\varphi(x)$; en les réunissant et en mettant en avant, s'il y en a un, le polynome en x ordonné suivant les puissances décroissantes de x qui figure dans la décomposition de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, on parvient au développement annoncé, qui procède suivant les puissances décroissantes de x : il commence par un polynome, il se continue par une série entière en $\frac{1}{x}$. C'est à ce développement que l'on parvient en divisant $f(x)$ par $\varphi(x)$, lorsqu'on ordonne suivant les puissances décroissantes de x et qu'on poursuit indéfiniment l'opération.

Considérons, par exemple, l'expression

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

où α est un nombre réel; les racines du dénominateur sont $\cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$, leurs valeurs absolues sont égales à 1; dans les développements suivant les puissances croissantes de x que l'on va considérer, on devra supposer $|x| < 1$. On a, en décomposant en éléments simples,

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2} &= -1 + \frac{1-e^{2i\alpha}}{2(e^{-i\alpha}-\cos\alpha)}\,\frac{1}{x-e^{i\alpha}} + \frac{1-e^{-2i\alpha}}{2(e^{-i\alpha}-\cos\alpha)}\,\frac{1}{x-e^{-i\alpha}}\\ &= -1 - \frac{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}\,\frac{1}{1-xe^{-i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{-2i\sin\alpha}\,\frac{1}{1-xe^{i\alpha}}\\ &= -1 + \frac{1}{1-xe^{-i\alpha}} + \frac{1}{1-xe^{i\alpha}};\end{aligned}$$

d'ailleurs, sous la condition $|x| < 1$, qui entraîne $|xe^{\pm i\alpha}| < 1$, on a

$$\frac{1}{1-xe^{-i\alpha}} = 1 + xe^{-i\alpha} + x^2e^{-2i\alpha} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-xe^{i\alpha}} = 1 + xe^{i\alpha} + x^2e^{-2i\alpha} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2} = 1+2x\cos\alpha+2x^2\cos 2\alpha+\ldots+2x^n\cos n\alpha+\ldots.$$

On verra de même, ou l'on déduira de là, que, pour $|x|>1$, on a

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x\cos\alpha+1} = 1+\frac{2}{x}\cos\alpha+\frac{2}{x^2}\cos 2\alpha+\ldots+\frac{2}{x^n}\cos n\alpha+\ldots.$$

Enfin, le lecteur n'aura pas de peine, en supposant x réel et moindre que 1 en valeur absolue, et en égalant la partie réelle et le coefficient de i dans les deux membres de l'égalité

$$\frac{1}{1-xe^{i\alpha}} = 1+xe^{i\alpha}+x^2e^{2i\alpha}+\ldots,$$

à établir les deux relations

$$\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = 1+x\cos\alpha+x^2\cos 2\alpha+\ldots+x^n\cos n\alpha+\ldots,$$

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+\ldots+x^n\sin n\alpha+\ldots,$$

qui subsistent d'ailleurs lorsque x, que l'on doit toujours supposer moindre que 1 en valeur absolue, est imaginaire : on le voit en remarquant que les deux membres, quand on les multiplie par

$$1-2x\cos a+x^2,$$

doivent être identiques lorsque x est réel, et, par conséquent aussi, lorsque x est imaginaire ([1]).

§ 4. — INFINIMENT PETITS ET INFINIMENT GRANDS.

242. Les mots *infiniment petit, infiniment grand* ne s'appliquent jamais qu'à une fonction d'une ou de plusieurs variables, ou aux variables elles-mêmes. Je ne m'en servirai que pour une fonction d'*une seule* variable (ou pour la variable elle-même). Ils peuvent d'ailleurs être pris dans un sens absolu, ou dans un sens relatif.

([1]) *Cf. Ex.* 59 et 60.

On dit d'une fonction de x qu'elle est ou devient infiniment petite, dans certaines conditions qu'il faut toujours spécifier, si, dans ces conditions, elle a pour limite o.

Ces conditions, ou du moins celles que je considérerai, consistent en ce que la variable x doit tendre vers une certaine valeur a, ou grandir indéfiniment en valeur absolue : elles peuvent d'ailleurs être plus ou moins étroites : par exemple, on peut spécifier que x doit tendre vers a en restant plus petit que a, ou en restant plus grand que a, ou bien grandir indéfiniment en valeur absolue en restant positif ou en restant négatif, ce qu'on exprime brièvement en disant que x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$. En disant que la fonction $f(x)$ est infiniment petite quand x tend vers a (sans spécifier davantage) on entend que sa valeur absolue doit rester plus petite que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que $x-a$ soit moindre en valeur absolue qu'un nombre positif η convenablement choisi, d'après ε : à chaque valeur de ε doit correspondre une valeur de η. Si, de même, on dit que $f(x)$ est infiniment petit quand x tend vers a par des valeurs plus grandes (ou plus petites) que a, on entend que la valeur absolue de $f(x)$ doit être moindre que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que $x-a$ (ou $a-x$) soit positif et plus petit que le nombre correspondant η. En disant que $f(x)$ est infiniment petit quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), on entend que la valeur absolue de $f(x)$ doit rester moindre que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que x soit plus grand qu'un nombre positif P (ou plus petit qu'un nombre négatif $-$ P) convenablement choisi, d'après ε ; à chaque ε doit correspondre un nombre P. De même, si l'on dit que la fonction $f(x)$ est infiniment petite quand x croît indéfiniment en valeur absolue, on entend que la valeur absolue de $f(x)$ reste inférieure à tel nombre positif ε que l'on voudra pourvu que la valeur absolue de x soit plus grande que le nombre correspondant P.

On dit de même qu'une fonction $f(x)$ est ou devient infiniment grande dans certaines conditions, qu'il faut toujours spécifier, si, dans ces conditions, la valeur absolue de $f(x)$ dépasse tel nombre positif P que l'on veut. Je me dispenserai de répéter les détails qui précèdent en disant que la fonction $f(x)$ est infiniment grande quand la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est infiniment petite et réciproquement.

Par exemple un polynome en x, qui ne contient pas de terme constant, est infiniment petit quand x tend vers o; il en est de même de $\sqrt[3]{x}$, de $\sin x$, de $\lg(1+x)$. Un polynome en x, qui ne se réduit pas à une constante, est infiniment grand quand x est lui-même infiniment grand; e^x, $\lg x$ sont infiniment grands quand x tend vers $+\infty$; il en est de même de $\frac{e^x}{x^n}$ (n° 227) quel que soit le nombre positif n; $\frac{\lg x}{x^n}$ est infiniment petit quand x tend vers $+\infty$, comme on le voit en posant $x = e^z$, $z = \lg x$; z tend vers $+\infty$ en même temps que x et l'on a

$$\frac{\lg x}{x^n} = \frac{z}{e^{nz}};$$

le second membre tend vers o quand z tend vers $+\infty$.

e^x est infiniment petit quand x tend vers $-\infty$; $e^{\frac{1}{x}}$ est infiniment petit quand x tend vers o par valeurs négatives, infiniment grand quand x tend vers o par valeurs positives; $e^{\frac{1}{x}} - 1$ est infiniment petit quand x croît indéfiniment en valeur absolue; $\lg x$ est infiniment grand (négativement) quand x tend vers o par valeurs positives; $x^n \lg x$, où n désigne un nombre positif quelconque, est infiniment petit quand x tend vers o par valeurs positives, comme on le voit en posant $x = e^{-z}$, $z = -\lg x$; lorsque x tend vers o par valeurs positives, z tend vers $+\infty$ et l'on a

$$x^n \lg x = -ze^{-nz} = -\frac{z}{e^{nz}}.$$

La fonction $x \sin \frac{1}{x}$ est infiniment petite quand x tend vers o, puisque le second facteur est toujours compris entre -1 et $+1$. Dans l'intervalle $(0, \alpha)$, elle s'annule une infinité de fois, quelque petit que soit le nombre α, puisque $\sin \frac{1}{x}$ est nul pour toutes les valeurs de x qui sont de la forme $\frac{1}{n\pi}$, n étant entier. Les raisonnements qui suivront ne s'appliqueraient pas tous à cette fonction : un rapport où elle figurerait en dénominateur n'aurait pas de sens, pour des valeurs de x aussi voisines qu'on voudrait de la valeur o vers laquelle on fait tendre x. Or, on aura à considérer dans la suite des rapports où figurent en dénominateur les fonctions que l'on étudie : pour que les raisonnements qui concernent ces rapports soient valables, il faut que ces rapports aient un sens et que, dans les conditions où l'on se place, leur dénominateur ne soit pas nul. C'est ce que je supposerai essentiellement dans ce qui suit. Afin d'éviter toute difficulté de ce genre, je supposerai, lorsque x doit tendre vers a, que l'on peut délimiter un intervalle (α, β), auquel a soit intérieur, tel que dans cet intervalle les fonctions que l'on considère ue s'annulent pas, sauf pour $x = a$. De même, si x doit tendre, par exemple, vers $+\infty$, je supposerai qu'on puisse déterminer un nombre P assez grand pour que les fonctions que l'on étudie ne s'annulent pas pour $x > P$. Les fonctions pour lesquelles les conditions de cette nature ne pourraient être réalisées sont exclues de ce qui suit, quoique certains des résultats qu'on établira s'appliquent encore à elles.

En disant de la *variable* qu'elle est infiniment petite, on entend simplement qu'elle tend vers o; en disant qu'elle est infiniment grande, on entend que sa valeur absolue grandit indéfiniment.

243. On vient de définir les infiniment petits et les infiniment grands *absolus*. J'arrive maintenant à la signification relative des mêmes mots.

Considérons deux fonctions de x, $f(x)$ et $\varphi(x)$: on dit que, dans des conditions qu'il faut toujours spécifier (x tendant vers a, vers $\pm\infty$, etc.), $f(x)$ est infiniment petit par rapport à $\varphi(x)$, ou que $\varphi(x)$ est infiniment grand par rapport à $f(x)$, lorsque, dans ces conditions, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est infiniment petit et que, par conséquent, le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est infiniment grand. Par exemple, dans un polynome ordonné par rapport aux puissances croissantes de x, chaque terme, y compris le terme constant s'il y en a, est infiniment grand par rapport à ceux qui le suivent, quand x tend vers o; chaque terme est au contraire infiniment petit par rapport à ceux qui le suivent quand x augmente indéfiniment en valeur absolue. e^x est infiniment grand par rapport à x^n ($n > 0$), quand x tend vers $+\infty$. Dans les mêmes conditions, $\lg x$ est infiniment petit par rapport à x^n. Il est à peine utile de dire, après ces exemples, que, lorsqu'on dit que $f(x)$ est infiniment petit par rapport à $\varphi(x)$, on n'entend nullement que la fonction $f(x)$ soit infiniment petite (absolument) dans les mêmes conditions.

La somme de deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ infiniment petites par rapport à $\varphi(x)$ est elle-même infiniment petite par rapport à $\varphi(x)$.

On ne peut pas toujours affirmer que la somme de deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ infiniment grandes par rapport à $\varphi(x)$ soit infiniment grande par rapport à $\varphi(x)$, comme on le voit en prenant par exemple $g(x) = -f(x)$.

Il convient d'observer que ces expressions que l'on a appris à calculer aux n^{os} 232, 233, 234, 235 et qui fournissent, dans certaines conditions, des valeurs approchées d'une fonction, ont toujours été ordonnées de manière que chaque terme fût infiniment grand par rapport à ceux qui le suivent. La somme des termes qui suivent le premier est infiniment petite par rapport à lui.

Puisque l'on a $f(x) = \varphi(x)\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, il est clair que toute fonction $f(x)$ infiniment petite par rapport à $\varphi(x)$, dans certaines conditions, s'obtient en multipliant cette dernière par un facteur qui, dans les mêmes conditions, est infiniment petit : réciproquement en multipliant $\varphi(x)$ par un facteur infiniment petit (absolument), dans certaines conditions, on obtient une fonction infiniment petite par rapport à $f(x)$. De même, on obtient une fonction infiniment grande, dans certaines conditions, par rapport à $\varphi(x)$, en multipliant $\varphi(x)$ par un facteur infiniment grand, dans ces conditions.

244. **Équivalence.** — On dit que deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ qui sont infiniment petites (ou infiniment grandes), dans certaines conditions, sont des infiniment petits (ou des infiniment grands) *équivalents* lorsque, dans ces conditions, leur rapport $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ou $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ a pour limite l'unité.

Par exemple $2x$ et $2x + x^2$ sont des infiniment petits équivalents quand x tend vers 0. Plus généralement deux polynomes ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x sont des infiniment petits équivalents, quand x tend vers 0, si les termes constants font défaut, et si les premiers termes sont identiques. Deux polynomes de même degré sont des infiniment grands équivalents quand x grandit indéfiniment en valeur absolue, si les termes du plus haut degré sont identiques. Si la fonction $g(x)$ a une dérivée $g'(x)$ qui n'est pas nulle pour $x = x_0$, la fonction de h, $g(x_0 + h) - g(x_0)$, est un infiniment petit équivalent à $h\,g'(x_0)$.

Il est avantageux d'étendre, comme le font quelques géomètres, le sens du mot *équivalent,* et de dire de deux fonctions quelconques

$f(x)$ et $\varphi(x)$ qu'elles sont équivalentes, dans certaines conditions (x tendant vers a, vers $\pm\infty$, etc.), lorsque, dans ces conditions, leur rapport a pour limite 1 : si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues pour $x=a$, et prennent des valeurs égales, non nulles, $f(a)$ et $\varphi(a)$, cette façon de parler est toute naturelle. Elle n'implique pas que, dans les conditions considérées, les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ soient infiniment petites ou infiniment grandes, ni qu'elles aient des limites; mais si ces fonctions sont équivalentes et, si l'une est infiniment petite (ou infiniment grande), il en est évidemment de même pour l'autre; si l'une admet une limite, l'autre admet la même limite.

Deux fonctions équivalentes à une troisième fonction sont évidemment équivalentes entre elles.

Si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont équivalentes, dans certaines conditions, leur différence $f(x)-\varphi(x)$ est infiniment petite par rapport à l'une ou à l'autre; réciproquement, si la différence de deux fonctions est infiniment petite par rapport à l'une ou à l'autre, dans certaines conditions, ces deux fonctions sont équivalentes, dans les même conditions.

Cela résulte évidemment des identités

$$\frac{f(x)-\varphi(x)}{f(x)} = 1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}, \qquad \frac{f(x)-\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}-1;$$

dire que le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, ou le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, tend vers 1, dans certaines conditions, que $f(x)-\varphi(x)$ est infiniment petit par rapport à $f(x)$ ou à $\varphi(x)$, que l'un ou l'autre des rapports $\frac{f(x)-\varphi(x)}{f(x)}$, $\frac{f(x)-\varphi(x)}{\varphi(x)}$ tend vers 0 dans les mêmes conditions, c'est dire la même chose.

Par exemple, chacune des expressions approchées étudiées dans les n^{os} 232, 233, 234, 235 est équivalente à son premier terme.

La quantité $e^x - x^n$ est un infiniment grand équivalent à e^x quand x tend vers $+\infty$.

Il suit de là qu'on obtient toutes les fonctions équivalentes à une fonction $f(x)$, dans certaines conditions, en lui ajoutant une fonction infiniment petite par rapport à elle, dans ces conditions; comme toute fonction infiniment petite par rapport à $f(x)$ s'obtient en multipliant $f(x)$ par un facteur infiniment petit, dans les mêmes conditions, on voit que toute fonction équivalente à $f(x)$ pourra se mettre sous la forme $f(x)[1+\varepsilon(x)]$ en désignant par $\varepsilon(x)$ une fonction infiniment petite, dans les conditions considérées.

Si, dans un rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, ou dans un produit $f(x)\varphi(x)$, on substitue aux termes du rapport, ou aux facteurs du produit, des fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$ qui leur soient équivalentes, dans certaines conditions, on obtient un nouveau rapport $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$, ou un nouveau produit $F(x)\Phi(x)$, qui sont équivalents au premier rapport ou au premier produit, dans les mêmes conditions.

On a, en effet,

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{F(x)}{f(x)} : \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)},$$

$$\frac{F(x)\Phi(x)}{f(x)\varphi(x)} = \frac{F(x)}{f(x)}\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)};$$

dans les deux égalités, les seconds membres ont évidemment l'unité pour limite.

Si, par conséquent, le rapport $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$, ou le produit $F(x)\Phi(x)$, a une limite, dans les conditions considérées, il en sera de même du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, ou du produit $f(x)\varphi(x)$. Si le rapport $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ est infiniment grand, il en sera de même du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, etc.

Le rapport, ou le produit, de deux expressions approchées telles que celles qu'on a étudiées aux n^{os} 232, 233, 234, 235 est donc équivalent au rapport ou au produit des premiers termes de ces expressions. C'est, d'ailleurs, ce qui est bien évident sur ces expressions même, au moins sur celles de ces expressions qui ont la forme d'un polynome $\left(\text{en } x, \frac{1}{x}, h, \frac{1}{h}, \cdots\right)$; en faisant le quotient ou le produit de deux de ces expressions, on est conduit à une expression du même genre, dans laquelle le premier terme est le quotient, ou le produit des premiers termes.

Le précédent théorème est particulièrement utile pour simplifier la recherche de la limite du rapport de deux infiniment petits ou de deux infiniment grands, du produit d'un infiniment petit par un infiniment grand. ou pour reconnaître qu'un tel rapport, ou un tel produit, est infiniment petit ou infiniment grand.

Si l'on a affaire au rapport de deux polynomes, quand x tend vers o, ou quand x grandit indéfiniment en valeur absolue, on peut ne garder, dans chaque polynome, que le terme du plus bas degré, dans le premier cas, que le terme du plus haut degré, dans le second cas; le terme constant, s'il y en a un, doit être regardé comme le terme du plus bas degré.

En désignant par m et n des constantes, les formules

$$\sin mx = mx - \frac{m^3x^3}{6} + \ldots, \qquad \sin nx = nx - \frac{n^3x^3}{6} + \ldots$$

montrent que $\sin mx$ et $\sin nx$ sont des infiniment petits équivalents à mx et à nx, quand x tend vers o; dans ces conditions le rapport $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ est équivalent au rapport $\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$; sa limite, quand x tend vers o, est $\frac{m}{n}$.

Dans l'expression $\frac{1}{x}\lg\frac{e^x-1}{x}$, quand x tend vers o, le premier facteur $\frac{1}{x}$ est infiniment grand, le second facteur est infiniment petit; on a, en effet,

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots,$$

et le logarithme du second membre tend évidemment vers o; d'ailleurs la formule

$$\lg(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \ldots$$

montre évidemment que, lorsque z est infiniment petit, $\lg(1+z)$ est équivalent à z; par conséquent $\lg\frac{e^x-1}{x}$ est équivalent à $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots$ ou à $\frac{x}{2}$; la limite du produit $\frac{1}{x}\lg\frac{e^x-1}{x}$, quand x tend vers o, est $\frac{1}{2}$.

Si, dans le théorème général, on suppose que les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ puissent se décomposer en facteurs, en sorte qu'on puisse poser

$$f(x) = f_1(x)f_2(x), \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x),$$

et si, dans les conditions considérées, les fonctions $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ tendent vers des limites non nulles a et α, les fonctions $f(x)$ et

$\varphi(x)$ seront respectivement équivalentes à $a f_2(x)$ et à $\alpha\varphi_2(x)$; le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ et le produit $f(x)\varphi(x)$ seront respectivement équivalents aux fonctions

$$\frac{a}{\alpha}\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}, \qquad a\alpha f_2(x)\varphi_2(x),$$

en sorte que tout sera ramené à savoir comment se comportera le rapport $\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$, ou le produit $f_2(x)\varphi_2(x)$.

Par exemple, lorsqu'on a cherché la dérivée de la fonction $\sin x$, on a mis le rapport $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ sous la forme

$$\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Ici x doit être regardé comme une constante; la variable est h et, lorsqu'on fait tendre h vers o, on a affaire au rapport de deux infiniment petits. On peut remplacer, dans le rapport, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ par sa limite $\cos x$, et, au numérateur, $\sin\frac{h}{2}$ par l'infiniment petit équivalent $\frac{h}{2}$; la limite est évidemment $\cos x$.

Il n'est pas inutile de remarquer que l'étude du rapport de deux infiniment grands $f(x)$ et $\varphi(x)$ peut être ramenée à l'étude du rapport de deux infiniment petits, comme il résulte de l'identité

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]}.$$

L'étude du produit d'un infiniment petit $f(x)$ par un infiniment grand $\varphi(x)$ se ramène aussi à l'étude du rapport de deux infiniment petits, comme il résulte de l'identité

$$f(x)\times\varphi(x) = \frac{f(x)}{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}.$$

Si n est un nombre positif, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction $f(x)$

est équivalente à la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction $F(x)$ équivalente à $f(x)$ dans les conditions considérées.

En effet, si n est un nombre naturel, la proposition résulte immédiatement du théorème relatif au produit de deux facteurs; si n est le rapport de deux nombres entiers p, q, on a

$$[f(x)]^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{[f(x)]^p}, \qquad [F(x)]^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{[F(x)]^p};$$

puisque, dans les conditions considérées, $f(x)^p$ et $F(x)^p$ sont des fonctions équivalentes, il suffit évidemment de prouver que $\sqrt[q]{f(x)}$ et $\sqrt[q]{F(x)}$ sont des fonctions équivalentes, quand les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont équivalentes; or, s'il en est ainsi, on peut écrire

$$\frac{f(x)}{F(x)} = 1 + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit dans les conditions considérées : on a, d'ailleurs,

$$\frac{\sqrt[q]{f(x)}}{\sqrt[q]{F(x)}} = \sqrt[q]{\frac{f(x)}{F(x)}} = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{q}} = 1 + \frac{\varepsilon}{q} + \ldots;$$

le dernier membre a évidemment l'unité pour limite.

Il est à peine utile de dire que l'on suppose vérifiées les conditions relatives à la réalité; ainsi, lorsque q est pair, $f(x)$ et, par conséquent, $F(x)$ doivent finir par rester positifs.

Par exemple, quand x augmente indéfiniment en valeur absolue, le rapport

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{3x^4+x}}$$

a pour limite $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$; en effet, le numérateur et le dénominateur sont équivalents à $\sqrt{2x^2}$, $\sqrt[4]{3x^4}$ ou aux quantités $|x|\sqrt{2}$, $|x|\sqrt[4]{3}$, dont le rapport est $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

245. Comparaison de deux infiniment petits. Ordre infinitésimal. — On dit que deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, infiniment petites dans certaines conditions, sont du même ordre si, dans ces conditions, la valeur absolue du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $\left[\text{ou du rapport } \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]$ reste comprise entre deux nombres positifs α, β, dont aucun n'est nul. Il en sera ainsi, en particulier, si le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers une limite l, différente de o : il finira, en effet, par rester compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$, ε désignant un nombre positif que l'on peut supposer aussi petit qu'on voudra et, en particulier, plus petit que $|l|$; dans ces conditions, la valeur absolue de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ finira par rester comprise entre les deux nombres positifs $|l| - \varepsilon$ et $|l| + \varepsilon$.

En particulier, deux infiniment petits équivalents sont du même ordre.

Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant infiniment petites dans les mêmes conditions, au lieu de dire que la fonction $f(x)$ est infiniment petite par rapport à $\varphi(x)$, on dit souvent que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $\varphi(x)$, que $\varphi(x)$ est un infiniment petit d'ordre inférieur à $f(x)$ (1). En parlant ainsi d'infiniment petits du *même ordre*, d'infiniment petits qui sont d'un *ordre supérieur ou inférieur à l'ordre* d'autres infiniment petits, on n'a pas, toutefois, défini ce qu'est *l'ordre* d'un infiniment petit : cette définition peut, dans certains cas, être donnée d'une façon précise.

Supposons que, dans les conditions où l'on se place, on ait fait choix d'une fonction particulière de x qui, dans ces conditions, soit infiniment petite, et à laquelle on convienne de comparer les autres fonctions qui, dans les mêmes conditions, sont infiniment petites. Si, par exemple, x tend vers o, ou vers a, on pourra choisir x lui-même, ou $x - a$; si x tend vers $\pm\infty$, on pourra choisir $\frac{1}{x}\cdot$ Ces choix ne sont d'ailleurs nullement obligatoires. On désignera cette fonction, une fois choisie, sous le nom d'*infiniment petit principal;* je la désignerai, dans ce qui suit, par la lettre h.

L'infiniment petit principal h et tous ceux qui sont du même ordre sont dits du *premier ordre*.

Si n est un nombre naturel, h^n et tous les infiniment petits de même ordre que h^n sont dits du $n^{\text{ième}}$ ordre.

(1) On parle ainsi par ellipses : il faudrait dire *infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de* $\varphi(x)$.

On emploie souvent cette expression lors même que n n'est pas entier : on dira par exemple que $\sqrt{h}$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$. Il n'y a pas lieu de parler d'infiniment petits d'ordre négatif : h^{-1}, par exemple, est un infiniment grand.

La forme générale d'un infiniment petit d'ordre n est ah^n, en désignant par a une fonction de la variable qui, dans les conditions considérées, reste, en valeur absolue, comprise entre deux nombres positifs fixes dont aucun n'est nul : cela résulte immédiatement de la définition de deux infiniment petits du même ordre; le cas le plus simple sera celui où, dans les conditions considérées (h tendant vers o), a a une limite autre que o; si l'on est dans ce cas, et si a_0 est la limite de a, il est clair que $a_0 h^n$ est un infiniment petit équivalent à ah^n ; on appelle cet infiniment petit $a_0 h^n$ la *partie principale* ou la *valeur principale* de ah^n.

Lorsque x tend vers o, et qu'on prend x pour infiniment petit principal, les différents termes d'un polynome, sauf la constante, sont des infiniment petits dont l'ordre est égal au degré; de même dans une série entière en x; de même encore (sauf le dernier terme) pour ces expressions, considérées si souvent, qui ne diffèrent d'un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de la variable que par le dernier terme.

Un infiniment petit n'est pas toujours d'un ordre déterminé. Si, par exemple, on prend $\frac{1}{x} = h$ pour infiniment petit principal, les expressions

$$e^{-x}, \quad \frac{1}{\log x},$$

qui sont infiniment petites quand x tend vers $+\infty$, n'ont aucun ordre : en effet, les rapports

$$\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^n} = \frac{x^n}{e^x}, \qquad \frac{\frac{1}{\log \frac{1}{h}}}{h^n} = \frac{x^n}{\log x}$$

tendent le premier vers o, le second vers $+\infty$ quand h tend vers o par valeurs positives ou quand x tend vers $+\infty$, et cela quel que soit le nombre positif n.

Les propositions qui suivent concernent des infiniment petits qui admettent un ordre déterminé et une partie principale :

La somme de deux infiniment petits d'ordre n, dont les parties principales sont $a_0 h^n$, $b_0 \alpha^n$, est un infiniment petit d'ordre n, sauf dans le cas où l'on a $a_0 + b_0 = 0$. Si $a_0 + b_0$ n'est pas nul, la partie principale de la somme est $(a_0 + b_0) h^n$. Si $a_0 + b_0$ est nul, l'ordre infinitésimal ne peut qu'augmenter.

Le produit de deux infiniment petits d'ordres p, q est un infiniment petit d'ordre $p + q$. Sa partie principale est le produit des parties principales des facteurs.

Le rapport de deux infiniment petits d'ordres p, q est un infiniment petit d'ordre $p - q$, lorsque p est plus grand que q; sa partie principale est le rapport des parties principales des deux infiniment petits. Il tend vers une limite non nulle quand p est égal à q; il est infiniment grand quand p est plus petit que q.

La racine $p^{\text{ième}}$ d'un infiniment petit d'ordre n est un infiniment petit d'ordre $\frac{n}{p}$. Sa partie principale s'obtient en prenant la racine $p^{\text{ième}}$ de la partie principale de l'infiniment petit donné.

246. Infiniment grands. — La terminologie, les propositions, la classification relatives aux infiniment petits se transportent aisément aux infiniment grands. Si les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ deviennent infiniment grandes dans les mêmes conditions, et si, dans ces conditions, la valeur absolue du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ finit par rester comprise entre deux nombres positifs fixes différents de 0, les deux infiniment grands $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont dits *du même ordre* : deux infiniment grands équivalents sont du même ordre.

On peut faire choix d'un infiniment grand principal, auquel on rapporte toutes les autres fonctions qui deviennent infiniment grandes dans les mêmes conditions : si l'on désigne cet infiniment grand par H, tout infiniment grand du même ordre que H^n, $(n > 0)$ sera dit d'ordre n, ... Un tel infiniment grand est de la forme $a\mathrm{H}^n$ où a est une fonction de la variable qui, dans les conditions considérées, reste, en valeur absolue, comprise entre deux nombres positifs fixes, dont aucun n'est nul; le cas le plus simple est celui où a tend, dans ces conditions, vers une limite a_0; on peut alors regarder $a_0\mathrm{H}^n$ comme la partie principale de $a\mathrm{H}^n$. La partie principale d'un polynome en x, quand x croît indéfiniment, est le terme du plus haut degré. On ne change pas l'ordre d'un infiniment grand en lui ajoutant un infiniment grand d'ordre inférieur.

La somme de deux infiniment grands d'ordre n, dont les parties principales sont $a_0 \mathrm{H}^n$, $b_0 \mathrm{H}^n$, est un infiniment grand d'ordre n, à moins que $a_0 + b_0$ ne soit nul, auquel cas l'ordre de la somme s'abaisse : il peut même arriver que la somme de deux infiniment grands ait une limite. Si, en particulier (nos 234, 235), chacun des infiniment grands a été mis sous la forme de la somme d'un polynome en H, sans terme constant, d'une constante, et d'une partie qui devient infiniment petite dans les conditions où H devient infiniment grand, il faut et il suffit, pour que la somme des deux infiniment grands ait une limite, que les deux polynomes se détruisent dans cette somme : la limite cherchée est la somme des deux constantes.

Considérons, par exemple, l'expression

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1},$$

en supposant que x augmente indéfiniment par valeurs positives. On a

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= x + \frac{x}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{x}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 + \ldots = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \frac{1}{x} + \ldots,$$

$$\sqrt[3]{x^3 + 1} = x \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + \ldots,$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \frac{1}{x} + \ldots;$$

l'expression considérée tend vers la limite $\frac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

Il me paraît inutile d'énoncer les théorèmes relatifs au produit ou au rapport de deux infiniment grands.

Le lecteur aura sans doute remarqué qu'il n'y a pas, dans ce paragraphe relatif aux infiniment petits et aux infiniment grands, d'idées nouvelles : il y a seulement une façon de parler, qui est commode, et à laquelle il convient de s'habituer. Les exemples où figurent les fonctions exponentielle et logarithmique sont importants.

247. Formes illusoires. Vraies valeurs. — On a souvent à reconnaître comment se comporte une fonction aux environs d'une valeur a de la variable, pour laquelle la formule qui définit, en général, la fonction que l'on étudie prend une *forme illusoire*, en sorte que, pour cette valeur a, la fonction ne soit pas définie, quoiqu'elle soit définie pour les valeurs voisines. Il peut arriver que, dans ces conditions, la fonction tende vers une limite, lorsque x s'approche de a, soit d'une façon arbitraire, soit en restant plus petit que a, ou plus grand. Cette valeur limite est ce qu'on appelle souvent la *vraie valeur* de la fonction. Il convient de réserver cette dénomination ([1]) au cas où la limite existe quand x s'approche de a, d'une façon arbitraire : en *attribuant* cette vraie valeur à la fonction, pour $x = a$, celle-ci devient continue pour $x = a$. Lorsque la fonction est définie pour les valeurs plus petites et plus grandes que a et qu'il y a lieu de distinguer le cas où x s'approche de a en restant plus petit que a du cas où x s'approche de a en restant plus grand que a, il peut y avoir deux limites différentes; s'il en est ainsi, la fonction ne peut pas être définie pour $x = a$ de manière à être continue. L'expression *vraie valeur* ne convient pas. Cette expression s'emploie aussi lorsque la fonction tend vers une limite quand x augmente indéfiniment en valeur absolue. Ici encore, il ne convient pas de l'employer quand la fonction se comporte différemment suivant que x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Je rappelle que l'expression *vraie valeur* a déjà été introduite dans le Chapitre IV à propos des fractions rationnelles. Enfin, quand la formule qui définit, en général, la fonction, prend une forme illusoire pour $x = a$, il peut arriver que la fonction tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, quand x s'approche de a. Il importe évidemment de savoir reconnaître ces diverses circonstances.

Au lieu de supposer que x s'approche de a ou tende vers $\pm\infty$, on peut, d'ailleurs, comme on l'a déjà fait observer bien des fois, se borner au cas où la variable tend vers o; il suffit, pour ramener les autres cas à celui-là, de faire le changement de variable $x = a + h$, ou $x = \frac{1}{z}$.

Supposons, par exemple, qu'on ait affaire à une fonction donnée sous la forme $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ et que les deux termes de la fraction s'annulent pour

([1]) Elle n'est nullement indispensable. Le mot *limite* suffit.

$x = a$, on dit que, pour $x = a$, la fonction se présente sous la forme illusoire $\frac{0}{0}$; si, pour $x = a$, les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont continues, la fonction donnée est le rapport de deux infiniment petits, quand x s'approche de a. Si, quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ tendent vers o, on dit encore que la fonction se présente, pour $x = \pm\infty$, sous la forme $\frac{0}{0}$ et l'on a encore affaire, quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, au rapport de deux infiniment petits.

Si, lorsque x tend vers a ou vers $\pm\infty$, les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont infiniment grandes, on dit que, pour $x = a$, ou pour $x = \pm\infty$, la fonction donnée se présente sous la forme illusoire $\frac{\infty}{\infty}$; on a affaire au rapport de deux infiniment grands [1]. La recherche de la limite se fera comme on l'a expliqué dans le paragraphe précédent.

Si l'on a affaire à un produit de deux facteurs, dont l'un est une fonction continue de x qui s'annule pour $x = a$, et dont l'autre grandit indéfiniment quand x s'approche de a, on dit que la fonction se présente sous la forme $0 \times \infty$; on a affaire au produit d'un infiniment petit par un infiniment grand.

On a donné dans le paragraphe précédent et, en particulier, au n° **244**, des explications suffisantes pour traiter ces différents cas.

On dit d'une expression qu'elle se présente sous la forme $\infty - \infty$ pour dire qu'elle est la différence de deux fonctions infiniment grandes qui finissent par avoir le même signe. Il s'agit là, au fond, de la somme algébrique de deux infiniment grands; on a parlé de ce cas au n° **246**.

Considérons encore une expression telle que u^v où u et v sont des fonctions, s'annulant pour $x = a$ et continues pour cette valeur de x.

---

(1) Je dois signaler une règle célèbre, connue sous le nom de *l'Hospital,* que je ne démontrerai pas. (Voir *Introd.,* n° 234).

Si les deux termes du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ deviennent infiniment petits tous les deux, ou infiniment grands tous les deux lorsque x tend vers a ou vers $\pm\infty$, et si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ des dérivées des deux termes tend, dans les mêmes conditions, vers une limite L, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend aussi vers cette limite L.

Dans la plupart des cas, l'emploi de cette règle est moins commode que les méthodes développées plus haut.

L'expression 0^0 n'a aucun sens par elle-même; les divers sens qu'on est tenté de lui donner sont contradictoires : d'une part, l'expression A^0 est égale à 1, quel que soit le nombre A, pourvu qu'il ne soit pas nul; d'autre part, l'expression 0^m doit être regardée comme nulle, quel que soit le nombre positif m. Le problème consiste à chercher si u^v tend vers une limite quand x tend vers a; on remarquera d'abord que le problème n'a de sens que si u tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers a, autrement l'expression u^v n'aurait pas de sens pour une infinité de valeurs de v.

On cherchera la limite du logarithme de u^v, c'est-à-dire la limite de $v \lg u$; on a affaire au produit d'un infiniment petit v par un infiniment grand $\log u$: si ce produit tend vers une limite l, u^v tendra vers la limite e^l; si le produit $v \lg u$ tend vers $+\infty$, u^v tendra vers $+\infty$; si le produit $v \lg u$ tend vers $-\infty$, u^v tendra vers 0.

Par exemple, x^x, quand x tend vers 0 par valeurs positives, tend vers 1, car le logarithme de cette fonction, à savoir $x \lg x$, tend vers 0; il en sera de même de la fonction x^{x^n}, en supposant n positif.

La fonction $x^{\frac{1}{\lg x}}$, pour $x > 0$, est constamment égale à e, puisque son logarithme est égal à 1. Sa limite, quand x tend vers 0 par valeurs positives, est le nombre e.

Considérons encore l'expression

$$x^{\frac{1}{(x - \lg x)^n}},$$

où n est un nombre positif et où l'on suppose que x tende vers 0 par valeurs positives: son logarithme est

$$\frac{\lg x}{(x - \lg x)^n},$$

quand x tend vers 0, c'est le rapport de deux infiniment grands; en substituant au dénominateur l'infiniment grand équivalent $(-\lg x)^n$, on obtient l'expression $-\frac{1}{(-\lg x)^{n-1}}$ qui tend vers 0 pour $n > 1$, qui est toujours égale à -1 pour $n = 1$, qui tend vers $-\infty$ si n est compris entre 0 et 1. La limite de l'expression proposée sera 1 dans le premier cas, $\frac{1}{e}$ dans le second, 0 dans le troisième.

L'expression u^v se présente sous la forme illusoire $1^{\pm\infty}$ lorsque, la variable x tendant vers a (ou vers $\pm\infty$), il arrive que u tende vers 1 et v vers $\pm\infty$: on ne reconnaît rien, de suite, sur la valeur d'un très grand nombre de facteurs voisins de 1.

On considérera encore le logarithme $v \lg u$ de l'expression u^v : en posant $v = \frac{1}{\alpha}$, $u = 1 + \beta$, α et β seront, dans les conditions considérées, des infiniment petits; on a d'ailleurs

$$v \lg u = \frac{1}{\alpha} \lg(1+\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{3} - \ldots\right).$$

Si $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une limite m, m est la limite de $v \lg u$; celle de u^v est e^m. Si $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers $+\infty$, $v \lg u$ et u^v tendent vers $+\infty$. Si $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers $-\infty$, u^v tendra vers o.

Par exemple, lorsque l'on regarde x comme une constante et que l'on fait croître p indéfiniment en valeur absolue, $\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p$ tend vers e^x, puisque l'on a alors $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{x}{p}$, $\frac{\beta}{\alpha} = x$. Dans les mêmes conditions, $\cos^p \frac{x}{p}$ tend vers 1. On a dans ce dernier cas

$$\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \beta = -2\sin^2\frac{x}{2p}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-2\sin^2\frac{\alpha x}{2}}{\alpha}, \qquad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

EXERCICES.

233. Calculer avec cinq décimales exactes $\sqrt[10]{e}$, $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$.

234. Montrer que l'on a

$$7\lg 2 - 3\lg 5 = \lg\left(1 + \frac{24}{1000}\right)$$

et se servir de cette formule pour calculer le premier membre avec sept décimales exactes.

235. Calculer $\lg 2$ avec cinq décimales exactes au moyen de la formule

$$\lg 2 = 3\lg\frac{5}{4} + \lg\frac{41}{40} - \lg\frac{1025}{1024}$$

et de la formule (2) du n° 226.

236. Si α est un nombre plus petit que 1, la somme de la série

$$1+\frac{x}{1}\alpha+\frac{x(x-1)}{1.2}\alpha^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots$$

est une fonction de x continue dans tout intervalle.

On s'appuiera sur ce que la série

$$1+\frac{a}{1}\alpha'+\frac{a(a+1)}{1.2}\alpha'^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}\alpha'^3+\ldots,$$

où a est un nombre positif et α' la valeur absolue de α, est toujours convergente.

237. En désignant par n un nombre naturel, on a

$$\begin{aligned}&\lg n-2\lg(n+1)+\lg(n+2)\\&\quad=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2(n+1)^4}+\ldots+\frac{1}{p(n+1)^{2p}}+\ldots;\end{aligned}$$

montrer que cette expression est plus petite que 10^{-6} quand n est égal ou supérieur à 1000.

Utiliser ce résultat afin d'expliquer que, dans les tables de logarithmes, les *différences* varient peu tout en diminuant.

238. En désignant par n un nombre naturel et en posant

$$u_n=\frac{2n+3}{(n+3)(n+1)^3+n(n+2)^3},$$

on a

$$\begin{aligned}&\lg(n+3)-3\lg(n+2)+3\lg(n+1)-\lg n\\&\quad=2\frac{u_n}{1}+2\frac{u_n^3}{3}+2\frac{u_n^5}{5}+\ldots;\end{aligned}$$

montrer que u_n diminue quand n augmente. Évaluer grossièrement l'ordre de grandeur de la quantité

$$\lg(n+3)-3\lg(n+2)+3\lg(n+1)-\lg n-2u_n,$$

quand n est égal à 10, ou à 100.

239. Si a et b sont de même signe, on a

$$\frac{1}{2}\lg\frac{a}{b}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5+\ldots.$$

240. Si x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{1}{2}\lg\frac{1}{\cos x} = \tang^2\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\tang^6\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\tang^{10}\frac{x}{2} + \ldots.$$

Montrer que, lorsque x est positif et plus petit que $\frac{2\pi}{5}$, la fonction $\lg\frac{1}{\cos x} - 2\tang^2\frac{x}{2}$ est positive et plus petite que $\tang^6\frac{x}{2}$. Lorsque x est compris entre o et $\frac{\pi}{5}$, elle reste inférieure à 10^{-3}.

Si x est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{1}{2}\lg\tang x = \tang\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\tang^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5}\tang^5\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots.$$

241. Déterminer les nombres α, β de manière que la série dont le $n^{\text{ième}}$ terme est $e^{\frac{1}{n}} - \alpha - \frac{\beta}{n}$ soit convergente.

242. Déterminer les nombres α, β, γ de manière que le développement de

$$\frac{\alpha x + \beta x^3}{1 + \gamma x^2} - \operatorname{arc\,tang} x,$$

suivant les puissances entières de x, commence par un terme en x^7; les nombres étant ainsi déterminés, on demande d'évaluer le premier chiffre significatif de la différence précédente pour $x = \tang\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

243. Déterminer les nombres α, β, γ de manière que le développement de

$$\alpha\log(1 + x) + \beta\log(1 - x) + \gamma\operatorname{arc\,tang} x - x^3$$

suivant les puissances entières de x commence par un terme en x^7.

244. Déterminer les nombres α, β, α', β' de manière que le développement de

$$(x^2 + \alpha x + \beta)e^x - x^2 - \alpha' x - \beta'$$

suivant les puissances entières de x commence par un terme en x^5. Montrer que l'on a alors

$$\left| e^x - \frac{x^2 + \alpha' x + \beta'}{x^2 + \alpha x + \beta} \right| < \frac{x'^5 e^{x'}}{24},$$

en désignant par x' la valeur absolue de x.

245. Si l'on prend les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des deux membres de l'égalité

$$e^x x^{-n-1} - \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right) x^{-n+1}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{x}{1.2\ldots(n+2)} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{1.2\ldots(2n+p+1)} + \ldots,$$

on arrive à une égalité de la forme

$$e^x Q_n(x) - P_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)\ldots 2n} S_n(x);$$

où $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont des polynomes en x et où $S_n(x)$ est une série entière en x, à coefficients positifs, toujours convergente.

Trouver l'expression explicite des polynomes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$; montrer que l'on a $P_n(x) = Q_n(x)$, que les coefficients des polynomes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont entiers; que la somme de la série $S_n(x)$ est moindre en valeur absolue que $e^{x'}$, en désignant par x' la valeur absolue de x; que, si l'on donne à x une valeur fixe quelconque, la quantité $e^x Q_n(x) - P_n(x)$ tend vers o quand n augmente indéfiniment; cette même quantité est positive pour x positif. Déduire de là que toutes les puissances entières de e sont des nombres irrationnels.

Évaluer le premier chiffre significatif de la différence

$$e^x - \frac{P_4(x)}{Q_4(x)},$$

réduite en fraction décimale, pour $x = 1$, pour $x = \frac{1}{2}$.

Vérifier l'identité

$$Q_n + (4n - 2) Q_{n-1} - x^2 Q_{n-2} = 0.$$

246. Soient a et b deux nombres tels que le rapport $\frac{a}{b}$ ne soit pas un nombre entier négatif; la série dont le $n^{\text{ième}}$ terme est $\frac{1}{na+b}$ est, comme on le sait, divergente. Déterminer le nombre α de manière que la série dont le $n^{\text{ième}}$ terme est $\frac{1}{na+b} - \frac{\alpha}{n}$ soit convergente.

Montrer que l'expression

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\ldots+\frac{1}{na+b}-\frac{\lg n}{a}$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

247. Soit S_n la somme des n premiers termes de la série divergente

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Montrer que, lorsque p et n sont des nombres naturels très grands, la quantité $S_{2p}-\frac{1}{2}S_p-\frac{1}{2}S_n$ diffère peu de $\lg 2+\frac{1}{2}\lg\sqrt{\frac{p}{n}}$.

On peut faire croître p et n de façon que la quantité précédente tende vers la limite que l'on veut.

Déduire des résultats précédents que la série convergente

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

a pour somme $\lg 2$ et qu'on peut en ranger les termes de manière à obtenir soit une série convergente dont la somme est tel nombre que l'on veut, soit encore une série divergente.

248. Si dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ admet des dérivées jusqu'au troisième ordre, on peut écrire

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}[f'(b)+f'(a)]-\frac{(b-a)^3}{12}f'''(\alpha),$$

en désignant par α un nombre compris entre a et b. Raisonnement analogue à celui du n° 222. Si l'on pose

$$f(b)-f(a)-\frac{b\quad a}{2}[f'(b)+f'(a)]=\frac{(b-a)^3}{12}\mathrm{A},$$

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-\frac{(x-a)^3}{12}\mathrm{A},$$

on constate que la fonction $\varphi(x)$, nulle pour $x=b$, s'annule pour $x=a$, ainsi que sa dérivée première et sa dérivée seconde. Celle-ci est égale à $-\frac{x-a}{2}[\mathrm{A}+f'''(x)]$; elle doit s'annuler pour une valeur de x comprise entre a et b; d'où la conclusion.

249. Si dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ admet des dérivées jusqu'au cinquième ordre, on peut écrire

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{b-a}{2}[f'(b)-f'(a)]$$
$$-\frac{(b-a)^2}{12}[f''(b)-f''(a)]+\frac{(b-a)^5}{720}f^{\text{v}}(\alpha),$$

α étant un nombre compris entre a et b.

250. Dans les mêmes conditions, on a

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+\frac{(b-a)^5}{2780}f^{\text{v}}(\alpha),$$

α étant encore compris entre a et b (1).

251. Si dans l'intervalle $(a-h, a+h)$ la fonction $f(x)$ admet des dérivées première et seconde, on peut écrire

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a+\theta h),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1.

252. Si les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ admettent des dérivées première et seconde dans un intervalle comprenant les nombres a, b, c, on a

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\beta) & f''(\gamma) \\ g(a) & g'(\beta) & g''(\gamma) \\ h(a) & h'(\beta) & h''(\gamma) \end{vmatrix},$$

en désignant par β, γ des nombres compris entre le plus grand et le plus petit des nombres (a, b, c).

253. Quel que soit le nombre positif p, la série dont le $(n-1)^{\text{ième}}$ terme est $(\lg n)^{-p}$ est divergente.

254. Les équations différentielles

$$u'=v, \qquad v'=-u,$$

---

(1) Relativement aux exercices 248, 249, 250, *voyez* n° 331.

où u et v désignent des fonctions de x et u', v' leurs dérivées, sont vérifiées quand on y remplace u et v par $\sin x$ et $\cos x$. Montrer que, si u et v sont des fonctions qui vérifient ces équations différentielles, u^2+v^2 est constant. Si, en outre, pour $x=0$, la fonction u est nulle et la fonction v égale à 1, on a nécessairement $u=\sin x$, $v=\cos x$.

En supposant que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ soient développables en séries entières en x, montrer comment on peut, en s'appuyant sur les résultats précédents, déterminer les coefficients de ces séries. Montrer que les séries trouvées ont bien pour sommes respectives $\sin x$ et $\cos x$.

255. Limites, pour $x=0$, de

$$\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3},\quad \frac{1-\cos x}{\operatorname{ch} x-1},\quad \frac{\lg\dfrac{x}{\sin x}}{\sin^2 x},\quad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x},$$
$$\frac{(2+x)-(2-x)e^x}{\operatorname{sh}^3 x},\quad \frac{x-\sin x}{\operatorname{tang} x-x},\quad \sin x \lg x,\quad x^{\frac{1}{\lg 2x}},\quad e^{-\frac{1}{x}}\operatorname{tang} x;$$

dans les trois dernières, on suppose que x tend vers 0 par valeurs positives.

Limite pour $x=\dfrac{\pi}{4}$ de

$$\frac{\lg \operatorname{tang} x-\operatorname{tang}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tang}^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}.$$

256. Quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut trouver des valeurs de x positives et moindres que ε telles que la fonction

$$x^{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-1}}$$

soit aussi petite ou aussi grande que l'on voudra.

257. Si l'on convient d'attribuer à la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ la valeur 0 pour $x=0$, cette fonction est continue et admet des dérivées de tous les ordres; montrer que ces dérivées sont toutes nulles pour $x=0$. Cette fonction peut-elle être développée en une série entière en x?

258. Si $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des nombres différents, il ne peut pas y avoir de polynomes (en x), A, B, ..., L tels que l'on ait, pour toutes les valeurs de x,

$$Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}+\ldots+Le^{\lambda x}=0.$$

259. Il n'y a pas de polynome en x, y qui devienne nul quel que soit x, quand on y remplace y par e^x. Il n'y a pas de polynome en x, y qui devienne nul, quelle que soit la valeur positive de x, quand on y remplace y par $\lg x$.

260. On considère, sur un cercle de centre O et de rayon 1, un point fixe A et un point variable M : on prendra pour infiniment petit principal l'arc $AM = \alpha$. Évaluer la partie principale des infiniment petits

$$PM,\quad AM,\quad AT,\quad PA,\quad AI,\quad MT,\quad AT - \alpha,\quad \alpha - AM,\quad AI + IM - AM,$$
$$AI + AM - 3\frac{\alpha}{2},\quad \text{aire } AIM.$$

P est la projection du point M sur OA, T et I sont les intersections de la tangente en A avec le rayon OM et la tangente en M.

261. Quelle est la limite, quand x tend vers $+\infty$, de

$$x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)?$$

262. En désignant par a_1, b_1, c_1, ..., a_n, b_n, c_n des constantes, parmi lesquelles on suppose que a_1, a_2, ..., a_n sont positifs, on demande de déterminer des nombres α, β tels que l'expression

$$\sqrt{a_1x^2 + 2b_1x + c_1} + \sqrt{a_2x^2 + 2b_2x + c_2} + \ldots$$
$$+ \sqrt{a_nx^2 + 2b_nx + c_n} - \alpha x - \beta$$

tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Les constantes α, β étant ainsi déterminées, quel est le signe de l'expression précédente pour de grandes valeurs de x?

CHAPITRE XV.

APPLICATIONS A L'ÉTUDE D'UNE FONCTION, A LA SÉPARATION ET AU CALCUL DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

§ 1. — ÉTUDE DE LA VARIATION D'UNE FONCTION DONNÉE.

248. Quand on veut étudier la variation d'une fonction $f(x)$, donnée explicitement, la première chose à faire est de déterminer les intervalles dans lesquels la fonction est réelle et continue.

Si, en particulier, l'expression de la fonction contient des radicaux d'indice pair, des logarithmes, etc., on n'oubliera pas que les quantités dont on a à extraire la racine, ou à prendre le logarithme, doivent être positives. Les valeurs de x pour lesquelles la fonction cesse d'exister, et celles pour lesquelles elle est discontinue seront des bornes des intervalles que l'on aura à considérer.

Toutes ces valeurs de x doivent être rangées par ordre de grandeur.

On étudiera ensuite le signe de la dérivée, en se bornant aux valeurs de x qui appartiennent aux intervalles où la fonction existe : on notera les valeurs particulières pour lesquelles cette dérivée est discontinue ou infinie [1]. On cherchera ensuite les valeurs pour lesquelles elle s'annule, parce que, si elle est continue, elle ne peut changer de signe qu'en s'annulant; on retiendra celles de ces valeurs pour lesquelles elle change effectivement de signe. Parmi les valeurs de x, telles que la dérivée soit discontinue ou n'existe pas, valeurs

[1] A proprement parler, elle n'existe pas quand on dit qu'elle est infinie.

que je suppose isolées et en nombre fini, c'est aussi celles pour lesquelles la dérivée change de signe qu'il faut conserver. Toutes les valeurs de x ainsi conservées, rangées par ordre de grandeur, sont intercalées dans le tableau primitif. Le champ de variation de la variable x est ainsi décomposé en intervalles partiels tels que, *à l'intérieur* de chacun d'eux, la fonction soit continue, et que sa dérivée ait un signe constant.

Les bornes de ces intervalles sont les valeurs de x où la fonction cesse d'exister, où elle est discontinue, où la dérivée change de signe.

Pour simplifier le langage, je conserve le nom d'*intervalle* à des symboles tels que $(-\infty, \alpha)$, $(\beta, +\infty)$ qui désignent l'ensemble des nombres inférieurs où égaux à α, supérieurs ou égaux à β.

Il suffit d'étudier comment la fonction varie dans chacun des intervalles partiels ainsi formés. Considérons l'un de ces intervalles; à l'intérieur, la fonction est toujours croissante ou toujours décroissante : on sait distinguer les deux cas par le signe de la dérivée ou, lorsque la fonction est continue dans tout l'intervalle, y compris les bornes, par les valeurs qu'elle prend pour ces bornes. S'il y a, à l'intérieur de l'intervalle une valeur pour laquelle la dérivée n'existe pas, il n'y a pas, pour ce qui concerne le sens de la variation de la fonction, à s'en préoccuper.

On a ensuite à porter l'attention sur les bornes. Lorsque x s'approche indéfiniment d'une de ces bornes, la fonction, qui, dans l'intervalle, varie toujours dans le même sens, ou bien tend vers une limite, ou bien tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On sera certainement dans le premier cas si la fonction est continue pour la borne que l'on étudie : les deux autres cas se reconnaîtront sur l'expression donnée; d'ailleurs, s'il s'agit, par exemple, de la borne supérieure et si la fonction ne tend pas vers une limite, elle tend évidemment vers $+\infty$ si elle est croissante, vers $-\infty$ si elle est décroissante; c'est l'inverse quand il s'agit de la borne inférieure. Des remarques analogues s'appliquent encore lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Il n'y a rien de plus à dire si la borne considérée limite un intervalle au delà duquel, ou en deçà duquel la fonction cesse d'exister.

Supposons que la borne considérée, que j'appellerai b, sépare deux intervalles où la fonction existe : b est la borne supérieure d'un premier intervalle, la borne inférieure d'un second intervalle. Si la fonction est continue pour $x = b$, c'est que, d'après la façon dont on a formé les intervalles, la dérivée change de signe pour $x = b$ soit en s'annulant, soit en devenant discontinue ou infinie ([1]).

Lorsque x traverse la valeur b en croissant, la dérivée peut passer du positif au négatif ou du négatif au positif; dans le premier cas, la fonction est croissante pour les valeurs de x inférieures à b, elle est décroissante pour les valeurs de x plus grandes que b; lorsque x traverse la valeur b, la fonction cesse de croître pour décroître ensuite : elle passe par un *maximum;* si, au contraire, la dérivée passe du négatif au positif, la fonction, pour $x = b$, cesse de décroître pour croître; elle passe par un *minimum*. On aura à calculer la valeur de ce maximum ou de ce minimum.

Lorsque la fonction est discontinue pour $x = b$, on a à reconnaître si, quand x croît et traverse la valeur b, la fonction passe de $+\infty$ à $-\infty$, de $-\infty$ à $+\infty$; si, tout en devenant infinie pour $x = b$, elle garde son signe; si elle passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie, d'une valeur finie à $\pm\infty$, ou bien de $\pm\infty$ à une valeur finie, quand on passe d'un intervalle à l'autre.

Il peut d'ailleurs arriver que l'expression même de la fonction devienne illusoire pour certaines valeurs de la variable. On a enfin à reconnaître comment elle se comporte pour $x = \pm\infty$. J'ai indiqué, à la fin du Chapitre précédent, la marche à suivre pour lever les difficultés de cette nature.

Il sera toujours bon de résumer dans un graphique l'étude de la variation d'une fonction, soit qu'on représente, au fur et à mesure, la variation de la fonction par un trait de courbe, dans chaque intervalle dont on a fait l'étude, soit qu'on ne construise la courbe qu'après avoir terminé l'étude analytique.

Relativement à ce graphique, les valeurs de la variable qui rendent la dérivée nulle, infinie, discontinue, sans que, pour cela, la dérivée change de signe, et qui ne figurent pas comme bornes des intervalles que j'ai décrits plus haut, ne sont pas sans intérêt. Si la dérivée s'annule pour $x = x_0$, c'est que la tangente au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des x; si elle s'annule sans changer de signe, c'est que la fonction continue de croître ou de décroître; le

---

([1]) On est dans le premier cas si la dérivée est continue; la fonction $y = x^{\frac{2}{3}}$ fournit, pour $x = 0$, un exemple du second cas.

trait de courbe traverse la tangente au point d'abscisse x_0, qui est un point d'*inflexion* (*fig.* 74, 75).

Fig. 74.

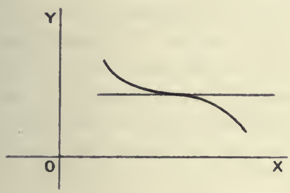
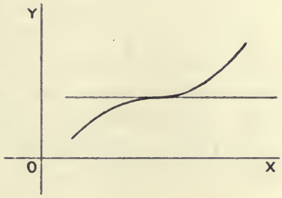


Fig. 75.



Examinons maintenant le cas où la dérivée devient infinie sans que la fonction soit discontinue, et supposons d'abord qu'il s'agisse de la borne d'un intervalle (a, b), par exemple de la borne inférieure a. En disant que la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, on entend que la fonction $f'(x)$ devient infiniment grande quand x s'approche de a par valeurs plus grandes que a : il importe de remarquer que, dans ce cas, le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est lui-même infiniment grand quand h tend vers o par valeurs positives; ce rapport, en effet, en vertu du théorème du n° 215, dont la démonstration ne suppose pas l'existence de la dérivée pour $x = a$, est égal à $f'(a + \theta h)$, θ étant compris entre o et 1; or, par hypothèse, cette expression est infiniment grande, quand h est infiniment petit. Cela revient à dire que la droite qui joint le point de la courbe dont les coordonnées sont a, $f(a)$ au point voisin, dont les coordonnées sont $a + h$, $f(a + h)$, tend à devenir parallèle à l'axe des y, ou encore que la tangente à la courbe, au premier point, est parallèle à cet axe.

Supposons maintenant que, pour $x = x_0$, la fonction $f(x)$ soit continue, mais que la dérivée soit infinie, sans changer de signe; on verra comme tout à l'heure que, au point d'abscisse x_0, la tangente est parallèle à l'axe des y et que la courbe traverse sa tangente en ce point, qui est un point d'inflexion.

Enfin, supposons que, pour $x = x_0$, il y ait une dérivée *à droite* et une dérivée à gauche, et que ces deux dérivées soient différentes; la courbe présentera, au point correspondant, un point *anguleux* (n° 207).

249. La méthode précédente, toutes les fois qu'on peut décomposer l'intervalle ou les intervalles dans lesquels la fonction est définie en intervalles partiels où la dérivée garde un signe constant, permet de se rendre compte du sens dans lequel la fonction varie.

La formule de Taylor (n° 232) et, plus généralement, les expressions approchées que l'on a appris à former dans le Chapitre précédent permettent d'obtenir des renseignements plus précis pour ce qui concerne l'allure de la fonction aux environs d'une valeur a de la variable. Supposons, par exemple, qu'on soit dans le cas où la formule de Taylor est applicable, de sorte que, en posant $x = a + h$, la fonction $f(x)$ se mette sous la forme

$$(1)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

ou

$$(2)\quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1 ; je suppose que la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ est bornée aux environs de a. Je suppose en outre que les coefficients de h, h^2, ..., h^n ne sont pas tous nuls. Dans ces conditions, le premier des termes en h, h^2, ..., h^n qui n'est pas nul, fait connaître dans quel sens la fonction varie. On reconnaît en particulier que, si la première des dérivées qui ne s'annule pas pour $x = a$ est d'ordre impair, la fonction est croissante ou décroissante pour $x = a$ suivant que cette dérivée est positive ou négative, que cette fonction passe, pour $x = a$, par un minimum ou un maximum si la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre pair, suivant que cette dérivée est positive ou négative.

Racines multiples. — Les formules (1) ou (2), par leur analogie même avec les formules qui se rapportent aux polynomes, invitent à généraliser la notion de *racine multiple* et *d'ordre de multiplicité*.

En conservant toujours les mêmes hypothèses, supposons que a soit une racine de l'équation $f(x) = 0$, en sorte que $f(a)$ soit nul.

Supposons, en outre, que les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(p-1)}(x)$ s'annulent pour $x = a$, et que la dérivée $f^{(p)}(x)$ ne s'annule pas pour $x = a$, p étant inférieur ou égal à n; il sera tout naturel de dire que a est une racine d'ordre de multiplicité p de la fonction $f(x)$.

Ainsi, pour parler de l'ordre de multiplicité d'une racine a de l'équation $f(x)$, il faut, d'une part, que la formule de Taylor soit applicable pour les valeurs $x = a + h$ suffisamment voisines de a et qu'on puisse pousser le développement assez loin pour que l'ordre du terme complémentaire dépasse l'ordre de la première dérivée qui n'est pas nulle pour $x = a$, ce terme complémentaire étant borné aux environs de a. Ces conditions seront vérifiées sûrement si la fonction $f(a + h)$ est développable en une série entière en h.

Par exemple o est une racine double pour l'équation $1 - \cos x = 0$, c'est une racine triple pour l'équation

$$(2 + x) - (2 - x)e^x = 0,$$

comme le lecteur le reconnaîtra sans peine.

Il peut très bien arriver qu'on ne puisse pas attribuer un ordre entier à une racine d'une équation; tel serait le cas pour les équations $\sqrt{x} = 0$, $\frac{1}{\lg x} = 0$ qui doivent être regardées comme admettant la racine o.

Si a est une racine multiple d'ordre p de l'équation $f(x) = 0$, on peut écrire, en vertu de la formule (2),

$$f(x) = (x - a)^p g(x),$$

$g(x)$ étant une fonction de x, continue pour $x = a$, qui, lorsque x tend vers a, s'approche indéfiniment de la quantité non nulle

$$\frac{f^{(p)}(a)}{1.2\ldots p}.$$

Si a est une racine d'ordre de multiplicité p, la courbe qui représente la fonction traverse, ou non, l'axe des x au point d'abscisse a, suivant que p est impair ou pair.

Concavité, convexité, points d'inflexion. — Après cette digression, revenons à l'étude, dans le cas général, de la fonction $f(x)$ pour les valeurs de x voisines de a, en supposant toujours que les formules (1) ou (2) s'appliquent dans les conditions que l'on a dites. Désignons par A le point d'abscisse a situé sur la courbe qui représente la fonction.

La courbe qui a pour équation

$$y = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(a) \quad (p \leqq n)$$

est très voisine, aux environs de A, de la courbe qui représente la fonction $y = f(x)$, d'autant plus voisine, en général, que p est plus grand. En particulier, la droite ayant pour équation

$$y = f(a) + (x-a) f'(a)$$

est la tangente en A à cette courbe; la différence entre les ordonnées des points de la courbe et de la tangente qui ont même abscisse x est

$$\frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots \\ + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)],$$

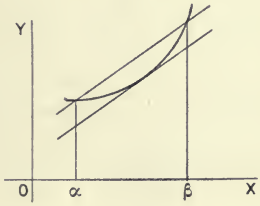
ou, si l'on préfère,

$$\frac{h^2}{1.2} f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots;$$

cette différence, qui s'annule pour $h = 0$, $(x = a)$, est un infiniment petit du second ordre, quand on prend h pour infiniment petit principal, et que $f''(a)$ n'est pas nul. Elle est, en supposant que h soit suffisamment petit en valeur absolue, positive ou négative suivant que le nombre $f''(a)$ est lui-même positif ou négatif; dans le premier cas, la courbe est au-dessus de la tangente, aux environs du point A, et l'on dit que, en ce point, la courbe tourne sa *concavité* vers les *y positifs*, ou vers le haut, qu'elle tourne sa *convexité* vers les *y négatifs* ou vers le bas; dans le second cas, la courbe est au-dessous de la tangente, et l'on dit qu'elle tourne sa *convexité* vers les *y positifs*, ou vers le haut, qu'elle tourne sa concavité vers les *y négatifs*, ou vers le bas.

Si l'on a $f''(x) > 0$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (α, β), la concavité sera tournée vers le haut sur tout l'arc de courbe correspondant à cet intervalle : il est à remarquer que, dans ce cas, la pente $f'(x)$ de la tangente à la courbe va en croissant

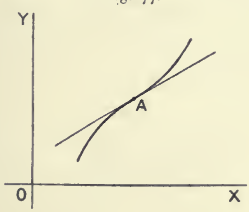
Fig. 76.



avec x ; ce serait le contraire si l'on avait $f''(x) < 0$ dans l'intervalle (α, β). Il est clair, sur la figure, que, dans le premier cas, l'arc de courbe est au-dessous de la corde qui joint ses extrémités, qu'elle est au-dessus dans le second cas, je laisse au lecteur le soin de démontrer analytiquement qu'il en est ainsi.

Si $f''(a)$ est nul sans que $f'''(a)$ le soit, on voit que, au point A, la courbe traverse sa tangente, et que la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente est un infiniment petit du troisième ordre. On dit alors que le point A est un *point d'inflexion;* si

Fig. 77.



l'on a $f'''(a) > 0$, la fonction $f''(x)$ est croissante pour $x = a$, elle est donc négative pour les valeurs de x un peu plus petites que a, positive pour les valeurs de x un peu plus grandes que a : les mêmes conclusions ressortent de la formule

$$f''(a+h) = \frac{h}{1} f'''(a) + \frac{h^2}{1.2} f^{\text{IV}}(a) + \ldots;$$

on voit que, lorsque x croît et traverse la valeur a, la courbe qui, pour les valeurs de x un peu plus petites que a, tournait sa convexité vers le haut, tourne sa concavité vers le haut lorsque x est un peu plus grand que a; en un point d'inflexion, la convexité change de sens. Il est à peine utile de dire que, si $f'''(a)$ est négatif, la courbe tourne d'abord sa concavité vers le haut, puis sa convexité.

Si $f''(a)$, $f'''(a)$, ... étaient nuls, c'est la première dérivée non nulle qui indiquerait, par son signe, lorsqu'elle est d'ordre pair, si la courbe est au-dessus ou au-dessous de la tangente en A, et, lorsqu'elle est d'ordre impair, si la courbe est d'abord concave ou convexe : lorsque cette dérivée est d'ordre impair, il y a inflexion.

Si, plus généralement, on considère la courbe dont l'équation est

$$y = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(a) \qquad (0 < p < n),$$

la différence entre l'ordonnée de la courbe dont l'équation est $y = f(x)$ et de la courbe approchée, est

$$\frac{(x-a)^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} f^{(p+1)}(a) + \ldots.$$

En supposant $f^{(p+1)}(a)$ différent de 0, on voit que cette différence, qui est un infiniment petit d'ordre $p+1$ lorsqu'on regarde h ou $x-a$ comme l'infiniment petit principal, change de signe ou ne change pas de signe, avec h, suivant que p est pair ou impair; les deux courbes, qui sont tangentes dans les deux cas, se traversent en A, dans le premier cas, ne se traversent pas dans le second. On dit qu'elles ont un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre (¹).

On a supposé, dans ce qui précède, que la formule de Taylor était

---

(¹) D'une façon générale, si les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont égales pour $x = a$, ainsi que leurs dérivées premières, secondes, ..., $p^{\text{ièmes}}$, et si leurs dérivées $(p+1)^{\text{ièmes}}$ sont distinctes, on dit que les deux courbes dont les équations sont $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, qui ont un point commun A, d'abscisse a, ont en ce point un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre; ainsi elles ont un contact *simple* si l'on a

$$\varphi(a) = f(a), \qquad \varphi'(a) = f'(a), \qquad \varphi''(a) \neq f''(a).$$

Elles se traversent ou ne se traversent pas en A, suivant que p est pair ou impair, comme on le voit de suite en formant la différence des ordonnées de ces deux courbes qui répondent à une même abscisse. Cette différence est un infiniment petit du $(p+1)^{\text{ième}}$ ordre quand on prend $x-a$ pour infiniment petit principal.

applicable à la fonction $f(x)$ pour les valeurs de x voisines de a. S'il en est autrement, on cherchera, comme on l'a expliqué dans le Chapitre précédent, à se procurer quelque autre formule d'approximation qui pourra mettre en évidence soit la continuité de la fonction, pour $x = a$, lorsqu'on lui attribue sa *vraie valeur,* soit quelque discontinuité : le cas de discontinuité le plus simple est celui où la courbe est asymptote à la parallèle à l'axe des y dont l'équation est $x = a$; elle peut d'ailleurs être asymptote en haut et en bas, en haut seulement, ou en bas seulement, des deux côtés ou d'un côté seulement. On aura à étudier comment la fonction se comporte quand x s'approche de a par valeurs plus petites, ou par valeurs plus grandes que a. Les formules d'approximation, quand on en a, fournissent des courbes, d'équations plus simples que la courbe proposée, qui en sont très voisines quand x est voisin de a.

Asymptotes. — Il y aura lieu, en particulier, lorsque la fonction $f(x)$ est définie pour les grandes valeurs absolues de x, d'étudier comment la fonction se comporte pour ces valeurs; on pourra poser $x = \frac{1}{x'}$, et étudier la fonction $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ pour x' voisin de o. Il peut arriver que la fonction $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ puisse être développée suivant les puissances croissantes de x', et que le développement commence par un polynome en $\frac{1}{x'}$; cela revient à dire que la fonction $f(x)$ est susceptible, lorsque x est suffisamment grand en valeur absolue, d'être mise sous la forme

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \ldots,$$

en sorte que la fonction, lorsque x est infiniment grand, diffère infiniment peu du polynome $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$; la courbe définie par l'équation $y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ est *asymptote* à la courbe définie par l'équation $y = f(x)$; si, en particulier, m est égal à 1, on a affaire à une asymptote rectiligne.

Considérons, par exemple, la fonction $y = (\alpha x + \beta)\, e^{\frac{1}{x}}$; on pourra écrire

$$\begin{aligned} y &= (\alpha x + \beta)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{x^2} + \ldots\right) \\ &= \alpha x + \alpha + \beta + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\frac{1}{x} + \ldots; \end{aligned}$$

la courbe est asymptote à la droite dont l'équation est $y = \alpha x + \alpha + \beta$; lorsque x tend vers $+\infty$, elle est au-dessus ou au-dessous de son asymptote suivant que $\frac{\alpha}{2} + \beta$ est positif ou négatif; c'est l'inverse quand x tend vers $-\infty$; si $\frac{\alpha}{2} + \beta$ était nul, on devrait recourir au terme en $\frac{1}{x^2}$, etc.

On trouvera dans le numéro suivant divers exemples où les méthodes et les notions qui précèdent seront appliquées à l'étude de la variation d'une fonction donnée $f(x)$. On verra, en particulier, que cette étude fournit des renseignements précieux sur les racines de l'équation $f(x) = 0$, ou de l'équation plus générale $f(x) = A$, A désignant une constante donnée. A cet égard, on utilisera fréquemment la proposition suivante : si dans l'intervalle (a, b) la dérivée $f'(x)$ garde un signe constant, la fonction $f(x)$, étant constamment croissante ou constamment décroissante lorsque x croît de a à b, prend une fois seulement chacune des valeurs intermédiaires à $f(a)$ et à $f(b)$, et n'en prend pas d'autres, en sorte que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine et une seule, comprise entre a et b si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et n'en admettra pas si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe. Il est entendu que la fonction $f(x)$ est supposée continue dans l'intervalle (a, b). On reviendra d'ailleurs un peu plus tard sur cette proposition.

On dit qu'une racine de l'équation $f(x) = 0$ est *séparée* lorsque l'on connaît deux nombres α, β qui comprennent cette racine et qui ne comprennent que celle-là. *Séparer* les racines de l'équation $f(x) = 0$, c'est séparer chacune de ses racines, l'enfermer dans un intervalle (α, β) qui ne contienne pas d'autre racine que celle-là. La séparation des racines d'une équation numérique $f(x) = 0$ est le premier pas à faire pour la résolution de cette équation. Elle est liée, comme on le verra suffisamment sur les exemples, à l'étude de la variation de la fonction $f(x)$.

250. Je vais appliquer les méthodes précédentes à quelques exemples.

Relativement aux graphiques qui représentent une fonction $y = f(x)$, dont les coefficients sont numériques, je crois devoir faire l'observation suivante :

En parlant d'axes coordonnés, j'ai toujours supposé que l'unité de longueur était choisie en même temps que les axes ; toutefois, on peut désirer faire le dessin *à une autre échelle,* le faire en choisissant pour unité de longueur un segment de droite qui, avec l'ancienne unité, serait mesuré par le nombre a. On pourra conserver l'ancienne unité de longueur, quitte à remplacer l'équation $y=f(x)$ par l'équation $\frac{y}{a}=f\left(\frac{x}{a}\right)$. Toutes les courbes que l'on obtient ainsi, en faisant varier a, sont évidemment homothétiques entre elles, par rapport à l'origine.

Considérons la fonction $y=x^3+px+q$; on en simplifiera l'étude en supprimant le terme constant q qui n'influe pas sur le sens de la variation ; on va donc étudier la fonction $y=x^3+px$, ou la courbe qui représente cette fonction ; la recherche des racines de l'équation $x^3+px+q=0$ revient évidemment à la recherche des abscisses des points d'intersection de cette courbe et de la droite dont l'équation est $y=-q$.

Les dérivées première et seconde de $y=x^3+px$ sont respectivement $y'=3x^2+p$, $y''=6x$.

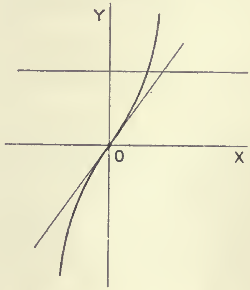
La fonction $y=x^3+px$ est impaire ; la courbe qui la représente est symétrique par rapport à l'origine. Elle passe par cette origine ; la tangente en ce point a pour équation $y=px$; la courbe est au-dessus de sa tangente pour $x>0$, au-dessous pour $x<0$; l'origine est un point d'inflexion ; la courbe tourne sa concavité vers le haut quand x est positif, vers le bas quand x est négatif.

Relativement au signe de y' il y a lieu de distinguer trois cas : $p>0$, $p=0$, $p<0$.

Dans le premier cas, la dérivée est constamment positive, la fonction y constamment croissante ; elle croît de $-\infty$ à $+\infty$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$; elle atteint une fois et une seule fois la valeur $-q$, pour une valeur positive ou une valeur négative de x, suivant que q est négatif ou positif. En d'autres termes, l'équation $x^3+px+q=0$ admet une racine, et une seule, de signe contraire à q. On reconnaît aisément que la valeur absolue de cette racine est inférieure à $\left|\frac{q}{p}\right|$.

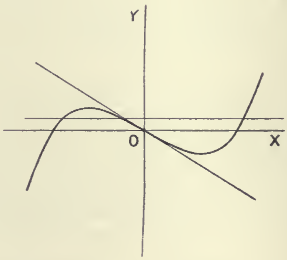
Il n'y a presque rien à changer dans le cas où p est nul ; seulement la tangente à l'origine est l'axe des x ; la racine unique de l'équation $x^3+px+q=0$ est alors $\sqrt[3]{-q}$. Supposons maintenant que p soit négatif. La dérivée s'annule pour $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $x = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$; on voit de suite que y croît lorsque x croît de $-\infty$ à $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$,

Fig. 78.



décroît quand x croît de $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ à $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, croît lorsque x croît de cette dernière valeur à $+\infty$; les deux racines de la dérivée correspondent l'une à un maximum, l'autre à un minimum; les valeurs de

Fig. 79.



ce maximum et de ce minimum s'obtiennent en remplaçant x par les racines de la dérivée dans $x^3 + px$, ou mieux dans le reste $\frac{2p}{3}x$ de la division de $x^3 + px$ par $3x^2 + p$. Le schéma ci-dessus donne une idée suffisante de la courbe, qui rencontre l'axe des x aux points d'abscisse $-\sqrt{-p}$, o, $\sqrt{-p}$. Il est clair que la fonction x^3+px atteindra une fois au moins la valeur $-q$; elle l'atteindra une fois seulement si $-q$ n'est pas compris entre les valeurs du maximum et du minimum de x^3+px, c'est-à-dire si la valeur absolue de q n'est pas inférieure à la valeur absolue des deux nombres symétriques que l'on obtient en remplaçant x par $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ dans $\frac{2p}{3}x$, ou encore si l'on n'a pas

$$q^2 < \left(\frac{2p}{3}\right)^2\left(-\frac{p}{3}\right) \qquad \text{ou} \qquad 4p^3+27q^2<0.$$

La racine unique de x^3+px+q est du signe de $-q$.

Dans le cas ou $4p^3+27q^2$ est nul, $-q$ est égal soit au minimum, soit au maximum de x^3+px; l'équation $x^3+px+q=0$ a une racine (double) commune avec l'équation dérivée $3x^2+p=0$; cette racine double s'obtient en égalant à o le reste $\frac{2p}{3}x+q$ de la division de x^3+px+q par $3x^2+p$; elle est égale à $-\frac{3q}{2p}$.

Lorsque l'on a $4p^3+27q^2<0$, l'équation a trois racines réelles : une dans chacun des intervalles de la suite

$$-\infty, \quad -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad \sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad +\infty.$$

Chaque racine est donc *séparée*.

La condition $4p^3+27q^2<0$ implique $p<0$; elle est dans la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $x^3+px+q=0$ ait ses trois racines réelles et distinctes.

Considérons la fonction $y=e^{\alpha x}\sin x$, où je supposerai α positif : cette fonction est toujours du même signe que $\sin x$, s'annule pour toutes les valeurs de x de la forme $n\pi$, où n est un nombre entier, est positive dans l'intervalle $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, négative dans l'intervalle $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$. La dérivée de y est $y'=e^{\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)$; elle s'annule pour l'angle $-\omega$, compris entre o et $-\frac{\pi}{2}$, dont la tangente est $-\frac{1}{\alpha}$, et pour tous les angles $n\pi-\omega$; dans chacun des intervalles où y est positif, il y a un maximum; il y a un minimum, dans chacun des intervalles où y est négatif; les valeurs des maxima et des minima sont données par la formule

$$(-1)^{n+1}e^{\alpha(n\pi-\omega)}\sin\omega.$$

Ces valeurs deviennent très grandes dès que le nombre $n\pi$ devient un peu grand, en supposant n positif. Au contraire quand n est négatif, et que $n\alpha$ est grand en valeur absolue, la valeur du maximum ou du minimum s'écarte très peu de o. La courbe qui représente la fonction présente une infinité d'oscillations très inégales en hauteur; elle s'éloigne beaucoup de l'axe des x d'un côté, tout en le traversant toujours aux points d'abscisse égale à $n\pi$; de l'autre côté, elle s'aplatit de façon à se confondre avec lui. Je laisse au lecteur le soin de la construire, et de déterminer les points d'inflexion.

La fonction $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$ n'est réelle que dans les intervalles $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$; sa dérivée est

$$y' = \frac{x^2-2}{x\sqrt{x^2+2x}}e^{\frac{1}{x}};$$

il n'y a pas lieu de considérer la racine $-\sqrt{2}$; on reconnaît de suite que la fonction est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, -2)$, dans l'intervalle $(0, \sqrt{2})$ et qu'elle est croissante dans l'intervalle $(\sqrt{2}, +\infty)$. $\sqrt{2}$ correspond à un minimum dont la valeur est

$$a = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2+2\sqrt{2}} = 4,78 \text{ environ.}$$

Lorsqu'on veut se borner à un dessin, même assez précis, il suffit de faire les calculs assez grossièrement, par exemple, avec des tables de logarithmes (vulgaires) et d'antilogarithmes à quatre décimales; on aura ainsi

$$\log a = \frac{M}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log 4,8284 \qquad (M = \log e),$$

$$\log\frac{M}{\sqrt{2}} = \log M - \frac{1}{2}\log 2 = \bar{1},5273; \qquad \frac{M}{\sqrt{2}} = 0,3367,$$

$$\log a = 0,6793, \qquad a = 4,778;$$

la valeur $a = 4,78$ sera d'une exactitude plus que suffisante.

On a d'ailleurs

$$\sqrt{x^2+2x} = x+1-\frac{1}{2x}+\ldots,$$

si x est positif et très grand, et

$$\sqrt{x^2+2x} = -\left(x+1-\frac{1}{2x}+\ldots\right),$$

si x est négatif et très grand en valeur absolue; on en conclut, en multipliant par $e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ldots$, que l'on a, dans le premier cas, $y = x+2+\frac{1}{x}+\ldots$;

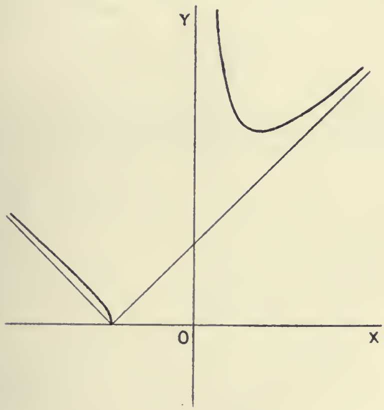
et, dans le second, $y = -x - 2 - \frac{1}{x} - \ldots$; pour x positif, la courbe est asymptote à la droite dont l'équation est $y = x + 2$, et, pour x négatif, à la droite dont l'équation est $y = -x - 2$; dans les deux cas elle finit certainement par être au-dessus de son asymptote.

Quand x s'approche de o par valeurs positives, y devient infiniment grand, $\left(\text{équivalent à } xe^{\frac{1}{x}}\right)$; la courbe est asymptote à l'axe des y, à droite, vers le haut.

Pour x infini, $e^{\frac{1}{x}}$ est égal à 1, l'autre facteur est infini, y est infini. Quand x croît de $-\infty$ à -2, y décroît de $+\infty$ à o; au point d'abscisse -2, la tangente est parallèle à l'axe des y; quand x croît de o à $\sqrt{2}$, y décroît de $+\infty$ à a, puis croît de a à $+\infty$ quand x croît de $\sqrt{2}$ à $+\infty$.

Ce qui précède suffit pour construire le schéma ci-dessous qui donnera une idée suffisante de la courbe.

Fig. 80.



Examinons quelques particularités. La forme même de la courbe fait prévoir l'existence d'un point d'inflexion pour $x < -2$; la dérivée seconde est

$$y'' = \frac{2(x^2 + 4x + 2)}{x^2(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{1}{x}};$$

l'abscisse du point d'inflexion est $-2 - \sqrt{2}$, ou à peu près $-3,41$; l'ordonnée est environ 1,64.

On peut se demander si la courbe rencontre ses asymptotes. On reconnaît de suite que l'équation qui donnerait les abscisses des points d'intersection avec l'une ou l'autre asymptote est

$$(x+2)^2 = e^{\frac{2}{x}}(x^2+2x),$$

ou, en supprimant la racine évidente $x = -2$,

$$x+2 = x e^{\frac{2}{x}};$$

pour x positif, le second membre est plus grand que le premier; il est en effet égal à

$$x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{1.2}\frac{4}{x^2}+\ldots\right) = x+2+\frac{1}{1.2}\frac{4}{x}+\ldots;$$

l'équation n'a pas de racines positives. Pour chercher s'il y a des racines négatives, commençons par changer x en $-x'$; l'équation se met sous les formes

$$e^{-\frac{2}{x'}} = 1-\frac{2}{x'}, \qquad e^{\frac{2}{x'}} = \frac{x'}{x'-2}.$$

On n'a à s'occuper que des valeurs de x' plus grandes que 2; pour ces valeurs, le second membre peut se développer en une série entière en $\frac{2}{x'}$, à savoir $1+\frac{2}{x'}+\left(\frac{2}{x'}\right)^2+\ldots$; il suffit de développer le premier membre pour reconnaître qu'il est plus petit que le second.

La courbe ne rencontre qu'une de ses asymptotes, au point d'abscisse -2.

Si A est un nombre donné l'équation

$$e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} = \mathrm{A}$$

n'a pas de racines quand A est négatif; elle admet une seule racine, plus petite que -2, si A est compris entre 0 et a; si A est plus grand que a, elle admet trois racines dont l'une est comprise dans l'intervalle $(-\infty, -2)$, une autre dans l'intervalle $(0, \sqrt{2})$, la troisième dans l'intervalle $(\sqrt{2}, +\infty)$. Dans le cas où l'on aurait $\mathrm{A} = a$, $\sqrt{2}$ serait une racine double de l'équation.

La figure même donne quelques renseignements de plus sur les racines; on voit que la plus petite racine est plus grande que l'abscisse du point d'intersection des deux droites dont les équations sont

$$y = \mathrm{A}, \qquad y = -x-2,$$

c'est-à-dire plus grande que $-\mathrm{A}-2$; de même l'abscisse de la plus grande racine est plus petite que $A + 2$. On peut prévoir aussi que, si A est grand, les racines de l'équation seront très voisines : une de $-A-2$, une de o, la dernière de $A+2$.

Considérons encore la fonction

$$y = \frac{1}{x} \lg \frac{e^x - 1}{x};$$

on doit d'abord reconnaître le signe de la quantité dont il faut prendre le logarithme; pour x positif, cette quantité est manifestement positive; on voit même qu'elle est plus grande que 1, puisque l'on a

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots;$$

pour x positif, y est positif. Si, maintenant, dans la quantité $\dfrac{e^x-1}{x}$, on change x en $-x$, on trouve

$$\frac{e^{-x} - 1}{-x} = \frac{e^x - 1}{x e^x};$$

le second membre est évidemment positif : le résultat qu'on vient d'obtenir suggère l'idée de chercher s'il n'y aurait pas quelque relation simple entre les valeurs de y, y_1 qui correspondent à des abscisses symétriques x et $-x$; on a

$$y_1 = -\frac{1}{x} \lg \frac{e^x - 1}{x e^x} = 1 - \frac{1}{x} \lg \frac{e^x - 1}{x} = 1 - y$$

et, par suite, $\dfrac{y + y_1}{2} = \dfrac{1}{2}$; le milieu de la droite qui joint les points de coordonnées x, y et $-x$, y_1 a pour coordonnées o, $\frac{1}{2}$; c'est un point fixe M de l'axe des y; la courbe cherchée est symétrique par rapport à ce point; la portion de la courbe qui correspond à des abscisses négatives se déduit ainsi, par symétrie, de celle qui correspond à des abscisses positives. Il suffit évidemment d'étudier cette dernière.

Pour $x = 0$, y se présente sous forme illusoire; on a vu au n° 247 comment se levait l'indétermination, et comment on pouvait développer y en série entière en x, convergente pour les petites valeurs de x; on trouve

$$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} + \frac{11 x^3}{720} + \ldots.$$

On reconnait que la courbe passe par le point M; la tangente en ce point a pour équation $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{24}$, le point M est un point d'inflexion, puisque le terme en x^2 manque dans le développement. Cela résulte d'ailleurs de ce que le point M est un centre de symétrie de la courbe, situé sur la courbe elle-même.

On peut écrire y sous la forme

$$y = \frac{1}{x}\lg\frac{1-e^{-x}}{xe^{x}} = 1 - \frac{\lg x}{x} + \frac{1}{x}\lg(1-e^{-x});$$

pour x positif, la quantité $\lg(1-e^{-x})$ est manifestement négative; on voit que y est plus petit que 1 et, d'ailleurs, que y tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$; la courbe considérée est au-dessous de la droite dont l'équation est $y=1$, à laquelle elle est asymptote, vers la droite.

On a

$$y' = \frac{1}{x^2}\left[\frac{e^{x}(x-1)+1}{e^{x}-1} - \lg\frac{e^{x}-1}{x}\right];$$

il y a lieu d'étudier le signe de cette expression pour x positif; il reviendra au même d'étudier le signe de la fonction

$$z = \frac{e^{x}(x-1)+1}{e^{x}-1} - \lg\frac{e^{x}-1}{x};$$

cette expression est assez compliquée; on remarque toutefois que le signe transcendant lg disparaîtra de la dérivée, qui ainsi sera rationnelle en x et en e^x, et dont on peut espérer que l'on tirera quelques renseignements sur le sens de la variation de z, et par là même sur le signe de z. Quoi qu'il en soit, c'est, pour le moment, sur la fonction z de x qu'on porte l'attention, en se bornant d'ailleurs aux valeurs positives de la variable; on trouve par un calcul facile

$$z' = \frac{(e^{x}-1)^2 - x^2e^{x}}{x(e^{x}-1)^2};$$

le numérateur est le produit des deux facteurs

$$u = e^{x} - 1 - xe^{\frac{x}{2}}, \qquad v = e^{x} - 1 + xe^{\frac{x}{2}},$$

dont le second est manifestement positif, pour $x > 0$; quant au premier, sa dérivée est

$$u' = e^{x} - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{x}{2}\right);$$

le second facteur est positif, on a vu en effet, plus haut, que $e^{x}-1-x$ était positif pour $x>0$. Ainsi u' est positif; u est donc croissant quand x est positif; u est nul pour $x=0$, il est positif pour $x>0$; par conséquent, z' est toujours positif, z est croissant pour $x>0$. Pour $x=0$, z se présente sous une forme illusoire: on reconnaît sans peine que sa vraie valeur est 0; il suit de là que z est positif pour $x>0$; il en est de même de y'; donc, lorsque x

croît de o à $+\infty$, y croît à partir de $\frac{1}{2}$, en s'approchant indéfiniment de 1 ; ces renseignements suffisent à construire la courbe qui représente la fonction proposée ; je laisse ce soin au lecteur. Celui-ci reconnaîtra sans peine que l'équation

$$\frac{1}{x}\lg\frac{e^x-1}{x}=\mathrm{A}$$

n'admet pas de racines, sauf dans le cas où A est compris entre -1 et $+1$; cette racine est de même signe que A.

Dans les exemples qui précèdent, l'étude de la variation d'une fonction $f(x)$ a toujours conduit, de la manière la plus simple, à la séparation des racines de l'équation $f(x)-\mathrm{A}=0$, où A est une constante donnée. Lorsque c'est surtout de la séparation des racines qu'on se préoccupe, il peut être avantageux de prendre pour A non pas précisément le terme constant de l'équation, mais bien quelque autre coefficient par rapport auquel on commence par résoudre l'équation.

Considérons, par exemple, l'équation $x^3-100x+1=0$, qui appartient d'ailleurs à un type que l'on a étudié plus haut, mais qui frappe par ce fait qu'il y a un coefficient beaucoup plus gros que les autres; en la résolvant par rapport à ce coefficient, on la met sous la forme $100=x^2+\frac{1}{x}$, et l'on voit qu'on en obtiendra les racines en cherchant l'intersection de la courbe définie par l'équation $y=x^2+\frac{1}{x}$ avec la parallèle à l'axe des x dont l'équation est $y=100$.

Il suffira au lecteur de tracer grossièrement la courbe pour reconnaître que l'équation proposée a une racine négative, un peu plus grande que -10, une racine positive très petite, une autre racine positive un peu plus grande que 10.

Il arrive fréquemment qu'on ait affaire à une équation contenant un paramètre variable m, les autres coefficients étant numériques. Le nombre et la nature des racines de l'équation proposée dépendent alors de la valeur de m et c'est cette dépendance même qu'on se propose d'étudier. Il est alors en général avantageux de résoudre, lorsque cela est possible, l'équation donnée par rapport à m et de la mettre ainsi sous une forme telle que $f(x)=m$, $f(x)$ ayant ses coefficients purement numériques : on étudiera la fonction $f(x)$ et l'on examinera si elle peut atteindre la valeur m; il est à remarquer que les racines de l'équation $f'(x) = 0$, qui jouent le rôle essentiel dans cette étude, ne dépendent pas de m.

Si par exemple on avait affaire à l'équation

$$\lg \frac{e^x - 1}{x} - mx = 0,$$

on la mettrait sous la forme

$$\frac{1}{x} \lg \frac{e^x - 1}{x} = m;$$

l'étude de cette équation a été faite un peu plus haut.

Quelquefois, au lieu de traiter directement l'équation donnée, en cherchant l'intersection avec l'axe des x, ou avec une parallèle à cet axe, de la courbe qui représente le premier membre de cette équation, il est préférable de ramener la résolution de cette équation à la recherche de l'intersection de deux courbes convenablement choisies, et en particulier d'une telle courbe avec une droite.

Je ne donnerai ici d'exemple que pour ce dernier cas, d'autant que l'étude de l'intersection de deux courbes suppose quelques propositions qui ne seront établies que dans le Chapitre suivant.

Considérons l'équation $\operatorname{tang} x - x = 0$. Je commence par recueillir les renseignements qui résultent de la considération du premier membre de cette équation et de sa dérivée.

Le premier membre est une fonction continue de x à l'intérieur d'un intervalle limité par deux multiples impairs, consécutifs, de $\frac{\pi}{2}$; sa dérivée $\operatorname{tang}^2 x$ est toujours positive, la fonction $\operatorname{tang} x - x$ est croissante; elle ne peut s'annuler qu'une fois dans chacun des intervalles considérés : considérons l'intervalle $\left[(2n-1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon, (2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, où ε est un nombre positif très petit. En substituant dans l'expression $\operatorname{tang} x - x$ les deux bornes de l'intervalle, on trouve

$$\operatorname{tang}\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) - (2n-1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{-1}{\operatorname{tang}\varepsilon} - (2n-1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - (2n+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon = \frac{1}{\operatorname{tang}\varepsilon} - (2\pi+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon;$$

le premier résultat est négatif, le second est positif; il y a une racine et une seule dans l'intervalle considéré, les racines sont séparées. On peut aller un peu plus loin, en substituant le nombre $n\pi$, intermédiaire entre les deux bornes de l'intervalle, le résultat est $-n\pi$.

Supposons $n > 0$; il y a une racine entre π et $\frac{3\pi}{2}$, une entre 2π et $5\frac{\pi}{2}$, ... entre $n\pi$ et $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; on obtient ainsi les racines positives; puisque la fonction $\operatorname{tang} x - x$ est impaire, à chaque racine positive correspond une racine symétrique. Enfin la racine évidente 0 est la seule qui soit contenue dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Au lieu de chercher à résoudre l'équation $\operatorname{tang} x - x = 0$, on peut chercher l'intersection de la courbe qui a pour équation $y = \operatorname{tang} x$, et de la droite qui a pour équation $y = x$.

De cette façon, non seulement les résultats précédents apparaîtront clairement, mais on va trouver d'autres résultats importants concernant les racines, et, si l'on se donne la peine de construire la figure avec quelque soin, sur du papier quadrillé, on pourra obtenir ces racines avec une certaine approximation.

La droite dont l'équation est $y = x$ n'est autre chose que la bissectrice de l'angle des coordonnées positives.

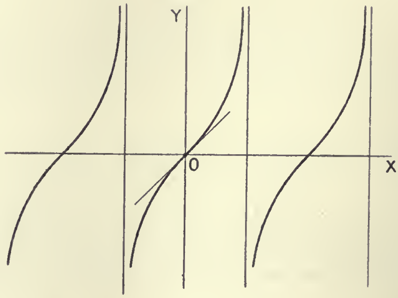
Quant à la courbe dont l'équation est $y = \operatorname{tang} x$, on observe d'abord qu'elle est symétrique par rapport à l'origine, parce que la fonction $\operatorname{tang} x$ est impaire; si l'on a construit la courbe pour l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on en déduira par symétrie la portion de courbe qui correspond à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

La formule $\operatorname{tang}(\pi + x) = \operatorname{tang} x$ montre que les ordonnées de la courbe sont les mêmes pour les points d'abscisse x et $\pi + x$; le point de coordonnées $\pi + x$, $\operatorname{tang}(\pi + x)$ se déduit du point de coordonnées x, $\operatorname{tang} x$ par une translation parallèle à l'axe des x, égale à π; quand on a construit la courbe pour l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, en faisant subir la translation précédemment définie à cette courbe, on obtient la portion de courbe qui correspond à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; par une nouvelle translation, la portion de courbe qui correspond à l'intervalle $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, ...

De même, du côté des x négatifs. La courbe totale se compose d'une infinité de branches égales à celle qu'on a commencé par construire, pour l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Cette première branche sera d'abord construite avec soin, puis répétée à droite et à gauche. Pour la construction, il sera commode de se servir d'une table de tangentes naturelles. Toutes les parallèles à l'axe des y dont la distance à cet axe sont des multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ sont des asymptotes.

Pour x très petit on a $y = x + \frac{x^3}{3} + \ldots$; l'origine est un point d'inflexion; pour x positif la courbe est au-dessus de sa tangente, dont l'équation est $y = x$.

Fig. 81.



Il suffit de jeter les yeux sur la figure pour apercevoir la disposition de racines positives de l'équation $\operatorname{tang} x - x = 0$, on voit de suite qu'elles sont respectivement plus petites que $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots$ et que, si n est un peu grand, il doit y avoir une racine très voisine de $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. Si l'on représente cette racine par $(2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε étant positif et petit, on doit avoir

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \varepsilon} = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Si n est très grand, ε sera très petit, on aura à très peu près

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}},$$

et aussi, $\varepsilon = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$, puisque l'arc est alors très voisin de la tangente. Je me borne à indiquer ces résultats, qu'il y aurait lieu d'étudier d'un peu plus près : le lecteur reconnaîtra très aisément que l'on a $\varepsilon < \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$.

§ 2. — SÉPARATION DES RACINES.

251. Les exemples précédents ont suffisamment montré au lecteur comment l'étude de la variation du premier membre d'une équation permettait de séparer les racines de cette équation. Il convient de nous arrêter un peu sur ce dernier problème.

Il pourrait être regardé comme à peu près résolu, si l'on savait résoudre le problème suivant :

Sachant que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), trouver le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ (¹), *comprises dans cet intervalle.*

Ce problème, qui n'a d'ailleurs de sens que si le nombre de racines comprises entre a et b est fini, n'est pas susceptible d'une solution générale; mais tous les renseignements qui fournissent une réponse même partielle à la question posée sont précieux.

On a déjà vu au Chapitre XII que l'on pouvait tirer quelque parti du signe des quantités $f(a)$, $f(b)$.

Je supposerai tracé le trait de courbe qui représente la fonction $y = f(x)$ dans l'intervalle (a, b); je désignerai ce trait de courbe comme l'arc AB, A et B étant les points dont les coordonnées sont a et $f(a)$, b et $f(b)$; je suppose $a < b$.

Si les deux nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, le trait de courbe AB *traverse l'axe des x un nombre impair de fois* (une fois au moins) : Si chaque racine de l'équation $f(x) = 0$ admet un ordre de multiplicité au sens du nº 249, on peut dire qu'il y a entre a et b un nombre impair de racines, en comptant chaque racine distincte pour autant de racines qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité : en effet, on a vu que, pour une racine simple ou d'ordre de multiplicité impair, le trait de courbe traversait l'axe des x; qu'il ne traversait pas cet axe pour une racine multiple d'ordre pair.

Si les deux nombres $f(a)$, $f(b)$ sont de mêmes signes, le trait

(¹) Au lieu de dire *racine de l'équation* $f(x) = 0$, il m'arrivera fréquemment de dire *racine de* $f(x)$: cette façon de parler a été employée dès le Chapitre II, quand il s'agissait de polynomes.

de courbe AB *ne traverse pas l'axe des x ou le traverse un nombre pair de fois.* Si l'on est encore dans le cas où chaque racine admet un ordre de multiplicité, on peut dire qu'il y a entre a et b un nombre nul ou pair de racines, en comptant chaque racine distincte pour autant de racines qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Il est à peine utile de dire que les propositions précédentes s'appliquent aux polynomes, puisque, alors, l'ordre de multiplicité d'une racine se définit immédiatement.

La formule de décomposition d'un polynome en facteurs réels du premier ou du second degré (n° **114**) fournit d'ailleurs, dans ce cas, une démonstration immédiate des propositions précédentes.

Si l'on désigne en effet par $x_1, x_2, \ldots, x_r$ les racines réelles du polynome $f(x)$, chacune étant répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité, on peut poser

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_r)\,\varphi(x)$$

en désignant par $\varphi(x)$ le produit des trinomes du second degré (à coefficients réels) dont les racines sont les racines imaginaires de $f(x)$, multiplié par le coefficient de la plus haute puissance de x dans $f(x)$. Quel que soit x, $\varphi(x)$ a le même signe que ce coefficient : on déduit de là

$$f(a) = (a - x_1)(a - x_2)\ldots(a - x_r)\,\varphi(a),$$
$$f(b) = (b - x_1)(b - x_2)\ldots(b - x_r)\,\varphi(b),$$

puis

$$f(a)f(b) = [(x_1 - a)(x_1 - b)][(x_2 - a)(x_2 - b)]\ldots[(x_r - a)(x_r - b)] \times \varphi(a)\,\varphi(b).$$

Le produit $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ est essentiellement positif; chacun des facteurs entre crochets est négatif si la racine correspondante est comprise entre a et b, positif dans le cas contraire; d'où la conclusion :

Le produit $f(a)f(b)$ est négatif s'il y a un nombre impair de racines de $f(x)$ comprises entre a et b; il est positif s'il y en a un nombre nul ou pair.

Par exemple, en substituant les nombres $-\infty$, o, $+\infty$ dans un polynome, à coefficients réels, de degré n, pour lequel le coefficient de x^n est positif, on arrive aux conclusions suivantes :

Si n est pair et si le terme constant est négatif, le polynome a au moins une racine négative et au moins une racine positive; le nombre de ses racines négatives est impair, ainsi que le nombre de ses racines positives.

Si n est pair et si le terme constant est positif, le polynome a un nombre pair, ou nul, de racines positives et de racines négatives.

Si n est impair, le polynome a un nombre impair de racines réelles, de signes contraires au signe de son terme constant.

Considérons encore l'équation

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = m$$

où $x^3 - 3x + m(1 - 3x^2) = 0$; il est assez naturel d'essayer la substitution, à la place de x, des nombres $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ qui annulent le coefficient de m, et donneront des résultats purement numériques. En substituant les nombres

$$-\infty, \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad +\infty$$

on trouve les signes

$$- \quad + \quad - \quad +;$$

l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles et distinctes, quel que soit m.

Il est rare qu'on puisse arriver à un résultat précis, comme dans l'exemple précédent. Toutefois, en intercalant au besoin, entre a_1 et b, des nombres suffisamment rapprochés, que l'on prendra le plus souvent en progression géométrique, en calculant les valeurs correspondantes de $f(x)$, en figurant sur du papier quadrillé, à une échelle convenable, les points correspondants de l'arc AB, dont on a ainsi les abscisses et les ordonnées, on arrivera d'ordinaire à tracer cet arc avec une exactitude suffisante pour reconnaître à peu près sûrement s'il coupe ou ne coupe pas l'axe des x, pour reconnaître aussi la position approximative des points d'intersection. Il pourra toutefois se présenter des difficultés provenant, par exemple, de ce que l'arc AB s'approche beaucoup de l'axe des x sans l'atteindre, de ce qu'il le rencontre en deux points très rapprochés, etc.

252. Les renseignements que fournissent les signes des quantités $f(a)$ et $f(b)$ sont au contraire très précis lorsque l'on sait que la fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), va toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, lorsque x croît de a à b. Ainsi qu'on a déjà eu l'occasion de le dire plusieurs fois, il y a une racine dans l'intervalle (a, b), et une seule, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire ; il n'y en a pas si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe. Si l'une des quantités $f(a)$, $f(b)$ était nulle, l'équation $f(x) = 0$ n'aurait pas, dans l'intervalle (a, b) d'autre racine que celle des bornes de l'intervalle qui annule $f(x)$.

Dans ce cas, lorsqu'on a séparé une racine x_0, comprise par exemple dans l'intervalle (a, b), on peut resserrer autant qu'on le veut cet intervalle, approcher autant qu'on le veut de x_0 ; supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $f(a) < 0$, $f(b) > 0$; on prendra un nombre a_1, compris entre a et b, et l'on cherchera le signe de $f(a_1)$; x_0 est compris entre a et a_1 ou entre a_1 et b suivant que $f(a_1)$ est positif ou négatif ; on continuera ainsi aussi longtemps qu'on voudra.

Par exemple la fonction $y = 2x - \sin x - 1$ a pour dérivée $2 - \cos x$; cette dérivée est toujours positive ; la fonction continue $2x - \sin x - 1$ ne peut s'annuler qu'une fois ; elle est négative pour $x = 0$, positive pour $x = \frac{\pi}{2}$, la racine est *séparée*. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, y est négatif, la racine est comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$; si l'on veut aller plus loin, on utilisera une table de valeurs *naturelles* du sinus [1]

On a par exemple pour

$$x = 0{,}60\,\frac{\pi}{2}, \qquad \sin x = 0{,}8090, \qquad y = 0{,}076,$$

$$x = 0{,}55\,\frac{\pi}{2}, \qquad \sin x = 0{,}7604, \qquad y = -0{,}032,$$

$$x = 0{,}56\,\frac{\pi}{2}, \qquad \sin x = 0{,}7705, \qquad y = -0{,}011,$$

$$x = 0{,}57\,\frac{\pi}{2}, \qquad \sin x = 0{,}7908, \qquad y = 0{,}010;$$

---

[1] On en trouve dans les *Nouvelles Tables* du service Géographique (Gauthier-Villars), dans le *Recueil de Tables et de Formules numériques* de J. Houël (*ibid.*).

la racine cherchée est comprise entre $0,56\frac{\pi}{2} = 0,879, \ldots$ et $0,57\frac{\pi}{2} = 0,893 \ldots$; la valeur 0,9 est approchée par excès, à un demi-dixième près.

On a montré au n° 250 que l'équation $\operatorname{tang} x - x = 0$ avait une racine, et une seule, dans l'intervalle $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, où la fonction $\operatorname{tang} x - x$ est croissante; afin d'avoir affaire à des arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ posons $x = \frac{3\pi}{2} - x'$; le problème est ramené à la recherche de la racine de l'équation

$$\cot x' + x' - \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \left(\frac{3\pi}{2} = 4,712389\right)$$

qui est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On s'aidera d'une table de tangentes naturelles; pour 13 grades, la cotangente est égale à 4,8288; elle est plus grande que $\frac{3\pi}{2}$; la racine cherchée est sûrement plus grande que $0,13\frac{\pi}{2}$; pour $x' = 0,14\frac{\pi}{2}$ on trouve

$$\cot x' + x' - \frac{3\pi}{2} = -0,0198;$$

la racine est inférieure à $0,14\frac{\pi}{2}$; mais la petitesse du résultat qu'on vient de trouver permet de supposer qu'elle est voisine de $0,14\frac{\pi}{2}$; en effet on trouve un résultat positif en substituant $0,139\frac{\pi}{2}$. La racine de l'équation en x' est donc comprise entre $0,139\frac{\pi}{2}$ et $0,140\frac{\pi}{2}$. La racine de l'équation $\operatorname{tang} x - x = 0$ est voisine de 4,5. On la calculera plus exactement un peu plus loin.

On reconnaît habituellement que la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante dans l'intervalle (a, b), par ce fait que, dans cet intervalle, la dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe; si, en particulier a, b sont deux racines consécutives de l'équation $f'(x) = 0$, c'est-à-dire deux racines qui ne comprennent aucune autre racine de cette équation, et si la fonction $f'(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), on est certain que cette fonction garde le même signe lorsque x varie entre a et b, puisque, autrement, la fonction $f''(x)$ s'annulerait entre a et b; par conséquent, lorsque x varie de a à b, la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante; elle n'admettra pas de racines entre a et b si $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe, elle admettra une racine, et une seule, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires : cette racine est alors séparée [1].

De même, si b est la plus grande racine de $f'(x)$, et si la fonction $f'(x)$ est continue pour $x > b$, il est certain que $f'(x)$ garde le même signe pour $x > b$ et que l'équation $f(x) = 0$ ne pourra avoir qu'une seule racine pour $x > b$; cette racine n'existera pas si $f(a)$ et $f(+\infty)$ sont de mêmes signes, elle existera si $f(a)$ et $f(+\infty)$ sont de signes contraires; dans ce cas, on peut la regarder encore comme séparée. Des considérations toutes pareilles s'appliquent aux valeurs de x inférieures à la plus petite des racines de la dérivée, quand cette dérivée est continue pour ces valeurs.

De là la règle suivante, qui est d'un usage continuel :

Soit (A, B) *un intervalle dans lequel la dérivée* $f'(x)$ *reste continue; je suppose* $A < B$. *Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *les racines de cette dérivée comprises entre* A, B *et rangées par ordre de grandeur croissante. On considère la suite* [2].

$$(1) \qquad A, \quad a_1, a_2, \ldots, a_r, \quad B;$$

dans chacun des intervalles $(A, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_r, B)$ *formés par deux termes consécutifs de cette suite, il ne peut y avoir qu'une racine de l'équation* $f(x) = 0$. On détermine les signes des termes de la suite

$$(2) \qquad f(A), \quad f(a_1), \quad f(a_2), \quad \ldots, \quad f(a_r), \quad f(B).$$

Si deux termes consécutifs de cette dernière suite sont de mêmes signes, il n'y a pas, dans l'intervalle correspondant, de racine de

---

(1) Le raisonnement peut être présenté d'une autre façon, qui montre que la conclusion implique seulement l'*existence* de la dérivée $f'(x)$ entre les deux racines consécutives a, b de cette dérivée et non sa *continuité*.

S'il y avait entre a, b *deux* racines α, β de la fonction $f(x)$, il y aurait une racine de $f'(x)$ entre α, β (n° 215) ; a, b ne seraient pas deux racines consécutives de $f'(x)$. Entre deux racines consécutives de la dérivée $f'(x)$, il ne peut donc y avoir qu'une seule racine de la proposée $f(x)$.

Il est à peine utile de dire que, en admettant l'*existence* de la dérivée dans l'intervalle (a, b), on admet par cela même la continuité de la fonction $f(x)$ dans cet intervalle. Si la fonction $f(x)$ n'est pas continue dans cet intervalle, la proposition n'est pas applicable.

(2) On lui donne souvent le nom de *suite de Rolle* relative à l'intervalle (A, B).

l'équation $f(x) = 0$; il y en a une, au contraire, si ces deux termes sont de signes contraires.

A cet énoncé, je joindrai les remarques suivantes :

Il peut se faire que l'un des termes de la suite (2) soit nul; on a alors déterminé une racine de l'équation $f(x) = 0$. Si cela arrive pour d'autres termes que pour les termes extrêmes, la racine considérée est, en général, multiple (nº 249). On aura alors à déterminer son ordre de multiplicité. D'ailleurs, dans les intervalles partiels que borne le terme considéré, il n'y a évidemment pas de racine de l'équation $f(x) = 0$. en vertu du raisonnement général.

Les racines $a_1, a_2, \ldots, a_r$ de la dérivée $f'(x)$ n'interviennent dans le raisonnement précédent qu'en ce que, pour ces racines, la dérivée changeant de signe, le sens de la variation de la fonction $f(x)$ change aussi. Si donc, en résolvant l'équation $f'(x) = 0$, on aperçoit quelque racine pour laquelle la fonction $f'(x)$ s'annule sans changer de signe, par exemple une racine d'ordre de multiplicité pair [pour $f'(x)$], on n'a qu'à supprimer cette racine de la suite de Rolle, après avoir constaté toutefois qu'elle n'annulait pas $f(x)$. Si, par exemple, a_2 est une racine double pour $f'(x)$, la fonction $f'(x)$ garde le même signe quand x croît de a_1 à a_3, la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_1, a_3) va toujours en croissant, ou toujours en décroissant; elle ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Si la dérivée $f'(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x, on remplacera dans les raisonnements précédents A et B par $-\infty, +\infty$.

Considérons l'équation

$$f(x) = (1 - \cos x)\tang\alpha - x + \sin x = 0,$$

où α est un arc donné compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; $f(x)$ est une fonction continue de x, quel que soit x, ainsi que sa dérivée

$$f'(x) = \sin x \tang\alpha - 1 + \cos x = 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\tang\alpha - \sin\frac{x}{2}\right);$$

les racines de l'équation $f'(x) = 0$ sont données par les formules

$$x = 2m\pi, \qquad x = 2n\pi + 2\alpha,$$

où m, n sont des nombres entiers quelconques: $2m\pi$, $2m\pi + 2\alpha$, $2(m+1)\pi$

constituent trois racines consécutives; on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} f(2m\pi) &= -2m\pi, \\ f(2n\pi+2\alpha) &= (1-\cos 2\alpha)\tang\alpha - 2\alpha - 2n\pi + \sin 2\alpha \\ &= 2(\tang\alpha - \alpha - n\pi). \end{aligned}$$

Puisque l'on a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\tang\alpha - \alpha$ est positif; il en résulte que, si m et n sont négatifs, $f(2m\pi)$ et $f(2n\pi+2\alpha)$ sont positifs. Il est aisé d'en conclure que l'équation $f(x) = 0$, qui admet la racine (double) $x = 0$, n'a pas de racines négatives.

Occupons-nous maintenant des racines positives : entre deux termes consécutifs de la suite

$$0, \quad 2\alpha, \quad 2\pi, \quad 2\pi+2\alpha, \quad 4\pi, \quad 4\pi+2\alpha, \quad \ldots,$$

il y a une racine, ou il n'y a pas de racines, suivant que ces deux termes donnent, par la substitution, des résultats de signes contraires, ou de mêmes signes; les nombres 2π, 4π, ... donnent des résultats négatifs; soit ν le plus petit nombre entier tel que l'on ait

$$\nu\pi \geqq \tang\alpha - \alpha,$$

et supposons d'abord $\nu > 1$, les nombres

$$2\alpha, \quad 2\pi+2\alpha, \quad \ldots, \quad 2(\nu-1)\pi+2\alpha$$

donneront des résultats de substitution positifs : l'équation $f(x) = 0$ n'admettra pas de racine autre que 0 dans l'intervalle $(0, 2\alpha)$; elle en admettra une et une seule dans chacun des intervalles formés par les termes de la suite

$$2\alpha, \quad 2\pi, \quad 2\pi+2\alpha, \quad \ldots, \quad 2(\nu-1)\pi+2\alpha, \quad 2\nu\pi;$$

elle n'en admettra pas de supérieure à $2\nu\pi$, sauf dans le cas où l'on aurait $\nu\pi = \tang\alpha - \alpha$, auquel cas $2\nu\pi + 2\alpha$ serait une racine (double) de l'équation $f(x) = 0$. L'équation admet $2\nu - 1$ racines simples que l'on a séparées, la racine double 0, et dans le cas particulier où $\nu\pi = \tang\alpha - \alpha$, la racine double $2\nu\pi + 2\alpha$: le nombre ν est très grand quand α est voisin de $\frac{\pi}{2}$.

Si l'on a $\nu = 1$, il y a une racine simple comprise entre 2α et 2π, il n'y en aura pas de plus grande, sauf dans le cas où l'on aurait $\tang\alpha - \alpha = \pi$, auquel cas $2\pi + 2\alpha$ serait une racine double.

Considérons encore l'équation

$$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - m = 0.$$

On a

$$\tfrac{1}{5}f'(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^2+1)^2 - 20x^2;$$

les racines de l'équation $f'(x) = 0$ sont les racines des équations

$$4x^2+1+2x\sqrt{5}=0, \qquad 4x^2+1-2x\sqrt{5}=0;$$

en les rangeant par ordre de grandeur on obtient

$$a_1=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}, \qquad a_2=\frac{-\sqrt{5}+1}{4}, \qquad a_3=\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad a_4=\frac{\sqrt{5}+1}{1};$$

on a à les substituer dans $f(x)$; le calcul se simplifiera en substituant a_1 et a_2 d'une part, a_3 et a_4, d'autre part, dans les restes $-4x-m-\sqrt{5}$ et $-4x-m+\sqrt{5}$ de la division de $f(x)$ par $4x^2+2x\sqrt{5}+1$ et par $4x^2-2x\sqrt{5}+1$;

La *suite de Rolle* est formée par les nombres

$$(1) \qquad -\infty, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad +\infty.$$

On a écrit ci-dessous les résultats de la substitution de ces nombres dans $f(x)$:

$$(2) \qquad -\infty, \quad 1-m, \quad -1-m, \quad 1-m, \quad -1-m, \quad +\infty.$$

Supposons que l'on ait $-1<m<1$; les signes des termes de la suite (2) seront

$$- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +.$$

L'équation $f(x)=0$ a cinq racines réelles (nécessairement distinctes).

On reconnaît sans peine que, si m est plus grand que 1, il n'y a qu'une racine, comprise entre a_4 et $+\infty$; que si m est plus petit que -1, il n'y a qu'une racine, comprise entre $-\infty$ et a_1.

Enfin, si l'on avait $m=1$, a_1 et a_3 seraient des racines doubles du polynome $f(x)$, qui admettrait en outre la racine simple $x=1$; si l'on avait $m=-1$, a_2 et a_4 seraient des racines doubles de $f(x)$, qui admettrait en outre la racine simple $x=-1$.

253. Théorème de Rolle. — La proposition fondamentale, en vertu de laquelle la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ dont a, b sont deux racines s'annule pour une valeur de x comprise entre a et b, doit être complétée par quelques remarques, qui se rattachent au théorème que voici, important en lui-même.

Soit $f(x)$ une fonction de x admettant dans l'intervalle (p, q) une dérivée continue $f'(x)$. Je suppose que, dans cet intervalle, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ ne puissent s'annuler qu'un nombre fini de fois, en sorte que l'intervalle (p, q) puisse être subdivisé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que, à l'intérieur de chacun d'eux, l'une ou l'autre des fonctions $f(x)$, $f'(x)$ garde un signe constant. Soit a une racine de $f(x)$ appartenant à l'intervalle (p, q).

Les deux fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ sont de signes contraires pour les valeurs de x un peu plus petites que la racine a de $f(x)$; elles sont de mêmes signes pour les valeurs de x un peu plus grandes que cette racine.

La vérité de cette proposition apparaît aisément en se représentant le trait de courbe qui figure $f(x)$ dans l'intervalle (p, q) : ce trait de courbe a un point, d'abscisse a, sur l'axe des x; il peut d'ailleurs soit traverser l'axe des x en ce point, soit rester, aux environs de ce point, au-dessus ou au-dessous de l'axe.

Supposons, par exemple, qu'il le traverse de bas en haut quand x croît; la fonction $f(x)$, négative pour x un peu plus petit que a, est nulle pour $x=a$; elle croît quand on s'approche de a, par valeurs plus petites que a; la dérivée $f'(x)$ est donc alors positive; quand on a dépassé la valeur a, la fonction devient positive; elle était nulle pour $x=a$, elle est croissante; la dérivée reste positive. La proposition est vérifiée dans ce cas; la vérification est la même dans tous les cas.

Au reste, la démonstration rigoureuse résulte immédiatement de la formule des accroissements finis, appliquée aux deux nombres voisins a et $a+h$; cette formule peut s'écrire $f(a+h) = hf'(a+\theta h)$, puisque $f(a)$ est nul : elle montre que $f(a+h)$ et $f'(a+\theta h)$ sont de signes contraires ou de mêmes signes suivant que h est positif ou négatif; or le nombre $a+\theta h$, puisque θ est positif et plus petit que 1, peut être supposé aussi voisin de a qu'on le veut; il est plus petit que a, ou plus grand, suivant que h est négatif ou positif; il y a donc des valeurs de x, plus petites que a, aussi voisines de a qu'on le veut, pour lesquelles $f(x)$ et $f'(x)$ sont de signes contraires; il y a de même des valeurs de x, plus grandes que a, aussi voisines de a qu'on le veut, pour lesquelles $f(x)$ et $f'(x)$ sont de mêmes signes : si, dans l'intervalle $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, où ε est un nombre positif aussi petit qu'on le veut, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ ne s'annulent pas pour une autre valeur que a, en sorte que chacune conserve son signe, soit à l'intérieur de l'intervalle $(a-\varepsilon, a)$, soit à l'intérieur de l'intervalle $(a, a+\varepsilon)$, il est clair que les deux fonctions auront des signes contraires dans le premier intervalle, et les mêmes signes dans le second. C'est ce qu'il fallait établir. On va en conclure la proposition suivante :

Soient a, b deux racines consécutives de $f(x)$: on suppose que dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ reste continue ainsi que sa dérivée $f'(x)$; puisque, à l'intérieur de cet intervalle, la fonction continue $f(x)$ ne s'annule pas, elle conserve son signe; je suppose en outre que la fonction $f'(x)$, dans cet intervalle, ne puisse s'annuler qu'un nombre fini de fois.

Dans ces conditions on peut affirmer que, lorsque x croît de a à b, la dérivée $f'(x)$ change de signe un nombre impair de fois.

Supposons en effet que le nombre positif ε soit assez petit pour que, à l'intérieur des intervalles $(a, a+\varepsilon)$, $(b-\varepsilon, b)$, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$ ne s'annulent pas; elles sont de mêmes signes dans le premier, de signes contraires dans le second; la fonction $f(x)$ garde le même signe dans tout l'intervalle (a, b); la fonction $f'(x)$ a donc changé de signe quand on passe de $a+\varepsilon$ à $b-\varepsilon$, elle a changé de signe un nombre impair de fois; puisqu'elle garde le même signe à l'intérieur des intervalles $(a, a+\varepsilon)$, $(b-\varepsilon, b)$, elle change de signe un nombre impair de fois quand x croît de a à b. Si l'on peut attribuer un ordre de multiplicité à chacune des racines de $f'(x)$ contenues à l'*intérieur* de l'intervalle (a, b), on peut dire que le nombre de ces racines est impair, en comptant chacune des racines distinctes pour autant de racines qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité (1).

Cette proposition, avec le sens précis qu'on vient de lui donner, s'applique en particulier quand $f(x)$, $f'(x)$ sont des polynomes en x.

Entre deux racines consécutives a, b d'un polynome, il y a un nombre impair de racines de sa dérivée.

Si le polynome $f(x)$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de sa dérivée $f'(x)$.

Soit n, en effet, le degré de $f(x)$, $f'(x)$ sera de degré $n-1$. Supposons d'abord que les n racines de $f(x)$, qui, par hypothèse,

(1) Lorsque la fonction $f(x)$ s'annule pour $x=-\infty$, ou pour $x=+\infty$, la proposition précédente et sa démonstration s'étendent aisément aux intervalles $(-\infty, \alpha)$, $(\beta, +\infty)$ en désignant par α et β la plus petite et la plus grande des racines de $f(x)$. On suppose bien entendu que, pour toutes les valeurs de x supérieures à β, par exemple, la dérivée $f'(x)$ soit continue. On reconnait alors sans peine que, pour les grandes valeurs positives de x, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de signes contraires, si $f(x)$ tend vers o quand x tend vers $+\infty$. Le raisonnement s'achève ensuite de la même façon.

sont réelles, soient toutes simples, et désignons-les, en les rangeant par ordre de grandeur, par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

La suite qu'on vient d'écrire comporte $n-1$ intervalles; dans chacun de ses intervalles, il y a une racine de $f'(x)$.

Ce dernier polynome a donc ses $n-1$ racines réelles et distinctes. Entre deux racines consécutives de l'un des polynomes $f(x), f'(x)$ il y a une racine, et une seule, de l'autre.

Considérons maintenant le cas où l'équation $f(x)=0$, dont on suppose toujours que les n racines soient réelles, admet des racines multiples. Si α_1 racines sont égales à a_1 et si, en conservant les notations précédentes, on suppose $a_1 = a_2 = \ldots = a_{\alpha_1}$, $\alpha_1 - 1$ intervalles, de ce fait, disparaissent de la suite précédente; mais, d'un autre côté, l'équation dérivée $f'(x)=0$ admet $\alpha_1 - 1$ racines égales à a_1; on voit que les conclusions relatives au nombre de racines réelles de la dérivée ne sont pas changées; le polynome $f'(x)$, en dehors des racines qui lui sont communes avec $f(x)$ et qui sont multiples pour $f(x)$, admet autant de racines, forcément simples, qu'il y a d'intervalles dans la suite formée par les racines distinctes de $f(x)$, c'est-à-dire $p-1$, si $f(x)$ admet p racines distinctes.

Il est à peine utile de dire que les polynomes $f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ ont tous leurs racines réelles.

Réciproquement, si l'équation $f'(x)=0$ n'a pas toutes ses racines réelles, ou si elle a des racines multiples qui ne sont pas racines de $f(x)$, l'équation $f(x)=0$ a forcément des racines imaginaires. Le lecteur pourra retrouver et préciser ce résultat, en comptant le nombre d'intervalles formés par la suite des racines réelles distinctes de $f'(x)$ précédées et suivies de $-\infty$ et de $+\infty$ (suite de Rolle), intervalles dans chacun desquels il ne peut exister qu'une racine réelle de $f(x)$.

§ 3. — CALCUL APPROCHÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

234. Une équation numérique $f(x)=0$ étant donnée, on devra d'abord séparer ses racines, c'est-à-dire déterminer autant d'intervalles (p, q) qu'il y a de racines, chacun d'eux contenant une racine et une seule. Les bornes d'un intervalle peuvent être regardées comme des valeurs approchées de la racine correspondante, mais cette qualification ne convient que quand ces bornes diffèrent peu.

On a vu plus haut le rôle que tiennent dans cette séparation l'étude de la dérivée (théorème de Rolle) et la représentation graphique.

Celle-ci, quand elle est faite avec soin, permet d'obtenir des valeurs vraiment approchées des racines.

On se servira pour cela de papier quadrillé, de papier millimétrique par exemple; les axes de coordonnées seront placés suivant des lignes (perpendiculaires) du quadrillage, et l'unité de longueur sera choisie dans un rapport simple avec les dimensions des petits carrés, de manière à pouvoir placer de suite le point dont on donne les coordonnées et à lire immédiatement les coordonnées d'un point du dessin.

La représentation graphique, si l'on veut en tirer parti pour le calcul approché des racines, devra être faite avec grand soin dans le voisinage de ces racines, et il conviendra, dans certaines régions, de déterminer un bon nombre de points de la courbe qui représente la fonction. Il est naturel de prendre, pour abscisses de ces points, des nombres en progression arithmétique, des nombres entiers consécutifs, des nombres entiers de dixièmes, etc. Lors même qu'on ne fait pas de représentation graphique, ces calculs n'en sont pas moins utiles pour séparer les racines [1], et pour rétrécir chacun des inter-

---

[1] Ils donnent lieu à une théorie intéressante, celle des différences, que je ne puis développer. Je me borne à quelques définitions et à quelques remarques immédiates.

Considérons une suite de nombres u, rangés dans une colonne verticale (comme les logarithmes des nombres entiers). Les différences entre les termes consécutifs forment une autre colonne, la colonne des différences premières Δu; celle-ci engendre de même la colonne des différences secondes $\Delta^2 u$, etc. Chaque colonne se déduit de la précédente par des soustractions. Inversement, connaissant un terme d'une colonne, tous les termes de cette colonne se déduisent de la suivante par des additions.

Supposons que les nombres u de la première colonne soient les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour des valeurs de la variable en progression arithmétique, ..., a, $a+h$, $a+2h$, ... Les différences secondes pourront être regardées comme les différences premières, pour les mêmes valeurs de la variable, de la fonction $f(x+h)-f(x)$, etc.... La formule des accroissements finis suffit à faire comprendre comment les différences premières sont, en général, petites par rapport aux valeurs de la fonction, lorsque la raison h de la progression arithmétique est petite, comment les différences secondes sont petites par rapport aux différences premières, etc.

Si les différences secondes étaient nulles, les différences premières seraient constantes. Le lecteur s'explique comment, dans les Tables numériques qu'il pratique, les différences premières sont à peu près constantes dans des intervalles relativement assez étendus, et doit comprendre que, dans des tables plus étendues, il y a lieu d'introduire les différences secondes. Remarquons encore que, si la fonction $f(x)$

valles qui contiennent une racine et parvenir à des valeurs qu'on puisse regarder comme étant vraiment approchées.

255. **Méthode d'approximation de Newton.** — Soit $f(x) = 0$ une équation numérique donnée, soit, en supposant $p < q$, un intervalle (p, q) qui comprenne une racine α de $f(x)$ et une seule.

Je suppose que dans l'intervalle (p, q) la fonction $f(x)$ soit continue, ainsi que ses deux premières dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$; je suppose enfin que dans l'intervalle (p, q) la dérivée $f(x)$ ne s'annule pas, en sorte que la racine α est simple [1] et que, dans l'intervalle (p, q), la fonction $f(x)$ varie toujours dans le même sens : $f(p)$ et $f(q)$ sont de signes contraires; on a vu, plus haut, comment, en intercalant des nombres entre p et q, et en examinant le signe des résultats de la substitution de ces nombres dans $f(x)$, on peut s'approcher autant qu'on veut de α; toutefois, ce procédé, qui permet de resserrer autant qu'on veut l'intervalle (p, q), est assez long, et, lorsque, en l'appliquant, on est parvenu à une valeur a que l'on juge suffisamment approchée de α, il y a lieu d'employer, pour avoir des valeurs encore plus approchées, un autre procédé plus rapide.

La recherche d'une racine de $f(x)$ revient à la recherche des points d'intersection de l'axe des x avec la courbe qui représente $f(x)$. Dire qu'on connaît une valeur approchée d'une racine revient à dire qu'on connaît les coordonnées a et $f(a)$, d'un point A de cette courbe, voisin d'un point d'intersection avec l'axe des x. La courbe aux environs de A se confond presque avec sa tangente, dont l'équation est

$$y - f(a) = (x - a) f'(a).$$

---

est un polynome de degré n, la fonction $f(x+h) - f(x)$ sera un polynome du degré $n-1$, la différence suivante sera du degré $n-2$, ..., les différences $n^{\text{ièmes}}$ seront rigoureusement constantes; d'où un moyen évident de calculer par de simples additions les valeurs que prend un polynome pour une suite de valeurs de la variable en progression arithmétique; de là aussi, lorsque l'on a constaté que les différences $n^{\text{ièmes}}$ d'une fonction peuvent, à une certaine approximation, être regardées comme constantes, dans un certain intervalle, le moyen de construire un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré qui, dans cet intervalle, représente approximativement la fonction.

[1] La méthode que je vais exposer s'appliquerait si α était une racine multiple (n° 249) et si $f'(x)$ ne s'annulait pas dans l'intervalle (p, q) pour d'autres valeurs de x que α. Toutefois, certains points de l'exposition devraient alors être modifiés. Je laisse ce cas de côté.

Il est donc naturel de substituer, au point d'abscisse α où la courbe coupe l'axe des x, le point d'abscisse

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

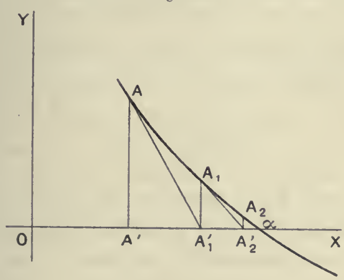
où cet axe est rencontré par la tangente en A; a_1 sera, en général, une valeur plus approchée que a; les nombres

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \qquad a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}, \qquad \ldots$$

approcheront de plus en plus, et très rapidement, de la racine α, sous certaines conditions qui seront précisées tout à l'heure.

Il convient d'observer que, en vertu des hypothèses, la quantité $f'(a)$ est certainement différente de zéro en sorte que l'expression de a_1 a un sens; les quantités $f'(a_1)$, $f'(a_2)$, ... seront aussi différentes de zéro, si a_1, a_2, ... appartiennent à l'intervalle (p, q). Au cas où l'un des nombres a_1, a_2, ... tomberait en dehors de cet intervalle, on serait prévenu, par là même, que la méthode ne s'applique pas et que l'on est parti d'une valeur a insuffisamment approchée.

Fig. 82.



On a figuré ci-dessus une courbe rencontrant l'axe des x en α et le point A, d'abscisse a; la tangente en A rencontre l'axe au point A'_1 d'abscisse a_1; la tangente au point A_1, de même abscisse a_1, rencontre l'axe au point A'_2 d'abscisse a_2, etc. On voit assez, sur la figure, comment les points A', A'_1, A'_2, ... s'approchent du point d'intersection de l'axe et de la courbe.

Les mêmes résultats apparaissent analytiquement; soit $a+h=\alpha$ la racine exacte; on peut écrire, en désignant par θ un nombre compris entre zéro et 1,

$$0=f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a+\theta h).$$

La méthode de Newton consiste à supprimer dans le dernier membre le terme en h^2, parce que, h étant supposé très petit, h^2 est beaucoup plus petit; on obtient alors l'équation $f(a)+hf'(a)=0$, d'où l'on tire $h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$; c'est le même résultat que tout à l'heure.

Ce procédé nous fournit une évaluation de l'erreur commise en prenant a_1 pour α. On a, en effet, exactement,

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)};$$

l'erreur commise en remplaçant α par a_1 est

$$-\frac{h^2}{2}\,\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}.$$

A la vérité on ne connaît pas le nombre θ; mais, si h est très petit, $f''(a+\theta h)$ sera voisin de $f''(a)$ et il sera, d'ordinaire, aisé de trouver un nombre positif M auquel la valeur absolue de $-\frac{f''(a+\theta h)}{2f'(a)}$ sera notoirement inférieure, et même tel que l'on ait

$$\left|\frac{f''(x)}{2f'(y)}\right|<\mathrm{M},$$

lorsque x et y restent dans l'intervalle (p, q) que je suppose suffisamment petit. On pourra, par exemple, obtenir ce nombre comme le rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ de deux nombres dont le premier P est une valeur grossièrement approchée, par excès, de $|f''(x)|$, quand x appartient à l'intervalle (p, q), dont le second Q est, de même, une valeur grossièrement approchée de $|2f'(x)|$, par défaut. Si, dans l'intervalle (p, q), $f'(x)$ et $f''(x)$ vont toujours en croissant ou toujours en décroissant, on pourra prendre pour P le plus grand des nombres $|f''(\mathrm{A})|$, $|f''(\mathrm{B})|$, pour Q le plus petit des nombres $|2f'(\mathrm{A})|$, $|2f'(\mathrm{B})|$.

Ceci posé, l'erreur commise en substituant a_1 à a sera moindre, en valeur absolue, que Mh^2; à la vérité, on ne connait pas h, mais si l'on sait que h doit être inférieur, en valeur absolue, à un nombre positif η_1, on sera assuré que l'erreur est moindre que $M\eta_1^2$. Or on peut prendre $\eta_1 = q - a$ ou $a - p$ suivant que la racine α est comprise entre a et q ou entre p et a, ce que l'on sait reconnaître par le signe des quantités $f(p)$, $f(a)$, $f(q)$. On arrive ainsi à une conclusion certaine. Si par exemple η_1 est égal à 10^{-n}, l'erreur sera moindre que $M\,10^{-2n}$; d'où la règle pratique suivante, qui peut se trouver en défaut quand M est grand : Ayant calculé une valeur approchée a de α avec n décimales, on calculera a_1 avec $2n$ décimales, a_2 avec $4n$ décimales, etc. Sans doute, les résultats ainsi obtenus ne sont nullement certains; mais si, dans les calculs successifs, les décimales antérieurement calculées ne sont pas modifiées, on est par cela même rassuré, au moins dans une certaine mesure, sur leur exactitude; au reste, si l'on procède de cette façon, on devra s'assurer de la valeur du résultat auquel on s'arrête, en le substituant dans $f(x)$, en constatant l'ordre de petitesse du résultat et son signe : si le nombre que l'on essaie a donné un résultat d'un certain signe et si ce même nombre, augmenté ou diminué d'une unité du dernier ordre décimal, donne un résultat de signe contraire, on sera certain que l'erreur est moindre qu'une unité de ce dernier ordre décimal. Un autre procédé consiste à regarder h comme étant égal à sa valeur approchée $-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$, à évaluer grossièrement l'ordre de petitesse de Mh^2, et à ne conserver dans l'évaluation de a_1 que des chiffres qui soient ainsi à peu près assurés; la vérification qu'on a expliquée tout à l'heure conduira à la certitude.

J'ajoute les remarques suivantes : on se trouve dans des circonstances d'autant plus favorables que M est plus petit. M peut être assez petit pour que la méthode de Newton s'applique lors même que h est plus grand que 1 en valeur absolue, auquel cas h^2 étant plus grand que h, on n'est pas, tout d'abord, tenté de l'appliquer. Cette circonstance peut en particulier se présenter quand $f(x)$ est un polynome qui comporte de grands coefficients, auquel cas $|f'(a)|$ peut être grand relativement à $|f(a)|$.

Par contre, les circonstances seront mauvaises si $f'(x)$ reste très petit dans l'intervalle considéré, c'est ce qui arrivera s'il y a une racine de $f'(x)$ voisine de α; cette dernière circonstance se présentera, en vertu du théorème de Rolle, s'il y a une racine de $f(x)$ qui soit elle-même voisine de α : on peut alors être obligé de beaucoup resserrer l'intervalle (p, q), ou d'employer une précaution qui sera indiquée tout à l'heure.

La méthode de Newton est d'autant plus avantageuse que h est plus petit, comme le montre la limite Mh^2 de l'erreur : il y aura donc avantage, en général, lorsqu'on possède deux valeurs a et b qui comprennent la racine α, de choisir, pour appliquer la méthode, celle que l'on juge être la plus approchée, c'est-à-dire celle pour laquelle $f(x)$ a la plus petite valeur absolue.

On a fait remarquer au n° 250 que l'équation $x^3 - 100x + 1 = 0$ avait une racine positive très petite α, une racine voisine de 10, une racine voisine de -10. Calculons la première; on a ici

$$f(x) = x^3 - 100x + 1, \qquad f'(x) = 3x^2 - 100, \qquad \frac{1}{2}f''(x) = 3x.$$

La racine positive étant très petite, son cube est à peu près négligeable; elle doit donc être à peu près égale à 0,01 ; c'est là d'ailleurs une première application de la méthode; si l'on prend $a = 0{,}01$, on aura

$$f(a) = 10^{-6}, \qquad f'(a) = -100 + 0{,}0003, \qquad \frac{1}{2}f''(a) = 0{,}03;$$

$f(x)$ étant positif et décroissant pour $x = a$, on voit de suite que la racine α doit être un peu plus grande que 0,01 et qu'elle est plus petite que 0,02; on peut prendre ici $p = a = 0{,}01$ et $q = 0{,}02$; dans l'intervalle (p, q), $f'(x)$ reste très voisin de -100, $\frac{1}{2}f''(x)$ reste inférieur à 0,06; on peut prendre $M = 10^{-3}$; les circonstances sont très favorables, parce que M est petit : l'application de la méthode de Newton donne $\dfrac{10^{-6}}{100 - 0{,}003}$ pour valeur approchée de h; on aurait, en adoptant cette valeur,

$$Mh^2 = \frac{10^{-12}}{10^3(100 - 0{,}003)^2} < 10^{-18};$$

il est assez clair qu'une seule application de la méthode fournira une valeur très approchée de α. On a d'ailleurs

$$\frac{10^{-6}}{100 - 0{,}003} = \frac{10^{-8}}{1 - 3.10^{-5}} = 10^{-8}(1 + 3.10^{-5} + 9.10^{-10} + \ldots).$$

On peut prévoir que

$$10^{-2}+10^{-8}=0,01000001$$

constitue une valeur très approchée de α. Le lecteur n'aura pas de peine à trouver des valeurs aussi approchées des autres racines.

Les règles qu'on vient de donner et qui suffisent d'ordinaire dans la pratique comportent des exceptions; elles ne permettent pas d'assurer que a_1, calculé comme on l'a expliqué, soit plus approché de α que a. Il y a intérêt à avoir une méthode tout à fait régulière et qui permette d'approcher sûrement de la racine α, avec une approximation indéfinie.

Je suppose que les nombres a, b appartenant à l'intervalle (p, q) comprennent entre eux la racine α; les conditions énoncées plus haut pour l'intervalle (p, q) sont évidemment réalisées pour l'intervalle (a, b); je suppose en outre que, dans cet intervalle, la dérivée $f''(x)$ ne change pas de signe : des trois nombres

$$a, \qquad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad \alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a+\theta h)}{2f'(a)},$$

le dernier est la racine cherchée; le second sera une valeur plus approchée que le premier si les trois nombres sont rangés par ordre de grandeur (croissante ou décroissante), c'est-à-dire si les deux nombres

$$-\frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad -\frac{f''(a+\theta h)}{2f'(a)},$$

ou les nombres $f(a)$, $f''(a+\theta h)$, sont de mêmes signes, ou encore, puisque $a+\theta h$ appartient à l'intervalle (a, b), si $f(a)$ et $f''(a)$ sont de même signe. Observons que si $f(a)$ et $f''(a)$ ne se trouvent pas être de mêmes signes, $f(b)$ et $f''(b)$ seront de mêmes signes, puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

On choisira donc pour appliquer la méthode de Newton celui des deux nombres a et b pour lesquels $f(x)$ et $f''(x)$ sont de mêmes signes.

Cette règle est due à Fourier. Elle peut être en contradiction avec celle qu'on a donnée plus haut; elle a l'avantage de donner un résultat certain.

Supposons que la règle de Fourier s'applique au nombre a; elle s'appliquera à tous les nombres compris entre a et α, puisque pour tous ces nombres, $f(x)$ garde le même signe, comme $f''(x)$; elle s'appliquera donc aux nombres a_1, a_2, ...; chacun d'eux sera sûrement compris entre le précédent et α.

Il est aisé de déduire de là que la suite illimitée a, a_1, a_2, ..., fournie par l'application successive de la méthode de Newton, a pour limite α.

En effet, si, pour fixer le langage, on suppose $a < \alpha$, les nombres a_1, a_2, ..., a_n, ... vont en croissant, ils restent inférieurs à α; ils tendent donc, quand n augmente indéfiniment, vers une limite β inférieure ou égale à α. Il en résulte que, dans les mêmes conditions, la différence

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)},$$

et, par suite, le numérateur $f(a_n)$ du second membre tendent vers la limite o; d'autre part, puisque $f(x)$ est une fonction continue, $f(a_n)$ tend, quand n croît indéfiniment, vers la limite $f(\beta)$. On a donc $f(\beta) = 0$ et, par suite, $\beta = \alpha$.

Le sens géométrique de l'addition apportée par Fourier à la méthode de Newton est aisé à reconnaître.

Dire que $f''(x)$ ne change pas de signe entre a et b, c'est dire que le sens de la convexité de la courbe entre les points A, B dont les abscisses sont respectivement a et b, ne change pas sur l'arc AB; on choisira, pour appliquer la méthode de Newton, celui des deux points qui est tel que la tangente à la courbe soit comprise entre l'arc de courbe et la parallèle à l'axe des y qui va vers l'axe des x; sur la figure, où la concavité est tournée vers le bas $[f''(x) < 0]$, où la tangente est au-dessus de la courbe, c'est le point A $[f(a) < 0]$ qu'il faut choisir, de manière que la droite AA′ soit au-dessus de la tangente. L'examen des différents cas de figure, qui est aisé, conduit toujours à la règle de Fourier.

Il ne faut pas s'exagérer la portée de cette règle : la figure 83 montre, et il est aisé de voir analytiquement, que si l'on choisissait le point B au lieu du point A, la tangente en B couperait l'axe des x en un point B'_1, qui serait, par rapport au point α où la courbe coupe l'axe, du même côté que A′; il en résulterait que l'abscisse b_1 du point B'_1 serait du côté qu'indique la règle de Fourier. La seconde application sera donc, d'elle-même, conforme à cette règle. Ce dernier raisonnement tomberait en défaut si B'_1 n'était pas compris entre A' et B'; mais, de cela, on sera immédiatement prévenu par le calcul même; on abandonnerait alors la valeur approchée b.

On a vu au nº 252 que l'équation

$$\cot x + x - \frac{3\pi}{2} = 0$$

avait une racine comprise entre $0,139\frac{\pi}{2}$ et $0,14\frac{\pi}{2}$.

Cela revient à dire que l'équation

$$\varphi(x) = \cot\frac{\pi x}{200} + \frac{\pi x}{200} - \frac{3\pi}{2} = 0$$

a une racine comprise entre 13,9 et 14: on a

$$\varphi(13,9) > 0, \qquad \varphi(14) < 0,$$

et, d'un autre côté,

$$\varphi'(x) = -\frac{\pi}{200}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{200}} + \frac{\pi}{200} = -\frac{\pi}{200}\cot^2\frac{\pi x}{200},$$

$$\varphi''(x) = 2\left(\frac{\pi}{200}\right)^2 \frac{\cos\frac{\pi x}{200}}{\sin^3\frac{\pi x}{200}};$$

pour x compris entre 0 et 100, $\varphi''(x)$ est positif; c'est donc de la valeur $a = 13,9$ qu'il convient de partir si l'on veut appliquer la règle de Fourier; on ne doit pas compter sur une grande approximation en appliquant une première fois la méthode de Newton, on pourra se servir de tables à quatre décimales. On trouve ainsi

$$\cot\frac{13,9\pi}{200} = 4,5070, \qquad \varphi(13,9) = 0,0130,$$

$$\varphi'(13,9) = -\frac{\pi}{200}\cot^2\frac{13,9\pi}{200} = -0,3192, \qquad -\frac{\varphi(13,9)}{\varphi'(13,9)} = 0,0407.$$

Ce qui donnerait $a_1 = 13,9407$; il n'y a aucune raison pour conserver les quatre chiffres décimaux; si l'on veut en garder trois, on peut hésiter entre les valeurs 13,940 et 13,941, et la règle qui consiste à forcer le dernier chiffre décimal quand le premier chiffre négligé dépasse 4 conduirait à choisir la seconde; mais, si l'on veut être certain de rester du même côté de la racine, afin d'appliquer la règle de Fourier, on est amené à choisir le premier, qui est sûrement approché par défaut. On devra, pour continuer les calculs, se servir d'une table à cinq décimales (au moins) : on trouve ainsi, en supposant $a_1 = 13,940$,

$$\cot\frac{\pi a_1}{200} = 4,4936;$$

on a d'ailleurs, au même ordre d'approximation,

$$\frac{\pi a_1}{200} = 0,2190, \qquad \frac{3\pi}{2} = 4,7124, \qquad \varphi(a_1) = 0,0002.$$

L'incertitude relative au dernier chiffre ne permet guère de continuer à appliquer la méthode de Newton, et le calcul précédent ne constitue qu'une vérification qui montre, par la petitesse du résultat obtenu, que la valeur 13,940 est très près de la racine. Si l'on fait les calculs analogues en conservant le même nombre de chiffres décimaux, pour $a_1 = 13,941$, on trouve $\varphi(a_1) = 0$. De ce résultat, pris en lui-même, on ne peut pas conclure que 13,941 est une valeur approchée par défaut ou par excès; que cette valeur soit effectivement approchée par excès, c'est ce qu'il est aisé de reconnaître, en se servant de tables plus étendues.

La racine correspondante de l'équation $\operatorname{tang} x - x = 0$ est comprise entre

$$\frac{\pi}{2}(3 - 0,1394) = 4,493419\ldots$$

et

$$\frac{\pi}{2}(3 - 0,13941) = 4,493404\ldots$$

En prenant $x = 4,4934$, on a donc la racine cherchée avec quatre décimales exactes.

L'application de la méthode de Newton donne lieu aux observations suivantes.

Quand on veut calculer $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, on ne peut pas, le plus souvent, calculer exactement $f(a)$ et $f'(a)$; il est d'ailleurs inutile de calculer ces quantités avec plus de chiffres qu'il n'est nécessaire pour l'approximation à laquelle on veut se tenir. L'erreur qui résulte, pour le quotient, des erreurs ε, ε' commises sur $f(a)$, $f'(a)$ est donnée par la formule

$$\frac{\varepsilon}{f'(a)+\varepsilon'} - \frac{\varepsilon'}{f'(a)+\varepsilon'}\,\frac{f(a)}{f'(a)};$$

en général, $\frac{f(a)}{f'(a)}$ est très petit, en sorte que c'est le premier terme de la formule qui importe le plus. Il suffira d'avoir une valeur grossièrement approchée, par défaut, de $|f'(a)|$ pour se rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur ε que l'on peut se permettre dans l'évaluation de $f(a)$, puis de l'erreur ε' que l'on peut se permettre dans l'évaluation de $f'(a)$ de manière que la somme des valeurs absolues des deux termes de la formule précédente soit notablement inférieure à l'erreur que l'on veut se permettre sur le quotient.

En appliquant la méthode de Newton, on se trouve avoir à calculer $f(x)$ et $f'(x)$ pour plusieurs valeurs de x voisines de a; il peut être commode de se servir pour cela des formules

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots,$$
$$f'(a+h) = f'(a) + \frac{h}{1} f''(a) + \frac{h^2}{1.2} f'''(a) + \ldots,$$

en négligeant les termes, aux seconds membres, qui n'ont pas d'influence sur le résultat : le calcul, une fois fait, de $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ... servira ainsi pour plusieurs essais.

256. La méthode de Newton consiste au fond, quand on a une valeur approchée a d'une racine α d'une équation, à prendre pour inconnue $h = \alpha - a$, à former l'équation en h, et à lui substituer une équation du premier degré, en supprimant les termes en h^2, h^3, ... La même méthode s'applique à des systèmes d'équations à plusieurs inconnues, lorsqu'on a une solution approchée : c'est ce que j'expliquerai en me bornant au cas d'un système de deux équations à deux inconnues $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, dont je suppose qu'on connaisse une solution approchée a, b; on posera $x = a + h$, $y = b + k$, et l'on sera ramené à la résolution des deux équations

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(a+h, b+k) &= \varphi(a, b) + h\varphi'_x(a+\theta h, b+\theta k) \\ &\qquad + k\varphi'_y(a+\theta h, b+\theta k), \\ 0 = \psi(a+h, b+k) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

$\varphi'_x(a+\theta h, b+\theta k)$, $\varphi'_y(a+\theta h, b+\theta k)$ désignent ce que deviennent les dérivées partielles φ'_x, φ'_y, quand on y remplace x, y par $a+\theta h$, $b+\theta k$; on remplace, dans ces équations, $\varphi'_x(a+\theta h, b+\theta k)$, ... par $\varphi'_x(a, b)$, ..., ce qui revient à supprimer dans les équations en h, k les termes en h^2, hk, k^2, h^3, ... (1), et l'on parvient aux équations du premier degré en h, k,

$$h\varphi'_x(a,b) + k\varphi'_y(a,b) + \varphi(a,b) = 0,$$
$$h\psi'_x(a,b) + k\psi'_y(a,b) + \psi(a,b) = 0,$$

qui fourniront, en général, des valeurs approchées pour h, k. On aura soin de vérifier les résultats ainsi obtenus en les substituant dans $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, de façon à s'assurer de la valeur du résultat obtenu.

Sur ces équations, je me bornerai à remarquer que leur déterminant est la valeur pour $x = a$, $y = b$, de l'expression

$$\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \psi'_x \\ \varphi'_y & \psi'_y \end{vmatrix},$$

à laquelle on donne le nom de *déterminant fonctionnel* des fonctions φ, ψ. Lorsque ce déterminant est nul pour $x = a$, $y = b$, il n'y a rien à tirer des équations en h, k, pas plus que de la méthode de Newton quand la dérivée est nulle pour $x = a$. Lorsque la valeur du déterminant pour $x = a$, $y = b$ se trouve très petite, il y a lieu de se défier beaucoup des résultats que donnerait la méthode que je viens d'indiquer.

257. **Méthode d'interpolation.** — Revenons aux équations à une inconnue. Supposons que l'on ait séparé une racine α d'une telle équation $f(x) = 0$ et qu'on en ait deux valeurs approchées a, b, l'une par défaut, l'autre par excès. Une méthode tout aussi naturelle que celle de Newton pour approcher de la racine α consiste à substituer à la courbe qui représente la fonction $f(x)$, non plus la tangente en l'un des points A, B dont les abscisses sont a et b, mais bien la corde AB, dont l'équation est

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a);$$

---

(1) Le lecteur, pour s'en convaincre, n'a qu'à penser au cas où $\varphi(x, y)$ est un polynome en x, y.

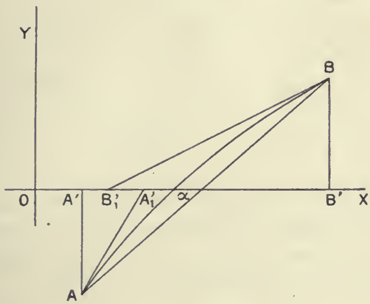
celle-ci coupe l'axe des x au point dont l'abscisse est

$$a' = a - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} f(a);$$

on prendra a' pour valeur approchée de α.

Il suffit de jeter les yeux sur la figure 83 pour reconnaître que, lorsque la convexité de la courbe ne change pas de sens sur l'arc AB,

Fig. 83.



la méthode précédente, dite *méthode d'interpolation,* donne un résultat approché dans l'autre sens que la méthode de Newton, appliquée suivant la règle de Fourier. L'emploi des deux méthodes fournira donc non seulement une vérification, mais un renseignement sur l'ordre de l'approximation.

Il convient de remarquer que les approximations obtenues par les deux méthodes sont du même ordre de grandeur; en effet, la précédente valeur de a', obtenue par la méthode d'interpolation, peut s'écrire, à cause de la formule des accroissements finis,

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(\beta)},$$

en désignant par β un nombre compris entre a et b; on voit assez que cette valeur doit être très voisine de

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

pourvu que $f'(x)$ ne soit pas petit pour les valeurs de x comprises entre a et b (¹).

Considérons par exemple l'équation

$$231x^3 - 315x^2 + 105x - 5 = 0;$$

en substituant dans le premier membre les nombres 0, 0,1, 0,2, ..., 0,9, 1, on trouve qu'il y a une racine entre 0 et 0,1, une autre racine entre 0,4 et 0,5, une autre enfin entre 0,8 et 0,9. Occupons-nous de la seconde; on a

$$f(0,4) = 1,384, \qquad f(0,5) = -2,275.$$

La règle précédente donnera pour la valeur approchée

$$a' = 0,4 + \frac{0,1384}{3,659}.$$

Il est clair qu'il n'y a pas lieu de chercher à évaluer le second terme du second membre avec une grande approximation; on trouve pour les premiers chiffres 0,037.... On pourra prendre, pour a', 0,43 ou 0,44. On trouve d'ailleurs

$$f(0,43) = 0,272617, \qquad f(0,44) = -0,106496,$$

et l'on est par conséquent conduit à la seconde valeur approchée

$$a'' = 0,43 + \frac{0,00272617}{0,379113} = 0,43719, \qquad \ldots;$$

Prenons $a'' = 0,4372$; il restera, si même on ne veut pas pousser l'approximation plus loin, à essayer cette valeur et à se rendre compte du degré d'approximation qu'elle comporte. Jusqu'ici on a calculé exactement les résultats de substitution, et l'on a pu observer, à chaque fois, que ces résultats comportaient notablement plus

---

(¹) L'expression $a - \dfrac{f(a)}{f'(\beta)}$ est l'abscisse du point où l'axe des x est rencontré par la parallèle menée par le point A à la tangente à la courbe au point d'abscisse β; on peut remarquer, à ce propos, que, dans le cas où $f''(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b), la racine α est comprise entre $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ et $a - \dfrac{f(a)}{f'(b)}$.

de chiffres qu'il n'était utile pour l'approximation suivante. Les calculs exacts seraient maintenant assez fastidieux.

Convenons de ne conserver que sept décimales. Pour substituer 0,4372 dans $f(x)$, on appliquera la règle du n° 54, on multipliera 0,4372 par 231, ce qui donne 100,9932; on retranchera 315, ce qui donne — 214,0068; on multipliera par 0,4372; en ne conservant que les sept décimales et en ajoutant 105, ce qui ne change pas l'erreur, on trouve 11,4362270, avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-7}$; en multipliant par 0,4372, ne conservant encore que sept décimales, et ajoutant — 5, on trouve — 0,0000815 avec une erreur moindre que 10^{-7}; le résultat de la substitution est négatif, le nombre 0,4372 est approché par excès.

On pourra essayer de même le nombre 0,4371 et constater qu'il est approché par défaut; il est d'ailleurs aisé de s'en rendre compte avec des calculs insignifiants; dans l'intervalle de 0,4 à 0,5, la dérivée $f'(x)$ est à peu près égale à $\frac{f(0,5)-f(0,4)}{0,1}$; elle est négative et reste manifestement plus grande que 30, en valeur absolue; on a d'ailleurs

$$f(0,4371) = f(0,4372) - \frac{1}{10^4} f'(\xi),$$

en désignant par ξ un nombre compris entre 0,4371 et 0,4372 : or, comme on a évidemment

$$\frac{30}{10^4} > 0,0000815,$$

il est clair que $f(0,4371)$ est positif; la racine cherchée est donc connue avec quatre décimales exactes.

EXERCICES.

263. Construire les courbes qui représentent les fonctions

$$x^x, \quad x\lg x - 1, \quad x^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{\sin x}{x},$$
$$xe^{\frac{1}{x}}, \quad x^2 e^{\frac{1}{x^2}}, \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x+4}.$$

Reconnaître le nombre de racines de l'équation obtenue en égalant l'une quelconque de ces fonctions à une constante donnée.

Forme des courbes qui représentent les fonctions

$$\sin\frac{1}{x}, \quad x\sin\frac{1}{x}, \quad \operatorname{tang} x\, e^{\operatorname{tang} x}, \quad \sin x \lg \operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

264. Déterminer les constantes α et β de manière que l'équation obtenue en égalant à o la dérivée de la fonction

$$\frac{x+\alpha}{x+\beta}\sqrt{x^2+1}$$

admette 1 comme racine double. Représenter par une courbe la fonction ainsi déterminée.

265. Construire la courbe définie par l'équation

$$y = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}.$$

Entre quelles limites y varie-t-il quand x varie de o à $\frac{\pi}{4}$?

Soient A, B, C les angles d'un triangle rectangle en A et a, b, c les côtés opposés. Montrer que si l'on évalue B en degrés on a approximativement

$$B = \frac{172\, b}{c+2a}.$$

Quelle erreur maximum peut-on commettre sur B en le calculant par cette formule, lorsqu'on suppose a, b, c donnés?

266. Construire la courbe définie par l'équation

$$y = \sqrt{x^3+px+q}.$$

Montrer que cette courbe a, en général, un point d'inflexion et un seul. Dans quel cas y a-t-il exception? Si la courbe présente deux parties, le point d'inflexion est situé sur la branche infinie.

267. Construire la courbe dont l'équation est

$$(y-x^2)^2 = xy^2.$$

Cette courbe a deux branches tangentes à l'axe des x, à l'origine. En prenant x pour infiniment petit principal, quel est, pour chacune des branches de courbes, l'ordre infinitésimal de y? Quel est l'ordre de la différence entre les ordonnées de deux points qui correspondent à une même abscisse?

Cette courbe a-t-elle des points d'inflexion?

268. L'équation $y - \alpha \sin y = x$, où α est un nombre donné, compris entre o et 1, définit y comme une fonction de x, continue dans tout intervalle, croissante quel que soit x. Montrer que, si l'on a construit la courbe (C) qui représente cette fonction pour les valeurs de x comprises entre o et π, on peut en déduire la courbe tout entière. Trouver les points d'inflexion de cette courbe, reconnaître le sens de la concavité. En quels points la tangente est-elle parallèle à la bissectrice de l'angle des coordonnées positives?

269. En combien de points la courbe qui a pour équation $y = \operatorname{ch} x$ peut-elle être rencontrée par une droite? Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que la droite dont l'équation est $y = ax + b$ rencontre cette courbe en deux points distincts? En deux points confondus?

270. Nombre de racines de l'équation

$$(x - \sin x - \alpha + \sin\alpha) - \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - \cos x) = 0,$$

où α est un nombre donné compris entre o et π.

271. Reconnaître d'après la valeur de a le nombre des racines réelles des équations

$$x^6 + ax^5 + \frac{9}{2}x^3 - \frac{8}{5} = 0,$$

$$x^8 + ax^7 + \frac{17}{3}x^4 - \frac{16}{7} = 0.$$

272. Si, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ et sa dérivée seconde sont continues et si les deux fonctions ne sont jamais de signes contraires, la première ne peut s'annuler qu'une fois dans l'intervalle (a, b).

273. Soient u, v deux fonctions de x qui, dans l'intervalle (a, b), sont continues ainsi que leurs dérivées u', v'; si, dans ce même intervalle, la fonction $uv' - u'v$ ne s'annule pas, il y a entre deux racines consécutives de l'équation $u = 0$, comprises entre a et b, une racine de l'équation $v = 0$.

274. Soit (C) la portion de la courbe, définie par l'équation $y = \operatorname{tang} x$, qui correspond aux valeurs de x comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; soit α un nombre donné compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; la condition pour que la droite dont l'équation

est

$$y = \frac{x}{\cos^2\alpha} + b$$

rencontre en trois points distincts la courbe (C), est que la valeur absolue de b soit moindre que $\alpha(1 + \operatorname{tang}^2\alpha) - \operatorname{tang}\alpha$. On prouvera que cette dernière quantité est positive.

En combien de points la droite dont l'équation est

$$y = \frac{x + \alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tang}\alpha$$

rencontre-t-elle la courbe (C)?

275. Les équations

$$\begin{gathered} e^x - 1 - x = 0, \\ e^x - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1.2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^x - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \ldots - \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0 \end{gathered}$$

n'ont pas d'autre racine réelle que $x = 0$.

276. L'équation

$$\frac{x^3}{6} - x + \sin x = 0$$

n'admet pas d'autre racine réelle que $x = 0$.

277. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de e^{-x^2} est de la forme $P_n e^{-x^2}$, où P_n est un polynome du degré n (Ex. 226). Montrer que toutes les racines de l'équation $P_n = 0$ sont réelles et distinctes.

278. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{1 + x^2}$ est de la forme $\frac{Q_n}{(1 + x^2)^{n+1}}$, où Q_n est un polynome de degré n (Ex. 224, 225). Montrer que toutes les racines de l'équation $Q_n = 0$ sont réelles et distinctes.

279. Combien l'équation

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} = 0$$

a-t-elle de racines réelles?

280. L'équation

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

n'a pas de racine réelle si n est pair; elle admet une racine négative, et une seule, si n est impair; montrer que la valeur absolue de cette racine augmente avec n, qu'elle augmente indéfiniment quand n augmente indéfiniment.

281. Soit x_n la racine comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ de l'équation

$$\operatorname{tang} x - x = n\pi,$$

où n est un nombre naturel donné; montrer que x_n augmente avec n et tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand n augmente indéfiniment.

La série à termes positifs

$$\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - x_2\right) + \ldots + \left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + \ldots$$

est divergente.

282. On considère un rectangle de carton dont les côtés sont a et b $(a > b)$; on trace à l'intérieur du rectangle des parallèles aux côtés, à une distance $x < \frac{b}{2}$ de ces côtés; on supprime les quatre petits carrés qui se trouvent ainsi délimités aux quatre coins du rectangle, et l'on plie le carton le long des lignes tracées, de manière à former une boîte rectangulaire ouverte, de hauteur x

1° En regardant a et b comme donnés, déterminer x de façon que le volume de la boîte soit le plus grand possible; calculer l'expression $\varphi(a, b)$ de ce volume maximum en fonction de a et de b.

2° On se donne la surface m^2 du rectangle de carton; déterminer a et b de manière que $\varphi(a, b)$ soit le plus grand possible.

283. Trouver avec trois chiffres significatifs exacts les racines des équations

$$x^3 - 7x + 7 = 0, \qquad x^3 - 6x + 6 = 0,$$

$$x^4 + x - 1000 = 0, \qquad \sin x = \frac{x}{2}, \quad x - \frac{1}{5}\sin x = 7,$$

$$e^x - \frac{2+x}{2-x} = \frac{1}{10000}, \qquad \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x}{100}.$$

284. Trouver avec trois chiffres significatifs exacts la plus petite des racines positives des équations

$$e^x \sin x = 7, \qquad e^{x^2} \sin x = 10000.$$

285. Que donnent la méthode de Newton, ou la méthode d'interpolation, appliquées à une équation du premier degré, quand on prend pour valeurs approchées de la racine des nombres quelconques.

286. Soit (C) la courbe dont l'équation est $y = x^3 - 1$. Par un point M de l'axe des x, d'abscisse plus petite que 1, on ne peut lui mener qu'une tangente. Comment varie l'abscisse du point de contact avec l'abscisse du point M?

Soient A_1 le point de contact de la tangente issue de l'origine des coordonnées et A'_1 la projection du point A_1 sur l'axe des x; soient, de même, A_2 le point de contact de la tangente issue du point A'_1 et A'_2 sa projection sur l'axe des x, A_3 et A'_3 le point de contact de la tangente issue du point A_2 et sa projection sur l'axe des x, ... Montrer que les abscisses $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ des points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forment une suite de nombres négatifs dont les valeurs absolues croissent indéfiniment. Soit a un nombre qui n'appartienne pas à cette suite; montrer que la suite

$$a_1 = \frac{2a^3+1}{3a^2}, \qquad a_2 = \frac{2a_1^3+1}{3a_1^2}, \qquad a_3 = \frac{2a_2^3+1}{3a_2^2}, \qquad \ldots$$

formée, d'après la méthode de Newton, en partant du nombre a, a pour limite l'unité. Qu'arrive-t-il quand on forme la même suite à partir d'un nombre a qui appartient à la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$?

287. Appliquer la méthode de Newton à l'extraction de la racine carrée d'un nombre positif A.

Montrer que, si l'on pose

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right), \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{A}{x_1}\right), \qquad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{A}{x_2}\right), \qquad \ldots,$$

on a

$$\frac{x_n - \sqrt{A}}{x_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{x - \sqrt{A}}{x + \sqrt{A}}\right)^{2^n};$$

limite de x_n pour n infini.

Si l'on prend $A = 2$, $x = \frac{7}{5}$, quelle erreur commet-on en prenant pour $\sqrt{2}$ les valeurs x_3 ou x_4?

288. Soient α et β les racines réelles ou imaginaires de l'équation

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

dont les coefficients peuvent être réels ou imaginaires, mais dont on suppose les racines différentes. Soit x un nombre quelconque, assujetti seulement à être représenté (n° 95) par un point qui soit inégalement distant des points qui figurent les nombres α, β. Soit ensuite

$$x_1 = x - \frac{ax^2 + 2bx + c}{2(ax+b)} = \frac{ax^2 - c}{2(ax+b)},$$

$$x_2 = \frac{ax_1^2 - c}{2(ax_1+b)},$$

$$x_3 = \frac{ax_2^2 - c}{2(ax_2+b)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

une suite de nombres formée en appliquant la méthode de Newton à partir du nombre x; montrer que le point x_n a pour limite, quand n augmente indéfiniment, celui des points α, β qui est le plus voisin du point x.

On montrera, pour cela, que l'on a

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} = \left(\frac{x - \alpha}{x - \beta}\right)^2.$$

La suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ne peut avoir aucune limite, pour n infini, quand le point x est également distant des points α, β.

CHAPITRE XVI.

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

§ 1. — RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES. FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

258. On a vu au n° 113 qu'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(1)\qquad A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

à coefficients réels ou imaginaires A_0, A_1, ..., A_n ($A_0 \neq 0$) avait n racines réelles ou imaginaires r_1, r_2, ..., r_n, distinctes, ou non. Si ces racines ne sont pas toutes distinctes, il faut entendre que, dans la suite r_1, r_2, ..., r_n, chaque racine distincte figure autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Dans ces conditions, on a identiquement

$$(2)\qquad A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = A_0 (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n);$$

d'où, en développant le second membre, en l'ordonnant suivant les puissances de x, et en égalant dans les deux membres, divisés par A_0, les coefficients de la même puissance de x, on tire les égalités

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} r_1 + r_2 + \ldots + r_n & = -\dfrac{A_1}{A_0}, \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n & = \dfrac{A_2}{A_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ r_1 r_2 \ldots r_p + \ldots + r_{n-p+1} r_{n-p+2} \ldots r_n & = (-1)^p \dfrac{A_p}{A_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ r_1 r_2 \ldots r_n & = (-1)^n \dfrac{A_n}{A_0}. \end{array}\right.$$

Ces relations qui fournissent l'expression, au moyen des coefficients, de la somme des racines, de la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, ..., p à p, ..., de leur produit proprement dit, sont fondamentales : elles permettent d'écrire immédiatement les coefficients d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré dont on donne les n racines.

Je les écris explicitement pour une équation du troisième degré $A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{A_1}{A_0},$$

$$r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = \frac{A_2}{A_0},$$

$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{A_3}{A_0}.$$

Réciproquement, si n nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vérifient les équations (3), il est clair que l'égalité (2) sera vérifiée identiquement en x et que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ seront les n racines de l'équation (1). En d'autres termes, la résolution de l'équation (1), à une inconnue x, ou la résolution des n équations (3) à n inconnues $r_1, r_2, \ldots, r_n$, sont deux problèmes équivalents.

259. **Fonctions symétriques des racines d'une équation.** — Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les n racines de l'équation

$$(1) \qquad A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

On appelle *fonction symétrique* de ces racines une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui prend toujours la même valeur quand on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$, quel que soit l'ordre dans lequel ces nombres sont rangés.

Pour constater que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction symétrique des racines de l'équation (1), on a donc à former les $n!$ arrangements n à n des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$, à substituer, à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les n nombres qui constituent chaque arrangement et à constater que les $n!$ résultats obtenus sont égaux.

Une pareille constatation est en général difficile ; elle suppose que l'équation (1) soit résolue et implique de longs calculs. Voici quelques exemples où elle est aisée :

Soient r_1, r_2, r_3 les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$; je vais montrer que $x_1^2 - x_2 x_3$ est une fonction symétrique de ces racines ; on voit de suite, en effet, que, si l'on remplace x_1, x_2, x_3 par les six arrangements, trois à trois, des nombres r_1, r_2, r_3, on ne trouve que les trois expressions distinctes $r_1^2 - r_2 r_3$, $r_2^2 - r_3 r_1$, $r_3^2 - r_1 r_2$; ces trois expressions sont égales : la différence entre les deux premières, par exemple, est, en effet,

$$r_1^2 - r_2^2 + r_3(r_1 - r_2) = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2 + r_3);$$

elle est nulle puisque le terme en x^2 manque dans l'équation $x^3 + px + q = 0$ et que, par conséquent, la somme des racines de cette équation est nulle.

Quand une équation a toutes ses racines égales, toute fonction de ses racines peut être regardée comme une fonction symétrique de ses racines.

La définition qu'on a donnée plus haut d'une fonction symétrique des racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré $\psi(x) = 0$ n'implique pas que les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ figurent explicitement dans cette fonction : s'il ne figure effectivement que p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on devra entendre que la fonction considérée a toujours la même valeur quand on remplace respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_p$ par les nombres qui figurent dans les $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ arrangements p à p des lettres $r_1, r_2, \ldots, r_p$; il pourrait même ne figurer qu'une seule variable. Un polynome en x_1 qui garde la même valeur quand on remplace x_1 par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ doit, de ce point de vue, être regardé comme une fonction symétrique des racines de l'équation $\psi(x) = 0$; tel est, par exemple, le polynome $\psi(x)$ lui-même, qui est nul pour chaque racine. En supposant que l'équation donnée $\psi(x) = 0$ ait toutes ses racines inégales, il est aisé d'avoir la forme de tout polynome $f(x)$ qui prend ainsi la même valeur V quand on y remplace x par $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Le polynome $f(x) - \mathrm{V}$ doit, en effet, être nul quand on y remplace x par $r_1, r_2, \ldots, r_n$; il doit, par conséquent, être divisible par $\psi(x)$; par conséquent, V est le reste de la division de $f(x)$ par $\psi(x)$ et l'on a $f(x) = g(x)\psi(x) + \mathrm{V}$, en désignant par $g(x)$ un polynome arbitraire; en particulier, si $f(x)$ jouit de la propriété considérée et si l'on sait qu'il est de degré inférieur à n, on peut affirmer qu'il se réduit à la constante V.

260. Il y a un cas très important où il est clair qu'on a affaire à une fonction symétrique des racines de l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{A}_0 x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

et cela quelle que soit cette équation, pourvu qu'elle soit du degré n : c'est celui où la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ symétrique par rapport à ces variables (n° **126**), c'est-à-dire qui reste le même polynome, quand on y échange deux variables quelconques, ou qu'on effectue sur les variables une permutation quelconque. On montrera bientôt que la valeur que prend un tel polynome, quand on y remplace les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les racines de l'équation (1), s'exprime sans difficulté au moyen des coefficients de cette équation et que, ainsi, cette valeur peut être calculée sans résoudre l'équation. En admettant, pour un instant, cette proposition, je vais montrer que, toutes les fois que l'on sait qu'une fonction *rationnelle* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une fonction symétrique des racines de l'équation (1), au sens qu'on a précisé plus haut, on peut en ramener le calcul au calcul d'un ou de deux polynomes symétriques par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons d'abord, en effet, que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; en effectuant sur ces variables, dans ce polynome, toutes les $\nu = 1.2\ldots n$ permutations possibles, on obtiendra ν polynomes $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ dont l'un sera le polynome proposé F. Ces ν polynomes pourront, suivant les cas, être tous distincts, ou en partie identiques; ils seraient tous identiques si F était symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Quoi qu'il en soit, ils prennent, par hypothèse, la même valeur V quand on y remplace les n variables par les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'équation (1) : cette valeur V est donc égale à celle que l'on obtient en remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dans le polynome $F_1 + F_2 + \ldots + F_\nu$ et en divisant le résultat par ν; mais ce dernier polynome est une fonction symétrique des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puisque, si l'on effectue une même permutation, d'ailleurs quelconque, sur les ν arrangements n à n des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on reproduit ces mêmes arrangements, dans leur ensemble. Tout est donc ramené au calcul de $F_1 + F_2 + \ldots + F_\nu$.

Si l'on applique, par exemple, cette méthode à la fonction $x_1^2 - x_2 x_3$ dont on sait qu'elle est une fonction symétrique des racines r_1, r_2, r_3 de l'équation $x^3 + px + q = 0$, on aura

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_6 = 2(x_1^2 - x_2x_3) + 2(x_2^2 - x_3x_1) + 2(x_3^2 - x_1x_2),$$

$$V = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2).$$

Supposons maintenant que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit le rapport

$$\frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

de deux polynomes g, h en x_1, x_2, ..., x_n. Pour que le problème proposé ait un sens, il faut supposer que le dénominateur $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne s'annule pas quand on y remplace les variables par les racines de l'équation (1). Ceci posé, désignons par $\frac{g_1}{h_1}$, $\frac{g_2}{h_2}$, ..., $\frac{g_\nu}{h_\nu}$ les ν fractions rationnelles que l'on déduit de $\frac{g}{h}$ en effectuant sur les variables x_1, x_2, ..., x_n, dans $\frac{g}{h}$, toutes les permutations possibles; toutes ces ν fractions rationnelles prennent, par hypothèse, des valeurs égales quand on y remplace x_1, x_2, ..., x_n par les racines de l'équation (1); et il est clair que ces valeurs sont égales à celles que prend la fraction

$$\frac{g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu}{h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu},$$

dont les deux termes sont manifestement des polynomes symétriques en x_1, x_2, ..., x_n.

On peut donc se borner à l'étude de ces polynomes ou, comme on dit, des fonctions symétriques entières de x_1, x_2, ..., x_n. Dans ce qui suit, en parlant d'une fonction symétrique entière des racines d'une équation de degré n, c'est d'un polynome symétrique en x_1, x_2, ..., x_n qu'on entendra parler.

261. Fonctions symétriques entières de n variables. Énoncé du théorème fondamental. — La proposition fondamentale concernant les polynomes symétriques en x_1, x_2, ..., x_n, qui est une des propositions les plus importantes de l'Algèbre, a été déjà annoncée au n° 126.

Si l'on désigne par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les fonctions symétriques *élémentaires* des variables x_1, x_2, ..., x_n, c'est-à-dire la somme de ces variables, la somme des produits deux à deux, trois à trois, ..., le produit des n variables; si, en d'autres termes, on pose

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_p = x_1 x_2 \ldots x_p + \ldots + x_{n-p+1} x_{n-p+2} \ldots x_n, \\ s_n = x_1 x_2 \ldots x_n, \end{array}\right.$$

tout polynome $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, symétrique en x_1, x_2, ..., x_n, peut être mis sous la forme d'un polynome $\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ en $s_1, s_2, \ldots, s_n$; c'est-à-dire qu'il existe un polynome $\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui devient identique à $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quand on y remplace $s_1, s_2, \ldots, s_n$ par les seconds membres des égalités (1).

Si l'on regarde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ comme des notations abrégées pour représenter ces seconds membres, il est clair qu'on a identiquement en $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(2)\quad (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n s_n;$$

en d'autres termes, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont, au signe près, les coefficients d'une équation en x de degré n, dans laquelle le coefficient de x^n est 1, et dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je désignerai par $\varphi(x)$ le premier membre de cette équation, ou l'un ou l'autre des deux membres de l'identité (2). Il me sera commode de représenter les coefficients de $\varphi(x)$, avec leurs signes, par $p_1, p_2, \ldots, p_n$, c'est-à-dire de poser $p_r = (-1)^r s_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, en sorte qu'on ait identiquement

$$(3)\quad \varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n.$$

Dire que le polynome $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut être mis sous la forme d'un polynome en $s_1, s_2, \ldots, s_n$, ou sous la forme d'un polynome en $p_1, p_2, \ldots, p_n$, c'est évidemment dire la même chose.

Si l'on admet la proposition énoncée et si l'on a obtenu l'expression de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ comme un polynome en $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il est clair qu'on obtiendra la valeur que prend le polynome f quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'équation

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

en remplaçant, dans le polynome en $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ces dernières lettres par

$$\frac{A_1}{A_0},\quad \frac{A_2}{A_0},\quad \ldots,\quad \frac{A_n}{A_0}.$$

Le problème qui consiste à exprimer au moyen de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ un polynome symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être ramené à des problèmes plus simples.

Considérons un terme du polynome donné ; il sera de la forme

$$A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

où A est une constante et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entiers positifs ou nuls ; tous les monomes analogues qu'on déduit de celui-là en permutant d'une façon quelconque les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et en laissant les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ à leurs places, doivent figurer dans le polynome donné, avec le même coefficient A : autrement, ce polynome ne serait pas symétrique.

Si, par exemple, il s'agit d'un polynome symétrique en x_1, x_2, x_3, x_4, qui contient le terme $5x_1^3 x_2^2 x_3^2$, ce polynome doit contenir, en outre, les termes

$$\begin{gathered} 5x_1^3x_2^2x_4^2,\quad 5x_1^3x_3^2x_4^2,\quad 5x_2^3x_1^2x_3^2,\quad 5x_2^3x_1^2x_4^2,\quad 5x_2^3x_3^2x_4^2,\\ 5x_3^3x_1^2x_2^2,\quad 5x_3^3x_1^2x_4^2,\quad 5x_3^3x_2^2x_4^2,\quad 5x_4^3x_1^2x_2^2,\quad 5x_4^3x_1^2x_3^2,\\ 5x_4^3x_2^2x_3^2. \end{gathered}$$

Dans la même hypothèse, l'existence, dans le polynome proposé, du terme $7x_1^3x_2^2x_3$, où les trois exposants sont inégaux, entraînerait l'existence de vingt-trois termes analogues, puisqu'il y a vingt-quatre arrangements de quatre lettres trois à trois : tous ces termes auraient pour coefficient 7 ; les trois variables qui figurent dans un terme seraient toujours affectées des exposants 1, 2, 3.

Pour en revenir au cas général, il est naturel de réunir tous les termes distincts qui se déduisent du terme $A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ par les diverses permutations des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Il y en avait douze dans un des exemples précédents, vingt-quatre dans l'autre.) Si, ensuite, on met, dans tous ces termes, A en facteur, ce facteur multipliera une somme de termes, *tous distincts,* et qui se déduisent, comme on l'a expliqué, du monome $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$; une telle somme se représente habituellement par le symbole

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} ;$$

le nombre des termes qui y figurent est, au plus, $\nu = 1.2.3 \ldots n$; il atteint cette limite si tous les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont différents ; il serait égal à 1 si tous les exposants étaient égaux ; le terme considéré, dans ce dernier cas, serait évidemment égal à $s_n^{\alpha_1}$.

Dans cette notation, les fonctions symétriques élémentaires se représenteraient par Σx_1, $\Sigma x_1 x_2$, ..., $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_n$, la dernière étant réduite à un seul terme.

Il est clair que, si l'on savait exprimer au moyen de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les fonctions symétriques telles que $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, le problème serait résolu. Remarquons de suite que, si aucun des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n'est nul, et si α est le plus petit de ces exposants, on peut mettre en facteur $x_1^\alpha x_2^\alpha \ldots x_n^\alpha = s_n^\alpha$ dans tous les termes de la somme et ramener ainsi le problème à un problème analogue, mais relatif à une somme plus simple.

Lorsque les exposants sont suffisamment petits, on peut aisément, en partant des définitions des fonctions symétriques élémentaires, résoudre le problème posé; j'indique quelques exemples avant d'exposer les méthodes générales.

Supposons qu'il s'agisse de la fonction symétrique de trois variables x_1, x_2, x_3,

$$\Sigma x_1 x_2^2 = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_1^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 + x_3 x_2^2;$$

il est clair que tous les termes de $\Sigma x_1 x_2^2$ se trouveront dans le produit de Σx_1 par $\Sigma x_1 x_2$; ce produit contiendra en outre trois fois le terme $x_1 x_2 x_3$. On a ainsi

$$\Sigma x_1 x_2^2 = s_1 s_2 - 3 s_3;$$

on trouvera de même

$$\Sigma x_1^2 = s_1^2 - 2 s_2, \qquad \Sigma x_1^2 x_2^2 = s_2^2 - 2 s_1 s_3.$$

Soit encore à calculer $\Sigma x_1^4 x_2$; on peut ramener le calcul de cette somme au calcul de sommes analogues, mais où les exposants soient inférieurs à 3; si, en effet, on pose comme plus haut

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

il est clair qu'on aura $x_1^3 - s_1 x_1^2 + s_2 x_1 - s_3 = 0$; cette égalité ayant lieu identiquement en x_1, x_2, x_3 lorsqu'on suppose que s_1, s_2, s_3 sont remplacés par leurs expressions en x_1, x_2, x_3; on en tire

$$x_1^3 = s_1 x_1^2 - s_2 x_1 + s_3,$$

puis

$$x_1^4 = s_1 x_1^3 - s_2 x_1^2 + s_3 x_1 = s_1(s_1 x_1^2 - s_2 x_1 + s_3) - s_2 x_1^2 + s_3 x_1$$
$$= (s_1^2 - s_2) x_1^2 + (s_3 - s_1 s_2) x_1 + s_1 s_3.$$

Il est à peine utile de dire qu'on pourrait continuer et exprimer de la même façon $x_1^5, x_1^6, \ldots$ sous formes de polynomes du second degré en x_1, polynomes dont les coefficients seraient des polynomes en s_1, s_2, s_3 (1); mais c'est seulement de l'expression de x_1^4 que j'ai besoin ici. On a de même

$$x_2^4 = (s_1^2 - s_2) x_2^2 + (s_3 - s_1 s_2) x_2 + s_1 s_3,$$
$$x_3^4 = (s_1^2 - s_2) x_3^2 + (s_3 - s_1 s_2) x_3 + s_1 s_3.$$

Si, maintenant, dans les six termes de la somme $\Sigma x_1^4 x_2$, on remplace respectivement x_1^4, x_2^4, x_3^4 par les expressions précédentes, on voit d'abord que le terme $x_1^4 x_2$ se met sous la forme

$$x_1^4 x_2 = (s_1^2 - s_2) x_1^2 x_2 + (s_3 - s_1 s_2) x_1 x_2 + s_1 s_3 x_2$$

et, en faisant la somme des cinq expressions analogues, que je laisse au lecteur le soin d'écrire, on trouvera

$$\Sigma x_1^4 x_2 = (s_1^2 - s_2) \Sigma x_1^2 x_2 + 2(s_3 - s_1 s_2) \Sigma x_1 x_2 + 2 s_1 s_3 \Sigma x_1;$$

en utilisant l'expression trouvée pour $\Sigma x_1^2 x_2$, on obtient

$$\Sigma x_1^4 x_2 = (s_1^2 - s_2)(s_1 s_2 - 3 s_3) + 2(s_3 - s_1 s_2) s_2 + 2 s_1^2 s_3$$
$$= s_1^3 s_2 - s_1^2 s_3 - 3 s_1 s_2^2 + 5 s_2 s_3.$$

Sans que je m'y arrête, il suffira au lecteur de réfléchir un peu sur la méthode qu'on vient d'appliquer pour voir que, s'il a à calculer une expression de la forme $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, il pourra s'arranger toujours, en utilisant les identités $\varphi(x_1) = 0$, $x_1 \varphi(x_1) = 0$, ..., pour ramener

(1) D'une façon générale, si l'on divise x^n par $\varphi(x)$, on parvient à une identité de la forme

$$x^n = \varphi(x) Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est du second degré en x; en remplaçant dans cette identité x par x_1, on obtient

$$x_1^n = R(x_1).$$

le calcul de cette expression au calcul d'expressions analogues où les exposants seront tous inférieurs à n.

Après ces exemples, j'arrive à la démonstration du théorème fondamental, énoncé au début du présent numéro.

262. Je l'établirai d'abord pour des fonctions symétriques particulières, les sommes $\Sigma x_1^2, \Sigma x_1^3, \ldots, \Sigma x_1^r$ des puissances des variables; avec les expressions de ces sommes au moyen de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ou de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il sera aisé d'obtenir toutes les fonctions symétriques entières. Je poserai pour abréger

$$S_r = \Sigma x_1^r = x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r;$$

le problème consiste à exprimer S_r sous forme d'un polynome en $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui devienne identique à S_r quand on y remplace $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On observera d'abord que le calcul de l'expression des polynomes S_r, au moyen de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se ramène au calcul des polynomes $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, où l'indice r est inférieur à n; en effet, on a identiquement, en désignant par x_α l'une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et par k un nombre entier quelconque,

$$x_\alpha^k \varphi(x_\alpha) = x_\alpha^{n+k} + p_1 x_\alpha^{n+k-1} + p_2 x_\alpha^{n+k-2} + \ldots + p_n x_\alpha^k = 0;$$

en écrivant toutes ces identités pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et en les ajoutant membre à membre, on trouve évidemment

$$S_{n+k} + p_1 S_{n+k-1} + p_2 S_{n+k-2} + \ldots + p_n S_k = 0,$$

ou, en supposant successivement $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$(1) \quad \begin{cases} S_n + p_1 S_{n-1} + p_2 S_{n-2} + \ldots + n p_n = 0, \\ S_{n+1} + p_1 S_n + p_2 S_{n-1} + \ldots + p_n S_1 = 0, \\ S_{n+2} + p_1 S_{n+1} + p_2 S_n + \ldots + p_n S_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De la première de ces égalités on tirera S_n au moyen de S_{n-1}, $S_{n-2}, \ldots, S_1$ (et de $p_1, p_2, \ldots, p_n$); de la seconde on tirera S_{n+1} exprimé au moyen de $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1$ et par suite au moyen de $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_1, \ldots$. Tout est évidemment ramené au calcul de S_1,

$S_2, \ldots, S_{n-1}$. C'est l'application de la méthode expliquée à la fin du précédent numéro.

Les sommes $S_1 = s_1$, S_2, S_3, ..., S_{n-1} s'obtiennent au moyen de l'artifice suivant, qui est dû à Newton.

En désignant par $\varphi'(x)$ la dérivée (par rapport à x) du polynome

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = {} & \quad (x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \\ & + (x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + \ldots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \\ = {} & \frac{\varphi(x)}{x - x_1} + \frac{\varphi(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{\varphi(x)}{x - x_n}.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs (n° 54)

$$(2) \quad \begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{x - x_1} = {} & x^{n-1} + (x_1 + p_1)x^{n-2} \\ & + (x_1^2 + p_1 x_1 + p_2)x^{n-3} + \ldots + (x_1^r + p_1 x_1^{r-1} + \ldots + p_r)x^{n-r-1} \\ & + \ldots + x_1^{n-1} + p_1 x_1^{n-2} + \ldots + p_{n-1},\end{aligned}$$

et des expressions analogues pour $\dfrac{\varphi(x)}{x - x_2}$, $\dfrac{\varphi(x)}{x - x_3}$, $\cdots$, $\dfrac{\varphi(x)}{x - x_n}$; en supposant toutes ces expressions écrites et en les ajoutant, on obtiendra le polynome en x

$$\begin{aligned} & nx^{n-1} + (S_1 + np_1)x^{n-2} + (S_2 + p_1 S_1 + np_2)x^{n-3} + \ldots \\ & \quad + (S_r + p_1 S_{r-1} + \ldots + p_{r-1} S_1 + np_r)x^{n-r-1} + \ldots \\ & \quad + S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + \ldots + p_{n-2} S_1 + np_{n-1};\end{aligned}$$

puis, en égalant les coefficients de ce polynome à ceux du polynome

$$\varphi'(x) = nx^{n-1} + (n-1)p_1 x^{n-2} + \ldots + (n-r)p_r x^{n-r-1} + \ldots + p_{n-1},$$

on a, en faisant tout passer dans un membre,

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l} S_1 + p_1 = 0, \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \ldots + p_{r-1} S_1 + rp_r = 0, \\ S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + p_2 S_{n-3} + \ldots + p_{n-2} S_1 + (n-1)p_{n-1} = 0. \end{array}\right.$$

De la première de ces formules on tire $S_1 = -p_1$, résultat que l'on connaissait d'avance ; de la seconde et de la troisième on tire

$$S_2 = p_1^2 - 2p_2, \qquad S_3 = -p_1^3 + 3p_2 p_1 - 3p_3, \qquad \ldots.$$

Il serait aisé de vérifier ces formules en remplaçant dans les seconds membres $p_1, p_2, p_3, \ldots$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il est clair que les formules (1) et (3), auxquelles le nom de Newton est attaché, résolvent le problème posé et que $S_1, S_2, \ldots, S_r, \ldots$ peuvent être mis sous forme de polynomes en $p_1, p_2, \ldots, p_n$, à coefficients entiers.

On remarquera que la première des formules (1) ($k = 0$) suit la même loi que les formules (3); cette loi est changée pour les suivantes.

En adjoignant aux équations (3) la première des équations (1), à savoir

$$S_n + p_1 S_{n-1} + p_2 S_{n-2} + \ldots + p_{n-1} S_1 + np_n = 0,$$

on obtient, lorsqu'on regarde $S_1, S_2, \ldots, S_n$ comme des données, un système de n équations du premier degré qui peuvent être résolues par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ces n dernières quantités peuvent donc s'exprimer au moyen de $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (¹).

Considérons maintenant les sommes

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

au moyen desquelles on peut exprimer tout polynome symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On vient de montrer qu'une somme telle que $\Sigma x_1^{\alpha_1}$, dont chaque terme ne contient qu'une variable, peut être mise sous la forme d'un polynome en $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Passons aux sommes telles que $\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, dont chaque terme contient *deux* variables : il y a dans une telle somme $n(n-1)$ termes, si α, β sont différents; il y en a $\frac{n(n-1)}{2}$, si α est égal à β.

Dans le premier cas, tous les termes de $\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ figurent, chacun

---

(¹) On en conclut, en regardant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les racines d'une équation $\varphi(x) = 0$, dont les coefficients seraient $p_1, p_2, \ldots, p_n$, que les coefficients d'une équation sont déterminés quand on se donne la somme des racines, la somme de leurs carrés, de leurs cubes, ..., de leurs $n^{\text{ièmes}}$ puissances.

une fois, dans le produit de Σx_1^α par Σx_1^β, produit qui contient en outre $x_1^{\alpha+\beta}$ et tous les termes analogues ; on en conclut

$$\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}.$$

Dans le second cas, si l'on fait le produit de Σx_1^α par Σx_1^α, ou le carré de S_α, on voit que le terme $x_1^\alpha x_2^\alpha$ sera obtenu deux fois et l'on aura

$$2\Sigma x_1^\alpha x_2^\alpha = (S_\alpha)^2 - S_{2\alpha}.$$

On voit de même que tous les termes de la somme $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ figurent dans le produit de $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta$ par Σx_1^γ, et que l'on a, en supposant α, β, γ différents, β différent de $\alpha+\gamma$, α différent de $\beta+\gamma$,

$$\begin{aligned}
(\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta)\Sigma x_3^\gamma &= S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma \\
(\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta)\Sigma x_3^\gamma &= \Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma + \Sigma x_1^{\alpha+\gamma} x_2^\beta + \Sigma x_1^\alpha x_2^{\beta+\gamma} \\
&= \Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma + S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma} + S_\alpha S_{\beta+\gamma} - S_{\alpha+\beta+\gamma},
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\beta+\gamma} S_\alpha - S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_{\alpha+\beta} S_\gamma + 2 S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Il est facile de voir les modifications qu'il y a lieu de faire à cette formule dans les cas d'exception. En procédant ainsi de proche en proche, on aperçoit comment tout polynome symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être mis sous la forme d'un polynome en S_1, S_2, S_3, ..., et, par suite, sous la forme d'un polynome en p_1, p_2, ..., p_n.

263. Méthode de Waring. — La méthode précédente n'est pas toujours la plus commode pour le calcul d'une fonction symétrique. Celle que je vais exposer, outre ses avantages pratiques, va mettre en évidence d'importantes propriétés. Elle repose essentiellement sur une manière d'ordonner un polynome à n variables x_1, x_2, ..., x_n, symétrique ou non.

Imaginons que les variables x_1, x_2, ..., x_n soient rangées sur une échelle verticale, en descendant : x_1 est sur l'échelon le plus haut, x_2 sur celui qui est au-dessous, ... De deux variables, celle qui a le moindre indice est sur un échelon plus élevé que l'autre ; je dirai qu'elle est plus *haute* que l'autre.

Considérons deux monomes

$$A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}, \qquad B x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n},$$

où A, B sont des constantes, où $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des entiers positifs ou nuls. Je dirai du premier monome qu'il est plus *haut* que le second, si l'on a $a_1 > b_1$; ou, dans le cas où l'on aurait $a_1 = b_1$, si l'on a $a_2 > b_2$; ou, dans le cas où l'on aurait à la fois $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, si l'on a $a_3 > b_3$, etc. En d'autres termes, la première des différences $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, $\ldots$, $a_n - b_n$ qui n'est pas nulle indique, par son signe, lequel des deux monomes est plus haut que l'autre : c'est le premier, si cette différence est positive; les différences qui suivent n'interviennent pas (¹).

De deux monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne sont pas semblables, l'un est nécessairement plus haut que l'autre. Deux monomes semblables sont regardés comme de la même hauteur.

Si l'on fait abstraction des coefficients, il n'y a qu'un nombre limité de monomes qui soient moins hauts qu'un monome donné.

Étant donné un polynome (réduit) en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut en ranger les termes de manière que chaque terme soit plus haut que ceux qui le suivent; par exemple les fonctions symétriques élémentaires de x_1, x_2, x_3, x_4, ainsi ordonnées, s'écrivent,

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4, \\ x_1 x_2 x_3 x_4. \end{gathered}$$

Si l'on fait le produit de deux polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ainsi ordonnés, le terme le plus haut du produit proviendra évidemment, sans réduction, des premiers termes des deux facteurs. Cette observation s'étend au produit d'un nombre quelconque de polynomes.

Considérons, par exemple, l'expression

$$A s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_n^{\alpha_n},$$

(¹) C'est d'après une règle toute pareille qu'on reconnaît, de deux nombres entiers écrits dans le système décimal, lequel est le plus grand. La façon d'ordonner un polynome que l'on indique ici serait identique à celle que l'on a indiquée à l'exercice 40, si l'on convenait de ranger les variables non dans l'ordre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais dans l'ordre inverse $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

où A est une constante, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres entiers positifs ou nuls, et où $s_1, s_2, \ldots, s_n$ représentent les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cherchons quel est, dans ce polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, supposé développé et réduit, le terme le plus haut.

Les termes les plus hauts, dans $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$, sont respectivement

$$x_1, \quad x_1x_2, \quad x_1x_2x_3, \quad \ldots, \quad x_1x_2x_3\ldots x_n;$$

ils sont, dans $s_1^{\alpha_1}, s_2^{\alpha_2}, s_3^{\alpha_3}, \ldots, s_n^{\alpha_n}$,

$$x_1^{\alpha_1}, \quad x_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_2}, \quad x_1^{\alpha_3}x_2^{\alpha_3}x_3^{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad x_1^{\alpha_n}x_2^{\alpha_n}x_3^{\alpha_n}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Le terme le plus haut dans $A s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}\ldots s_n^{\alpha_n}$ est donc

$$A\, x_1^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} x_2^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les termes les plus hauts qui proviennent du développement de deux monomes en $s_1, s_2, \ldots, s_n$ qui ne sont pas semblables,

$$A\, s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}\ldots s_n^{\alpha_n}, \quad A' s_1^{\alpha'_1} s_2^{\alpha'_2}\ldots s_n^{\alpha'_n},$$

ne peuvent être de la même hauteur, car les égalités

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n &= \alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n, \\ \alpha_2+\ldots+\alpha_n &= \alpha'_2+\ldots+\alpha'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_n &= \alpha'_n \end{aligned}$$

entraînent évidemment $\alpha_1 = \alpha'_1$, $\alpha_2 = \alpha'_2$, $\ldots$, $\alpha_n = \alpha'_n$. Si, des deux monomes en $s_1, s_2, \ldots, s_n$, il y en a un qui est (en $s_1, s_2, \ldots, s_n$) de degré plus élevé que l'autre ($\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n > \alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n$), c'est évidemment celui-là qui fournit le terme le plus haut. Convenons de dire, en général, de deux monomes en $s_1, s_2, \ldots, s_n$, que le premier est plus haut que l'autre, si le plus haut terme du développement qu'il fournit est plus haut que le plus haut terme du développement que fournit le second. Alors, des deux monomes en $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que l'on vient d'écrire, le premier sera le plus haut si la première des différences

$$\begin{array}{c}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)-(\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n),\\ (\alpha_2+\ldots+\alpha_n)-\qquad(\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n-\alpha'_n,\end{array}$$

qui ne s'annule pas est positive.

Il est clair que tout polynome en $s_1, s_2, \ldots, s_n$ peut être ordonné de façon que chacun de ses termes soit plus haut que ceux qui le suivent.

Ceci posé, partons d'un polynome $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et admettons qu'il existe un polynome $F(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui lui devienne identique quand on y remplace $s_1, s_2, \ldots, s_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on va voir comment, en supposant les deux polynomes f et F ordonnés ainsi qu'on l'a expliqué, les termes successifs de F se déterminent d'une façon nécessaire. Réciproquement, la façon dont seront obtenus ces termes montrera que le polynome formé par leur réunion répond à la question.

Soient, en désignant par A et A' des constantes, par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entiers positifs ou nuls,

$$A x_1^{a_1} x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}, \quad A' s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}\ldots s_n^{\alpha_n}$$

les termes les plus hauts dans f et dans F, respectivement : dans le développement de F, le terme le plus haut proviendra de celui que l'on vient d'écrire, il sera

$$A' x_1^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} x_2^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n}\ldots x_n^{\alpha_n};$$

il devra être identique au premier terme de f, c'est-à-dire qu'on devra avoir $A' = A$, puis

$$\begin{array}{r}\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=a_1,\\ \alpha_2+\ldots+\alpha_n=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \alpha_n=a_n,\end{array}$$

et, par conséquent,

$$\alpha_1=a_1-a_2, \qquad \alpha_2=a_2-a_3, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{n-1}=a_{n-1}-a_n, \qquad \alpha_n=a_n.$$

Ainsi, le premier terme de F sera

$$A s_1^{a_1-a_2} s_2^{a_2-a_3} \ldots s_n^{a_n}.$$

Désignons maintenant par $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le polynome que l'on obtient en remplaçant dans la différence

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A s_1^{a_1-a_2} s_2^{a_2-a_3} \ldots s_n^{a_n},$$

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, développant et réduisant; ce polynome, différence de deux polynomes symétriques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est lui-même symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; il ne contient plus de terme aussi haut qu'en contenait $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ce polynome f_1 doit être identique au polynome en $s_1, s_2, \ldots, s_n$

$$F_1 = F - A s_1^{a_1-a_2} s_2^{a_2-a_3} \ldots s_n^{a_n},$$

lorsqu'on y remplace $s_1, s_2, \ldots, s_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si donc on désigne par

$$B x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n},$$

le plus haut terme de f_1, le premier terme de F_1 (le second terme de F) devra être

$$B s_1^{b_1-b_2} s_2^{b_2-b_3} \ldots s_n^{b_n} \ldots.$$

Tous les termes de F se détermineront ainsi individuellement les uns après les autres; l'opération se terminera sûrement, puisque, à chaque fois, le plus haut terme est moins haut que dans l'opération précédente, et qu'il n'y a qu'un nombre fini de monomes, moins hauts qu'un monome donné.

Il est à remarquer que c'est précisément la méthode qui vient d'être exposée, qu'on a appliquée, d'une façon un peu inconsciente, dans les exemples simples traités au n° 261. Reprenons le calcul des quantités $\Sigma x_1^2 x_2$, $\Sigma x_1^2 x_2^2$ en supposant maintenant qu'il y ait n variables. Pour $f = \Sigma x_1^2 x_2$, la méthode de Waring fournit $s_1^{2-1} s_2^1$ comme premier terme de F; le produit $s_1 s_2$ est d'ailleurs égal à $\Sigma x_1^2 x_2 + 3\Sigma x_1 x_2 x_3$; dans ce produit, en effet, le terme $x_1 x_2 x_3$, par exemple, est obtenu trois fois, comme produit de $x_2 x_3$ par x_1, de $x_1 x_3$ par x_2, de $x_1 x_2$ par x_3. On a donc

$$\Sigma x_1^2 x_2 = s_1 s_2 - 3 s_3.$$

Pour $f = \Sigma x_1^2 x_2^2$, la méthode de Waring fournit $s_1^0 s_2^2$ comme premier terme de F; on a d'ailleurs

$$s_2^2 = \Sigma x_1^2 x_2^2 + 2\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4$$

(dans le carré, le terme $2x_1 x_2 x_3 x_4$ est répété trois fois, comme double produit de $x_1 x_2$ par $x_3 x_4$, de $x_1 x_3$ par $x_2 x_4$. de $x_2 x_3$ par $x_1 x_4$). Tout est ramené au calcul de $\Sigma x_1^2 x_2 x_3$; la même méthode fournit $s_1^{2-1} s_2^0 s_3^1$ comme premier terme du polynome en $s_1, s_2, \ldots,$ qui doit être identique à $\Sigma x_1^2 x_2 x_3$; le produit $s_1 s_3$ est d'ailleurs égal à $\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 4\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4$; on a donc

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 = s_2^2 - 6s_4 - 2(s_1 s_3 - 4s_4) = s_2^2 - 2s_1 s_3 + 2s_4.$$

C'est au même résultat que conduit la méthode de Newton, en partant de l'égalité $\Sigma x_1^2 x_2^2 = \frac{1}{2}(S_2^2 - S_4)$.

264. De la méthode de Waring résultent immédiatement les propriétés suivantes, pour l'énoncé et la démonstration desquelles je reprends les notations employées dans l'exposition de cette méthode.

Étant donné un polynome f, symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il n'y a qu'un polynome F en $s_1, s_2, \ldots, s_n$ qui devienne identique à f quand on y remplace $s_1, s_2, \ldots, s_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En effet, les monomes qui constituent F se déterminent l'un après l'autre, d'une façon nécessaire.

Les coefficients du polynome F s'expriment en fonction linéaire, à coefficients entiers, des coefficients du polynome f : cela est clair, en effet, pour le premier A; d'ailleurs les coefficients du polynome f_1, symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, auquel on ramène le calcul, s'obtiennent évidemment en retranchant des coefficients de f les produits par A de certains nombres entiers, etc. En particulier, si les coefficients de f sont des nombres entiers, il en sera de même des coefficients de F. Que les coefficients de f s'expriment en fonction linéaire, à coefficients entiers, des coefficients de F, c'est ce qui est bien évident.

Quand on regarde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ comme des variables, le degré de F est le degré de son plus haut terme, c'est-à-dire

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + a_n = a_1;$$

c'est le degré le plus élevé avec lequel figure dans f l'une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ce degré est ce qu'on appelle *l'ordre* de la fonction symétrique $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Supposons que celle-ci soit homogène et de degré p en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont, en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des polynomes homogènes des degrés respectifs $1, 2, \ldots, n$. Un terme quelconque

$$L s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \ldots s_n^{\lambda_n}$$

de F sera un polynome homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n$. Dans le développement, les termes qui ne sont pas de même degré ne peuvent se réduire entre eux; pour que le développement soit homogène et de degré p, il faut donc que l'on ait, pour chaque terme,

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = p.$$

On appelle *poids* d'un monome en $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on vient d'apprendre à calculer. Tous les termes du polynome $F(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui devient identique à une fonction symétrique homogène $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quand on y remplace $s_1, s_2, \ldots, s_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, doivent être d'un même poids égal au degré m de f en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

265. J'ajoute quelques brèves indications sur une autre méthode de calcul des fonctions symétriques qui est due à Cauchy et qui mériterait une étude plus approfondie.

Observons d'abord, en conservant toujours les mêmes notations, que lorsqu'on sait mettre un polynome f symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sous la forme

$$(1) \qquad P_0 x_n^k + P_1 x_n^{k-1} + \ldots + P_k,$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_k$ sont des polynomes en $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (et, par conséquent, des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$), il est aisé d'avoir son expression au moyen de $p_1, p_2, \ldots, p_n$; si, en effet, dans le polynome précédent, où je suppose que $p_1, p_2, \ldots, p_n$, qui figurent dans $P_0, P_1, \ldots, P_k$, soient remplacés par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on échange les lettres x_n et x_1, x_n et x_2, ..., x_n et x_{n-1}, le polynome ne change pas, puisqu'il est identique au polynome f, symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; mais cet échange ne trouble en rien $P_0, P_1, \ldots, P_k$ qui sont eux-mêmes symétriques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; cela revient à dire que le polynome en x

$$P_0 x^k + P_1 x^{k-1} + \ldots + P_k - f$$

est identiquement nul quand on y remplace x par x_1, par x_2, ..., par x_n, ou qu'il est divisible par $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, ou encore que f est le reste de la division par $\varphi(x)$ du polynome $P_0 x^k + P_1 x^{k-1} + \ldots + P_k$, reste d'où x disparaît nécessairement : en effectuant la division par

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$

du polynome $P_0 x^k + P_1 x^{k-1} + \ldots + P_k$, où P_0, P_1, ..., P_k sont des polynomes en p_1, p_2, ..., p_n, le reste (indépendant de x) fournira l'expression cherchée de f. Si, en particulier, k était inférieur à n, il faudrait, pour que le polynome $P_0 x^k + P_1 x^{k-1} + \ldots + P_k - f$ fût divisible par $\varphi(x)$ que ce polynome en x fût identiquement nul, en sorte que P_k serait l'expression cherchée de f.

Au lieu de faire une division, on peut se servir des identités

$$\varphi(x_n) = 0, \qquad x_n \varphi(x_n) = 0, \qquad x_n^2 \varphi(x_n) = 0, \qquad \ldots,$$

pour faire disparaître de l'expression (1) les puissances de x_n supérieures à $n - 1$; les autres disparaissent d'elles-mêmes; il ne reste plus qu'un polynome en p_1, p_2, ..., p_n, qui est l'expression cherchée du polynome f.

Il est d'ailleurs certain que tout polynome symétrique en x_1, x_2, ..., x_{n-1} peut être mis sous forme d'un polynome en x_n dont les coefficients sont des polynomes en p_1, p_2, ..., p_n; en effet, l'identité

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{x - x_n} &= (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \\ &= x^{n-1} + (x_n + p_1)x^{n-2} + (x_n^2 + p_1 x_n + p_2)x^{n-3} + \ldots \\ &\quad + x_n^{n-1} + p_1 x_n^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\end{aligned}$$

montre que les fonctions symétriques élémentaires des $n - 1$ variables x_1, x_2, .., x_{n-1} sont identiquement égales à

$$-(x_n + p_1), \quad x_n^2 + p_1 x_n + p_2, \quad -(x_n^3 + p_1 x_n^2 + p_2 x_n + p_3), \quad \ldots$$

(x_n disparaît de ces quantités quand on y remplace p_1, p_2, ..., p_n par leurs expressions en x_1, x_2, ..., x_n); tout polynome symétrique en x_1, x_2, ..., x_{n-1} pouvant s'exprimer au moyen des fonctions symétriques élémentaires de x_1, x_2, ..., x_{n-1}, la proposition est évidente.

Si maintenant on considère un polynome f symétrique en x_1, x_2, ..., x_n, on peut l'ordonner par rapport à x_n; les coefficients sont des fonctions symétriques en x_1, x_2, ..., x_{n-1}. Admettons qu'on sache résoudre le problème pour les fonctions symétriques de $n - 1$ variables, c'est-à-dire qu'on sache exprimer une telle fonction symétrique au moyen des fonctions symétriques élémentaires de ces $n - 1$ variables, on saura, par la méthode même qu'on vient d'expliquer, mettre le polynome f, symétrique en x_1, x_2, ..., x_n, sous forme d'un polynome en x_n dont les coefficients sont des polynomes en p_1,

$p_2, \ldots, p_n$, puis finalement obtenir l'expression de f au moyen de p_1, $p_2, \ldots, p_n$.

On voit que cette méthode ramène le calcul d'une fonction symétrique de n variables au calcul d'une fonction symétrique de $n-1$ variables. Le calcul d'une fonction symétrique de deux variables est aisé, il permet d'obtenir l'expression d'une fonction symétrique de trois, quatre variables, etc.

266. Puisque l'on sait exprimer une fonction symétrique entière des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen des fonctions symétriques élémentaires $s_1, s_2, \ldots, s_n$, on sait, comme il a été dit plus haut, calculer ce que devient une fonction symétrique quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les racines d'une équation dont on connaît les coefficients : on n'a qu'à substituer dans l'expression trouvée les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ou de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ quand on y suppose que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation, valeurs que fournissent de suite les coefficients de cette équation.

Toutefois, quand on a à calculer une fonction symétrique des racines d'une équation, on ne s'astreint pas, le plus souvent, à calculer son expression générale au moyen de $s_1, s_2, \ldots, s_n$; on profite, dès qu'on le peut, des simplifications qui peuvent résulter des valeurs numériques des coefficients. Il est clair, en particulier, que les formules de Newton, si l'on y regarde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme remplacés par les coefficients de l'équation donnée, fournissent, en résolvant par rapport à $S_1, S_2, S_3, \ldots$, la somme des racines, des carrés des racines, de leurs cubes, etc., ou, comme on dit, des *puissances semblables* des racines de cette équation. En appliquant, par exemple, cette formule à la recherche des puissances semblables de l'équation binome $x^n - 1 = 0$, on reconnaît de suite que la somme des $r^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de cette équation est nulle, sauf dans le cas où r est divisible par n, auquel cas la somme est n. De même quand on applique la méthode de Waring ou qu'on combine diverses méthodes, il est commode de donner de suite à $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ou à $p_1, p_2, \ldots, p_n$ leurs valeurs numériques et de regarder $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les racines de l'équation proposée.

Au lieu de représenter ces racines par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut aussi bien, si l'on veut éviter les confusions qui naissent facilement de l'emploi des indices, les désigner par des lettres distinctes, telles que $a, b, c, \ldots$; l'ordre de succession de ces lettres, dans l'application de la méthode de Waring, se substitue à l'ordre des indices, c'est-à-dire qu'on regardera, par exemple, chacune des lettres a, b, c, ..., comme plus *haute* que celle qui la suit. On simplifie autant qu'on le peut la fonction symétrique à calculer en se servant des valeurs connues des fonctions symétriques élémentaires de a, b, c, ..., ou, ce qui est la même chose, des relations entre les coefficients de l'équation donnée et de ses racines, ou en se servant des formules de Newton, ou encore en se servant de l'équation proposée, que doivent vérifier a, b, c, ..., de manière à faire disparaître les termes où quelque racine figurerait à un degré plus élevé que celui de l'équation. On applique ensuite, d'une façon plus ou moins régulière, la méthode de Waring, en faisant disparaître, du polynome donné, les termes les plus hauts, et en le réduisant ainsi, petit à petit.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer

$$\Sigma a^3 b^2 = a^3 b^2 + a^3 c^2 + a^2 b^3 + a^2 c^3 + b^3 c^2 + b^2 c^3,$$

en désignant par a, b, c les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

On remplacera d'abord a^3, b^3, c^3 par $-pa - q$, $-pb - q$, $-pc - q$, et l'on sera ramené à calculer

$$-\Sigma(pa + q)b^2 = -p\Sigma a^2 b - 2q\Sigma a^2.$$

On a déjà calculé

$$\Sigma a^2 b = 3q, \qquad \Sigma a^2 = -2q,$$

on a donc

$$\Sigma a^3 b^2 = -3pq + 4pq = pq.$$

Si l'on avait, pour la même équation, à calculer $\Sigma a^5 b^2 c$, on remarquerait d'abord que $abc = -q$ se met en facteur dans chaque terme de la somme, il reste à calculer

$$\begin{aligned}\Sigma a^4 b = \Sigma(-a^2 p - aq)b &= -p\Sigma a^2 b - 2q\Sigma ab \\ &= -3pq - 2pq = -5pq;\end{aligned}$$

on a finalement

$$\Sigma a^5 b^2 c = 5pq^2.$$

Désignons par a, b, c, d les racines de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

et posons

$$\alpha = ab + cd, \qquad \beta = ac + bd, \qquad \gamma = ad + bc;$$

il est aisé de constater que les trois quantités

$$\alpha + \beta + \gamma, \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \alpha\beta\gamma$$

sont des fonctions symétriques de a, b, c, d : on va les exprimer au moyen des coefficients A, B, C, D de l'équation du troisième degré. On a

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \Sigma ab = B, \\ \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta &= \Sigma a^2 bc, \\ \alpha\beta\gamma &= \Sigma a^3 bcd + \Sigma a^2 b^2 c^2. \end{aligned}$$

Le calcul de $\Sigma a^2 bc$ (ou de $\sum x_1^2 x_2 x_3$) a déjà été fait; on a

$$\Sigma a^2 bc = AC - 4D.$$

On a d'ailleurs

$$\Sigma a^3 bcd = abcd\, \Sigma a^2 = D(A^2 - 2B);$$

puis, en appliquant encore la méthode de Waring,

$$\begin{aligned} \Sigma a^2 b^2 c^2 &= (\Sigma abc)^2 - 2\Sigma a^2 b^2 cd \\ &= C^2 - 2abcd\, \Sigma ab = C^2 - 2BD, \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= B, \\ \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta &= AC - 4D, \\ \alpha\beta\gamma &= D(A^2 - 2B) + C^2 - 2BD \\ &= A^2 D + C^2 - 4BD. \end{aligned}$$

En sorte que α, β, γ sont les racines de l'équation

$$z^3 - Bz^2 + (AC - 4D)z + 4BD - A^2 D - C^2 = 0.$$

Je laisse au lecteur le soin de montrer que, si l'on connaît une racine z de cette équation, la résolution de l'équation du quatrième degré se ramène à la résolution des équations

$$u^2 - zu + D = 0, \qquad x^2 - \frac{Au - C}{z - 2u}x + u = 0.$$

Appliquons la méthode de Cauchy au calcul de la fonction symétrique $R = (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$ des racines a, b, c de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Je vais chercher à mettre R sous forme d'un polynome en a dont les coefficients soient des polynomes en p, q; b et c sont les racines de l'équation

$$x^2 + ax + a^2 + p = 0.$$

On a, par suite,

$$(b-c)^2 = a^2 - 4(a^2+p) = -3a^2 - 4p;$$

d'autre part $(a-c)(a-b)$ s'obtient en remplaçant x par a dans

$$x^2 + ax + a^2 + p;$$

on a donc

$$(a-c)(a-b) = 3a^2 + p$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(a-c)^2(a-b)^2 &= 9a^4 + 6pa^2 + p^2\\ &= 9a(-pa-q) + 6pa^2 + p^2\\ &= -3pa^2 - 9qa + p^2,\end{aligned}$$

et, enfin,

$$\begin{aligned}R &= (3a^2+4p)(3pa^2+9qa-p^2)\\ &= 9pa^4 + 27qa^3 + 9p^2a^2 + 36pqa - 4p^3\\ &= 9pa(-pa-q) + 27q(-pa-q) + 9p^2a^2 + 36pqa - 4p^3\\ &= -4p^3 - 27q^2.\end{aligned}$$

2. — ÉLIMINATION.

267. Éliminer x entre deux équations $f(x)=0$, $g(x)=0$, c'est trouver la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les coefficients de ces deux équations pour qu'elles puissent être vérifiées par une même valeur de x.

Plus généralement éliminer n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre $n+1$ équations $f_1=0$, $f_2=0$, $\ldots$, $f_{n+1}=0$, c'est trouver la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les coefficients de ces équations pour qu'il y ait un système de valeurs des inconnues qui vérifient à la fois les $n+1$ équations.

A ce problème se relie immédiatement la question suivante : La condition pour que les $n+1$ équations admettent une solution étant vérifiée, trouver cette solution.

Le problème général n'offre aucune difficulté lorsque n des $n+1$ équations sont du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on résout alors ces n équations par rapport à ces n inconnues et l'on substitue les résultats dans la $(n+1)^{\text{ième}}$, qui doit être vérifiée après la substitution.

Dans ce qui suit, je me bornerai au cas de deux équations $f(x)=0$, $g(x)=0$, en supposant que $f(x)$, $g(x)$ soient des polynomes en x. Il s'agit de trouver la condition pour que les deux équations aient une racine commune, et de trouver cette racine commune.

Si les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ ont une racine commune a, ces deux polynomes ont un diviseur commun $x-a$; s'ils ont un diviseur commun, ils ont autant de racines communes que ce diviseur admet de racines. Le problème posé se ramène donc à celui-ci : trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes aient un diviseur commun, et trouver ce diviseur commun.

Le premier de ces problèmes a été traité aux n^{os} 167...170; il va être repris par des méthodes indépendantes de celles qu'on a développées alors.

Quant au second problème, la théorie du plus grand commun diviseur en fournit immédiatement la solution. Lorsque les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ ont une ou plusieurs racines communes, on trouve cette racine commune ou ces racines communes en cherchant le plus grand commun diviseur des deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ et en résolvant l'équation obtenue en égalant à o ce plus grand commun diviseur. Je rappelle que, lorsque les deux polynomes n'ont qu'une racine commune, lorsque leur diviseur commun est du premier degré, cette racine commune s'exprime rationnellement au moyen des coefficients des deux polynomes (n° 71). Elle est réelle si ces coefficients sont réels.

On a déjà fait observer que la solution des deux problèmes posés était immédiate quand l'un des polynomes est du premier degré : si l'on a, par exemple, $g(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$, la condition cherchée est $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, et, si cette condition est vérifiée, la racine commune est $-\frac{b}{a}\cdot$

Il est encore aisé de résoudre ces deux problèmes quand l'un des polynomes est du second degré : Supposons, par exemple, que l'on ait $g(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, on fera la division de $f(x)$ par $g(x)$ au sens du n° 51; soient $Q(x)$ le quotient et $Ax+B$ le reste, on aura identiquement en x

$$f(x)=(ax^2+bx+c)Q(x)+Ax+B;$$

toute valeur de x annulant ax^2+bx+c et $f(x)$ annule $Ax+B$; supposons d'abord que A ne soit pas nul, la valeur de x qui annule $Ax+B$ est $x=-\frac{B}{A}$; si cette valeur annule ax^2+bx+c, c'est-à-dire si l'on a

$$aB^2-bAB+cA^2=0,$$

elle annulera évidemment $f(x)$. On vient donc d'écrire, dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ aient une solution commune, et cette solution $x=-\frac{B}{A}$ s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de $f(x)$ et de $g(x)$.

Si l'on a $A=0$, il faut évidemment, pour que les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ aient une solution commune, que l'on ait, en outre, $B=0$; dans ce cas, $f(x)$ est divisible par ax^2+bx+c; les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ ont en commun les deux racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Les conditions $A=0$, $B=0$ sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations $f(x)=0$, $g(x)=0$ aient deux racines communes.

Supposons, par exemple,

$$f(x)=x^3+px+q, \qquad g(x)=f'(x)=3x^2+p;$$

le reste de la division de x^3+px+q par $3x^2+p$ s'obtient en remplaçant x^2 par $-\frac{p}{3}$; il est $-\frac{2px}{3}+q$. Si p n'est pas nul, la condition pour que $f(x)$ et $f'(x)$ aient une solution commune est

$$p+\frac{27q^2}{4p^2}=0 \qquad \text{ou} \qquad 4p^3+27q^2=0,$$

la racine commune est $x=\frac{3q}{2p}$. Si l'on a $p=0$, il faut, pour l'existence d'une racine commune, que q soit nul; les deux équations ont alors la racine commune (double) $x=0$.

Cette méthode s'applique sans difficulté à deux équations du second degré; toutefois, l'artifice suivant permet d'obtenir plus rapidement le résultat. Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} a\,x^2+b\,x+c=0, \\ a'x^2+b'x+c'=0, \end{cases}$$

les deux équations données; supposons qu'elles aient une solution commune et désignons-la par x; les deux égalités précédentes seront alors des identités; on peut aussi bien les regarder comme des équations du premier degré à deux inconnues, qui s'appelleraient x^2 et x, et dont les valeurs, en supposant $ab' - a'b \neq 0$, ne peuvent être que

$$x^2 = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \qquad x = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b};$$

réciproquement, ces valeurs mises à la place de x^2 et de x vérifient les équations précédentes; si les deux équations en x ont une solution commune, celle-ci ne peut être que $\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$ et son carré doit être égal à $\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$; d'ailleurs, l'on a

$$\left(\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}\right)^2 = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},$$

les deux équations en x sont vérifiées quand on remplace x par $\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$ et x^2 par le carré de cette quantité : elles admettent une solution commune.

Lorsque $ab' - a'b$ est différent de 0, *la condition*

$$(2) \qquad (ca' - c'a)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient une racine commune, qui est alors $\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

Examinons maintenant le cas où $ab' - a'b$ est nul, et supposons d'abord que a, a' soient différents de 0, en sorte que les équations (1) soient effectivement du second degré. Les deux équations (1) considérées comme des équations du premier degré à deux inconnues x^2 et x ne peuvent avoir de solution que si l'on a $a'c - ac' = 0$, égalité qui, jointe aux conditions $ab' - a'b = 0$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, entraîne $bc' - b'c = 0$: les deux équations en x ont alors leurs coefficients proportionnels; leurs deux racines sont les mêmes.

Si l'on a $ab' - a'b = 0$ et $a = 0$, il faut que l'on ait soit $b = 0$, soit $a' = 0$. Dans le premier cas, la première équation ne pourrait être vérifiée que si l'on avait $c = 0$; elle serait alors une identité, et l'on pourrait dire encore que les deux équations ont leurs racines communes. Si l'on a à la fois $a=0$, $a'=0$, les deux équations proposées se réduisent au premier degré et n'ont pas, *à proprement parler*, de racine commune, sauf dans le cas où l'on aurait

$$bc'-b'c=0.$$

Observons que, si l'on a $ab'-ba'=0$, la condition (2) entraîne $ca'-c'a=0$. Les deux conditions

$$ab'-ba'=0, \qquad ac'-ca'=0$$

entraînent soit $bc'-b'c=0$, soit $a=0$, $a'=0$. On conclut de là que la condition (2) est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (1) aient une ou deux racines communes ou pour que l'on ait $a=0$, $a'=0$. Si l'on convient de dire qu'une équation du second degré a une racine infinie quand le coefficient de x^2, dans cette équation, devient nul, on peut dire que la condition (2) est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) aient au moins une racine commune, ou pour qu'elles aient l'une et l'autre une racine infinie.

La condition pour que deux équations du second degré aient une racine commune peut se mettre aussi sous la forme

$$(2ac'+2a'c-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')=0.$$

Le premier membre de cette égalité est en effet identique au premier membre de l'égalité (2), au facteur 4 près.

268. Transformation des équations. Cas simples. — Les cas simples du problème de l'élimination que l'on vient de traiter suffisent à résoudre quelques problèmes faciles relatifs à la *transformation des équations*.

Une équation de degré n

$$(1) \qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

étant donnée, on demande de former une équation de même degré dont les racines soient celles de l'équation (1) augmentées, diminuées d'un même nombre, multipliées, divisées par un même nombre, ou encore dont les racines soient les inverses, ou les carrés, des racines de l'équation (1).

Supposons qu'on veuille, par exemple, trouver une équation dont les racines soient les racines de l'équation $f(x) = 0$, diminuées de h. En désignant par x une racine de l'équation $f(x) = 0$ et par y la racine correspondante de l'équation cherchée, on devra avoir

$$y = x - h, \qquad x = y + h,$$

par conséquent, y devra vérifier l'équation $f(y+h) = 0$; réciproquement, si y vérifie cette équation, il est clair que $x = y + h$ devra vérifier l'équation proposée.

Les racines de l'équation (en y), $f(y+h) = 0$, obtenue en éliminant x entre les deux équations

$$f(x) = 0, \qquad y = x - h,$$

seront donc les racines de l'équation $f(x) = 0$, diminuées du nombre h.

Au surplus, le résultat se vérifie immédiatement sur la formule de décomposition en facteurs. Si l'on désigne par x_1, x_2, ..., x_n les racines de l'équation (1), on a identiquement en x

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

et, par suite, identiquement en y,

$$f(y+h) = a_0(y + h - x_1)(y + h - x_2)\ldots(y + h - x_n);$$

on voit que les racines de l'équation $f(y+h) = 0$ sont $x_1 - h$, $x_2 - h$, ..., $x_n - h$; cette façon de raisonner montre clairement, en particulier, qu'à une racine multiple de l'équation $f(x) = 0$ correspond une racine multiple, du même ordre de multiplicité, de l'équation $f(y+h) = 0$.

On voit de même que les racines de l'équation $f\left(\frac{y}{k}\right) = 0$ obtenues en éliminant x entre les équations $f(x) = 0$, $y = kx$ sont les racines de l'équation $f(x) = 0$, multipliées par le facteur k;

Que l'équation $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, obtenue en éliminant x entre les équations $f(x) = 0$, $x = \frac{1}{y}$, admet comme racines les inverses des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Il est clair que, dans ces divers cas, si l'on sait résoudre l'équation en y, on sait, par cela même, résoudre l'équation en x, et réciproquement. Il peut se faire que l'une des deux équations soit plus simple que l'autre.

Au lieu d'employer une nouvelle lettre (y) pour désigner la nouvelle inconnue, on conserve souvent la même lettre x; ainsi on dira que les racines de l'équation $f(x+h)=0$ (la transformée en $x+h$) sont les racines de l'équation $f(x)=0$ diminuées de h; que les racines de l'équation $f\left(\frac{x}{k}\right)=0$ $\left(\text{la transformée en } \frac{x}{k}\right)$ sont les racines de l'équation $f(x)=0$ multipliées par k; que les racines de l'équation $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $\left(\text{la transformée en } \frac{1}{x}\right)$ sont les inverses des racines de l'équation $f(x)=0$.

La première transformation, le changement de x en $x+h$, permet, en choisissant h convenablement, de faire disparaître le terme en x^{n-1}; on a en effet

$$a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \ldots + a_n = a_0 x^n + \left(\frac{n}{1} a_0 h + a_1\right) x^{n-1} + \ldots;$$

il suffira de prendre $h = -\frac{a_1}{n a_0}$: la résolution de l'équation proposée, du degré n, est ramenée à la résolution d'une équation analogue, mais où manque le terme de degré $n-1$.

S'il s'agit par exemple de l'équation du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

on voit que son premier membre devient, en remplaçant x par $x - \frac{b}{3a}$,

$$\begin{aligned} a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x-\frac{b}{3a}\right) + d \\ = ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2}. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}, \qquad q = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3},$$

la résolution de l'équation proposée est ramenée à la résolution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Lorsqu'on aura résolu cette dernière équation, il suffira d'ajouter $-\frac{b}{3a}$ à chacune de ses racines pour avoir les racines de l'équation proposée.

Le changement de x en $\frac{x}{k}$ remplace l'équation (1), après avoir multiplié par k^n, par l'équation

$$a_0 x^n + a_1 k x^{n-1} + a_2 k^2 x^{n-2} + \ldots + a_n k^n = 0;$$

il est utilisé, lorsque l'équation proposée a ses coefficients entiers, pour la remplacer par une équation ayant aussi ses coefficients entiers, mais où le coefficient de x^n est l'unité; on y parvient toujours en prenant $k = a_0$, puisque, alors, tous les coefficients sont divisibles par a_0.

La transformée en $-x$ d'une équation, qui s'obtient en changeant x en $-x$ dans son premier membre, ou, ce qui revient au même, en changeant le signe, soit de tous les coefficients de tous les termes de degré impair, soit de tous les coefficients des termes de degré pair (y compris le terme constant), a pour racines les racines de l'équation proposée changées de signe. L'équation $x^3 + px - q = 0$ est la transformée en $-x$ de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Pour que les deux équations $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$, dont chacune est la transformée en $-x$ de l'autre, aient les mêmes racines, il faut qu'à chaque racine de l'équation $f(x) = 0$ corresponde une racine symétrique (de même ordre de multiplicité) de la même équation. Une racine nulle est à elle-même sa propre symétrique; écartons le cas où l'équation $f(x) = 0$ aurait de telles racines, c'est-à-dire le cas où le terme constant est nul; les racines de l'équation $f(x)$ devront pouvoir se ranger par couples tels que x_1 et $-x_1$, x_2 et $-x_2$, ...; elle devra, par conséquent, être de degré pair. En appliquant la formule de décomposition en facteurs, on voit que l'on aura identiquement

$$f(x) = a_0(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\ldots.$$

Le second membre, développé, ne contiendra évidemment que des termes de degré pair. Réciproquement, si le premier terme d'une équation ne contient que des termes de degré pair, cette équation est évidemment identique à sa transformée en $-x$.

La résolution d'une pareille équation se ramène immédiatement à la résolution d'une équation de degré moitié moindre, qu'on obtient en y remplaçant x^2 par y; puis, quand on a résolu cette équation par rapport à y, à l'extraction de n racines carrées.

C'est la méthode classique pour la résolution de l'équation bicarrée.

269. Si, dans l'équation (1) du numéro précédent, on remplace x par $\frac{1}{x}$, et qu'on multiplie par x^n, on obtient l'équation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,$$

les coefficients y sont rangés dans l'ordre inverse. Cette transformée en $\frac{1}{x}$, dont le premier membre, par définition, n'est autre que

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

donne l'occasion de faire quelques remarques importantes.

Tout d'abord, en partant d'une équation admettant pour racines les inverses des racines de l'équation (1), on supposait implicitement que l'équation (1) n'avait pas de racines nulles, c'est-à-dire que a_n n'était pas nul; c'est sous cette condition que l'équation aux inverses est effectivement du $n^{\text{ième}}$ degré : s'il arrivait que, dans l'équation (1), les p derniers coefficients $a_{n-p+1}, a_{n-p+2}, \ldots, a_n$, fussent nuls, a_{n-p} étant d'ailleurs différent de 0, l'équation $f(x) = 0$ aurait une racine multiple nulle d'ordre p; l'équation $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ serait de degré $n-p$; ses $n-p$ racines seraient les inverses des $n-p$ racines non nulles de l'équation (1).

On démontre que, lorsque, dans l'équation (1), les p derniers coefficients (mais non a_{n-p}) sont très voisins de 0, l'équation (1) a p racines très voisines de 0 : si l'on se donne un nombre positif quelconque ε, on peut fixer un nombre positif η assez petit pour que p racines soient assurément plus petites que ε, pourvu que les valeurs absolues des rapports $\frac{a_{n-p+1}}{a_{n-p}}, \frac{a_{n-p+2}}{a_{n-p}}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-p}}$ soient moindres que η [1].

S'il en est ainsi, les p premiers coefficients de l'équation aux inverses (mais non le $p^{\text{ième}}$) sont très petits, et cette équation a p racines très grandes en valeur absolue, puisqu'elles sont les inverses de p nombres très voisins de o.

De même, si les p premiers coefficients de l'équation (1) [mais non le $(p+1)^{\text{ième}}$] sont très voisins de o, les p derniers coefficients de l'équation aux inverses seront très voisins de o; cette dernière équation a p racines voisines de o, l'équation (1) a p racines très grandes en valeur absolue.

De là, la façon de parler suivante :

Lorsque les coefficients d'une équation qui est, en général, du degré n sont variables et que les p premiers coefficients s'annulent [mais non le $(p+1)^{\text{ième}}$], on dit que cette équation admet alors p racines infinies, de même que l'on dit qu'elle a p racines nulles si les p derniers coefficients s'annulent.

Lorsque, dans deux polynomes en x, on regarde les coefficients comme variables et que, dans les deux polynomes, les p premiers coefficients sont nuls, sans que le $(p+1)^{\text{ième}}$ soit nul dans les deux polynomes, on dit que les deux équations obtenues en égalant à o les deux polynomes ont p racines communes infinies.

Cette façon de parler a déjà été employée pour les équations du second degré; elle est cohérente avec celle qu'on a employée au n° 83 quand on parlait des *diviseurs* communs à deux polynomes.

Considérons un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré homogène en x, y, ou, comme on dit souvent, une *forme binaire* du degré n,

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n;$$

ce polynome peut s'écrire sous la forme

$$y^n \left[a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_n \right].$$

---

[1] Je laisse de côté la démonstration de cet important théorème, que je n'invoque ici que pour justifier une façon de parler. Il est le point de départ de la définition des n racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, considérées comme fonctions (implicites) des coefficients de cette équation. On a admis, en général, au n° 219, l'existence des fonctions implicites.

Si a_0 n'est pas nul, et si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines du polynome $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, on aura identiquement en x

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

et, par suite, en remplaçant x par $\frac{x}{y}$, et en multipliant les deux membres par y^n, on aura identiquement en x, y

$$f(x, y) = a_0(x - x_1 y)(x - x_2 y)\ldots(x - x_n y).$$

Si l'on avait

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad a_{p-1} = 0, \qquad a_p \neq 0,$$

le polynome $f(x, y)$ pourrait s'écrire

$$y^n \left[a_p \left(\frac{x}{y}\right)^{n-p} + a_{p+1} \left(\frac{x}{y}\right)^{n-p-1} + \ldots + a_n \right];$$

en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$ les $n - p$ racines du polynome $a_p x^{n-p} + a_{p+1} x^{n-p-1} + \ldots + a_n$, on aurait identiquement en x

$$a_p x^{n-p} + a_{p+1} x^{n-p-1} + \ldots + a_n = a_p(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-p}),$$

et, par suite, en remplaçant x par $\frac{x}{y}$ et en multipliant par y^n, on aurait identiquement en x, y

$$f(x, y) = a_p y^p (x - x_1 y)(x - x_2 y)\ldots(x - x_{n-p} y).$$

Ainsi, un polynome homogène du $n^{\text{ième}}$ degré peut toujours être décomposé en n facteurs du premier degré en x, y. Parmi ces facteurs, il y en a autant qui ne contiennent pas x qu'il y a de coefficients nuls au commencement du polynome, ou de racines infinies dans l'équation (du $n^{\text{ième}}$ degré en général) que l'on obtient en égalant le polynome à o, après y avoir remplacé y par 1 ; les racines de cette dernière équation sont les valeurs de $\frac{x}{y}$ pour lesquelles s'annulent les facteurs qui contiennent x. Si les q derniers coefficients du polynome étaient nuls, on pourrait de même mettre en facteur x^q dans ce polynome, comme on met y^p en facteur lorsque les p premiers coefficients sont nuls.

Il est à peine utile de faire remarquer que, dans le cas général, les valeurs de $\frac{x}{y}$ telles que le polynome homogène $f(x, y)$ soit nul sont les inverses des valeurs de $\frac{y}{x}$ qui annulent le même polynome [1].

270. Revenons, en supposant maintenant a_0 et a_n différents de o, aux deux équations

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$
$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

dont chacune a pour racines les inverses des racines de l'autre, et cherchons sous quelles conditions ces deux équations sont les mêmes, sous quelles conditions la première, si elle admet une racine α, admet aussi pour racine le nombre $\frac{1}{\alpha}$, les deux racines ayant le même ordre de multiplicité. Il faut, pour cela, que l'on ait

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \ldots = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_n}{a_0},$$

ces égalités de rapport étant entendues en ce sens que si, dans un rapport, le dénominateur est nul, le numérateur doit aussi être nul.

---

(1) Il est souvent commode d'associer à un polynome en x, du degré n,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

le polynome homogène en x, y

$$f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n,$$

que j'appellerai, pour abréger, le *polynome $f(x)$ rendu homogène.* On passe du polynome $f(x, y)$ au polynome $f(x)$ en y remplaçant y par 1. Aussi regarde-t-on souvent la lettre y comme une variable fictive qui, une fois les calculs effectués, doit être remplacée par 1. A ce point de vue, f'_x, f'_y, les deux dérivées partielles du premier ordre du polynome $f(x, y)$, désignent deux polynomes en x, dont le premier est identique à la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ et qui sont liés à $f(x)$ par l'identité

$$n f(x, y) = x f'_x + y f'_y$$

(n° 49), ou

$$n f(x) = x f'_x + f'_y.$$

L'égalité des rapports extrêmes montre qu'on doit avoir

$$a_0^2 = a_n^2,$$

par conséquent $a_0 = \pm a_n$; dans le premier cas, tous les rapports sont égaux à 1, les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux; dans le second cas, tous les rapports sont égaux à -1, les coefficients à égale distance des extrêmes sont symétriques et le terme du milieu, s'il y en a un, est nul. Inversement, si l'un ou l'autre de ces systèmes de conditions est vérifié, il est clair que l'équation proposée et la transformée en $\frac{1}{x}$ sont identiques.

Les équations pour lesquelles il en est ainsi sont dites *réciproques*. Elles appartiennent à deux types distincts, faciles à reconnaître. En désignant par $f(x)$ le premier membre d'une équation réciproque, on a identiquement, pour le premier type,

$$f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

et, pour le second type,

$$f(x) = -x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

En faisant, dans cette dernière identité, $x = 1$, on trouve

$$f(1) = -f(1),$$

ce qui entraîne $f(1) = 0$. Les équations réciproques du second type admettent la racine $x = 1$. En faisant $x = -1$ dans l'identité

$$f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

on trouve

$$f(-1) = (-1)^n f(-1),$$

égalité qui est vérifiée d'elle-même si n est pair, qui entraîne $f(-1) = 0$ si n est impair : les équations réciproques du premier type admettent la racine $x = -1$, quand elles sont de degré impair. Si, d'une équation réciproque, on supprime toutes les racines 1 ou -1 qu'elle peut avoir, en divisant par des puissances convenables de $x - 1$ et de $x + 1$, l'équation reste évidemment réciproque : à chaque racine α de cette équation correspond toujours une racine inverse $\frac{1}{\alpha}$ qui, alors, est différente de α, puisque, l'équation n'admettant plus de racine égale à 1 ou à -1, on ne peut avoir $\alpha^2 = 1$. Or, il résulte des remarques précédentes qu'une équation réciproque qui n'admet ni la racine 1, ni la racine -1, appartient nécessairement au premier type, celui où les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux, et qu'elle est nécessairement de degré pair. C'est là, évidemment, les seules équations réciproques qu'il y ait lieu de considérer. On verra un peu plus loin comment leur résolution se ramène à la résolution d'une équation de degré moitié moindre et d'équations du second degré.

271. Les transformations élémentaires dont il a été question jusqu'ici sont évidemment comprises dans la suivante :

Soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

l'équation proposée; on demande de former une équation en z dont chaque racine soit liée à une racine de l'équation (1) par l'une ou l'autre des relations équivalentes

$$x = \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}, \qquad z = \frac{-\beta' x + \alpha'}{\beta x - \alpha},$$

en sorte que, si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de la proposée, les racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de la transformée s'obtiendront en remplaçant x par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\frac{-\beta' x + \alpha'}{\beta x - \alpha}$; de même, les racines de la proposée s'obtiendraient en remplaçant z par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dans $\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$. On suppose que les constantes α, β, α', β' satisfassent à la condition $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, afin que la fraction $\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$ dépende effectivement de z. L'équation transformée s'obtient évidemment en remplaçant x par $\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$ dans l'équation proposée; lorsqu'on a chassé le dénominateur, on peut l'écrire

$$(\beta z + \beta')^n f\left(\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right)$$
$$= a_0(\alpha z + \alpha')^n + a_1(\alpha z + \alpha')^{n-1}(\beta z + \beta') + \ldots + a_n(\beta z + \beta')^n = 0$$

On peut dire encore que le premier membre de cette équation s'obtient en remplaçant x par $\alpha z + \alpha'$, y par $\beta z + \beta'$ dans le polynome $f(x, y)$ qui se déduit du polynome $f(x)$ en le rendant homogène.

Il n'est pas inutile de vérifier ce résultat sur la décomposition en facteurs, comme on l'a fait pour la transformée en $x + h$.

L'identité en x

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

montre, en remplaçant x par $\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$ et en chassant les dénominateurs, que l'on a identiquement en z

$$\begin{aligned} &a_0(\alpha z + \alpha')^n + a_1(\alpha z + \alpha')^{n-1}(\beta z + \beta') + \dots \\ &\quad = a_0[(\alpha - \beta x_1)z + \alpha' - \beta' x_1][(\alpha - \beta x_2)z + \alpha' - \beta' x_2] \dots, \end{aligned}$$

et cette identité montre bien que les racines de l'équation en z sont $\dfrac{-\beta' x_1 + \alpha'}{\beta x_1 - \alpha}$, $\dfrac{-\beta' x_2 + \alpha'}{\beta x_2 - \alpha}$, $\dots$; à une racine multiple de l'équation en x correspond une racine multiple de l'équation en z, du même ordre de multiplicité. Si l'équation en x admettait p fois la racine $\frac{\alpha}{\beta}$, l'équation en z aurait p racines infinies : inversement, si le degré de l'équation en z est $n - p$, c'est que l'équation en x admet p racines égales à $\frac{\alpha}{\beta}$.

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit réciproque et qu'on y fasse la transformation $z = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; si, dans cette dernière expression, on change x en $\frac{1}{x}$, z se change en $-z$. Si, dans l'équation en z, on change z en $-z$, on devra retrouver une équation qui ait les mêmes racines. Le lecteur reconnaîtra sans peine que l'équation en z a autant de racines nulles que l'équation proposée a de racines égales à 1, autant de racines infinies que l'équation proposée a de racines égales à -1, qu'elle est de degré pair et ne contient plus que des termes de degré pair, quand on a supprimé les racines nulles. Sa résolution se ramène alors à la résolution d'une équation de degré moitié moindre et à des extractions de racines carrées; quand on l'a résolue, les valeurs correspondantes de x sont données par la formule

$$x = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

272. Toute une branche importante de l'Algèbre se rattache à la transformation précédente. Considérons les deux polynomes du numéro précédent :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \\ g(z) &= a_0(\alpha z + \alpha')^n + a_1(\alpha z + \alpha')^{n-1}(\beta z + \beta') + \ldots + a_n(\beta z + \beta')^n \\ &= b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n, \end{aligned}$$

ou plutôt les deux formes binaires (à deux variables)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n, \\ g(z, t) &= a_0(\alpha z + \alpha' t)^n + a_1(\alpha z + \alpha' t)^{n-1}(\beta z + \beta' t) + \ldots \\ &= b_0 z^n + b_1 z^{n-1} t + \ldots + b_n t^n, \end{aligned}$$

obtenues en rendant homogènes les polynomes $f(x)$ et $g(z)$ et dont la seconde se déduit de la première en y remplaçant respectivement x, y par $\alpha z + \alpha' t$, $\beta z + \beta' t$. Les formes $f(x, y)$, $g(z, t)$ sont décomposables en facteurs linéaires en x, y et en z, t. Les valeurs des rapports $\frac{x}{y}$ et $\frac{z}{t}$ qui annulent les facteurs correspondants sont liées comme il a été expliqué dans le numéro précédent.

Tout polynome $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ homogène en $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tel que la relation

$$\varphi(b_0, b_1, \ldots, b_n) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^p \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

où p désigne un entier positif, devienne une identité en $a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ quand on y remplace les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ de la forme $g(z, t)$ par leurs expressions en $a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ s'appelle un *invariant* de la forme $f(x, y)$ [ou du polynome $f(x)$].

Je me borne à signaler les expressions suivantes des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$, que le lecteur établira sans peine : on a

$$b_0 = f(\alpha, \beta), \qquad b_1 = \alpha' f'_\alpha + \beta' f'_\beta, \qquad \ldots,$$
$$b_p = \frac{1}{1.2\ldots p}(\alpha' f'_\alpha + \beta' f'_\beta)^p, \qquad \ldots.$$

Dans la seconde formule, f'_α, f'_β désignent ce que deviennent les dérivées f'_x, f'_y de la forme $f(x, y)$ quand on y remplace x, y par α, β. Dans l'expression de b_p, le second membre est une puissance symbolique; après avoir effectué la puissance $p^{\text{ième}}$ de $\alpha' f'_\alpha + \beta' f'_\beta$, on doit remplacer $(f'_\alpha)^k (f'_\beta)^{p-k}$ par $f^{(p)}_{\alpha^k \beta^{p-k}}$, en entendant par cette dernière expression ce que devient, quand on y remplace x et y par α et β, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $f(x, y)$ prise k fois par rapport à x et $p - k$ fois par rapport à y (nº 48).

Si, par exemple, on suppose [1]

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \\ g(z,u) &= a_0(\alpha z + \alpha' t)^2 + 2a_1(\alpha z + \alpha' t)(\beta z + \beta' t) + b_0(\beta z + \beta' t)^2, \\ &= b_0z^2 + 2b_1zt + b_2t^2, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\beta + a_2\beta^2, \\ b_1 &= a_0\alpha\alpha' + a_1(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_2\beta\beta'^2, \\ b_2 &= a_0\alpha'^2 + 2a_1\alpha'\beta' + a_2\beta'^2; \end{aligned}$$

si l'on regarde b_0, b_1, b_2 comme définis par ces formules, on a identiquement, en a_0, a_1, a_2, α, β, α', β',

$$b_0b_2 - b_1^2 = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2(a_0a_2 - a_1^2).$$

Cette identité, aisée à vérifier, sera établie, sous une forme plus générale, au n° 293 : $a_0a_2 - a_1^2$ est un invariant de la forme $a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$.

La notion d'invariant se généralise de diverses façons.

273. Supposons qu'on veuille trouver une équation ayant pour racines les carrés des racines de l'équation

$$(1) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Si y_1 est une racine de l'équation cherchée, il doit y avoir une racine x_1 de l'équation proposée, telle que l'on ait $y_1 = x_1^2$; il suit de là que les deux équations en x

$$f(x) = 0, \qquad y_1 - x^2 = 0$$

doivent avoir une racine commune $(x = x_1)$; réciproquement, si ces deux dernières équations ont une racine commune x_1, y_1 est certainement le carré d'une racine de l'équation cherchée; d'où la conclusion suivante :

On obtient l'équation en y, dont les racines sont les carrés des racines de l'équation $f(x) = 0$, en éliminant x entre les deux équations

$$f(x) = 0, \qquad y = x^2.$$

---

[1] Conformément à l'habitude, j'ai écrit $2a_1$, $2b_1$ à la place de a_1, b_1; relativement à cette notation, *voir* l'Exercice 23.

L'élimination se fera comme il a été expliqué plus haut. On cherchera le reste de la division de $f(x)$ par $x^2 - y$; pour cela on remplacera dans $f(x)$, x^2 par y. Réunissons dans $f(x)$ les termes de degré pair, dont je représenterai la somme par $\psi(x^2)$, et les termes de degré impair, dont je représenterai la somme par $x\varphi(x^2)$, en sorte qu'on ait identiquement $f(x) = x\varphi(x^2) + \psi(x^2)$; le reste cherché sera $x\varphi(y) + \psi(y)$. Le résultat de l'élimination s'obtient en remplaçant x par $-\frac{\psi(y)}{\varphi(y)}$ dans l'équation $y = x^2$; l'équation cherchée est

$$y[\varphi(y)]^2 - [\psi(y)]^2 = 0;$$

si y est une racine de cette équation, la racine de l'équation en x dont elle est le carré est $-\frac{\psi(y)}{\varphi(y)}$. S'il y a une valeur de y qui annule à la fois $\psi(y)$ et $\varphi(y)$, cette valeur est une racine double (au moins) de l'équation en y; pour une telle valeur de y les deux équations (en x) $f(x) = 0$, $x^2 = y$ ont deux racines communes, évidemment symétriques.

Le premier membre (changé de signe) de l'équation en y peut évidemment s'obtenir en multipliant $f(x) = x\varphi(x^2) + \psi(x^2)$ par $f(-x) = -x\varphi(x^2) + \psi(x^2)$, et en remplaçant dans le résultat x^2 par y. Je laisse au lecteur le soin de retrouver ce résultat, en partant de l'expression de $f(x)$ décomposée en facteurs du premier degré

274. Élimination par les fonctions symétriques. — Soit maintenant à éliminer x entre les deux équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, en supposant

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m, \\ g(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_n; \end{cases}$$

désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de $f(x)$, par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les racines de $g(x)$. Dire que les deux polynomes f et g doivent avoir une racine commune, c'est dire que l'un des nombres $f(y_1)$, $f(y_2), \ldots, f(y_n)$, ou le produit $f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n)$, doit être nul; c'est dire aussi que l'un des nombres $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_m)$, ou le produit $g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_m)$, doit être nul; la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ aient une racine commune s'exprime donc par l'une ou l'autre des égalités

$$f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n) = 0,$$
$$g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_m) = 0.$$

Il est aisé de vérifier que ces deux égalités sont équivalentes : si, en effet, dans l'identité (en x)

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$$

on remplace successivement x par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et qu'on multiplie tous les résultats, on voit que le produit $f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n)$ est le produit de toutes les mn différences que l'on peut obtenir en retranchant d'une quelconque des n quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$ l'une quelconque des m quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m$; on représente ce produit par le symbole

$$\prod(y_j - x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est clair que le produit $g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_m)$ est égal au produit des mêmes différences toutes changées de signe.

Remarquons que les égalités

$$(2)\quad f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n) = \prod(y_j - x_i) = (-1)^{mn} g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_m)$$

deviendraient des identités en $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ si l'on regardait ces lettres comme des variables, les quantités $-p_1, p_2, -p_3, \ldots, (-1)^m p_m$ comme les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $-q_1, q_2, -q_3, \ldots, (-1)^n q_n$ comme les fonctions symétriques élémentaires de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Le produit $f(y_1)f(y_2)\ldots f(y_n)$ est une fonction symétrique en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui, si on la développe, a évidemment pour coefficients des polynomes en $p_1, p_2, \ldots, p_m$ du degré n (au plus) et dont quelques-uns sont certainement de degré n; ces coefficients multiplient des polynomes symétriques en $y_1, y_2, \ldots, y_m$, lesquels s'expriment en fonction entière de $q_1, q_2, \ldots, q_n$; le produit considéré s'exprime donc comme un polynome en $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$: je désignerai ce polynome par $\mathfrak{R}$.

$\mathcal{R}$ est de degré n en $p_1, p_2, \ldots, p_m$; si pour le calculer on s'était adressé à l'expression $(-1)^{mn} g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_m)$, on aurait vu tout aussi bien qu'il est de degré m en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ [1].

En égalant $\mathcal{R}$ à o, on a la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les coefficients des polynomes f et g pour que ces deux polynomes aient une racine commune; l'équation $\mathcal{R} = 0$ est le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$f(x) = 0, \qquad g(x) = 0.$$

Tout polynome Φ en $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui jouit de la propriété de s'annuler pour toutes les valeurs de $p_1, \ldots, q_n$, telles que les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ aient une racine commune, est divisible par $\mathcal{R}$. Le polynome Φ, en effet, si l'on y regarde $-p_1, p_2, -p_3, \ldots, -q_1, q_2, -q_3, \ldots$, comme les fonctions symétriques élémentaires des variables $x_1, \ldots, x_m$ d'une part, $y_1, \ldots, y_n$ de l'autre, devient un polynome par rapport à ces variables qui doit, par hypothèse, s'annuler toutes les fois qu'une des premières variables devient égale à l'une des secondes; il est donc divisible (n° 58) par $\Pi(y_j - x_i)$ et l'on a une identité en $x_1, \ldots, y_p$ de la forme

$$\Phi = \Pi(y_j - x_i)\, \Phi_1(x_1, \ldots, y_n);$$

$\Pi(y_j - x_i)$ est comme Φ une fonction symétrique en $x_1, \ldots, x_m$ d'une part, en $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de l'autre; il en est de même de Φ_1 qui est le quotient de Φ par Π; Φ_1 peut donc s'exprimer comme Φ et Π en fonction de $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_n$; l'égalité précédente était une identité en $x_1, \ldots, y_n$; elle reste une identité en $p_1, \ldots, q_n$, puisqu'une fonction symétrique entière d'un certain nombre de variables ne peut s'exprimer que d'une seule façon au moyen des fonctions symétriques élémentaires de ces variables; Φ redevient alors le polynome donné, Π se change en $\mathcal{R}$, la proposition est démontrée. Il en résulte, en particulier, que, si Φ est du degré n en $p_1, p_2, \ldots, p_m$, du degré m en $q_1, q_2, \ldots, q_n$, Φ est identique au produit de $\mathcal{R}$ par un facteur numérique.

Restons encore au point de vue où l'on regarde $-p_1, \ldots, -q_1, \ldots$ comme les fonctions symétriques élémentaires des variables $x_1, \ldots, x_m$ et $y_1, \ldots, y_n$, en sorte que les égalités (2) soient des identités par rapport à ces variables. Dans ces identités, remplaçons $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ par $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m$, $\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n$; le produit $\Pi(y_j - x_i)$ sera multiplié par λ^{mn}; il devra en être de même de $\mathcal{R}$: d'ailleurs $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont remplacés par $\lambda p_1, \lambda^2 p_2, \ldots, \lambda^m p_m, \lambda q_1, \lambda^2 q_2, \ldots, \lambda^n q_n$; un terme quelconque de $\mathcal{R}$,

$$A p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_n^{\beta_n},$$

---

[1] La même conclusion se voit aussi sur l'expression $f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_m)$ considérée comme une fonction symétrique de $y_1, y_2, \ldots, y_m$: elle est évidemment d'ordre m.

est multiplié par une puissance de λ, dont l'exposant est

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + n\beta_n;$$

pour que la somme de tous les termes soit, quel que soit λ, égale à $\lambda^{mn}\mathcal{R}$, il faut évidemment que l'on ait

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + n\beta_n = mn.$$

Le premier membre de cette égalité est ce qu'on appelle le *poids* du terme considéré; ainsi, dans $\mathcal{R}$, tous les termes sont de même poids, égal à mn; c'est le degré de $\Pi(y_j - x_i)$ quand on regarde $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ comme des variables.

Exemple. — Le résultat de l'élimination de x entre les équations

$$x^3 + px + q = 0, \qquad x^2 + \frac{p}{3} = 0$$

est, en désignant par y_1, y_2 les deux racines de la seconde équation,

$$\begin{aligned}(y_1^3 + py_1 + q)&(y_2^3 + py_2 + q)\\ &= (y_1y_2)^3 + py_1y_2(y_1^2 + y_2^2) + q(y_1^3 + y_2^3) + p^2y_1y_2 + pq(y_1 + y_2) + q^2;\end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$y_1 + y_2 = 0, \qquad y_1y_2 = \frac{p}{3}, \qquad y_1^2 + y_2^2 = -2\frac{p}{3}, \qquad y_1^3 + y_2^3 = 0,$$

et, par suite,

$$\mathcal{R} = \frac{p^3}{27} - 2\frac{p^3}{9} + \frac{p^3}{3} + q^2 = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}.$$

En supposant qu'on ait $4p^3 + 27q^2 = 0$, les deux équations ont comme solution commune

$$x = -\frac{3q}{2p}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ aient au moins deux racines communes, s'obtiendront en adjoignant à la condition $\mathcal{R} = 0$, la condition exprimant que la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des n quantités $f(y_1)$, $f(y_2), \ldots, f(y_n)$ est nulle : cette condition est nécessaire, car, s'il y a deux des racines de $g(x)$ qui annulent $f(x)$, tous les termes de cette somme sont nuls; jointe à $\mathcal{R} = 0$, cette condition est suffisante;

en effet, à cause de $\mathcal{R} = 0$, il faut que l'un des nombres $f(y_1)$, $f(y_2)$, ..., $f(y_n)$ soit nul; si le dernier, par exemple, est nul, tous les termes de la somme, sauf $f(y_1)$, $f(y_2)$, ..., $f(y_{n-1})$, sont nuls; pour que la somme soit nulle, il faut donc que l'un des nombres $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ annule $f(x)$. Si l'on voulait que les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ eussent trois racines communes, il faudrait, en outre, que la somme de tous les produits $n-2$ à $n-2$ des n nombres $f(y_1)$, $f(y_2)$, ..., $f(y_n)$ fussent nuls, etc. Il est à peine utile de dire que la somme des produits $n-1$ à $n-1$ ou $n-2$ à $n-2$, ..., sont des fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et s'expriment au moyen de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que les coefficients des plus hautes puissances de x dans f et dans g étaient égaux à l'unité. Considérons, au lieu des deux polynomes f et g, les deux polynomes

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$G(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

dont je désignerai encore les racines respectives par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Posons

$$p_1 = \frac{a_1}{a_0}, \qquad p_2 = \frac{a_2}{a_0}, \qquad \ldots, \qquad p_m = \frac{a_m}{a_0},$$
$$q_1 = \frac{b_1}{b_0}, \qquad q_2 = \frac{b_2}{b_0}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \frac{b_n}{b_0},$$
$$f(x) = \frac{1}{a_0} F(x), \qquad g(x) = \frac{1}{b_0} G(x);$$

il est clair que l'égalité $\mathcal{R} = 0$ est encore la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes F et G aient une racine commune.

En remplaçant respectivement dans $\mathcal{R}$, qui est un polynome en p_1, p_2, ..., p_m du degré n, un polynome en q_1, q_2, ..., q_n du degré m, les variables par $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$, ..., $\frac{a_m}{a_0}$ et $\frac{b_1}{b_0}$, $\frac{b_2}{b_0}$, ..., $\frac{b_n}{b_0}$, on obtient une expression rationnelle en $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et $b_1, b_1, b_2, \ldots, b_n$, homogène par rapport aux variables du premier groupe et aux variables du second groupe; un monome en $p_1, p_2, \ldots, p_m$ qui, par rapport à ces variables, est du degré n, est remplacé par un monome en $a_1, a_2, \ldots, a_m$ divisé par a_0^n; de même, un monome en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ qui, par rapport à ces variables, est du degré m est remplacé par un monome en $b_1, b_2, \ldots, b_n$ divisé par b_0^m; il résulte de là que $R = \mathfrak{R}\, a_0^n b_0^m$ est un polynome homogène en $a_0, a_1, \ldots, a_m$ du degré n par rapport à ces variables, un polynome homogène en $b_0, b_1, \ldots, b_n$ du degré m par rapport à ces variables. Il y a dans R des termes qui ne contiennent pas effectivement a_0, d'autres qui ne contiennent pas effectivement b_0.

Le polynome R en $a_0, a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n$ défini par les égalités

$$R = \mathfrak{R}\, a_0^n b_0^m = b_0^m F(y_1) F(y_2) \ldots F(y_n) = (-1)^{mn} a_0^n G(x_1) G(x_2) \ldots G(x_m),$$

où il est bien entendu que, dans le troisième membre, les fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ doivent être remplacées par leurs expressions au moyen de

$$q_1 = \frac{b_1}{b_0}, \qquad q_2 = \frac{b_2}{b_0}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \frac{b_n}{b_0},$$

et que, dans le quatrième membre, les fonctions symétriques de x_1, $x_2, \ldots, x_m$ doivent être remplacées par leurs expressions au moyen de

$$p_1 = \frac{a_1}{a_0}, \qquad p_2 = \frac{a_2}{a_0}, \qquad \ldots, \qquad p_m = \frac{a_m}{a_0},$$

est ce qu'on appelle le *résultant* des deux polynomes F et G.

L'égalité $R = 0$ est la relation qui doit exister entre les coefficients des polynomes F et G pour que ces polynomes aient une racine commune lorsqu'on suppose a_0, b_0 différents de o.

Lorsque a_0 est nul sans que b_0 le soit, il est clair que la valeur de R est donnée par l'expression

$$R = b_0^m F_1(y_1) F_1(y_2) \ldots F_1(y_n),$$

où F_1 désigne maintenant le polynome

$$F_1 = a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m$$

et où, dans le second membre, les fonctions symétriques de y_1, $y_1, \ldots, y_n$ doivent toujours être remplacées par leurs expressions en $q_1, q_2, \ldots, q_n$; or, l'expression

$$R_1 = b_0^{m-1} F_1(y_1) F_1(y_2) \ldots F_1(y_n)$$

n'est autre chose, d'après la théorie générale, que le résultant des deux polynomes $F_1(x)$ et $G(x)$; c'est un polynome en $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_n$. Lorsqu'on y fait $a_0 = 0$, R se réduit à $b_0 R_1$; la condition $R_1 = 0$, en supposant que b_0 ne soit pas nul, est la condition nécessaire et suffisante pour que F_1 et G aient une racine commune. D'où la conclusion suivante :

La condition $R = 0$ *est une condition nécessaire pour que les deux équations* $F = 0$, $G = 0$ *aient une racine commune; si* R *est nul, on peut affirmer ou que ces deux équations ont une racine commune, ou que l'on a à la fois* $a_0 = 0$, $b_0 = 0$: *dans ce dernier cas, en employant la terminologie expliquée au n°* 239, *on peut dire que les deux équations ont une racine commune, finie ou infinie.*

De ce que tout polynome du degré n en $p_1, p_2, \ldots, p_m$, du degré m en $q_1, \ldots, q_n$, qui s'annule lorsque les deux équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ ont une racine commune, ne peut différer de $\mathfrak{R}$ que par un facteur numérique, il suit immédiatement que tout polynome homogène en $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et du degré n par rapport à ces variables, homogène en $b_1, b_2, \ldots, b_n$ et du degré m par rapport à ces variables, qui s'annule lorsque $F(x)$ et $G(x)$ ont une racine commune, ne peut différer de R que par un facteur numérique. Tels sont, par exemple, les déterminants de Sylvester et de Bézout, que l'on a appris à former aux n^{os} 167, 168, 169 et dont la nullité exprime que les deux polynomes $F(x)$ et $G(x)$ ont un diviseur commun.

275. On désigne sous le nom de *discriminant du polynome*

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)$$

le résultant, divisé par a_0, de ce polynome et de sa dérivée; en vertu des identités

$$f'(x_1) = a_0(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on reconnaît de suite que le produit $f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_m)$ est égal à $(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^m \Delta$, en désignant par Δ le produit des carrés des différences des racines de l'équation $f(x) = 0$. Le résultant R des deux polynomes f et f' défini comme plus haut est, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} R &= (-1)^{m(m-1)} a_0^{m-1} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_m) \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{2m-1} \Delta \\ &= (m a_0)^m f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_{m-1}); \end{aligned}$$

en désignant par $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ les racines de la dérivée $f'(x)$.

Ces formules peuvent servir à calculer Δ; si, par exemple, on suppose

$$f(x) = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3,$$

on aura

$$f'(x) = 3(a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2),$$

et l'on doit, en désignant par y_1, y_2, les racines de ce dernier polynome, calculer $f(y_1) f(y_2)$: on a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} & a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 \\ & = (a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2)\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right) + 2\frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0} x + \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_0} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} f(y_1) f(y_2) &= \left(2\frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0} y_1 + \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_0}\right)\left(2\frac{a_1 a_2 - a_1^2}{a_0} y_2 + \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_0}\right) \\ &= 4\frac{(a_0 a_2 - a_1^2)^2}{a_0^2}\,\frac{a_2}{a_0} - 2\frac{(a_0 a_2 - a_1^2)(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{a_0^2}\,\frac{2 a_1}{a_0} + \frac{(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2}{a_0^2} \\ &= \frac{(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2)}{a_0^2}, \end{aligned}$$

d'où, enfin (¹),

$$\Delta = -\frac{27}{a_0^4}[a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_2 - a_2^2)].$$

Cette quantité Δ est intéressante; tout d'abord, la condition $\Delta = 0$

(¹) On voit, sur cet exemple, que R contient a_0 en facteur. Il en est ainsi en général, et le discriminant de $f(x)$ est un polynome en $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Désignons en effet par f'_x, f'_t les dérivées partielles, où l'on a fait $t = 1$, du polynome $f(x, t)$ déduit de $f(x)$ en le rendant homogène. L'identité $m\, f(x) = x f'_x + f'_t$ permet de montrer que R est égal au résultant des deux polynomes (en x) f'_x et f'_t, multiplié par $m^{2-m} a_0$.

est, en général, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $f(x) = 0$ ait une racine multiple. Dans le cas d'une équation du troisième degré, il suffit de se reporter aux expressions du premier degré en y_1, y_2, que l'on a substituées à $f(y_1)$, $f(y_2)$, pour reconnaître que la racine double, si Δ est nul, ne peut être que

$$\frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{2(a_1^2 - a_0 a_2)}.$$

Je laisse au lecteur le soin de reconnaître que si l'on avait à la fois $\Delta = 0$, $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, l'équation proposée aurait une racine triple.

Dans ce même cas d'une équation du troisième degré, si l'on suppose que les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 sont réels, la condition $\Delta > 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée ait ses trois racines réelles. En effet, si tout d'abord les racines x_1, x_2, x_3 sont réelles, il est clair que Δ est positif; la condition $\Delta > 0$ est nécessaire. Si les racines ne sont pas toutes réelles, il y en a une réelle et deux imaginaires, puisqu'il y a toujours un nombre pair de racines imaginaires quand les coefficients sont réels (n° **114**). Soient x_1 la racine réelle, x_2 et x_3 les racines imaginaires, forcément conjuguées : les différences $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$ sont imaginaires conjuguées; leur produit, égal au carré de leur valeur absolue, est positif; il en est de même de $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2$; d'ailleurs $x_2 - x_3$ est purement imaginaire; son carré est négatif, Δ est donc négatif. Si Δ est positif, il ne peut y avoir de racines imaginaires; la condition $\Delta > 0$ est donc suffisante.

276. **Transformation des équations.** — Étant données une équation du degré n

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

et une fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, dont je supposerai qu'elle est irréductible et que son déterminant $\psi(x)$ est premier à $f(x)$, on propose de former une équation dont les racines soient les quantités

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}, \quad \frac{\varphi(x_2)}{\psi(x_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)},$$

que l'on obtient en remplaçant, dans $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, x par les racines x_1, x_2, ..., x_n de l'équation $f(x) = 0$.

On a traité, aux n^{os} 268, ..., 271, quelques cas particuliers de ce problème général.

L'équation cherchée est, en désignant l'inconnue par y,

$$\left[y - \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}\right]\left[y - \frac{\varphi(x_2)}{\psi(x_2)}\right]\cdots\left[y - \frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)}\right] = 0,$$

ou, en multipliant par $\psi(x_1)\psi(x_2)\ldots\psi(x_n)$, qui n'est pas nul,

$$[\psi(x_1)y - \varphi(x_1)][\psi(x_2)y - \varphi(x_2)]\ldots[\psi(x_n)y - \varphi(x_n)] = 0.$$

Le premier membre est manifestement une fonction symétrique entière de x_1, x_2, ..., x_n; c'est donc un polynome $F(y)$ du degré n, dont les coefficients peuvent s'exprimer en fonction entière de $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$, ..., $\frac{a_n}{a_0}$. Si l'on se reporte à la théorie de l'élimination, on voit que l'équation $F(y) = 0$ n'est autre chose que le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$f(x) = 0, \qquad \psi(x)y - \varphi(x) = 0;$$

c'est ce qu'il était aisé de prévoir d'après la définition même de l'élimination : si, en effet, on désigne par y_1 une racine de l'équation cherchée, y_1 doit être la valeur que prend $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pour une des racines x_1 de l'équation $f(x) = 0$, en sorte que cette dernière équation et l'équation $\psi(x)y_1 - \varphi(x) = 0$ doivent avoir la racine commune x_1; en d'autres termes, y_1 doit être une des racines de l'équation (en y) obtenue en éliminant x entre les deux équations $f(x) = 0$, $\psi(x)y - \varphi(x) = 0$. Inversement, si y_1 est une racine de l'équation en y obtenue par l'élimination qu'on vient de dire, les deux équations en x, $f(x) = 0$, $\psi(x)y_1 - \varphi(x) = 0$ ont une racine commune; si l'on désigne cette racine commune par x_1, on voit que y_1 doit être égal à la valeur que prend l'expression $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quand on y remplace x par x_1.

Toutefois, ce dernier raisonnement ne montre pas comment se correspondent les racines multiples des deux équations $f(x) = 0$

et $F(y) = 0$: cette correspondance va résulter clairement du premier point de vue auquel on s'est placé.

Si l'on pose, en général, $y_k = \frac{\varphi(x_k)}{\psi(x_k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, il est clair que l'équation $F(y) = 0$ aura exactement autant de racines égales à y_k qu'il y aura de racines de l'équation $f(x) = 0$ donnant à $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ la même valeur que x_k; si, parmi les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $f(x)$, il y en a p qui fassent acquérir à $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ la valeur y_k, l'équation $F(y) = 0$ admettra y_k pour racine p^{uple}; cette conclusion s'applique, d'ailleurs, que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui font acquérir la valeur y_k à $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ soient égales ou inégales [1].

Bornons-nous, désormais, au cas où les racines $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de l'équation proposée sont inégales. Si p de ces racines font acquérir à $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ la valeur y_k, les deux équations en x,

$$f(x) = 0, \qquad y_k \psi(x) - \varphi(x),$$

ont p racines communes, le plus grand commun diviseur des deux premiers membres est du degré p, et, si l'on a pu calculer y_k, on obtiendra les p racines communes en égalant à 0 le plus grand commun diviseur et en résolvant l'équation ainsi obtenue.

Si, en particulier, il n'y a qu'une seule racine x_k de l'équation $f(x) = 0$ qui fasse acquérir à $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ la valeur y_k, le plus grand commun diviseur sera du premier degré, ses coefficients s'exprimeront rationnellement au moyen des coefficients des deux équations (n° 72); il en sera de même de x_k, qui sera, par conséquent, de la forme $\frac{\Phi(y_k)}{\Psi(y_k)}$, en désignant par $\Phi(y)$, $\Psi(y)$ deux polynomes dont

---

[1] Dans le cas étudié plus haut, où l'on avait

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0),$$

deux valeurs inégales de x ne pouvaient faire acquérir à $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ la même valeur, il n'en est plus de même, lorsque l'un des deux polynomes φ et ψ est d'un degré supérieur à 1.

les coefficients seront composés rationnellement au moyen des coefficients de $f(x)$, de $\psi(x)$ et de $\varphi(x)$.

Pour obtenir ces polynomes $\Phi(y)$ et $\Psi(y)$, on effectue les opérations du plus grand commun diviseur sur les deux polynomes en x, $f(x)$ et $y\psi(x) - \varphi(x)$, en laissant y indéterminé, et l'on s'arrête quand on est parvenu à un reste du premier degré en x; ce reste est précisément $\Phi(y)x - \Psi(y)$; il n'y a pas à craindre qu'il s'annule identiquement pour $y = y_k$, c'est-à-dire que $\Phi(y)$ et $\Psi(y)$ soient divisibles par $y - y_k$, puisque, s'il en était ainsi, les deux équations auraient au moins deux racines communes.

Supposons qu'on ait résolu l'équation $F(y) = 0$; quel parti peut-on en tirer pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$, dont je continue à supposer que toutes les racines sont simples?

A une racine simple y_k de l'équation $F(y) = 0$, correspond une seule racine x_k de l'équation $f(x) = 0$, qui sera précisément $x_k = \frac{\Phi(y_k)}{\Psi(y_k)}$. Si toutes les racines de l'équation $F(y) = 0$ sont simples, on obtiendra toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ en remplaçant, dans $\frac{\Phi(y)}{\Psi(y)}$, y par les racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation $F(y) = 0$.

A une racine p^{uple}, y_k, de l'équation $F(y) = 0$ correspondent p racines de l'équation $f(x) = 0$, que l'on obtient par la résolution d'une équation du degré p. Si l'on avait $p = n$, en sorte que $f(y)$ fût la puissance $n^{\text{ième}}$ de $y - y_k$, le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $y_k\psi(x) - \varphi(x)$ serait $f(x)$; la résolution de l'équation $F(y) = 0$ n'avancerait en rien la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Étant donnée l'équation en x, $f(x) = 0$, de degré n, former l'équation en y dont les racines sont les valeurs que prend $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quand on y remplace x par les racines de $f(x)$; c'est ce qu'on appelle faire, sur l'équation $f(x) = 0$, la transformation rationnelle $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. On suppose $\psi(x)$ premier à $f(x)$.

Cette transformation peut être remplacée par une transformation entière $y = g(x)$, où $g(x)$ est un polynome de degré inférieur à n; on va montrer, en effet, qu'il existe un tel polynome $g(x)$ qui, lorsqu'on y remplace x par les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $f(x)$, prend les mêmes valeurs que $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Les polynomes $\psi(x)$ et $f(x)$ étant premiers entre eux, on peut (n° 82) déterminer deux polynomes A, B, tels que l'on ait identiquement $A\psi + Bf = 1$;

on aura, d'ailleurs,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\mathrm{A}\varphi}{\mathrm{A}\psi} = \frac{\mathrm{A}\varphi}{1-\mathrm{B}f};$$

d'où il résulte que, pour les valeurs de x qui annulent $f(x)$, on a

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \mathrm{A}\varphi.$$

Si maintenant on désigne par $g(x)$ le reste de la division de $\mathrm{A}\varphi$ par f, il est clair que le polynome $g(x)$, de degré inférieur au degré de $f(x)$, prendra les mêmes valeurs que $\mathrm{A}\varphi$ pour les valeurs de x qui annulent f; la transformation $y = g(x)$ est équivalente à la transformation $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, elle conduira à la même équation en y.

L'équation $f(x) = 0$ étant donnée, il peut y avoir intérêt à faire sur elle la transformation générale $y = g(x)$, où $g(x)$ est un polynome de degré $n-1$ à coefficients indéterminés,

$$g(x) = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1},$$

et à déterminer, s'il est possible, les coefficients de façon à obtenir une équation en y plus simple que l'équation donnée en x. Si l'on peut résoudre la transformée en y, $\mathrm{F}(y) = 0$, on a vu plus haut comment cette résolution sert à la résolution de l'équation proposée. Si, en particulier, l'équation $\mathrm{F}(y) = 0$ n'a que des racines simples, chaque racine de l'équation $f(x)$ peut s'obtenir en substituant une racine de l'équation en y dans une certaine fraction $\frac{\Phi(y)}{\Psi(y)}$ rationnelle en y, fraction que l'on peut, d'ailleurs, ainsi qu'on vient de l'expliquer, remplacer aussi par un polynome $\mathrm{G}(y)$, de degré inférieur à n.

Les coefficients de

$$\mathrm{F}(y) = [y - g(x_1)][y - g(x_2)]\ldots[y - g(x_n)]$$

sont des polynomes homogènes en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; on voit de suite que le coefficient de y^{n-k} est un polynome du degré k en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, dont les coefficients sont des fonctions symétriques entières en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et s'expriment ainsi en fonction des coefficients de $f(x)$.

Si, en particulier, on veut faire disparaître le terme en y^{n-1} et le terme en y^{n-2}, on obtiendra entre $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ deux équations qui seront l'une du premier degré, l'autre du second; on pourra donc, par des opérations élémentaires, trouver des valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ qui répondent à la question : en général, $n-2$ de ces coefficients resteront arbitraires.

Le lecteur peut, par exemple, appliquer cette méthode en supposant $f(x)$ du troisième degré; la transformation $y = x^2 + \alpha x + \beta$, en choisissant convenablement α et β, conduira à une équation de la forme $y^3 + \mathrm{A} = 0$; la résolution de l'équation $f(x = 0)$ est alors ramenée à la résolution de l'équation $y^3 + A = 0$ [1].

277. Le problème que l'on a traité dans le numéro précédent peut être généralisé.

Considérons une fonction rationnelle

$$\frac{\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_p)}{\psi(z_1, z_2, \ldots, z_p)}$$

dont les deux termes sont des polynomes en $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et supposons que le dénominateur ne s'annule pas quand on y remplace $z_1, z_2, \ldots, z_p$ par p des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'équation donnée $f(x) = 0$, rangées d'une façon quelconque. On peut se proposer de former une équation en y dont les racines soient les valeurs que prend la fraction précédente quand on y remplace z_1, $z_2, \ldots, z_p$, par p des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Supposons qu'on ait formé les $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ arrangements des n racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, p à p, et qu'on remplace dans la fraction $\frac{\varphi}{\psi}$ les variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$ respectivement par les nombres qui figurent dans ces $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ arrangements; on obtiendrait ainsi les $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ racines de l'équation en y. Le premier membre de cette équation est donc le produit de facteurs binomes de la forme

$$\psi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})y - \varphi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p}),$$

où $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p}$, forment un arrangement p à p des n racines x_1, $x_2, \ldots, x_n$ [2]; l'ensemble de tous ces facteurs, et leur produit, ne changent pas quand on effectue une permutation quelconque sur les racines, puisqu'une telle permutation ne modifie pas l'ensemble des arrangements p à p. Le produit de ces facteurs sera donc un polynome en y, du degré

$$n(n-1)\ldots(n-p+1),$$

dont les coefficients sont des polynomes symétriques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et s'exprimeront donc rationnellement au moyen des coefficients de $f(x)$.

Il peut arriver, soit en vertu d'une certaine symétrie des fonctions φ, ψ par rapport à quelques-unes des variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$, soit en vertu des valeurs spéciales des racines de $f(x)$, que le premier membre de l'équation en y soit

---

[1] L'élimination de x entre les deux équations $f(x) = 0$, $x^2 + \alpha x + \beta - y = 0$ se fait simplement par la méthode du n° 267; on pourra se borner au cas où $f(x)$ est de la forme $x^3 + px + q$.

[2] On peut, si on le préfère, dire que les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ forment un arrangement p à p des n numéros $1, 2, \ldots, n$.

une puissance $r^{\text{ième}}$ exacte, parce que les $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ arrangements se partagent en groupes de r termes, chaque arrangement d'un même groupe fournissant la même valeur de la fraction rationnelle $\frac{\varphi}{\psi}$. L'étude des cas où cette circonstance se produit et du parti qu'on peut en tirer pour la résolution de l'équation $f(x)=0$ constitue un des Chapitres les plus importants de la théorie de la résolution algébrique des équations, théorie qui est en dehors du cadre de ce Livre.

Supposons que la fraction rationnelle se réduise à un polynome à deux variables $\varphi(z_1, z_2)$; l'équation en y sera, en général, du degré $n(n-1)$. Si le polynome $\varphi(z_1, z_2)$ est symétrique en z_1, z_2, à chaque racine $\varphi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$ correspondra une racine égale $\varphi(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_1})$, et l'on voit de suite que le premier membre de l'équation en y est la racine carrée d'un polynome de degré $\frac{n(n-1)}{2}$; il est aisé d'obtenir directement ce polynome.

Pour cela on n'aura qu'à faire le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs de la forme $y-\varphi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$ que l'on obtient en remplaçant $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}$ par les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$; l'ensemble de ces $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons n'étant pas altéré par une permutation quelconque effectuée sur les n lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le produit ne sera pas non plus altéré par une telle permutation : ce sera un polynome en y, du degré $\frac{n(n-1)}{2}$, dont les coefficients, fonctions symétriques de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s'exprimeront rationnellement au moyen des coefficients de $f(x)$. Le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs de la forme $y-\varphi(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$ sera le premier membre de l'équation cherchée.

Celle-ci sera particulièrement aisée à former quand l'équation proposée $f(x)=0$ est du troisième degré; la fonction $\varphi(x_1, x_2)$, symétrique en x_1, x_2, peut, en effet, s'exprimer au moyen des coefficients du polynome du second degré $\frac{f(x)}{x-x_3}$ et, par suite, s'exprimer en fonction entière de x_3. En d'autres termes, il y a un polynome en x, $\theta(x)$ tel que l'on ait

$$\varphi(x_1, x_2)=\theta(x_3),$$

l'équation cherchée sera

$$[y-\theta(x_1)][y-\theta(x_2)][y-\theta(x_3)]=0;$$

en d'autres termes, la transformation considérée reviendra à faire la transformation $y=\theta(x)$.

Par exemple, les équations qui ont pour racines les sommes ou les produits de deux racines de l'équation $x^3+px+q=0$ s'obtiennent en remplaçant dans cette équation x par $-y$ ou par $-\frac{q}{y}$. Formons pour cette même équation, dont je désignerai par a, b, c les racines, l'équation qui a pour racines les quantités $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$. On a

$$(b-c)^2=b^2+c^2-2bc=a^2+b^2+c^2-a^2-\frac{2abc}{a}$$
$$=-2p-a^2+\frac{2q}{a}=-\frac{a^3+2ap-2q}{a}=\frac{3q-ap}{a}.$$

Cette expression suppose a différent de 0. On obtiendra des expressions analogues pour $(c-a)^2$, $(a-b)^2$, en supposant qu'aucune des racines ne soit nulle, c'est-à-dire que q soit différent de 0; l'équation cherchée en y a pour racines les valeurs que prend $\frac{3q-px}{x}$ quand on y remplace x par a, b, c; on l'obtient en faisant sur l'équation $x^3+px+q=0$ la transformation $y=\frac{3q-px}{x}$; elle est

$$\frac{27q^3}{(y+p)^3}+p\frac{3q}{y+p}+q=0,$$

ou, en divisant par q, chassant les dénominateurs et ordonnant,

$$y^3+6py^2+9p^2y+4p^3+27q^2=0;$$

si l'on savait résoudre cette équation, on n'aurait, pour avoir les racines de l'équation proposée, qu'à en substituer les racines y_1, y_2, y_3 dans l'expression $\frac{3q}{y+p}$.

En appelant toujours a, b, c les racines de l'équation $x^3+px+p=0$, le lecteur reconnaîtra sans peine que, si l'on fait sur les expressions

$$ab^2+bc^2+ca^2, \quad a^2b+b^2c+c^2a$$

toutes les permutations possibles, elles se reproduisent toutes deux, ou s'échangent; les coefficients de l'équation du second degré

$$(y-ab^2-bc^2-ca^2)(y-a^2b-b^2c-c^2a)=0$$

sont des fonctions symétriques entières de a, b, c; elles s'expriment aisément au moyen de p, q.

Si l'équation $f(x)=0$ est du quatrième degré, et si l'on en désigne par a, b, c, d les racines, les trois quantités

$$ab+cd, \quad ad+bc, \quad ac+bd$$

se reproduiront, dans leur ensemble, par les vingt-quatre permutations des lettres a, b, c, d : on a appris à former, au moyen des coefficients de $f(x)$, les coefficients de l'équation du troisième degré dont les racines sont $ab+cd$, $ad+bc$, $ac+bd$ (n° 266).

278. **Équations réciproques.** — Revenons aux transformations qui portent sur une seule racine, pour en faire l'application aux équations réciproques n'admettant ni la racine 1, ni la racine -1, qui, par conséquent, sont de degré pair et dans lesquelles les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux (n° 270).

Soit

$$f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

une telle équation; à chaque racine x_1 correspond une racine inverse $\frac{1}{x_1}$; en d'autres termes, les $2n$ racines de $f(x)$ peuvent être rangées sur deux lignes telles que les suivantes :

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{x_2}, & \ldots, & \frac{1}{x_n}. \end{array}$$

L'expression $x + \frac{1}{x}$, quand on y remplace x par les $2n$ racines, ne prend que n valeurs distinctes, car la substitution de x_1 ou de $\frac{1}{x_1}$ à x donnent évidemment les mêmes résultats. Si donc on faisait sur l'équation $f(x) = 0$ la transformation $y = x + \frac{1}{x}$, on obtiendrait une équation du degré $2n$ dont les racines seraient égales deux par deux; son premier membre serait un carré parfait, comme on le voit de suite en se reportant à la décomposition en facteurs; ce serait le carré du polynome

$$F(y) = (y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_n),$$

en posant, pour abréger,

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, \qquad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}, \qquad \ldots, \qquad y_n = x_n + \frac{1}{x_n}.$$

On va montrer tout à l'heure comment on peut obtenir les coefficients de $F(y)$ en fonction rationnelle de a_0, a_1, $\ldots$, a_n. Observons que, lorsqu'on aura formé le polynome $F(y)$, la résolution de l'équation $f(x) = 0$, du degré $2n$, sera ramenée à la résolution de l'équation $F(y) = 0$ du degré n, et des n équations du second degré

$$x+\frac{1}{x}=y_1, \qquad x+\frac{1}{x}=y_2, \qquad \ldots, \qquad x+\frac{1}{x}=y_n;$$

en effet, l'équation

$$x+\frac{1}{x}=x_1+\frac{1}{x_1},$$

par exemple, a pour racines x_1 et $\frac{1}{x_1}\cdot$ On voit ici apparaître la propriété essentielle du polynome $F(y)$: quand on y remplace y par $x+\frac{1}{x}$, les facteurs du premier degré qui le composaient se mettent sous la forme

$$\frac{(x-x_1)\left(x-\frac{1}{x_1}\right)}{x}, \qquad \frac{(x-x_2)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)}{x}, \qquad \ldots;$$

il se met lui-même sous la forme $\frac{g(x)}{x^n}$, en désignant par $g(x)$ un polynome de degré $2n$ qui n'est autre chose que $\frac{1}{a_0}f(x)$, comme il résulte de suite de la décomposition de $f(x)$ en facteurs du premier degré. On a donc identiquement en x

$$a_0 F(y)=\frac{f(x)}{x^n}$$

lorsque, dans le premier membre, on remplace y par $x+\frac{1}{x}\cdot$

Je vais montrer comment on peut former ce polynome $F(y)$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^n}f(x)=a_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\\ +a_2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots+a_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_n.\end{aligned}$$

D'un autre côté, il est aisé de former un polynome en y qui se change identiquement en $x^p+\frac{1}{x^p}$ quand on y remplace y par $x+\frac{1}{x}\cdot$

Si, en effet, on regarde y comme étant mis simplement, pour abréger, à la place de $x+\frac{1}{x}$, l'équation du second degré en z,

$$z^2-yz+1=0,$$

aura pour racines x et $\frac{1}{x}$; $x^p+\frac{1}{x^p}$ sera la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances de ses racines; elle s'exprimera en fonction entière des coefficients de l'équation du second degré, c'est-à-dire en fonction entière de y; ce sera un polynome en y; désignons-le par V_p; les formules de Newton, pour ce cas, montrent que l'on a

$$V_{p+2} - V_{p+1}y + V_p = 0;$$

c'est, d'ailleurs, ce qu'il est aisé de reconnaître directement en se reportant à la définition de V_p : cette relation, en y regardant V_0 comme égal à 2, V_1 comme égal à y, permet de calculer successivement

$$V_2 = y^2 - 2, \qquad V_3 = y^3 - 3y, \qquad V_4 = y^4 - 4y^2 + 2, \qquad \ldots.$$

On reconnaît de suite, par induction, que V_p est un polynome en y du degré p, commençant par y^p, à coefficients entiers, dans lequel tous les termes sont de même parité.

Quant au polynome cherché $F(y)$, il est évidemment donné par la formule

$$a_0 F(y) = a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \ldots + a_{n-1} V_1 + a_n.$$

279. **Équations binomes.** — Considérons l'équation binome $x^r - 1 = 0$, en nous bornant au cas où $r = 2n+1$ est un nombre impair; en supprimant la racine 1, on voit que les $2n$ racines imaginaires de l'unité (n° 100) sont racines de l'équation

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1 = 0.$$

En appliquant la méthode précédente, on en ramènera la résolution à la résolution de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en y,

$$V_n + V_{n-1} + \ldots + V_1 + 1 = 0,$$

et à la résolution de n équations du second degré. On a vu au n° 100 que les $2n$ racines imaginaires $r^{\text{ièmes}}$ de l'unité s'obtiennent en donnant à k les valeurs 1, 2, ..., n dans les expressions

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2n+1},$$
$$\frac{1}{x_k} = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} - i\sin\frac{2k\pi}{2n+1},$$

en sorte que les n racines de l'équation en y s'obtiendront en donnant à k les valeurs 1, 2, ..., n dans l'expression

$$y_k = x_k + \frac{1}{x_k} = 2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Inversement, la résolution de l'équation en y fournit les valeurs de $\cos\frac{2k\pi}{2n+1}$, celle de l'équation en x fournit, outre ces valeurs, celles de $\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$.

Pour $r=3$, $n=1$, les équations en x et en y sont respectivement

$$x^2+x+1=0, \qquad y+1=0.$$

La seconde équation montre que l'on a $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, les racines de la première sont

$$\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$\alpha^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{\alpha}.$$

Supposons maintenant qu'on prenne $r=5$, $n=2$; on a à résoudre l'équation

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

et, pour cela, à résoudre l'équation

$$V_2+V_1+1=y^2+y+1=0;$$

les deux racines de cette équation sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; elles doivent être égales à $2\cos\frac{2\pi}{5}$, $2\cos\frac{4\pi}{5}$; c'est évidemment la racine positive qui est égale à $2\cos\frac{2\pi}{5}$; on a donc

$$y_1=2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad y_2=2\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Pour achever, on doit résoudre les équations

$$x^2-y_1x+1=0, \qquad x^2-y_2x+1=0,$$

la première a pour racines

$$x=\frac{y_1\pm\sqrt{y_1^2-4}}{2}=\frac{y_1\pm i\sqrt{4-y_1^2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ces deux racines doivent coïncider avec x_1 et $\frac{1}{x_1}$, c'est-à-dire avec

$$\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5};$$

la distinction se fait de suite en considérant le signe des coefficients de i; on a

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{1}{x_1} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

et de même, en résolvant la seconde équation du second degré,

$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{1}{x_2} = \cos\frac{4\pi}{5} - i\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

On connaît donc

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

c'est-à-dire les demi-côtés des deux pentagones réguliers inscrits dans le cercle de rayon 1; les valeurs de $\cos\frac{3\pi}{5}$ et de $\cos\frac{\pi}{5}$ fournissent les apothèmes de ces polygones. De même les relations

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{4\pi}{5},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{4\pi}{5},$$

dans lesquelles on connaît les valeurs des troisièmes membres, fournissent respectivement les apothèmes et les côtés des deux décagones.

280. **Équation du troisième degré.** — On a vu que la résolution d'une équation du troisième degré pouvait toujours se ramener à la résolution d'une équation de la forme

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

où p et q sont des nombres réels ou imaginaires. En remplaçant dans cette équation x par $y+z$, on obtient de suite l'équation

$$(2) \qquad y^3+z^3+q+(3yz+p)(y+z)=0.$$

Pour que la somme de deux nombres y, z soit racine de l'équation (1), il faut et il suffit que ces deux nombres vérifient l'équation (2); assujettissons les deux nombres y, z à vérifier l'équation

$$(3) \qquad 3yz+p=0;$$

il faut et il suffit, pour que leur somme soit une racine de (1), qu'ils vérifient en outre l'équation

$$(3) \qquad y^3+z^3+q=0.$$

Réciproquement à chaque racine de l'équation (1) correspond un système de deux nombres dont la somme est égale à cette racine et dont le produit est égal à $-\frac{p}{3}$, qui par conséquent vérifient la seconde équation (3).

Si donc on résout les deux équations (3) par rapport à y et à z et si l'on ajoute deux valeurs correspondantes de y et de z, on obtiendra une racine de l'équation (1) et chaque racine de l'équation (1) pourra être obtenue de cette façon.

On tire de la première équation (3) $z=-\frac{p}{3y}$, et en portant dans la seconde équation (3) on obtient l'équation

$$y^3+\left(\frac{-p}{3y}\right)^3+q=0,$$

ou

$$(4) \qquad y^6+qy^3+\left(-\frac{p}{3}\right)^3=0,$$

qui est du sixième degré, mais seulement du second degré en y^3.

En portant une racine quelconque de cette équation (4) dans $y-\frac{p}{3y}$, on obtiendra une racine de l'équation (1); réciproquement toute racine de l'équation (1) peut s'obtenir en remplaçant, dans $y-\frac{p}{3y}$, y par quelque racine de l'équation (4).

L'équation (4) étant du sixième degré, il semble qu'on doive trouver pour $y-\frac{p}{3y}$ six valeurs, et par suite six racines pour l'équation du troisième degré. Qu'on ne trouve effectivement que trois valeurs distinctes, c'est ce qui résulte, en gros, de ce que les deux équations (3) ne changent pas lorsqu'on y échange les lettres y et z; de ce que, par conséquent, l'équation (4) ne change pas quand on y change y en $-\frac{p}{3y}$; c'est ce que le raisonnement qui suit va d'ailleurs montrer d'une façon précise.

L'équation (4), regardée comme une équation du second degré en y^3, donne deux valeurs pour y^3, à savoir

$$y_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad y_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}};$$

dans ces deux expressions, $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ désigne l'une des deux racines carrées de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, choisie arbitrairement : il est naturel, lorsque cette dernière quantité est réelle et positive, de regarder le radical comme ayant la signification arithmétique.

Dans tous les cas, ce radical doit être regardé comme conservant la même signification, une fois choisie, dans toutes les formules où il figure. Le produit de y_1^3 par y_2^3 est égal à $-\frac{p^3}{27} = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$.

Désignons par y_1 l'une des trois racines cubiques de $-\frac{q}{3} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$; si cette dernière quantité est réelle, il sera naturel de choisir pour y_1 la racine cubique réelle; si elle est imaginaire, on choisira la racine cubique que l'on voudra; puisque l'on a

$$y_2^3 = -\frac{p^3}{27y_1^3} = \left(-\frac{p}{3y_1}\right)^3,$$

l'une des trois racines cubiques de

$$y_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

sera égale à $-\frac{p}{3y_1}$; c'est celle-là que je désignerai par y_2; lorsque p, q sont réels, que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positif, que l'on a choisi pour y_1 la racine cubique réelle de y_1^3, y_2 est aussi la racine cubique réelle de y_2^3.

Soit maintenant $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité ; l'autre racine cubique de l'unité, conjuguée de celle-là, sera $\alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; les trois racines cubiques de y_1^3 et de y_2^3 sont respectivement (n° 99)

$$y_1, \quad \alpha y_1, \quad \alpha^2 y_1, \quad y_2, \quad \alpha y_2, \quad \alpha^2 y_2;$$

telles sont les six racines de l'équation (4); en portant ces six valeurs dans $y - \frac{p}{3y}$, on trouve, à cause de $y_1 y_2 = -\frac{p}{3}$,

$$y_1 - \frac{p}{3y_1} = y_1 + y_2,$$

$$\alpha y_1 - \frac{p}{3\alpha y_1} = \alpha y_1 - \frac{\alpha^2 p}{3y_1} = \alpha y_1 + \alpha^2 y_2,$$

$$\alpha^2 y_1 - \frac{p}{3\alpha^2 y_2} = \alpha^2 y_1 - \frac{\alpha p}{3y_2} = \alpha^2 y_1 + \alpha y_2,$$

$$y_2 - \frac{p}{3y_2} = y_1 + y_2,$$

$$\alpha y_2 - \frac{p}{3\alpha y_2} = \alpha y_2 - \frac{\alpha^2 p}{3y_2} = \alpha y_2 + \alpha^2 y_1.$$

$$\alpha^2 y_2 - \frac{p}{3\alpha^2 y_2} = \alpha^2 y_2 - \frac{\alpha p}{3y_2} = \alpha^2 y_2 + \alpha y_1.$$

Les trois derniers résultats ne sont pas distincts des trois premiers; les trois racines de l'équation (1) sont

$$x_1 = y_1 - \frac{p}{3y_1} = y_1 + y_2,$$

$$x_2 = \alpha y_1 - \frac{p}{3\alpha y_1} = \alpha y_1 + \alpha^2 y_2,$$

$$x_3 = \alpha^2 y_1 - \frac{p}{3\alpha^2 y_1} = \alpha^2 y_1 + \alpha y_2;$$

en posant

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ces deux racines cubiques étant choisies de façon que leur produit soit égal à $-\frac{p}{3}$.

Les expressions qui figurent dans les seconds membres des formules qui fournissent les trois racines sont plus avantageuses pour le calcul numérique que celles qui figurent dans les troisièmes; le calcul de $y_1 - \frac{p}{3y_1}$, par exemple, n'exige qu'une extraction de racine cubique; le calcul de $y_1 + y_2$ en demanderait deux.

Cherchons la condition pour que deux racines, x_1 et x_2 par exemple, soient égales; on doit avoir alors $y_1 + y_2 = \alpha y_1 + \alpha^2 y_2$, ou, successivement,

$$y_1 = -(1+\alpha) y_2 = \alpha^2 y_2, \qquad y_1^3 = y_2^3,$$

et, par conséquent

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0;$$

on arriverait à la même conclusion en écrivant que x_1 est égal à x_3 ou x_2 à x_3. C'est un résultat que l'on connaissait déjà.

Arrêtons-nous un instant sur le cas où p et q sont réels.

Il y a alors trois cas à distinguer, suivant que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est positif, nul, ou négatif.

Dans le premier cas, y_1^3, y_2^3 sont réels et distincts; il en est de même, d'après les conventions que l'on a faites, de y_1, y_2; x_1 est réel, x_2 et x_3 sont des imaginaires conjuguées, puisque α et α^2 sont des imaginaires conjuguées. On reconnaît de suite que, dans ce cas, le coefficient de i ne peut être nul ni dans x_2 ni dans x_3.

Dans le second cas, y_1^3, y_2^3 sont égaux, on a

$$x_1=2y, \qquad x_2=x_3=(\alpha+\alpha^2)y_1=-y_1.$$

Dans le troisième cas, y_1^3, y_2^3 sont des imaginaires conjuguées; on ne sait pas, par des opérations élémentaires, extraire leurs racines cubiques, en sorte que les expressions trouvées pour x_1, x_2, x_3 sont impropres au calcul numérique. On remarquera que, dans ce cas, p est certainement négatif, car, autrement, $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ serait positif. Il est aisé de vérifier que y_1, y_2, choisis comme on l'a prescrit, sont des imaginaires conjuguées.

Il suffit de prouver pour cela que le produit $y_1 y_3$ ou $-\frac{p}{3}$ est égal au carré de la valeur absolue de l'un ou l'autre facteur; or le carré de la valeur absolue de y_1^3, ou de y_2^3, est

$$\frac{q^2}{4}+\left[\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right]^2=-\frac{p^3}{27};$$

le carré de la valeur absolue de y_1 ou de y_3 est donc $-\frac{p}{3}$.

Les nombres y_1 et y_2 étant conjugués, il en est de même des nombres αy_1, $\alpha^2 y_2$, et des nombres $\alpha^2 y_1$, αy_2 : x_1, x_2, x_3 sont réels.

Pour les calculer numériquement on pourra procéder comme il suit :

En posant

$$(5) \qquad -\frac{q}{2}=r\cos\omega, \qquad \sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=r\sin\omega,$$

on a

$$(6) \qquad r=\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \cos\omega=-\frac{q}{2r};$$

à cause de la seconde formule (5), $\sin\omega$ doit être positif; on choisira pour ω la valeur comprise entre o et π que détermine la seconde équation (6); et l'on aura ensuite à résoudre l'équation

$$y_1^3 = r(\cos\omega + i\sin\omega),$$

dont les trois racines sont (n° 99)

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\omega}{3} + i\sin\frac{\omega}{3}\right),\\ \alpha y_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\omega+2\pi}{3} + i\sin\frac{\omega+2\pi}{3}\right),\\ \alpha^2 y_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\omega+4\pi}{3} + i\sin\frac{\omega+4\pi}{3}\right); \end{aligned}$$

c'est d'ailleurs arbitrairement qu'on a choisi l'expression de y_1; les valeurs de y_2, $\alpha^2 y_2$, αy_1 sont respectivement conjuguées de celles-là, et l'on a finalement

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\omega}{3},\\ x_2 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\omega+2\pi}{3},\\ x_3 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\omega+4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Le calcul se fera aisément au moyen des Tables trigonométriques.

281. **Équation du quatrième degré.** — La résolution d'une équation du quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{7}$$

se ramène aisément à la résolution d'une équation du troisième degré et d'équations du second degré.

Les deux premiers termes peuvent être regardés comme les deux premiers termes du carré de $x^2 + \frac{A}{2}x$, en sorte que l'équation proposée peut s'écrire, en désignant par λ un nombre qu'on se réserve de déterminer plus tard,

$$\left(x^3 + \frac{A}{2}x + \lambda\right)^2 = (2\lambda - B)x^2 + (A\lambda - C)x + \lambda^2 - D.$$

Déterminons λ de façon que le second membre soit un carré parfait, c'est-à-dire par l'équation du troisième degré

$$(A\lambda - C)^2 - 4(2\lambda - B)(\lambda^2 - D) = 0. \tag{8}$$

Nous regarderons, dans ce qui suit, λ comme une racine de cette équation, d'ailleurs arbitrairement choisie; l'équation du quatrième degré pourra alors s'écrire

$$\left(x^2+\frac{A}{2}x+\lambda\right)^2=(2\lambda-B)\left(x+\frac{A\lambda-C}{2\lambda-B}\right)^2;$$

celle-ci se décompose en deux équations du second degré, savoir

$$x^2+\frac{A}{2}x+\lambda=\pm\sqrt{2\lambda-B}\left(x+\frac{A\lambda-C}{2\lambda-B}\right).$$

La résolution de ces deux équations fournira les quatre racines de l'équation (7). Malgré l'intérêt qu'offre l'étude approfondie de cette méthode de résolution, je ne m'y arrêterai pas.

On doit à Abel d'avoir montré que si l'on considère une équation *générale* du $n^{\text{ième}}$ degré $f(x)=0$, c'est-à-dire une équation dans laquelle les coefficients sont arbitraires, on ne peut pas la résoudre par radicaux, dès que n dépasse 4; on entend par là qu'il est impossible de constituer une *chaîne* d'équations binomes, en nombre fini

$$x_1^{p_1}=A_1,\qquad x_2^{p_2}=A_2,\qquad x_3^{p_3}=A_3,\qquad \ldots$$

dans lesquelles A_1 s'exprimerait rationnellement au moyen des coefficients de $f(x)$, A_2 au moyen de ces coefficients et des racines de la première équation binome, A_3 au moyen de ces mêmes coefficients et des racines des deux premières équations binomes, etc., telles enfin que les racines de l'équation proposée s'exprimassent rationnellement au moyen des coefficients de cette équation et des racines des équations binomes.

Pour l'équation $x^3+px+q=0$, cette chaîne d'équations binomes est formée par les équations

$$z^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\frac{p^3}{27},\qquad y^3=-\frac{q}{2}+z',$$

où z' est une racine de l'équation en z; les racines de l'équation proposée s'expriment rationnellement au moyen des racines de l'équation en y.

282. Résolution des équations simultanées. — Deux équations

$$(1)\qquad f(x,y)=0,\qquad g(x,y)=0,$$

étant données, où les premiers membres sont des polynomes en x,y, la résolution de ces équations peut être ramenée à la résolution d'équations à une inconnue.

Soit x_0, y_0 une solution de ces deux équations; les deux équations en y

$$(2) \qquad f(x_0, y) = 0, \qquad g(x_0, y) = 0$$

ont une racine commune $y = y_0$; réciproquement, si x_0 est un nombre tel que les deux équations précédentes en y aient une racine commune y_0, il est clair que le système x_0, y_0 constituera une solution des équations proposées.

D'où la marche suivante :

On éliminera l'une des inconnues, y par exemple, entre les deux équations (1); on parviendra ainsi à une équation

$$(3) \qquad R(x) = 0,$$

dont les racines seront précisément les nombres x_0 telles que les équations (2), en y, aient une racine commune au moins. L'équation (3) étant résolue et x_0 étant une de ses racines, les deux polynomes, en y, $f(x_0, y)$ et $g(x_0, y)$ auront un plus grand commun diviseur; en égalant ce plus grand commun diviseur à 0, on formera une équation dont les diverses racines seront les valeurs de y que l'on peut associer à x_0 pour avoir une solution des équations proposées. Dans le cas où les deux équations

$$f(x_0, y) = 0, \qquad g(x_0, y) = 0$$

n'ont qu'une racine commune, le plus grand commun diviseur sera du premier degré; à la racine x_0 de l'équation *résultante* $R(x) = 0$, on ne pourra associer qu'une seule valeur y_0 de y, laquelle s'exprimera rationnellement au moyen de x_0 et des données.

Supposons que $f(x, y)$, $g(x, y)$ soient les polynomes généraux (avec des coefficients littéraux, qu'on laissera arbitraires), l'un du degré n en x, y, l'autre du degré p; en les ordonnant par rapport à y, on les mettra sous la forme

$$f(x, y) = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n,$$
$$g(x, y) = B_0 y^p + B_1 y^{p-1} + \ldots + B_p;$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ d'une part, $B_0, B_1, \ldots, B_p$ d'autre part, sont des polynomes en x dont les degrés respectifs sont marqués par les indices correspondants. A_0 et B_0, en particulier, sont des constantes.

Le résultant $R(x)$, obtenu en éliminant y, est une somme de monomes de la forme

$$K A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n} B_0^{\beta_0} \ldots B_p^{\beta_p},$$

où K est un coefficient numérique; tous ces monomes sont du poids np (nº 274). Tel est le degré de $R(x)$ (¹). En donnant des valeurs numériques aux coefficients de $f(x,y)$, $g(x,y)$, ce degré pourra s'abaisser. Pour chaque racine x_0 de $R(x)$, les deux polynomes en y, $f(x_0, y)$, $g(x_0, y)$, ont en général, une racine commune y_0 et une seule : l'ensemble des deux nombres x_0, y_0 constitue une solution des deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

qui ont, par conséquent, np solutions, en général.

L'examen des cas particuliers, et de la façon dont il faut entendre ce théorème : *Deux équations des degrés respectifs n, p ont np solutions*, est en dehors du cadre de ce Livre. Je me borne à signaler quelques-unes des difficultés qu'en présente la démonstration : il y a d'abord lieu d'examiner le cas où le degré de $R(x)$ s'abaisse au-dessous de np, et où l'on dit que les deux équations ont des solutions infinies, ce qui demande à être précisé. Ensuite, il peut arriver qu'à une racine x_0 de $R(x)$ correspondent plusieurs racines communes des deux équations (en y)

$$f(x_0, y) = 0, \qquad g(x_0, y) = 0.$$

On démontre alors que, s'il y a r racines communes à ces deux équations, x_0 est une racine multiple de $R(x)$, d'ordre de multiplicité r. Enfin, il y a encore lieu de tenir compte de l'ordre de multiplicité de certaines solutions, si l'on veut que le théorème reste exact; cela ne va pas sans difficulté : en effet, si pour une équation à une inconnue $F(x) = 0$, dont le premier membre est un polynome, la signification des mots *racine multiple, ordre de multiplicité,* a pu être précisée, on n'a nullement expliqué ce qu'il fallait entendre par ceux-ci : une solution *multiple* des équations $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.

Je me borne relativement à ce sujet à quelques indications très rapides, sur une méthode qui d'ailleurs offre un assez grand intérêt théorique, et qui a, en géométrie analytique, d'intéressantes applications.

Désignons par $f(x,y)$, $g(x,y)$ des polynomes en x, y, dont on suppose maintenant qu'ils aient des coefficients numériques.

(¹) On reconnait sans peine que le coefficient de x^{np} n'est autre chose que le résultant des deux polynomes en y

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$b_0 y^p + b_1 y^{p-1} + \ldots + b_p,$$

en désignant en général par a_α, b_α les coefficients de x^α dans A_α, B_α.

Supposons qu'on élimine x, y entre les trois équations

$$(4)\qquad f(x,y)=0,\qquad g(x,y)=0,\qquad y=ux+v,$$

ce qui revient à éliminer x entre les équations

$$(5)\qquad f(x,\,ux+v)=0,\qquad g(x,\,ux+v)=0.$$

On obtient ainsi une équation

$$(6)\qquad \mathcal{R}(u,\,v)=0.$$

Soit x_0, y_0 une solution des équations $f=0$, $g=0$; les équations (4) seront vérifiées, quel que soit u, si l'on prend

$$x=x_0,\qquad y=y_0,\qquad v=y_0-ux_0;$$

il suit de là que l'équation (6) sera vérifiée, quel que soit u, lorsqu'on y remplace v par y_0-ux_0, pourvu que x_0, y_0 constituent une solution des équations $f=0$, $g=0$. En d'autres termes, dans ces conditions, le polynome $\mathcal{R}(u,v)$, qui devient identiquement nul quand on y remplace v par y_0-ux_0, est divisible par $v+ux_0-y_0$. Soit u_0, v_0 une solution de l'équation

$$\mathcal{R}(u,\,v)=0;$$

les deux équations en x

$$f(x,\,u_0x+v_0)=0,\qquad g(x,\,u_0x+v_0)=0$$

admettent une solution commune x_0; les deux équations

$$f(x,y)=0,\qquad g(x,y)=0$$

admettent la solution $x_0, y_0=u_0x_0+v_0$, et l'on peut, en vertu du premier raisonnement, affirmer que $\mathcal{R}(u,v)$ est divisible par $v+ux_0-y_0$. Chaque solution de deux équations $f=0$, $g=0$ entraîne l'existence d'un facteur du premier degré en u, v qui divise $\mathcal{R}(u,v)$; chaque facteur du premier degré $v+\alpha u+\beta$ qui divise $\mathcal{R}(u,v)$ entraîne l'existence d'une solution $x_0=\alpha$, $y_0=-\beta$ des deux équations $f=0$, $g=0$. La résolution des deux équations $f=0$, $g=0$ est ramenée à la décomposition en facteurs du premier degré du polynome $\mathcal{R}(u,v)$, et chaque facteur du premier degré fournit une solution des deux équations proposées, solution dans laquelle les valeurs de x et y se trouvent naturellement associées, sans qu'on ait besoin, comme dans la première méthode, de former un plus grand commun diviseur. Enfin les notions de solution multiple, d'ordre de multiplicité, se présentent maintenant d'une façon assez naturelle : on dira que x_0, y_0 est une solution multiple d'ordre de multiplicité r des deux équations proposées si $\mathcal{R}(u,v)$ est divisible par $(v+ux_0-y_0)^r$ sans être divisible par $(v+ux_0-y_0)^{r+1}$.

283. J'appliquerai la méthode exposée au début du numéro précédent au cas de deux polynomes du second degré en x, y,

$$f(x, y) = ax^2 + a'y^2 + 2b''xy + 2b'x + 2by + a'' \text{ (}^1\text{)},$$
$$g(x, y) = a_1x^2 + a'_1y^2 + 2b''_1xy + 2b'_1x + 2b_1y + a''_1,$$

où je supposerai que l'un au moins des coefficients a', a'_1 de y^2 n'est pas nul. On aura à former le résultant $R(x)$ des deux polynomes en y

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma, \qquad \alpha_1 y^2 + \beta_1 y + \gamma_1,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\alpha = a', \qquad \beta = 2b''x + 2b, \qquad \gamma = ax^2 + 2b'x + a'',$$
$$\alpha_1 = a'_1, \qquad \beta_1 = 2b''_1x + 2b_1, \qquad \gamma_1 = a_1x^2 + 2b'_1x + a''_1;$$

on a (n° 268)

$$R(x) = (\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1)^2 - (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma).$$

On reconnaît de suite, sur cette expression, que $R(x)$ est, en général, du quatrième degré; $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1$, $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$, $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$ sont en général, des degrés respectifs 2, 1, 3. Si x_0 est une racine de $R(x)$, les deux équations en y ont une racine commune, dont on obtient la valeur en remplaçant x par x_0 dans la fraction rationnelle

$$\frac{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta};$$

il n'y a aucune difficulté si x_0 n'annule pas $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$; au cas où x_0

---

(1) Il convient d'expliquer cette notation : on a déjà employé, au n° 46, la notation, qui s'explique d'elle-même,

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

pour représenter un polynome homogène du second degré en x, y, z, ou, comme on dit, une *forme quadratique ternaire*. En faisant $z = 1$ dans le polynome homogène, on obtient un polynome du second degré en x, y écrit sous la forme employée dans le texte. Il est souvent commode de regarder ainsi un polynome en x, y du degré n comme provenant d'un polynome homogène en x, y, z du degré n, où l'on a fait $z = 1$, et, inversement, d'associer à un polynome en x, y le polynome homogène en x, y, z que l'on obtient en complétant chaque monome de degré $p < n$ par un facteur z^{n-p}; en supposant $z = 1$, les deux polynomes sont identiques.

annulerait cette expression, on voit de suite sur l'expression de $R(x)$, puisque $R(x)$ et $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ sont nuls pour $x = x_0$, que $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1$ est aussi nul; pour la même valeur de x, $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$ est nul aussi; car les deux égalités

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0,$$
$$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 0,$$

si l'on écarte le cas où α et α_1 sont nuls, entraînent $\beta_1\gamma - \beta\gamma_1 = 0$. Le facteur $x - x_0$ divise $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1$; $(x - x_0)^2$ divise $(\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1)^2$; il divise aussi $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)$, puisque $x - x_0$ divise chacun des facteurs; $x - x_0$ est une racine *double* de $R(x)$; d'autre part, pour $x = x_0$, les quantités α_1, β_1, γ_1 sont proportionnelles à α, β, γ; les deux équations du second degré en y ont leurs deux racines communes; on associera chacune de ces deux racines à x_0 et l'on obtiendra ainsi deux solutions des équations proposées : les deux autres racines de $R(x)$, si elles sont simples, fourniront chacune une solution. On en obtient bien quatre en tout, en supposant que le degré de $R(x)$ ne se soit pas abaissé au-dessous de 4 (1).

Le seul cas où l'on puisse avoir plus de quatre solutions est celui où $R(x)$ est identiquement nul. Supposons qu'il en soit ainsi; alors, pour chaque valeur de x, les deux équations en y ont une solution commune fournie par la formule

$$y = \frac{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta};$$

le numérateur est du second degré en x, et le dénominateur, du premier; il est aisé de voir que le numérateur est divisible par le dénominateur : soit, en effet, r la racine de ce dernier; il faut prouver que r annule $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$: or, c'est ce qui résulte de l'expression du polynome $R(x)$, qui, par hypothèse, est identiquement nul : pour $x = r$, $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ est nul, donc aussi $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma$ et l'on a déjà dit que les deux

---

(1) Dans le cas où x_0 annule $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$, $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$, il faut se garder de chercher, afin d'avoir la valeur correspondante de y, la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$ quand x s'approche de x_0. Tout est fixe ici, il n'y a pas lieu de chercher une limite.

égalités

$$\alpha\beta_1 = \alpha_1\beta = 0, \qquad \alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 0$$

entraînaient $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma = 0$; en faisant la division de $\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma$ par $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$, on voit que y se met sous la forme $y = mx + n$. Par conséquent, dans ce cas, les deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

sont vérifiées quel que soit x quand on prend pour y la valeur $mx + n$; cela revient à dire que $f(x, y)$ et $g(x, y)$ s'annulent identiquement quand on y remplace y par $mx + n$, ou encore que ces deux polynomes sont divisibles par $y - mx - n$.

Ainsi, la circonstance qu'on vient d'étudier se présente quand les deux polynomes $f(x, y)$, $g(x, y)$ se décomposent l'un et l'autre en un produit de deux facteurs du premier degré et que l'un de ces facteurs est commun aux deux produits : outre les solutions qui annulent ce facteur commun, les deux équations $f = 0$, $g = 0$ ont encore une solution que l'on obtient en égalant à 0 les seconds facteurs et en résolvant les deux équations du premier degré ainsi obtenues (1).

Les raisonnements précédents, relatifs au cas où $R(x)$ est identiquement nul, supposent toutefois que $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ ne soit pas identiquement nul, auquel cas un raisonnement déjà utilisé deux fois montrerait que $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1$ serait aussi identiquement nul; il suffit d'écrire qu'il en est ainsi, en remplaçant α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 par leurs expressions explicites pour reconnaître que, alors, les coefficients du polynome $g(x, y)$ sont proportionnels aux coefficients du polynome $f(x, y)$; toute solution de l'une des équations $f = 0$, $g = 0$ est une solution de l'autre.

Je laisse au lecteur le soin de traiter le cas où a' et a'_1 seraient nuls simultanément.

---

(1) Le résultat qu'on vient d'obtenir se généralise sans peine : supposons que $f(x, y)$, $g(x, y)$ soient des polynomes quelconques en x, y et que le résultant de ces deux polynomes regardés comme des polynomes en y soit identiquement nul. Les deux polynomes f et g regardés comme des polynomes en y ont, quel que soit x, un plus grand commun diviseur : soit $\theta(x, y)$ ce plus grand commun diviseur; je suppose que, après l'avoir ordonné par rapport à y, on ait débarrassé ses coefficients, qui sont des polynomes en x, de tout diviseur commun, en sorte que $\theta(x, y)$ soit *primitif* au sens du n° 81; les deux polynomes f et g seront divisibles par $\theta(x, y)$.

Le problème de la résolution de deux équations du second degré $f=0$, $g=0$ peut être abordé par une autre méthode, dont je dirai quelques mots, en raison de l'importance qu'elle offre en géométrie analytique. J'aurai besoin pour cette méthode de la condition qui doit exister entre les coefficients a, a', a'', b, b', b'' d'un polynome

$$f(x,y)=ax^2+a'y^2+2b''xy+2b'x+2by+a''$$

pour qu'il se décompose en deux facteurs du premier degré en x, y. Supposons $a'\neq 0$. Si $f(x,y)$ se décompose en deux facteurs du premier degré, ces deux facteurs doivent contenir y, sans quoi leur produit ne pourrait reproduire un terme en y^2; ils sont donc de la forme

$$y-mx-n,\quad y-m'x-n'$$

et l'on doit avoir identiquement

$$f(x,y)=a'(y-mx-n)(y-m'x-n').$$

Supposons qu'il en soit ainsi; si l'on résout l'équation du second degré (en y), $f(x,y)=0$, les deux racines devront être $mx+n$, $m'x+n'$; on sait que la quantité sous le radical représente, à un facteur numérique près, le carré de la différence des racines, c'est-à-dire, ici, $[(m-m')x+n-n']^2$.

Ainsi, dans le cas où f se décompose, le polynome en x que l'on obtient sous le radical, en résolvant par rapport à y l'équation

$$a'y^2+2(b''x+b)y+ax^2+2b'x+a''=0,$$

doit être un carré parfait; or, en effectuant cette résolution, on trouve

$$y=-\frac{b''x+b\pm\sqrt{(b''x+b)^2-(ax^2+2b'x+a'')a'}}{a'};$$

la quantité sous le radical est

$$(b''^2-aa')x^2+2(bb''-a'b')x+b^2-a'a'';$$

elle est un carré parfait si l'on a

$$(bb''-a'b')^2-(b''^2-aa')(b^2-a'a'')=0. \tag{1}$$

Si cette condition est vérifiée, la quantité sous le radical, en supposant b''^2-aa' différent de o, est le carré de

$$\sqrt{b''^2-aa'}\left(x+\frac{bb''-a'b'}{b''^2-aa'}\right),$$

en sorte que $f(x, y)$ est le produit, multiplié par a', des deux facteurs

$$y + \frac{b''x + b}{a'} - \frac{\sqrt{b''^2 - aa'}}{a'}\left(x + \frac{bb'' - a'b'}{b''^2 - aa'}\right),$$

$$y + \frac{b''x + b}{a'} + \frac{\sqrt{b''^2 - aa'}}{a'}\left(x + \frac{bb'' - a'b'}{b''^2 - aa'}\right).$$

Si $b''^2 - aa'$ était nul, $bb'' - a'b'$ devrait aussi être nul à cause de la condition (1), la quantité sous le radical se réduirait à une constante, la décomposition apparaîtrait ainsi immédiatement.

Lorsque a' est différent de o, la condition (1) est donc nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ se décompose en deux facteurs du premier degré; or le premier membre de l'équation (1) est le produit par $-a'$ de la quantité [1]

$$\Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

Si a' était nul, sans que a le fût, il suffirait d'intervertir le rôle des lettres x, y pour retrouver la même condition; si a' et a étaient nuls tous deux, la relation entre x, y qu'exprime l'équation $f(x, y) = 0$ deviendrait une relation homographique; le cas de décomposition a été traité au n° 69; on reconnaît sans peine que, dans ce cas aussi, la condition $\Delta = 0$ exprime que le polynome $f(x, y)$ est le produit de deux facteurs du premier degré.

Arrivons maintenant à la résolution des deux équations du second degré $f = 0$, $g = 0$ et cherchons à déterminer une relation du premier degré en x, y

$$y = ux + v$$

telle que les solutions des deux équations simultanées

$$f(x, y) = 0, \qquad y = ux + v$$

soient les mêmes que les solutions des deux équations

$$g(x, y) = 0, \qquad y = ux + v.$$

---

[1] Cette quantité Δ a déjà été rencontrée au n° 135; c'est le déterminant des trois formes linéaires

$$ax + b''y + b'z, \quad b''x + a'y + bz, \quad b'x + by + a''z$$

qui ne sont autre chose que les demi-dérivées partielles du polynome homogène $ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$; l'identité

$$(bb'' - a'b')^2 - (aa' - b''^2)(a'a'' - b^2) = -\Delta a'$$

ne diffère pas de l'identité $A''A - B'^2 = \Delta a'$ que l'on a signalée au n° 135.

C'est pour le moment u et v qui sont les inconnues; il est clair que, si l'on a déterminé ces inconnues auxiliaires, la résolution de l'un ou de l'autre des deux systèmes précédents fournira (en général) deux solutions du système $f=0$, $g=0$.

Par hypothèse, les deux équations en x

$$f(x,\, ux+v)=0, \qquad g(x,\, ux+v)=0$$

doivent être identiques; s'il en est ainsi le premier membre de la seconde ne doit différer du premier membre de la première que par un facteur constant, que je désignerai par $-\lambda$; en d'autres termes, l'expression

$$\lambda f(x,\, ux+v)+g(x,\, ux+v)$$

doit être identiquement nulle; en d'autres termes encore, l'expression

$$\lambda f(x,y)+g(x,y)$$

doit s'annuler identiquement quand on y remplace y par $ux+v$, ou, ce qui revient au même, le polynome (en x, y) $\lambda f(x,y)+g(x,y)$ doit être divisible par $y-ux-v$; il doit donc être décomposable en facteurs du premier degré.

Réciproquement, supposons qu'on connaisse un nombre λ tel que le polynome (en x, y) $\lambda f+g$ soit décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré $\alpha x+\beta y+\gamma$, $\alpha' x+\beta' y+\gamma'$, en sorte qu'on ait identiquement

$$\lambda f+g=(\alpha x+\beta y+\gamma)(\alpha' x+\beta' y+\gamma'),$$

il est clair que toute solution des deux équations $f=0$, $g=0$ devra annuler l'un des facteurs du second membre, et que l'on obtiendra les solutions de ces deux équations en résolvant, d'une part, les deux équations

$$f=0, \qquad \alpha x+\beta y+\gamma=0$$

et, d'autre part, les deux équations

$$f=0, \qquad \alpha' x+\beta' y+\gamma'=0,$$

on obtiendra ainsi, en général, quatre solutions qui vérifieront l'équation $g=0$.

D'où la méthode suivante :

On cherche un nombre λ tel que le polynome du second degré (en x, y) $\lambda f+g$ se décompose en deux facteurs du premier degré; on a pour cela à résoudre une équation du troisième degré en λ, $\Delta(\lambda)=0$, dont on obtient le premier membre en remplaçant dans

$$\Delta = aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2$$

$a, a', a'', \ldots$ par $\lambda a + a_1, \lambda a' + a'_1, \lambda a'' + a''_1, \ldots$; $a_1, a'_1, a''_1, \ldots$ désignent, comme plus haut, les coefficients de $g(x, y)$.

Ayant une racine λ_0 de cette équation, on décompose $\lambda_0 f + g$ en deux facteurs; cela revient à résoudre, comme on l'a expliqué plus haut, l'équation $\lambda_0 f + g = 0$ par rapport à y (ou à x); on obtient ainsi les deux équations du premier degré $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$, dont il faut adjoindre successivement l'une et l'autre à l'équation $f = 0$, pour obtenir les quatre solutions des équations $f = 0$, $g = 0$. On voit que la résolution de ces deux équations revient à la résolution d'une équation du troisième degré, et de trois équations du second degré.

Le lecteur pourra appliquer cette méthode au cas où l'on suppose

$$f(x, y) = y^2 + Axy + By + Cx + D,$$
$$g(x, y) = x^2 - y;$$

il retrouvera ainsi une proposition déjà obtenue : la résolution de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

qui résulterait visiblement de l'élimination de y entre les deux équations $f = 0$, $g = 0$, se ramène à la résolution d'une équation du troisième degré et d'équations du second degré.

284. Lorsqu'on regarde x, y comme les coordonnées d'un point, une équation $f(x, y) = 0$ définit une courbe, à savoir le lieu des points dont les coordonnées x, y vérifient cette équation. Lorsque $f(x, y)$ est un polynome, le degré de ce polynome est, par définition, le degré de la courbe dont l'équation est $f(x, y) = 0$: la courbe est alors *algébrique*; elle est *transcendante*, lorsque son équation ne peut pas se ramener à la forme $f(x, y) = 0$, où f est un polynome en x, y. L'étude des courbes algébriques, définies comme on vient de l'expliquer, est un des objets essentiels de la Géométrie analytique.

La recherche des solutions (réelles) de deux équations simultanées $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ revient à la recherche des points dont les coordonnées vérifient à la fois ces équations, ou, ce qui revient au même, des points communs aux deux courbes qu'elles définissent. Le problème qu'on a traité dans le numéro précédent est le même que le problème de l'intersection de deux courbes du second degré, ou, comme on dit, de deux coniques; la seconde méthode revient à la recherche des sécantes communes à ces deux coniques. La première faisait dépendre cette recherche de la résolution d'une équation du quatrième degré, dont les racines étaient les abscisses des points communs aux deux courbes.

Inversement, étant donnée une équation numérique $\varphi(x) = 0$, à une seule inconnue, lorsqu'on sait former deux équations $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ telles que l'équation donnée $\varphi(x) = 0$ soit le résultat de l'élimination de y entre ces deux équations, et que la construction des deux courbes qu'elles définissent est aisée, il peut être commode d'effectuer avec soin la construction de ces deux courbes, et de mesurer les abscisses de leurs points d'intersection, pour avoir des valeurs approchées des racines réelles de l'équation $\varphi(x) = 0$.

La méthode même qui fait le fond du Chapitre précédent et qui consiste, pour résoudre approximativement l'équation $\varphi(x) = 0$, à construire la courbe dont l'équation est $y = \varphi(x)$, rentre dans celle qu'on vient de dire puisque l'équation $\varphi(x) = 0$ peut être regardée comme résultant de l'élimination de y entre les deux équations $y - \varphi(x) = 0$ et $y = 0$.

On a fait une autre application de la méthode générale quand on a ramené la résolution de l'équation transcendante $\operatorname{tang} x = x$ à la recherche des points d'intersection de la droite dont l'équation est $y = x$ et de la courbe transcendante dont l'équation est $y = \operatorname{tang} x$. Il est aisé de multiplier les applications.

Si l'équation proposée $\varphi(x) = 0$ peut se mettre sous la forme $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0$, on pourra prendre, pour les équations

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

les équations

$$y - \varphi_1(x) = 0, \qquad y + \varphi_2(x) = 0$$

et, si les courbes qu'elles définissent sont aisées à tracer, chercher les abscisses de leurs points d'intersection. Par exemple, on peut remplacer la résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ par la recherche des points communs à la courbe dont l'équation est $y = x^3$ et de la droite dont l'équation est $y + px + q = 0$. La même courbe $(y = x^3)$ pourra servir pour toutes les équations du troisième degré. Il est à peine besoin de dire que cette méthode s'applique aussi bien aux équations transcendantes qu'aux équations algébriques.

On peut interpréter les dernières lignes du numéro précédent en disant que la résolution de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

revient à la recherche des abscisses des points communs aux deux courbes définies par les équations

$$x^2 - y = 0,$$
$$y^2 + Axy + By + Cx + D = 0.$$

qui, lorsqu'on se donne les coefficients numériques A, B, C, D, sont assez aisées à construire avec quelque exactitude.

On peut d'ailleurs donner un meilleur procédé pour résoudre graphiquement une équation du quatrième degré : dans cette équation, on fait d'abord disparaître le terme du troisième degré (n° 268) : on la ramène ainsi à la forme

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0.$$

La résolution de cette dernière équation revient à la recherche des abscisses des points communs aux deux courbes définies par les équations

$$x^2 - y = 0,$$
$$y^2 + by + cx + d = 0.$$

Cette dernière équation peut être remplacée par celle qu'on obtient en ajoutant membre à membre, c'est-à-dire par l'équation

$$x^2 + y^2 + (b-1)y + cx + d = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b-1}{2}\right)^2 + d - \frac{c^2}{4} - \frac{(b-1)^2}{4} = 0;$$

sous cette forme, on reconnaît un cercle dont le centre a pour coordonnées $-\frac{c}{2}$, $-\frac{b-1}{2}$ et dont le rayon est $\sqrt{\frac{(b-1)^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$. Ainsi la résolution d'une équation quelconque du quatrième degré peut être remplacée par la recherche des points d'intersection d'une parabole, tracée une fois pour toutes, dont l'équation est $y = x^2$, et d'un cercle, dont les éléments dépendent des coefficients de l'équation du quatrième degré. En remplaçant l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$

par l'équation du quatrième degré $x^4 + px^2 + qx = 0$, on voit que ce procédé permet de résoudre graphiquement une équation du troisième côté : on devra, parmi les points d'intersection du cercle et de la parabole, laisser de côté l'origine des coordonnées, qui correspond à cette racine nulle que l'on a introduite.

Dans les exemples qui précèdent, l'une des équations $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, qui conduisent à l'équation $\varphi(x) = 0$ lorsqu'on élimine y, contenait toujours cette variable au premier degré ; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on doit prendre une précaution dans l'application de la méthode précédente ; il pourrait arriver en effet que, pour une racine réelle x_0 de l'équation $\varphi(x) = 0$, les deux équations

$$f(x_0, y) = 0, \qquad g(x_0, y) = 0$$

eussent deux racines communes imaginaires, auxquelles ne correspondraient donc pas de points d'intersection des deux courbes ; la méthode laisserait ainsi échapper la racine réelle x_0 de l'équation $\varphi(x) = 0$. J'ai dit plus haut que, alors, x_0 doit être une racine double de l'équation obtenue en éliminant y entre les deux équations $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$: ce point n'a d'ailleurs été établi que dans le cas où ces deux équations étaient du second degré.

Les procédés qu'on vient d'indiquer peuvent être variés et généralisés dans divers sens. L'étude systématique de méthodes qui peuvent fournir rapidement, au moyen de graphiques ou d'instruments très simples, la solution approchée d'un très grand nombre de problèmes numériques, a pris, sous le nom de *Nomographie,* une grande extension.

§ 3. — ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A UNE INCONNUE.

285. Les méthodes qu'on a développées dans le Chapitre précédent pour la résolution numérique des équations à une inconnue (séparation et approximation des racines) s'appliquent aux équations dont le premier membre est un polynome ; on a pris soin, dans ce Chapitre, de faire remarquer comment, pour les équations de cette sorte, il était possible de compléter le théorème relatif à la substitution de deux nombres et le théorème de Rolle. Il me reste à développer quelques propositions importantes qui sont spéciales aux équations algébriques et qui se rapportent principalement à la séparation des racines ([1]).

Le problème posé au n° 151 (*Trouver le nombre de racines réelles d'une équation qui appartiennent à un intervalle donné*) a été complètement résolu pour les équations algébriques ; je me bornerai toutefois, sur ce sujet, à la règle des signes de Descartes et à ses conséquences.

286. Considérons une suite de n nombres réels, dont aucun n'est nul,

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \varkappa, \quad \lambda;$$

on dit que deux termes *consécutifs* de cette suite présentent une *variation* (de signe) s'ils sont de signes contraires, qu'ils présentent une *permanence* (de signe) s'ils sont de mêmes signes. Le nombre de variations de la suite augmenté du nombre de permanences est évidemment égal au nombre d'intervalles, c'est-à-dire à $n - 1$.

Les observations suivantes sont immédiates :

Si, entre deux nombres de signes contraires a, b, on introduit un terme intermédiaire c, la suite de trois termes a, c, b présentera une variation, comme la suite a, b.

Si, entre deux nombres de mêmes signes a, b, on introduit un terme intermédiaire c, la suite de trois termes a, c, b présentera deux ou zéro variations.

Revenons à la suite $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Si, entre deux termes consécutifs de cette suite qui présentent une variation, on introduit un terme intermédiaire, la nouvelle suite ainsi formée présentera le même nombre de variations que la précédente.

([1]) Le but est toujours de diminuer et de diriger les tâtonnements qui conduisent à ces racines. On remarquera que, en Arithmétique même, c'est là le caractère des règles qu'on enseigne pour faire une division ou extraire une racine. On ne doit pas se faire illusion sur la valeur pratique des expressions algébriques des racines d'une équation, lorsqu'on possède de pareilles expressions. Pour les réduire en nombres, il faudra faire ces tâtonnements qu'enseigne l'Arithmétique, et il n'est pas inutile d'observer que la méthode pour extraire une racine carrée, par exemple, qu'on qualifie d'*abrégée,* n'est que l'application de la méthode d'approximation de Newton. Je rappelle encore que les expressions algébriques des racines d'une équation du troisième degré sont inapplicables quand les trois racines sont réelles.

Plus brièvement, on dit que, en introduisant ce terme, le nombre de variations n'est pas altéré. De même, en supprimant un terme intermédiaire entre deux termes de signes contraires.

Si, entre deux termes consécutifs de même signe, on introduit un nouveau terme, le nombre de variations ne change pas ou est augmenté de deux unités. Si l'on supprime un des termes intermédiaires de la suite compris entre deux termes consécutifs qui ont le même signe, le nombre des variations n'est pas modifié ou est diminué de deux unités.

En supprimant dans la suite α, β, ..., λ autant de termes intermédiaires que l'on veut, le nombre de variations reste le même, ou est diminué d'un nombre pair. En supposant que, dans la suite, on supprime tous les termes intermédiaires, pour ne garder que les termes extrêmes α, λ, on arrive aux conclusions suivantes : si les termes extrêmes α, λ sont de mêmes signes, la suite présente un nombre pair de variations, qui peut être nul. Si les termes extrêmes α, λ ont des signes contraires, le nombre de variations de la suite est impair.

On ne change pas le nombre de variations d'une suite en changeant tous ses termes de signe ou en renversant l'ordre de tous ses termes.

J'arrive maintenant à l'énoncé du théorème (ou règle des signes) de Descartes.

Considérons un polynome ordonné $f(x)$ et appelons *nombre de variations de ce polynome* le nombre de variations de la suite de ses coefficients (non nuls) : *le nombre de racines positives du polynome est égal ou inférieur au nombre de ses variations ; la différence entre ces deux nombres est paire*. Chaque racine doit être comptée pour autant de racines qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

L'une des démonstrations que l'on a données de ce théorème permet de le rattacher au théorème de Rolle : c'est celle qui suit.

Je supposerai toujours dans ce qui suit que le polynome considéré n'a pas de racines nulles. Si ce polynome était divisible par x^p, on n'aurait qu'à supprimer le facteur x^p; le polynome auquel on parvient ainsi a les mêmes racines positives et le même nombre de variations que le polynome proposé.

La seconde partie de l'énoncé s'établit immédiatement en substituant o et $+\infty$ dans $f(x)$: si les deux coefficients extrêmes sont de mêmes signes, le polynome $f(x)$ a un nombre pair (peut-être nul) de racines positives; il présente alors un nombre pair de variations; si les deux coefficients extrêmes sont de signes contraires, le polynome a un nombre impair de racines et de variations; dans les deux cas, la différence entre le nombre des racines et le nombre des variations est paire.

Observons encore que le théorème de Descartes est évident pour les équations du premier degré; le lecteur n'aurait aucune peine à constater qu'il est encore vrai pour les équations du second degré.

Admettons qu'il soit vrai pour les polynomes de degré $n-1$; je vais établir qu'il est vrai pour un polynome quelconque $f(x)$ de degré n. Il est vrai, par hypothèse, pour la dérivée $f'(x)$, qui est de degré $n-1$. Je désignerai par V et V' les nombres des variations des polynomes $f(x)$ et $f'(x)$ que je supposerai ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable. Le premier coefficient de $f(x)$ [et de $f'(x)$] est supposé positif. Les coefficients de $f'(x)$ sont ceux de $f(x)$ multipliés par des nombres positifs : toutefois, il n'y a pas, dans $f'(x)$, de coefficient correspondant au terme constant de $f(x)$. Le nombre de variations de $f'(x)$ est le nombre de variations de la suite des coefficients de $f(x)$, dont on a supprimé le dernier. On a $V = V'$ ou $V = V' + 1$, suivant que les deux derniers termes de $f(x)$ présentent une permanence ou une variation.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les racines positives de $f(x)$ rangées par ordre de grandeur croissante, avec les ordres de multiplicité α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Le nombre de racines positives de $f(x)$, en tenant compte de leur ordre de multiplicité, est $P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$; elles fournissent, ainsi qu'il a été expliqué au n° 253,

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \ldots + a_p - 1 = P - p,$$

racines positives de la dérivée, communes à $f(x)$ et à $f'(x)$. En vertu du théorème de Rolle, il y a d'ailleurs au moins une racine de $f'(x)$ intérieure à chaque intervalle de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_p$, c'est-à-dire au moins $p-1$ racines positives autres que celles qu'on a déjà comptées; il peut encore s'en trouver entre o et a, entre a_p et $+\infty$. En résumé, si l'on désigne par P' le nombre de racines positives de $f'(x)$, on a

$$P' = P - p + p - 1 + k = P - 1 + k$$

en désignant par k un entier positif ou nul; le théorème de Descartes s'appliquant par hypothèse à la dérivée, on a

$$P - 1 + k \leqq V', \qquad P \leqq V' + 1 - k \leqq V' + 1 \leqq V + 1;$$

si P n'était pas inférieur ou égal à V, il faudrait donc qu'il fût égal à $V + 1$; mais cela est impossible, puisque, alors, la différence entre P et V serait impaire. Le théorème est démontré.

Quand il n'y a pas de variations, il ne peut y avoir de racines positives, en vertu du théorème précédent : cette conclusion est évidente *a priori,* puisque, alors, tous les termes du polynome sont de même signe quand x est positif : leur somme ne peut être nulle.

Quand il y a une variation seulement, il y a au plus une racine positive : il y en a sûrement une, puisque les termes extrêmes du polynome sont de signes contraires. Dans ce cas encore, la démonstration directe est aisée.

Le polynome $f(x)$, en effet, si l'on suppose qu'il commence par un terme positif, peut s'écrire sous la forme $g(x) - h(x)$ en désignant par $g(x)$ et $h(x)$ des polynomes ordonnés à termes tous positifs et pour lesquels le degré du second est inférieur au degré r du dernier terme de $g(x)$; on a alors

$$\frac{f(x)}{x^r} = \frac{g(x)}{x^r} - \frac{h(x)}{x^r};$$

supposons que, dans le second membre, on ait effectué la division par x^r de chaque monome de $g(x)$ et de $h(x)$; tous les termes de $\frac{g(x)}{x^r}$ ont des exposants positifs ou nuls, tous ceux de $\frac{h(x)}{x^r}$ ont des exposants négatifs; lorsque x croît par valeurs positives, $\frac{g(x)}{x^r}$ croît, $\frac{h(x)}{x^r}$ décroît; il en résulte que $\frac{f(x)}{x^r}$ est constamment croissant et ne peut s'annuler qu'une fois; d'ailleurs le polynome $f(x)$ s'annule certainement puisqu'il a des valeurs de signes contraires pour $x = 0$ et $x = +\infty$.

La règle due à Descartes permet d'obtenir une limite du nombre de racines négatives de l'équation $f(x) = 0$, lesquelles ne sont autres que les racines positives de la transformée en $-x$, $f(-x) = 0$, changées de signe. Dans ce qui suit, je désignerai par V et V_1 les nombres respectifs de variations de la proposée et de la transformée, par P, P_1 les nombres respectifs de racines positives de l'une et de l'autre; P_1 est le nombre de racines négatives de la proposée. On a $P \leqq V$, $P_1 \leqq V_1$; les différences $V - P$, $V_1 - P_1$ sont des nombres pairs; $V + V_1$ est une limite supérieure du nombre de racines réelles de l'équation proposée (qui n'a pas de racines nulles); si n est le degré de cette équation, on voit que le nombre de ses racines imaginaires est égal ou supérieur à $n - V - V_1$.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^5 + x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0;$$

elle a une racine positive puisqu'il y a une variation et une seule; la transformée en $-x$ a deux variations; la proposée a zéro ou deux racines négatives; elle a une ou trois racines réelles; elle a deux ou quatre racines imaginaires.

Considérons encore l'équation

$$x^n + ax^p + b = 0,$$

où l'on suppose $n > p$.

1° Supposons n et p pairs, il y a évidemment autant de racines positives que de racines négatives. Si a et b sont positifs, il n'y a pas de racines réelles; si a et b sont négatifs, il y a une racine positive et une négative; de même si a est positif et b négatif. Si a est négatif et b positif, il peut y avoir deux ou zéro racines positives.

2° Supposons n et p impairs; la transformée en $-x$ est $x^n + ax^p - b = 0$. Si a est positif, il n'y a qu'une racine réelle, qui est de signe contraire à b. Pour $a < 0$, $b > 0$, il y a une racine négative, zéro ou deux racines positives. Pour $a < 0$, $b < 0$, il y a une racine positive, zéro ou deux racines négatives.

3° Supposons n pair et p impair; la transformée en $-x$ est $x^n - ax^p + b = 0$. Si b est positif, il y a zéro ou deux racines réelles; s'il y en a deux, elles sont de signe contraire à a. Si b est négatif, l'équation proposée a une racine positive et une négative.

4° Supposons n impair et p pair, la transformée en $-x$ est $x^n - ax^p - b = 0$. Si b est positif, il y a une racine négative, zéro racine positive si a est positif et, si a est négatif, zéro ou deux racines positives. Si b est négatif, il y a une racine positive, zéro racine négative si a est positif, zéro ou deux si a est négatif; en tout trois racines réelles au plus.

On peut faire, sur l'évaluation de la somme $V + V_1$, quelques remarques générales qui nous conduiront, en particulier, à cette conséquence importante :

Le nombre de racines positives d'une équation dont toutes les *racines sont réelles est égal au nombre de variations du premier membre de cette équation.*

Considérons deux termes consécutifs de $f(x)$; soit δ la différence de leurs degrés; soit δ' le nombre d'unités que ces deux termes apportent dans la somme $V+V_1$; δ' est nul si les deux termes considérés présentent une permanence dans $f(x)$ et dans $f(-x)$; δ' est égal à 1 s'ils présentent une permanence dans l'un des polynomes et une variation dans l'autre; δ' est égal à 2 si les deux termes présentent une variation dans $f(x)$ et dans $f(-x)$.

Supposons δ impair : l'un des termes consécutifs est de degré impair et change de signe quand on change x en $-x$; l'autre terme est de degré pair et ne change pas de signe; si les deux termes présentent une variation dans l'un des polynomes $f(x)$, $f(-x)$, ils présentent une permanence dans l'autre; on a $\delta' = 1$.

Si δ est pair, les deux termes sont de degré pair ou de degré impair; quand on change x en $-x$, ils ne changent ni l'un ni l'autre, ou bien tous deux changent de signe : on a $\delta' = 0$ si les deux termes, dans $f(x)$, présentent une permanence; on a $\delta' = 2$ s'ils présentent une variation.

Dans tous les cas $\delta - \delta'$ est un nombre pair, positif ou nul.

$V+V_1$ est égal à la somme des différents nombres δ' qui correspondent aux divers couples de termes consécutifs de $f(x)$; c'est ce que j'exprimerai en écrivant

$$V + V_1 = \Sigma\,\delta';$$

quant à la somme $\Sigma\,\delta$ de toutes les différences de degrés relatifs à ces mêmes couples, elle est évidemment égale à la différence n entre le degré du premier terme de $f(x)$ et le degré o du dernier terme.

La différence $n-(V+V_1) = \Sigma\,\delta - \Sigma\,\delta' = \Sigma(\delta - \delta')$ est un nombre pair, positif ou nul, puisque chacun des termes de la somme $\Sigma(\delta-\delta')$ est un nombre pair, positif ou nul.

En vertu de cette remarque et du théorème de Descartes, on peut poser, en désignant par α, β, β_1 des nombres entiers, positifs ou nuls,

$$V + V_1 = n - 2\alpha, \qquad P = V - 2\beta, \qquad P_1 = V_1 - 2\beta_1.$$

On en conclut

$$n = V + V_1 + 2\alpha = P + P_1 + 2\alpha + 2\beta + 2\beta_1.$$

Comme on a d'ailleurs $n = P + P_1 + 2I$, en désignant par $2I$ le nombre de racines imaginaires de $f(x)$, on a

$$2I = 2\alpha + 2\beta + 2\beta_1;$$

si l'on sait d'avance que $2I$ est nul, on sera assuré que α, β, β_1 sont nuls; β et β_1 étant nuls, on a $P = V$, $P_1 = V_1$; le nombre de racines positives de l'équation proposée est égal au nombre de variations qu'elle présente.

Dans le cas général il y a au moins un nombre de racines imaginaires égal à

$$2\alpha = n - V - V_1 = \Sigma(\delta - \delta').$$

Pour une équation donnée, il est très aisé de déterminer le nombre $n - V - V_1$ et d'obtenir ainsi une limite inférieure du nombre de racines imaginaires. L'expression $\Sigma(\delta - \delta')$ n'est pas non plus sans intérêt; comme les nombres δ' sont au plus égaux à 2, on voit que, dans une équation dont toutes les racines sont réelles, aucun nombre δ ne peut dépasser 2; aucun nombre δ ne peut être égal à 2 si le nombre correspondant δ' est égal à 0, c'est-à-dire si les deux termes consécutifs dont les degrés diffèrent de $\delta = 2$ unités ont des coefficients de même signe. Entre deux termes consécutifs d'un polynome $f(x)$ dont toutes les racines sont réelles, il ne peut manquer plus de deux termes; si les coefficients des deux termes consécutifs sont de mêmes signes, il ne peut en manquer deux.

Lorsqu'on sait qu'une équation a toutes ses racines réelles, on reconnaît immédiatement le nombre de ses racines positives et le nombre de ses racines négatives.

Pour une telle équation, il est aisé de reconnaître combien de racines réelles sont supérieures à un nombre donné a; en effet, les racines du polynome $f(x+a)$ sont les racines du polynome $f(x)$ diminuées de a; le nombre de racines de $f(x)$ supérieures à a sera donc le nombre de racines positives du polynome

$$f(x+\alpha) = f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a),$$

c'est-à-dire le nombre de variations v de la suite

$$f(a), \quad f'(a), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a),$$

d'où l'on a supprimé les termes nuls, s'il y a lieu.

De même, le nombre de racines de l'équation supérieures à b est donné par le nombre v' de variations de la suite

$$f(b),\quad f'(b),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(b).$$

Le nombre de racines comprises entre a et b est donc $v - v'$, en supposant $a < b$.

Ce théorème ne s'applique qu'aux équations dont toutes les racines sont réelles : dans le cas général, on démontre que le nombre $v - v'$, calculé comme on vient de l'expliquer, est supérieur ou égal au nombre de racines comprises entre a et b, et que la différence entre $v - v'$ et le nombre de racines est paire ; je me borne à énoncer ce théorème, qui est connu sous les noms de Budan et de Fourier.

Une autre transformation que celle qu'on vient d'indiquer permet de trouver, au moyen du théorème de Descartes, une limite supérieure du nombre de racines d'une équation donnée $f(x) = 0$ comprises entre deux nombres donnés a et b $(a < b)$.

Si l'on pose $y = \frac{x-a}{b-x}$, il est clair que, lorsque x croît de a à b, y croît de 0 à $+\infty$; pour les autres valeurs de x, y est négatif; le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et b sera donc égal au nombre de racines positives de l'équation $f\left(\frac{a+by}{1+y}\right) = 0$; on mettra cette équation sous forme entière, on comptera le nombre de variations et l'on obtiendra ainsi un nombre égal ou supérieur au nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et b ; si l'équation en x avait toutes ses racines réelles, il en serait de même de l'équation en y ; le nombre de variations de cette dernière donnerait exactement le nombre de racines de l'équation en x comprises entre a et b.

Exemples. — L'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - 1 = 0$$

a ses quatre racines réelles (n° 198).

En chassant les dénominateurs et en ordonnant, elle prend la forme

$$x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 19x - 2 = 0;$$

on voit, par le théorème de Descartes, qu'elle a trois racines positives et une racine négative. En désignant son premier membre par $f(x)$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 21x^2 - 10x + 19\\
\tfrac{1}{2}f''(x) &= 6x^2 - 21x - 5\\
\tfrac{1}{6}f'''(x) &= 4x - 7\\
\tfrac{1}{24}f^{\text{IV}}(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Cherchons, par exemple, combien il y a de racines entre 0 et 1,5. Ce nombre est égal à la différence de variations entre les deux suites

$$\begin{array}{lllll}
-2, & +19, & -5, & -7, & 1;\\
-3{,}3125, & -29{,}75, & -23, & -1, & 1;
\end{array}$$

c'est-à-dire $3 - 1 = 2$. Il y a donc deux racines positives entre 0 et 1,5. On sait d'ailleurs (n° 198) que les racines de l'équation proposée sont respectivement situées dans les intervalles de la suite

$$-2, \quad -1, \quad 1, \quad 2, \quad +\infty;$$

puisqu'il y a trois racines positives, la racine comprise entre -1 et 1 est certainement positive; comme il y a deux racines comprises entre 0 et 1,5, on voit aussi que la racine comprise entre 1 et 2 est comprise entre 1 et 1,5.

Considérons l'équation

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n = 0.$$

Le théorème de Descartes n'apprend rien sur cette équation, si ce n'est qu'elle ne peut avoir de racines positives, ce qui est d'ailleurs évident. Mais on sait (n° 229) que le premier membre, multiplié par $(x-1)^2$, devient

$$(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1.$$

Ce dernier polynome admet les racines de l'équation proposée et, en plus, la racine 1, qui est double. Il a d'ailleurs deux variations. Les racines négatives de ce polynome, s'il en a, sont les mêmes que les racines de l'équation proposée; or la transformée en $-x$ n'a pas de variations si n est pair; elle en a une si n est impair; l'équation proposée a donc une racine réelle, et une seule, dans ce dernier cas. Elle a toutes ses racines imaginaires quand n est pair.

287. Limites des racines. — Il est utile, afin de diminuer le nombre des essais à faire pour séparer les racines d'une équation, de savoir trouver des limites entre lesquelles elles soient certainement comprises.

J'indiquerai d'abord un procédé pour trouver une limite supérieure de la valeur absolue des racines réelles ou imaginaires d'une équation à coefficients réels ou imaginaires, plus avantageux que le procédé un peu grossier que l'on a indiqué aux Chapitres II et VII.

Soient

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

un polynome quelconque et a un nombre réel, supérieur à 1 et au moins égal à la plus grande des valeurs absolues des coefficients $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Si l'on désigne par x' la valeur absolue de x, on aura évidemment

$$|f(x)| \geqq x'^n - a(x'^{n-1} + x'^{n-2} + \ldots + 1).$$

Supposons $x' > 1$, le second membre de l'inégalité précédente, qui est égal à $x'^n - \dfrac{a(x'^n - 1)}{x' - 1}$, est plus grand que

$$x'^n - \frac{a x'^n}{x' - 1} = \frac{x'^n(x' - 1 - a)}{x' - 1}.$$

On a donc

$$|f(x)| > \frac{x'^n(x' - 1 - a)}{x' - 1}$$

et, si l'on a $x' \geqq 1 + a$, on sera certain que $f(x)$ ne peut être nul; $a + 1$ est donc une limite supérieure des valeurs absolues des racines de l'équation proposée; en particulier, les racines réelles sont comprises entre $-1 - a$ et $1 + a$, ces expressions sont commodes à cause de leur grande simplicité; on peut toutefois en trouver de meilleures. Je me borne, dans ce qui suit, aux équations à coefficients réels et à leurs racines réelles.

Je vais montrer comment, pour une équation à coefficients réels, on peut obtenir une limite supérieure des racines réelles. En cherchant, pour la transformée en $-x$, une pareille limite, puis en changeant le signe du résultat, on aura évidemment une limite inférieure des racines de la proposée. Lorsque l'équation proposée a des racines positives, on peut se servir de la transformée en $\dfrac{1}{x}$ pour avoir une limite inférieure de ces racines : on n'a qu'à prendre l'inverse de la limite supérieure des racines positives de cette transformée.

Je me borne donc à la recherche d'une limite supérieure des racines de l'équation proposée. Je supposerai que le coefficient de la plus haute puissance de x soit positif, en sorte que le premier membre $f(x)$ de l'équation soit positif pour x positif et très grand. Il suffit de trouver un nombre A tel que l'on ait certainement $f(x) > 0$ pour $x \geqq A$.

Si l'on avait une pareille limite A′ pour les racines de l'équation dérivée $f'(x) = 0$, on serait sûr que, pour $x > A'$, la fonction $f(x)$ est croissante; tout nombre supérieur ou égal à A′ qui la rend positive est une limite supérieure des racines de $f(x)$: on substituera, dans $f(x)$, A′ à la place de x; si le résultat est positif, A′ sera une limite; si $f(A')$ est négatif, on substituera à la place de x des nombres plus grands que A′, par exemple des nombres entiers croissants, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui rende $f(x)$ positif.

Supposons que $f(x)$ soit de degré n; sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est une constante positive, sa dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ est du premier degré; on obtient de suite sa racine ou un nombre plus grand; on en conclut, par le procédé qu'on vient d'indiquer, une limite supérieure des racines de $f^{(n-2)}x$, puis de $f^{(n-3)}x$, ..., enfin de $f(x)$.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 19x - 2 = 0;$$

la racine de $f'''(x)$ est $\frac{7}{4} < 2$; en substituant 2 et 3 dans $\frac{1}{2}f''(x)$, on trouve des résultats négatifs; mais, pour $x = 4$, le résultat est positif; 4 est une limite supérieure des racines de $f''(x)$; en substituant 4 dans $f'(x)$, on trouve un résultat négatif; mais, pour $x = 5$, le résultat est positif; 5 est une limite supérieure des racines de $f'(x)$; 5, 6 et 7 substitués dans $f(x)$ donnent des résultats négatifs; 8 donne un résultat positif; c'est une limite supérieure des racines; les essais qui précèdent montrent en outre que la plus grande racine est comprise entre 7 et 8.

Le procédé suivant donne d'ordinaire une limite un peu moins bonne que l'application de la règle qu'on vient d'expliquer et qui est due à Newton, mais il est d'une application plus rapide.

On observera d'abord que, si un polynome $\varphi(x)$, dans lequel le premier coefficient est positif, a une variation et une seule, et, par conséquent, une racine positive et une seule, tout nombre a qui, mis à la place de x, donne un résultat positif, est plus grand que cette racine. Pour un tel polynome on obtiendra la limite cherchée par des essais successifs.

Soit maintenant un polynome $f(x)$, dont je suppose que le premier coefficient soit positif; on le décomposera en une somme de polynomes

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_p(x),$$

dont chacun est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, commence par un terme à coefficient positif et ne comporte qu'une variation; le dernier peut n'en comporter aucune mais doit toujours, bien entendu, commencer par un terme à coefficient positif.

On cherche un nombre a_1 supérieur ou égal à la racine positive de $\varphi_1(x)$, un nombre a_2 supérieur ou égal à la racine positive de $\varphi_2(x)$, ..., un nombre a_p supérieur ou égal à la racine positive de $\varphi_p(x)$, s'il y en a une; si $\varphi_p(x)$ n'a pas de variation, on prendra $a_p=0$. Le plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sera une limite des racines de $f(x)$, car pour les valeurs de x supérieures à ce nombre, chacun des polynomes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$ sera positif.

Par exemple, dans l'équation qu'on vient de traiter, on peut prendre

$$\varphi_1(x)=x^4-7x^3-5x^2, \qquad \varphi_2(x)=19x-2;$$

le nombre 8, mis à la place de x, rend $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ positifs; c'est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

Cherchons une limite inférieure des racines positives, et, pour cela, une limite supérieure des racines positives de l'équation

$$2x^4-19x^3+5x^2+7x-1=0,$$

on peut prendre ici

$$\varphi_1(x)=2x^4-19x^3, \qquad \varphi_2(x)=5x^2+7x-1;$$

$\frac{19}{2}$ annule $\varphi_1(x)$ et rend $\varphi_2(x)$ positif.

Le nombre $\frac{2}{19}$ ou le nombre plus petit 0,1 peut donc servir de limite inférieure des racines positives.

288. L'utilité des propositions et des méthodes exposées dans les deux numéros précédents pour la séparation des racines d'une équation algébrique ressort suffisamment.

Il convient de remarquer que, pour une telle équation, on peut toujours supposer qu'elle n'a plus que des racines simples; il suffit de lui appliquer la méthode du n° 119. Je ne reviens pas sur le parti qu'on peut tirer du théorème de Rolle.

Le théorème de Descartes fournit un premier renseignement sur le nombre de ses racines positives et négatives. Après avoir déterminé des limites supérieure et inférieure de ces racines, on cherche à séparer ces racines, par exemple en substituant dans le premier membre des nombres, que l'on se gardera de prendre en dehors des limites; lorsqu'on sait que toutes les racines sont réelles, on peut procéder régulièrement dans cette recherche, puisqu'il est alors aisé de connaître le nombre de racines contenues dans un intervalle. Les racines étant séparées, on cherche, par de nouvelles substitutions, à resserrer suffisamment l'intervalle dans lequel chaque racine est enfermée pour qu'on croie pouvoir appliquer utilement quelqu'une des méthodes d'approximation.

Il peut se faire qu'une équation algébrique ait des racines rationnelles, et il importe de savoir déterminer exactement ces racines.

289. Recherche des racines rationnelles. — Soit

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

une équation à coefficients *entiers* [1], dont je désignerai le premier membre par $f(x)$. Supposons qu'elle admette une racine rationnelle $\frac{p}{q}$, les nombres entiers p et q étant premiers entre eux; le cas où q serait égal à 1 n'est pas exclu. Le polynome $f(x)$ est divisible par $x - \frac{p}{q}$ ou par $qx - p$. Ce dernier polynome étant *primitif*, au sens du n° 55, la division ne doit introduire au quotient aucun terme fractionnaire; en particulier, A_0 et A_n doivent être respectivement divisibles par q et p, puisque le premier et le dernier coefficients du quotient s'obtiennent en divisant respectivement A_0 et A_n par q et par $-p$; d'ailleurs, les coefficients du quotient de la division par $qx - p$ sont les coefficients du quotient de la division par $x - \frac{p}{q}$ res-

(1) Lorsque les coefficients d'une équation sont des nombres rationnels, on n'a qu'à multiplier tous les coefficients par un nombre convenable pour les rendre entiers. Quant au cas où les coefficients sont irrationnels, il n'y a pas lieu, en général, de s'en occuper.

pectivement divisés par q ; d'où, en se reportant à la règle du n° 54, les conclusions suivantes :

Si la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est racine de l'équation à coefficients entiers

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

les nombres

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = B_0 \frac{p}{q} + A_1, \quad B_2 = B_1 \frac{p}{q} + A_2, \quad \ldots, \quad B_{n-1} = B_{n-2} \frac{p}{q} + A_{n-1}$$

sont entiers et divisibles par q, le nombre

$$B_n = B_{n-1} \frac{p}{q} + A_n = A_0 \frac{p^n}{q^n} + A_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + A_n$$

est nul (¹).

Le quotient de $f(x)$ par $x - \frac{p}{q}$ est alors

$$B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1},$$

(¹) Ces propositions s'établissent directement. De la supposition

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} q + \ldots + A_n q^n = 0$$

on tire successivement

$$\begin{aligned} \frac{A_0 p^n}{q} &= -(A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} q + \ldots + A_n q^{n-1}), \\ \frac{B_1 p^{n-1}}{q} &= -(A_2 p^{n-2} + A_3 p^{n-3} q + \ldots + A_n q^{n-2}), \\ \frac{B_2 p^{n-2}}{q} &= -(A_3 p^{n-3} + A_4 p^{n-4} q + \ldots + A_n q^{n-3}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{B_{n-1} p}{q} &= -A_n. \end{aligned}$$

Les seconds membres sont entiers; les premiers doivent l'être aussi; q est premier à p et, par conséquent, à toutes les puissances de p; en vertu de la première égalité, il divise A_0, donc B_1 est entier; en vertu de la deuxième égalité, q divise B_1, donc B_2 est entier; la dernière égalité montre à la fois que q divise B_{n-1} et que p divise A_n. La condition $B_n = 0$ exprime que $\frac{p}{q}$ est racine de l'équation $f(x) = 0$.

et le quotient de $f(x)$ par $qx - p$ est

$$B'_0 x^{n-1} + B'_1 x^{n-2} + \ldots + B'_{n-1},$$

en désignant par B'_0, B'_1, ..., B'_{n-1} les quotients de la division par q des nombres B_0, B_1, ..., B_{n-1}; les nombres B'_0, B'_1, ..., B'_{n-1} sont entiers.

Pour essayer une fraction $\frac{p}{q}$, afin de reconnaître si elle est racine de l'équation $f(x) = 0$, on écrit sur une ligne horizontale les coefficients

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}, \quad A_n$$

de cette équation, en ayant soin de remplacer par des zéros les coefficients manquants; sous le premier coefficient A_0 on écrit $B'_0 = \frac{A_0}{q}$; B'_1, que l'on écrira sous A_1, est égal à $\frac{B'_0 p + A_1}{q}$, chacun des coefficients B'_2, B'_3, ..., B'_{n-1} se déduit du précédent en le multipliant par p, en ajoutant celui des nombres A_0, A_1, ..., A_{n-1} au-dessous duquel on doit le placer, et, en divisant la somme par q; le nombre B'_n, formé d'après la même loi, doit être nul.

Si l'un des coefficients que l'on est amené ainsi à écrire n'est pas entier, ou si B'_n n'est pas nul, $\frac{p}{q}$ n'est pas racine de l'équation.

Si $\frac{p}{q}$ est racine de l'équation $f(x) = 0$, $\frac{q}{p}$ sera racine de la transformée en $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire de l'équation

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0 = 0.$$

On pourra aussi bien s'adresser, pour un essai, à cette équation qu'à la proposée; d'où une nouvelle suite de conditions que je me dispense de répéter, et qu'on trouverait d'ailleurs aussi en faisant la division du polynome $f(x)$, ordonné suivant les puissances *croissantes* de x par $p - qx$. C'est à la dernière équation qu'il faudra s'adresser si l'on veut essayer un nombre entier p, parce que, ainsi, on peut être prévenu plus tôt, en rencontrant un coefficient fractionnaire, que l'essai ne doit pas réussir. Pour la même raison, c'est la première méthode qu'il faudra suivre si l'on veut essayer une fraction de la forme $\frac{1}{q}$. D'une façon générale, on choisira plutôt la première méthode ou la seconde suivant que p est plus petit ou plus grand que q (¹).

Les nombres rationnels à essayer sont, d'ailleurs, en nombre limité : pour les obtenir, on cherchera les diviseurs de A_0 et de A_n, on formera un tableau contenant tous les diviseurs de A_n et toutes les fractions ayant pour numérateur un diviseur de A_n, pour dénominateur un diviseur de A_0; toutes ces fractions devront être réduites à leurs plus simples expressions; tous les nombres du tableau seront affectés des signes $+$ et $-$, on ne gardera que ceux qui sont distincts.

On supprimera tous ceux qui seraient en dehors des limites assignées aux racines.

Voici une remarque à l'aide de laquelle on peut éliminer certains des nombres à essayer :

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible (le cas où q est égal à 1 n'est pas exclu). Soit $\varphi(x)$ le quotient de la division du polynome $f(x)$ par $qx - p$, quotient qui doit avoir tous ses coefficients entiers. L'identité $f(x) = (qx - p)\varphi(x)$ montre que, si l'on attribue à x une valeur entière quelconque, le nombre entier $f(x)$ doit être divisible par le nombre entier $qx - p$. En particulier, les nombres entiers $f(1)$ et $f(-1)$ doivent être respectivement divisibles par $q - p$ et $q + p$; on rejettera ceux des nombres $\frac{p}{q}$ qui ne satisferaient pas à cette condition; en particulier, on rejettera les nombres entiers p tels que $p - 1$ et $p + 1$ ne divisent pas l'un et l'autre les nombres $f(1)$ et $f(-1)$.

Remarquons enfin qu'on peut toujours ramener la recherche des racines rationnelles à la recherche des racines entières : en effet, une équation à coefficients entiers étant donnée, on peut toujours, en multipliant ses racines par un nombre entier convenablement choisi, la remplacer par une équation, à coefficients entiers, dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de x soit égal à 1. Pour une pareille équation, les racines rationnelles sont nécessairement entières. Il ne restera plus, après avoir calculé ces racines entières,

(¹) Cela n'a rien d'absolu, surtout si la fraction $\frac{p}{q}$ est voisine de 1 en valeur absolue : si q était un nombre premier, ce serait une raison pour choisir la première méthode.

qu'à leur donner comme dénominateur le nombre entier par lequel on a multiplié toutes les racines de la proposée.

La remarque suivante permet quelquefois de reconnaître rapidement qu'un polynome $f(x)$, à coefficients entiers, n'a pas de racines entières. Soit m un nombre naturel quelconque : on reconnaît de suite que, si deux nombres entiers a et b donnent le même reste quand on les divise par m, il en est de même des deux nombres entiers $f(a)$, $f(b)$. Il résulte de là que, si l'on substituait dans $f(x)$, à la place de x, tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, et si l'on calculait les restes de la division par m, les restes se reproduiraient périodiquement de m en m [1]; pour obtenir tous les restes possibles, il suffira de substituer, dans $f(x)$, m nombres entiers consécutifs.

Ceci posé, l'un de ces restes doit être nul si $f(x)$ admet une racine entière a, à savoir le reste qui correspond à celui des nombres substitués qui, divisé par m, donnerait le même reste que a.

Si donc, parmi les m résultats de substitution, aucun n'est divisible par m, on est sûr que l'équation $f(x)=0$ n'a pas de racines entières.

En particulier, si les deux nombres $f(0)$ et $f(1)$, ou $f(0)$ et $f(-1)$ sont tous les deux impairs, l'équation $f(x)=0$ n'a pas de racines entières; elle n'en a pas non plus si aucun des trois nombres $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ n'est divisible par 3. La première de ces conclusions s'établit sans peine directement.

Exemple. — Soit

$$f(x) = 28x^6 + 136x^5 - 335x^4 - 1530x^3 - 118x^2 - 1666x + 245$$

le premier membre de l'équation proposée; d'après le théorème de Descartes, il peut y avoir, au plus, deux racines positives et deux racines négatives.

Le polynome

$$28x^6 + 136x^5 - 335x^4 - 1530x^3 - 118x^2 - 1666x$$

n'a qu'une variation; il est positif pour $x=4$; il en est de même *a fortiori* de $f(x)$ pour les valeurs de x égales ou supérieures à 4; 4 est une limite supérieure des racines (n° 287).

On a d'ailleurs

$$f(-x) = x^4(28x^2 - 136x - 335) + x^2(1530x - 118) + (1666x + 245).$$

La première parenthèse est positive pour $x=7$, il en est de même des deux autres polynomes placés entre parenthèses : -7 est une limite inférieure des racines de l'équation proposée. Je me dispense de chercher une limite inférieure des racines positives, une limite supérieure des racines négatives.

---

[1] La période peut d'ailleurs être plus courte; le nombre de termes qui la composent est nécessairement un diviseur de m.

On a

$$f(1) = -3240, \qquad f(-1) = 2880.$$

Les diviseurs de 28 et de 245 sont respectivement

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 7, \quad 14, \quad 28;$$
$$1, \quad 7, \quad 49, \quad 5, \quad 35, \quad 245.$$

Les nombres distincts à essayer seraient, d'après cela,

$$\pm 1, \quad \frac{\pm 1}{2}, \quad \frac{\pm 1}{4}, \quad \frac{\pm 1}{7}, \quad \frac{\pm 1}{14}, \quad \frac{\pm 1}{28}, \quad \pm 7, \quad \frac{\pm 7}{2}, \quad \frac{\pm 7}{4},$$
$$\pm 49, \quad \frac{\pm 49}{2}, \quad \frac{\pm 49}{4}, \quad \pm 5, \quad \frac{\pm 5}{2}, \quad \frac{\pm 5}{4}, \quad \frac{\pm 5}{7}, \quad \frac{\pm 5}{14}, \quad \frac{\pm 5}{28},$$
$$\pm 35, \quad \frac{\pm 35}{2}, \quad \frac{\pm 35}{4}, \quad \pm 245, \quad \frac{\pm 245}{2}, \quad \frac{\pm 245}{4}.$$

En supprimant ceux qui tombent en dehors des limites, et les nombres ± 1, déjà essayés, il reste

$$\frac{\pm 1}{2}, \quad \frac{\pm 1}{4}, \quad \frac{\pm 1}{7}, \quad \frac{\pm 1}{14}, \quad \frac{\pm 1}{28}, \quad \frac{\pm 7}{2}, \quad \frac{\pm 7}{4}, \quad -5,$$
$$\frac{\pm 5}{2}, \quad \frac{\pm 5}{4}, \quad \frac{\pm 5}{14}, \quad \frac{\pm 5}{28},$$

La règle relative à $f(1)$, $f(-1)$ permet d'écarter les nombres

$$\frac{\pm 1}{14}, \quad \frac{\pm 1}{28}, \quad \frac{\pm 7}{4}, \quad \frac{\pm 5}{2}, \quad \frac{\pm 5}{14}, \quad \frac{\pm 5}{28};$$

il reste à essayer

$$\frac{\pm 1}{2}, \quad \frac{\pm 1}{4}, \quad \frac{\pm 1}{7}, \quad \frac{\pm 7}{2}, \quad -5.$$

Les essais relatifs à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ sont figurés ci-dessous; on s'est arrêté dès qu'on a pu voir que le terme suivant ne serait pas entier.

	28	136	−335	−1530	−118	−1666	245
$\frac{1}{2}$	14	75	−130	−830	−474	−1570	
$\frac{1}{4}$	7						
$\frac{1}{7}$	4	20	−45	−225	−49	−245	0.

L'essai a réussi pour $\frac{1}{7}$ et les nombres écrits en dernier lieu sont les coefficients du quotient de $f(x)$ par $7x - 1$; on remplacera, dans les essais ultérieurs, $f(x)$ par ce quotient, qui est plus simple. Il n'y a pas lieu d'essayer une seconde fois $\frac{1}{7}$ puisque 7 ne divise pas 4. Pour essayer $\frac{7}{2}$, au lieu de faire la division par $2x - 7$, les polynomes étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, on essaiera la division du polynome ordonné par rapport aux puissances croissantes par $7 - 2x$: le calcul est indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc} 245 & 49 & 225 & 45 & -20 & -4, \\ 35 & 17 & 37 & 17 & 2 & 0. \end{array}$$

L'essai réussit encore : $\frac{7}{2}$ est racine de la proposée: on a les coefficients du quotient de la division par $7 - 2x$; ordonné par rapport aux puissances croissantes de x; on peut se dispenser d'essayer $\frac{7}{2}$ une seconde fois, car on savait, par le théorème de Descartes, que l'équation $f(x)$ ne pouvait avoir plus de deux racines positives; au surplus, sur le polynome même auquel on parvient, on reconnaît qu'il ne peut y avoir de racines positives. Il ne reste plus qu'à essayer les nombres $\frac{-1}{7}$, $\frac{-7}{2}$, -5; l'essai de $\frac{-1}{7}$ est inutile, puisque 7 ne divise pas le coefficient 2 de la plus haute puissance de x; pour essayer $\frac{-7}{2}$, on fera la division par $7 + 2x$, les deux polynomes étant ordonnés suivant les puissances croissantes de x; le calcul est indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} 35 & 17 & 37 & 17 & 2, \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0. \end{array}$$

Il n'y a pas lieu d'essayer une seconde fois $\frac{-7}{2}$; il reste à essayer la division par $5 + x$ qui donne les coefficients :

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 0.$$

On voit que -5 est racine et que le quotient est $x^2 + 1$. Finalement, on voit que l'on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 28\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right)(x + 5)(x^2 + 1) \\ &= (7x - 1)(2x - 7)(2x + 7)(x + 5)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

On voit que les essais se font assez rapidement : ils ne supposent nullement que l'équation considérée ait été débarrassée de ses racines multiples. Tout au contraire, quand on a affaire à une équation du troisième degré ou à une équation du quatrième degré (dont le premier membre n'est pas un carré parfait), et que les coefficients de ces équations sont rationnels, il est souvent plus commode, au lieu de rechercher par la méthode du n° 119 leurs racines multiples, d'appliquer le procédé qu'on vient d'indiquer.

EXERCICES.

289. Résoudre l'équation

$$5x^3 + 4x^2 + 4x - 1 = 0,$$

sachant qu'elle a deux racines dont la somme est -1.

290. Résoudre l'équation

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

sachant qu'elle a deux racines dont le produit est égal à 1.

291. Résoudre l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0,$$

sachant qu'elle a deux racines symétriques.

292. Résoudre l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

sachant qu'elle a deux racines dont la différence est 2.

293. Résoudre l'équation

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$$

sachant qu'elle a deux racines dont le rapport est -2.

294. Trouver, en partant des relations entre les coefficients et les racines, la condition à laquelle doivent satisfaire p et q pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait deux racines égales : cette condition étant vérifiée, résoudre l'équation.

295. Établir des formules, analogues à celles de Newton, qui donnent les sommes des puissances semblables négatives des racines d'une équation.

296. Vérifier, en supposant $\varphi(x) = x^3 + px + q$, les identités établies au n° 68.

297. Calculer les coefficients de l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

connaissant la somme des carrés, la somme des cubes et la somme des quatrièmes puissances des racines de cette équation.

298. Soit $f(x)$ un polynome dont on donne les coefficients et dont on désigne les racines par a, b, c, ..., l.

Montrer, en développant en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ les deux membres de l'identité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-l},$$

et en égalant dans les deux séries les coefficients d'une même puissance de $\frac{1}{x}$, qu'on parvient à des formules qui donnent les sommes des puissances semblables positives des racines de l'équation $f(x) = 0$.

En développant suivant les puissances croissantes de x, on parvient à des formules qui donnent les sommes des puissances semblables négatives.

299. Si une fonction symétrique entière des variables $a, b, c, \ldots, l$ s'annule quand on y fait $a = b$, elle est divisible par le produit des carrés des différences de ces variables.

300. Si une fonction symétrique entière des variables a, b, c est divisible par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

elle est divisible par le carré de ce déterminant.

301. Le carré du déterminant (n° 149)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est un déterminant symétrique dont les éléments s'expriment au moyen des sommes S_0, S_1, S_2, ..., S_{2n-2} des puissances semblables des variables x_1 x_2, ..., x_n.

Déduire de là un moyen pour calculer le produit des carrés des différences des racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré dont on donne les coefficients. Appliquer à l'équation $x^3 + px + q = 0$.

302. Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$; former l'équation dont les racines sont $a^2 - 2$, $b^2 - 2$, $c^2 - 2$, et celle dont les racines sont $1 - \frac{1}{a}$, $1 - \frac{1}{b}$, $1 - \frac{1}{c}$.

Montrer que, si l'on forme la suite indéfinie

$$a, \qquad a_1 = a^2 - 2, \qquad a_2 = a_1^2 - 2, \qquad a_3 = a_2^2 - 2, \qquad \ldots,$$

les nombres a, a_1, a_2 sont différents : la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $a_p = a_q$, en désignant par p et q des nombres naturels, est que $p - q$ soit divisible par 3.

Calculer les valeurs de $ab^2 + bc^2 + ca^2$, $ba^2 + cb^2 + ac^2$.

303. Soit $f(x) = 0$ une équation du $n^{\text{ième}}$ degré et soit α une racine cubique imaginaire de l'unité.

Montrer que, dans le produit $f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x)$, les termes dont le degré n'est pas divisible par 3 disparaissent.

Si l'on désigne par $\varphi(y)$ ce que devient ce produit quand on y remplace x^3 par y, l'équation $\varphi(y) = 0$ a pour racines les cubes des racines de l'équation proposée.

304. Soit, en général, S_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation algébrique $f(x) = 0$; le rapport $\frac{S_{n+1}}{S_n}$, quand n augmente indéfiniment, a pour limite celle des racines de l'équation $f(x) = 0$ dont la valeur absolue est la plus grande, en supposant qu'il y ait *une* racine dont la valeur absolue dépasse celle de toutes les autres.

Si les coefficients de l'équation $f(x) = 0$ sont réels et si la racine qui a la plus grande valeur absolue est positive, cette racine est la limite de $\sqrt[n]{S_n}$ quand n augmente indéfiniment (nº 226, à la fin).

Former les équations qui ont pour racines les puissances 2, 4, 8, 16 des racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$: quel est l'ordre d'approximation que l'on obtient en prenant $\sqrt[4]{S_4}$, $\sqrt[8]{S_8}$, $\sqrt[16]{S_{16}}$ pour la valeur de la plus grande racine positive de cette équation ?

305. Trouver les conditions pour que les deux équations

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0.$$
$$x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient une racine double commune.

306. Résoudre et discuter l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

où a, b sont des nombres réels donnés; en regardant a, b comme les coordonnées d'un point M, on demande de reconnaître, d'après la position du point M, le nombre de racines réelles de l'équation proposée.

Décomposer le premier membre en facteurs réels du second degré, dans le cas où l'équation du second degré en z

$$z^2 - 2 + az + b = 0$$

a ses racines réelles.

307. Appliquer à l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

la méthode du n° 181.

308. Trouver le produit des carrés des différences des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$.

309. Appliquer les formules de résolution de l'équation du troisième degré à l'équation (en x)

$$x^3 - 3yzx + y^3 + z^3 = 0;$$

décomposer le premier membre en facteurs du premier degré.

310. Soient α une racine cubique imaginaire de l'unité et a, b, c des variables quelconques; si sur l'expression $a + \alpha b + \alpha^2 c$ on fait toutes les permutations possibles des lettres a, b, c on obtient les six quantités

$$\begin{array}{ll} a + \alpha b + \alpha^2 c, & a + \alpha c + \alpha^2 b, \\ \alpha\,(a + \alpha b + \alpha^2 c), & \alpha\,(a + \alpha c + \alpha^2 b), \\ \alpha^2(a + \alpha b + \alpha^2 c), & \alpha^2(a + \alpha c + \alpha^2 b). \end{array}$$

L'expression $(a + \alpha b + \alpha^2 c)^3$ n'est susceptible que de deux valeurs quand on y permute les lettres a, b, c de toutes les manières possibles. Montrer que cette expression s'exprime rationnellement au moyen des fonctions symétriques élémentaires de a, b, c et de l'une ou de l'autre des quantités

$$bc^2 + ca^2 + ab^2, \quad b^2c + c^2a + a^2b.$$

Désignant maintenant par a, b, c les trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

où p et q sont des nombres donnés, on forme l'équation du second degré dont les deux racines sont $bc^2+ca^2+ab^2$, $b^2c+c^2a+a^2b$. Exprimer a, b, c au moyen de ces deux racines et des données.

311. Soient a, b, c les racines de l'équation

$$(1) \qquad x^3+px+q=0,$$

supposées inégales.

Le polynome du second degré

$$(2) \qquad y = b\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + c\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + a\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

prend respectivement les valeurs b, c, a quand on y remplace respectivement x par a, b, c (n° 67).

Montrer que ses coefficients s'expriment rationnellement au moyen de p, q, $\sqrt{-4p^3-27q^2}$.

Effectuer complètement les calculs en supposant $p=-3$, $q=1$.

Quel est le résultat de l'élimination de x entre les équations (1) et (2)?

312. On a appris, au n° 109, à former l'équation de degré n en x que l'on obtient en faisant $\cos\theta = x$ dans l'équation $\cos n\theta = \cos a$, et dont les racines sont les n valeurs que prend l'expression $\cos\frac{a+2r\pi}{n}$, quand on y fait $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Déduire de cette équation les égalités

$$\cos\frac{a}{2m}\cos\frac{a+2\pi}{2m}\cos\frac{a+4\pi}{2m}\cdots\cos\frac{a+2(2m-1)\pi}{2m} = \frac{(-1)^m-\cos a}{2^{2m-1}},$$

$$\cos\frac{a}{2m+1}\cos\frac{a+2\pi}{2m+1}\cos\frac{a+4\pi}{2m+1}\cdots\cos\frac{a+4m\pi}{2m+1} = \frac{\cos a}{2^{2m}},$$

où m désigne un nombre naturel.

En remplaçant dans la première a par 2α et m par $2p$, en rapprochant dans les $4p$ facteurs du premier membre ceux dont les arguments diffèrent de π, puis en utilisant la relation $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, on parvient à l'égalité

$$\sin^2\frac{\alpha}{p}\sin^2\frac{\alpha+\pi}{p}\sin^2\frac{\alpha+3\pi}{p}\cdots\sin^2\frac{\alpha+(p-1)\pi}{p} = \frac{\sin^2\alpha}{2^{2p-2}},$$

d'où

$$\sin\frac{\alpha}{p}\sin\frac{\alpha+\pi}{p}\cdots\sin\frac{\alpha+(p-1)\pi}{p} = \pm\frac{\sin\alpha}{2^{p-1}}.$$

Si l'on a $0<\alpha<\pi$, on doit évidemment prendre le signe $+$. Montrer que le rapport

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{p}\sin\frac{\alpha+\pi}{p}\cdots\sin\frac{\alpha+(p-1)\pi}{p}}{\sin\alpha},$$

lorsqu'on lui attribue sa vraie valeur pour les valeurs de α qui en annulent les deux termes, est une fonction toujours continue de α : conclure de là et de l'égalité précédente qu'il a toujours la valeur $\frac{1}{2^{p-1}}$.

En faisant tendre α vers o dans l'égalité

$$\sin\frac{\alpha}{p}\sin\frac{\alpha+\pi}{p}\sin\frac{\alpha+2\pi}{p}\cdots\sin\frac{\alpha+(p-1)\pi}{p}=\frac{\sin\alpha}{2^{p-1}},$$

établir la relation

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{2\pi}{p}\sin\frac{3\pi}{p}\cdots\sin\frac{(p-1)\pi}{p}=\frac{p}{2^{p-1}},$$

d'où l'on déduira

$$\sin\frac{\pi}{2p+1}\sin\frac{2\pi}{2p+1}\sin\frac{3\pi}{2p+1}\cdots\sin\frac{p\pi}{2p+1}=\frac{\sqrt{2p+1}}{2^p}.$$

313. Résoudre par radicaux les équations (n° 109)

$$(x+i\sqrt{1-x^2})^n+(x-i\sqrt{1-x^2})^n=2A.$$

$$\frac{(1+ix)^n-(1-ix)^n}{(1+ix)^n+(1-ix)^n}=Ai.$$

Montrer que, si A est réel, la seconde équation a toutes ses racines réelles.

La première équation a toutes ses racines réelles si A est compris entre -1 et $+1$. Qu'arrive-t-il quand A est égal à ± 1? Combien l'équation a-t-elle de racines réelles quand A est réel mais plus grand que 1 en valeur absolue?

314. Si l'on a, identiquement en x,

$$a(\alpha x+\alpha')^2+2b(\alpha x+\alpha')(\beta x+\beta')+c(\beta x+\beta')^2=Ax^2+2Bx+C,$$

$$a'(\alpha x+\alpha')^2+2b'(\alpha x+\alpha')(\beta x+\beta')+c'(\beta x+\beta')^2=A'x^2+2B'x+C',$$

on a

$$2BB'-AC'-A'C=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2(2bb'-ac'-a'c).$$

Montrer que la condition $2bb'-ac'-a'c=0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le rapport anharmonique $\frac{x'_0-x_1}{x'_0-x_1}:\frac{x'_1-x_0}{x'_1-x_1}$ soit égal à -1, en désignant par x_0, x_1 les racines de $ax^2+2bx+c$, par x'_0, x'_1, les racines de $a'x^2+2b'x+c'$.

Montrer que le résultant des deux polynomes $Ax^2+2Bx+C$, $A'x^2+2B'x+C$ est égal au résultant des deux polynomes $ax^2+2bx+c$, $a'x^2+2b'x+c'$ multiplié par $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^4$.

315. Reprenant les notations du n° 274, on vérifiera d'abord que si, dans l'expression

$$\Pi(y_j-x_i) \qquad \begin{matrix} i=1, 2, \ldots, m, \\ j=1, 2, \ldots, n, \end{matrix}$$

on remplace respectivement x_i et y_j par

$$\frac{\beta' x_i-\alpha'}{-\beta x_i+\alpha}, \qquad \frac{\beta' y_i-\alpha'}{-\beta y_i+\alpha}$$

(n° 271), elle deviendra

$$\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^{mn}\,\Pi(y_j-x_i)}{[\Pi(\alpha-\beta x_i)]^n[\Pi(\alpha-\beta y_j)]^m}.$$

Soient maintenant $F(x, t)$ et $G(x, t)$ les polynomes $F(x)$ et $G(x)$ rendus homogènes : on a

$$a_0\Pi(\alpha-\beta x_i) = F(\alpha, \beta),$$
$$b_0\Pi(\alpha-\beta y_j) = G(\alpha, \beta).$$

Conclure de là que, si l'on pose

$$\Phi(X) = F(\alpha X+\alpha', \beta X+\beta'), \qquad \Gamma(X) = G(\alpha X+\alpha', \beta X+\beta'),$$

le résultant des polynomes $\Phi(X)$ et $\Gamma(X)$ sera égal au résultant des polynomes $F(x)$ et $G(x)$, multiplié par $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^{mn}$.

316. Si l'on a, identiquement en x,

$$\begin{aligned} a_0(\alpha x+\alpha')^n &+ a_1(\alpha x+\alpha')^{n-1}(\beta x+\beta') \\ &+ a_2(\alpha x+\alpha')^{n-2}(\beta x+\beta')^2+\ldots+a_n(\beta x+\beta')^n \\ &= A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n, \end{aligned}$$

le discriminant du polynome $A_0x^n+\ldots+A_n$ est égal au discriminant du polynome $a_0x^n+\ldots+a_n$ multiplié par $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^{n(n-1)}$.

317. Soit $f(X, Y)$ un polynome de degré n, homogène en X, Y; on y regarde X, Y comme des formes linéaires en x, y

$$X = \alpha x+\alpha' y, \qquad Y = \beta x+\beta' y;$$

le polynome $f(X, Y)$ devient alors un polynome en x, y que je désignerai par $\varphi(x, y)$; montrer que, si l'on pose

$$X' = \alpha x' + \alpha' y', \qquad Y' = \beta x' + \beta' y',$$

on a identiquement en x, y, x', y'

$$X' f'_X + Y' f'_Y = x' \varphi'_x + y' \varphi'_y,$$
$$X'^2 f''_{X^2} + 2 X' Y' f''_{XY} + Y'^2 f''_{Y^2} = x'^2 \varphi''_{x^2} + 2 x' y' \varphi''_{xy} + y'^2 \varphi''_{y^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, symboliquement (n° 48),

$$(X' F'_X + Y' F'_Y)^r = (x' f'_x + y' f'_y)^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

On parvient à ces identités en remarquant qu'on doit avoir, quel que soit k,

$$f(X + kX', Y + kY') = \varphi(x + kx', y + ky')$$

et en égalant, dans les deux membres, les coefficients d'une même puissance de k.

Énoncer et démontrer la proposition analogue pour les polynomes homogènes à un nombre quelconque de variables.

Déduire de là qu'on a, identiquement en x, y,

$$\varphi''_{x^2} \varphi''_{y^2} - (\varphi''_{xy})^2 = [f''_{X^2} f''_{Y^2} - (f''_{XY})]^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.$$

318. Des identités

$$nf = x f'_x + y f'_y,$$
$$n(n-1) f = x^2 f''_{x^2} + 2xy f'_x f'_y + y^2 f''_{y^2},$$

où f désigne un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré homogène en x, y, déduire que le polynome

$$f''_{x^2} (f'_y)^2 - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{y^2} (f'_x)^2$$

est divisible par f; montrer que le quotient est

$$\frac{n}{n-1} [f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2].$$

319. Résoudre les systèmes

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &= 0, \\ y^2 - xy + 2x + y - 3 &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &= 0, \\ xy - 2x - 2y + 3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Pour chacun de ces systèmes, l'équation en x, obtenue en éliminant y, admet des racines multiples.

On appliquera à ces exemples les deux méthodes expliquées dans le n° 283.

320. Résoudre le système

$$\begin{aligned} yz - x^2 &= a, \\ zx - y^2 &= b, \\ xy - z^2 &= c. \end{aligned}$$

321. Soit $f(x) = 0$ un polynome du degré n, dont toutes les racines soient réelles et distinctes : il en est de même du polynome

$$f(x) + \alpha f'(x) = 0$$

où α est une constante (réelle) quelconque ; du polynome

$$f(x) + s_1 f'(x) + s_2 f''(x) + \ldots + s_r f^{(r)}(x)$$

où $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sont les r premières fonctions symétriques élémentaires de n constantes réelles quelconques. On suppose $r < n$.

322. Soit $f(x, y)$ un polynome homogène en x, y de degré n ; on appellera, dans ce qui suit, racines d'un tel polynome les valeurs du rapport $\frac{x}{y}$ pour lesquelles il s'annule.

Si le polynome $f(x, y)$ a ses n racines réelles et distinctes, les polynomes f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}, f'''_{x^3}, ... ont aussi leurs racines réelles et distinctes.

Il en est de même des polynomes

$$x' f'_x + y' f'_y, \quad x'^2 f''_{x^2} + 2 x' y' f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2}, \quad \ldots$$

où x', y' sont des constantes réelles quelconques, et, en général, du polynome ($p \leqq n$)

$$(x' f'_x + y' f'_y)^p,$$

où la puissance $p^{\text{ième}}$ est symbolique (n° 48).

Si dans chacun de ces polynomes on regarde x, y comme des constantes et x', y' comme les variables, les polynomes en x', y' ont encore leurs racines réelles et distinctes.

Le polynome

$$\mathrm{H} = f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2$$

a toutes ses racines imaginaires.

Dans le cas où $f(x, y)$ est du troisième degré, on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que ce polynome ait ses trois racines réelles en écrivant que les racines du polynome H sont imaginaires.

323. Trouver quatre nombres en progression géométrique connaissant leur produit et leur somme.

324. Soit ABC un triangle rectangle en A, dont on désignera les côtés, opposés aux angles A, B, C, par a, b, c.

Soient AA′, BB′, CC′ les bissectrices intérieures limitées aux côtés.

Déterminer ce triangle connaissant

1° a et AC′,

2° BB′ et CC′,

3° a et AA′.

325. Nombre de racines réelles des équations

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$

$$(x+n-1)^n - n^n x = 0,$$

$$2(x+n-1)^{n+1} - n^n(n+1)x^2 - n^n(2n-1) = 0.$$

326. En égalant les parties reelles et les coefficients de i dans les deux membres de l'équation

$$(x+yi)^3 = A + Bi,$$

où A, B, x, y sont supposés réels, on parvient aux deux équations

$$x^3 - 3xy^2 = A,$$
$$3x^2y - y^3 = B;$$

éliminer y entre ces deux équations; on parvient à une équation du neuvième degré en x, qui se réduit au troisième en posant $x^3 = u$. Montrer que les trois racines de l'équation en u sont réelles. Comment, de la résolution de cette équation, pourrait-on déduire les racines cubiques de $A + Bi$?

327. Soit $f(x)$ un polynome du troisième degré, à coefficients réels; soient α, β les racines de la dérivée $f'(x)$.

D'après le théorème de Rolle, si les trois racines de $f(x)$ sont réelles et distinctes, les nombres α, β sont réels et distincts et l'on a $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

Montrer, réciproquement, que cette dernière inégalité implique, d'une part, la réalité des nombres α, β; d'autre part les deux inégalités $f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0$, en supposant $\alpha < \beta$ et le coefficient de x^3 positif dans $f(x)$: ce dernier point résulte de ce que la dérivée est négative dans l'intervalle (α, β).

Conclure de là que la condition $f(\alpha)f(\beta) < 0$ est nécessaire et suffisante pour que le polynome $f(x)$ ait ses trois racines réelles et distinctes. Exprimer cette condition au moyen des coefficients de $f(x)$.

Soit λ la racine du reste de la division de $f(x)$ par $f'(x)$: la condition $f(\alpha)f(\beta) < 0$ revient à dire que le nombre $f'(\lambda)$ doit être de signe contraire au coefficient de x^3 dans $f(x)$.

328. Soit $f(x) = 0$ une équation du quatrième degré, à coefficients réels, dont les quatre racines sont réelles et distinctes, et dans laquelle le coefficient de x^4 est positif. Montrer que l'équation du troisième degré en y obtenue en éliminant x entre les équations

$$f'(x) = 0, \qquad y - f(x) = 0$$

a une variation et deux permanences.

329. Soit

$$f(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$$

un polynome du quatrième degré à coefficients réels : on a

$$f(x) = \tfrac{1}{4}f'(x)(x + a) + \mathrm{R}(x),$$

en posant

$$\mathrm{R}(x) = 3(b - a^2)x^2 + 3(c - ab)x + d - ac.$$

Montrer que, si les quatre racines de $f(x)$ sont réelles et distinctes, les deux racines α_1, α_2 de $\mathrm{R}(x)$ sont aussi réelles et distinctes et que l'on a $b - a^2 < 0$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $f(x) = 0$ ait ses quatre racines réelles et distinctes sont

$$b - a^2 < 0, \qquad f'(\alpha_1)f'(\alpha_2) < 0, \qquad \frac{f'(\alpha_1) - f'(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} < 0;$$

exprimer au moyen de a, b, c, d les premiers membres des deux dernières inégalités.

330. Soit $\varphi(x)$ un polynome de degré n dont toutes les racines sont réelles et distinctes; soient a, b, …, l ces racines.

Tout polynome $g(x)$ du degré $n - 1$ dont les racines sont réelles et distinctes et telles que deux racines consécutives de $\varphi(x)$ comprennent entre elles une racine de $g(x)$, et une seule, peut être mis sous la forme

$$\varphi(x)\left(\frac{\mathrm{A}}{x - a} + \frac{\mathrm{B}}{x - b} + \dots + \frac{\mathrm{L}}{x - l}\right)$$

en désignant par A, B, …, L des constantes de mêmes signes.

331. Si, en désignant par a une constante positive, le nombre de variations du polynome $\varphi(x)(x-a)$ n'est pas égal au nombre, augmenté d'une unité, des variations du polynome $\varphi(x)$, ce dernier a des racines imaginaires.

Après avoir multiplié le polynome

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m$$

par $x-a$, on peut choisir a de manière à annuler le coefficient d'un terme dans le produit $f(x)(x-a)$. Conclure de là que le polynome $f(x)$ a certainement des racines imaginaires si les quantités $A_p^2 - A_{p-1}A_{p+1}$, $A_{p+1}^2 - A_p A_{p+2}$ sont de signes contraires, ou si l'une d'elles est nulle.

Un polynome dont trois coefficients consécutifs sont en progression géométrique a des racines imaginaires.

Un polynome dont quatre coefficients consécutifs sont en progression arithmétique a des racines imaginaires.

332. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels ou imaginaires dont les valeurs absolues soient moindres que 1, les valeurs absolues des racines de l'équation

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

sont supérieures à $\frac{1}{2}$.

333. Si l'on suppose $|a_n| < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, et si l'on désigne par $f(x)$ la somme de la série

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

absolument convergente pour toutes les valeurs de x telles que l'on ait $|x| < 1$, les racines de l'équation $f(x) = 0$, vérifiant l'inégalité $|x| < 1$, sont supérieures à $\frac{1}{2}$, en valeur absolue.

334. Soient $a, b, c, \ldots, l$ les racines du polynome $f(x)$; montrer que l'on a identiquement

$$\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-l)^2} = \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f^2(x)};$$

montrer que si le polynome $f(x)$ a toutes ses racines réelles, le polynome $f'^2(x) - f(x)f''(x)$ a toutes ses racines imaginaires.

335. On considère une suite $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ de polynomes en x dont les deux premiers sont donnés; V_0 est une constante positive, V_1 est du premier degré; les autres se déduisent de ceux-là par une relation de la forme

$$V_n + a_n V_{n-1} + b_n V_{n-2} = 0 \qquad (b = 2, 3, \ldots),$$

où a_n, b_n sont des polynomes en x donnés, a_n est au plus du premier degré en x, b_n au plus du second degré. Il en résulte que V_n est, en général, du $n^{\text{ième}}$ degré en x; je suppose que le coefficient de x^n ne soit jamais nul.

Je suppose en outre que, lorsque x appartient à l'intervalle (α, β) où α est plus petit que β, b_n soit constamment positif, que, pour $x = \alpha$, V_n soit du signe de $(-1)^n$ et que, pour $x = \beta$, V_n soit positif, enfin que la racine de l'équation $V_1 = 0$ soit comprise entre α et β.

Tels sont, par exemple, les polynomes X_n et P_n définis aux exercices 36 et 38, en supposant $\alpha = -1$, $\beta = 1$ (¹).

Montrer (par induction) que les racines de l'équation $V_n = 0$ sont réelles et distinctes, comprises entre α et β et que, entre deux racines consécutives de l'équation $V_n = 0$, il y a une racine, et une seule, de l'équation $V_{n-1} = 0$.

336. Si une équation à coefficients rationnels admet une racine de la forme $a + b\sqrt{p}$, où a, b, p sont trois nombres rationnels dont le dernier n'est pas un carré, elle admet, au même ordre de multiplicité, la racine $a - b\sqrt{p}$.

337. Si a, b, c, p sont des nombres rationnels dont le dernier n'est pas un cube parfait, et si l'on a

$$a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0,$$

on a nécessairement $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

On parvient aisément à la démonstration de cette propriété en multipliant l'égalité précédente par $\sqrt[3]{p}$, et en regardant les deux équations ainsi obtenues comme des équations du premier degré dont $\sqrt[3]{p}$ et $\sqrt[3]{p^2}$ seraient les inconnues.

Si une équation à coefficients rationnels admet une racine de la forme $a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2}$ où a, b, c, p sont des nombres rationnels dont le dernier n'est pas un cube parfait, elle admet, au même ordre de multiplicité, les racines

$$a + b\alpha\sqrt[3]{p} + c\alpha^2\sqrt[3]{p^2}, \quad a + b\alpha^2\sqrt[3]{p} + c\alpha\sqrt[3]{p^2},$$

en désignant par α une racine cubique imaginaire de l'unité.

338. Trouver les racines rationnelles de l'équation

$$9x^6 - 18x^5 - 148x^4 + 26x^3 + 199x^2 - 8x - 60 = 0.$$

339. Soit A la plus grande des valeurs absolues des rapports

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_2}{A_0}, \quad \ldots, \quad \frac{A_n}{A_0}.$$

(¹) *Sur la définition du polynome* P_p. *Voir l'Errata,* à la fin du tome II.

Pour que $a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p$ soit un diviseur de $A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$, il faut que l'on ait

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| < C_1^n(1 + A), \qquad \left|\frac{a_2}{a_0}\right| < C_2^n(1 + A)^2, \qquad \ldots, \qquad \left|\frac{a_p}{a_0}\right| < (1 + A)^p.$$

Montrer que, si A_0, A_1, ..., A_n sont des nombres entiers, la recherche des diviseurs à coefficients entiers du polynome $A_0x^n + \ldots + A_n$ n'exige qu'un nombre limité d'essais. Dans cette recherche, on peut se borner aux diviseurs de degré $p \leq \frac{n}{2}$.

Trouver les diviseurs à coefficients entiers du second degré du polynome

$$2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 3.$$

340. Dans l'équation

$$(a_0 + ib_0)x^n + (a_1 + ib_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n + ib_n) = 0,$$

on suppose que a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n sont des entiers réels.

Démontrer que, si cette équation admet une racine de la forme $\alpha + i\beta$ où α, β sont des entiers réels, il existe des entiers réels α', β' tels que l'on ait

$$a_n + ib_n = (\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta');$$

$a_n^2 + b_n^2$ est alors divisible par $\alpha^2 + \beta^2$.

Trouver les racines de l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10 = 0$$

qui sont de la forme $\alpha + i\beta$, α et β étant des entiers réels.

CHAPITRE XVII.

NOTATION DIFFÉRENTIELLE. COURBES PLANES.

§ 1. — NOTATION DIFFÉRENTIELLE.

290. Considérons une fonction $f(x, y, z)$ de *variables indépendantes* x, y, z, admettant des dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z ; j'écris ici trois variables, mais celles-ci peuvent être en nombre quelconque.

Les *différentielles* (du premier ordre) des variables indépendantes x, y, z sont, par définition, de nouvelles variables indépendantes que l'on fait correspondre respectivement aux premières et dont on désigne chacune en plaçant la lettre d devant la variable à laquelle elle correspond : ainsi, dx est la différentielle de x, dy la différentielle de y, etc.

On nomme *différentielle* (du premier ordre) (¹) de la fonction $f(x, y, z)$ des variables indépendantes x, y, z, la forme

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz,$$

linéaire en dx, dy, dz, dont les coefficients sont les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport aux variables x, y, z. Cette différentielle de $f(x, y, z)$, que l'on représente par df, est ainsi une fonction des variables indépendantes x, y, z et dx, dy, dz, linéaire

---

(¹) Dans tout ce Livre il ne sera question que de différentielles du *premier ordre*, ou, comme on dit encore, de *différentielles premières*, aussi je supprimerai ordinairement cette qualification. Je dois prévenir aussi le lecteur que les différentielles (du premier ordre) dont il sera question sont celles que, dans le Calcul différentiel et intégral, on qualifie de différentielles *totales :* il ne sera pas question de différentielles *partielles*.

par rapport aux trois dernières. Elle est identiquement nulle lorsque les dérivées f'_x, f'_y, f'_z sont identiquement nulles et seulement dans ce cas; dire que la dérivée f'_x est identiquement nulle, c'est dire que la fonction $f(x, y, z)$ reste constante quand x varie, ou que cette fonction ne dépend pas de x; dire que les dérivées f'_x, f'_y, f'_z sont identiquement nulles, c'est dire que la fonction $f(x, y, z)$ ne dépend ni de x, ni de y, ni de z, ou que cette fonction est une constante. Dans l'expression $f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$ de la différentielle df, l'une des différentielles dx, dy, dz peut disparaître; dy et dz disparaîtraient si les dérivées f'_y, f'_z étaient identiquement nulles, si la fonction $f(x, y, z)$ ne dépendait effectivement que de x, et seulement dans ce cas. En particulier, si la fonction $f(x, y, z)$ se réduisait à x, sa différentielle se réduirait à dx, puisque les dérivées partielles de x par rapport aux variables x, y, z sont respectivement 1, 0, 0 : les notations relatives à la différentielle d'une fonction et à la différentielle d'une variable sont cohérentes.

Dans le cas où l'on a affaire à une fonction $f(x)$ d'une seule variable indépendante x, la différentielle $f'(x)\,dx$ de cette fonction est le produit de la différentielle dx par la dérivée $f'(x)$ de la fonction. La définition est la même que dans le cas d'un nombre quelconque de variables, si ce n'est qu'il n'y a plus lieu de parler de dérivée *partielle*.

Au lieu d'employer les notations f'_x, f'_y, f'_z pour désigner les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z)$, on peut aussi bien employer les notations $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ (n° 214) et écrire la différentielle de $f(x, y, z)$ sous la forme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

L'emploi des ∂ (en ronde) est utile pour distinguer les symboles ∂f, ∂x, ∂y, ∂z des différentielles df, dx, dy, dz. Pour nous, les symboles isolés ∂f, ∂x, ∂y, ∂z n'ont pas de sens ou sont, tout au plus, la trace de certaines opérations qui conduisent aux dérivées partielles, représentées par les symboles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, lesquels représentent le résultat d'opérations effectuées sur la fonction f.

A la vérité, la confusion qui est ainsi évitée, dans le cas de plusieurs variables indépendantes, par l'emploi des lettres ∂, ne le sera plus dans le cas d'une fonction $f(x)$ d'une seule variable indépendante, fonction dont on représente la dérivée (n° 213) par $\frac{df}{dx}$, et dont la différentielle s'écrira donc $df = \frac{df}{dx}\,dx$; mais, dans ce cas, il n'y a aucun inconvénient à regarder le symbole $\frac{df}{dx}$ comme le quotient obtenu en divisant par dx la différentielle df, qui n'est autre chose que le produit par dx de la dérivée de $f(x)$: il n'y a aucune confusion à craindre.

291. L'importance de la forme $df = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$ tient essentiellement à la façon dont cette forme se conserve quand on change les variables indépendantes.

Supposons que, dans la fonction $f(x, y, z)$ de x, y, z, on regarde ces variables comme des fonctions $g(u, v)$, $h(u, v)$, $k(u, v)$ de variables indépendantes u, v : ces dernières variables peuvent être en nombre inférieur, égal, ou supérieur au nombre des variables x, y, z. J'écris *deux* variables u, v, comme j'ai écrit *trois* variables x, y, z : le nombre des variables est ici sans importance. La fonction $f(x, y, z)$ devient alors une fonction $F(u, v)$ des variables indépendantes u, v, admettant, à ce titre, une différentielle

$$dF = F'_u\,du + F'_v\,dv.$$

Je vais démontrer que si, dans la forme $f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$, on remplace, d'une part, les variables x, y, z par $g(u, v)$, $h(u, v)$, $k(u, v)$ et, d'autre part, les différentielles dx, dy, dz par les différentielles des fonctions $g(u, v)$, $h(u, v)$, $k(u, v)$ des variables indépendantes u, v, c'est-à-dire par

$$dg = g'_u\,du + g'_v\,dv,$$
$$dh = h'_u\,du + h'_v\,dv,$$
$$dk = k'_u\,du + k'_v\,dv,$$

l'expression $f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$ se change identiquement en $dF = F'_u\,du + F'_v\,dv$.

En effet, par les substitutions précédentes, l'expression

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz,$$

devient

$$
\begin{aligned}
& f'_x(g'_u\,du + g'_v\,dv) + f'_y(h'_u\,du + h'_v\,dv) + f'_z(k'_u\,du + k'_v\,dv) \\
& \quad = (f'_x g'_u + f'_y h'_u + f'_z k'_u)\,du + (f'_x g'_v + f'_y h'_v + f'_z k'_v)\,dv;
\end{aligned}
$$

mais, en vertu du théorème des fonctions composées (n° **217**), on a

$$
F'_u = f'_x g'_u + f'_y h'_u + f'_z k'_u, \qquad F'_v = f'_x g'_v + f'_y h'_v + f'_z k'_v.
$$

Le résultat de la substitution est donc bien $F'_u\,du + F'_v\,dv$, comme on l'avait annoncé. Il est clair que la démonstration ne dépend en aucune façon du nombre des variables x, y, z ou u, v.

Cette proposition est capitale, parce qu'elle permet, dans l'égalité

$$
(1) \qquad df = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz,
$$

de ne pas regarder x, y, z comme des variables indépendantes. Si x, y, z sont des fonctions de variables quelconques, f doit être regardé comme une fonction de ces variables, df comme la différentielle de f à ce nouveau point de vue; dx, dy, dz doivent être regardés non plus comme des variables indépendantes, mais comme les différentielles des fonctions x, y, z des nouvelles variables. Enfin, il est bien entendu que, dans les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z, on doit remplacer x, y, z par leurs expressions au moyen des nouvelles variables. Dans ces conditions, la formule (1) subsiste identiquement par rapport aux nouvelles variables et à leurs différentielles.

Supposons, en particulier, que x, y, z soient des fonctions de la variable indépendante t

$$
x = g(t), \qquad y = h(t), \qquad z = k(t),
$$

f devra être regardé comme une fonction (composée) de la seule variable t : la formule (1) devient alors

$$
df = [f'_x g'(t) + f'_y h'(t) + f'_z k'(t)]\,dt;
$$

elle veut dire que la dérivée par rapport à t de la fonction

$$
f[g(t),\ h(t),\ k(t)]
$$

n'est autre chose que $f'_x g'(t) + f'_y h'(t) + f'_z k'(t)$; on retrouve ainsi la règle des fonctions composées; ce n'est pas, bien entendu, une nouvelle démonstration de cette règle, sur laquelle on s'est appuyé pour démontrer le théorème fondamental.

Plus particulièrement, supposons que $f(x)$ soit une fonction de la seule variable x, et que l'on y regarde x comme une fonction $g(t)$ de la variable t; la relation

$$df = f'(x)\,dx = f'[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

veut dire que la dérivée de la fonction $f[g(t)]$ par rapport à t est $f'[g(t)]\,g'(t)$: c'est le théorème des fonctions de fonction.

La notation $\frac{dy}{dx}$ a été introduite primitivement comme un pur symbole pour désigner la dérivée $y' = f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ de x; on a observé plus haut qu'il n'y avait pas d'inconvénient à la regarder comme représentant le quotient de la division par la différentielle dx de la différentielle $dy = y'dx$. Si l'on y regarde y et x comme des fonctions $g(t)$, $h(t)$ d'une variable quelconque, et si l'on continue de regarder dy, dx comme les différentielles de y et de x, à savoir $g'(t)\,dt$, $h'(t)\,dt$, elle représentera le rapport $\frac{g'(t)}{h'(t)}$, c'est-à-dire la dérivée de la fonction $f(x) = g(t)$ de x que l'on obtient lorsque l'on remplace, dans $g(t)$, t par la fonction de x que l'on tirerait de l'équation $x = h(t)$.

Plus particulièrement, $\frac{dx}{dy}$ représentera la dérivée de la fonction inverse de $f(x)$ (n° 210), c'est-à-dire la dérivée (par rapport à y) de la fonction $x = \mathrm{F}(y)$ que l'on obtient en résolvant par rapport à x l'équation $y = f(x)$.

292. Supposons que l'équation $f(x, y, z) = 0$ définisse z comme une fonction de x, y qui la vérifie identiquement, c'est-à-dire comme une fonction de x, y qui rende identiquement nulle la fonction $f(x, y, z)$. Si l'on attribue, dans $f(x, y, z)$, cette signification à z, la différentielle de la fonction des deux variables indépendantes x, y, que devient alors $f(x, y, z)$, est identiquement nulle; c'est-à-dire que l'on doit avoir identiquement en x, y, dx, dy

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0,$$

quand on regarde dz comme la différentielle de la fonction z des deux variables x, y que définit l'équation $f(x, y, z) = 0$; on a donc, en conservant la même signification aux variables, identiquement encore,

$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z}\,dx - \frac{f'_y}{f'_z}\,dz,$$

et cette dernière égalité, rapprochée de la définition de la différentielle d'une fonction, montre que $-\frac{f'_x}{f'_z}$, $-\frac{f'_y}{f'_z}$ sont les dérivées partielles de la fonction z des deux variables x, y.

Supposons encore que les deux équations simultanées

$$\varphi(x, y, z, u, v) = 0, \qquad \psi(x, y, z, u, v) = 0$$

définissent u et v comme des fonctions de trois variables indépendantes x, y, z, fonctions qui rendraient φ et ψ identiquement nuls quels que fussent x, y, z; en regardant u et v comme ayant cette signification, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,dz = 0,$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à du, dv,

$$du = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \ldots}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

$$dv = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \ldots}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

et ces égalités montrent que les dérivées partielles des fonctions u, v par rapport à x, ... sont respectivement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

293. **Jacobien.** — Soient $f(u, v, w)$, $g(u, v, w)$, $h(u, v, w)$ trois fonctions [1] de trois variables u, v, w, leurs différentielles

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw, \\ dg &= \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv + \frac{\partial g}{\partial w} dw, \\ dh &= \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv + \frac{\partial h}{\partial w} dw \end{aligned} \right.$$

sont des formes linéaires en du, dv, dw; le déterminant de ces formes

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix}$$

est ce qu'on appelle le *jacobien* ou le déterminant fonctionnel des fonctions f, g, h. On le représente souvent par la notation abrégée

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}.$$

On dit que les trois fonctions f, g, h des trois variables u, v, w ne sont pas indépendantes, quand il existe entre elles une relation telle que $F(f, g, h) = 0$, qui est vérifiée identiquement en u, v, w; dans ce cas les trois formes linéaires (1) en du, dv, dw ne sont pas indépendantes, puisque l'égalité

$$\frac{\partial F}{\partial f} df + \frac{\partial F}{\partial g} dg + \frac{\partial F}{\partial h} dh = 0$$

doit être vérifiée identiquement en du, dv, dw quand on y remplace df, dg, dh par les seconds membres des égalités (1) : le déterminant des formes (1), ou le jacobien des fonctions f, g, h, est donc identiquement nul.

On démontre que, réciproquement, les trois fonctions f, g, h des trois variables u, v, w ne sont pas indépendantes quand leur déterminant fonctionnel est identiquement nul.

Supposons que, dans f, g, h, on regarde u, v, w comme des fonctions d'autres variables x, y, z, en même nombre, et que, dans les seconds membres des

[1] Le lecteur n'aura aucune peine à étendre ce qui suit à n fonctions de n variables.

égalités (1), on remplace du, dv, dw par leurs expressions

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,\\ &\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz,\\ &\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{d w}{\partial z}\,dz,\end{aligned}\right.$$

ces seconds membres deviendront les différentielles

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz,\\ &\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}\,dz,\\ &\frac{\partial h}{\partial x}\,dx + \frac{\partial h}{\partial y}\,dy + \frac{\partial h}{\partial z}\,dz\end{aligned}\right.$$

des fonctions f, g, h regardées comme des fonctions de x, y, z; le déterminant

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)}$$

de ces dernières formes linéaires en dx, dy, dz n'est autre chose que le jacobien des fonctions f, g, h regardées comme des fonctions de x, y, z. On a vu, aux n^{os} 161 et 162, que ce déterminant était égal au produit du déterminant des formes linéaires en du, dv, dw qui constituent les seconds membres des égalités (1) par le déterminant des formes (2), linéaires en dx, dy, dz, lequel n'est autre chose que le jacobien

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$$

des fonctions u, v, w, regardées comme des fonctions de x, y, z; nous sommes donc parvenus à l'identité

$$(4)\qquad \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}\,\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)},$$

qui constitue une des propriétés fondamentales du jacobien.

En particulier, si α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' désignent des constantes et si l'on désigne par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

le jacobien $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}$ des trois fonctions

$$\begin{aligned} F &= \alpha f + \beta g + \gamma h, \\ G &= \alpha' f + \beta' g + \gamma' h, \\ H &= \alpha'' f + \beta'' g + \gamma'' h \end{aligned}$$

sera égal à

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(f, g, h)} \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} = \Delta \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}.$$

Hessien. — On appelle *hessien* d'une fonction de n variables le jacobien des n dérivées partielles de cette fonction par rapport à ses n variables.

Bornons-nous, pour établir la propriété fondamentale du hessien, au cas d'une fonction $\varphi(u, v, w)$ de trois variables u, v, w.

Soient

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad g = \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad h = \frac{\partial}{\partial w}$$

les dérivées partielles de cette fonction.

Supposons que, dans la fonction $\varphi(u, v, w)$, on fasse le changement de variables

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''', \\ v &= \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''', \\ w &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + \gamma''', \end{aligned} \right.$$

en désignant par $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma'''$ des constantes : je désignerai par Δ le déterminant des coefficients de x, y, z dans les seconds membres.

Par le changement de variables, la fonction $\varphi(u, v, w)$ deviendra une fonction $\Phi(x, y, z)$ des variables x, y, z; je poserai

$$F = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad G = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad H = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Mon but est d'établir que le hessien de la fonction $\Phi(x, y, z)$ des variables x, y, z, c'est-à-dire le jacobien $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}$ des fonctions F, G, H, est le produit par Δ^2 du hessien de la fonction $\varphi(u, v, w)$ des variables u, v, w, c'est-à-dire du déterminant fonctionnel $\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}$, dans lequel, après avoir effectué les opérations, on regarde u, v, w comme des fonctions de x, y, z définies par les équations (5).

D'après la définition de la fonction Φ et le théorème des fonctions composées on a

$$F = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha f + \beta g + \gamma h,$$

et, de même,

$$G = \alpha' f + \beta' g + \gamma' h,$$
$$H = \alpha'' f + \beta'' g + \gamma'' h.$$

Les fonctions F, G, H définies par ces égalités sont, comme f, g, h, des fonctions de u, v, w; pour obtenir les dérivées partielles de $\Phi(x, y, z)$ par rapport à x, y, z, on doit remplacer, dans $\alpha f + \beta g + \gamma h$, ..., les variables u, v, w par leurs expressions (5) en x, y, z.

Le hessien de la fonction $\Phi(x, y, z)$ ou $\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}$ est d'ailleurs égal au produit du jacobien $\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}$ des fonctions F, G, H regardées comme des fonctions des variables u, v, w par le jacobien

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \Delta$$

des fonctions u, v, w des variables x, y, z que définissent les égalités (5). D'autre part, si l'on se reporte à l'expression des fonctions F, G, H au moyen de f, g, h, on voit que l'on a

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} = \Delta \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)};$$

on a donc finalement

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)} = \Delta^2 \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)}.$$

C'est la proposition énoncée.

Le hessien d'une forme quadratique *ternaire* (c'est-à-dire d'une forme du second degré à trois variables)

$$\varphi(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv$$

n'est autre chose que le produit par 8 du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

Il résulte du théorème précédent que, si l'on désigne par

$$\Phi(x, y, z) = a_1 x^2 + a'_1 y^2 + a''_1 z^2 + 2b_1 yz + 2b'_1 zx + 2b''_1 xy$$

ce que devient la forme $\varphi(u, v, w)$ quand on y fait

$$\begin{aligned} u &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ v &= \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ w &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z, \end{aligned}$$

on a identiquement en $a, a', \ldots, b'', \alpha, \beta, \ldots, \gamma''$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b''_1 & b'_1 \\ b''_1 & a'_1 & b_1 \\ b'_1 & b_1 & a''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}^2,$$

quand on remplace $a_1, a'_1, \ldots, b''_1$ par leurs expressions en $a, a', \ldots, b''$, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$: le lecteur vérifiera sans peine que ces expressions sont données par les formules

$$a_1 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \qquad a'_1 = \varphi(\alpha', \beta', \gamma'), \qquad a''_1 = \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma''),$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha''\varphi'_{\alpha'} + \beta''\varphi'_{\beta'} + \gamma''\varphi'_{\gamma'}) = \tfrac{1}{2}(\alpha'\varphi'_{\alpha''} + \beta'\varphi'_{\beta''} + \gamma'\varphi'_{\gamma''}), \\ b'_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\varphi'_{\alpha''} + \beta\varphi'_{\beta''} + \gamma\varphi'_{\gamma''}) = \tfrac{1}{2}(\alpha''\varphi'_{\alpha} + \beta''\varphi'_{\beta} + \gamma''\varphi'_{\gamma}), \\ b''_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha'\varphi'_{\alpha} + \beta'\varphi'_{\beta} + \gamma'\varphi'_{\gamma}) = \tfrac{1}{2}(\alpha\varphi'_{\alpha'} + \beta\varphi'_{\beta'} + \gamma\varphi'_{\gamma'}). \end{aligned}$$

Les notations telles que φ'_α, φ'_β, φ'_γ désignent ce que deviennent les dérivées φ'_u, φ'_v, φ'_w quand on y remplace u, v, w par α, β, γ.

294. **Différentielles de diverses fonctions.** — Si A, B, C désignent des constantes et u, v, w des fonctions de variables quelconques, la différentielle de la fonction $Au + Bv + Cw$ sera $A\,du + B\,dv + C\,dw$: cela résulte de la définition quand u, v, w sont des variables indépendantes : cette forme subsiste dans tous les cas d'après le théorème fondamental.

Le même mode de raisonnement conduit aux conclusions suivantes, où $u, v, w, \ldots$ désignent soit des variables indépendantes, soit des fonctions de variables indépendantes :

La différentielle du produit uvw est $vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$;

La différentielle du rapport $\dfrac{u}{v}$ est $\dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Enfin toutes les règles relatives aux dérivées de fonctions simples x^m, $\lg x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\ldots$, conduisent à l'expression des différentielles de ces mêmes fonctions : on a, par exemple [1],

$d(x^m) = m x^{m-1}\, dx,\ d \lg x = \frac{dx}{x},\ de^x = e^x dx,\ d(\text{arctang}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}, \ldots$

Considérons l'une de ces égalités, la dernière par exemple ; elle a un sens un peu plus étendu que la proposition suivante : la dérivée de $\text{arctang}\, x$ est $\frac{1}{1+x^2}$; elle conserve un sens en effet quand on y regarde x comme une fonction de fonction, ou une fonction composée ; on peut écrire, par exemple,

$$d\left(\text{arc tang}\,\frac{u}{v}\right) = \frac{d\frac{u}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}} = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}.$$

Un grand avantage de la *notation différentielle* consiste, comme on le voit, en ce qu'elle permet de ne pas spécifier la ou les variables indépendantes, et cela en vertu du théorème fondamental du n° 291, lequel réunit en particulier les théorèmes relatifs aux dérivées des fonctions de fonctions, des fonctions composées, des fonctions inverses, des fonctions implicites.

295. On a très souvent l'occasion de regarder les différentielles dx, dy, dz des variables indépendantes qui figurent dans une fonction $f(x, y, z)$ comme des accroissements infiniment petits donnés aux variables x, y, z.

D'ordinaire, on fait même figurer cette supposition dans la définition des différentielles ; je me suis écarté de cette habitude parce que, comme le lecteur a déjà pu s'en convaincre par ce qui précède, la supposition que les différentielles sont des accroissements donnés aux variables, ou qu'elles sont infiniment petites, n'intervient nullement dans un très grand nombre de cas ; d'un autre côté je n'ai considéré au Chapitre XIV que des infiniment petits qui dépendaient d'*une* variable.

Lorsqu'on regarde dx, dy, dz comme des accroissements donnés aux variables x, y, z, l'accroissement correspondant de la fonction f

---

(1) On emploie ou l'on supprime les parenthèses suivant que l'on craint ou qu'on ne craint pas des confusions possibles : j'ai écrit $d(x^m)$ et non dx^m parce que cette dernière façon d'écrire représente la puissance $m^{\text{ième}}$ de dx, $(dx)^m$, si l'on veut.

est

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-f(x,\ y,\ z)$$

ou, d'après le n° **218**, $f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$, en supposant que, dans les dérivées f'_x, f'_y, f'_z, on remplace respectivement x, y, z par $x+\theta dx$, $y+\theta dy$, $z+\theta dz$, où θ désigne un nombre compris entre 0 et 1; lorsque dx, dy, dz sont regardés comme des infiniment petits et que les dérivées partielles sont continues, les différences entre les valeurs que prennent ces dérivées pour x, y, z et pour $x+\theta dx$, $y+\theta dy$, $z+\theta dz$ sont elles-mêmes infiniment petites, et l'on conçoit qu'on puisse dire, en employant, pour les fonctions de plusieurs variables, un langage analogue à celui qu'on a employé pour les fonctions d'une seule variable, que la différentielle df de la fonction f est la partie principale de l'accroissement de cette fonction, partie principale que l'on obtient en regardant, dans l'expression exacte de cet accroissement, les dérivées partielles comme ayant les valeurs relatives au système x, y, z des variables et non au système $x+\theta dx$, $y+\theta dy$, $z+\theta dz$.

Cette façon de parler, que je ne préciserai pas davantage en général, est très claire quand il s'agit d'une fonction $f(x)$ d'une seule variable et c'est sur ce cas que je vais m'arrêter un instant.

Si l'on regarde dx comme un accroissement infiniment petit donné à la variable unique x, l'accroissement infiniment petit correspondant de la fonction $f(x)$ est

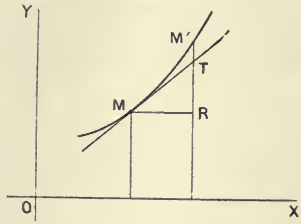
$$f(x+dx)-f(x)=f'(x+\theta dx)\,dx=f'(x)\,dx+\tfrac{1}{2}f''(x+\theta' dx)\,dx^2,\ \ldots$$

et il est clair que, si dx est regardé comme l'infiniment petit principal, $f'(x)\,dx$ sera, sauf pour les valeurs particulières de x qui annuleraient $f(x)$, la partie principale du second membre : la différentielle de $f(x)$ peut donc, en excluant le cas exceptionnel qu'on vient de signaler, être définie comme la partie principale de l'accroissement de $f(x)$, quand on donne à x un accroissement infiniment petit dx, qu'on regarde comme l'infiniment petit principal.

La différence entre l'accroissement de $f(x)$ et df est du second ordre, au moins quand la formule de Taylor s'applique.

Plaçons-nous au point de vue géométrique : si la courbe ci-dessous représente la fonction $y=f(x)$, si M est le point de cette courbe dont les coordonnées sont x, y; si M′ est le point de la courbe dont l'abscisse est $x+dx$, en sorte que dx soit l'équivalent algébrique du vecteur MR, parallèle à Ox, l'accroissement de la fonction sera l'équi-

Fig. 84.



valent algébrique du vecteur RM′, la différentielle de y sera $dy = \mathrm{RT}$, le point T étant sur la tangente en M; la différence entre l'accroissement de la fonction et la différentielle sera l'équivalent algébrique du vecteur TM′, qui est un infiniment petit du second ordre quand on regarde $dx = \mathrm{MR}'$ comme l'infiniment petit principal.

On dit souvent que $x+dx$, $y+dy$ désignent les coordonnées d'un point de la courbe infiniment voisin du point x, y : cela n'est vrai que si l'on néglige les infiniment petits du second ordre; $x+dx$, $y+dy$ ne sont pas, dans la figure, les coordonnées du point M′ voisin du point M, mais bien les coordonnées du point T, sur la tangente.

§ 2. — COURBES PLANES.

296. Jusqu'ici, on n'a guère considéré que des courbes (ou des traits de courbe) définis par une équation telle que $y=f(x)$; à une valeur de x correspond alors une seule valeur de y; en d'autres termes, les courbes que l'on a considérées n'étaient rencontrées qu'en un point par les parallèles à l'axe des y.

Si l'on reste à ce point de vue et si l'on veut, par exemple, représenter analytiquement un cercle de rayon r, et dont le centre est à l'origine, il faut deux équations, à savoir

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \qquad y=-\sqrt{r^2-x^2};$$

chacune définit une moitié du cercle. Pour d'autres courbes un peu plus compliquées, il faudrait de même trois, quatre, ... équations.

A la vérité, on peut dire que le cercle tout entier est représenté par l'équation unique $x^2+y^2-r^2=0$, laquelle définit *implicitement* les deux fonctions y de x que l'on a écrites plus haut. L'étude des courbes représentées par une équation $f(x,y)=0$, qui peut ainsi définir implicitement plusieurs fonctions y de x, en particulier dans le cas où $f(x,y)$ est un polynome en x, y, est un Chapitre très important de la Géométrie analytique. Dans ce dernier cas, la courbe est dite *algébrique;* son degré est le degré du polynome $f(x,y)$. En décomposant cette courbe en parties telles que chacune ne soit rencontrée qu'en un point par les parallèles à l'axe des y, on définit sans ambiguïté les fonctions que l'équation $f(x,y)=0$ définit implicitement.

Un autre façon de représenter une courbe plane consiste à regarder les coordonnées x, y d'un point de cette courbe comme des fonctions $f(t)$, $g(t)$ d'une variable; la courbe est alors le lieu des points x, y dont les coordonnées sont

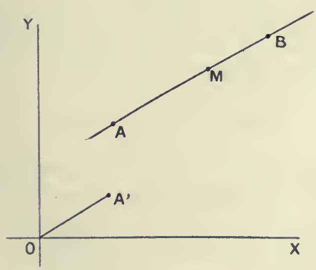
$$x=f(t), \qquad y=g(t)$$

quand t varie entre certaines limites.

Par exemple les équations

$$x=a+a't, \qquad y=b+b't$$

Fig. 85.



définissent une droite quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, à savoir une droite passant par le point A de coordonnées a, b et parallèle à la direction qui va de l'origine au point A′ de coordonnées a', b', et dont les cosinus directeurs sont (n° 94)

$$\cos\alpha = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}};$$

en effet, si, sur la droite ainsi définie, on prend le point A pour origine et la direction de O vers A′ pour direction positive, les coordonnées d'un point quelconque M sont données par les formules

$$x = a + r\cos\alpha, \qquad y = b + r\sin\alpha,$$

en désignant par r l'équivalent algébrique du vecteur AM : ces coordonnées coïncideront avec celles du point $a+a't$, $b+b't$, si l'on suppose $r = t\sqrt{a'^2+b'^2}$; quand t croît de o à $+\infty$, le point considéré décrit à partir du point A la demi-droite AB dont la direction est précisément celle de O vers A′; quand t varie de o à $-\infty$, le point décrit la demi-droite opposée.

Considérons maintenant les équations

$$x = a + a't^2, \qquad y = b + b't^2,$$

elles rentreraient dans le type précédent en posant $t^2 = t'$; on voit que le point x, y se trouve toujours sur la demi-droite AB; quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$, il décrit cette demi-droite deux fois, une première fois dans le sens de B vers A, quand t croît de $-\infty$ à o; une seconde fois dans le sens de A vers B, quand t croît de o à $+\infty$. Il passe deux fois par la même position pour des valeurs symétriques de t.

Le lecteur n'aura aucune peine à se rendre compte de la forme des courbes définies par des équations de la forme

$$x = a + a't^p, \qquad y = b + b't^q.$$

Il est commode, en général, de regarder la variable t comme représentant le temps; les équations $x = f(t)$, $y = g(t)$ définissent alors, dans le plan, la position d'un mobile à chaque instant t, et la courbe n'est autre chose que la trajectoire de ce mobile.

Si l'on considère deux époques quelconques t et $t+h$, auxquelles correspondent deux positions M, M′ du mobile, on sait qu'on appelle *vitesse moyenne* du mobile, pendant l'intervalle de temps h, la vitesse d'un mobile qui se meut d'un mouvement uniforme sur la droite MM' de manière à passer en M et en M' aux époques t et $t+h$. Cette vitesse est un vecteur MK dont le sens est le sens de M vers M' ou de M' vers M suivant que h est positif ou négatif. Les projections de ce vecteur sur les axes ont respectivement pour équivalents algébriques

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \quad \frac{g(t+h)-g(t)}{h};$$

la limite de ce vecteur MK, quand h tend vers o, est la vitesse à l'instant t, et les équivalents algébriques des projections du vecteur limite sur les axes sont respectivement les dérivées $f'(t)$, $g'(t)$; ces deux quantités définissent sans ambiguïté une direction sur la tangente en M, la direction de la vitesse, la direction dans laquelle se meut le mobile quand la variable t augmente : c'est la direction (n° 94) du vecteur qui va de l'origine au point dont les coordonnées sont $f'(t)$, $g'(t)$; les cosinus directeurs de cette direction sont

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}, \quad \frac{g'(t)}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}};$$

le radical est la valeur absolue de la vitesse.

Les différentielles

$$dx = f'(t)\,dt, \qquad dy = g'(t)\,dt,$$

lorsqu'on regarde dt comme l'infiniment petit principal, peuvent être regardées, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme les accroissements des fonctions x, y quand on donne à la variable t l'accroissement $h = dt$; en sorte que, dans les mêmes conditions, on peut dire que $x+dx$, $y+dy$ sont les coordonnées du point de la courbe qui correspond à la valeur $t+dt$.

Rigoureusement parlant, $x+dx$, $y+dy$ sont les coordonnées, non d'un point de la courbe, mais d'un point de la tangente : c'est à ce dernier point de vue qu'il faut se placer quand on veut regarder dt non comme un infiniment petit, mais comme un nombre arbitraire. Que dt soit infiniment petit ou non, le vecteur, porté par la tangente, qui a pour origine le point dont les coordonnées sont x, y et pour extrémité le point dont les coordonnées sont $x+dx$, $y+dy$, et qui est déterminé quand on se donne dt, joue un rôle important dans la théorie des courbes. Il a pour projections sur les axes des vecteurs dont les équivalents algébriques sont dx et dy (1); il est la somme géométrique de ces deux vecteurs.

Il convient de remarquer que, pour une valeur t_1, qui annulerait à la fois $f'(t)$, et $g'(t)$, les formules qui donnent en général les cosinus directeurs de la tangente deviennent illusoires pour $t = t_1$. La pente de la tangente en ce point s'obtiendra par la méthode générale en cherchant la limite, pour $h = 0$, du rapport

$$\frac{g(t_1+h)-g(t_1)}{f(t_1+h)-f(t_1)}.$$

Si la formule de Taylor s'applique, ce rapport, dans le cas qui nous occupe, est égal à

$$\frac{\frac{h^2}{2}g''(t_1)+\ldots}{\frac{h^2}{2}f''(t_1)+\ldots};$$

sa limite, lorsque $f''(t_1)$ est différent de 0, est évidemment $\frac{g''(t_1)}{f''(t_1)}$; lorsque $f''(t_1)$ est nul sans que $g''(t_1)$ le soit, la tangente est parallèle à l'axe des y.

297. D'une façon générale, quand on veut étudier la forme de la courbe définie par les équations $x = f(t)$, $y = g(t)$ aux environs d'un point A_1 correspondant à une valeur t_1 du paramètre, ou, ce qui revient au même, le mouvement du mobile M défini par ces équations aux environs de l'époque t_1, on pose $t = t_1 + h$, et l'on cherche des expressions approchées de x et de y pour les valeurs de h voisines de 0; si, en particulier, la formule de Taylor est applicable aux deux

---

(1) C'est là la forme correcte du langage : on se permet souvent d'abréger un peu et de dire que les projections sont dx, dy : d'une façon générale, il est permis, lorsqu'on ne craint pas d'ambiguïté, de désigner un vecteur par son équivalence algébrique : cela suppose essentiellement que l'*axe* auquel on rapporte le vecteur soit bien défini. Je rappelle qu'un axe comporte une direction (positive) et une unité de longueur.

fonctions $f(t)$, $g(t)$, on aura

$$x = f(t_1) + \frac{h}{1} f'(t_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(t_1) + \ldots,$$
$$y = g(t_1) + \frac{h}{1} g'(t_1) + \frac{h^2}{1.2} g''(t_1) + \ldots.$$

Les formules approchées s'obtiennent en limitant les développements. On obtient ainsi les coordonnées d'un point m, exprimées au moyen de la variable $h = t - t_1$; le point m est voisin de M lorsque h est voisin de o et décrit, dans ces conditions, un petit trait de courbe voisin de la trajectoire du point M. La construction du point m défini par les formules

$$x = f(t_1) + \frac{h}{1} f'(t_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(t_1) + \ldots + \frac{h^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(t_1),$$
$$y = g(t_1) + \frac{h}{1} g'(t_1) + \frac{h^2}{1.2} g''(t_1) + \ldots + \frac{h^p}{1.2\ldots p} g^{(p)}(t_1)$$

est manifeste; le vecteur Om, qui va de l'origine au point m, est la somme géométrique de $p+1$ vecteurs, ayant tous le point O pour origine et aboutissant aux points dont les coordonnées sont $f(t_1)$ et $g(t_1)$, $\frac{h}{1} f'(t_1)$ et $\frac{h}{1} g'(t_1)$, ...; la première de ces extrémités est le point A_1, où le point M se trouve à l'époque t_1. La seconde, quand h varie, se déplace sur la droite qui va de l'origine au point de coordonnées $f'(t_1)$, $g'(t_1)$; la troisième sur la droite qui va de l'origine au point de coordonnées $\frac{f''(t_1)}{2}$, $\frac{g''(t_1)}{2}$, etc.; lorsque les deux dérivées qui correspondent à un vecteur sont nulles, ce vecteur est lui-même nul.

Si, en particulier, on ne garde que les deux premiers termes, on aura, pour les coordonnées du point m,

$$x = f(t_1) + hf'(t_1), \qquad y = g(t_1) + hg'(t_1).$$

Ces formules, lorsque h varie de $-\infty$ à $+\infty$, définissent une droite : cette droite n'est autre chose, comme on l'a vu plus haut, que la tangente à la trajectoire du point M, au point A_1 (1). Ceci suppose tou-

(1) En prenant un terme de plus dans les expressions de x, y il est aisé de reconnaître la position de la courbe par rapport à la tangente, le sens de la convexité, etc.

tefois que l'on n'a pas à la fois $f'(t_1)=0$, $g'(t_1)=0$, c'est-à-dire que l'on n'est pas dans la circonstance exceptionnelle signalée un peu plus haut.

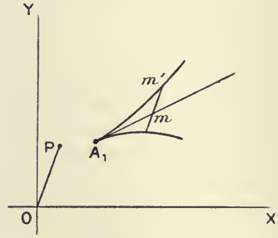
Pour l'étude de cette circonstance, bornons-nous au cas où $f''(t_1)$ et $g''(t_1)$ sont différents de o; on peut prendre comme formules approchées

$$x=f(t_1)+\frac{h^2}{2}f''(t_1), \qquad y=g(t_1)+\frac{h^2}{2}g''(t_1);$$

ces équations, lorsque h varie, définissent non plus une droite, mais seulement une demi-droite, partant du point de coordonnées $f(t_1)$, $g(t_1)$, dans la direction parallèle à celle qui va de l'origine au point de coordonnées $\frac{1}{2}f''(t_1)$, $\frac{1}{2}g''(t_1)$ et de même sens. Lorsque h varie de $-\varepsilon$ à ε, ε étant un nombre positif, le point m, défini par les formules précédentes, décrit deux fois, dans des sens opposés, un petit segment de cette droite, laquelle n'est autre que la tangente en A_1, puisqu'elle passe par ce point et que sa pente est $\frac{g''(t_1)}{f''(t_1)}$. Le mouvement du point M se rapproche beaucoup de celui du point m.

Pour nous rendre compte de ce mouvement du point M et de la forme de sa trajectoire aux environs du point A_1, prenons un terme

Fig. 86.



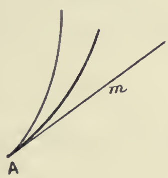
de plus dans les développements, et considérons le point m' dont les coordonnées sont

$$x=f(t_1)+\frac{h^2}{2}f''(t_1)+\frac{h^3}{6}f'''(t_1),$$
$$y=g(t_1)+\frac{h^2}{2}g''(t_1)+\frac{h^3}{6}g'''(t_1),$$

en supposant que les deux quantités $f'''(t_1)$, $g'''(t_1)$ ne soient pas nulles toutes les deux ; pour déduire le point m' du point m, on devra regarder ce point m comme l'origine d'un vecteur mm' équipollent au vecteur qui va de l'origine au point dont les coordonnées sont $\frac{h^3}{6}f'''(t_1)$, $\frac{h^3}{6}g'''(t_1)$. Ce dernier vecteur est situé sur la droite OP qui va de l'origine au point P de coordonnées $f'''(t_1)$, $g'''(t_1)$, de même sens si h est positif, de sens contraire si h est négatif. Je suppose que la droite OP ne soit pas parallèle à la tangente $A_1 m$ au point A_1, c'est-à-dire que $f'''(t_1)$, $g'''(t_1)$ ne soient pas proportionnels à $f''(t_1)$, $g''(t_1)$. Alors, le point m' reste d'un côté de la droite $A_1 m$ quand h est positif, de l'autre côté quand h est négatif ; il décrit ainsi deux traits de courbe tangents en A_1, à la droite $A_1 m$, de côtés différents : leur réunion forme, en A_1, une sorte de bec. Le point A_1 est ce qu'on appelle *un point de rebroussement* de la trajectoire du point m' : ce point de rebroussement est dit *de première espèce* lorsque, comme dans l'étude précédente, les deux traits de courbe sont de part et d'autre de la tangente. La trajectoire du point M offre la même disposition.

Je laisse au lecteur le soin de montrer que, si l'on avait $f'''(t_1) = 0$, $g'''(t_1) = 0$ et si les deux dérivées $f^{\text{IV}}(t)$, $g^{\text{IV}}(t)$ n'étaient pas nulles toutes deux pour $t = t_1$, ou proportionnelles à $f''(t_1)$, $g''(t_1)$, la trajectoire de M présenterait en A_1 un point de rebroussement de

Fig. 87.



seconde espèce, où les deux traits de courbe seraient tangents en A_1, à la droite $A_1 m$, d'un même côté [1].

Comme cas très particulier, il peut arriver que les deux traits de

---

[1] Je lui laisse aussi le soin d'examiner les différents cas qui peuvent se présenter, lorsque $f''(t_1)$, $g''(t_1)$ sont nuls ; les explications qui précèdent suffisent pour reconnaître comment on doit procéder dans ces différents cas.

courbe soient confondus, et que le point M, lorsque h croît de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, *rebrousse* chemin à partir du point A_1, sur la *même* courbe qu'il a déjà parcourue : l'exemple de la demi-droite définie par les équations $x = a + a't^2$, $y = b + b't^2$ suffit à montrer qu'il peut en être ainsi. Cette circonstance exceptionnelle ne se présente pas dans un intervalle où les dérivées $f'(t)$, $g'(t)$ sont continues et où l'une d'elles ne s'annule pas, puisque, dans un tel intervalle, l'une des coordonnées x, y du mobile varie toujours dans le même sens : elle ne peut donc se présenter dans un intervalle où les dérivées ne s'annulent pas à la fois. Dans un tel intervalle, on peut dire que les points de la courbe se succèdent dans un ordre déterminé, l'ordre dans lequel ils sont rencontrés par le mobile quand t croît : on sait alors nettement ce qu'on veut dire en parlant d'un point qui en précède un autre, d'un point qui est situé entre deux autres, etc.

Le mobile rebrousserait chemin, à partir de l'époque t_1, si, dans les deux développements de $f(t_1+h)$, $g(t_1+h)$ suivant les puissances de h, tous les termes de degré impair disparaissaient. Dans ce cas, on voit qu'il y aurait une infinité de couples de valeurs distinctes t', t'' telles que l'on eût à la fois

$$f(t') = f(t''), \qquad g(t') = g(t'');$$

on les obtiendrait en posant $t' = t_1 + h$, $t'' = t_1 - h$.

Dans le cas où les équations précédentes admettraient une solution en t', t'' $(t' \neq t'')$ sans en admettre qui fussent voisines de celles-là, cela voudrait dire simplement que, à l'époque t', le mobile se trouve à la même position qu'à l'époque t''; la courbe présenterait un *point double*.

298. Je n'ai rien supposé sur cette variable t à chaque valeur de laquelle correspond un point de la courbe; elle s'introduit souvent d'une façon naturelle, par la définition géométrique de la courbe; il y a toutefois quelques variables sur lesquelles il convient de s'arrêter un peu, en raison de leur importance, tant pour en éclaircir la signification que pour montrer comment on les détermine en fonction de t, quand la courbe est définie par les équations de la forme $x = f(t)$, $y = g(t)$.

On peut, sur une courbe donnée, fixer un point par son abscisse curviligne. Pour cela, on commence par choisir sur la courbe un point A_0, *l'origine des arcs*, correspondant, par exemple, à une valeur t_0 du paramètre t. A partir de ce point on peut décrire la courbe dans deux sens différents, correspondant l'un aux valeurs croissantes de t, l'autre aux valeurs décroissantes; on choisit l'un de ces sens comme étant le sens positif, l'autre le sens négatif. Tout ceci est parfaitement clair pourvu qu'on reste sur une portion AB de la courbe correspondant à un intervalle dans lequel les fonctions $f(t)$, $g(t)$, $f'(t)$, $g'(t)$ sont continues, et dans lequel les deux dernières fonctions ne s'annulent pas à la fois. C'est ce que je supposerai dans ce qui suit.

Soit M un point quelconque [1] de la courbe; l'abscisse curviligne de ce point M sera, par définition, un nombre dont la valeur absolue est la longueur de l'arc AM (n° 26) et dont le signe est + ou — suivant que, pour aller du point A_0 vers le point M, il faut marcher, sur la courbe, dans le sens positif ou dans le sens négatif. Le lecteur a été familiarisé avec cette notion, au moins par la trigonométrie. La position du point M est définie sans ambiguïté par son abscisse curviligne s; il est clair que ses coordonnées x, y sont des fonctions de cette variable; il importe de savoir exprimer s en fonction de t; on pourra exprimer ensuite t, x, y au moyen de s.

Il est nécessaire, pour résoudre cette question, de définir d'une façon précise ce qu'est la longueur de l'arc d'une courbe. On a, à la vérité, esquissé au n° 26 une telle définition; mais cette définition ne s'applique qu'à certaines courbes planes [2]. Il serait assez facile d'en déduire, pour ces courbes, la proposition suivante :

Si deux points, sur une courbe, sont infiniment voisins, les longueurs de l'arc infiniment petit limité par ces deux points et de la corde qui le sous-tend sont des infiniment petits équivalents.

Je prierai le lecteur, soit d'admettre cette proposition comme un postulat impliqué dans la notion vague de la longueur d'un arc de

---

[1] On suppose toutefois que le point A_0 et le point M sont sur le même *trait de courbe :* on ne prendra pas, par exemple, les deux points A et M sur deux branches différentes d'une hyperbole.

[2] Je ne parlerai pas, dans le présent Livre, des courbes de l'espace.

courbe, soit, s'il veut se placer à un point de vue plus logique, de la regarder comme une condition imposée à toute définition de cette longueur. Cette définition doit, en outre, être telle que, si A, B, C sont trois points de la courbe, l'arc AC soit la somme des arcs AB et BC, quand le point B est situé entre les points A et C. Je vais montrer que ces deux conditions suffisent à déterminer l'arc s d'une courbe, compté à partir d'une origine A_0, comme une fonction du paramètre t qui fixe chaque point de la courbe : la fonction ainsi obtenue sera, si l'on veut, la définition même de l'arc; j'aurai l'occasion d'indiquer plus tard comment cette définition se raccorde avec celle qu'on tire de la considération de la longueur d'une ligne brisée inscrite dans la courbe.

Soit s l'abscisse curviligne du point M correspondant à la valeur t du paramètre; supposons qu'on donne à ce paramètre un accroissement positif h, et qu'à la valeur $t+h$ du paramètre corresponde le point M′ de la courbe; il se peut que, le paramètre croissant à partir de t, l'abscisse curviligne s augmente ou diminue; plaçons-nous dans le premier cas; lorsque l'on passe de la valeur t à la valeur $t+h$, l'abscisse curviligne s augmente de l'arc positif MM′; la limite du rapport $\frac{\operatorname{arc} MM'}{h}$, quand h tend vers o, est la dérivée de s par rapport à t; pour l'évaluation de cette limite on peut remplacer arc MM′ par l'infiniment petit équivalent corde MM′; on a donc à évaluer la limite, pour $h = 0$, du rapport (¹)

$$\frac{\sqrt{[f(t+h)-f(t)]^2+[g(t+h)-g(t)]^2}}{h},$$

où le radical a la signification arithmétique. En vertu de la formule des accroissements finis, ce rapport peut s'écrire, en désignant par ε, η des nombres positifs compris entre o et 1,

$$\sqrt{f'^2(t+\varepsilon h)+g'^2(t+\eta h)};$$

sa limite, quand h tend vers o, est évidemment $\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$:

(¹) J'admets ici la formule suivante, très aisée à démontrer : la distance de deux points dont les coordonnées rectangulaires sont x, y et x', y' est

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}.$$

on a donc dans ce cas

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}.$$

On voit immédiatement que, dans le cas où l'arc s diminue lorsque t augmente, l'on a

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{f^{2'}(t) + g'^2(t)}.$$

De là résulte une méthode pour évaluer les arcs d'une courbe plane, analogue à celle qu'on a donnée au n° 222 pour évaluer les aires.

On détermine une fonction $\varphi(t)$ dont la dérivée, par rapport à t, soit $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$. En supposant que les arcs croissent en même temps que t, on voit que $s - \varphi(t)$ doit être une constante, puisque la dérivée de cette fonction est nulle : la valeur de cette constante est égale à la valeur $-\varphi(t_0)$ de $s - \varphi(t)$ pour $t = t_0$; on doit donc avoir $s = \varphi(t) - \varphi(t_0)$. On aurait de même $s = \varphi(t_0) - \varphi(t)$, si les arcs croissaient lorsque t diminue. L'expression $\varphi(t_1) - \varphi(t_0)$, où $\varphi(t)$ désigne une fonction primitive de la fonction essentiellement positive $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$, représente, lorsque t_1 est plus grand que t_0, la longueur (absolue) de l'arc de courbe décrit par le point $x = f(t)$, $y = g(t)$ quand t varie de t_0 à t_1.

La formule générale $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = f'^2(t) + g'^2(t)$, dans le cas où l'on suppose $f(t) = t$, en sorte que le paramètre t n'est autre que l'abscisse x d'un point de la courbe, montre que l'on a

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{1 + y'^2},$$

en désignant par y' la dérivée de y par rapport à x; on prendra le signe $+$ ou le signe $-$ devant le radical, suivant qu'on est convenu de faire croître ou décroître les arcs quand x croît.

Lorsqu'on est parvenu à exprimer l'arc s au moyen de fonctions connues du paramètre qui détermine chaque point de la courbe, on dit qu'on a *rectifié* cette courbe.

Les expressions

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}, \qquad \frac{g'(t)}{\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}}$$

représentent, comme on l'a vu plus haut, les cosinus directeurs de la direction qui, sur la tangente, correspond à t croissant, c'est la direction de la vitesse quand t désigne le temps; la valeur de cette vitesse est $\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$.

Les expressions

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dy}{ds}$$

seront les cosinus directeurs de la même direction si $\frac{ds}{dt}$ est positif, si les arcs croissent lorsque t croît, de la direction opposée si les arcs décroissent lorsque t croît; elles sont, dans tous les cas, les cosinus directeurs de la direction qui, sur la tangente, correspond aux arcs croissants. La quantité $\frac{ds}{dt}$ est l'équivalent algébrique de la vitesse quand on prend pour direction positive, sur la tangente, cette direction qui correspond aux arcs croissants.

299. Désignons par α l'angle dont il faut faire tourner la partie positive de l'axe des x, pour l'amener parallèlement à cette direction positive sur la tangente [1], on aura

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha$$

ou

$$dx = ds\cos\alpha, \qquad dy = ds\sin\alpha. \tag{1}$$

Ici encore la variable indépendante n'est pas désignée; x, y, s, α peuvent être des fonctions d'une variable quelconque : cette variable peut, en particulier, être s ou α. Ces formules expriment que dx et

---

[1] Cet angle est déterminé à $2k\pi$ près; il *définit* la direction considérée.

dy sont les équivalents algébriques des projections sur les axes d'un vecteur porté sur la tangente, dont l'équivalent algébrique est ds, quand on choisit la direction définie par l'angle α comme direction positive sur la tangente, j'ai déjà appelé l'attention sur ce dernier vecteur dont l'origine et l'extrémité sont les points de coordonnées x et y, $x + dx$ et $y + dy$. Il figure la différentielle ds de l'arc; je l'appellerai à l'occasion le vecteur as; la formule $ds^2 = dx^2 + dy^2$ n'est autre chose que la relation entre l'hypoténuse d'un triangle rectangle et ses côtés : peu importe d'ailleurs qu'on regarde, ou non, dx, dy, ds, dt comme des infiniment petits; mais il ne faut pas oublier que ces quantités ne sont déterminées que quand on se donne la variable indépendante et sa différentielle : si t est la variable indépendante, dx, dy, ds sont les dérivées de x, y, s par rapport à t respectivement multipliées par la différentielle dt; ainsi le vecteur ds, dont les projections sont dx et dy, a, lorsque dt est positif, la même direction que la vitesse, à savoir la direction qui va de l'origine au point dont les coordonnées sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; il a la direction opposée si dt est négatif; en d'autres termes encore, la direction du vecteur ds, quand la différentielle dt est positive, est la direction dans laquelle on marche sur la courbe ou sa tangente lorsque t croît.

La quantité $\frac{ds}{d\alpha}$ joue un rôle important dans la théorie des courbes planes : on la regarde comme l'équivalent algébrique d'un vecteur dont l'origine est le point M de la courbe auquel correspond la valeur de $\frac{ds}{d\alpha}$, porté sur la normale à la courbe en ce point, la direction positive choisie sur la normale étant définie par l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Les cosinus directeurs de cette direction sont

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha = -\frac{dy}{ds}, \qquad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

L'angle qu'elle fait avec la direction OY est aigu ou obtus suivant que $\frac{dx}{ds}$ est positif ou négatif, suivant que s et x varient ou non dans le même sens.

Supposons que $\frac{ds}{d\alpha}$ soit positif; s et α varient alors dans le même sens; par suite, α et x varient ou non dans le même sens suivant que $\frac{dx}{ds}$ est positif ou négatif; dans le premier cas, la pente de la tangente augmente avec x, la courbe (n° 249) tourne sa concavité vers le haut, au voisinage du point M; elle est située au-dessus de la tangente; il en est de même de la direction positive sur la normale, qui fait un angle aigu avec la parallèle à la direction OY menée à partir du point M; dans le second cas, la courbe est située au-dessous de la tangente; il en est de même de la direction positive sur la normale, qui fait un angle obtus avec la parallèle à OY.

On reconnaît de la même façon que, si $\frac{ds}{d\alpha}$ est négatif, la direction positive sur la normale, à partir du point M, est située, par rapport à la tangente, de l'autre côté que les points de la courbe voisins du point M.

Par conséquent, dans tous les cas, le vecteur dont l'origine est le point M et dont l'équivalent algébrique est $\frac{ds}{d\alpha}$ est situé, par rapport à la tangente en M, du même côté que la courbe dans le voisinage de M; les coordonnées de l'extrémité de ce vecteur sont

$$(2) \qquad X = x + \frac{ds}{d\alpha}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \qquad Y = y + \frac{ds}{d\alpha}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right);$$

cette extrémité s'appelle le *centre de courbure* relatif au point M; le cercle décrit de ce point comme centre, et passant par le point M, est le *cercle de courbure* (ou cercle osculateur) en ce point, et le rayon de ce cercle est le rayon de courbure relatif au point M.

On appelle *courbure moyenne* d'une courbe entre deux points voisins M, M′ le rapport à la longueur de l'arc MM′ de l'angle aigu formé par les deux tangentes aux points M, M′; c'est la valeur absolue du rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, en désignant par $\Delta\alpha$, Δs les accroissements de α et de s quand on passe du point M au point M′. Dans un cercle, cette courbure moyenne est constante et égale à l'inverse du rayon du cercle. La *courbure* au point M est la limite de la courbure moyenne quand le point M′ se rapproche du point M, et le rayon de courbure en M est le rayon d'un cercle qui aurait même courbure que la courbe proposée en M.

Ce rayon de courbure, à proprement parler, est la valeur absolue de $\frac{ds}{d\alpha}$. Je donnerai toutefois le nom de *rayon de courbure* au *vec-*

teur précédemment défini, ou à la quantité $R = \frac{ds}{d\alpha}$ avec son signe.

En tenant compte des formules (1) et (2), les coordonnées du centre de courbure peuvent s'écrire

$$(3) \qquad \begin{cases} X = x - \dfrac{ds}{d\alpha}\sin\alpha = x - \dfrac{dy}{d\alpha}, \\ Y = y + \dfrac{ds}{d\alpha}\cos\alpha = y + \dfrac{dx}{d\alpha}; \end{cases}$$

le lieu de ce point, quand le point M décrit la courbe proposée, est ce qu'on appelle la *développée* de cette courbe : cette développée correspond point par point à la proposée ; on peut la regarder comme définie par les formules précédentes.

Il est aisé de transformer les formules précédentes de manière à les rendre immédiatement applicables quand on se donne x, y en fonction d'une variable quelconque t : je désignerai par des accents les dérivées prises par rapport à cette variable ; on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'};$$

l'angle α ne peut différer de arc tang $\frac{y'}{x'}$ que d'un multiple de π, on a donc

$$(4) \qquad \alpha' = \frac{d\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{y'}{x'}\right)}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{y''x' - x''y'}{s'^2},$$

$$(5) \qquad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{x'}{\alpha'} = \frac{x's'^2}{y''x' - x''y'}, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{y'}{\alpha'} = \frac{y's'^2}{y''x' - y'x''},$$

et, par suite,

$$(6) \qquad X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{y''x' - x''y'}, \qquad Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y''x' - x''y'};$$

de même

$$(7) \qquad \frac{ds}{d\alpha} = \frac{s'}{\alpha'} = \frac{\pm(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x' - x''y'}.$$

Lorsqu'on prend l'abscisse x pour variable indépendante, on a

$$x' = 1, \qquad x'' = 0, \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad s' = \pm\sqrt{1+y'^2},$$

$$(8) \qquad X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''};$$

$$(9) \qquad \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\pm(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Observons, à propos des formules (5), que, si α augmente en même temps que x, si $\frac{dx}{d\alpha}$ est positif, la courbe tourne sa concavité vers le haut (n° 249). Le signe de la quantité $\frac{y''x' - x''y'}{x'}$ fait donc connaître le sens de la concavité. Les points d'inflexion sont déterminés par les valeurs du paramètre pour lesquelles $y''x' - x''y'$ s'annule en changeant de signe.

300. Considérons, par exemple, la *chaînette* définie par l'équation [1]

$$y = \operatorname{ch} x.$$

Prenons l'origine des arcs au sommet A et convenons de faire croître les arcs quand x croît. On a alors

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} x, \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x,$$

---

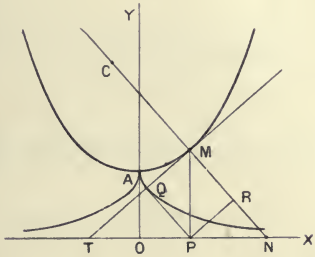
[1] Le sommet de la courbe est en A sur l'axe des y à une distance de l'origine égale à l'unité de longueur. Si l'on ne voulait pas spécifier ainsi l'unité de longueur et considérer une chaînette placée de la même façon par rapport aux axes et telle que l'ordonnée du sommet fût égale à a, on prendrait son équation sous la forme $\frac{Y}{a} = \operatorname{ch}\frac{X}{a}$; on passe de cette seconde courbe à la première en posant $Y = ay$, $X = ax$. Tous les nombres qui mesurent des *longueurs*, pour la première courbe, devraient, pour la seconde, être multipliés par a; tous ceux qui mesurent des *aires* devraient être multipliés par a^2. Si l'on a entre des longueurs relatives à la première courbe une certaine relation, en remplaçant dans cette relation chaque longueur l par $\frac{l}{a}$, on obtiendra une relation (homogène) entre les éléments analogues pour la seconde courbe. Toute relation homogène entre les lignes de la première figure est vraie pour la seconde. Les angles sont les mêmes dans les deux figures.

Les remarques faites ici pour une chaînette s'appliquent dans tous les cas analogues, lorsqu'on veut passer d'une figure où l'on a spécifié l'unité de longueur à une autre figure où cette unité n'est pas spécifiée.

et, par suite, $s = \operatorname{sh} x$, puisque $\operatorname{sh} x$ est une fonction primitive de $\operatorname{ch} x$ qui s'annule pour $x = 0$; on a ensuite

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{sh} x;$$

Fig. 88.



l'angle α peut être supposé pris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; il n'est autre chose que la fonction de x que l'on a définie au n° 204 comme l'*amplitude hyperbolique* de x; on a

$$\frac{dx}{d\alpha} = \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = \operatorname{th} x = \sin\alpha.$$

Le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure sont donnés par les formules

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \cos^2\alpha,$$

$$X = x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad Y = 2 \operatorname{ch} x.$$

Soient M le point dont l'abscisse est x, P sa projection sur l'axe des x, N et T les points où la normale et la tangente rencontrent cet axe, Q et R les projections de P sur la tangente et la normale, C le centre de courbure relatif au point M. Le lecteur n'aura aucune peine à établir les propriétés suivantes :

Dans le rectangle PQMR, les côtés PQ, MR sont égaux à OA; les côtés QM et PR sont égaux à l'arc AM de la chaînette. L'aire du rectangle est égale à l'aire OAMP comprise entre l'axe des x, la chaînette et les deux droites OA, PM.

Le point M est le milieu des points N, C.

Les coordonnées du point Q sont

$$X = x - \operatorname{th} x, \qquad Y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

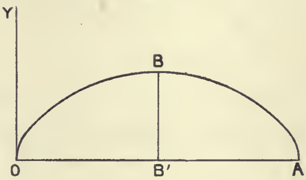
Le lieu de ce point Q, lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, est une courbe nommée *tractrice;* elle est tangente en Q à la droite QP: la longueur de sa tangente, limitée au point de contact et à l'axe des x, est donc constante et égale à OA.

Considérons la *cycloïde* définie par les équations

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t.$$

En faisant varier t de o à 2π on obtient un trait de courbe tel que celui

Fig. 89.



que l'on a figuré, symétrique par rapport à la droite $B'B(x = \pi)$; la courbe entière, obtenue en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$, se compose de parties qui se déduisent de celle que l'on a figurée par une translation parallèle à l'axe des x, translation définie par un vecteur équipollent à $n\,\mathrm{OA} = 2n\pi$, n étant un entier positif ou négatif: la courbe a ainsi une infinité de points de rebroussement, tous situés sur l'axe des x. On a

$$\frac{dx}{dt} = 2\sin^2\frac{t}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}, \qquad \frac{ds}{dt} = \pm 2\sin\frac{t}{2}.$$

Convenons de compter les arcs à partir du point O ($t = 0$), et de les faire croître quand x (ou t) croît. On aura alors, quand t appartient à l'intervalle $(0, 2\pi)$,

$$\frac{ds}{dt} = 2\sin\frac{t}{2}.$$

On observera que, dans l'intervalle suivant $(2\pi, 4\pi)$, cette formule ne con viendrait plus, puisque $\sin\frac{t}{2}$ serait négatif; il faudrait prendre

$$\frac{ds}{dt} = -2\sin\frac{t}{2} \quad (^1).$$

Je supposerai que l'on reste dans le premier intervalle : $-4\cos\frac{t}{2}$ est une fonction primitive de $2\sin\frac{t}{2}$.

On a donc, puisque s doit s'annuler pour $t = 0$,

$$s = 4\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right) = 8\sin^2\frac{t}{4}.$$

(Cette formule n'est plus valable quand t dépasse la valeur 2π; elle donnerait, par exemple, $s = 0$ pour $t = 4\pi$.) On a ensuite

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \sin\frac{t}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right),$$
$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \cos\frac{t}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right);$$

on peut prendre $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$; cet angle décroît de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ quand t varie de 0 à 2π.

Je laisse de côté les interprétations géométriques de ces résultats.

301. Revenons au cas général et considérons une courbe (C) pour laquelle les coordonnées x, y d'un point quelconque sont exprimées au moyen d'un paramètre que nous pouvons d'ailleurs ne pas spécifier.

---

(1) Des circonstances du même genre, dont l'oubli conduit à des erreurs, se présentent pour une courbe définie par des équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, lorsque $f'^2(t) + g'^2(t)$ est un carré parfait, ou lorsqu'on peut mettre un facteur carré en évidence dans $f'^2(t) + g'^2(t)$: si l'on a, par exemple, $f'^2(t) + g'^2(t) = \varphi^2(t)\,\psi(t)$ et si l'on écrit

$$\frac{ds}{dt} = \pm\varphi(t)\sqrt{\psi(t)},$$

il importe de faire attention aux valeurs de t qui annulent $\varphi(t)$ et pour lesquelles $\varphi(t)$ changent de signe. De telles valeurs correspondent, en général, à des points de rebroussement. Si l'on convient, par exemple, que les arcs doivent croître avec t, on devra nécessairement changer le signe du second membre, lorsque t passe d'un intervalle où $\varphi(t)$ est positif à un intervalle où $\varphi(t)$ est négatif.

En posant

$$R = \frac{ds}{d\alpha} \qquad \text{ou} \qquad ds = R\,d\alpha,$$

les formules (1) du numéro précédent deviennent

$$dx = R\cos\alpha\,d\alpha, \qquad dy = R\sin\alpha\,d\alpha;$$

celles-ci montrent que les dérivées de x et de y, considérées comme des fonctions de α, sont respectivement $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$. Inversement, s'il arrive que les dérivées de x, y par rapport à une certaine variable α se trouvent être de la forme $R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$, on est certain que cette variable désigne l'angle dont il faut faire tourner l'axe des x pour l'amener parallèlement à la tangente et que R est le rayon de courbure.

Les coordonnées du centre de courbure ou du point de la développée (D) qui correspond au point x, y de la courbe (C), sont données par les formules

$$X = x - R\sin\alpha, \qquad Y = y + R\cos\alpha,$$

équivalentes aux formules (3) du numéro précédent. Dans ces formules X, Y, x, y, R, α dépendent d'un même paramètre t; les différentielles de toutes ces quantités sont déterminées quand on se donne t et dt; on a d'ailleurs

$$dX = dx - R\cos\alpha\,d\alpha - dR\sin\alpha,$$
$$dY = dy - R\sin\alpha\,d\alpha + dR\cos\alpha,$$

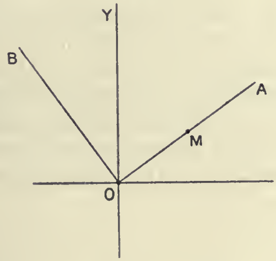
ou, en tenant compte des formules $dx = R\cos\alpha\,d\alpha$, $dy = R\sin\alpha\,d\alpha$,

$$dX = dR\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \qquad dY = dR\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ces formules expriment que dX, dY sont les projections sur les axes d'un vecteur dR rapporté à la direction définie par l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$; on sait d'ailleurs que dX, dY sont les projections sur les axes du vecteur dS qui figure la différentielle de l'arc de la développée; les deux vecteurs dS, dR, qui ont mêmes projections sur les axes, sont équipollents. On voit d'abord que la tangente à la développée est parallèle à la direction définie par l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que cette tangente à la développée coïncide avec la normale à la proposée; si sur cette tangente on choisit comme direction positive la direction définie par l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, on aura, entre les équivalents algébriques des deux vecteurs, la relation $dS = dR$ ou $d(S - R) = 0$; $S - R$ est donc une constante. Il résulte de là que l'arc de la développée, qui va du point M au point M', est égal à la différence $R - R'$ des rayons de courbure relatifs aux deux points m, m' de la courbe (C) auxquels correspondent les points M, M' de la développée.

302. **Coordonnées polaires.** — On a jusqu'ici représenté chaque point M du plan, rapporté à deux axes rectangulaires OX, OY, par ses coordonnées x, y. Le procédé suivant est aussi très employé.

Fig. 90.



Une direction quelconque OA, partant du point O, peut être définie par l'angle ω dont il faut faire tourner OX pour l'amener sur OA; sur la droite indéfinie qui porte OA, prenons la direction OA comme direction positive; un point quelconque M de cette droite est défini sans ambiguïté par l'équivalent algébrique ρ du vecteur OM; les deux nombres ρ, ω sont ce qu'on appelle les *coordonnées polaires* du point M; l'axe OX prend alors le nom d'*axe polaire;* le point O s'appelle le *pôle*.

Les coordonnées x, y du même point sont données par les formules

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega.$$

Il est commode, dans un grand nombre de questions, d'envisager deux axes (mobiles) liés au point M; la direction positive est, pour le premier, la direction OA, définie par l'angle ω et, pour le second, la direction perpendiculaire OB, définie par l'angle $\omega+\frac{\pi}{2}$; l'angle AOB a la même disposition géométrique que l'angle XOY. Par rapport à ces axes les coordonnées du point M sont ρ et o.

Si l'on suppose que ρ soit une fonction de ω ou que ρ et ω sont des fonctions d'un paramètre t, on définit une *courbe;* les formules précédentes donnent les expressions de x, y en fonction de t; les théories développées aux n^{os} 298, 299 s'appliquent ici; on a, en particulier,

$$dx = d\rho\cos\omega + \rho\, d\omega\cos\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$dy = d\rho\sin\omega + \rho\, d\omega\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right).$$

Ces formules expriment que dx et dy sont les sommes des projections sur les axes des x et des y des vecteurs $d\rho$ et $\rho\,d\omega$ rapportés aux axes OA, OB; la somme géométrique de ces deux derniers vecteurs a donc pour projections sur les axes OX, OY les vecteurs dx, dy; cette somme géométrique n'est pas autre chose que le vecteur ds, qui figure la différentielle de l'arc de la courbe. Inversement, puisque les directions OA, OB sont perpendiculaires, les projections de ce vecteur ds sur les axes OA et OB ont pour équivalents algébriques $d\rho$ et $\rho\,d\omega$.

De même les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\omega + \rho\frac{d\omega}{dt}\cos\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\omega + \rho\frac{d\omega}{dt}\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

expriment que les projections du vecteur vitesse sur les axes OA et OB ont pour équivalents algébriques $\frac{d\rho}{dt}$, $\rho\frac{d\omega}{dt}$; si l'on désigne par V l'angle dont il faut faire tourner l'axe OA pour le rendre parallèle à ce vecteur et de même sens, on aura

$$\cos V = \frac{\frac{d\rho}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}}, \qquad \sin V = \frac{\rho\frac{d\omega}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}}.$$

Le dénominateur commun de ces expressions est la valeur absolue de la vitesse. L'angle V, quand on prend la direction OA pour origine des angles, définit la direction qui, sur la tangente, correspond à t croissant; $\operatorname{tang} V = \rho \dfrac{d\omega}{d\rho}$ serait la pente de la tangente si l'on prenait pour axes des coordonnées les directions OA et OB; on aura

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

suivant que l'on regarde, ou non, les arcs comme croissants, quand t croît.

Si l'on prend ω pour variable indépendante et si l'on désigne par ρ' la dérivée de ρ prise par rapport à ω, on aura

$$\cos V = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}, \qquad \sin V = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}, \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'};$$

la direction sur la tangente, définie par l'angle V, correspondrait alors à ω croissant.

Si l'on choisit cette direction sur la tangente comme direction positive, on a, en désignant par α l'angle qui la définit en prenant la direction OX comme origine des angles,

$$s' = \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}, \qquad \alpha = V + \omega,$$

puis, pour le rayon de courbure,

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\dfrac{ds}{d\omega}}{1+\dfrac{dV}{d\omega}} = \frac{s'}{1+\dfrac{d}{d\omega}\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\rho}{\rho'}} = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''};$$

on obtient une formule un peu plus simple en posant $\rho = \dfrac{1}{u}$, on a alors

$$\rho' = -\frac{u'}{u^2}, \qquad \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{u}{u'}, \qquad s' = \frac{1}{u^2}\sqrt{u^2+u'^2},$$

$$\frac{d}{d\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{d}{d\omega}\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{u'} = -\frac{u'^2-uu''}{u^2+u'^2},$$

$$R = \frac{(u^2+u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u(u+u'')}.$$

EXERCICES.

341. Construire la courbe définie par les équations

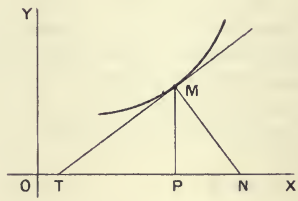
$$x = t - \frac{t^3}{3}, \qquad y = t^2.$$

Évaluer l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine, en prenant pour sens positif le sens correspondant à t croissant. Pour quelle valeur de t cet arc est-il égal à $2\sqrt{3}$?

Calculer l'expression du rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure; construire la développée.

342. Soit M un point d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires OX, OY; soient P la projection de M sur l'arc des x, T et N les points

Fig. 91.



où la tangente et la normale rencontrent cet axe; on a, en désignant par y' la valeur de la dérivée de y par rapport à x relative au point M,

$$\text{OT} = x - \frac{y}{y'}, \qquad \text{ON} = x + yy', \qquad \text{TP} = \frac{y}{y'}, \qquad \text{PN} = yy',$$

$$|\text{MT}| = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right|, \qquad |\text{MN}| = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|.$$

Les lignes TP et PN s'appellent respectivement la *sous-tangente* et la *sous-normale*.

En conservant ([1]) les notations des nos 298, 299, 300, 302 et prenant pour

---

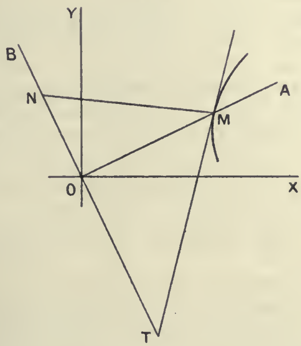
([1]) C'est ce qu'on fera pour tous les exercices du présent Chapitre où interviendront les lettres s, α, R, ρ, ω.

directions positives, sur la tangente et la normale, les directions définies par les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$, on a

$$MT = -\frac{y}{\sin\alpha}, \qquad MN = -\frac{y}{\cos\alpha}.$$

343. Soit M un point de la courbe de coordonnées polaires ρ, ω; ρ est une fonction de ω qui définit la courbe; ρ' désignera sa dérivée.

Fig. 92.



Soient OA, OB les directions définies par les angles ω, $\omega + \frac{\pi}{2}$ (n° 302). Soient MT, MN la tangente et la normale limitées à la droite indéfinie qui porte la direction OB. On a

$$OT = -\frac{\rho^2}{\rho'}, \qquad ON = \rho', \qquad TN = \rho' + \frac{\rho^2}{\rho'},$$

$$|MT| = \left|\rho\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2}}\right|, \qquad |MN| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Les lignes OT, ON s'appellent respectivement la sous-tangente et la sous-normale.

344. Rayon de courbure et développée de l'ellipse définie par les équations

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t;$$

de l'hyperbole définie par les équations

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \qquad y = b\,\mathrm{sh}\,t;$$

de la parabole définie par l'équation

$$y^2 = 2px.$$

345. Construire la spirale d'Archimède et la spirale logarithmique définies respectivement, en coordonnées polaires, par les équations

$$\rho = a\omega, \qquad \rho = ae^{m\omega},$$

où a et m désignent des constantes.

La spirale d'Archimède est la seule courbe pour laquelle la sous-normale soit constante. L'arc compté à partir du pôle est proportionnel au rayon vecteur.

Si l'on fait tourner la spirale logarithmique d'un angle quelconque autour du pôle, on obtient une courbe homothétique à la proposée, le centre d'homothétie étant le pôle. Le rayon vecteur coupe la courbe sous un angle constant; elle est la seule courbe à jouir de cette propriété. Trouver la longueur de l'arc de la courbe compté à partir du point dont les coordonnées sont $\omega = 0$, $\rho = a$.

346. Le mouvement d'un point M sur une spirale logarithmique étant défini par les formules

$$x = ae^{mt}\cos t, \qquad y = ae^{mt}\sin t,$$

montrer que l'hodographe des vitesses est semblable à la trajectoire; que le quadrilatère dont les sommets sont le point M, le centre de courbure correspondant, les extrémités de la vitesse et de l'accélération en donnant à ces vecteurs le point M pour origine, reste semblable à lui-même. Quels sont les lieux décrits par les trois sommets autres que le point M?

347. A chaque point m d'une courbe (C), dont les coordonnées x, y sont exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe compté à partir d'une origine fixe, on fait correspondre un point M de coordonnées X, Y par les formules

$$X = x + l\cos\alpha, \qquad Y = y + l\sin\alpha,$$

où l est une fonction de s; montrer que le vecteur qui a pour origine le point M et dont les projections sur la tangente et la normale ont pour équivalents algébriques

$$1 + \frac{dl}{ds}, \quad \frac{l}{R}$$

est tangent en M à la courbe décrite par ce point.

Déterminer l en fonction de s de manière que la tangente en m à la courbe (C) soit normale à la courbe lieu du point M. Cette dernière courbe est dite alors *développante* de la courbe (C). Montrer comment on peut la construire géométriquement.

Quel est son rayon de courbure? Sa développée?

348. Former les équations qui expriment les coordonnées d'un point de la développante d'un cercle en fonction de l'arc de cercle. Forme de la courbe. Rectification.

349. On a donné au n° 300 l'expression des coordonnées d'un point d'une tractrice sous la forme

$$x = t - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \qquad y = \frac{1}{\operatorname{ch} t};$$

exprimer ces coordonnées : 1° en fonction de l'angle α; 2° en fonction de l'arc s, compté à partir du point situé sur l'arc des y.

350. Une courbe définie par l'équation $y = f(x)$ est tangente à l'axe des x à l'origine des coordonnées. Quelle est, pour ce point, l'ordonnée du centre de courbure? Montrer que ce point est la limite du point d'intersection de la normale en O et d'une normale infiniment voisine. On considère deux points de même abscisse infiniment voisins du point O, pris sur la courbe et le cercle osculateur en O; montrer que la différence de leurs ordonnées est un infiniment petit du troisième ordre, quand on regarde l'abscisse comme l'infiniment petit principal.

351. Considérons deux courbes (C), (C') : Sur la courbe (C), on compte les arcs dans un sens déterminé, à partir du point A ; de même sur la courbe (C'), à partir du point A'; on regarde comme correspondant sur les courbes (C) et (C') deux points M, M' tels que les arcs AM, A'M' soient égaux; aux points M, M' les deux directions, sur les tangentes, qui correspondent aux arcs croissants, sont regardées comme correspondantes.

Laissant la courbe (C) fixe, on place la courbe (C') de manière que le point A' coïncide avec le point A et que les deux directions correspondantes des tangentes coïncident; on fait mouvoir la courbe (C') de manière qu'elle soit toujours tangente à la courbe (C) et que le point de contact, considéré comme appartenant à la courbe (C') et le même point considéré comme appartenant à la courbe (C), se correspondent toujours; c'est ce qu'on appelle faire rouler la courbe (C') sur la courbe (C).

La *cycloïde*, définie au n° 300, peut être regardée comme le lieu décrit par un point d'un cercle qui roule sur une droite; la normale à la cycloïde, en ce point, passe par le point de contact du cercle et de la droite; la tangente passe par le point du cercle diamétralement opposé.

La développée de la cycloïde est une cycloïde égale.

352. On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle mobile qui roule sur un cercle fixe. Les coordonnées d'un point quelconque de

cette courbe peuvent être mises sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} x = (r - r')\cos(t_0 + t) + r'\cos\left(t_0 + t - \dfrac{r}{r'}t\right), \\ y = (r - r')\sin(t_0 + t) + r'\sin\left(t_0 + t - \dfrac{r}{r'}t\right); \end{cases}$$

$|r|$ et $|r'|$ désignent les rayons des cercles fixe et mobile; le premier cercle a son centre à l'origine; les deux cercles sont tangents intérieurement si r et r' sont de mêmes signes, extérieurement dans le cas contraire.

Montrer que la courbe définie par les deux équations.

$$(2)\quad \begin{cases} x = A\cos(\lambda u + \mu) + A'\cos(\lambda' u + \mu'), \\ y = B\sin(\lambda u + \mu) + B'\sin(\lambda' u + \mu'), \end{cases}$$

où u est un paramètre variable et où A, B, A', B', λ, μ, λ', μ' sont des constantes, peut, dans le cas où $\lambda A + \lambda' A'$ est nul, être regardée de deux façons différentes comme une épicycloïde, soit en prenant

$$r = A + A', \quad r' = A', \qquad t_0 = \frac{A'\mu + A'\mu'}{A + A'},$$

soit en prenant

$$r = A + A', \quad r' = A, \qquad t_0 = \frac{A\mu + A'\mu'}{A + A'}.$$

Les équations (2) représentent encore une épicycloïde lorsque $\lambda A - \lambda' A'$ est nul.

Pour l'étude ultérieure de la courbe, définie par les équations (1), on pourra supposer $t_0 = 0$.

La normale à l'épicycloïde engendrée par le point P du cercle mobile passe par le point de contact des deux cercles.

Rectifier la courbe : exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction de l'angle α, de l'arc s.

La développée de l'épicycloïde engendrée par un point P du cercle mobile est homothétique à l'épicycloïde engendrée par le point Q du cercle mobile diamétralement opposé, dans ce cercle, au point P; le centre d'homothétie est à l'origine, le rapport d'homothétie est $\dfrac{r}{r - 2r'}$.

353. Soient x, y les coordonnées d'un point d'une courbe, que l'on suppose exprimées en fonction de l'arc s.

Établir les formules

$$\frac{d^n x}{ds^n} = A_n \cos\alpha - B_n \sin\alpha,$$

$$\frac{d^n y}{ds^n} = A_n \sin\alpha + B_n \cos\alpha,$$

où A_n, B_n désignent des fonctions de s définies par les formules

$$A_{n+1} = \frac{dA_n}{ds} - \frac{B_n}{R}, \qquad B_{n+1} = \frac{dB_n}{ds} + \frac{A_n}{R}$$

$$A_1 = 1, \qquad B_1 = 0,$$

en sorte qu'on a

$$A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{R^2}, \quad A_4 = \frac{3R'}{R^2}, \quad \ldots, \quad \left(R' = \frac{dR}{ds}\right)$$

$$B_2 = \frac{1}{R}, \quad B_3 = -\frac{R'}{R^2}, \quad B_4 = \frac{3R'^2 - RR'' - 1}{R^3}, \quad \ldots.$$

Si l'on suppose que les coordonnées x, y soient développables suivant les puissances de s, on aura en désignant par x_0, y_0, α_0, a_n, b_n, r, r', ... les valeurs de x, y, α, A_n, B_n, R, R', ... pour $s = 0$,

$$x = x_0 + X\cos\alpha_0 + Y\cos\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y = y_0 + X\sin\alpha_0 + Y\sin\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

en posant

$$X = a_1 \frac{s}{1} + a_2 \frac{s^2}{1.2} + a_3 \frac{s^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Y = b_1 \frac{s}{1} + b_2 \frac{s^2}{1.2} + b_3 \frac{s^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Ces dernières formules qui peuvent s'écrire explicitement

$$X = s - \frac{s^3}{6r^2} + \frac{r's^4}{8r^3} + \ldots,$$

$$Y = \frac{s^2}{2r} - \frac{r's^3}{6r^2} + \frac{2r'^2 - rr'' - 1}{24r^3}s^4 + \ldots$$

peuvent être regardées comme exprimant, en fonction de l'arc s, les coordonnées d'un point d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires, l'origine des coordonnées O coïncidant avec l'origine des arcs sur la courbe et la tangente en ce point étant prise pour axe des X.

Trouver les premiers termes du développement, suivant les puissances de s, de $\sqrt{X^2 + Y^2}$, de $\tang\alpha$, de α, ...

354. On se donne une courbe et sur cette courbe un point fixe O; soient M un point de la courbe infiniment voisin du point O, P la projection de M sur la tangente en O, T le point où cette tangente rencontre la normale en M, K le point où la normale en M rencontre la normale en O, C le centre de courbure relatif au point O, on demande, en regardant l'arc OM comme l'infiniment petit principal, d'évaluer les parties principales des infiniment petits

$$\mathrm{OM},\quad \mathrm{PM},\quad \mathrm{OT},\quad \mathrm{TM},\quad \mathrm{CK},\quad \operatorname{arc}\mathrm{OM}-\mathrm{OM},$$
$$\mathrm{OK}-\mathrm{MK},\quad \mathrm{OT}+\mathrm{TM}-\mathrm{OM},\quad \text{angle}\,\mathrm{TOM},\quad \text{angle}\,\mathrm{MTP},$$
$$\text{angle}\,\mathrm{TMO},\quad \text{angle}\,\mathrm{TOM}-\text{angle}\,\mathrm{TMO}.$$

355. Soient f, g, h trois polynomes homogènes en x, y, z, du même degré. Démontrer que le jacobien de f, g, h s'annule ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre pour tout système de valeurs de x, y, z qui annulent f, g, h.

356. Déterminer la constante a de manière que le hessien du polynome

$$x^3+y^3+z^3-3a\,xyz$$

soit divisible par ce polynome; a étant ainsi déterminé, montrer que le polynome $x^3+y^3+z^3-3a\,xyz$ se décompose en facteurs linéaires.

357. Même question pour le polynome

$$2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-a(x^4+y^4+z^4).$$

CHAPITRE XVIII.

NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL.

§ 1. — INTÉGRALE DÉFINIE.

303. On a indiqué au n° 26 la définition de l'aire d'une courbe, et l'on a montré au n° 222 comment on pouvait calculer l'aire d'une courbe comprise entre les deux parallèles à l'axe des y dont les équations sont $x = a$, $x = b$, l'axe des x lui-même et la courbe dont l'équation est $y = f(x)$, lorsque $f(x)$ est une fonction, continue dans l'intervalle (a, b), dont on connaît une fonction primitive $F(x)$: cette aire est $F(b) - F(a)$, en adoptant certaines conventions relatives aux signes, qui ont été précisées au n° 222.

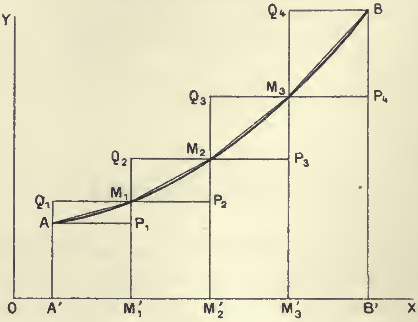
Je vais maintenant montrer comment l'on peut évaluer approximativement une pareille aire, lors même qu'on ne connaît pas de fonction primitive de $f(x)$; nous parviendrons ainsi à l'importante notion de l'*intégrale définie*.

Je supposerai d'abord $a < b$; je supposerai en outre, pour éviter toute complication concernant les signes, que dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ soit positive. Je supposerai enfin que, dans ce même intervalle, la fonction $f(x)$ varie toujours dans le même sens; je raisonnerai dans le cas où elle est croissante.

Intercalons entre les nombres a, b les nombres croissants x_1, x_2, ..., x_{n-1}; en d'autres termes, subdivisons l'intervalle (a, b) en n intervalles partiels (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b). Soient A, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, B les points de la courbe définie par l'équation $y = f(x)$, dont les abscisses sont a_1, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b; dans la figure on a pris $n = 4$.

Par chacun des points A, M_1, ..., M_{n-1}, B on a mené, jusqu'à l'axe des x, les parallèles AA′, $M_1M'_1$, ..., $M_{n-1}M'_{n-1}$, BB′ à l'axe des y et l'on a figuré les rectangles $A'AP_1M'_1$, $M'_1M_1P_2M'_2$, ..., $M'_{n-1}M_{n-1}P_nB'$ dont aucun point n'est extérieur au contour (S)

Fig. 93.



formé par la droite $A'A$, l'arc de courbe AB, les droites BB', $B'A'$, en sorte que le polygone $A'AP_1M_1\ldots M_{n-1}P_nB'$, constitué par la réunion de tous ces rectangles, n'a aucun point extérieur à (S); je désignerai ce polynome par ($\mathfrak{P}$) et son aire par $\mathfrak{P}$. On a figuré aussi les rectangles $A'Q_1M_1M'_1$, $M'_1Q_2M_2M'_2$, ..., $M'_{n-1}Q_nBB'$ dont les sommets Q_1, Q_2, ..., Q_n sont extérieurs au contour (S), lequel a tous ses points situés à l'intérieur ou sur le périmètre du polygone $A'Q_1M_1Q_2\ldots Q_nBB'$, formé par la réunion des rectangles; je désignerai par ($\mathfrak{Q}$) ce dernier polygone et par $\mathfrak{Q}$ son aire. Le polygone ($\mathfrak{P}$) est ce qu'on a appelé au n° 26 un polygone intérieur à (S), le polygone ($\mathfrak{Q}$) est extérieur à (S).

La différence $\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}$ n'est autre chose que la somme des aires des rectangles $AQ_1M_1P_1$, $M_1Q_2M_2P_1$, ..., $M_{n-1}Q_nBP_n$ que la courbe traverse diagonalement.

L'aire S limitée par le contour (S) est plus grande que $\mathfrak{P}$, plus petite que $\mathfrak{Q}$; $\mathfrak{P}$ est une valeur approchée de S par défaut, $\mathfrak{Q}$ est une valeur approchée par excès; pour l'un ou l'autre nombre l'erreur est moindre que $\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}$; on prévoit qu'en prenant les nombres x_1, x_2, ..., x_n suffisamment approchés, cette erreur pourra être rendue aussi petite que l'on voudra : c'est ce qui va d'ailleurs être établi rigoureusement.

Remarquons en passant que cette démonstration même donnera à la notion de l'aire S une entière clarté. On a expliqué au n° 26 que cette aire devait être définie comme plus grande que l'aire de tout polygone intérieur à (S), comme plus petite que l'aire de tout polygone extérieur à (S), et que cette double inégalité suffisait à définir le nombre S d'une manière précise, pourvu qu'on ait établi qu'il se trouve des polygones extérieurs et des polygones intérieurs dont les aires aient entre elles une différence moindre que tel nombre positif que l'on voudra : or c'est ce qu'on va prouver pour les polygones ($\mathfrak{P}$), ($\mathfrak{Q}$) dont on vient de décrire la construction.

En pensant à l'expression des aires des rectangles dont la réunion forme, d'une part, le polygone ($\mathfrak{P}$), d'autre part, le polygone ($\mathfrak{Q}$), on voit de suite qu'on a

$$\mathfrak{P} = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

$$\mathfrak{Q} = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(b),$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P} = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots \\ + (b - x_{n-1})[f(b) - f(x_{n-1})].\end{aligned}$$

Désignons par η la plus grande des différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $b - x_{n-1}$; puisque ces différences sont toutes positives, comme aussi les différences $f(x_1) - f(a)$, $f(x_2) - f(x_1)$, ..., $f(b) - f(x_{n-1})$, on aura évidemment

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{P} \leqq \eta[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})].$$

Or la quantité entre crochets n'est autre chose que $f(b) - f(a)$; en sorte que l'on a

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{P} \leqq \eta[f(b) - f(a)].$$

Cette inégalité apparaît d'ailleurs en imaginant que les petits rectangles dont la somme est égale à $\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}$ soient empilés les uns au-dessus des autres de manière que leurs côtés de gauche soient tous sur une parallèle à l'axe des y, ils seront tous intérieurs au rectangle ayant deux côtés (parallèles à l'axe des y) de longueur $f(b) - f(a)$ et deux côtés (parallèles à l'axe des x) de longueur η.

Il suffit de prendre les nombres x_1, x_2, ..., x_{n-1} de manière que la plus grande des différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $b - x_{n-1}$ soit égale ou inférieure à $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, pour être sûr que la différence $\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}$ soit moindre que le nombre positif ε, que l'on peut choisir arbitrairement. C'est ce que l'on avait annoncé.

On exprime ce même résultat en disant que S est la limite des nombres $\mathfrak{P}$, ou $\mathfrak{Q}$, quand on fait grandir n indéfiniment de manière que les intervalles partiels dans lesquels on a divisé l'intervalle (a, b) décroissent indéfiniment. Cette façon de parler demande quelque explication :

A chaque mode de décomposition de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels, par l'intercalation de nombres intermédiaires x_1, x_2, ..., x_{n-1}, correspond un polygone $(\mathfrak{P})$, un polygone $(\mathfrak{Q})$, un nombre η, à savoir la plus grande des différences entre deux consécutifs des nombres a, x_1, ..., x_{n-1}, b. Quand on change le mode de décomposition, les nombres $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, η varient; il faut entendre que la différence entre le nombre fixe S et les nombres variables $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ peut être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu que η soit suffisamment petit.

Si l'on considère le mode spécial de décomposition de l'intervalle (a, b) qui résulte de l'intercalation des nombres croissants x_1, x_2, ..., x_{n-1} entre a et b, et si l'on désigne par ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n des nombres qui appartiennent respectivement aux intervalles (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b), il est clair que le nombre

$$\Sigma = (x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi_n),$$

qui mesure évidemment la somme des aires de n rectangles respectivement compris entre les rectangles dont se composent $(\mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{Q})$, est compris entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, en sorte que ce nombre peut, lui aussi, être regardé comme une valeur approchée de S avec une erreur moindre que $\frac{\eta}{f(b) - f(a)}$.

304. On peut aussi, dans la somme Σ, remplacer les nombres $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$ par des nombres f_1, f_2, ..., f_n qui en diffèrent très peu; on aura ainsi une somme

$$\Sigma' = (x_1 - a)f_1 + (x_2 - x_1)f_2 + \ldots + (b - x_{n-1})f_n,$$

qui, pourvu que les différences

$$\varepsilon_1 = f(\xi_1) - f_1, \quad \varepsilon_2 = f(\xi_2) - f_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n = f(\xi_n) - f_n$$

soient aussi petites qu'on le veut quand les intervalles partiels sont suffisamments petits, différera aussi peu qu'on le voudra de Σ ou de S et fournira ainsi une valeur aussi approchée qu'on voudra de S, toujours sous la condition que les intervalles partiels soient assez nombreux et assez petits. La différence $\Sigma - \Sigma'$ est en effet égale à

$$(x_1 - a)\varepsilon_1 + (x_2 - x_1)\varepsilon_2 + \ldots + (b - x_{n-1})\varepsilon_n.$$

Puisque toutes les différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $b - x_{n-1}$ sont positives, on aura, en désignant par ε la plus grande des valeurs absolues des nombres ε_1, ε_2, ..., ε_n,

$$|\Sigma - \Sigma'| < \varepsilon(x_1 - a + x_2 - x_1 + \ldots + b - x_{n-1}) \quad \text{ou} \quad \varepsilon(b - a);$$

il suffit de prendre les intervalles assez petits pour que $\varepsilon(b - a)$ soit inférieur au nombre qu'on veut. La proposition, dont on verra l'utilité dans les applications, est démontrée.

Il n'est pas inutile de faire remarquer ce qu'il y a de général dans le procédé que l'on a employé pour obtenir des valeurs approchées de l'aire S. On a commencé par la séparer en bandes étroites par des parallèles à l'axe des y : S est la somme des aires de ces bandes; à chaque bande on a ensuite substitué un petit rectangle soit intérieur, soit extérieur : la somme des rectangles intérieurs fournit une valeur approchée de S par défaut, la somme des rectangles extérieurs fournit une valeur approchée par excès.

La demi-somme des rectangles intérieurs et extérieurs, ou, ce qui revient au même, la somme des trapèzes

$$A'AM_1M'_1, \quad M'_1M_1M_2M'_2, \quad \ldots, \quad M'_{n-1}M_{n-1}BB',$$

fournirait évidemment une meilleure approximation : l'erreur commise serait la somme des aires manifestement très petites comprises entre la courbe et les cordes MM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$. Dans le cas de la figure, où la concavité de la courbe est tournée vers le haut, la somme des trapèzes fournirait évidemment une valeur approchée de S par excès; ce serait l'inverse si la convexité était tournée vers le haut. La valeur approchée de l'aire, ainsi obtenue, quand on suppose les bases de tous les trapèzes égales à $\frac{b-a}{n}$, est

$$\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right]$$

Je reviendrai plus tard sur cette formule, pour en donner des applications numériques.

On a ensuite expliqué qu'on pouvait substituer aux petites bandes d'autres rectangles que les rectangles intérieurs ou extérieurs, ayant mêmes bases que ces derniers et des hauteurs peu différentes : une idée assez naturelle et qui fournit une assez bonne approximation consiste à prendre pour hauteur de chaque petit rectangle l'ordonnée de la courbe relative au milieu de l'intervalle; en supposant encore tous ces intervalles égaux à $\frac{b-a}{n}$, on parvient ainsi à l'expression approchée de l'aire

$$\frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right].$$

Au lieu de décomposer l'aire S en petites bandes qu'on remplace par des rectangles ou des trapèzes, on aurait pu la décomposer en un grand nombre de petites parties $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, auxquelles on aurait substitué des valeurs approchées $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$, en commettant les erreurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si l'on désigne par β la valeur absolue de la plus grande des erreurs *relatives*

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\sigma_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_n}{\sigma_n},$$

l'erreur commise en substituant la somme $\sigma'_1+\sigma'_2+\ldots+\sigma'_n$ à $S=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n$ sera moindre que

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|<\beta(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n)<\beta S;$$

si donc on peut s'arranger pour que β soit plus petit que tel nombre qu'on voudra, on pourra, de cette façon, obtenir S avec telle approximation qu'on voudra.

305. Laissons ces généralités pour revenir aux modes d'évaluation de S que nous avons considérés tout d'abord, et nous affranchir de quelques restrictions imposées à la fonction $f(x)$.

On a supposé que cette fonction variait toujours dans le même sens quand x croissait de a à b; s'il n'en était pas ainsi, si l'ordonnée de la courbe allait tantôt en croissant, tantôt en décroissant, mais si l'on pouvait décomposer l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels tels que, dans chacun d'eux, l'ordonnée allât toujours en croissant ou toujours en décroissant, ou restât toujours constante, il est clair que le raisonnement du n° 303 s'appliquerait à chacun des intervalles partiels. L'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des y, serait alors la somme d'aires partielles relatives chacune à l'un des intervalles partiels et il est clair qu'elle pourrait être encore obtenue approximativement par l'une ou l'autre des formules

$$(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1}),$$
$$(x_1-a)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+\ldots+(b-x_{n-1})f(b),$$
$$(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\ldots+(b-x_{n-1})f(\xi_n),$$

en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des nombres croissants intercalés entre a et b, par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ des nombres appartenant respectivement aux intervalles (a, x_1), (x_2, x_1), $\ldots$, (x_{n-1}, b), et cela avec une approximation aussi grande qu'on voudra, pourvu que les nombres intercalaires soient suffisamment nombreux, et les différences x_1-a, x_2-x_1, $\ldots$, $b-x_{n-1}$, suffisamment petites.

On a supposé que la fonction $f(x)$ était toujours positive dans l'intervalle (a, b); s'il n'en est pas ainsi, augmentons toutes les ordonnées de la courbe d'un même nombre positif A assez grand pour que, dans l'intervalle (a, b), la fonction $A+f(x)$ soit toujours positive; cela reviendra à faire subir à la courbe primitive une translation parallèle à l'axe des y, à l'élever de manière que toutes ses ordonnées soient positives. L'aire primitive S, délimitée par la courbe $y=f(x)$, l'axe des x et les deux parallèles à l'axe des y, se trouve alors augmentée d'un rectangle dont la surface est $A(b-a)$. Il est à peine besoin de dire que, pour l'évaluation du nombre S, on doit adopter les conventions relatives aux signes que l'on a précisées au n° 222, c'est-à-dire regarder comme positives les parties de l'aire qui sont au-dessus de l'axe des x, comme négatives celles qui sont au-dessous.

Soit maintenant $\Sigma = A(b-a) + S$ l'aire de la courbe limitée par l'axe des x, la courbe dont l'équation est $y = A + f(x)$, et les deux parallèles à l'axe des y. En supposant les nombres intercalaires croissants $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ assez nombreux et assez rapprochés, le nombre

$$(x_1-a)[A+f(\xi_1)] + (x_2-x_1)[A+f(\xi_2)] + \ldots + (b-x_{n-1})[A+f(\xi_n)]$$

différera aussi peu qu'on voudra de Σ : or, ce nombre est la somme de

$$A(x_1-a+x_2-x_1+\ldots+b-x_{n-1}) = (b-a)A$$

et de

$$(x_1-a)f(\xi_1) + (x_2-x_1)f(\xi_2) + \ldots + (b-x_{n-1})f(\xi_n);$$

par conséquent, dans ce cas encore, cette dernière quantité diffère aussi peu qu'on le veut de S, qui est égal à $\Sigma - A(b-a)$.

Supposons enfin $a > b$; intercalons entre les nombres a, b les nombres décroissants $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; les nombres $b, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, a$ formeront une suite croissante, et en désignant toujours par $\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_1$ des nombres quelconques appartenant aux intervalles $(b, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_{n-2}), \ldots, (x_1, a)$, le nombre

$$(x_{n-1}-b)f(\xi_n) + (x_{n-2}-x_{n-1})f(\xi_{n-1}) + \ldots + (a-x_1)f(\xi_1),$$

pourvu que n soit assez grand et que les différences positives $x_{n-1}-b$, $x_{n-2}-x_{n-1}, \ldots, a-x_1$, soient assez petites, différera très peu de l'aire limitée par l'axe des x, la courbe et les deux parallèles à l'axe des y, en regardant toujours comme positives les portions de cette aire qui sont situées au-dessus de l'axe des x et comme négatives celles qui sont au-dessous; le nombre

$$(x_1-a)f(\xi_1) + (x_2-x_1)f(\xi_2) + \ldots + (b-x_{n-1})f(\xi_n)$$

différera donc très peu de la même aire, changée de signe. Or, dans le cas où l'on suppose $a > b$, la convention adoptée au n° **222** consiste précisément à regarder comme positives les parties de l'aire situées *au-dessous* de l'axe, comme négatives celles qui sont *au-dessus*. Si donc on continue d'adopter cette convention, l'expression précédente représentera, dans tous les cas, l'aire considérée, avec l'approximation qu'on voudra, pourvu que n soit assez grand et que les différences $x_1-a, x_2-x_1, \ldots, b-x_{n-1}$, toutes positives ou toutes négatives, soient suffisamment petites en valeur absolue; l'expression précédente, par conséquent, différera aussi peu qu'on voudra de l'expression $F(b) - F(a)$, où $F(x)$ désigne une fonction primitive de $f(x)$.

306. Ce dernier résultat peut d'ailleurs s'établir directement : on a, en effet, en supposant que les nombres $a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$ se suivent par ordre de grandeur croissante ou décroissante,

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(a) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(b) - F(x_{n-1}),$$

ou, en appliquant la formule des accroissements finis,

$$F(b) - F(a) = (x_1 - a)f(\xi'_1) + (x_2 - x_1)f(\xi'_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi'_n);$$

$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ désignent des nombres convenablement choisis, appartenant respectivement aux intervalles (a, x_1) $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$; la différence δ entre le second membre de l'égalité précédente et l'expression

$$(x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi_n)$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignent des nombres quelconques appartenant respectivement, comme $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, aux intervalles (a_0, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$, est égale à

$$(x_1 - a)[f(\xi'_1) - f(\xi_1)] + (x_2 - x_1)[f(\xi'_2) - f(\xi_2)] + \ldots$$
$$+ (b - x_{n-1})[f(\xi'_n) - f(\xi_n)].$$

Or, pourvu que les intervalles partiels (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, b) soient suffisamments petits, les différences

$$f(\xi'_1) - f(\xi_1), \quad f(\xi'_2) - f(\xi_2), \quad \ldots, \quad f(\xi'_n) - f(\xi_n)$$

peuvent être supposées moindres, en valeur absolue, que tel nombre positif que l'on voudra ([1]). Les quantités $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $b - x_{n-1}$ sont toutes positives ou toutes négatives : dans les deux cas,

([1]) Ceci est vrai, pourvu que la fonction $f(x)$ soit continue, et a été démontré au n° 215 dans le cas où cette fonction, dans l'intervalle (a, b), admet une dérivée qui reste, en valeur absolue, moindre qu'un nombre positif fixe.

on a

$$|\delta| \leq \alpha\,|x_1 - a + x_2 - x_1 + \ldots + b - x_{n-1}| \quad \text{ou} \quad \alpha\,|b-a|;$$

pour que la différence entre $F(b) - F(a)$ et

$$(x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n)$$

soit moindre que le nombre positif β, arbitrairement donné, il suffira donc de prendre

$$\alpha < \frac{\beta}{|b-a|}.$$

307. On dit que la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle (a, b), est *intégrable* dans cet intervalle s'il existe un nombre S jouissant de la propriété suivante :

Quels que soient les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ intermédiaires entre a et b et rangés par ordre de grandeur croissante si l'on a $a < b$, par ordre de grandeur décroissante si l'on a $a > b$, quels que soient les nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ appartenant aux intervalles (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b), la différence entre S et l'expression

$$(x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n)$$

est moindre, en valeur absolue, que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que les différences, toutes positives ou toutes négatives, $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $b - x_{n-1}$ soient moindres en valeur absolue qu'un nombre positif, convenablement choisi, d'après ε.

Le nombre S, s'il existe, se représente par le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

qui s'énonce *somme de a à b de* $f(x)\,dx$.

Le signe $\int$ (somme) est un S déformé, il rappelle qu'on a affaire à la *somme* des *éléments*

$$(x_1 - a) f(\xi_1), \quad (x_2 - x_1) f(\xi_2), \quad \ldots, \quad (b - x_{n-1}) f(\xi_n);$$

dans le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$, l'élément de l'intégrale, $f(x)\,dx$, est la trace de ces éléments; dx, en particulier, où la lettre d est la lettre initiale du mot *différence*, est la trace des différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $b - x_{n-1}$; dx n'est pas la différentielle de la variable x, définie comme on l'a fait au n° 290; toutefois, on verra bientôt qu'il est avantageux d'employer le même symbole ici et pour cette notation différentielle, qu'on a expliquée au Chapitre XVII.

Les nombres a et b sont la *limite inférieure* et la *limite supérieure* de l'*intégrale définie*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

L'intervalle (a, b) est l'*intervalle d'intégration*.

Supposons qu'on prenne les n intervalles partiels (a, b), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b) dans lesquels on subdivise l'intervalle (a, b) pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale définie, égaux à $\frac{b-a}{n} = h$; on voit que la valeur de l'intégrale définie sera la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{b-a}{n}\left\{ f(x) + f(x+h) + f(x+2h) + \ldots + f[x+(n-1)h] \right\}$$

lorsque n augmente indéfiniment et que, par conséquent, h tend vers 0. L'existence de cette limite résulte de celle de l'intégrale définie.

On appelle *valeur moyenne* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) la limite de l'expression

$$\frac{f(a) + f(a+h) + \ldots + f[a+(n-1)h]}{n},$$

quand n croît indéfiniment (et que h tend vers 0), cette limite est évidemment égale à

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

308. Il résulte des explications données au commencement du précédent numéro que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

c'est-à-dire le nombre S dont s'approche la somme

$$(x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n),$$

dans les conditions que l'on a dites, existe bien quand la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et que cet intervalle peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels, dans chacun desquels la fonction est soit croissante, soit décroissante, soit constante; l'intégrale est alors égale à $F(b) - F(a)$, en désignant par $F(x)$ une fonction admettant $f(x)$ pour dérivée dans l'intervalle (a, b).

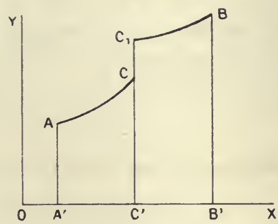
Si l'on avait $a = b$, l'intégrale définie serait regardée comme nulle.

On prouve l'existence de cette intégrale définie dans des cas beaucoup plus étendus : en particulier, on démontre qu'une fonction $f(x)$ est intégrable dans tout intervalle (a, b) où elle est continue, dans tout intervalle où, sans même être continue, elle est soit croissante, soit décroissante.

La notion géométrique d'aire, qui a été mon point de départ, suffit pour qu'on se rende compte que la continuité de la fonction $f(x)$, dans l'intervalle (a, b), n'est pas nécessaire pour que l'intégrale définie ait un sens.

Supposons, en effet, que la fonction $f(x)$ soit représentée de a à c

Fig. 94.



par l'arc AC, de c à b par l'arc C_1B, en sorte que, pour x un peu plus petit que c, la fonction $f(x)$ soit très voisine de $C'C$ et que, pour x un peu plus grand que c, cette même fonction soit très voisine de $C'C_1$; le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ représente naturellement l'aire limitée par le contour $A'ACC_1BB'$, aire qui est la somme des aires

A'ACC', C'C₁BB', représentées respectivement par

$$\int_a^c f(x)\,dx, \qquad \int_c^b f(x)\,dx.$$

Il n'importe pas que, pour $x = c$, on attribue à la fonction $f(x)$ la valeur C'C ou la valeur $C'C_1$, puisque cette valeur, quand on envisage l'intégrale définie comme limite d'une somme, n'intervient que dans le dernier élément de $\int_a^c f(x)\,dx$, ou dans le premier élément de $\int_c^b f(x)\,dx$: ces deux éléments, qu'on peut supposer aussi petits qu'on veut, n'ont pas d'influence sur la valeur exacte des intégrales. On peut, dans la première intégrale partielle, regarder C'C comme la valeur de $f(x)$ pour $x = c$ et, dans la seconde, adopter la valeur $C'C_1$. On ramène ainsi, par une décomposition de l'intervalle (a, b) en deux intervalles partiels (a, c), (c, b), l'intégrale proposée, où le signe d'intégration $\int$ portait sur une fonction discontinue $f(x)$, à deux intégrales où ce signe porte sur une fonction continue dans l'intervalle (a, c) et sur une fonction continue dans l'intervalle (c, b). La seconde fonction ne *continue* pas la première.

Les mêmes considérations s'appliqueraient évidemment au cas où la fonction $f(x)$ admettrait, entre a et b, un nombre fini de discontinuités. Elles supposent toutefois essentiellement que la fonction $f(x)$ soit finie; le cas où cette fonction devient infinie dans l'intervalle (a, b) demande une étude particulière; j'en donnerai plus loin quelques exemples simples.

309. Bien que quelques-uns des théorèmes qui suivent n'impliquent pas cette restriction, je supposerai que les fonctions sur lesquelles porte le signe $\int$ soient continues dans l'intervalle d'intégration et satisfassent aux conditions énoncées plus haut, sous lesquelles l'intégrale définie apparaît nettement comme l'aire d'une courbe.

I. *On a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1}$$

Cette proposition résulte immédiatement de la définition, soit qu'on regarde l'intégrale comme limite d'une somme, soit qu'on se reporte aux conventions du n° 222 relatives aux aires ; au reste, si l'on désigne par $F(x)$ une fonction primitive de $f(x)$, l'égalité précédente équivaut à celle-ci :

$$F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)].$$

II. *On a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Cette proposition résulte encore immédiatement de la définition, au moins lorsqu'on suppose $a < c < b$, soit qu'on se reporte à la règle pour additionner des aires contiguës, soit qu'on regarde les intégrales comme des limites de sommes, en faisant figurer le nombre c parmi les nombres intermédiaires à a, b que l'on introduit pour évaluer la première intégrale. Ces démonstrations s'appliqueraient aussi au cas où l'on aurait $a > c > b$. D'ailleurs, si l'on a $a < b < c$, on aura (1)

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c ;$$

mais, à cause de $\int_b^c = -\int_c^b$, cette égalité entraîne celle qu'on veut démontrer; même démonstration si l'on a $c < a < b$, etc. Au reste, la formule générale, en introduisant la fonction primitive $F(x)$, équivaut à celle-ci

$$F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)].$$

Quels que soient les nombres a, b, c la formule (2) peut s'écrire sous la forme plus symétrique

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

---

(1) Dans les formules de ce genre, on se dispense souvent d'écrire $f(x)\,dx$ sous les signes $\int$, quand aucune confusion n'est à craindre : il est bien entendu que les signes $\int$ doivent porter sur la même fonction $f(x)$.

III. *Si dans l'intervalle* (a, b) *la fonction* $f(x)$ *est toujours positive, l'intégrale définie*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est positive ou négative suivant que l'on a $b > a$ *ou* $b < a$.

Cela résulte encore de la définition, ou de ce que la fonction primitive $F(x)$ croît avec x. L'intégrale est évidemment nulle si la fonction $f(x)$ est constamment nulle dans l'intervalle (a, b); si l'on sait seulement que $f(x)$ est, dans cet intervalle, positive ou nulle, on peut affirmer que l'intégrale est positive ou nulle; on peut alors affirmer que l'intégrale est positive s'il y a un intervalle (α, β) compris dans l'intervalle (a, b) à l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ ne s'annule pas.

IV. *Si* A *et* B *sont des constantes, on a*

$$(4) \qquad \int_a^b [A\,f(x) + B\,g(x)]\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx.$$

Cette proposition apparaît immédiatement en regardant l'intégrale comme la limite d'une somme : elle résulte alors de l'identité

$$\begin{aligned}(x_1 - a)\,[A\,f(\xi_1) + B\,g(\xi_1)] &+ (x_2 - x_1)\,[A\,f(\xi_2) + B\,g(\xi_2)] + \ldots \\ = \quad & A[(x_1 - a)\,f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,f(\xi_2) + \ldots] \\ & + B[(x_1 - a)\,g(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,g(\xi_2) + \ldots].\end{aligned}$$

Elle résulte aussi de ce que $A\,F(x) + B\,G(x)$ est une fonction primitive de $A\,f(x) + B\,g(x)$ si $F(x)$ et $G(x)$ sont des fonctions primitives de $f(x)$ et de $g(x)$.

L'égalité (4) contient, comme cas particulier, les égalités suivantes :

$$\int_a^b A\,f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

V. *Si, pour toutes les valeurs de* x *appartenant à l'intervalle*

(a, b), la fonction $f(x)$ vérifie les inégalités

$$m \leqq f(x) \leqq \mathrm{M},$$

où m et M sont des constantes, on a, en supposant $a < b$,

$$(5) \qquad m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \mathrm{M}(b-a);$$

en effet, les intégrales

$$\int_a^b [f(x)-m]\,dx, \qquad \int_a^b [\mathrm{M}-f(x)]\,dx$$

sont positives ou nulles; la première est certainement positive, s'il y a un intervalle (α, β) compris dans (a, b) où la fonction $f(x)$ reste supérieure à m; de même pour la seconde, s'il y a un intervalle où la fonction reste inférieure à M. Les égalités

$$\int_a^b [f(x)-m]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - m(b-a),$$
$$\int_a^b [\mathrm{M}-f(x)]\,dx = \mathrm{M}(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx$$

permettent d'achever la démonstration.

On a admis (nº 215) que la fonction continue $f(x)$ admettait dans l'intervalle (a, b) une plus grande valeur et une plus petite valeur et qu'elle passait par toutes les valeurs intermédiaires : le théorème s'applique en prenant pour m et M cette plus petite et cette plus grande valeur; on voit ainsi que le théorème qu'on vient d'établir peut être remplacé par le suivant : il y a un nombre ξ appartenant à l'intervalle (a, b) [1], tel que l'on ait

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Cette égalité ne suppose pas $a < b$.

---

[1] Je laisse de côté la démonstration de ce fait que ξ peut être supposé différent de a et de b; elle est aisée pour les fonctions auxquelles je me borne, qui sont, dans des intervalles finis, ou croissantes, ou décroissantes, ou constantes.

Si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, l'égalité (6) équivaut à l'égalité

$$F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a),$$

qui n'est autre chose que la formule des accroissements finis.

Je laisse au lecteur le soin d'interpréter géométriquement ces résultats quand on regarde l'intégrale définie comme représentant une aire.

Je lui laisse aussi le soin d'établir la proposition plus générale qu'exprime l'égalité

$$(7) \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx,$$

où ξ désigne un nombre appartenant à l'intervalle (a, b) et où $g(x)$ est une fonction qui garde toujours le même signe dans cet intervalle. La démonstration se fait aisément en considérant les intégrales

$$\int_a^b g(x)[f(x)-m]\,dx, \quad \int_a^b g(x)[M-f(x)]\,dx,$$

dont le signe s'aperçoit de suite.

310. On a vu au n° 229 que, si la série entière en x

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est absolument convergente dans l'intervalle (α, β), sa somme $f(x)$ avait pour fonction primitive la somme $F(x)$ de la série

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

qui est absolument convergente dans le même intervalle; si a, b appartiennent à cet intervalle, l'égalité

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

entraîne les suivantes :

$$\int_a^b f(x)\,dx = a_0(b-a) + a_1\frac{b^2-a^2}{2} + \ldots + a_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} + \ldots$$
$$= \int_a^b a_0\,dx + \int_a^b a_1 x\,dx + \ldots + \int_a^b a_n x^n\,dx + \ldots.$$

D'une façon générale, si $f(x)$ est la somme d'une série

$$(f) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions de x, et si l'on a

$$(1) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \ldots,$$

la série qui figure dans le second membre étant convergente, on dit que la série (f) est *intégrable* terme à terme.

Il en est ainsi lorsque les nombres a, b appartiennent à un intervalle (A, B) tel que, dans cet intervalle, la fonction $f_n(x)$ soit continue et moindre en valeur absolue qu'un nombre positif α_n, la série

$$(\alpha) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

étant convergente.

La démonstration est immédiate en admettant que les fonctions $f(x)$, $f_n(x)$ soient intégrables. Désignons, en effet, par $R_n(x)$ et ρ_n les restes respectifs des séries (f) et (α), limitées à leurs n^{iemes} termes.

On a, d'une part, $|R_n(x)| < \rho_n$ dans l'intervalle (A, B), et, d'autre part,

$$\int_a^b R_n(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - f_1(x) - f_2(x) - \ldots - f_n(x)]\,dx.$$

La valeur absolue du premier membre est moindre que

$$\int_a^b \rho_n\,dx = (b-a)\rho_n;$$

il en est de même de la valeur absolue du second membre ou de

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx - \ldots - \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

c'est-à-dire de la différence entre le premier membre de l'équation (1) et la somme des n premiers termes de la série qui figure dans le second membre. Cette différence devenant aussi petite qu'on veut, en valeur absolue, quand n augmente indéfiniment, la convergence de la série, l'affirmation que sa somme est égale à $\int_a^b f(x)$, sont établies. Enfin l'expression $(b-a)\rho_n$ fournit une limite supérieure de la valeur absolue du reste.

311. L'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dépend de ses limites a, b. Si on la considère comme la différence $F(b) - F(a)$ entre les valeurs que prend pour $x = b$ et $x = a$ la fonction primitive $F(x)$ de $f(x)$, il est clair que sa dérivée par rapport à sa limite supérieure est $f(b)$ (¹), que sa dérivée par rapport à sa limite inférieure est $-f(a)$.

Lorsqu'on regarde une intégrale définie comme une fonction de sa limite supérieure, par exemple, il arrive souvent qu'on la représente par un symbole tel que

$$\int_a^x f(x)\,dx;$$

(¹) On arrive aisément à ce résultat sans passer par l'intermédiaire de la fonction primitive $F(x)$; si, en effet, on donne à b un accroissement β, l'accroissement correspondant de l'intégrale définie est

$$\int_a^{b+\beta} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^{b+\beta} f(x)\,dx = \beta f(\xi),$$

en désignant par ξ un nombre appartenant à l'intervalle $(b, b+\beta)$. Le rapport de l'accroissement de l'intégrale à β est $f(\xi)$; il a pour limite $f(b)$ quand β tend vers o. Ce raisonnement ne diffère pas de celui du n° 222, qui conduit à l'évaluation de l'aire.

il faut observer que la lettre x figure dans ce symbole avec deux sens essentiellement différents, comme *variable d'intégration* dans $f(x)$, et comme limite supérieure de l'intégrale définie. Il doit être bien entendu que le précédent symbole a le sens de

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

où l'on a remplacé b par x : c'est l'aire limitée par la courbe représentative de la fonction, l'axe des x, les deux parallèles à l'axe des y dont tous les points ont pour abscisses a pour la première, x pour la seconde. Au contraire, l'élément d'intégration $f(x)\,dx$ doit être regardé comme l'un quelconque des éléments

$$(x_1 - a)f(\xi_1), \quad (x_2 - x_1)f(\xi_2), \quad \ldots, \quad (x - x_{n-1})f(\xi_n),$$

dont la somme est à peu près égale à l'intégrale définie.

312. Les deux remarques que voici, relatives l'une au cas où la fonction $f(x)$ est paire, l'autre au cas où elle est impaire, sont souvent utilisées.

Supposons que la fonction $f(x)$ soit paire et, dans l'expression approchée de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$, changeons de signe tous les nombres $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, on voit de suite que tous les éléments de la somme sont changés de signe, de là résulte immédiatement l'égalité

$$\int_{-a}^{-x} f(x)\,dx = -\int_a^x f(x)\,dx;$$

de même, quand la fonction $f(x)$ est impaire, on a

$$\int_{-a}^{-x} f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx.$$

La vérité de ces deux égalités apparaîtra aussi bien au lecteur s'il pense à la représentation géométrique et aux conventions concernant les signes, qu'on a adoptées au n° 222. Ces égalités, lorsqu'on suppose que a est nul, peuvent s'exprimer de la façon suivante : l'intégrale

$\int_0^x f(x)\,dx$ est une fonction impaire de x quand $f(x)$ est une fonction paire; elle est une fonction paire de x quand $f(x)$ est une fonction impaire. Ces propositions peuvent être regardées comme les réciproques de celles-ci : la dérivée d'une fonction impaire de x est une fonction paire; la dérivée d'une fonction paire de x est une fonction impaire.

Notons encore les égalités suivantes : si la fonction $f(x)$ est paire on a

$$\int_{-x}^{x} f(x)\,dx = \int_{-x}^{0} + \int_0^x = -\int_0^{-x} + \int_0^x = 2\int_0^x f(x)\,dx.$$

Si la fonction $f(x)$ est impaire, on a

$$\int_{-x}^{x} f(x)\,dx = 0.$$

§ 2. — INTÉGRALES INDÉFINIES ET INTÉGRALES DÉFINIES.

313. La définition de l'intégrale définie fournit un moyen de la calculer approximativement. C'est un point sur lequel je reviendrai bientôt. On obtient une expression explicite de l'intégrale définie, quand on a une fonction primitive de la fonction $f(x)$ qui figure sous le signe $\int$ [1]; c'est de la recherche de la fonction primitive d'une fonction donnée $f(x)$, dans quelques cas simples, que je vais maintenant m'occuper. Une telle fonction primitive est dite une intégrale *indéfinie* de la fonction $f(x)$ et se représente par le symbole

$$\int f(x)\,dx,$$

qui s'énonce *somme de* $f(x)\,dx$ et où ne figurent pas de limites : une telle fonction n'est, comme on l'a vu au n° **222**, déterminée qu'à une constante additive près.

---

(1) Dans quelques cas particuliers, on peut, pour des valeurs spéciales des limites, trouver une expression explicite sans connaître de fonction primitive. Les recherches de cette nature sont en dehors du cadre du présent Livre.

J'écris ci-dessous les valeurs explicites d'un certain nombre d'intégrales indéfinies ; elles résultent immédiatement des règles de dérivation établies au Chapitre XIII. Je crois inutile d'entrer dans plus d'explications à propos de ces formules, que le lecteur doit arriver à pouvoir retrouver immédiatement : a et b y désignent toujours des constantes, dont la première est supposée différente de o. Les seconds membres peuvent être augmentés d'une constante arbitraire : il en est toujours ainsi quand on écrit l'expression d'une intégrale indéfinie ; c'est une remarque que je fais une fois pour toutes :

$$\text{I.} \qquad \int (ax+b)^m\,dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} \qquad (m \neq -1),$$

$$\text{II.} \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\lg|ax+b|,$$

$$\text{III.} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x,$$

$$\text{IV.} \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \operatorname{arg\,th} x,$$

$$\text{V.} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$\text{VI.} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \lg\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| = -\lg\left|-x+\sqrt{x^2+a}\right| + \lg|a|,$$

$$\text{VII.} \qquad \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b),$$

$$\text{VIII.} \qquad \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$\text{IX.} \qquad \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b},$$

$$\text{X.} \qquad \int \operatorname{ch}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh}(ax+b),$$

$$\text{XI.} \qquad \int \operatorname{sh}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch}(ax+b),$$

$$\text{XII.} \qquad \int \operatorname{tang} x\,dx = -\lg|\cos x|,$$

$$\text{XIII.} \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \lg\left|\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right|,$$

$$\text{XIV.} \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \lg\left|\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Ces formules ne doivent pas être maniées sans précaution, parce que les fonctions qui y figurent peuvent devenir discontinues, imaginaires ou même n'avoir aucune signification : jusqu'à ce qu'on prévienne du contraire, les quantités imaginaires seront formellement exclues.

314. Pour ce qui concerne la formule I, on doit donc rejeter les valeurs de x qui rendraient $ax+b$ négatif si m n'est pas un entier ou une fraction irréductible à dénominateur impair et il est nécessaire de faire attention aux valeurs qui annulent $ax+b$ quand m est négatif, parce que, alors, $(ax+b)^m$ devient infini.

Si, dans l'intervalle (x_0, x_1), $ax+b$ est toujours positif, l'égalité

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (ax+b)^m\,dx = \frac{(ax_1+b)^{m+1}-(ax_0+b)^{m+1}}{(m+1)a},$$

qui se déduit immédiatement de la formule I, est toujours valable, quel que soit le nombre m, différent de -1 ; elle est aussi valable quand m est un nombre positif, entier ou égal à une fraction à dénominateur impair, et cela quelles que soient les limites x_0 et x_1 ; ou encore lorsque, m étant positif, d'ailleurs quelconque, $ax+b$ s'annule pour l'une des limites x_0, x_1, mais reste positif à l'intérieur de l'intervalle (x_0, x_1).

On a, par exemple,

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3} = 1,22,$$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt[3]{1-x}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{4}{3}}-3^{\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}} = \frac{3(3\sqrt[3]{3}-1)}{4} = 2,48;$$

les valeurs numériques ont été calculées avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}10^{-2}$. L'expression $\int_{-1}^{+1}\sqrt{x}\,dx$ n'a pas de sens.

Considérons maintenant ce qui arrive lorsque, m étant négatif, $ax+b$ s'annule pour une des limites de l'intégrale ; on suppose que, à l'intérieur de l'intervalle d'intégration, $(ax+b)^m$ a un sens réel ; $(ax+b)^m$ devenant infini pour $x=x_1$ ou $x=x_0$, la définition de l'intégrale définie tombe en défaut, et la figure géométrique qui a été le point de départ de cette définition est profondément modifiée.

Considérons, par exemple, en supposant d'abord x_1 inférieur à 1, l'intégrale

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^{x_1} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = -2\sqrt{1-x_1}+2.$$

Le second membre tend évidemment vers 2, lorsque x_1 tend vers 1; il en est de même du premier et il est naturel d'attribuer la valeur 2 au symbole

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

qui n'a pas de sens par lui-même.

Si, en supposant toujours x_1 inférieur à 1, on considère maintenant l'intégrale définie

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}} = \int_0^{x_1} (1-x)^{-\frac{3}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{1-x_1}} - 2,$$

on voit de suite que le second membre croît indéfiniment et, par suite, ne tend vers aucune limite quand x_1 tend vers 1; il n'y a pas lieu d'attribuer un sens au symbole

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$$

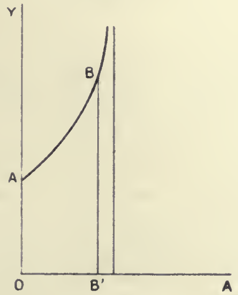
Les deux courbes définies par les équations

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$$

ont des formes analogues dont le schéma ci-dessous donne une idée suffisante. Elles sont toutes deux asymptotes à la droite dont l'équation est $x=1$; la seconde courbe est manifestement au-dessus de la première. Si B est le point de la première courbe ou de la seconde qui a pour abscisse x_1, l'aire OABB′ représente l'une ou l'autre des deux intégrales définies

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \qquad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}.$$

Fig. 95.



Lorsque B′B s'approche indéfiniment de l'asymptote, l'aire OABB′ tend vers la limite 2 dans le premier cas; elle augmente indéfiniment dans le second cas. Il y a lieu, dans le premier cas, de regarder comme finie, et égale à 2, l'aire comprise entre l'axe des x, l'axe des y, la courbe et son asymptote; de regarder cette aire comme infinie, dans le second cas.

Considérons, d'une façon générale, l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, où la fonction $f(x)$ devient infinie pour l'une des limites, pour la limite inférieure x_0 par exemple, la fonction $f(x)$ étant d'ailleurs continue dans l'intervalle (x_0', x_1) quel que soit le nombre x_0' intérieur à l'intervalle (x_0, x_1); si l'intégrale $\int_{x_0'}^{x_1} f(x)\,dx$ tend vers une limite quand x_0' tend vers x_0, en restant toujours intérieur à l'intervalle d'intégration, cette valeur limite sera, par définition, la valeur du symbole $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$: ce dernier symbole n'aura pas de sens s'il n'y a pas de valeur limite.

Le cas où la fonction devient infinie à la limite supérieure, celui où elle devient infinie aux deux limites se traitent de la même façon.

On donnera des exemples un peu plus loin. Je laisse de côté le cas où la fonction devient infinie pour x compris entre les limites d'intégration.

Pour ce qui est de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} (ax+b)^m \, dx,$$

lorsque l'une des limites est $-\frac{b}{a}$, et que la fonction $(ax+b)^m$ est réelle dans l'intervalle (x_0, x_1), elle a un sens si m est plus grand que -1, elle n'en a pas si m est inférieur à -1. Cela résulte aisément de la formule (1).

Examinons maintenant ce qui se passe quand une des limites de l'intégrale devient infinie.

Supposons que x_0 soit plus petit que x_1 et que la formule (1) soit applicable, quelque grand que soit x_1; faisons grandir x_1 indéfiniment, la valeur absolue de $ax_1 + b$ grandira indéfiniment; il en sera de même de la valeur absolue de $(ax_1+b)^{m+1}$ si $m+1$ est positif; si, au contraire, $m+1$ est négatif, $(ax_1+b)^{m+1}$ tendra vers o et le second membre aura pour limite $\frac{-(ax_0+b)^{m+1}}{(m+1)a}$; le lecteur aperçoit de suite la signification de l'égalité

$$\int_{x_0}^{+\infty} (ax+b)^m \, dx = -\frac{(ax_0+b)^{m+1}}{(m+1)a},$$

où l'on suppose essentiellement que m soit inférieur à -1, et que $(ax+b)^m$ soit réel pour toutes les valeurs de x supérieures ou égales à x_0; lorsque m est supérieur à -1, le premier membre n'a pas de signification.

D'une façon générale, si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (x_0, x_1), lorsque x_1 est un nombre plus grand que x_0, et si l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ tend vers une limite quand x_1 augmente indéfiniment, cette limite est, par définition, la valeur du symbole

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

De même, si l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ tend vers une limite quand x_0 tend vers $-\infty$, cette limite sera, par définition, la valeur du symbole

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx.$$

On a, par exemple,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Le lecteur reconnaîtra sans peine la signification géométrique de ces égalités; la courbe dont l'équation est $y = \frac{1}{x^2}$ est asymptote à l'axe des x, des deux côtés; la première intégrale représente l'aire comprise entre cette asymptote, la courbe et la droite dont l'équation est $x = 1$.

Arrivons maintenant à la formule II du n° 313. Elle conduit à l'égalité

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \lg \left| \frac{ax_1+b}{ax_0+b} \right|;$$

le second membre a un sens pourvu qu'aucun des nombres x_0, x_1 ne soit égal à $-\frac{b}{a}$; mais le premier n'en a point quand $ax+b$ s'annule pour une valeur de x appartenant à l'intervalle (x_0, x_1), puisque, alors, $\frac{1}{ax+b}$ devient infini dans les limites d'intégration. Dans ce cas la formule (2) est *inapplicable;* le lecteur reconnaît de suite, sur cette formule, que le premier membre devient infini, en valeur absolue, quand l'une des limites d'intégration s'approche de $-\frac{b}{a}$, ou quand l'une des limites devient infinie. Puisque, dans la formule (2), $ax+b$ ne doit pas s'annuler dans les limites d'intégration, ax_0+b et ax_1+b sont de mêmes signes, leur rapport est positif, et l'on peut tout aussi bien écrire

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \lg \frac{ax_1+b}{ax_0+b};$$

cette forme est même avantageuse, parce que le second membre n'a pas de sens quand $ax+b$ s'annule dans l'intervalle (x_0, x_1).

On a, par exemple,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \lg 2 = 0{,}693\ldots.$$

Les symboles $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ n'ont aucune signification.

Quand on applique la formule III au calcul d'une intégrale définie, arc tang$x$ doit, comme il a été dit au n° 199, être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; je me borne à écrire les formules ([1])

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Quand on applique la formule IV au calcul d'une intégrale définie, on doit supposer que les deux limites sont supérieures à 1 ou toutes les deux inférieures à -1, ou bien qu'elles sont toutes les deux comprises entre -1 et $+1$, sans quoi la fonction $\frac{1}{1-x^2}$ deviendrait infinie dans les limites d'intégration; on peut écrire dans les trois cas

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{x} \lg \frac{(1+x_1)(1-x_0)}{(1-x_1)(1+x_0)}.$$

Le cas où l'une des limites serait -1 ou 1 est formellement exclu. L'emploi du symbole arg th$x$ suppose $|x| < 1$.

([1]) Quand la fonction $f(x)$ est continue dans tout intervalle et que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ tend vers une limite, soit lorsque x_1 tend vers $+\infty$, soit quand x_0 tend $-\infty$, cette intégrale tend certainement vers une limite lorsque x_0 et x_1 tendent indépendamment l'un vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$, et cette limite est, par définition, la valeur du symbole $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$; on a alors, quel que soit x',

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x'} f(x)\,dx + \int_{x'}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Des observations analogues concernent les formules XII, XIII, XIV, quand on les applique au calcul d'intégrales définies; les limites d'intégration doivent être telles que $\sin x$ pour la formule XIII, $\cos x$ pour les formules XII et XIV ne s'annulent pas dans l'intervalle d'intégration. Dans un intervalle où $\sin x$ ne s'annule pas, $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ garde le même signe; de même $\cos x$ et $\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ dans un intervalle où $\cos x$ ne s'annule pas.

On aura, dans ces conditions,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sin x}=\lg\frac{\operatorname{tang}\frac{x_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{x_0}{2}},\qquad \int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\cos x}=\lg\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_1}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{2}\right)}.$$

Par exemple,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x}=\lg\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}}=\frac{\lg 3}{2}=0,549\ldots,$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\lg\frac{\operatorname{tang}\frac{5\pi}{8}}{\operatorname{tang}\frac{3\pi}{4}}=\lg\operatorname{tang}\frac{3\pi}{8}=0,881\ldots.$$

Quand on applique la formule V au calcul d'une intégrale définie, les limites doivent appartenir à l'intervalle $(-1, 1)$. Je me contente d'écrire les formules

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Lorsque a est positif, la formule VI s'applique, quelles que soient les limites d'intégration; la quantité $x+\sqrt{a+x^2}$ est toujours positive. Dans le cas où a est égal à 1, on a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\arg\operatorname{sh}x.$$

Cette formule et la formule VI montrent que les relations

$$y=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad z=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

entraînent les suivantes

$$x = \sin y, \qquad x = \operatorname{sh} z.$$

Lorsque a est négatif, il faut, pour appliquer la formule VI au calcul d'une intégrale définie, supposer les limites soit égales ou supérieures à $\sqrt{-a}$, soit égales ou inférieures à $-\sqrt{-a}$. On peut aussi introduire les fonctions hyperboliques, en partant de ce que

$$\arg\operatorname{ch} x = \lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

et $-\arg\operatorname{ch}(-x)$ sont des fonctions primitives de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ qui conviennent, la première quand x est supérieur ou égal à 1, la seconde quand x est inférieur ou égal à -1.

Relativement aux formules VII et VIII, j'observerai que les intégrales

$$\int_{x_0}^{x} \cos(ax + b)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{x} \sin(ax + b)\,dx,$$

regardées comme des fonctions de leur limite supérieure x, sont, lorsque a n'est pas nul, des fonctions périodiques de x, la période étant $\frac{2\pi}{a}$; ces intégrales sont nulles toutes les fois que la différence $x_0 - x$ est un multiple entier de $\frac{2\pi}{a}$; ces fonctions changent entièrement de caractère quand a est nul : elles sont alors respectivement égales à

$$(x - x_0)\cos b, \qquad (x - x_0)\sin b.$$

Les détails dans lesquels je suis entré montrent, sur des cas simples, les précautions à prendre pour le calcul des intégrales définies.

Je vais, maintenant, faire quelques observations sur les intégrales définies portant sur des fonctions imaginaires.

315. Tout d'abord, il doit être entendu, conformément à ce que l'on a dit pour ce qui concerne les fonctions primitives, que la variable d'intégration et les limites de l'intégrale seront toujours supposées réelles. Le cas contraire est formellement exclu de ce Livre. Je préviens en outre que les seules fonctions imaginaires que je considé-

rerai dans la suite seront des polynomes, des fractions rationnelles, des fonctions exponentielles, des sinus et des cosinus. Les logarithmes, les arc sin, ... de quantités imaginaires n'ont pas été définis et sont formellement exclus du présent Livre.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, qui puisse se mettre sous la forme $\varphi(x)+i\psi(x)$, en désignant par $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions réelles, l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

où x_0 et x_1 sont des nombres réels, sera, par définition, égale à

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx + i\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx;$$

on suppose, bien entendu, que les intégrales définies qui figurent dans cette dernière expression ont un sens. On voit que, si l'on désigne par $\mathrm{F}(x)$ une fonction primitive de $f(x)$ au sens du n° 223, on pourra encore écrire

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x_1) - \mathrm{F}(x_0).$$

Les formules VII, VIII, IX, X, XI subsistent sans modification, que les constantes a et b soient réelles ou imaginaires.

On en déduit le moyen d'obtenir la fonction primitive de toute fonction de x obtenue en remplaçant, dans un polynome quelconque en u, v, ..., les variables par des expressions de la forme e^{ax+b}; la substitution étant faite; il est clair, à cause de l'identité $e^x e^y = e^{x+y}$, que l'expression considérée devient une somme de termes de la forme $\mathrm{A}e^{\alpha x+\beta}$, où A, α, β peuvent, d'ailleurs, être des constantes réelles ou imaginaires; chacun de ces termes s'intègre par la formule IX. En se rappelant les formules d'Euler qui permettent de passer des fonctions sin, cos à la fonction exponentielle, on voit de suite que le procédé qu'on vient d'indiquer réussit pour toute fonction de x obtenue en remplaçant, dans un polynome quelconque en u, v, ..., les variables par des expressions de la forme e^{ax+b}, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$.

On a, par exemple,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \int\left(\frac{e^{(a+bi)x}+e^{(a-bi)x}}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi}+\frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi}\right) = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax},$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \int\left(\frac{e^{(a+bi)x}-e^{(a-bi)x}}{2i}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi}-\frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi}\right)dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax};$$

la démonstration même prouve que ces formules subsistent, que a, b soient réels ou imaginaires, pourvu que a^2+b^2 ne soit pas nul.

Pour calculer les intégrales

$$\int \cos^m x\,dx, \qquad \int \sin^m x\,dx,$$

où m désigne un nombre naturel, on remplacera $\cos x$, $\sin x$, par $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, et l'on appliquera la formule du binome, de manière à avoir une somme de termes de la forme $e^{i\alpha x}$, où α est un nombre entier positif ou négatif, multipliés par des coefficients numériques. Au reste, le calcul même montre sans peine que $\cos^{2m}x$, $\cos^{2m-1}x$, $\sin^{2m}x$, $\sin^{2m-1}x$ peuvent être mis respectivement sous les formes

$$\begin{aligned}
\cos^{2m}x &= A_0\cos 2mx + A_1\cos(2m-2)x+\ldots+A_{m-1}\cos 2x + A_m,\\
\cos^{2m-1}x &= B_0\cos(2m-1)x + B_1\cos(2m-3)x+\ldots+\ldots+B_m\cos x,\\
\sin^{2m}x &= C_0\cos 2mx + C_1\cos(2m-2)x+\ldots+C_{m-1}\cos 2x + C_m,\\
\sin^{2m-1}x &= D_0\sin(2m-1)x + D_1\sin(2m-3)x+\ldots+D_m\sin x.
\end{aligned}$$

Les coefficients A, B, C, D sont des constantes numériques aisées à calculer en se reportant au n° 97; je me contente d'écrire les premières de ces formules

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}, \qquad \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4},$$
$$\cos^4 x = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8},$$
$$\sin^4 x = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}.$$

On a, par exemple,

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$$

316. Plus généralement, un calcul du même genre conduit sans peine à la fonction primitive d'un produit de cosinus ou de sinus portant sur des expressions de la forme $ax + b$. On arrive aisément au même résultat sans passer par la considération des nombres imaginaires; observons d'abord qu'on peut, à cause de la relation

$$\sin(ax + b) = -\cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right),$$

se borner au cas où le produit ne contient que des cosinus; dès lors les formules

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta), \\ 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 2\cos\gamma\cos(\alpha + \beta) + 2\cos\gamma\cos(\alpha - \beta) \\ &= \quad\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) \\ &\quad + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\gamma - \alpha + \beta) \end{aligned}$$

montrent qu'un produit de la forme $2^n\cos\alpha\cos\beta\ldots\cos\lambda$, où figurent n cosinus, est une somme de cosinus d'expressions de la forme $(\alpha \pm \beta \pm \ldots \pm \lambda)$; si toutes les expressions $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont de la forme $ax + b$, il en sera de même de l'expression $\alpha \pm \beta \pm \ldots \pm \lambda$; on ramène ainsi le produit à une somme que l'on sait intégrer terme par terme.

On a par exemple

$$\begin{aligned} \int \cos(ax + b)\cos(a'x + b')\, dx = &\ \frac{1}{2}\int \cos[(a + a')x + b + b']\, dx \\ &+ \frac{1}{2}\int \cos[(a - a')x + b - b']\, dx. \end{aligned}$$

On voit que le second membre est susceptible de formes différentes suivant les cas; si $a + a'$ et $a - a'$ sont différents de o, on aura

$$\begin{aligned} \int \cos(ax + b)\cos(a'x + b')\, dx = &\ \frac{\sin[(a + a')x + b + b']}{2(a + a')} \\ &+ \frac{\sin[(a - a')x + b - b']}{2(a - a')}. \end{aligned}$$

Si a est égal à a', ou à $-a'$, on aura, suivant les cas,

$$\int \cos(ax+b)\cos(ax+b')\,dx = \frac{\sin(2ax+b+b')}{4a} + \frac{x}{2}\cos(b-b').$$

$$\int \cos(ax+b)\cos(-ax+b')\,dx = \frac{\sin(2ax+b-b')}{4a} + \frac{x}{2}\cos(b+b').$$

Ces dernières formules supposent a différent de o.

Lorsque a et a' sont des nombres entiers, on voit que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx$$

est nulle si les valeurs absolues de a et de a' sont différentes, qu'elle est égale à $\pi\cos(b-b')$, ou à $\pi\cos(b+b')$, si l'on a $a=a'\neq 0$, ou $a=-a'\neq 0$; elle serait égale à $2\pi\cos b\cos b'$, si l'on avait $a=a'=0$.

En particulier, si a, a' sont des nombres entiers qui ne sont pas nuls tous les deux, on a, dans tous les cas,

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos ax \sin a'x\,dx = 0, \qquad \int^{x_0+2\pi} \sin ax \cos a'x\,dx = 0,$$

puis, si les deux nombres $a+a'$ et $a-a'$ sont l'un et l'autre différents de o,

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos ax \cos a'x\,dx = 0, \qquad \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin ax \sin a'x\,dx = 0;$$

enfin

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos^2 ax\,dx = \pi, \qquad \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin^2 ax\,dx = \pi \quad [1].$$

317. Changement de la variable d'intégration. — Si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$ et si $\varphi(t)$ est une fonction quelconque de t admettant pour dérivée $\varphi'(t)$, il est clair que $F[\varphi(t)]$ sera une fonction primitive de $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$; en d'autres termes, l'égalité

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{1}$$

[1] L'exercice 378 est une application très importante de ces divers résultats.

entraîne l'égalité

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]. \tag{2}$$

Ce résultat se retient très aisément en remarquant que, si l'on regarde dx, dt comme des différentielles, la différentielle de la fonction $\varphi(t)$ est précisément $\varphi'(t)\,dt$; en sorte qu'on peut dire que l'égalité (2) se déduit de l'égalité (1) en y remplaçant x par $\varphi(t)$ et dx par $\varphi'(t)\,dt$, comme s'il s'agissait de différentielles. C'est ce qu'on avait annoncé au n° 305 : bien que le symbole dx qui figure sous le signe $\int$ ne soit pas, à proprement parler, une différentielle, l'emploi de ce symbole n'offre que des avantages, puisqu'il se trouve soumis aux mêmes règles de calcul que les différentielles proprement dites (1). Rien n'empêche, d'après cela, d'écrire le premier membre de l'égalité (2) sous la forme

$$\int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

En particulier, si l'on suppose $\varphi(t) = at + b$, a et b étant des constantes, on voit qu'on a

$$\int f(at+b)\,a\,dt = F(at+b);$$

ce qui, sauf le nom de la variable, revient à dire que, si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, $\frac{1}{a}F(ax+b)$ est une fonction primitive de $f(ax+b)$; en fait, cette remarque a été déjà appliquée pour les formules I, II, VIII, IX, X, XI : la formule VIII, par exemple, résulte de la remarque qu'on vient de faire et de ce que $\sin x$ est une fonction primitive de $\cos x$.

318. Cette même remarque va nous fournir le moyen de déduire des formules III, IV, V, VI les fonctions primitives des fonctions

$$\frac{1}{Ax^2+2Bx+C}, \qquad \frac{1}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},$$

(1) Le lecteur qui poursuivra ses études mathématiques reconnaîtra qu'il n'en est plus de même quand il s'agit d'intégrales *multiples*.

ou, si l'on veut, les expressions des intégrales indéfinies

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

L'identité

$$Ax^2+2Bx+C = A\left[\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\right]$$

suggère immmédiatement l'idée du changement de variable

$$x+\frac{B}{A}=t, \qquad dx=dt$$

qui change les deux intégrales précédentes en

$$\int \frac{dt}{A\left(t^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\right)}, \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{A\left(t^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\right)}}.$$

Pour ramener ensuite le binome $t^2+\frac{AC-B^2}{A^2}$ à la forme $z^2\pm 1$ qui figure dans les formules III, IV, V, VI, il suffira de faire le changement de variable

$$t=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}z, \qquad \text{ou} \qquad t=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}z,$$

suivant que $AC-B^2$ est positif ou négatif, suivant que le trinome proposé $Ax^2+2Bx+C$ a ses racines imaginaires ou réelles.

Considérons d'abord la première intégrale

1° $$AC-B^2>0, \qquad t=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}z, \qquad dt=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}dz.$$

On a

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{A}\int\frac{dt}{t^2+\frac{AC-B^2}{A^2}}=\frac{1}{A}\int\frac{\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}dz}{\frac{AC-B^2}{A^2}(z^2+1)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arc\,tang} z$$

et, finalement,

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{Ax+B}{\sqrt{AC-B^2}};$$

on a, en particulier (¹),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{\operatorname{sgn} A}{\sqrt{AC-B^2}}\pi;$$

en effet, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{Ax+B}{\sqrt{AC-B^2}}$ tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, suivant que A est positif ou négatif, l'arc tangente tend vers $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que A est positif ou négatif. On a les mêmes distinctions à faire quand x tend vers $-\infty$.

Dans le cas qu'on vient de traiter, la fonction sous le signe $\int$ est continue, quel que soit x.

2° $\quad AC-B^2<0, \qquad t=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}z, \qquad dt=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}dz.$

On a

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{A}\int \frac{dt}{t^2-\frac{B^2-AC}{A^2}} = \frac{-1}{\sqrt{B^2-AC}}\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}} \lg\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = \frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}} \lg\left|\frac{\sqrt{B^2-AC}-Ax-B}{\sqrt{B^2-AC}+Ax+B}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}} \lg\left|\frac{x-x'}{x-x''}\right|,$$

en désignant par x', x'' les racines du trinome $Ax^2+2Bx+C$, rangées dans un ordre tel que l'on ait $x'-x''=\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A}$; la formule n'est applicable que si les deux limites d'intégration sont toutes deux supérieures à x', x'', ou toutes deux inférieures à x', x'', ou toutes deux comprises entre x' et x''. On peut écrire aussi, dans le

(¹) Je rappelle que $\operatorname{sgn} A = \frac{\sqrt{A^2}}{A}$ représente $+1$ ou -1, suivant que A est positif ou négatif.

dernier cas,

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{-1}{\sqrt{B^2 - AC}} \operatorname{arg\,th} \frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}}.$$

3° $AC - B^2 = 0$, on a

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{-1}{Ax + B}.$$

La formule ne s'applique que si $-\frac{B}{A}$ n'appartient pas à l'intervalle d'intégration.

Arrivons à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}$.

Supposons d'abord A négatif; on doit supposer les racines du trinome $Ax^2 + 2Bx + C$ réelles ($B^2 - AC > 0$), sans quoi le radical serait toujours imaginaire; on aura alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{B^2 - AC}{A^2} - \left(x + \frac{B}{A}\right)^2}};$$

en faisant le changement de variables,

$$x + \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{-A} z, \qquad dx = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{-A} dz,$$

il vient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \arcsin z,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{-1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}};$$

la formule n'est applicable que si les limites d'intégration appartiennent à l'intervalle formé par les deux racines x', x'' du trinome; en désignant par x' la plus petite et par x'' la plus grande, on a

$$Ax' + B = \sqrt{B^2 - AC}, \qquad Ax'' + B = -\sqrt{B^2 - AC},$$

et

$$\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{-1}{\sqrt{-A}} [\arcsin(-1) - \arcsin 1] = \frac{\pi}{\sqrt{-A}}.$$

Supposons maintenant $A > 0$. Un calcul tout pareil et la formule VI montrent que l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \lg \left| Ax + B + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C} \right|.$$

Je laisse au lecteur le soin de montrer que la quantité placée entre deux barres verticales, dans le second membre, est toujours positive quand les racines du trinome $Ax^2+2Bx+C$ sont imaginaires. Lorsque ces racines sont réelles et distinctes, elle est positive si x est supérieur à la plus grande des racines, négative si x est inférieur à la plus petite. Ce dernier point résulte sans peine de l'identité

$$(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C})(Ax+B-\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx-C}) = B^2-AC.$$

Les limites de l'intégrale définie doivent être toutes deux plus grandes que la plus grande des racines ou toutes deux plus petites que la plus petite.

Lorsque B^2-AC est nul, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\left| x + \frac{B}{A} \right|} = \frac{\operatorname{sgn}\left(x+\frac{B}{A}\right)}{\sqrt{A}} \lg \left| x + \frac{B}{A} \right|.$$

Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}}.$$

On peut l'écrire

$$-\operatorname{sgn} x \int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{a}{x^2}+1}}.$$

On aura donc, si a est positif,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{a}} \int \frac{d\frac{\sqrt{a}}{x}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2+1}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{a}} \lg \left| \frac{\sqrt{a}}{x} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x^2}} \right|,$$

et, si a est négatif,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\frac{\sqrt{-a}}{x}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\sqrt{-a}}{x}.$$

Si l'on applique cette formule à une intégrale définie, les deux limites de l'intégrale doivent être de mêmes signes et, si a est négatif, être toutes deux au moins égales à $\sqrt{-a}$, ou au plus égales à $-\sqrt{-a}$.

319. Les formules évidentes

$$\int \frac{u'\,dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \lg|u|,$$

$$\int \frac{u'}{u^m}\,dx = \int u^{-m}u'\,dx = \frac{1}{-m+1}\int d(u^{-m+1}) = \frac{-1}{(m-1)u^{m-1}} \quad (m \neq 1),$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc tang} u,$$

où u est une fonction de x dont la dérivée est u', se rattachent si l'on veut à la théorie précédente, ou au théorème des fonctions de fonction, dont elles sont des conséquences immédiates. Il convient de se familiariser avec leur application, de savoir reconnaître, par exemple, si le numérateur d'une fraction est, à un facteur constant près, la dérivée du dénominateur ou la dérivée d'une fonction dont le dénominateur est une puissance.

Ainsi

$$\int \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{de^{ax}}{1+e^{ax}} = \lg(1+e^{ax}),$$

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{1}{2}\lg|Ax^2+2Bx+C|.$$

Cette dernière formule, dans laquelle le premier membre peut s'écrire

$$A\int \frac{x\,dx}{Ax^2+2Bx+C} + B\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C},$$

montre, puisque l'on a l'expression de $\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$, qu'on peut obtenir l'expression des intégrales de la forme $\int \frac{x\,dx}{Ax^2+2Bx+C}$, et, par suite, celle des intégrales de la forme $\int \frac{(ax+b)\,dx}{Ax^2+2Bx+C}$, où a et b sont des constantes.

De même la formule

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int d\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{Ax^2+2Bx+C},$$

et les résultats précédemment obtenus permettent d'évaluer les intégrales du type $\int \frac{(ax+b)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$.

On a

$$\int \frac{dx}{x[1+(\lg x)^2]} = \int \frac{d\lg x}{1+(\lg x)^2} = \text{arc tang}(\lg x).$$

320. Les applications précédentes du changement de variable ont été faites en vue de la recherche de l'intégrale indéfinie; celle-ci une fois obtenue, il n'y a qu'à prendre, pour en déduire une intégrale définie, les précautions relatives à la continuité, etc., sur lesquelles on a insisté au n° 314; il importe de se rendre compte de la façon dont il convient d'opérer en général quand on fait un changement de variable $x = \varphi(t)$ dans une intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$.

Je suppose essentiellement que la fonction $f(x)$ soit continue dans un intervalle (A, B) auquel appartiennent les limites x_0, x_1, que la fonction $\varphi(t)$ soit de même continue, ainsi que sa dérivée $\varphi'(t)$, dans l'intervalle (α, β), et que les valeurs qu'elle prend quand t varie dans l'intervalle (α, β) appartiennent toujours à l'intervalle (A, B),

Soit $F(x)$ une fonction primitive de $f(x)$; elle sera aussi continue dans l'intervalle (A, B) et l'on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0).$$

Quant t appartient à l'intervalle (α, β), la dérivée par rapport à t de $F[\varphi(t)]$ est $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, et l'on aura, quels que soient les nombres t_0 et t_1, appartenant à l'intervalle (α, β),

$$\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = F[\varphi(t_1)] - F[\varphi(t_0)$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

pourvu que t_0 et t_1 appartiennent à l'intervalle (α, β) et satisfassent aux équations

$$\varphi(t_0) = x_0, \qquad \varphi(t_1) = x_1.$$

Lorsque t varie de t_0 à t_1, sans sortir de l'intervalle (t_0, t_1), $x = \varphi(t)$ qui passe de la valeur x_0 à la valeur x_1 peut sans inconvénient osciller dans cet intervalle, ou même sortir de l'intervalle (x_0, x_1), pourvu que les conditions précédentes soient vérifiées. Ce point, qui ressort clairement de ce qui précède, s'établit sans peine par des considérations géométriques que je laisse au lecteur le soin de développer.

Au reste, lorsque l'équation $x = \varphi(t)$ permet de définir une fonction $t = \psi(x)$, inverse de $\varphi(t)$ (n° 199) qui varie toujours dans le même sens quand x va de x_0 à x_1, il sera naturel de choisir pour t_0 et t_1 les valeurs que prend cette fonction $\psi(x)$ pour $x = x_0$, $x = x_1$.

La formule (1) ne s'appliquerait plus si, lorsque t varie de t_0 à t_1, les valeurs de la fonction $x = \varphi(t)$ sortaient de l'intervalle (A, B) où la continuité de $f(x)$ est assurée.

J'ai supposé dans ce qui précède la formule du changement de variable résolue par rapport à x. Si l'on se donne inversement la formule $t = \psi(x)$ et si l'on sait former une fonction continue $g(t)$ telle que l'on ait

$$\frac{f(x)}{\psi'(x)} = g[\psi(x)]$$

pour les valeurs que prend la fonction $\psi(x)$ quand x varie de x_0 à x_1, on aura

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\,dt$$

en prenant $t_0 = \psi(x_0)$, $t_1 = \psi(x_1)$, ainsi qu'on le vérifie immédiatement en faisant, dans le second membre, le changement de variables $t = \psi(x)$.

Considérons, par exemple, en supposant $b^2 - c$ négatif, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x^2 + 2bx + c)^n}$$

où n est un nombre entier, au moins égal à 2; l'intégrale indéfinie, en posant $x + b = \sqrt{c - b^2}\,\mathrm{tang}\,t$, deviendra

$$\frac{1}{(c - b^2)^n} \int \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \mathrm{tang}^2 t)^n} = \frac{1}{c - b^2} \int \cos^{n-2} t\, dt;$$

on a vu au n° 315 comment se calculait cette intégrale indéfinie; on n'aura ensuite qu'à appliquer la formule (1) en prenant pour t_0, t_1 les nombres définis sans ambiguïté par les formules

$$t_0 = \mathrm{arc\,tang}\, \frac{x_0 + b}{\sqrt{c - b^2}}, \qquad t_1 = \mathrm{arc\,tang}\, \frac{x_1 + b}{\sqrt{c - b^2}}.$$

On aura, en particulier,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1 + x + x^2)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \left(\mathrm{arc\,tang}\, \frac{1 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} - \mathrm{arc\,tang}\, \frac{-1 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\mathrm{arc\,tang}\, \sqrt{3} + \mathrm{arc\,tang}\, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

321. **Intégration par parties.** — La recherche de la fonction primitive du produit uv' d'une fonction connue u de x par la dérivée d'une fonction connue v, se ramène immédiatement à la recherche de la fonction primitive du produit $u'v$, puisque la dérivée de uv est égale à $u'v + uv'$, en sorte que la fonction primitive de uv' est égale à uv moins la fonction primitive de $u'v$; en d'autres termes, on a

$$(1) \qquad \int uv'\, dx = uv - \int vu'\, dx.$$

Cette formule, quand on a affaire à une intégrale définie, s'écrit souvent

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} uv'\, dx = [uv]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} vu'\, dx,$$

en désignant par le symbole $[uv]_{x_0}^{x_1}$ la différence entre les valeurs que prend le produit uv pour $x = x_1$ et pour $x = x_0$.

La formule (1), ou (2), à laquelle on donne le nom de *formule d'intégration par parties,* est avantageuse toutes les fois qu'on sait calculer $\int u'v\,dx$.

Si, en particulier, u est une de ces fonctions qui, comme $\lg x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, ..., ont une dérivée algébrique simple, la formule (1) permettra souvent de ramener le problème proposé à un problème plus aisé.

Soit par exemple à calculer $\int x^n \lg x\,dx \,(n+1 \neq 0)$.

En supposant $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $u = \lg x$ dans la formule (1), elle deviendra

$$\begin{aligned}\int x^n \lg x\,dx &= \frac{x^{n+1}\lg x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\lg x - \frac{1}{n+1}\right);\end{aligned}$$

on a en particulier, pour $n = 0$,

$$\int \lg x\,dx = x\lg x - x.$$

Soit encore à calculer

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx.$$

On a, en prenant $v = x$, $u = \sqrt{x^2+a}$,

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx;$$

d'autre part, on a

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \sqrt{x^2+a}\,dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}};$$

on en conclut

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a}\,dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right),\\ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right);\end{aligned}$$

l'intégrale qui figure dans les seconds membres a été calculée dans le n° 318.

Plus généralement, on a, en prenant

$$v = x + \frac{B}{A}, \qquad u = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

$$\int \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\, dx = \frac{1}{A}(Ax + B)\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} - \frac{1}{A}\int \frac{(Ax+B)^2}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}\, dx;$$

on a d'ailleurs

$$(Ax + B)^2 = A(Ax^2 + 2Bx + C) + B^2 - AC,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{A}\int \frac{(Ax+B)^2\, dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \int \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\, dx - \frac{AC - B^2}{A}\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}},$$

d'où

$$\int \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}\, dx = \frac{1}{2A}\left[(Ax + B)\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} + (AC - B^2)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}\right].$$

Ici encore, l'intégrale qui figure dans le second membre est connue.

La formule (n° 213)

$$\frac{d}{dx}\left[u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \ldots \pm u^{(n)} v\right] = u v^{(n+1)} \pm u^{(n+1)} v$$

conduit à une formule plus générale que la formule (1), à savoir :

$$\int u v^{(n+1)}\, dx = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + \ldots \pm u^{(n)} v \mp \int u^{(n+1)} v\, dx;$$

elle s'appliquera quand la fonction dont on cherche la fonction primitive est le produit d'une fonction connue par la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ d'une fonction connue. Une belle application de cette formule concerne le cas où v est de la forme e^{ax}, a étant une constante, et où u est un polynome de degré n, polynome dont la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ est identiquement nulle, en sorte que l'intégrale du second membre disparaît et que l'on a

$$\int u e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{u}{a} - \frac{u'}{a^2} + \frac{u''}{a^3} - \ldots \pm \frac{u^{n}}{a^{n}}\right),$$

formule qui se vérifie immédiatement en prenant les dérivées des deux membres.

En se reportant au n° 315, on reconnaît de suite que la formule précédente est valable quand a est imaginaire, en particulier quand il est égal à $\pm i$; on en conclut, en supposant toujours que v soit un polynome de degré n,

$$\int u \cos x\, dx = (u - u'' + u^{\text{IV}} - \ldots) \sin x + (u' - u''' + \ldots) \cos x,$$

$$\int u \sin x\, dx = (u' - u''' + \ldots) \sin x - (u - u'' + u^{\text{IV}} - \ldots) \cos x.$$

La méthode d'intégration par parties, ou plutôt une méthode fondée sur la même identité, permet souvent d'obtenir des formules de *réduction* qui sont très précieuses. Les formules que l'on désigne ainsi ramènent d'ordinaire le calcul d'une expression qui dépend d'un nombre entier n à celui d'expressions semblables mais relatives à des valeurs moindres de cet entier.

Considérons par exemple l'intégrale

$$A_n = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

où n est un nombre entier.

La dérivée de $x^p \sqrt{1 - x^2}$ est

$$\begin{aligned} p x^{p-1} \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^{p+1}}{\sqrt{1 - x^2}} &= \frac{p x^{p-1}(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x^{p+1}}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{p x^{p-1}}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{(p+1)\, x^{p+1}}{\sqrt{1 - x^2}}; \end{aligned}$$

on en conclut

$$x^p \sqrt{1 - x^2} = p A_{p-1} - (p+1) A_{p+1}. \tag{3}$$

Si n est un nombre entier positif, on aura donc, en remplaçant dans cette formule p successivement par $n - 1$, $n - 3$, $n - 5$, les égalités

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{n-1}{n} A_{n-2} - \frac{x^{n-1}\sqrt{1 - x^2}}{n}, \\ A_{n-2} &= \frac{n-3}{n-2} A_{n-4} - \frac{x^{n-3}\sqrt{1 - x^2}}{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La dernière de ces formules sera, suivant que n est pair ou impair,

$$A_2 = \frac{1}{2}A_0 - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2},$$
$$A_1 = -\sqrt{1-x^2}.$$

Puisque $A_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ est connu, ces formules permettront, dans tous les cas, de calculer de proche en proche les quantités $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_n$ si n est pair, les quantités $A_3, A_5, \ldots, A_n$ si n est impair. Le lecteur pourra calculer, dans les deux cas, l'expression explicite (¹) de A_n. Je me borne aux remarques suivantes, qui sont immédiates.

Si n est pair, A_n contient un terme transcendant, en $\arcsin x$, et le produit par $\sqrt{1-x^2}$ d'un polynome en x, de degré $n-1$, dont tous les termes sont de degré impair.

Si n est impair, A_n est le produit par $\sqrt{1-x^2}$ d'un polynome en x de degré $n-1$, dont tous les termes sont de degré pair.

Dans tous les cas on doit ajouter à l'expression de A_n la constante arbitraire qui figure dans toute intégrale indéfinie.

Je laisse au lecteur le soin de traiter le cas où n est un nombre entier négatif; il verra encore que le calcul de A_n se ramène au calcul de quantités connues.

Revenons au cas où n est un entier positif : et faisons maintenant

$$A_p = \int_0^1 \frac{x^p\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La formule

$$\frac{d}{dx}\left(x^p\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{px^{p-1}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(p+1)x^{p+1}}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui a été notre point de départ, et qui montre que $x^p\sqrt{1-x^2}$ est une fonction primitive du second membre, montre que l'intégrale définie de ce second membre, prise entre les limites 0 et 1, est nulle quand on suppose $p > 0$, puisque $x^p\sqrt{1-x^2}$ est nul pour $x = 0$ et pour $x = 1$; cette remarque fournit

(¹) *Voir* Ex. 160.

la relation

$$pA_{p-1} = (p+1)A_{p+1}.$$

d'où, en supposant successivement $p = 2n-1,\ 2n-3,\ \ldots,\ 1$,

$$A_{2n} = \frac{2n-1}{2n} A_{2n-2},$$

$$A_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} A_{2n-4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2};$$

on déduit de là

$$A_{2n} = \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\,\frac{\pi}{2},$$

on aura de même

$$A_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} A_{2n-1},$$

$$A_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} A_{2n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_3 = \frac{2}{3} A_1 = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3},$$

et, par suite,

$$A_{2n+1} = \frac{2.4.6\ldots2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} = \frac{2.4.6\ldots2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Ces formules conduisent très naturellement à des inégalités intéressantes on voit de suite que, pour x compris entre 0 et 1, on a

$$\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où l'on conclut, en se reportant à la signification géométrique de l'intégrale définie,

$$A_{2n-1} > A_{2n} > A_{2n+1}$$

et, en utilisant les résultats précédents,

$$\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-3)}\,\frac{1}{2n-1} > \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2.4.6\ldots2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{2n+1},$$

$$\left[\frac{2.4.6\ldots2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n} > \frac{\pi}{2} > \left[\frac{2.4.6\ldots2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

L'expression approchée de $\frac{\pi}{2}$ que fournissent ces inégalités est due à Wallis.

322. Intégration des fractions rationnelles. — On a vu (nos 65, 117) qu'une fonction rationnelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ était la somme d'un polynome entier en x, et de fractions de la forme $\frac{A}{(x-a)^p}$, en désignant par a quelque racine de $\varphi(x)$, par p un nombre naturel inférieur ou égal au degré de multiplicité de cette racine et par A une constante. Le polynome, qui n'existe d'ailleurs que si le degré du numérateur $f(x)$ est au moins égal au degré du dénominateur, s'intègre de suite; il en est de même du terme $\frac{A}{(x-a)^p}$, si a est réel; on a alors

$$(1) \qquad \int \frac{A\,dx}{(x-a)^p} = A\int (x-a)^{-p}\,dx = \frac{-A}{(p-1)(x-a)^{p-1}},$$

quand p est plus grand que 1, et

$$(2) \qquad \int \frac{A\,dx}{x-a} = A \lg|x-a|,$$

quand $p=1$.

Il n'y a de difficultés que quand le dénominateur $\varphi(x)$ admet des racines imaginaires.

Il convient toutefois de remarquer que, même si a est imaginaire, la formule (1) continue d'être valable, pourvu que p soit plus grand que (1); c'est seulement la formule (2) qui n'a plus de sens.

Supposons d'abord que les coefficients de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ soient réels; aux racines réelles de $\varphi(x)$, s'il y en a, correspondront des éléments simples réels qui s'intègrent de suite; quant aux racines imaginaires, elles vont par couples; à une racine imaginaire $\alpha+\beta i$ (α, β réels), correspond une racine conjuguée $\alpha-\beta i$, du même ordre de multiplicité; à un élément simple tel que

$$\frac{A+Bi}{(x-\alpha-\beta i)^p}$$

(A, B réels), correspond un élément simple conjugué

$$\frac{A-Bi}{(x-\alpha+\beta i)^p}.$$

Lorsque p est plus grand que 1, ces éléments simples fournissent de suite une partie de la fonction primitive cherchée, à savoir

$$\frac{-A - Bi}{(p-1)(x-\alpha-\beta i)^{p-1}} + \frac{-A + Bi}{(p-1)(x-\alpha+\beta i)^{p-1}},$$

la somme de ces deux fractions est évidemment réelle; c'est une fraction dont le dénominateur est $(p-1)\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}$ et dont le numérateur est

$$\begin{aligned}&-A\;[(x-\alpha-\beta i)^{p-1}+(x-\alpha+\beta i)^{p-1}]\\ &+Bi[(x-\alpha-\beta i)^{p-1}-(x-\alpha+\beta i)^{p-1}];\end{aligned}$$

il suffit d'effectuer le développement des puissances $(p-1)^{\text{ièmes}}$ pour voir comment les termes en i disparaissent.

Ce procédé ne réussit plus quand p est égal à 1; il introduirait des logarithmes de quantités imaginaires; mais il suffit de réunir, avant l'intégration, les deux éléments conjugués

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i},\quad \frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}$$

pour mettre leur somme sous la forme

$$\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2};$$

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\int \frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx &= A\int\frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} - 2B\int\frac{d\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}\\ &= A\lg[(x-\alpha)^3+\beta^2] - 2B\operatorname{arc\,tang}\frac{x-a}{\beta}.\end{aligned}$$

Si, par exemple, la fonction à intégrer, que je prends toute décomposée, est

$$\frac{1}{(x+i)^2}+\frac{1}{(x-i)^2}-\frac{1+2i}{x-1-i}-\frac{1-2i}{x-1+i}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1},$$

on voit que la fonction primitive s'obtiendra en ajoutant à

$$-\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}+\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{-2x}{1+x^2}+\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

la fonction primitive de

$$\frac{2i-1}{x-1+i}-\frac{2i+1}{x-1-i}=\frac{-2(x-1)+4}{(x-1)^2+1},$$

c'est-à-dire

$$-\lg(x^2-2x+2)+4\operatorname{arc\,tang}(x-1).$$

Considérons encore l'intégrale

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C},$$

en supposant réelles les racines x', x'' du trinome $Ax^2+2Bx+C$; on a

$$\frac{1}{A(x-x')(x-x'')}=\frac{1}{A(x'-x'')}\left(\frac{1}{x-x'}-\frac{1}{x-x''}\right)$$

et, par suite,

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\lg\left|\frac{x-x'}{x-x''}\right|,$$

en supposant les racines x', x'' rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$x'-x''=\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

Au lieu de réunir, avant d'intégrer, deux éléments simples conjugués, dont le dénominateur est du premier degré, on peut, en remontant à la définition de l'intégrale d'une fonction à coefficients imaginaires, calculer directement l'intégrale

$$\int\frac{dx}{x-a-bi},$$

où a et b sont supposés réels; on a, en effet, par définition,

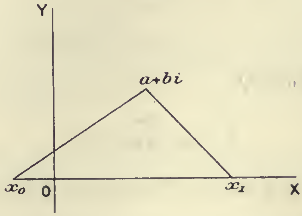
$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x-a-bi}&=\int\frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2}+i\int\frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2}\\&=\lg\sqrt{(x-a)^2+b^2}+i\operatorname{arc\,tang}\frac{x-a}{b}.\end{aligned}$$

En supposant que x_0 et x_1 soient des nombres réels, on aura

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x-a-bi}=&\lg\frac{\sqrt{(x_1-a)^2+b^2}}{\sqrt{(x_0-a)^2+b^2}}\\&+i\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1-a}{b}-\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{b}\right).\end{aligned}$$

Le second membre s'interprète géométriquement d'une façon simple, que le lecteur n'aura pas de peine à établir.

Fig. 96.



Figurons, conformément aux conventions habituelles, les points x_0, x_1 (sur l'axe des quantités réelles), et le point $a+bi$.

Dans l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-a-bi}$$

la partie réelle est le logarithme du rapport des distances du point $a+bi$ aux points x_1 et x_0 et le coefficient de i est l'angle (compris entre $-\pi$ et π) sous lequel on voit, du point $a+bi$, le vecteur qui va du point x_0 au point x_1; cet angle est positif ou négatif suivant qu'il a la disposition directe ou la disposition inverse; on peut dire encore qu'il est de même signe que le rapport $\dfrac{b}{x_1-x_0}$.

En employant la méthode précédente, on voit que l'on peut effectuer toute intégrale du type

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx,$$

où x_0, x_1 sont des nombres réels et où $f(x)$, $\varphi(x)$ sont des polynomes premiers entre eux, à coefficients réels ou imaginaires, en supposant que, dans l'intervalle (x_0, x_1), le dénominateur $\varphi(x)$ ne s'annule pas. L'intégrale n'a pas de sens quand $\varphi(x)$ s'annule dans cet intervalle.

La méthode générale s'applique sans difficulté à une intégrale du type

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}x+\mathrm{C})^n},$$

où $f(x)$ est un polynome; il n'est toutefois pas inutile d'indiquer une autre méthode pour traiter ces intégrales, en particulier dans le cas où les coefficients sont réels, et où les racines du trinome sont imaginaires. D'abord, en prenant $x + \frac{B}{A}$ pour variable, on ramènera cette intégrale à une intégrale du type

$$\int \frac{g(x)\,dx}{(x^2+\alpha)^n};$$

on peut, en séparant dans $g(x)$ les termes de degré pair et les termes de degré impair, mettre $g(x)$ sous la forme

$$g(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2);$$

en ordonnant ensuite $\varphi(x^2)$ et $\psi(x^2)$ suivant les puissances de $x^2+\alpha$, puis en divisant par $(x^2+\alpha)^n$, on voit qu'on mettra $\frac{g(x)}{(x^2+\alpha)^n}$ sous forme d'une partie entière et de termes de la forme

$$\frac{Ax}{(x^2+\alpha)^p}, \quad \frac{B}{(x^2+\alpha)^p}.$$

Les premiers s'intègrent immédiatement; on a en effet

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+\alpha)^p} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+\alpha)}{(x^2+\alpha)^p} = \frac{-1}{2(p-1)(x^2+\alpha)^{p-1}},$$

si p est plus grand que 1 et, si p est égal à 1,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}\lg(x^2+\alpha).$$

Quant aux autres termes, on a déjà donné une méthode pour les intégrer, qui consiste à poser $x = \sqrt{\alpha}\tang t$; on peut aussi obtenir une formule de réduction. Il suffit pour cela de prendre la dérivée de $x(x^2+\alpha)^{-p+1}$, qui est

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x(x^2+\alpha)^{-p+1}\right] &= \frac{1}{(x^2+\alpha)^{p-1}} - \frac{(2p-2)x^2}{(x^2+\alpha)^p} \\ &= -\frac{2p-3}{(x^2+\alpha)^{p-1}} + \frac{(2p-2)\alpha}{(x^2+\alpha)^p};\end{aligned}$$

on déduit de là

$$\alpha\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^p} = \frac{2p-3}{2p-2}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{p-1}} + \frac{x}{(2p-2)(x^2+\alpha)^{p-1}};$$

on peut au moyen de cette formule exprimer l'intégrale cherchée au moyen de $\int \frac{dx}{x^2+\alpha}$.

323. Un très grand nombre d'intégrales peuvent, par un changement de variables, se ramener à celles qu'on vient d'étudier, qui portent sur une fonction rationnelle. J'indique d'abord quelques exemples où le changement de variable s'aperçoit immédiatement.

Considérons une intégrale du type

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ est une fraction rationnelle en x, y et où y est mis, pour abréger, à la place de $\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{p}{q}}$, en désignant par p, q des nombres entiers et par a, b, a', b' des constantes, telles que $ab' - a'b$ ne soit pas nul; si l'on pose

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = t^q, \qquad x = \frac{b't^q - b}{a - a't^q}, \qquad dx = \frac{(ab' - a'b)}{(a - a't^q)^2}\, q\, t^{q-1}\, dt,$$

on ramènera évidemment la quantité sous le signe $\int$ à être rationnelle.

Plus généralement, considérons les intégrales du type

$$\int f(x, u, v, w, \ldots)\, dx$$

où $f(x, u, v, w, \ldots)$ est une fonction rationnelle en $x, u, v, w, \ldots$ et où $u, v, w, \ldots$ sont mis pour abréger à la place de

$$\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{p}{q}}, \quad \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{p'}{q'}}, \quad \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{p''}{q''}}, \quad \ldots,$$

$p, q, p', q', p'', q'', \ldots$ étant des entiers; il suffira de faire le changement de variables

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = t^r,$$

en désignant par r un entier qui soit divisible par $q, q', q'', \ldots$.

324. Voici maintenant une remarque générale :

Considérons l'intégrale $\int R(x, y)\, dx$, où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle de x, y et où y est une fonction *algébrique* de x, c'est-à-dire une fonction de x telle que l'on ait identiquement $\varphi(x, y) = 0$, en désignant par $\varphi(x, y)$ un polynome en x, y.

L'équation $\varphi(x, y) = 0$ définit y comme une fonction implicite de x; pour que cette fonction soit complètement définie dans un intervalle (A, B), il faut qu'on sache quelle racine de l'équation (en y) $\varphi(x, y) = 0$ il faut associer à chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (A, B); je suppose que cette fonction $y = \theta(x)$ soit continue dans cet intervalle, et qu'il en soit de même de la fonction $R[x, \theta(x)]$. Si x_0, x_1 appartiennent à l'intervalle (A, B) le symbole

$$\int_{x_0}^{x_1} R[x, \theta(x)]\, dx$$

a alors un sens précis.

Au point de vue géométrique, la définition précise de la fonction $\theta(x)$ revient à isoler, sur *la courbe algébrique* définie par l'équation $\varphi(x, y) = 0$, un trait continu qui n'est rencontré qu'en un point par les parallèles à l'axe des y, et qui va d'un point dont l'abscisse est A à un point dont l'abscisse est B. Ce *trait de courbe* représente la fonction $y = \theta(x)$, dans l'intervalle (A, B).

Supposons qu'il existe des fonctions rationnelles de t,

$$x = g(t), \qquad y = h(t),$$

continues dans l'intervalle (α, β) et telles que, lorsque t varie dans cet intervalle, le point dont les coordonnées sont x, y décrive précisément ce trait de courbe; pour évaluer l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} R(x, y)\, dx$, on fera le changement de variable

$$x = g(t), \qquad dx = h'(t)\, dt;$$

la fonction $y = \theta(x)$, par ce changement de variables, se changera en $h(t)$ et l'intégrale proposée deviendra

$$\int_{t_0}^{t_1} R[g(t), h(t)]\, h'(t)\, dt,$$

t_0 et t_1 étant des valeurs de t, appartenant à l'intervalle (α, β), telles que l'on ait

$$x_0 = g(t_0), \qquad x_1 = g(t_1).$$

La quantité sous le signe $\int$ est maintenant rationnelle en t et le problème est par conséquent ramené à celui qu'on vient de traiter.

325. *Digression sur les courbes unicursales.* — On voit d'après cela l'importance des courbes algébriques, dites *unicursales,* telles que les coordonnées de leurs points s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre t.

Dire que la courbe algébrique dont l'équation est $\varphi(x, y) = 0$ est unicursale, c'est dire qu'il existe deux fonctions rationnelles $g(t)$, $h(t)$ telles que le lieu des points dont les coordonnées x, y annulent le polynome $\varphi(x, y)$ est le même que le lieu des points dont on obtient les coordonnées x, y en donnant à t toutes les valeurs possibles dans les formules $x = g(t)$, $y = h(t)$.

En d'autres termes, si la courbe dont l'équation est $\varphi(x, y) = 0$ est unicursale, d'une part, à chaque valeur de t correspond un point de la courbe dont les coordonnées x, y sont fournies par les formules précédentes, en sorte qu'on doit avoir identiquement (en t),

$$\varphi[g(t), h(t)] = 0,$$

et, d'autre part, à chaque point de la courbe, à chaque système de valeurs x, y qui annulent le polynome $\varphi(x, y)$ correspond au moins [1] une valeur de t telle que l'on ait $x = g(t)$, $y = h(t)$.

Par conséquent, si x, y sont les coordonnées d'un point de la courbe, les deux équations précédentes considérées comme des équations en t ont au moins une racine commune. Réciproquement, il est clair que, si ces deux équations ont une racine commune, le point dont les coordonnées sont $x = g(t)$, $y = h(t)$ est un point de la courbe : l'équation $\varphi(x, y) = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (en t) $x = g(t)$, $y = h(t)$ aient une racine commune.

---

[1] On démontre que, si la courbe est unicursale, on peut choisir les fonctions $g(t)$, $h(t)$ de manière qu'à chaque point de la courbe (sauf des points exceptionnels, en nombre fini) ne corresponde qu'*une* valeur de t.

Les courbes du second degré sont unicursales.

Soit en effet

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une telle courbe, équation dont je désignerai le premier membre par $\varphi(x, y)$; soient en outre x_0, y_0 les coordonnées d'un point fixe pris arbitrairement sur cette courbe, en sorte qu'on ait $\varphi(x_0, y_0) = 0$; on commencera par faire le changement de variables

$$x = x_0 + X, \qquad y = y_0 + Y,$$

qui revient à transporter les axes parallèlement à eux-mêmes, de façon que la nouvelle origine coïncide avec le point dont les coordonnées étaient primitivement x_0, y_0; à cause de l'identité (n° 48)

$$\varphi(x_0 + X, y_0 + Y) = \varphi(x_0, y_0) + X\varphi'_{x_0} + Y\varphi'_{y_0} + AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

on voit que les valeurs de x, y qui vérifient l'équation $\varphi(x, y)$ s'obtiendront en ajoutant à x_0, y_0 des valeurs de X, Y qui vérifient l'équation

$$(2)\qquad AX^2 + 2BXY + CY^2 + X\varphi'_{x_0} + Y\varphi'_{y_0} = 0.$$

Si, dans cette équation, on fait $Y = tX$, et qu'on supprime le facteur X, elle devient

$$(A + 2Bt + Ct^2)X + \varphi'_{x_0} + t\varphi'_{y_0} = 0.$$

On voit que l'équation (2) est vérifiée quel que soit t, si l'on prend

$$X = \frac{-\varphi'_{x_0} - t\varphi'_{y_0}}{A + 2Bt + Ct^2}, \qquad Y = tX = \frac{-t\varphi'_{x_0} - t^2\varphi'_{y_0}}{A + 2Bt + Ct^2},$$

et que, inversement, à chaque système de valeurs de X, Y qui vérifient l'équation (2), correspond en général une valeur $\frac{Y}{X}$ de t pour laquelle les seconds membres des égalités précédentes prennent respectivement les valeurs X, Y. Les expressions de x, y que l'on tire de là sont de la forme

$$(3)\qquad x = \frac{a + 2bt + ct^2}{A + 2Bt + Ct^2}, \qquad y = \frac{a' + 2b't + c't^2}{A + 2Bt + Ct^2},$$

Ce sont des fractions rationnelles en t dont les termes sont du second degré et dont les dénominateurs sont les mêmes. Je laisse de côté la démonstration de la réciproque, en vertu de laquelle une courbe définie par des équations telles que (3) est une courbe du second degré [1].

Au lieu de faire le calcul comme on vient de l'indiquer, il revient au même de résoudre les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad y - y_0 = t(x - x_0)$$

par rapport à x, y, ce qui revient à prendre l'intersection de la courbe donnée et d'une droite variable passant par le point fixe x_0, y_0 de cette courbe ; l'équation du second degré en x,

$$\varphi[x, y_0 + t(x - x_0)] = 0,$$

a une racine connue x_0 ; l'autre racine s'exprime rationnellement en t, elle fournit ainsi l'expression de x au moyen de t ; l'expression de y est ensuite fournie par la formule $y = y_0 + t(x - x_0)$.

Enfin on peut encore opérer de la façon suivante, que le lecteur, s'il est familier avec la géométrie analytique et l'emploi des coordonnées homogènes, raccordera sans peine avec la méthode qu'on vient d'indiquer.

On résout par rapport à x, y le système d'équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad y = mx + t,$$

en choisissant la constante m de manière que l'équation en x, $\varphi(x, mx + t) = 0$, qui est en général du second degré en x, s'abaisse au premier ; il suffira pour cela de prendre pour m l'une des racines de l'équation du second degré

$$m^2 + 2Bm + A = 0.$$

Ayant ainsi choisi m, on obtient sans peine x et y exprimés ration-

(1) Il y aurait exception si le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ A & B & C \end{vmatrix}$ était nul ; les équations (3) définiraient alors une droite, dont une ou plusieurs parties seraient décrites deux fois quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

nellement en t. Cette méthode, si l'on ne veut introduire que des éléments réels, suppose $B^2 - AC \geqq 0$.

Voici un exemple.

On demande d'exprimer x et $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ rationnellement en t. Ce problème rentre bien dans ceux qu'on vient de traiter : il revient, en effet, à exprimer x et y rationnellement en t de manière à vérifier l'équation du second degré $y^2 = ax^2 + 2bx + c$; on choisira pour x_0 un nombre quelconque qui rende le second membre positif, et pour y_0 l'une des deux valeurs de $\pm\sqrt{ax_0^2 + 2bx_0 + c}$; supposons, par exemple, $c > 0$: on pourra prendre $x_0 = 0$, $y_0 = \sqrt{c}$ et remplacer y par $\sqrt{c} + Y$; on aura alors, pour l'équation entre Y et x,

$$Y^2 + 2\sqrt{c}\,Y = ax^2 + 2bx;$$

en posant $Y = tx$, et résolvant par rapport à x, on trouve

$$x = \frac{2(b - t\sqrt{c})}{t^2 - a}, \qquad y = \frac{-t^2\sqrt{c} + 2bt - a\sqrt{c}}{t^2 - a}.$$

Si a est positif, on peut résoudre les deux équations

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c, \qquad y = x\sqrt{a} + t.$$

On trouve ainsi

$$x = \frac{c - t^2}{2(t\sqrt{a} - b)}, \qquad y = \frac{t^2\sqrt{a} - 2bt + c\sqrt{a}}{2(t\sqrt{a} - b)}.$$

Dans le cas où la courbe $\varphi(x, y) = 0$ n'est pas du second degré, on ne peut pas, en général, exprimer x, y rationnellement en t; cela n'est possible que pour des courbes spéciales, et cette possibilité est liée à l'existence de points *multiples* sur la courbe.

Supposons que le polynome $\varphi(x, y)$ ne contienne pas de terme constant, c'est-à-dire que la courbe dont l'équation est $\varphi(x, y) = 0$ passe par l'origine : imaginons que le polynome soit ordonné comme il a été expliqué au n° 44, en mettant d'abord les termes du premier degré, s'il y en a, puis les termes du deuxième degré, puis ceux du troisième degré, etc. Si les termes du plus bas degré dans $\varphi(x, y)$ sont du $p^{\text{ième}}$ degré, on dira que l'origine est, pour la courbe, un point p^{uple}, ou un point multiple d'ordre de multiplicité p. L'origine est un point simple de la courbe s'il y a des termes du premier degré.

Soit maintenant x_0, y_0 un point quelconque de la courbe; remplaçons, dans $\varphi(x, y)$, x et y par $x_0+\mathrm{X}$ et $y_0+\mathrm{Y}$ et ordonnons le polynome (en X, Y) $\varphi(x_0+\mathrm{X},\ y_0+\mathrm{Y})$, comme il vient d'être expliqué : si les termes du plus bas degré sont du degré p, on dira que le point dont les coordonnées sont x_0, y_0 est un point p^{uple} de la courbe dont l'équation est $\varphi(x, y)=0$.

Pour que x_0, y_0 soient les coordonnées d'un point multiple, il faut que l'on ait (nº 48) :

$$\varphi(x_0, y_0)=0, \qquad \varphi'_{x_0}=0, \qquad \varphi'_{y_0}=0, \qquad \ldots$$

Si les conditions écrites explicitement sont vérifiées, le point considéré est au moins *double*.

Je vais montrer, dans le cas où le polynome $\varphi(x, y)$ est du troisième ou du quatrième degré, le parti qu'on peut tirer de la connaissance d'un point double; je suppose de suite que ce point double soit l'origine des coordonnées; s'il n'en était pas ainsi, on commencerait par faire la transformation expliquée plus haut. Dans le cas du troisième degré, si l'origine est un point double de la courbe, l'équation de celle-ci doit être de la forme

$$ax^2+bxy+cy^2+\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3=0;$$

il suffit de résoudre cette équation et l'équation $y=tx$, pour obtenir x et y exprimés rationnellement au moyen de t : les courbes du troisième degré qui admettent un point double sont unicursales. On voit que x, y s'expriment par des fractions de même dénominateur dont les termes sont, au plus, du troisième degré.

Dans le cas d'une courbe du quatrième degré, si l'origine est un point triple, le même procédé permet d'obtenir x, y en fonction de t. Si l'origine est un point double, l'équation peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{F}(x, y)+\mathrm{G}(x, y)+\mathrm{H}(x, y)=0,$$

F, G, H désignant des polynomes homogènes en x, y qui sont respectivement du second, du troisième et du quatrième degré; en remplaçant y par tx dans cette équation, on obtient, après avoir supprimé le facteur x^2,

$$\mathrm{F}(1, t)+x\,\mathrm{G}(1, t)+x^2\,\mathrm{H}(1, t)=0$$

On en tire

$$x = \frac{-G(1, t) \pm \sqrt{G^2(1, t) - 4F(1 . t) H(1, t)}}{2H(1, t)}.$$

Le polynome en t sous le radical est en général du sixième degré; s'il arrivait que ce polynome admît deux racines doubles, ou une racine quadruple, en sorte qu'on pût le mettre sous la forme

$$K^2(t)(At^2 + Bt + C),$$

x se mettrait sous la forme

$$x = \frac{-G(1 . t) \pm K(t)\sqrt{At^2 + Bt + C}}{2H(1, t)};$$

or, on a vu plus haut qu'on pouvait exprimer t en fonction rationnelle d'une autre variable t' de manière que $\sqrt{At^2 + Bt + C}$ s'exprimât aussi rationnellement en fonction de t'; dans ce cas, x et, par conséquent, $y = tx$ s'expriment rationnellement en fonction de t'.

On peut encore essayer, pour une courbe du troisième ou du quatrième degré, dont l'équation est $\varphi(x, y) = 0$, de résoudre les deux équations simultanées

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad y = mx + t;$$

en choisissant la constante m de manière que l'équation en x

$$\varphi(x, mx + t) = 0$$

soit du premier degré quand φ est du troisième degré, du second degré, au plus, quand φ est du quatrième degré. Si cela est possible, il est clair, lorsque l'équation en x est du premier degré, qu'on peut exprimer rationnellement x, y au moyen de t; dans le cas où, le polynome $\varphi(x, y)$ étant du quatrième degré, on peut ramener l'équation en x à être du second degré, x s'exprime rationnellement, comme tout à l'heure, au moyen de t et d'un radical du second degré, qui porte, en général, sur un polynome du sixième degré; ici, encore, s'il arrive que ce polynome soit le produit d'un carré parfait par un trinome du second degré en t, la courbe est unicursale.

Une étude approfondie du sujet conduit à des méthodes générales pour reconnaître si une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré est, ou non, unicursale, et pour exprimer rationnellement, au moyen d'un paramètre t, lorsque cela est possible, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Les recettes que j'ai indiquées plus haut réussissent en fait, lorsque le degré de la courbe ne dépasse pas 4. Je ne m'arrêterai pas à le démontrer.

326. **Applications.** — Les intégrales du type

$$\int R(x, y)\,dx,$$

où y est mis, pour abréger, à la place de $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, peuvent, par le procédé qu'on vient d'expliquer, être ramenées à des intégrales qui portent sur des fonctions rationnelles.

Il en est de même des intégrales du type

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

où R est une fonction rationnelle de $\cos x$ et de $\sin x$; on observera d'abord que ces intégrales se ramèneraient au type précédent en posant

$$\cos x = u, \qquad \sin x = \pm\sqrt{1 - u^2}, \qquad dx = \pm\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}};$$

on ramène la quantité sous le signe $\int$ à être rationnelle en posant

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} = t, \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2};$$

je reviendrai d'ailleurs sur les intégrales des deux types précédents.

La courbe (folium de Descartes), définie par l'équation

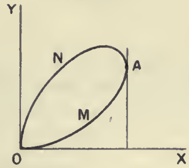
$$x^3 + y^3 - axy = 0,$$

est unicursale; les coordonnées d'un quelconque de ses points s'expriment par les formules

$$x = \frac{at}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{at^2}{1 + t^3};$$

en supposant que t varie de o à $+\infty$, le point x, y décrit une courbe fermée, tangente aux deux axes, dont je me propose de calculer l'aire.

Fig. 97.



La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des y; on trouverait la valeur t' de t qui correspond au point de contact A, en cherchant la valeur positive de t qui annule $\frac{dx}{dt}$. Le point A sépare la boucle OMANO en deux traits de courbe OMA, ANO.

Le premier est décrit par le point x, y quand t croît de o à t'; à ce trait correspond une fonction $y = \theta(x)$, vérifiant l'équation de la courbe, définie dans l'intervalle $(0, \alpha)$ en posant

$$\alpha = \frac{at'}{1+t'^3};$$

quand t croît de o à t', x croît de o à α et y de o à $\frac{at'^2}{1+t'^3}$. Le second trait de courbe est décrit quand t croît de t' à $+\infty$; à ce second trait correspond une fonction $y = \theta_1(x)$, vérifiant encore l'équation de la courbe; quand t croît de t' à $+\infty$, x décroît de α à o, y varie de $\frac{at'^2}{1+t'^3}$ à o. L'aire cherchée est d'ailleurs égale à

$$\int_0^\alpha \theta_1(x)\,dx - \int_0^\alpha \theta(x)\,dx;$$

dans chacune des intégrales faisons la substitution

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \qquad dx = a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}d.$$

$\theta_1(x)$ et $\theta(x)$ prendront la forme $\frac{at^2}{1+t^3}$; mais aux valeurs de x qui vont de o à α, correspondent, pour la première intégrale, les valeurs de t qui vont de $+\infty$ à t', et, pour la seconde intégrale, celles qui vont de o à t'; l'aire cherchée sera donc

$$\int_\infty^{t'} \frac{a^2t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt - \int_0^{t'} \frac{a^2t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt.$$

On a d'ailleurs

$$\int_{\infty}^{t'} - \int^{t'} = -\int^{t'} - \int_{t'}^{\infty} = -\int_{0}^{\infty}.$$

L'aire cherchée est donc

$$-\int_{0}^{\infty} \frac{a^2(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\,dt = a^2 \int_{0}^{\infty} \frac{(2t^3-1)t^2}{(1+t^3)^3}\,dt.$$

Si l'on pose

$$u = 1 + t^3, \qquad du = 3t^2\,dt,$$

on voit de suite que u varie de 1 à $+\infty$ quand t varie de 0 à ∞ et l'on arrive, pour l'aire cherchée, à l'expression

$$\frac{a^2}{3}\int_{1}^{\infty} \frac{2u-3}{u^3}\,du = \frac{a^2}{3}\left[\int_{1}^{\infty} \frac{2\,du}{u^2} - 3\int_{1}^{\infty} \frac{du}{u^3}\right].$$

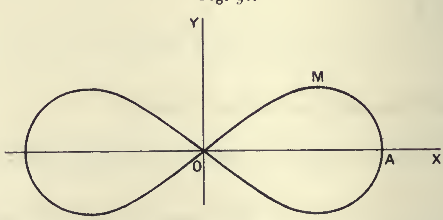
Le calcul s'achève immédiatement; l'aire cherchée est égale à $\frac{a^2}{2}$.

La courbe du quatrième degré (lemniscate de Bernoulli) définie par l'équation

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

a la forme figurée ci-dessous; cherchons à évaluer l'aire OAM située dans l'angle des coordonnées positives.

Fig. 98.



L'origine est un point double; en résolvant par rapport à x, y l'équation de la courbe et l'équation $y = mx$, on trouve

$$x = \pm \frac{a\sqrt{1-m^2}}{1+m^2}, \qquad y = \pm \frac{am\sqrt{1-m^2}}{1+m^2},$$

x et y s'expriment rationnellement au moyen de m et de $\sqrt{1-m^2}$; comme ces deux quantités s'expriment rationnellement au moyen d'un paramètre, en posant, par exemple,

$$m = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sqrt{1-m^2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

on voit que x et y peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de t et que la courbe considérée est unicursale; mais, pour l'objet que l'on a en vue, il suffit de prendre m pour variable; on reconnaît tout d'abord que, lorsque m croît de o à 1, le point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a\sqrt{1-m^2}}{1+m^2}, \qquad y = \frac{am\sqrt{1-m^2}}{1+m^2}$$

décrit l'arc AMO; ces deux formules, ou le trait de courbe, définissent y comme une fonction de x dans l'intervalle $(0, a)$.

Le problème consiste dans l'évaluation de l'intégrale $\int_0^a y\,dx$. Si l'on y fait la substitution

$$x = \frac{a\sqrt{1-m^2}}{1+m^2}, \qquad dx = -a\frac{m(3-m^2)}{(1+m^2)^2\sqrt{1-m^2}},$$

aux limites o et a de x correspondront, pour m, les limites 1 et o, et l'on aura

$$\int_0^a y\,dx = a^2\int_0^1 \frac{m^2(3-m^2)}{(1+m^2)^3}\,dm;$$

on a affaire à une intégrale portant sur une fonction rationnelle que l'on pourra traiter par la méthode du n° 317; on peut aussi poser

$$m = \operatorname{tang}\theta, \qquad dm = \frac{d\theta}{\cos^2\theta};$$

lorsque θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, m croît de o à 1, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{m^2(3-m^2)}{(1+m^2)^3}\,dm &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta - \cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

L'aire cherchée est $\frac{a^2}{4}$, l'aire totale de la lemniscate est a^2.

327. Je reviens, après ces exemples, aux intégrales du type

$$\int R(x, y)\, dx,$$

où R est une fonction rationnelle de x et de y et où y est mis à la place de $\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$; je vais indiquer un autre procédé d'intégration. Rien n'empêche de supposer B nul, puisque l'on peut toujours commencer par faire la substitution $x + \frac{B}{A} = x'$; c'est ce que je ferai dans ce qui suit. On peut supposer aussi que la fraction rationnelle $R(x, y)$ ne contient y qu'au premier degré puisque l'on peut remplacer y^{2n} et y^{2n+1} respectivement par $(Ax^2 + C)^n$, $(Ax^2 + C)^n y$; on peut donc, en désignant par M, N, P, Q des polynomes en x, supposer que $R(x, y)$ a été mis sous la forme

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \frac{M + Ny}{P + Qy} = \frac{(M + Ny)(P - Qy)}{P^2 - Q^2 y^2} \\ &= \frac{MP - NQ(Ax^2 + C)}{P^2 - Q^2(Ax^2 + C)} + \frac{(NP - MQ)}{P^2 - Q^2(Ax^2 + C)} \frac{Ax^2 + C}{\sqrt{Ax^2 + C}} \\ &= f(x) + \frac{g(x)}{h(x)} \frac{1}{\sqrt{Ax^2 + C}}, \end{aligned}$$

où $f(x)$ est une fraction rationnelle en x, où $g(x)$, $h(x)$ sont des polynomes en x; puisque l'on sait trouver la fonction primitive d'une fraction rationnelle $f(x)$, le calcul de $\int R(x, y)\, dx$ est donc ramené à celui de l'intégrale

$$\int \frac{g(x)}{h(x)} \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + C}}.$$

Je me bornerai, dans la suite, au cas où les racines de $f(x)$ sont réelles. En décomposant la fraction $\frac{g(x)}{h(x)}$ en éléments simples, on voit de suite que tout est ramené à effectuer des intégrales qui appartiennent respectivement aux types

$$\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{Ax^2 + C}}, \qquad \int \frac{dx}{(x - a)^p \sqrt{Ax^2 + C}},$$

où n et p sont des entiers positifs ou nuls.

Considérons d'abord les premières; quand $n = 2m + 1$ est impair, il est avantageux de faire la substitution

$$Ax^2 + C = z^2, \qquad Ax\,dx = z\,dz$$

qui donne

$$\int \frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{Ax^2+C}} = \int \left(\frac{z^2 - C}{A}\right)^m \frac{dz}{A}.$$

On développera ensuite $\left(\frac{z^2 - c}{A}\right)^m$ par la formule du binome; le calcul s'achèvera sans peine.

Quand $n = 2m$ est pair, on obtiendra une formule de réduction, d'après le procédé indiqué au n° **321**, en partant des formules

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2m-1}\sqrt{Ax^2+C}\right) = \frac{2mAx^{2m} + (2m-1)Cx^{2m-2}}{\sqrt{Ax^2+C}},$$

$$2mA\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{Ax^2+C}} + (2m-1)C\int \frac{x^{2m-2}\,dx}{\sqrt{Ax^2+C}} = x^{2m-1}\sqrt{Ax^2+C},$$

dont la dernière permettra de ramener de proche en proche le calcul de $\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{Ax^2+C}}$ à celui de $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+C}}$.

Quant aux intégrales du type

$$\int \frac{dx}{(x-a)^p\sqrt{Ax^2+C}},$$

on pourrait les obtenir par une voie analogue; on peut aussi faire la substitution

$$x = a + \frac{1}{z}, \qquad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

qui donne

$$\int \frac{dx}{(x-a)^p\sqrt{Ax^2+C}} = -\int \frac{z^{p-2}\,dz}{\sqrt{Aa^2 + C + \frac{2Aa}{z} + \frac{A}{z^2}}}$$

$$= -\operatorname{sgn} z \int \frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{(Aa^2+C)z^2 + 2Aaz + A}};$$

il convient de remarquer que, si l'on a affaire primitivement à une intégrale définie, prise entre les limites x_0 et x_1, le nombre a ne doit pas appartenir à l'intervalle (x_0, x_1) si l'on veut que cette intégrale ait un sens; par suite, entre les limites correspondantes de la nouvelle intégrale, z ne changera pas de signe; $\operatorname{sgn} z$ sera toujours égal à 1 ou toujours égal à -1; l'intégrale précédente appartient au type que l'on vient d'étudier.

Si a était nul et si p était impair, il conviendrait encore de faire le changement de variable $Ax^2 + C = y$.

328. Considérons maintenant les intégrales du type

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

où $R(\sin x, \cos x)$ désigne une fraction rationnelle en $\sin x$, $\cos x$.

Si l'on a affaire à une intégrale définie, les limites x_0, x_1 doivent être telles que la fonction $R(\sin x, \cos x)$ soit continue dans l'intervalle (x_0, x_1).

On a vu qu'une intégrale de ce type se ramenait à une intégrale portant sur une fonction rationnelle en posant

$$x = 2 \operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

il convient, toutefois, de remarquer que t variant de $-\infty$ à $+\infty$, x varie de $-\pi$ à $+\pi$; la méthode s'applique sans difficulté à une intégrale définie dont les limites appartiennent à l'intervalle $(-\pi, \pi)$; on aura alors, en posant $t_0 = \operatorname{tang}\frac{x_0}{2}$, $t_1 = \operatorname{tang}\frac{x_1}{2}$,

$$\int_{x}^{x_1} R(\sin x, \cos x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} 2R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Elle ne peut s'appliquer sans modifications lorsque l'un des nombres x_0, x_1 est en dehors de l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Il faut alors ramener les limites de l'intégrale à être comprises dans cet intervalle : on y parviendra en fractionnant au besoin l'intervalle d'intégration. Supposons d'abord $0 < x_1 - x_0 < 2\pi$; déterminons un nombre entier n tel que l'on ait (¹)

$$-\pi < x_0 - n\pi < 0,$$

(¹) n sera la valeur approchée, à une unité près, par excès de $\frac{x_0}{\pi}$.

et faisons la substitution

$$x = n\pi + y, \qquad dx = dy;$$

$\sin x$ et $\cos x$ seront remplacés par $\alpha \sin y$ et $\alpha \cos y$ [1], α étant égal à $(-1)^n$; l'intégrale devient

$$\int_{x_0 - n\pi}^{x_1 - n\pi} R(\alpha \sin y, \alpha \cos y)\, dy.$$

Si $x_1 - n\pi$ appartient, comme $x_0 - n\pi$, à l'intervalle $(-\pi, \pi)$, le problème est résolu : si $x_1 - n\pi$ est plus grand que π, on écrira

$$\int_{x_0 - n\pi}^{x_1 - n\pi} = \int_{x_0 - n\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{x_1 - n\pi}$$

la première intégrale rentre dans les conditions voulues; pour calculer la seconde, on fera le changement de variable

$$y = \pi + z, \qquad dy = dz,$$

$\sin y$ et $\cos y$ sont remplacés par $-\sin z$, $-\cos z$ et la seconde intégrale est remplacée par

$$\int_0^{x_1 - (n+1)\pi} R(-\alpha \sin z, -\alpha \cos z)\, dz,$$

qui rentre aussi dans les conditions voulues, puisque $x_1 - (n+1)\pi$ ne peut être supérieur à π.

Si l'on avait maintenant $x_1 - x_0 > 2\pi$, ce qui ne peut d'ailleurs arriver que si la fonction $R(\sin x, \cos x)$ est continue dans tout intervalle, on partagerait l'intervalle (x_0, x_1) en intervalles tels que

$$(x_0, x_0 + 2\pi), \quad (x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi), \quad \ldots, \quad (x_0 + 2n\pi, x_1),$$

donc chacun aurait une étendue égale ou inférieure à 2π et l'on serait

(1) Comme le nom de la variable d'intégration n'importe pas, on emploie souvent la même lettre x pour désigner la nouvelle variable : on dit alors que l'on remplace x par $n\pi + x$; les limites x_0 et x_1 sont remplacées par $x_0 - n\pi$, $x_1 - n\pi$; la quantité sous le signe $\int$ ne change pas, si n est pair.

ramené à des intégrales

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi}, \quad \int_{x_0+2\pi}^{x_0+4\pi}, \quad \ldots, \quad \int_{x_0+2n\pi}^{x_1},$$

que l'on sait traiter.

On observera qu'une intégrale de la forme

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\, dx,$$

où la fonction sous le signe $\int$ est supposée continue dans tout intervalle, est indépendante de x_0 : en effet, on peut l'écrire

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} = \int_{x_0}^{0} + \int_{0}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+x_0};$$

en remplaçant dans la dernière x par $2\pi + x$, on la ramène à la forme $\int_0^{x_0}$; elle détruit la première et l'on a, quel que soit x_0,

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} = \int_0^{2\pi};$$

si, en particulier, on prend $x_0 = -\pi$, on voit que l'intégrale considérée est égale à

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\mathrm{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Les calculs que l'on vient d'expliquer sont, dans certains cas, susceptibles de simplifications. Si la fonction $\mathrm{R}(\sin x, \cos x)$ peut être mise sous forme de fonction rationnelle de $\sin 2x$, $\cos 2x$, ce qui arrivera en particulier si $\mathrm{R}(\sin x, \cos x)$ est rationnel en $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, il sera avantageux de prendre pour nouvelle variable non pas $\tan\frac{x}{2}$, mais bien $\tan x$; il y aura, pour ce qui concerne les limites, à prendre des précautions analogues à celles sur lesquelles je viens d'insister.

329. Telles sont, par exemple, les intégrales du type

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}$$

sur lesquelles je vais m'arrêter un instant.

J'observe d'abord que les intégrales du type

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x + c} = \int \frac{dx}{(a+c)\cos^2 x + (b+c)\sin^2 x}$$

rentrent dans le type précédent; il en est de même des intégrales du type

$$\int \frac{dx}{\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}} = \int \frac{dx}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos^2 \frac{x}{2} + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin^2 \frac{x}{2}},$$

après que l'on y a remplacé x par $2x$; plus généralement les intégrales

$$\int \frac{dx}{\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \mathrm{C}}$$

rentrent encore dans le même type : si l'on détermine, en effet, un angle α tel que l'on ait

$$\mathrm{A} = r\cos\alpha, \qquad \mathrm{B} = r\sin\alpha,$$

elles prennent la forme

$$\int \frac{dx}{r\cos(x-\alpha) + \mathrm{C}},$$

et il suffit de remplacer x par $\alpha + x$ pour les ramener à un type que l'on vient d'examiner.

Ceci posé, pour ce qui est des intégrales

$$\int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x},$$

on aura à distinguer deux cas, suivant que a et b sont de mêmes signes ou de signes contraires. Le cas où l'une de ces constantes serait nulle se traite immédiatement, puisque l'on a

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotang} x = -\frac{1}{\operatorname{tang} x}:$$

1° Supposons que a et b soient de signes contraires. Si l'on a affaire à une intégrale définie, prise entre les limites x_0 et x_1, il faut, pour que cette intégrale ait un sens, que le dénominateur

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x$$

ne s'annule pas dans l'intervalle (x_0, x_1), en d'autres termes que l'on n'ait pour aucune valeur de x appartenant à cet intervalle

$$\operatorname{tang} x = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi; on pourra, par des procédés analogues à ceux qui ont été décrits plus haut, quitte à fractionner l'intégrale, s'arranger pour que les limites appartiennent à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, puis faire la substitution

$$x = \operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

qui ramène l'intégrale à la forme

$$\int \frac{dt}{a+bt^2},$$

que l'on sait traiter : aux limites x_0, x_1 correspondront les limites $t_0 = \operatorname{tang} x_0$, $t_1 = \operatorname{tang} x_1$.

On peut d'ailleurs se dispenser de ramener les limites à être comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si, en effet, on pose $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{-\frac{a}{b}}$, la substitution précédente, faite sans se préoccuper des limites, conduit aux égalités

$$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \int \frac{dt}{a+bt^2} = \frac{1}{2b\operatorname{tang}\alpha}\lg\left|\frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang}\alpha}\right|$$
$$= \frac{1}{2b\operatorname{tang}\alpha}\lg\left|\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right|,$$

l'égalité des membres extrêmes veut dire que la dérivée du dernier membre est $\frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$; c'est d'ailleurs ce que le lecteur n'aura point de peine à vérifier; pour appliquer cette formule à la détermination d'une intégrale définie, prise entre les limites x_0 et x_1, il suffit que la fonction $\lg\left|\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\right|$ soit continue dans l'intervalle (x_0, x_1), c'est-à-dire que $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}$ ne s'annule pas et ne devienne pas infini, ou encore que x ne prenne dans cet intervalle aucune valeur de la forme $\pm\alpha + m\pi$, m étant un nombre entier; or, pour une telle valeur, on aurait

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(\pm\alpha) = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

et l'on a supposé que cela ne pouvait avoir lieu dans l'intervalle (x_0, x_1) afin que l'intégrale proposée eût un sens. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} &= \frac{1}{2b\operatorname{tang}\alpha}\left[\lg\left|\frac{\sin(x_1-\alpha)}{\sin(x_1+\alpha)}\right| - \lg\left|\frac{\sin(x_0-\alpha)}{\sin(x_0+\alpha)}\right|\right]\\ &= \frac{1}{2b\operatorname{tang}\alpha}\lg\frac{\sin(x_1-\alpha)}{\sin(x_1+\alpha)}\,\frac{\sin(x_0+\alpha)}{\sin(x_0-\alpha)};\end{aligned}$$

dans la dernière expression, la quantité sous le signe lg est positive, car les deux facteurs sont de mêmes signes.

On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{dx}{3\cos^2 x - \sin^2 x} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\lg\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\lg\frac{\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{7\pi}{6}}{\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\lg\sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{\lg 2}{\sqrt{3}} = 0,4\ldots\end{aligned}$$

Considérons maintenant les intégrales du type

$$\int\frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x},$$

où a et b sont de mêmes signes; dans ce cas, la fonction sous le signe $\int$ est toujours continue; on peut appliquer ici les méthodes générales, il est plus aisé de se rappeler que la fonction toujours continue (n° 211) $\operatorname{Arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tang}x\right)$, dont la valeur est comprise entre les mêmes multiples de $\frac{\pi}{2}$ que le nombre x, a pour dérivée $\frac{\sqrt{ab}\operatorname{sgn}a}{a\cos^2x+b\sin^2x}$, en sorte qu'on peut écrire

$$\int\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ab}}\operatorname{Arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tang}x\right).$$

On a, par exemple, en supposant a, b positifs,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}},$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}=\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}.$$

La méthode qu'on vient d'expliquer suffit à faire comprendre que, au lieu des fonctions $\operatorname{arc\,tang}x$, $\operatorname{arc\,sin}x$, ..., définies sans ambiguïté au n° 200, il peut être avantageux d'introduire des fonctions Arc tang, Arc sin, appropriées au problème spécial qu'on a en vue, et différentes de celles qu'on vient de rappeler. Supposons, par exemple, que les limites de l'intégrale à calculer soient x_0, x_1 et que l'on soit amené à y faire le changement de variable $t=\operatorname{tang}x$, la tangente variant d'une façon continue dans l'intervalle (x_0, x_1) dont je ne suppose pas que les bornes appartiennent à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; soient d'ailleurs

$$t_0=\operatorname{tang}x_0,\qquad t_1=\operatorname{tang}x_1;$$

il y a une détermination de $\operatorname{Arc\,tang}t$, telle que, t variant de t_0 à t_1, cette détermination varie, sans oscillation, de x_0 à x_1; il sera tout naturel de la choisir.

J'observerai aussi qu'il est parfois commode d'effectuer l'intégration sans trop se préoccuper des limites, de parvenir, comme on le peut, à une fonction qui admette comme dérivée le coefficient de dx sous le signe $\int$ et de s'assurer ensuite que les conditions de continuité sous lesquelles on peut appliquer la formule fondamentale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x_1) - \mathrm{F}(x_0),$$

sont vérifiées.

Si, par exemple, on fait dans l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} a}$$

la substitution $\operatorname{tang} x = t$, on la ramène à la forme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dt}{(1+t^2)(t-\operatorname{tang} a)}\\
&\quad = \cos^2 a \int \frac{dt}{t-\operatorname{tang} a} - \cos^2 a \int \frac{t\,dt}{1+t^2} - \sin a \cos a \int \frac{dt}{1+t^2}\\
&\quad = \cos^2 a \lg \left| \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} a}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 a}} \right| - x \sin a \cos a.
\end{aligned}$$

On en conclut que la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \cos^2 a \lg |\sin(x-a)| - x \sin a \cos a$$

admet pour dérivée $\dfrac{1}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} a}$.

D'un autre côté, si l'intégrale doit être prise entre les limites x_0, x_1, il ne doit y avoir dans l'intervalle (x_0, x_1) aucune racine de l'équation

$$\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} a = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sin(x-a) = 0;$$

dans ces conditions la fonction $\mathrm{F}(x)$ est continue dans l'intervalle (x_0, x_1) et l'on peut écrire

$$\frac{1}{\cos a} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} a} = \cos a \lg \left| \frac{\sin(x_1 - a)}{\sin(x_0 - a)} \right| - (x_1 - x_0) \sin a.$$

On peut même, dans le second membre, supprimer les deux barres verticales, car, dans les conditions que l'on a dites, l'expression $\dfrac{\sin(x-a)}{\sin(x_0-a)}$ garde son signe dans tout l'intervalle (x_0, x_1); elle est positive pour $x = x_0$, elle l'est encore pour $x = x_1$.

En particulier,

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{3} - \operatorname{tang} x} = \frac{\lg 2}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = 0,627,$$

à un demi-millième près, par excès.

330. Enfin, il convient de dire encore un mot du cas où la fonction $R(\cos x, \sin x)$, qui figure dans l'intégrale

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx,$$

est un polynome en $\cos x$ et $\sin x$; on a déjà donné, au n° 315, une méthode pour traiter ce cas; on peut aussi remarquer que tout se ramène au calcul des intégrales du type

$$\int \cos^p x \sin^q x\, dx,$$

où p, q sont des nombres entiers positifs ou nuls. Il est aisé de trouver une formule de réduction pour cette intégrale, que je désignerai par $A_{p,q}$. On a, quels que soient les entiers α, β,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos^\alpha x \sin^\beta x) &= -\alpha \cos^{\alpha-1} x \sin^{\beta+1} x + \beta \cos^{\alpha+1} x \sin^{\beta-1} x \\ &= -\alpha \cos^{\alpha-1} x \sin^{\beta-1} x (1 - \cos^2 x) + \beta \cos^{\alpha+1} x \sin^{\beta-1} x \\ &= \quad (\alpha + \beta) \cos^{\alpha+1} x \sin^{\beta-1} x - \alpha \cos^{\alpha-1} x \sin^{\beta-1} x \\ &= -(\alpha + \beta) \cos^{\alpha-1} x \sin^{\beta+1} x + \beta \cos^{\alpha-1} x \sin^{\beta-1} x,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) A_{\alpha+1,\beta-1} - \alpha A_{\alpha-1,\beta-1} &= \cos^\alpha x \sin^\beta x, \\ -(\alpha + \beta) A_{\alpha-1,\beta+1} + \beta A_{\alpha-1,\beta-1} &= \cos^\alpha x \sin^\beta x,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(p + q) A_{p,q} &= (p - 1) A_{p-2,q} + \cos^{p-1} x \sin^{q+1} x \\ &= (q - 1) A_{p,q-2} - \cos^{p+1} x \sin^{q-1} x.\end{aligned}$$

Ces formules ramènent, de proche en proche, le calcul de $A_{p,q}$ au calcul d'une intégrale du même type où p, q sont égaux à 0 ou à 1. Au reste, elles pourraient encore servir, en les résolvant par rapport à $A_{p-2,q}$, $A_{p,q-2}$ si p et q étaient négatifs. En restant dans le cas où p, q sont positifs, on observera que, si l'on désigne par $A'_{p,q}$ l'intégrale $A_{p,q}$ prise entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$A'_{p,q} = \frac{p-1}{p+q} A'_{p-2,q} = \frac{q-1}{p+q} A'_{p,q-2},$$

tant que p, q sont plus grands que 1; il est aisé de déduire de là l'expression de $A'_{p,q}$.

Lorsque l'un des nombres p, q est impair, on procède autrement pour le calcul de $A_{p,q}$: si, par exemple, p est impair, on écrira

$$\int \cos^p x \sin^q x \, dx = \int \sin^q x (1 - \sin^2 x)^{\frac{p-1}{2}} \, d\sin x = \int t^q (1 - t^2)^{\frac{p-1}{2}} \, dt,$$

en posant $t = \sin x$: on n'a plus qu'à intégrer une fonction entière.

Signalons encore les intégrales du type

$$\int \mathrm{R}(e^x) \, dx,$$

où $\mathrm{R}(e^x)$ est une fonction rationnelle de e^x; le cas où $\mathrm{R}(e^x)$ est un polynome en e^x a déjà été traité. On peut poser, en général,

$$e^x = t, \qquad x = \lg t, \qquad dx = \frac{dt}{t},$$

$$\int \mathrm{R}(e^x) \, dx = \int \frac{\mathrm{R}(t)}{t} \, dt;$$

on est encore ramené à une différentielle rationnelle.

§ 3. — ÉVALUATION APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

331. J'ai déjà donné, au n° 304, quelques indications sur ce sujet.

Lorsqu'on ne sait pas trouver l'expression explicite d'une intégrale définie

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

c'est aux méthodes d'approximation qu'il faut avoir recours; il convient d'observer d'ailleurs que l'expression explicite elle-même ne permet pas, d'ordinaire, autre chose qu'un calcul approché, et qu'elle n'est pas toujours plus avantageuse, même à ce point de vue, que les méthodes indiquées au n° 304 et sur lesquelles je dois m'arrêter un peu. Quoi qu'il en soit, la possibilité d'évaluer, avec telle approximation qu'on veut, une intégrale définie montre nettement que, si l'on regarde l'une des limites, la limite supérieure par exemple, comme une variable, l'intégrale définie est une *fonction* de cette variable (n° 194). La classification des fonctions ainsi définies, l'étude de leurs propriétés, constitue un Chapitre très important de l'Analyse. La première chose à faire est d'apprendre à les calculer; pour le reste, je me borne à remarquer que les théorèmes sur la variation des fonctions s'appliquent naturellement à l'étude de la variation de la fonction $\int_a^x f(x)\,dx$, dont la dérivée par rapport à x est $f(x)$: c'est seulement sur le calcul numérique que j'insisterai.

Je supposerai que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b); j'en désignerai une fonction primitive par $F(x)$ en sorte qu'on ait

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

naturellement, on ne supposera pas que la fonction $F(x)$ soit connue; $F(x)$ est simplement un symbole commode pour les explications théoriques; enfin je supposerai, comme au n° 304, que l'intégrale mesure une aire, décomposée en bandes étroites par des parallèles à l'axe des y; l'aire exacte d'une de ces bandes a une expression de la forme

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha);$$

où je supposerai $\alpha < \beta$.

On remplace cette aire par une expression approchée; si l'on connaît une limite de la valeur absolue de l'erreur que l'on commet, la somme de ces limites, relatives aux diverses bandes, fournira une limite supérieure de l'erreur.

La différence $h = \beta - \alpha$ des abscisses des parallèles à l'axe des y qui limitent la bande est petite; je la regarderai comme du *premier ordre,* en employant un langage analogue à celui de la théorie des infiniment petits (n° 245, note du n° 19); je regarderai h^n ou le produit de h^n par un nombre que l'on suppose être ni très petit ni très grand, comme étant du $n^{\text{ième}}$ ordre. Ce langage coïnciderait avec celui du n° 245 si l'on regardait, par exemple, α comme fixe, β comme variable et $\beta - \alpha$ comme l'infiniment petit principal.

La méthode même qui a conduit tout d'abord à la définition de l'intégrale définie consiste à prendre $h\,f(\alpha)$ ou $h\,f(\beta)$ comme valeur approchée de l'aire de la bande; l'erreur est alors, dans le premier cas,

$$F(\alpha + h) - F(\alpha) - h\,f(\alpha);$$

en supposant que la formule de Taylor s'applique et en remplaçant $F(\alpha + h)$ par

$$F(\alpha) + h\,F'(\alpha) + \frac{h^2}{2}F''(\alpha) + \ldots = F(\alpha) + h\,f(\alpha) + \frac{h^2}{2}f'(\alpha) + \ldots,$$

l'expression de cette erreur devient

$$\frac{h^2}{2}f'(\alpha) + \ldots.$$

On voit qu'elle est du second ordre, en supposant que $f'(\alpha)$ ne soit pas très grand, en valeur absolue. La conclusion serait la même si l'on avait choisi la valeur approchée $h\,f(\beta)$.

Si l'on prend pour l'aire de la bande l'aire $\frac{h}{2}[f(\beta) + f(\alpha)]$, l'erreur sera

$$\begin{aligned} &F(\alpha + h) - F(\alpha) - \frac{h}{2}[f(\alpha + h) + f(\alpha)] \\ &= \quad h\,f(\alpha) + \frac{h^2}{2}f'(\alpha) + \frac{h^3}{6}f''(\alpha) + \ldots \\ &\quad - \frac{h}{2}\left[2f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2}f''(\alpha) + \ldots\right] = -\frac{h^3}{12}f''(\alpha)\ldots. \end{aligned}$$

Elle sera, en général, du troisième ordre ([1]).

([1]) En prenant la valeur $h\,f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = h\,f\left(\alpha + \frac{h}{2}\right)$ que l'on a encore indiquée au n° 304 comme valeur approchée, on trouve que l'erreur est

$$\frac{h^3}{24}f''(\alpha) + \ldots;$$

Supposons qu'on ait divisé l'intervalle (a, b) en n parties égales à h, et qu'on remplace chacune des n bandes ainsi obtenues par le trapèze correspondant; on commettra sur chaque bande une erreur comparable à h^3; on peut donc s'attendre, sur le tout, à une erreur comparable à

$$nh^3 = (b-a)h^2 = \frac{(b-a)^3}{n^2},$$

c'est-à-dire à une erreur du second ordre.

On peut d'ailleurs donner une meilleure évaluation de l'erreur

$$F(\beta) - F(\alpha) - \frac{\beta-\alpha}{x}[f(\alpha)+f(\beta)],$$

commise sur chaque bande : représentons cette erreur par $A(\beta-\alpha)^3$, A étant un nombre qu'il s'agit d'évaluer; pour cela, considérons la fonction

---

elle est aussi du troisième ordre, à peu près moitié moindre, et de signe contraire. On est conduit, par ce calcul même, à une méthode encore préférable : il montre en effet que, dans la somme des développements suivant les puissances de h des quantités

$$F(\alpha+h) - F(\alpha) - \frac{h}{2}[f(\alpha)+f(\beta)],$$

et

$$2\left[F(\alpha+h) - F(\alpha) - h\,f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

les termes en h, h^2, h^3 disparaissent : le développement de

$$F(\alpha+h) - F(\alpha) - \frac{h}{6}\left[f(\alpha)+f(\beta)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

$$= F(\alpha+h) - F(\alpha) - \frac{h}{6}\left[f(\alpha)+f(\alpha+h)+4f\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\right]$$

commence donc, par un terme du quatrième degré au moins; en fait, ce développement commence par le terme

$$-\frac{h^5}{2880}f^{\text{IV}}(\alpha).$$

L'expression $\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+f(\beta)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$ fournit donc une très bonne valeur approchée de l'aire $F(\beta) - F(\alpha)$ de la bande considérée; cette expression est exacte quand $f(x)$ est un polynome du troisième degré, au plus, comme il résulte du calcul même, puisque, alors, les dérivées d'ordre égal ou supérieur à 4 sont identide x

$$\varphi(x) = F(x) - F(\alpha) - \frac{x-\alpha}{2}[f(a) + f(x)] - A(x-\alpha)^3.$$

Pour $x = \beta$, cette fonction est nulle d'après la définition de A ; pour $x = \alpha$, elle est nulle identiquement, ainsi que sa dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{2} - \frac{x-a}{2} f'(x) - 3A(x-\alpha)^2;$$

il en résulte que sa dérivée seconde

$$\varphi''(x) = -\frac{x-\alpha}{2} f''(x) - 6A(x-\alpha)$$

doit s'annuler pour un nombre ξ intermédiaire à α, β, c'est-à-dire qu'on a

$$A = -\frac{1}{12} f''(\xi),$$

---

quement nulles. D'où l'interprétation géométrique suivante :

Par les trois points de la courbe proposée dont les abscisses sont α, $\frac{\alpha+\beta}{2}$, β, on fait passer une courbe ayant une équation de la forme

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

et l'on substitue à la bande proposée celle que limite cette dernière courbe. Quelle que soit la courbe, ayant une équation de cette forme, qui passe par les trois points, le résultat est le même. La plus simple de ces courbes est évidemment une parabole ayant son axe de symétrie parallèle à l'axe des y.

La méthode d'approximation fondée sur l'emploi de la formule précédente est due à Simpson. Il est bien aisé de voir, en supposant qu'on ait divisé l'intervalle (a, b) en $2n$ parties égales et qu'on pose

$$x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_{2n-1} = a + (2n-1)h,$$

qu'elle conduit à prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ l'expression

$$\frac{h}{3}[P + 2Q + 4R],$$

où l'on suppose

$$P = f(a) + f(b),$$
$$Q = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}),$$
$$R = f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1}).$$

et que l'erreur peut être mise sous la forme

$$-\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}f''(\xi).$$

D'une part, on obtiendra ainsi aisément une limite de cette erreur si l'on a une limite des valeurs absolues de $f''(x)$ dans l'intervalle (α, β); d'autre part, la forme même qu'on vient de trouver conduit naturellement à une amélioration de la méthode : si, en effet, on suppose qu'on divise l'intervalle (a, b) en n parties égales à $h=\dfrac{b-a}{n}$ et qu'on fasse

$$x_1=a+h, \qquad x_2=a+2h, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1}=a+(n-1)h,$$

que l'on désigne par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ chacun des nombres analogues à ξ, relatifs aux intervalles partiels (a_1, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, b) et par S la somme des trapèzes, on aura (exactement)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \mathrm{S}-\frac{h^3}{12}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\ldots+f''(\xi_n)]\\ &= \mathrm{S}-\frac{h^2}{12}[(x_1-a)f''(\xi_1)+(x_2-x_1)f''(\xi_2)+\ldots+(b-x_{n-1})f''(\xi_n)].\end{aligned}$$

La première expression de l'intégrale montre que, si l'on désigne par M un nombre égal ou supérieur aux valeurs absolues de $f''(x)$ dans l'intervalle (a, b), l'erreur commise en prenant S pour la valeur de l'intégrale est moindre que

$$\frac{n\mathrm{M}h^3}{12}=\frac{(b-a)\mathrm{M}h^2}{12}.$$

Dans la seconde expression, on voit que la quantité entre crochets, si n est assez grand, est voisine de l'intégrale

$$\int_a^b f''(x)\,dx=f'(b)-f'(a).$$

On pourra donc prendre pour valeur approchée de l'intégrale

$$\mathrm{S}-\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)].$$

Cette expression, appliquée à la bande dont l'aire exacte est $\mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha)$, fournirait, comme valeur approchée de cette bande, l'expression

$$(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}[f'(\beta)-f'(\alpha)].$$

Un calcul analogue à celui qu'on vient de faire pour calculer l'erreur, conduirait à la relation [1]

$$F(\beta)-F(\alpha)=(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}[f'(\beta)-f'(\alpha)]+\frac{(\beta-\alpha)^5}{720}f^{\text{IV}}(\xi'),$$

en désignant par ξ' un nombre compris entre α et β. Dans cette nouvelle formule, le dernier terme est identiquement nul quand $f(x)$ est un polynome de degré inférieur à 4; dans ce cas la formule

$$S-\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

donne la valeur exacte de l'intégrale. La même relation permet de reconnaître aisément que l'erreur commise en adoptant cette dernière valeur pour l'intégrale est moindre en valeur absolue que

$$\frac{(b-a)M'h^4}{720},$$

en désignant par M' un nombre égal ou supérieur à la plus grande des valeurs absolues de $f^{\text{IV}}(x)$ dans l'intervalle (a, b) [2].

Appliquons ceci à la recherche de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

dont on sait que la valeur exacte est $\frac{\pi}{4}=0,7853981\ldots$.

En divisant l'intervalle $(0,1)$ en cinq parties égales, on a à calculer les valeurs des six ordonnées correspondant aux abscisses $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$; on doit ajouter la demi-somme des ordonnées extrêmes et les quatre ordonnées intermédiaires; le calcul est indiqué ci-dessous; il a été fait avec six déci-

---

(1) Le même genre de raisonnement conduit, pour la méthode de Simpson, à la relation suivante :

$$F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{6}\left[f(\alpha)+f(\beta)+4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]-\frac{(\beta-\alpha)^5}{2880}f^{\text{IV}}(\xi'').$$

(2) Il est clair qu'on pourrait continuer ainsi. Le résultat général est contenu dans une formule due à Euler, dite *formule sommatoire* d'Euler-Maclaurin.

males :

$$\begin{array}{r} 0,75 \\ 0,961\,539 \\ 0,862\,069 \\ 0,735\,294 \\ 0,609\,756 \\ \hline 3,918\,658 \end{array}$$

le résultat multiplié par 0,2 donne pour la somme des trapèzes

$$S = 0.783\,7316.$$

Il est manifeste que, si l'on veut se borner à la méthode des trapèzes, proprement dite, on a fait les calculs avec un trop grand nombre de décimales; il n'en est plus de même si l'on tient compte du terme correctif, dont la valeur est ici

$$\frac{1}{600} = 0,001\,666\ldots;$$

en ajoutant 0,001 6667 à la valeur trouvée pour S, on trouve pour l'intervalle la valeur

$$0,785\,3983$$

dont la différence avec la valeur exacte est moindre que 2.10^{-7}. Je laisse au lecteur le soin de comparer l'approximation à laquelle on arrive à la valeur limite indiquée plus haut [1].

Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Il sera tout d'abord nécessaire de se rendre compte de l'erreur que l'on commet en substituant à cette intégrale une intégrale de la forme

$$\int_0^A e^{-x^2}\,dx,$$

---

[1] L'emploi du terme complémentaire est commode si l'on se donne la fonction $f(x)$ par son expression analytique. Il n'en serait plus de même si la courbe dont on a représenté l'équation par $y = f(x)$ était simplement tracée, la fonction $f(x)$ étant seulement connue (approximativement) par sa représentation graphique. C'est ce qui arrive souvent dans les applications pratiques. Le tracé, d'après la courbe, de la tangente, qui peut fournir la valeur de $f'(x)$ est quelque peu arbitraire. L'emploi de la méthode de Simpson, indiquée plus haut en Note, est préférable.

où A est un nombre positif suffisamment grand. On a, en supposant $B > A$,

$$\int_A^B e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{A}\int_A^B e^{-x^2}x\,dx.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre est égale à

$$\frac{1}{2}(e^{-A^2} - e^{-B^2}) < \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

La relation

$$\int_A^B e^{-x^2}\,dx < \frac{e^{-A^2}}{2A},$$

où il est manifeste que le second membre peut être supposé aussi petit que l'on veut, pourvu que A soit assez grand, permet d'établir rigoureusement que l'intégrale $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$, qui augmente en même temps que sa limite supérieure, tend vers une limite quand x tend vers $+\infty$ et que l'erreur que l'on commet en substituant à $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ l'intégrale $\int_0^A e^{-x^2}\,dx$ est moindre que $\frac{e^{-A^2}}{2A}$; si l'on prend par exemple $A = 3$; on aura

$$\frac{e^{-9}}{6} = 0{,}000016\ldots.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$, je supposerai qu'on partage l'intervalle $(0, 3)$ en six parties égales; on a à calculer les valeurs de e^{-x^2} pour $x = 0$, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3; les calculs ont été faits avec des tables à cinq décimales; dans l'addition qui est faite ci-dessous, le premier nombre représente la demi-somme des ordonnées extrêmes, les suivants sont les ordonnées intermédiaires

$$\begin{array}{r}
0{,}50001\\
0{,}77880\\
0{,}36788\\
0{,}10540\\
0{,}01832\\
0{,}00193\\
0{,}00012\\
\hline
1{,}77246
\end{array}$$

On a donc, en multipliant par $\frac{1}{2}$, pour la somme des aires des trapèzes,

$$S = 0,88623.$$

Le terme complémentaire est ici $\frac{e^{-9}}{8}$; il n'affecte que la dernière décimale et il n'y a guère lieu d'en tenir compte, vu l'incertitude manifeste de ce dernier chiffre; en fait, les quatre premières décimales se trouvent exactes [1].

332. Lorsque la fonction $f(x)$ qui figure dans l'intégrale

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

est développable en une série

$$(f) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

intégrable terme à terme (n° 310), et telle que la série des intégrales soit rapidement convergente, on a là un moyen naturel d'avoir une valeur approchée de S. Il est tout indiqué quand la fonction $f(x)$ n'est connue que par son développement en série (f). Il s'applique en particulier quand la fonction $f(x)$ est développable en série entière ou en série de Taylor.

Je considérerai, à titre d'exemple, le cas où la fonction $f\left(\frac{a+b}{2} + h\right)$ est développable par la formule de Taylor

$$f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + h\,f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h^2}{1.2} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \ldots.$$

En faisant dans l'intégrale proposée le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + h$, elle devient

$$S = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) dh$$

et l'on trouve de suite, en désignant par $f_0, f_0'', f_0^{\text{IV}}, \ldots$ les valeurs de la fonc-

---

[1] On démontre que la valeur exacte de l'intégrale est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,88622\ldots.$$

tion $f(x)$ et de ses dérivées d'ordre pair pour $x = \frac{a+b}{2}$,

$$S = (b-a)f_0 + \frac{(b-a)^3}{3.2^2}\frac{f_0''}{1.2} + \frac{(b-a)^5}{5.2^4}\frac{f_0^{\text{IV}}}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}}\frac{f_0^{(2n)}}{1.2\ldots 2n} + \ldots.$$

Cette formule s'appliquera utilement, en particulier, dans le cas où l'intervalle (a, b) est petit, en sorte que les termes décroissent rapidement. On a déjà signalé le procédé d'approximation qui consiste à ne garder que le premier terme

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

§ 4. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

333. Je vais donner un certain nombre d'applications de la méthode générale expliquée au n° 304, pour parvenir, quand on ne sait pas le faire directement, à l'évaluation d'une quantité Q. On décompose cette quantité en petites parties qu'on puisse évaluer approximativement : si, en particulier, tous les éléments sont positifs et si l'erreur relative commise sur chacun d'eux est moindre que β, l'erreur relative commise sur la somme est aussi moindre que β. Si l'on peut faire correspondre la décomposition de Q à une décomposition d'un intervalle (a, b) en intervalles partiels (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b), $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ étant des nombres rangés par ordre de grandeur, si l'on sait mettre l'expression approchée de chaque partie de Q sous une forme telle que $(x_{p+1} - x_p) f(\xi_p)$, où ξ_p désigne un nombre appartenant à l'intervalle (x_p, x_{p+1}) et $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b), la somme

$$(x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n)$$

fournira une expression approchée de la mesure de Q ; cette somme diffère aussi peu qu'on le veut, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits, de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

qui sera la mesure cherchée.

Il arrive souvent que la mesure de Q manque, tout d'abord, de définition précise; c'est l'intégrale même, à laquelle on parvient en se guidant sur la nature de la question, qui fournit cette définition. Dans le cas où l'on possède *a priori* cette définition, on peut, au lieu d'employer le procédé qu'on vient de décrire, se servir du mode de raisonnement que l'on a appliqué au n° 222 pour les aires et au n° 298 pour les arcs : on regarde Q comme un état d'une grandeur variable dépendant d'une variable indépendante x et l'on cherche la dérivée de cette fonction. Le lecteur n'aura pas de peine à reconnaître que ce mode de raisonnement s'appliquerait à plusieurs des cas qu'on va examiner.

Au reste, dans ces applications, je ne m'attarderai pas à établir rigoureusement la légitimité des résultats en étudiant, par exemple, les petites erreurs commises dans l'évaluation des parties et en montrant qu'elles n'ont pas d'influence. La répétition serait par trop fastidieuse.

Je commencerai par une observation concernant les arcs.

334. **Arcs.** — La règle que l'on a donnée au n° 298 pour calculer l'arc de la courbe définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

compris entre les deux points qui répondent aux valeurs t_0, t' du paramètre, consiste, lorsque les arcs croissent avec t, à former la différence $F(t') - F(t_0)$ en désignant par $F(t)$ une fonction primitive de $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$; elle revient à dire que l'arc s'exprime par l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t'} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt.$$

Supposons les nombres $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t'$ rangés par ordre de grandeurs croissantes, et les intervalles (t_0, t_1), (t_1, t_2), ... très petits; la somme

$$\Sigma = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\theta_1) + g'^2(\theta_1)} + \ldots + (t' - t_{n-1})\sqrt{f'^2(\theta_n) + g'^2(\theta_n)},$$

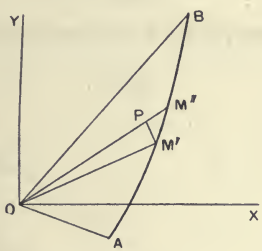
où $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont des nombres qui appartiennent respectivement aux intervalles partiels, diffère très peu de l'intégrale définie, si ces intervalles sont très petits. Ainsi qu'on l'a déjà fait observer au n° 298, les quantités qui multiplient les différences $t_1 - t_0, \ldots, t' - t_{n-1}$ diffèrent très peu des rapports que l'on obtient en divisant respectivement par ces différences les longueurs des cordes qui joignent au suivant chacun des points $M_0, M_1, \ldots, M'$ de la courbe qui correspondent aux valeurs $t_0, t_1, \ldots, t'$ du paramètre. En remplaçant chacun des éléments de la somme précédente, qui sont tous de mêmes signes, par la corde correspondante, l'erreur relative commise sur chaque élément est très faible; il en résulte que l'erreur relative commise sur la somme est aussi très faible; d'où la conclusion suivante, annoncée au n° 298.

La longueur d'un arc de courbe M_0M' diffère aussi peu qu'on le veut de la longueur de la ligne brisée $M_0M_1, \ldots, M'$ pourvu que les points consécutifs $M_0, M_1, \ldots, M'$ correspondent à des valeurs du paramètre croissantes et suffisamment rapprochées.

La démonstration suppose l'existence et la continuité des dérivées.

335. **Aires en coordonnées polaires.** — Considérons une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

Fig. 99.



Supposons qu'on veuille avoir l'aire comprise entre les deux rayons vecteurs OA, OB, et l'arc de courbe AB, dont l'équation est $\rho = f(\omega)$; et dont on obtient tous les points en faisant varier ω depuis la valeur α, qui correspond à la direction OA, jusqu'à la valeur β, qui correspond à la direction OB. La variable ω va jouer ici le rôle de la variable x du raisonnement général. On décomposera le secteur curviligne à évaluer en petits secteurs curvilignes σ par des rayons vecteurs partant du point O; l'un de ces petits secteurs est limité, par exemple, par les rayons OM′, OM″ qui correspondent aux angles polaires ω', ω'' : on lui substitue le secteur circulaire OM′P, dont l'aire est $\frac{1}{2}\rho^2(\omega''-\omega')$ en désignant par ρ la valeur du rayon vecteur OM′; on parvient ainsi, pour l'évaluation de l'aire, à la formule

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, d\omega = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\omega)\, d\omega.$$

Si le pôle était intérieur à un contour défini par l'équation $\rho = f(\omega)$, et dont on obtiendrait tous les points en faisant varier ω dans un intervalle de 2π, l'aire limitée par ce contour se calculerait par une formule telle que

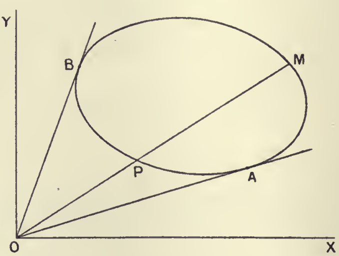
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \rho^2\, d\omega.$$

Si le pôle était sur le contour même, et si l'on obtenait tous les points de ce contour en faisant varier, dans la relation $\rho = f(\omega)$, ω de α à $\alpha + \pi$, on aurait pour la surface

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+\pi} \rho^2\, d\omega.$$

L'angle α serait l'angle polaire d'une direction choisie sur la tangente

Fig. 100.



au pôle. La formule doit être modifiée si le pôle est un point anguleux de la courbe, ou si celle-ci traverse sa tangente.

Considérons le cas où le pôle est extérieur au contour de l'aire; je suppose que cette aire soit comprise entre les deux tangentes extrêmes OA, OB correspondant aux angles polaires α et β, et qu'une droite menée par le point O rencontre le contour en deux points; l'aire cherchée est la différence des deux aires OAMB, OAPB; le lecteur reconnaîtra de suite qu'elle est égale à

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\omega)\,d\omega,$$

en désignant par $f(\omega)$ la différence $\mathrm{OM}^2 - \mathrm{OP}^2$ des carrés des rayons vecteurs OM, OP qui correspondent à l'angle polaire ω.

A propos des coordonnées polaires, je rappelle qu'on a calculé la différentielle de l'arc (n° 302); il résulte de l'expression trouvée que l'arc d'une courbe limitée à deux points qui correspondent aux angles polaires α, β est donné par la formule

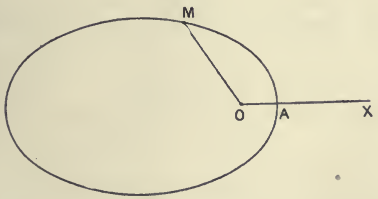
$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\omega,$$

en désignant par ρ' la dérivée de ρ par rapport à ω.

Si ρ et ω étaient exprimés en fonction d'un même paramètre t, l'aire serait donnée par une formule telle que

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2}\,dt,$$

Fig. 101.



Exemples. — Considérons l'ellipse définie par l'équation

$$\rho = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\omega};$$

a est le demi-grand axe; ε est l'excentricité, l'origine est un foyer; l'axe polaire est dirigé vers le sommet A le plus rapproché du foyer O. L'aire du secteur OAM est donnée par la formule

$$S = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{2}\int_0^\omega \frac{d\omega}{(1+\varepsilon\cos\omega)^2}.$$

Je laisse au lecteur le soin, en appliquant les méthodes générales, de justifier la substitution

$$\omega = 2\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tang}\frac{u}{2}\right),$$

où la fonction qui figure dans le second membre est celle qui a été définie au n° 199; on trouve ainsi

$$S = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_0^u (1-\varepsilon\cos u)\,du = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(u-\varepsilon\sin u),$$

où la valeur de u correspond à celle de ω [1].

Pour avoir l'aire totale de la courbe, on doit faire $\omega = 2\pi$, $u = 2\pi$; et l'on a alors $S = \pi\dfrac{a^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \pi ab$.

Considérons la courbe définie par l'équation $\rho = \dfrac{1}{\cos^m\dfrac{\omega}{m}}$ où m est un nombre entier, positif ou négatif; on trouve sans peine

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{1}{\cos^{m+1}\dfrac{\omega}{m}};$$

l'arc de la courbe, compris entre les deux points correspondant aux valeurs α, β de ω, sera donc

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\omega}{\cos^{m+1}\dfrac{\omega}{m}};$$

si $m+1$ est positif, on doit supposer que $\cos\dfrac{\omega}{m}$ ne s'annule pas dans l'intervalle (α, β). La courbe se réduit à une droite pour $m=1$, à un cercle

---

[1] L'angle u est l'*anomalie excentrique* du point M; le lecteur retrouvera cette formule par des considérations géométriques, en regardant l'ellipse comme la projection du cercle.

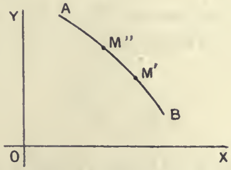
pour $m = -1$; pour $m = 3$, on a

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{\cos^4 \frac{\omega}{3}} = 3 \operatorname{tang} \frac{\omega}{3} + \operatorname{tang}^3 \frac{\omega}{3},$$

la formule est valable tant que ω est intérieur à l'intervalle $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

336. Intégrales relatives à un arc de courbe. — On considère un arc AB d'une courbe qui, rapportée à des coordonnées rectangulaires,

Fig. 102.



est définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

Pour désigner le point de cette courbe qui correspond à la valeur t du paramètre, je me permettrai de dire, d'une façon abrégée, le point t. Je suppose l'arc décrit en faisant varier t de a à b. On se donne, en outre, une fonction $\varphi(t)$ de la variable t. On divise l'arc AB en petits arcs, on multiplie la longueur de chacun de ces arcs partiels par la valeur de la fonction $\varphi(t)$ pour une valeur du paramètre t correspondant à quelque point de cet arc partiel; on fait la somme de tous les produits ainsi obtenus; on demande de quelle limite s'approche cette somme, quand le nombre des arcs partiels augmente indéfiniment et que la longueur de chacun d'eux diminue indéfiniment.

Le petit arc dont les extrémités correspondent aux valeurs t', t'' du paramètre peut être remplacé par $(t''-t')\sqrt{f'^2(t') + g'^2(t')}$; la limite cherchée est

$$S = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, \varphi(t)\, dt,$$

ou, en supposant que les arcs croissent en même temps que t,

$$S = \int_a^b \frac{ds}{dt} \varphi(t)\, dt;$$

en prenant l'arc de courbe s, compté à partir d'une origine fixe, pour variable, en désignant par $\psi(s)$ la fonction de s qui remplace $\varphi(t)$ et par α, β les valeurs de l'arc qui correspondent aux points A, B, on aura

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(s)\, ds.$$

Regardons la courbe comme un fil matériel très fin; soit k la *densité* [1] du fil au point t, l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta k \frac{ds}{dt}\, dt$$

représente alors la masse du fil : elle se réduit à la longueur pour $k = 1$.

On démontre, en Mécanique, que, si $\varphi(t)$ désigne la distance à une droite fixe du point t de la courbe, l'intégrale $\int_a^b k\varphi(t)\frac{ds}{dt}\, dt$ divisée par la masse $M = \int_a^b k\frac{ds}{dt}\, dt$ donne la distance du centre de gravité

---

(1) Si l'on considère un arc de la courbe, ou plutôt du fil, la *densité moyenne* de cet arc est le rapport de sa masse à sa longueur. Soit A un point de la courbe; envisageons un petit arc de courbe contenant le point A; admettons que la densité moyenne tende vers une limite, quand l'arc, en se rapetissant, tend à se réduire au point A, cette limite sera la densité au point A. Inversement, en supposant cette densité continue, la masse d'un petit arc s'obtient, avec une erreur relative très petite, en multipliant la longueur de l'arc par la densité en l'un quelconque de ses points : d'où l'expression de la masse sous forme d'intégrale.

Considérons de même une surface matérielle (plaque mince, membrane, etc.); la densité moyenne d'une portion de cette surface s'obtiendra en divisant la masse de cette portion par son aire : si cette portion se rapetisse autour d'un point A et si la densité moyenne tend vers une limite, cette limite est la densité en A.

Considérons enfin un volume limité, rempli de matière. La densité moyenne d'une portion de cette matière s'obtiendra en divisant la masse de cette portion par son volume. En faisant tendre le volume vers 0, on obtient la densité en un point.

Je désignerai la densité en un point par k; elle dépend en général de ce point; quand elle est constante, la matière du fil, de la membrane, du corps est dite *homogène*. Dans les applications géométriques on suppose souvent $k = 1$.

à cette droite; en particulier les coordonnées X, Y de ce centre de gravité sont

$$X = \frac{1}{M}\int_a^b kx\frac{ds}{dt}dt, \qquad Y = \frac{1}{M}\int_a^b ky\frac{ds}{dt}dt;$$

x, y doivent être remplacés par $f(t)$, $g(t)$.

Par exemple, pour l'arc de cercle défini par les équations $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, quand t varie de $-\alpha$ à $+\alpha$, on a $\frac{ds}{dt} = r$ et les coordonnées du centre de gravité sont, en supposant la densité égale à 1,

$$X = \frac{1}{2r\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\cos t\,dt = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \qquad Y = \frac{1}{2r\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\sin t\,dt = 0.$$

Si la fonction $\varphi(t)$ représente le carré de la distance du point t de la courbe à une droite fixe, l'intégrale

$$\int_a^b k\varphi(t)\frac{ds}{dt}dt$$

est ce qu'on appelle le *moment d'inertie* de l'arc de courbe par rapport à la droite; ainsi le moment d'inertie par rapport à l'axe des x est

$$\int_a^b ky^2\frac{ds}{dt}dt.$$

Par exemple, le moment d'inertie par rapport à l'un des axes d'un segment de droite homogène de longueur l, parallèle à cet axe et situé à une distance de lui égale à a s'obtient en multipliant la^2 par la densité.

Si la fonction $\varphi(t)$ désigne le carré de la distance du point t de la courbe à un point fixe, l'intégrale

$$\int_a^b k\varphi(t)\frac{ds}{dt}dt$$

est le moment d'inertie de l'arc de courbe par rapport à ce point. Le moment d'inertie par rapport à l'origine est ainsi

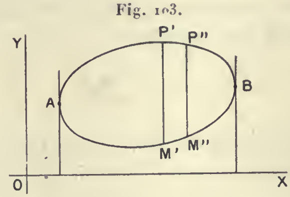
$$\int_a^b (x^2+y^2)\frac{ds}{dt}dt;$$

il est la somme des moments d'inertie par rapport aux deux axes.

Le moment d'inertie d'une circonférence de cercle de rayon r, par rapport à son centre, est $2\pi k r^3$, en supposant la matière homogène.

337. **Intégrales relatives à une aire plane.** — Considérons, dans le plan, un contour (C) limitant une aire $\mathcal{A}$; je supposerai, pour simplifier, que ce contour (C) soit rencontré en deux points seulement par les parallèles à l'axe des y, comprises entre les tangentes parallèles à cet axe, tangentes que je suppose correspondre aux abscisses a et b. La longueur interceptée sur une parallèle qui correspond à l'abscisse x est un nombre positif qui dépend de x et que je désignerai par $\varphi(x)$. C'est la différence entre les ordonnées des deux points de la courbe qui ont x pour abscisse.

Fig. 103.



Ceci posé, imaginons qu'on décompose l'aire $\mathcal{A}$ en bandes très étroites par des parallèles à l'axe des y, que l'on multiplie l'aire de chacune de ces bandes par la valeur $\psi(x)$ d'une certaine fonction relative à un point de la bande (peu importe lequel); on fait la somme de tous les produits ainsi obtenus, et l'on demande de quelle limite cette somme s'approche indéfiniment quand, le nombre des bandes croissant indéfiniment, l'épaisseur de chacune décroît indéfiniment.

On substitue à l'aire de la bande $M'M''P''P'$ qui correspond aux limites x', x'' l'aire d'un rectangle qui aurait pour base l'épaisseur $x''-x'$ de la bande et pour hauteur $M'P' = \varphi(x')$ ou $M''P''$; on substitue au produit partiel relatif à cette bande la quantité

$$\varphi(x')\,\psi(x')\,(x''-x');$$

il apparaît alors que la limite cherchée est l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Si l'on prend $\psi(x) = 1$, l'intégrale représentera évidemment l'aire $\mathcal{A}$.

Regardons l'aire $\mathcal{A}$ comme une plaque homogène dont l'épaisseur est négligeable. On montre, en Mécanique, que, si l'on prend $\psi(x) = x$, l'expression

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \int_a^b \varphi(x) x \, dx$$

est l'abscisse du centre de gravité de cette plaque. L'ordonnée de ce centre de gravité s'obtiendrait d'une façon analogue en décomposant l'aire $\mathcal{A}$ en bandes étroites par des parallèles à l'axe des x.

Dans les mêmes conditions, si l'on prend $\psi(x) = x^2$, l'intégrale

$$k \int_a^b \varphi(x) x^2 \, dx,$$

où k est la densité (supposée constante), est ce qu'on appelle le *moment d'inertie* de la plaque par rapport à l'axe des y.

Considérons, par exemple, une plaque rectangulaire ayant ses côtés respectivement égaux à α et à β; le côté de longueur β est supposé parallèle à l'axe des y; soit x_0 l'abscisse du centre de la plaque; en supposant la densité égale à 1, le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe des y sera

$$\int_{x_0 - \frac{\alpha}{2}}^{x_0 + \frac{\alpha}{2}} \beta x^2 \, dx = \frac{\alpha\beta}{12}(12 x_0^2 + \alpha^2).$$

Les moments d'inertie de la plaque par rapport au côté de longueur β et par rapport à la parallèle menée par le centre à ce côté seraient respectivement $\frac{\alpha^3 \beta}{3}$, $\frac{\alpha^3 \beta}{12}$.

338. **Intégrales relatives à un volume.** — Considérons un volume V limité à deux plans (A), (B) parallèles à un plan fixe (H) que le lecteur pourra se figurer comme étant horizontal. Imaginons un axe OZ perpendiculaire au plan (H) et le perçant en O. Le point O servira d'origine sur l'axe OZ; chaque point M de cet axe sera déterminé, comme d'habitude, par l'équivalent algébrique du vecteur OM,

équivalent algébrique que j'appellerai la *cote* du point M. Un plan quelconque (P) parallèle au plan (H) est déterminé par la cote du point où il rencontre l'axe OZ; ce même nombre sera la *cote* du plan (P). Je suppose que les cotes des plans (A) et (B) soient a et b et que l'on ait $a < b$.

Ceci posé, tout plan parallèle au plan (H), compris entre les plans (A) et (B), détermine dans le volume V une section dont l'aire dépend de la cote z du plan sécant. Je suppose qu'on sache évaluer cette aire, que je désigne par $\varphi(z)$. Imaginons qu'on découpe le volume V en plaques minces par des plans parallèles au plan (H), dont je désignerai les cotes successives par $a, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, b$; soit σ le volume d'une de ces plaques, limitée par les plans dont les cotes sont z' et z''; on ne sait pas évaluer le volume σ, mais on lui substituera le volume $\varphi(z')(z''-z')$ d'un cylindre droit dont la hauteur sera l'épaisseur $z''-z'$ de la plaque et dont la base sera la section par le plan de cote z'; on aurait pu tout aussi bien prendre pour base la section par le plan de cote z'' ou par un plan intermédiaire. Dès lors, on aperçoit de suite que le volume cherché sera

$$V = \int_a^b \varphi(z)\,dz.$$

Imaginons que, après avoir décomposé le volume en plaques minces, on multiplie le volume de chaque plaque mince, comprise, par exemple, entre les deux plans de cotes z', z'', par la valeur d'une certaine fonction $\psi(z)$ pour un nombre appartenant à l'intervalle (z', z''), qu'on fasse la somme de tous ces produits et qu'on veuille la limite dont s'approche cette somme quand, le nombre des intervalles partiels (a, z_1), (z_1, z_2), $\ldots$, (z_{n-1}, b) augmentant indéfiniment, l'étendue de chacun de ces intervalles diminue indéfiniment; on trouvera pour cette limite

$$\int_a^b \psi(z)\varphi(z)\,dz.$$

On démontre en Mécanique que la cote Z du centre de gravité du volume V, supposé rempli par une matière homogène, est donnée par la formule

$$Z = \frac{1}{V}\int_a^b z\varphi(z)\,dz.$$

Supposons en particulier que le volume V soit de révolution autour de OZ; les sections planes seront des cercles ayant leurs centres sur OZ; le rayon x de chacun de ces cercles dépendra de la cote z du plan sécant, et la relation $x=f(z)$ entre ce rayon et la cote n'est autre chose que l'équation de la courbe méridienne dans un plan passant par OZ et coupant le plan (H) suivant OX.

L'expression du volume sera alors

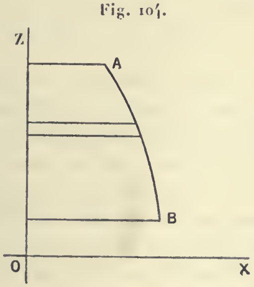
$$V=\int_a^b \pi f^2(z)\,dz;$$

la cote du centre de gravité sera alors

$$Z=\frac{1}{V}\int_a^b \pi z f^2(z)\,dz.$$

339. **Surfaces de révolution.** — Considérons maintenant la surface engendrée par la révolution autour de OZ d'une courbe AB située dans un plan ZOX tel que celui qu'on vient de définir; désignons par a, b les cotes des plans (A), (B) menés par les points A, B auxquels l'arc de courbe est limité et qui contiennent les cercles décrits par ces points.

Fig. 104.



Tout plan de cote z, parallèle au plan (H) et compris entre les deux plans (A), (B), coupe la surface de révolution suivant un cercle dont le rayon x est égal à $f(z)$, en supposant que, dans le plan méridien, l'équation de l'arc AB soit $x=f(z)$.

Ceci posé, décomposons la surface de révolution en petits rubans circulaires par les plans parallèles au plan (H) dont les cotes sont a, $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, b$; soient z', z'' deux de ces cotes consécutives; le petit ruban de surface correspondant sera assimilé à la surface latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles; l'arête de ce tronc de cône sera la corde de l'arc de la courbe méridienne dont les extrémités répondent aux cotes z' et z'', corde dont la longueur sera à peu près égale à $(z''-z')\sqrt{1+f'^2(z')}$.

La demi-somme des circonférences de base du tronc de cône est $\pi[f(z')+f(z'')]$ ou, à peu près, $2\pi f(z')$; on substituera à la surface du tronc de cône, ou du petit ruban circulaire, la quantité

$$2\pi\sqrt{1+f'^2(z')}\,f(z')(z''-z');$$

la somme de toutes les expressions analogues est une expression approchée de l'intégrale

$$S=\int_a^b 2\pi f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}\,dz=\int_a^b 2\pi f(z)\frac{ds}{dz}\,dz,$$

en désignant par s l'arc de la courbe AB, compté à partir d'un point fixe et croissant quand z croît. C'est cette intégrale qu'on prendra pour la surface engendrée par la révolution de la ligne AB. Elle peut s'écrire

$$S=\int_\alpha^\beta 2\pi F(s)\,ds,$$

lorsqu'on prend pour variable d'intégration l'arc s de la courbe qui correspond à chacun de ses points : α et β désignent alors les valeurs de s qui correspondent aux points A et B, et $F(s)$ désigne ce que devient $f(z)$ quand on y remplace z en fonction de s.

Les explications précédentes, relatives à l'évaluation d'une surface de révolution, sont notoirement insuffisantes en tant que démonstration de la formule à laquelle on parvient. Tout d'abord cette surface qu'on prétend évaluer n'a pas même été définie; dans l'évaluation approchée que l'on fait des petits rubans circulaires, on n'a aucune idée de l'erreur qu'on commet. Ces explications toutefois peuvent être regardées comme amenant d'une façon assez naturelle la formule finale $\int_\alpha^\beta 2\pi F(s)\,ds$ et il est légitime d'adopter cette formule comme définition de la surface de révolution.

La cote Z du centre de gravité de la surface de révolution regardée comme homogène serait donnée par la formule

$$SZ = \int_a^b 2\pi z f(z) \frac{ds}{dz} dz.$$

Le lecteur n'aura aucune peine à retrouver, en se servant de ces formules, les expressions classiques des volumes et des surfaces que l'on considère en Géométrie élémentaire. Voici quelques autres exemples :

Supposons qu'on veuille évaluer un volume V tel que celui qu'on a considéré un peu plus haut, pour lequel la surface d'une section soit une fonction de la cote z de la forme $Az^3 + Bz^2 + Cz + D$; on aura

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (Az^3 + Bz^2 + Cz + D)\, dz \\ &= (b-a)\Big[\tfrac{1}{4}A(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) \\ &\qquad + \tfrac{1}{3}B(a^2 + ab + b^2) + \tfrac{1}{2}C(a+b) + D\Big]. \end{aligned}$$

On peut regarder $b - a$ comme la hauteur du volume; si l'on désigne par P, Q les sections extrêmes, les *bases*, et par R la section moyenne du volume, on aura

$$\begin{aligned} P &= Aa^3 + Ba^2 + Ca + D, \\ Q &= Ab^3 + Bb^2 + Cb + D, \\ R &= A\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + B\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + C\frac{a+b}{2} + D, \end{aligned}$$

et l'on trouvera sans peine [1]

$$V = \frac{b-a}{6}(P + Q + 4R).$$

Si A était nul, la cote du centre de gravité du volume considéré, supposé homogène, s'obtiendrait par une formule analogue.

---

[1] C'est une conséquence immédiate de la note du n° 331 à propos de la méthode de Simpson.

Le volume et la surface engendrés par la cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(t - \cos t)$$

tournant autour de l'axe des x, sont respectivement

$$V = \int_0^{2\pi a} \pi y^2\, dx \quad = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt \quad = 5\pi^2 a^3,$$

$$S = \int_0^{2\pi a} 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin\frac{t}{2}\, dt = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

340. **Intégrales doubles.** — Considérons, comme plus haut, un contour (C) limitant une aire plane $\mathcal{A}$; imaginons qu'on subdivise cette aire en parties de dimensions très petites. J'entends par là que la distance maximum de deux points de cette aire est très petite; les *bandes* que l'on a considérées plus haut ne satisferaient pas à cette condition, car leur épaisseur, seule, a été supposée très petite. Supposons qu'on multiplie chaque aire partielle par la valeur $f(x, y)$ d'une fonction continue de x et de y relative à un point x, y intérieur à l'aire partielle ou situé sur son petit contour; puis, qu'on fasse la somme de tous les produits ainsi obtenus pour toutes les aires partielles dans lesquelles on a décomposé $\mathcal{A}$. On démontre que cette somme, évidemment variable avec les divers modes de décomposition, avec la façon dont on choisit les points x, y intérieurs aux aires partielles, s'approche indéfiniment d'une limite fixe quand, le nombre des aires partielles croissant indéfiniment, leurs dimensions décroissent indéfiniment. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale double*.

Je n'expliquerai pas ici comment on effectue, en général, le calcul d'une pareille limite; je me bornerai à des cas particuliers, en admettant l'existence de la limite.

Supposons d'abord que la fonction $f(x, y)$ ne dépende pas de y et désignons-la par $f(x)$. Adoptons, comme mode de décomposition de l'aire $\mathcal{A}$, une division en petits carrés par des parallèles aux axes, et considérons la file de petits carrés, intérieurs à (C), compris entre deux parallèles consécutives à l'axe des y, qui correspondent aux abscisses x', x''; cette file de petits carrés constitue une bande, au sens du n° 336; on va former la partie de la somme de produits partiels qui correspondent à ces petits carrés. Donnons la même abscisse ξ à chacun de ces points intérieurs aux petits carrés pour lesquels on a à prendre la valeur de la fonction $f(x)$, par laquelle on multipliera l'aire du petit carré; $f(\xi)$ se mettra en facteur dans tous les produits partiels, l'autre facteur sera la somme des aires de tous les petits carrés, c'est-à-dire l'aire de la bande, à savoir, $(x''-x')\varphi(x')$, en désignant comme au n° 336 par $\varphi(x')$ la longueur de la bande, la portion de la parallèle à l'axe des y comprise à l'intérieur du contour (C); la partie de la somme qu'on veut évaluer, relative aux petits carrés dont l'ensemble constitue la bande, est ainsi, approximativement,

$$f(x')\varphi(x')(x''-x'),$$

et la limite cherchée est

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

en désignant par a et b les abscisses des parallèles extrêmes à l'axe des y, en dehors desquelles on ne rencontre plus le contour. On est ramené à un résultat déjà obtenu. Il est clair qu'on pourrait procéder d'une façon analogue si la fonction $f(x, y)$ ne dépendait que de y.

Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ représente le carré de la distance du point x, y à l'origine. La limite de la somme obtenue en multipliant chaque aire partielle par x^2+y^2 est ce qu'on appelle le *moment d'inertie*, par rapport à l'origine, de l'aire $\mathcal{A}$, pour une densité partout égale à 1. Il est clair que, au lieu de multiplier chaque aire partielle par x^2+y^2 et de faire la somme, on peut multiplier chaque aire partielle par x^2 et faire la somme des produits, puis chaque aire partielle par y^2 et faire la somme des produits, puis enfin ajouter les résultats : le premier résultat est ce qu'on a appelé, au n° 336, le moment d'inertie par rapport à l'axe des y; le second est le moment d'inertie par rapport à l'axe des x; on sait évaluer chacun de ces moments d'inertie, leur somme est le moment d'inertie par rapport à l'origine. On sait ramener le calcul de chacun d'eux à l'évaluation d'une intégrale définie.

Si la densité, au lieu d'être 1, était égale à k, on devrait multiplier les résultats par k, en supposant toujours la matière homogène.

Supposons par exemple, en prenant la densité égale à 1, qu'on veuille évaluer le moment d'inertie, par rapport à un de ses sommets, d'une plaque rectangulaire dont les côtés sont égaux à α, β. Il suffira de faire la somme des moments d'inertie de la plaque par rapport à deux côtés non parallèles; on trouve ainsi

$$\frac{\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{3}=\frac{\alpha\beta}{3}(\alpha^2+\beta^2).$$

Le moment d'inertie de la même plaque par rapport à son centre serait évidemment égal à quatre fois le moment d'inertie, par rapport à l'un de ses sommets, d'une plaque rectangulaire dont les dimensions sont $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$; il serait donc $\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{6}$.

Considérons, en prenant toujours la densité égale à 1, le moment d'inertie, par rapport à son centre, d'un cercle de rayon r; décomposons la surface de ce cercle en couronnes circulaires très étroites par des cercles concentriques; décomposons ces couronnes en petits trapèzes curvilignes par des rayons très rapprochés issus du centre; considérons en particulier la petite couronne limitée par les cercles de rayons très peu différents r', r''; multiplions la surface de chacun des petits trapèzes qui la composent par le carré r'^2 de la distance d'un point de ces trapèzes au centre et ajoutons les résultats; r'^2 se met en facteur dans la somme, l'autre facteur est l'aire de la couronne, c'est-à-dire $\pi(r''^2-r'^2)=\pi(r'+r'')(r''-r')$ ou, à peu près, $2\pi r'(r''-r')$; la partie de l'intégrale qui correspond à la couronne circulaire est donc, à peu près,

$$2\pi r'^3(r''-r').$$

Le moment d'inertie de la plaque circulaire sera par conséquent

$$\int_0^r 2\pi r^3\,dr=\frac{\pi r^4}{2}.$$

Le moment d'inertie, par rapport à son centre, d'une couronne circulaire limitée par deux cercles concentriques de rayons r_1 et r_2 serait

$$\frac{1}{2}\pi(r_2^4-r_1^4).$$

341. **Moment d'inertie d'un volume.** — Considérons un volume V; imaginons qu'on le décompose en petits volumes partiels de dimensions très petites et qu'on multiplie chaque volume partiel par le carré de la distance d'un de ses points (qu'on peut prendre arbitrairement à une droite fixe OZ; puis qu'on fasse la somme de tous les produits ainsi obtenus. On démontre que cette somme, qui varie évidemment avec les modes de décomposition, avec les points de chaque volume partiel dont on prend la distance à OZ, s'approche indéfiniment d'une limite fixe quand, le nombre des volumes partiels augmentant indéfiniment, les dimensions de chacun d'eux diminuent indéfiniment. Cette limite est ce qu'on appelle le *moment d'inertie* par rapport à la droite OZ du volume V supposé rempli par une matière de densité égale à 1. Si la densité était k et la matière homogène, le résultat calculé, comme on vient de l'expliquer, devrait être multiplié par k.

Supposons d'abord que le volume V soit un cylindre droit, de hauteur h, dont les génératrices soient parallèles à OZ et dont la base, limitée par un contour (C), soit située dans le plan (H), perpendiculaire en O à OZ, et divisons cette base $\mathfrak{B}$ en un très grand nombre d'aires partielles de dimensions très petites; considérons l'une β de ces aires partielles et soit r la distance d'un de ses points au point O; regardons β comme la base d'un petit cylindre droit, très fin, de hauteur h; on reconnaît de suite que son moment d'inertie est, à très peu près, $\beta h r^2$; si l'on fait la somme de toutes les quantités analogues, afin d'avoir une expression approchée du moment d'inertie du cylindre proposé, h se mettra en facteur et le second facteur, somme de toutes les quantités telles que βr^2, différera très peu du moment d'inertie de la base $\mathfrak{B}$ par rapport au point O; si l'on désigne ce moment d'inertie par B, le moment d'inertie du cylindre sera Bh.

Considérons maintenant un volume V quelconque, compris, en reprenant les notations du n° 337, entre deux plans perpendiculaires à OZ, de cotes a et b; supposons qu'on sache évaluer le moment d'inertie $\psi(z)$ de la section faite dans le volume V par un plan perpendiculaire à OZ, de cote z, par rapport au point où ce plan rencontre OZ. En décomposant V, par des plans parallèles, en plaques minces, en remplaçant chacune de ces plaques par un cylindre droit de même épaisseur, et dont la base soit l'une des bases de la plaque, on reconnaît sans peine que le moment d'inertie de V, par rapport à OZ, est donné par l'intégrale

$$\int_a^b \psi(z)\,dz;$$

j'ai supposé la matière homogène et de densité égale à 1 ; si la densité était égale à k, la matière étant toujours homogène, on devrait multiplier les résultats par k.

En continuant de prendre la densité égale à 1, on voit que le moment d'inertie d'un parallélépipède droit de dimensions α, β, γ, par rapport à l'une de ses arêtes, ayant pour dimension γ, est $\frac{\alpha\beta\gamma}{3}(\alpha^2+\beta^2)$. Le moment d'inertie par rapport à la parallèle à ce côté menée par le centre est $\frac{\alpha\beta\gamma}{12}(\alpha^2+\beta^2)$.

Le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre est

$$2\int_0^z \frac{\pi}{2}(r^2-z^2)^2\,dz = \frac{8\pi}{15}r^5.$$

§ 5. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

342. On appelle *équation différentielle* (ordinaire) une équation entre une variable indépendante x, une fonction inconnue y et ses dérivées y', y'', y''', ... L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée qui y figure. *Intégrer* une pareille équation, c'est trouver la fonction de x la plus générale telle que, en remplaçant dans l'équation y, y', y'', ... par cette fonction et ses dérivées, cette équation soit vérifiée identiquement en x. Cette fonction s'appelle l'*intégrale* générale de l'équation.

On dit que la résolution de l'équation est ramenée aux quadratures, quand elle est ramenée à la recherche de fonctions primitives.

On trouve des équations différentielles du premier ordre en cherchant à déterminer une courbe plane par quelque propriété de la tangente.

Soit M un point d'une courbe plane (C) rapportée à des axes rectangulaires OX, OY. Soit P la projection de M sur OX ; soient MT, MN la tangente et la normale en M, limitées au même axe. Soient y l'ordonnée du point M et y' la pente de la tangente en ce point.

On donne aux vecteurs

$$\mathrm{TP} = \frac{y}{y'}, \qquad \mathrm{PN} = yy'$$

les noms de sous-tangente et de sous-normale; toute relation entre les coordonnées du point M, la sous-tangente ou la sous-normale, ou encore quelqu'une des lignes OT, ON, MT, MN, ... dont on a donné les expressions (*Ex.* 342, Ch. XVII), est une équation différentielle du premier ordre.

Par exemple, les courbes dont la sous-normale est constante et égale à a sont définies par l'équation différentielle $yy' = a$; le premier membre est la dérivée de $\frac{y^2}{2}$, le second la dérivée de ax; la différence entre $\frac{y^2}{2}$ et ax doit donc être une constante; toutes les courbes satisfaisant à la condition imposée ont une équation de la forme

$$\frac{y^2}{2} = ax + \mathrm{C},$$

où C est une constante arbitraire; inversement, toute courbe ayant une équation de cette forme satisfait à la condition énoncée, comme on le voit en prenant les dérivées des deux membres.

De même, les courbes telles que leur sous-tangente soit constante et égale à a sont définies par l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = \frac{d \lg y}{dx} = \frac{1}{a};$$

on en conclut que leur équation est de la forme

$$\lg y = \frac{x}{a} + \mathrm{C}, \qquad y = e^{\frac{x}{a} + \mathrm{C}} = \mathrm{C}' e^{\frac{x}{a}},$$

en désignant par C' la constante e^{C}. Réciproquement, toutes les courbes définies par une telle équation ont leur sous-tangente constante et égale à a.

Dans ces deux exemples, l'intégration a introduit une constante arbitraire C; on n'a pas trouvé une courbe, mais une *famille* (ou un *faisceau*) de courbes dont chaque individu s'obtient en donnant à la constante C une valeur numérique particulière.

343. Considérons, inversement, une famille de courbes, définie par l'équation $f(x, y, C) = 0$ où C est une constante arbitraire; il est aisé de voir que toutes les fonctions y de x définies (implicitement) par l'équation $f(x, y, C) = 0$ vérifient une même équation différentielle : la dérivée y' d'une telle fonction s'obtient, en effet, au moyen de l'équation

$$f'_x + y' f'_y = 0;$$

en éliminant C entre cette équation et l'équation $f(x, y, C) = 0$, on trouve une équation $\varphi(x, y, y') = 0$ qui doit être vérifiée pour chaque système de valeurs de x, y, y' auxquelles on peut associer un nombre C tel qu'on ait à la fois

$$f(x, y, C) = 0, \qquad f'_x + y' f'_y = 0.$$

Imaginons qu'on résolve la première équation par rapport à y, on en tirera y en fonction de x et de C, $y = \psi(x, C)$; la dérivée $y' = \psi'_x(x, C)$ de cette fonction par rapport à x est identique à la valeur qu'on tirerait de l'équation $f'_x + y' f'_y = 0$, après y avoir remplacé y par $\psi(x, C)$; quels que soient les nombres x et C, l'équation $\varphi(x, y, y') = 0$ est vérifiée quand on y remplace y par $\psi(x, C)$, y' par $\psi'_x(x, C)$; en d'autres termes, l'équation $\varphi(x, y, y') = 0$ est vérifiée identiquement (en x et C) quand on y remplace y et y' par la fonction $\psi(x, C)$ et par sa dérivée. Toutes les fonctions obtenues en donnant à C des valeurs numériques quelconques sont des solutions ou intégrales *particulières* de l'équation différentielle du premier ordre $\varphi(x, y, y') = 0$ [1].

Puisque y' est la pente de la courbe dont l'équation est $y = \psi(x, C)$,

---

[1] On démontre que la fonction $\psi(x, C)$ est la solution la plus générale de cette équation, c'est-à-dire que toute solution peut s'obtenir en donnant à C une valeur convenable. Toutefois, d'une part, cet énoncé aurait besoin d'explications et de restrictions : il n'est pas toujours exact si, comme je le ferai le plus souvent dans ce paragraphe, on se limite au cas des variables et des constantes réelles. D'autre part, même en restant dans le réel, il comporte une exception si la courbe dont l'équation est $y = \psi(x, C)$ admet une *enveloppe :* cette enveloppe définit y comme une fonction de x qui vérifie l'équation différentielle sans rentrer dans le type $\psi(x, C)$; cette solution est dite *solution* ou *intégrale singulière*. L'équation $y^2 + y'^2 = 1$, par exemple, a pour intégrale générale $y = \sin(x + C)$ (n° 347) et pour intégrale singulière les deux droites $y = \pm 1$. Je n'insisterai pas sur ce sujet.

on voit que l'équation $\varphi(x, y, y') = 0$ exprime une propriété de la tangente commune à toutes les courbes de la famille.

On dit que cette *équation différentielle* a été obtenue par l'élimination de la constante C.

L'élimination de la constante se fait immédiatement quand l'équation de la famille de courbe est résolue par rapport à C, quand elle est sous la forme $F(x, y) = C$; l'équation différentielle est ici $F'_x + y' F'_y = 0$. Réciproquement, une équation différentielle de cette forme exprime que si, dans l'expression $F(x, y)$, on regarde y comme une fonction de x, la dérivée de $F(x, y)$ est nulle; il en résulte que $F(x, y)$ est une constante : l'intégrale générale de l'équation différentielle $F'_x + y' F'_y = 0$ est $F(x, y) =$ constante.

La recherche de l'intégrale générale d'une équation différentielle donnée $\varphi(x, y, y') = 0$, la recherche des courbes qui représentent une fonction de x qui vérifie cette équation, sont deux problèmes identiques : on a pris l'habitude de parler d'une courbe qui vérifie une équation différentielle, d'une courbe intégrale d'une équation différentielle, pour parler d'une courbe qui représente une fonction vérifiant l'équation différentielle, d'une courbe telle que les coordonnées x, y d'un quelconque de ses points et la pente y' de la tangente en ce point vérifient l'équation différentielle.

Si une courbe (S), définie par des équations telles que $x = f(t)$, $y = g(t)$, est une courbe intégrale de l'équation $\varphi(x, y, y')$, cette dernière équation doit être vérifiée identiquement en t, quand on y remplace x, y, y' respectivement par $f(t)$, $g(t)$, $\frac{g'(t)}{f'(t)}$, puisque cette dernière quantité est la pente de la tangente au point t. Réciproquement, si l'on a, identiquement,

$$\varphi\left[f(t), g(t), \frac{g'(t)}{f'(t)}\right] = 0,$$

la courbe définie par les équations $x = f(t)$, $y = g(t)$ est une courbe intégrale.

344. La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre $\varphi(x, y, y') = 0$ contient une constante arbitraire; c'est ce qu'ont montré les exemples donnés aux numéros précédents, c'est ce que montre encore l'exemple des équations différentielles de la forme $y' = f(x)$ dont la solution la plus générale est évidemment $y = F(x) + C$, en désignant par $F(x)$ une fonction primitive de $f(x)$ et par C une constante arbitraire; c'est ce que montre, enfin, l'exemple des équations différentielles du premier ordre obtenues par l'élimination d'une constante arbitraire. Il est d'ailleurs facile de s'en rendre compte d'une façon générale, par un raisonnement que je présenterai d'ailleurs sans chercher à y mettre aucune rigueur.

Si l'on se donne un point A_0, de coordonnées x_0, y_0, l'équation $\varphi(x_0, y_0, y') = 0$ détermine une ou plusieurs valeurs de y'; choisissons-en une y'_0 et construisons la droite passant par A_0 et dont la pente est y'_0; sur cette droite prenons un point A_1 de coordonnées x_1, y_1, très voisin de A_0; l'équation $\varphi(x_1, y_1, y') = 0$ détermine une ou plusieurs valeurs de y'; j'admets que, en raison de la continuité, il y en ait une y'_1 qui soit voisine de y'_0; je construis une seconde droite passant par A_1 et de pente y'_1; elle fera un angle très aigu avec la première droite; sur cette seconde droite je prends un point A_2 très voisin de A_1, de manière que l'angle $A_0 A_1 A_2$ soit très voisin de deux droits; l'équation $\varphi(x_2, y_2, y') = 0$, où x_2, y_2 désignent les coordonnées du point A_2, détermine de même une valeur y'_2 de y' très voisine de y'_1; on regardera y'_2 comme la pente d'une droite passant par A_2, droite sur laquelle on prendra un point A_3 très voisin de A_2, de manière que l'angle $A_1 A_2 A_3$ soit très voisin de deux droits. En continuant de la même façon, de proche en proche, on formera une ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ dont les côtés seront très petits, et qui ressemblera fort à une courbe partant du point arbitrairement choisi A_0. Les côtés de cette ligne brisée pourront être regardés, approximativement, comme des tangentes à une courbe; d'ailleurs les coordonnées de chaque sommet et la pente de la droite, de la tangente si l'on veut, qui le joint au sommet suivant, vérifient l'équation $\varphi(x, y, y')$. La ligne brisée ainsi obtenue peut donc être regardée à peu près comme une courbe intégrale de cette équation. On démontre d'ailleurs rigoureusement, sous certaines conditions, que, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment et que la longueur de ces côtés diminue indéfiniment, on s'approche indéfiniment par ce procédé d'une véritable courbe intégrale. Si l'on admet qu'il en est ainsi, on voit qu'il existe (au moins) une courbe intégrale de l'équation différentielle qui passe par un point donné A_0;

il n'en existera qu'une si l'équation différentielle est du premier degré en y'.

On arrive à la même conclusion analytiquement. L'équation $\varphi(x, y, y') = 0$ étant supposée résolue par rapport à y', on en tire $y' = \psi(x, y)$; puis, en prenant les dérivées,

$$\begin{aligned} y'' &= \psi'_x + y'\psi'_y = \psi''_x + \psi(x, y)\,\psi'_y = \theta(x, y), \\ y''' &= \theta'_x + y'\theta'_y = \theta'_x + \psi(x, y)\,\theta'_y = \ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En continuant de la même façon, on voit que les dérivées successives y', y'', y''', ... de la fonction y s'expriment au moyen de x, y: les valeurs numériques y'_0, y''_0, y'''_0, ... de ces dérivées pour $x = x_0$ sont donc déterminées, si l'on se donne la valeur y_0 que doit prendre la fonction y de x pour $x = x_0$. Admettons que la série

$$y_0 + \frac{y'_0}{1}(x - x_0) + \frac{y''_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

soit convergente dans un certain intervalle, comprenant x_0; elle définira, pour les valeurs de x voisines de x_0, une certaine fonction $y = f(x)$, et il est clair que cette fonction est la seule qui puisse être représentée par une série entière en $x - x_0$ et se réduise à y_0 pour $x = x_0$, à pouvoir vérifier l'équation différentielle $y' = \psi(x, y)$. L'étude des conditions dans laquelle la série est convergente, la démonstration, d'ailleurs facile, de ce fait que la somme de cette série vérifie effectivement l'équation différentielle sont en dehors du cadre du présent Livre.

Au lieu de procéder comme je viens de l'expliquer, il revient au même de partir d'une série entière en $x - x_0$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

à coefficients indéterminés, de remplacer dans l'équation donnée $\varphi(x, y, y') = 0$, y par cette série, y' par la série

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots,$$

et d'écrire que l'équation ainsi obtenue est identique en x, ou plutôt en $x - x_0$; on parvient ainsi à des relations entre les coefficients a_0, a_1, a_2, ... qui permettent (sauf exception) de déterminer ces coefficients en fonction du premier. On a donné, au Chapitre XIV, des applications de cette méthode à des équations différentielles particulièrement simples.

Ces aperçus suffiront au lecteur pour se rendre compte que, si l'on se donne une équation différentielle du premier ordre $\varphi(x, y, y') = 0$, du premier degré en y', il y a, en général, une courbe, et une seule, qui vérifie l'équation différentielle et qui passe par un point donné A_0. Il y aurait, en général, deux pareilles courbes si l'équation différentielle était du second degré en y', etc. Or c'est là précisément le caractère des courbes d'une famille dont l'équation $\psi(x, y, C) = 0$ contient une constante arbitraire C; les courbes de cette famille qui passent par le point A_0 sont déterminées : on les obtient en donnant à C la valeur (ou les valeurs) que l'on tire de l'équation $\psi(x_0, y_0, C) = 0$. Inversement, on a vu que toutes les courbes d'une même famille vérifiaient une équation différentielle. Il est donc à prévoir que l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre conduit à une famille de courbes, dont l'équation contient une constante arbitraire. C'est ce qu'on vérifiera dans les divers exemples qui seront traités un peu plus loin.

Auparavant, je veux encore signaler un autre point de vue duquel on peut envisager une équation différentielle $\varphi(x, y, y') = 0$, que je supposerai, pour éviter les difficultés relatives aux diverses déterminations, du premier degré en y'. On peut regarder cette équation comme faisant correspondre à chaque point A, de coordonnées x, y, une droite passant par ce point, à savoir la droite dont la pente y' est déterminée par l'équation $\varphi(x, y, y') = 0$. Cette droite n'est autre chose que la tangente à la courbe de la famille, définie par l'équation différentielle, qui passe par le point A. Inversement, à chaque droite du plan définie par l'équation $y = ax + b$, on peut faire correspondre un ou plusieurs points situés sur cette droite, et dont on obtient les coordonnées x, y en résolvant les deux équations

$$\varphi(x, y, a) = 0, \qquad y = ax + b.$$

Une courbe intégrale quelconque (S) peut être regardée comme un lieu de points tels que les droites correspondantes soient précisément les tangentes à cette courbe en ces points, ou comme l'enveloppe de droites dont chacune correspond au point où elle touche son enveloppe.

Notons en passant que l'équation $\varphi(x, y, a) = 0$ entre les variables x, y représente le lieu des points de contact des tangentes aux courbes de la famille définie par l'équation différentielle qui sont parallèles à une droite de pente a.

Après ces généralités, je vais passer en revue quelques équations différentielles du premier ordre pour lesquelles la recherche de la solution générale se ramène à la recherche de fonctions primitives : toutes les fois qu'il en est ainsi, on dit que l'équation se *ramène aux quadratures* [1].

345. Si l'équation différentielle est du premier degré en y' ou, ce qui revient à peu près au même, si cette équation est résolue par rapport à y', son premier membre peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x, y) + y'\psi(x, y) = 0,$$

ou, en employant la notation différentielle,

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = 0.$$

Il peut arriver que $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ soient les dérivées partielles d'une même fonction $F(x, y)$ [2], et qu'on s'en aperçoive immédiatement, en regardant l'équation. La solution la plus générale de cette équation est alors $F(x, y) = C$, en désignant par C une constante arbitraire, ainsi qu'on l'a déjà dit un peu plus haut. Dans ce cas, le premier membre de l'équation différentielle

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = 0$$

est la différentielle de $F(x, y)$; on dit habituellement qu'il est une *différentielle exacte*.

---

(1) *Effectuer une quadrature* ou *trouver une fonction primitive* sont des expressions qu'on prend dans le même sens; l'origine de la première façon de parler est évidente : déterminer une aire (ou trouver le carré équivalent à cette aire) revient, comme on l'a vu, à la recherche d'une fonction primitive.

(2) Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait identiquement en x, y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x};$$

cette condition est d'ailleurs suffisante, je ne m'arrêterai ni à l'établir, ni à montrer comment, lorsqu'elle est vérifiée, on peut déterminer la fonction $F(x, y)$.

La courbe intégrale qui passe par le point x_0, y_0 a évidemment pour équation $F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0$. Cette équation peut aussi bien être regardée comme l'intégrale générale de l'équation proposée, et l'on peut y regarder l'une des quantités x_0, y_0 comme la constante arbitraire, en attribuant à l'autre une valeur numérique quelconque [1].

Par exemple l'équation

$$xy' + y = 0, \qquad \text{ou} \qquad x\,dy + y\,dx = 0,$$

a pour intégrale générale $xy = C$. La famille de courbes qui vérifient l'équation différentielle est formée d'un faisceau d'hyperboles équilatères admettant pour asymptotes les axes coordonnés.

Le premier membre de l'équation $x\,dy - y\,dx = 0$ n'est pas, comme il est aisé de le voir, une différentielle exacte; il devient la différentielle de $\frac{y}{x}$ quand on l'a divisé par x^2; l'intégrale générale de l'équation $x\,dy - y\,dx = 0$ est donnée par l'équation $y = Cx$, qui représente les diverses droites passant par l'origine.

346. Séparation des variables. — On dit que, dans une équation différentielle du premier ordre, les variables sont séparées lorsqu'on peut mettre cette équation sous la forme

$$\varphi(x) + y'\psi(y) = 0,$$

ou

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0,$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ désignant respectivement des fonctions de x seul et de y seul :

Si l'on désigne respectivement par $\Phi(x)$ et par $\Psi(y)$ des fonctions primitives de $\varphi(x)$ et de $\psi(y)$, c'est-à-dire des fonctions dont les dérivées, prises par rapport à x et y, soient respectivement $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, on sera évidemment dans le cas qu'on a examiné dans le

---

(1) Il semble que dans l'équation $F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0$, dont on vient de dire qu'elle était l'intégrale générale de l'équation différentielle, il y ait *deux* constantes arbitraires, x_0 et y_0, et non pas seulement une. Mais on voit bien ici que ces deux constantes, qui n'entrent que dans la combinaison $F(x_0, y_0)$, n'en forment qu'une, à savoir cette combinaison elle-même. Une observation analogue peut se faire dans le cas général.

numéro précédent et l'intégrale générale de l'équation proposée sera

$$\Phi(x) + \Psi(y) = C;$$

la différentielle du premier membre est, en effet, $\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$. On écrit souvent cette intégrale sous la forme

$$\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = C;$$

dans le premier membre, les intégrales ne désignent pas autre chose que des fonctions primitives des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(y)$. Cette équation peut s'écrire

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy = C,$$

où x_0, y_0 désignent des nombres choisis arbitrairement (pourvu que les intégrales définies aient un sens), puisque, aussi bien, $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ est une fonction de x dont la dérivée est $\varphi(x)$. Le changement des valeurs attribuées à x_0, y_0 revient à changer la valeur de C, ainsi qu'on le voit immédiatement.

Si l'on cherche à déterminer la constante C de manière que la courbe définie par l'équation (1) passe par le point donné x_0, y_0, on trouve de suite $C = 0$; la courbe cherchée a pour équation

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy = 0.$$

Cette dernière équation peut, ainsi que l'équation (1), être regardée comme l'intégrale générale de l'équation différentielle. C'est l'une des quantités x_0, y_0 qui joue le rôle de constante arbitraire.

Si par exemple on veut chercher les courbes telles que toutes les normales passent par un même point, par l'origine par exemple, on trouve de suite l'équation différentielle $x + yy' = 0$; les variables sont séparées; la solution générale est $x^2 + y^2 = C$, c'est-à-dire les cercles ayant leur centre au point donné.

Une équation différentielle étant donnée, on cherchera toujours d'abord à séparer les variables, soit directement, soit en faisant quelque heureux changement de variable. Il n'est pas d'ailleurs toujours possible d'y parvenir.

347. La séparation des variables est immédiate lorsque l'une de ces variables x et y manque dans l'équation différentielle.

Supposons d'abord que la variable y manque; l'équation est de la forme $\varphi(x, y') = 0$; en la résolvant par rapport à y', on la met sous la forme $y' = \psi(x)$; on est immédiatement ramené aux quadratures; la solution générale est

$$y = \int \psi(x)\, dx + C.$$

Remarquons que toutes les courbes qui appartiennent à la famille définie par cette équation se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par une translation parallèle à l'axe des y. C'est ce qu'on pouvait prévoir sur l'équation $\varphi(x, y') = 0$, qui montre que toutes les tangentes à ces courbes en des points situés sur une même parallèle à l'axe des y sont parallèles. Réciproquement les courbes qui peuvent se déduire d'une courbe donnée $f(x, y) = 0$ par une translation parallèle à l'axe des y ont évidemment une équation de la forme $f(x, y + C) = 0$; en éliminant C entre cette équation et l'équation

$$f'_x(x, y + C) + y' f'_y(x, y + C) = 0,$$

on élimine à la fois y et C, il reste une équation qui ne contient plus que x et y'.

Supposons maintenant que la variable x manque ([1]); l'équation différentielle est de la forme $\varphi(y, y') = 0$; en la résolvant encore par rapport à y' elle prend la forme $y' = \psi(y)$, ou

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y), \qquad \frac{dy}{\psi(y)} = dx.$$

Dans la dernière forme, la séparation des variables est effectuée et

---

([1]) Au fond, les deux cas ne sont pas distincts, comme il apparaît immédiatement quand on emploie la notation différentielle et qu'on ne spécifie pas la variable indépendante. Il n'importe pas que cette variable s'appelle x ou y.

l'on voit que la solution générale est donnée par la formule

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y)} + C;$$

toutes les courbes de cette famille se déduisent de l'une d'elles par une translation parallèle à l'axe des x; inversement, une famille de courbes qui jouissent de cette propriété donne lieu à une équation différentielle où x manque.

J'ai fait observer que les deux cas n'étaient réellement pas distincts; je vais raisonner sur le second cas, le lecteur verra sans peine comment, dans le premier cas, les remarques qui suivent doivent être modifiées.

Il se peut que la résolution par rapport à y' de l'équation $\varphi(y, y') = 0$ présente des difficultés, ou conduise à des formules dont la complication cache le moyen d'effectuer les quadratures, et qu'il soit au contraire aisé de remplacer l'équation $\varphi(y, y') = 0$ par des équations de la forme

$$y = f(t), \qquad y' = g(t),$$

telles que l'ensemble des valeurs de y, y' que l'on obtient en faisant varier t coïncide avec l'ensemble des valeurs de y, y' qui satisfont à l'équation $\varphi(y, y') = 0$. C'est ce qui arrive en particulier lorsque, regardant pour un instant y et y' comme les coordonnées d'un point, la courbe définie par cette dernière équation est unicursale.

Il est alors tout naturel de prendre t pour variable indépendante et de chercher une fonction $h(t)$ telle que les deux équations $x = h(t)$, $y = f(t)$ définissent une courbe intégrale; il suffit pour cela que la pente $\dfrac{f'(t)}{h'(t)}$ de la tangente à cette courbe soit précisément $g(t)$; c'est-à-dire que la fonction inconnue $h(t)$ est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{f'(t)}{h'(t)} = g(t);$$

on en tire

$$h(t) = \int \frac{f'(t)}{g(t)} dt + C;$$

la courbe intégrale est définie par les deux équations

$$x = \int \frac{f'(t)}{g(t)} dt + C, \qquad y = f(t);$$

on observe que, sous cette forme, la propriété qu'ont les courbes de la famille, de se déduire l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe des x, apparaît tout aussi clairement.

Exemples. — On considère la famille de courbes (C) définies par l'équation

$$y + C = \sqrt{2px},$$

où la constante p reste la même pour toutes les courbes, où le paramètre C, constant pour une courbe, varie d'une courbe à l'autre : toutes ces courbes sont égales et se déduisent l'une de l'autre par des translations parallèles à l'axe des y; chacune d'elles est une branche de parabole, située au-dessus de son axe de symétrie; toutes ces paraboles ont leur sommet sur l'axe des y. Par chaque point du plan, dont l'abscisse est positive, passe une courbe (C) et une seule.

On demande de trouver une courbe qui soit rencontrée à angle droit, en chacun de ses points, par celle des courbes (C) qui passe par ce point : une telle courbe est ce qu'on appelle une *trajectoire orthogonale* des courbes (C).

Soient x, y les coordonnées d'un point de cette trajectoire; par ce point passe une courbe de la famille, dont la pente est $\sqrt{\frac{p}{2x}}$; la pente de la trajectoire orthogonale, en ce même point, sera $-\sqrt{\frac{2x}{p}}$; cette trajectoire orthogonale sera donc une intégrale de l'équation

$$y' = -\sqrt{\frac{2x}{p}}$$

dont l'intégrale générale est

$$y + C' = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{\frac{3}{2}},$$

en désignant par C′ une constante arbitraire. Cette dernière équation définit une famille de courbes que j'appellerai les *courbes* (C′); chacune d'elles est une trajectoire orthogonale des courbes (C) : toutes les courbes (C) qu'elle rencontre, elle les rencontre à angle droit.

Par chaque point du plan, dont l'abscisse est positive, passe une courbe (C′); les diverses courbes (C′) qui passent par les différents points d'une courbe (C) la rencontrent à angle droit; chaque courbe (C) est une trajectoire orthogonale des courbes (C′).

Si l'on considérait les paraboles (C_1) définies par l'équation

$$(y + C_1)^2 = 2px,$$

et les courbes (C'_1) définies par l'équation

$$(y + C'_1)^2 = \frac{8x^3}{9p},$$

et si l'on désignait sous le nom de *branche supérieure* pour l'une quelconque de ces courbes la partie qui est située au-dessus de son axe de symétrie, on reconnaîtrait sans peine que les branches supérieures des courbes (C'_1) sont les trajectoires orthogonales des branches inférieures des paraboles (C_1).

Si, en général, l'équation différentielle d'une famille de courbes est

$$\varphi(x, y, y') = 0,$$

l'équation différentielle d'une trajectoire orthogonale de ces courbes est

$$\varphi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Inversement, la première équation est l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes définies par la seconde équation.

En reprenant les notations de l'exercice 342, Chap. XVII, on demande de trouver une courbe telle que si, par le point N, on mène une parallèle à l'axe des y jusqu'à la tangente en M, la longueur de cette droite soit constante et égale à $2a$.

On trouve de suite l'équation différentielle

$$2a = y(1 + y'^2),$$

d'où

$$dx = \pm\sqrt{\frac{y}{2a - y}}\,dy;$$

puis, en posant $y = (2a - y)t^2$,

$$y = \frac{2at^2}{1+t^2}, \qquad dy = \frac{4at}{(1+t^2)^2}\,dt, \qquad dx = \pm\frac{4at^2}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

la substitution $t = \operatorname{tang} u$ est tout indiquée par le dénominateur $1 + t^2$; on trouve alors

$$dx = \pm\frac{4a\operatorname{tang}^2 u}{(1+\operatorname{tang}^2 u)^2}(1 + \operatorname{tang}^2 u)\,du = \pm 4a\sin^2 u\,du;$$

$$x = C \pm 2a\int(1 - \cos 2u)\,du = C \pm 2a\left(u - \frac{\sin 2u}{2}\right).$$

En exprimant y au moyen de la même variable u, on a

$$y = \frac{2a\operatorname{tang}^2 u}{1+\operatorname{tang}^2 u} = 2a\sin^2 u = a(1 - \cos 2u).$$

En remplaçant $2u$ par v on obtient, pour les équations des courbes cherchées

$$x = C \pm a(v - \sin v), \qquad y = a(1 - \cos v).$$

Il est inutile de conserver le double signe dans l'expression de x, comme le montre immédiatement le changement de v en $-v$.

La courbe définie par les équations

$$x = a(v - \sin v), \qquad y = a(1 - \cos v)$$

est une *cycloïde* (n° 300); toutes les courbes cherchées se déduisent de celle-là par une translation parallèle à l'axe des x.

En conservant toujours les mêmes notations, on demande de déterminer les courbes telles que l'on ait $\mathrm{TN} = a$.

On trouve de suite l'équation différentielle

$$y = \frac{ay'}{1 + y'^2};$$

en prenant $y' = t$ pour variable indépendante, on reconnaît que la courbe cherchée est définie par les deux équations

$$y = \frac{at}{1 + t^2}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{a(1 - t^2)}{t(1 + t^2)^2},$$

dont la dernière s'intègre aisément en posant $t^2 = u$; on trouve finalement

$$x = a\left(\frac{1}{1 + t^2} + \lg\sqrt{\frac{t^2}{1 + t^2}}\right) + C,$$

$$y = \frac{at}{1 + t^2}.$$

Soient M un point d'une courbe, C le centre de courbure correspondant, N le point où la normale rencontre l'axe des x; on demande de déterminer la courbe par la conditition que le rapport $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MN}}$ soit constant et égal à k.

En mettant brutalement le problème en équation on parvient à une équation différentielle du second ordre; un choix convenable des variables va permettre de n'introduire que des équations différentielles du premier ordre, appartenant aux types où manque une variable.

Reprenons les notations du n° 299; à chaque point M de la courbe correspondent son abscisse curviligne s (les arcs étant supposés comptés à partir d'un point fixe), l'angle α dont il faut faire tourner l'axe des x pour l'amener parallèlement à la tangente, etc. En prenant pour direction positive sur la normale la direction définie par l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, les équivalents algébriques des vecteurs MC, MN seront

$$\mathrm{MC} = \frac{ds}{d\alpha}, \qquad \mathrm{MN} = -\frac{y}{\cos\alpha}.$$

On devra donc avoir

$$\frac{ds}{d\alpha}\frac{\cos\alpha}{y} = -k; \tag{1}$$

on a, d'ailleurs,

$$dx = ds\cos\alpha, \qquad dy = ds\sin\alpha; \tag{2}$$

en éliminant ds entre la dernière des équations (2) et l'équation (1), on parvient à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{y} = -\frac{k\sin\alpha}{\cos\alpha}d\alpha:$$

les variables sont séparées; on trouve pour l'intégrale générale

$$y = a\cos^k\alpha,$$

en désignant par a la constante d'intégration; en remplaçant, dans l'équation (1), y par sa valeur on obtient

$$ds = ka\cos^{k-1}\alpha$$

et, en remplaçant dans la première équation (2),

$$dx = -ka\cos^k\alpha\,d\alpha,$$

d'où $x = C - ka\int\cos^k\alpha\,d\alpha$; on donnera à l'intégrale définie la limite supérieure α, et une limite inférieure arbitraire, o, par exemple; la modification de cette limite inférieure revient à changer la valeur de la constante C; toutes les courbes cherchées se déduisent de l'une d'elles par des translations, ou par un déplacement de l'origine; en sorte qu'on peut dire que les courbes cherchées sont définies par les équations

$$x = -ka\int_0^\alpha\cos^k\alpha\,d\alpha, \qquad y = a\cos^k\alpha, \tag{3}$$

sans m'arrêter à la distinction, suivant les valeurs de k, des formes de ces diverses courbes, je me contente d'observer que, pour $k = 1$, on a un cercle, pour $k = 2$, une cycloïde, ...

Lorsque k est négatif, il est avantageux de faire le changement de variables (n° 204) défini par les équations

$$\cos\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch}u}, \qquad \sin\alpha = \operatorname{th}u, \qquad d\alpha = \frac{du}{\operatorname{ch}u}$$

et de substituer aux équations (3) les équations

$$x = -ak\int_0^u \mathrm{ch}^{-1-k} u\, du, \qquad y = a\,\mathrm{ch}^{-k} u;$$

pour $k=-1$, on obtient une chaînette; pour $k=-2$ une parabole, etc. Lorsque k est un nombre entier impair et positif, ou un entier pair et négatif, la courbe est algébrique.

348. Équations différentielles linéaires. — On appelle *équation différentielle linéaire homogène* du $n^{\text{ième}}$ ordre, ou encore *équation différentielle linéaire sans second membre,* une équation du type

$$(1) \qquad A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n y = 0,$$

dans laquelle le second membre est o et dans laquelle le premier membre est une forme linéaire [1] par rapport à y et à ses dérivées, jusqu'à l'ordre n, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, les coefficients A_0, A_1, ..., A_n de cette forme étant des fonctions données de x. Je me bornerai dans ce qui suit à l'étude des équations du premier et du second ordres, c'est-à-dire des équations appartenant à l'un ou l'autre des types

$$A_0 y' + A_1 y = 0, \qquad A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = 0;$$

mais, avant de m'y arrêter, je veux faire les observations suivantes, qui sont évidentes sur la forme générale.

Soit u une fonction de x qui vérifie l'équation (1), c'est-à-dire une fonction de x telle qu'en remplaçant dans le premier membre de cette équation y et ses dérivées par u et les dérivées de u, le premier membre devienne identiquement nul, la fonction Cu, où C est une constante arbitraire, sera, comme u, une solution de l'équation (1).

Si u et v sont des fonctions de x qui vérifient l'équation (1), $u+v$ sera aussi une solution de cette équation; il en sera par conséquent de même de $Cu + C'v$, en désignant par C et C' des constantes arbi-

---

[1] C'est-à-dire, conformément aux conventions expliquées au n° 129, un polynome *homogène* et *du premier degré*. J'ai conservé le mot *homogène* dans le texte, pour éviter toute confusion.

traires. Les deux solutions u et v ne sont pas regardées comme distinctes si leur rapport est constant.

Supposons que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soient des fonctions de x qui vérifient l'équation (1), la fonction

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires, sera aussi une solution de cette équation. On démontre que c'est la solution la plus générale de l'équation (1) lorsque les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de nombres constants $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tels que l'on ait identiquement en x

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = 0.$$

On appelle *équation différentielle linéaire avec second membre* toute équation du type

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n y = B, \tag{2}$$

où B est comme $A_0, A_1, \ldots, A_n$ une fonction donnée de x.

Il est à peine utile de faire observer au lecteur que le fait qu'on a fait figurer B dans le *second* membre n'a aucune importance.

Supposons que l'on connaisse une solution u de l'équation différentielle linéaire (2). Si, dans cette équation (2), on remplace y par $u + z$, en prenant z pour fonction inconnue, il est clair, en tenant compte de l'hypothèse, que cette équation sera remplacée par l'équation sans second membre

$$A_0 z^{(n)} + A_1 z^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} z' + A_n z = 0,$$

qui est maintenant linéaire et homogène en $z, z', z'', \ldots, z^{(n)}$; d'où la conclusion suivante :

La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre s'obtient en ajoutant à n'importe quelle solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation obtenue en remplaçant le second membre par 0.

La recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre peut être simplifiée par la remarque suivante, qui est évidente.

Si le second membre est la somme de deux quantités $B_1 + B_2$, on obtiendra une solution de l'équation proposée en ajoutant une solution de l'équation où le second membre serait B_1 et une solution de l'équation où le second membre serait B_2. Dans toutes les équations, bien entendu, le premier membre est le même.

349. L'équation linéaire homogène du premier ordre peut s'écrire, après qu'on a divisé par le coefficient de y', sous la forme

$$y' + ay = 0,$$

en désignant par a une fonction donnée de x; en l'écrivant

$$\frac{y'}{y} + a = 0,$$

les variables sont séparées, on trouve de suite, pour l'intégrale générale,

$$\lg y + \int a\,dx + C = 0,$$
$$y = e^{-C - \int a\,dx} = C' e^{-\int a\,dx},$$

en désignant par C et C′ des constantes arbitraires dont la seconde est liée à la première par la relation $C' = e^{-C}$. Cette forme de l'intégrale générale met bien en évidence ce que l'on a annoncé plus haut. La solution la plus générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre s'obtient en multipliant par une constante arbitraire une solution particulière, à savoir ici $e^{-\int a\,dx}$; on pourrait remplacer $\int a\,dx$ par $\int_{x_0}^{x} a\,dx$, en désignant par x_0 un nombre fixe quelconque, qui peut d'ailleurs jouer le rôle de constante arbitraire.

Par exemple, l'intégrale générale de l'équation $y'x + y = 0$ est

$$y = Ce^{-\int \frac{dx}{x}} = Ce^{-\lg x} = \frac{C}{x},$$

ou $yx = C$. L'intégrale générale de l'équation $y' + x^n y = 0$, lorsque n n'est pas égal à -1, est

$$y = Ce^{-\frac{x^{n+1}}{n+1}}.$$

Observons que le premier membre de l'équation $y'+ay=0$, quand on le multiplie par $e^{\int a\,dx}$, devient, quelle que soit la fonction y, la dérivée de $ye^{\int a\,dx}$, puisque la dérivée de $e^{\int a\,dx}$ est $ae^{\int a\,dx}$: de là résulte une nouvelle démonstration du résultat auquel on vient de parvenir; l'équation proposée équivaut à l'équation

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int a\,dx})=0,$$

d'où l'on déduit, en désignant par C une constante arbitraire,

$$ye^{\int a\,dx}=C', \qquad y=Ce^{-\int a\,dx}.$$

Considérons maintenant une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre ([1]),

$$(1) \qquad y'+ay=b,$$

où a, b sont des fonctions données de x.

Un des procédés, pour parvenir à la solution de cette équation, consiste à y remplacer la fonction y par le produit de deux fonctions u, v; l'équation devient alors, en ordonnant par rapport à v et à sa dérivée,

$$(u'+au)v+uv'=b;$$

on détermine u par la condition que le coefficient de v soit nul, c'est-à-dire par l'équation $u'+au=0$, cette dernière équation, sauf le nom de la fonction inconnue, n'est autre que l'équation homogène obtenue en supprimant le second membre de l'équation (1); on en tire $u=\lambda e^{-\int a\,dx}$, en désignant par λ une constante.

Si l'on adopte cette valeur de u, il est clair que le produit uv vérifiera l'équation (1) si l'on a $uv'=b$ et ne la vérifiera que dans ce cas : on obtiendra donc v par la formule

$$v=\int\frac{b}{u}dx+C,$$

([1]) On dit habituellement : *une équation différentielle linéaire du premier ordre,* sans rien ajouter; il importe de remarquer que le mot *linéaire* n'est plus alors pris avec la signification qu'on lui a donnée au n° 129; il remplace les mots *du premier degré.*

et la solution la plus générale de l'équation (1) sera

$$y = u\left(\int \frac{b}{u}\,dx + C\right),$$

C désigne une constante arbitraire.

Il semble qu'il y ait dans l'expression de y deux constantes arbitraires, C et λ; mais il est clair que λ disparaît du produit $u\int\frac{b}{u}\,dx$; les deux constantes n'entrent que par leur combinaison λC; au reste, il résulte clairement du raisonnement même par lequel on est parvenu à la solution générale qu'on peut prendre pour u n'importe quelle solution de l'équation $u' + au = 0$, c'est-à-dire attribuer à λ telle valeur numérique que l'on veut. Il suffit de faire figurer dans le résultat la constante C.

En résumé, pour avoir la solution la plus générale de l'équation (1), on détermine d'abord une solution u de l'équation sans second membre et l'on multiplie cette solution par une fonction primitive de $\frac{b}{u}$, augmentée d'une constante arbitraire.

On peut écrire y sous la forme

$$y = e^{-\int a\,dx}\left(\int b e^{\int a\,dx}\,dx + C\right).$$

Cette dernière forme revient à dire que la dérivée de $ye^{\int a\,dx}$ doit être $be^{\int a\,dx}$. C'est là, d'ailleurs, une conséquence immédiate de l'équation différentielle et de ce que le produit par $e^{\int a\,dx}$ de $y' + ay$ est, comme on l'a fait observer, la dérivée de $ye^{\int a\,dx}$.

On a vu que l'intégrale générale de l'équation (1) peut s'écrire sous la forme $y = CP + Q$, en désignant par C la constante arbitraire et en posant

$$P = e^{-\int a\,dx}, \qquad Q = e^{-\int a\,dx}\int b e^{\int a\,dx}\,dx;$$

inversement toutes les fonctions de la forme $CP + Q$, satisfont, quel que soit C, à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$Py' - P'y = PQ' - P'Q;$$

l'identification de cette équation avec l'équation $y' + ay = b$, fournira au lecteur un moyen de retrouver l'expression de l'intégrale générale.

Si a et b sont des constantes, l'intégrale générale est

$$y = e^{-ax}\left(\int be^{ax}\,dx + C\right) = \frac{b}{a} + Ce^{-ax};$$

observons que la solution $\frac{b}{a}$ est évidente; conformément à une observation antérieure, on obtient la solution générale en ajoutant à cette solution particulière l'intégrale générale de l'équation sans second membre $y' + ay = 0$.

350. Dans tout ce qui précède, on a supposé implicitement que la variable, les fonctions données ou inconnues étaient réelles; mais, en supposant toujours essentiellement que la variable x soit réelle, il convient, pour ce qui suit, d'observer que le résultat qu'on vient d'obtenir, relatif à l'intégrale générale de l'équation $y' + ay = b$, subsiste lorsque a et b sont des constantes imaginaires; la fonction y la plus générale de la forme $P + Qi$, où P, Q sont des fonctions réelles de la variable réelle x, qui satisfasse à cette équation est toujours donnée par la formule

$$y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax},$$

où C est maintenant une constante réelle ou imaginaire, et où l'exponentielle e^{-ax} a la signification qui a été précisée au n° 239; cela résulte de ce que, quelle que soit la fonction y, la dérivée par rapport à x de ye^{ax} est

$$e^{ax}(y' + ay);$$

si l'on veut que la fonction $y' + ay$ soit égale à b, il faut donc que l'on ait

$$\frac{d}{dx}(ye^{ax}) = be^{ax} = \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}e^{ax}\right),$$

et que, par conséquent, la différence entre ye^{ax} et $\frac{b}{a}e^{ax}$ soit une constante, qui peut d'ailleurs être imaginaire; c'est le résultat annoncé.

Par exemple, on voit, dans le cas où b est nul et où l'on suppose $a = \alpha + \beta i$, que la solution la plus générale de l'équation $y' + (\alpha + \beta i)y$ est donnée par la formule

$$y = (A + Bi)(\cos\beta x - i\sin\beta x)e^{-\alpha x}.$$

Cela revient à dire que les fonctions réelles

$$P = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{-\alpha x},$$
$$Q = (B\cos\beta x - A\sin\beta x)e^{-\alpha x},$$

où A, B désignent des constantes, constituent la solution la plus générale des équations différentielles simultanées

$$P' + \alpha P - \beta Q = 0, \qquad Q' + \beta P + \alpha Q = 0,$$

où tout est supposé réel.

351. **Exemples**. — Cherchons les courbes telles que la tangente rencontre l'axe des y en un point fixe d'ordonnée égale à a. On trouve de suite l'équation différentielle $y - y'x = a$, ou

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{a}{x}.$$

On aperçoit de suite la solution particulière $y = a$; la solution générale de l'équation sans second membre est $y = Cx$; l'intégrale générale est $y = Cx + a$.

Soit à intégrer l'équation

$$(1) \qquad y'(1 - x^2) - xy = 1;$$

l'intégrale de l'équation sans second membre est

$$\lambda e^{\int \frac{x\,dx}{1-x^2}} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\lg|1-x^2|},$$

elle est susceptible de deux formes distinctes, dont l'une $\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ convient pour $|x| < 1$, dont l'autre $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2-1}}$ convient pour $x > 1$ [1].

Elles vont conduire à deux formes de la solution générale, dont l'une conviendra dans le premier cas, l'autre dans le second. Quant à la constante λ, on peut dans l'un ou l'autre cas lui donner la valeur 1.

Dans le premier cas, que je considérerai spécialement, la solution générale sera donnée par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx + C\right] = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}};$$

---

[1] On passerait de l'une à l'autre par le changement de λ en $i\lambda$; *voir* la note du n° 343.

elle serait donnée, dans le second cas, par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left[\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{1-x^2}\,dx + \mathrm{C}\right] = \frac{\lg\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Cherchons à déterminer les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de la série

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

supposée convergente, de manière que la somme de cette série vérifie l'équation proposée.

On écrira que le terme constant est égal à 1 et que les coefficients des différentes puissances de x dans l'expression

$$(1-x^2)(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots) - x(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)$$

sont nuls; on trouve ainsi

$$a_1 = 1, \qquad 2a_2 - a_0 = 0, \qquad 3a_3 - 2a_1 = 0,$$

et, en général,

$$n a_n - (n-1)a_{n-2} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Les équations

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ 3a_3 &= 2a_1, \\ 5a_5 &= 4a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ (2n+1)a_{2n+1} &= 2n\,a_{2n-1} \end{aligned}$$

déterminent successivement les coefficients à indice impair; on trouve, en multipliant membre à membre,

$$a_{2n+1} = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Les équations

$$\begin{aligned} 2a_2 &= a_0, \\ 4a_4 &= 3a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ 2n\,a_{2n} &= (2n-1)a_{2n-2} \end{aligned}$$

déterminent les coefficients d'indice pair en fonction de a_0; on trouve comme tout à l'heure

$$a_{2n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,a_0.$$

On en conclut que l'équation proposée est vérifiée par l'expression

$$f(x) + a_0 g(x),$$

en désignant par a_0 une constante arbitraire, et en posant

$$f(x) = x + \frac{2}{1}\frac{x^3}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots.$$

On reconnaît de suite que ces deux séries sont convergentes à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$. En vertu même du calcul que l'on a fait, toute série entière en x qui vérifie l'équation proposée peut se mettre sous la forme $f(x) + a_0 g(x)$.

L'intégrale générale de cette équation, en supposant $|x| < 1$, est

$$\frac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}};$$

elle se réduit à C pour $x = 0$; l'intégrale $f(x) + a_0 g(x)$ se réduit à a_0. On en conclut, puisqu'il n'y a qu'une seule solution de l'équation (1) qui prenne une valeur donnée pour une valeur donnée de la variable, que les deux fonctions

$$\frac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f(x) + C g(x)$$

sont identiques; ceci devant avoir lieu quel que soit C, on a certainement

$$f(x) = \frac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

la seconde formule nous était déjà connue; la première nous fournit un développement simple de $\dfrac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$ en série entière, développement que l'on savait d'avance exister, puisqu'on peut l'obtenir en multipliant les deux séries qui représentent $\text{arc}\sin x$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, séries que l'on sait être convergentes à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$.

Le résultat que l'on vient d'obtenir a été présenté comme une conséquence de l'intégration de l'équation (1). Si l'on s'était proposé, *a priori*, de chercher la forme du développement de la fonction

$$y = \frac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

il aurait été naturel de chercher quelque relation simple entre la variable, cette fonction et sa dérivée (ou ses dérivées). Cette relation s'obtient de suite en prenant les dérivées des deux membres de l'égalité précédente, écrite sous la forme

$$y\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc}\sin x,$$

et l'on retombe immédiatement sur l'équation (1). Il est d'ailleurs inutile ici, pour la suite, d'intégrer l'équation (1). On sait que le développement est possible; on reconnaît aisément qu'il ne doit contenir que des termes du degré impair et qu'il est, par conséquent, de la forme

$$\alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots.$$

Les coefficients α_1, α_3, ..., α_{2n+1}, ... se déterminent comme on l'a expliqué.

On est tombé ici sur une équation linéaire, avec second membre, du premier ordre, particulièrement simple. Je signale une autre application du même procédé qui va nous servir à déterminer, au moyen d'une équation différentielle, les coefficients, non plus d'une série, mais bien d'un polynome; la question est de la même nature; un polynome en x peut être regardé comme une série entière en x, dont tous les coefficients sont nuls, à partir d'un certain rang.

On a vu au n° 109 que la fonction $y = \cos(n \operatorname{arc}\cos x)$, qui s'obtient en remplaçant $\cos a$ par x dans l'expression de $\cos na$, était un polynome en x du degré n, dans lequel le coefficient de x^n était 2^{n-1} et dont tous les termes sont de même parité.

On a, par un calcul facile,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \operatorname{arc}\cos x)$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n \operatorname{arc}\cos x) = -\frac{n^2 y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On voit que la fonction y vérifie l'équation différentielle

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right) + n^2 y = 0,$$

ou encore

$$(2) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0;$$

nous tombons ici sur une équation linéaire homogène du second ordre. On sait qu'il existe un polynome de la forme

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_p x^{n-2p} + \ldots$$

qui vérifie cette équation ; on substituera le polynome dans l'équation (2) et l'on écrira que les coefficients des différentes puissances de x sont nuls : on obtient ainsi une relation entre deux coefficients consécutifs du polynome,

$$A_p = -\frac{(n-2p+1)(n-2p+2)}{4p(n-p)} A_{p-1};$$

d'où l'on déduit sans peine

$$A_p = (-1)^p \frac{(n-2p+1)(n-2p+2)(n-2p+3)\dots n}{4^p \times 1.2\dots p \times (n-p)(n-p+1)\dots(n-1)} A_0,$$

ou, en supposant $p > 1$ et en remplaçant A_0 par 2^{n-1},

$$A_p = (-1)^p n \frac{(n-2p+1)(n-2p+2)\dots(n-p-1)}{2.3\dots p} 2^{n-2p-1}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{2}{n}\cos(n \arccos x) = \frac{1}{n}(2x)^n - (2x)^{n-2} + \frac{n-3}{2}(2x)^{n-4} - \dots$$
$$+ (-1)^p \frac{(n-2p+1)(n-2p+2)\dots(n-p-1)}{2.3\dots p}(2x)^{n-2p} + \dots$$

Il convient de remarquer que les deux premiers termes n'obéissent pas à la loi du terme général : dans ce terme, p doit prendre les valeurs $2, 3, \dots, \frac{n}{2}$ si n est pair, les valeurs $2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$ si n est impair. Le dernier terme est $(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n}$, dans le premier cas et $(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2x$ dans le second ([1]).

352. Une équation différentielle linéaire (homogène) du second ordre peut s'écrire

$$y'' + py' + qy = 0,$$

en désignant par p et q des fonctions données de x.

Considérons le cas où ces fonctions se réduisent à des constantes réelles et cherchons si l'équation admet des solutions de la forme e^{rx}, en désignant par r une constante. Le premier membre de l'équation, quand on y remplace y par e^{rx}, devient $e^{rx}(r^2 + pr + q)$; il sera identiquement nul (e^{rx} sera une solution) si r est une racine de l'équation

([1]) *Cf.* Ex. 36 et 37.

du second degré

$$r^2 + pr + q = 0;$$

supposons que cette équation ait deux racines réelles et distinctes r_1 et r_2; on trouve ainsi deux solutions $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$ dont le rapport n'est pas constant; il en résulte que

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

est une solution de l'équation proposée, si C_1 et C_2 désignent des constantes : si l'on admettait la proposition générale énoncée au n° 348, on serait assuré que c'est là la solution générale : c'est ce que l'on établira d'ailleurs dans un instant.

Si les deux racines sont distinctes, mais imaginaires, le calcul précédent conserve une signification. On sait ce que signifie l'expression e^{rx} quand r est imaginaire et x réel, ce que sont ses dérivées re^{rx}, $r^2 e^{rx}$: on est encore certain que $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$, où r_1 et r_2 sont des nombres imaginaires conjugués $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, sont des solutions de l'équation différentielle. Les fonctions

$$e^{r_1 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x),$$
$$e^{r_2 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x)$$

sont imaginaires conjuguées. La fonction $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ est toujours une solution de l'équation proposée; elle sera réelle si l'on pose

$$C_1 = a + bi, \qquad C_2 = a - bi,$$

a et b étant des nombres réels; on a alors

$$\begin{aligned} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} &= (a + bi)(\cos\beta x + i \sin\beta x)e^{\alpha x} \\ &\quad + (a - bi)(\cos\beta x - i \sin\beta x)e^{\alpha x} \\ &= (2a\cos\beta x - 2b\sin\beta x)e^{\alpha x}; \end{aligned}$$

il suit de là que les fonctions réelles

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

satisfont à l'équation différentielle. C'est ce que le lecteur n'aura aucune peine à vérifier. L'intégrale générale, en admettant toujours la même proposition, est

$$A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x$$

en désignant par A et B des constantes réelles quelconques.

On peut l'écrire

$$R e^{\alpha x} \sin \beta(x - k)$$

en désignant par R et k de nouvelles constantes arbitraires liées aux premières par les relations

$$A = - R \sin \beta k, \qquad B = R \cos \beta k.$$

On peut supposer $R > 0$.

On observera les différences de nature entre les fonctions que l'on trouve comme solutions de l'équation différentielle. Une fonction de la forme $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ où C_1, C_2, r_1, r_2 sont des quantités réelles ne s'annule pour aucune valeur de x si les constantes C_1, C_2 sont de même signe, elle s'annule et change de signe pour une valeur de x, et une seule, si C_1 et C_2 sont de signes contraires. L'influence du signe de r_1, r_2 se fait sentir sur la façon dont se comporte la fonction pour $x = \pm \infty$, pour $x = + \infty$ par exemple : en supposant $r_2 > r_1$ on peut écrire

$$y = e^{r_2 x}[C_1 e^{(r_1 - r_2)x} + C_2];$$

quand x devient très grand, la quantité entre crochets tend vers C_2; si r_2 est positif, y deviendra infini en valeur absolue et du signe de C_2; si r_2 est négatif, y tendra vers zéro; il s'approchera de C_2 si r_2 est nul.

Les fonctions de la forme $y = R e^{\alpha x} \sin \beta(x - k)$ se comportent tout autrement, elles s'annulent et changent de signe pour toutes les valeurs de x de la forme $x = k + n\pi$, n étant un entier quelconque. La courbe sinueuse qui les représente rencontre l'axe des x en une infinité de points équidistants; si α est positif, $e^{\alpha x}$ tend vers $+ \infty$ en même temps que x (et beaucoup plus rapidement). Il est clair que pour

$$x = k + (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad (n \text{ entier})$$

y a des valeurs très grandes en valeur absolue, positives ou négatives suivant que n est pair ou impair, de plus en plus grandes à mesure que n devient plus grand. Les précédentes valeurs de x ne sont pas d'ailleurs celles qui correspondent aux maxima et aux minima de y; celles-ci sont données par l'équation

$$\operatorname{tang}\beta(x-k) = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Au contraire, quand α est négatif et que x tend vers $+\infty$, la courbe se rapproche rapidement de l'axe des x.

Lorsque les deux racines de l'équation $r^2+pr+q=0$ sont égales, la marche précédente ne fournit qu'une solution de l'équation différentielle; il faut en chercher une seconde; on y parvient par une méthode qui va nous fournir en même temps la démonstration de ce que, dans les autres cas, on a bien, en effet, obtenu la solution générale de l'équation.

Si, dans l'expression $y''+py'+qy$, on remplace y par le produit uv de deux fonctions quelconques de x, cette expression, en ordonnant par rapport à v et à ses dérivées, devient

$$uv''+(2u'+pu)v'+v(u''+pu'+qu) \quad (^1).$$

Supposons maintenant que u soit de la forme e^{rx}, r étant une constante, et que p et q soient des constantes, l'expression précédente deviendra

$$e^{rx}[v''+(2r+p)v'+(r^2+pr+q)v].$$

Il est clair que, si l'on se donne r, la solution la plus générale de l'équation proposée s'obtiendra en multipliant par e^{rx} la solution la plus générale de l'équation

$$v''+(2r+p)v'+(r^2+pr+q)v=0,$$

dans laquelle on observera que le coefficient $2r+p$ de v' est la dérivée par rapport à r du coefficient r^2+pr+q de v. En prenant

(1) Ce calcul s'applique lors même que p et q sont des fonctions de x; le lecteur en conclura sans peine que, lorsque l'on connaît une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, sa résolution complète se ramène à une quadrature et à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre.

pour r une racine r_1 de r^2+pr+q, l'équation précédente devient

$$v''+(2r_1+p)v'=0.$$

C'est là, si l'on regarde v' comme la fonction inconnue, une équation linéaire homogène du premier ordre, à coefficients constants.

On en tire

$$v'=Ce^{-(2r_1+p)x},$$

et, par suite,

$$v=C_1+C_2e^{-(2r_1+p)x}$$

en désignant par C, C_1, C_2 des constantes; on en conclut que la solution la plus générale de l'équation proposée est

$$y=ve^{r_1x}=C_1e^{r_1x}+C_2e^{-(r_1+p)x}=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x},$$

en désignant par r_2 la seconde racine de l'équation $r^2+pr+q=0$: ces résultats sont valables lors même que les racines r_1, r_2 sont imaginaires conjuguées; mais il faut prendre alors, pour les constantes C_1 et C_2, des nombres imaginaires conjugués, si l'on veut avoir pour y une fonction réelle. On retrouve donc ainsi, complètement démontrés, les résultats annoncés plus haut.

Il reste à examiner le cas où les racines du trinome r^2+pr+q sont égales; l'équation en v se réduit alors à $v''=0$, d'où l'on déduit $v'=C$, $v=Cx+C'$ en désignant par C et C' des constantes; l'intégrale générale de l'équation proposée est alors

$$y=(Cx+C')e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Dans tous les cas, les constantes sont déterminées si l'on se donne pour une valeur de x, la valeur de y et de sa dérivée, un point de la courbe intégrale et la tangente en ce point.

353. Considérons maintenant une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

$$y''+py'+qy=A,$$

où je suppose encore que p et q soient des constantes. La méthode précédente fournit un moyen de ramener l'intégration de cette équation aux quadratures quelle que soit la fonction donnée de x qui figure dans le second membre; en effet, en substituant dans cette équation $e^{rx}v$ à la place de y et en supposant que r soit une racine de l'équation $r^2+pr+q=0$, on trouve, après avoir divisé par e^{rx},

$$v''+(2r+p)v'=\mathrm{A}e^{-rx};$$

c'est une équation linéaire du premier ordre, si l'on regarde v' comme la fonction inconnue; on en déduit v', puis v, par des quadratures; cette méthode s'applique en particulier quand r est une racine double.

Dans le cas où A est un polynome en x, ou une somme d'exponentielles, il vaut mieux, le plus souvent, chercher une solution particulière de l'équation

$$y''+py'+qy=\mathrm{A},$$

puis ajouter à cette solution particulière la solution générale de l'équation sans second membre.

Si A est une constante, $\frac{\mathrm{A}}{q}$ sera une solution.

Si

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}_0x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\ldots+\mathrm{A}_\alpha x^{n-\alpha}+\ldots+\mathrm{A}_n$$

est un polynome de degré n, on cherchera une solution de la forme

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_\alpha x^{n-\alpha}+\ldots+a_n;$$

en substituant et en égalant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de x, on formera $n+1$ équations du premier degré

$$\begin{aligned}
qa_0&=\mathrm{A}_0,\\
qa_1+pna_0&=\mathrm{A}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
qa_\alpha+(n-\alpha+1)pa_{\alpha-1}+(n-\alpha+2)(n-\alpha+1)a_{\alpha-2}&=\mathrm{A}_\alpha,
\end{aligned}$$

qui permettront de déterminer sans ambiguïté les coefficients a_0, a_1, ..., a_α, ..., a_n, lorsque q n'est pas nul.

Si q était nul, on serait ramené à une équation du premier ordre en prenant y' pour inconnue; au reste, la même méthode s'appliquerait, en prenant un polynome du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré pour y au lieu de prendre un polynome du $n^{\text{ième}}$.

Dans le cas où A est une exponentielle de la forme ae^{mx}, a et m étant des constantes, on cherchera une solution de la forme $y = \lambda e^{mx}$; on satisfera à l'équation en prenant

$$\lambda = \frac{a}{m^2 + pm + q},$$

si $m^2 + pm + q$ n'est pas nul; si $m^2 + pm + q$ est nul on cherchera une solution de la même forme mais où λ soit du premier ou du second degré suivant que $2m + p$ n'est pas nul ou est nul; on trouvera sans peine, suivant les cas, que

$$\frac{axe^{mx}}{2m+p}, \qquad \frac{ax^2e^{mx}}{2}$$

sont des solutions.

Lorsque A est de la forme Be^{mx}, où B est un polynome en x, on posera dans l'équation proposée $y = ve^{mx}$, on la ramènera à une équation linéaire où le second membre est un polynome, équation que l'on traitera comme il a été expliqué.

Une remarque que l'on a faite pour une équation linéaire d'ordre quelconque montre que l'on saura, en ajoutant des solutions obtenues par les méthodes précédentes, trouver, dans le cas où A est la somme de polynomes et de termes exponentiels de la forme Be^{mx}, une solution particulière de l'équation avec second membre. Le cas où l'on aurait, en outre, des termes de la forme $B\sin mx$, $B\cos mx$, $B\sin(mx+n)$ rentre dans celui que l'on vient d'examiner, puisque le sinus et le cosinus peuvent être remplacés par des combinaisons d'exponentielles imaginaires; la méthode précédente permettra, en ajoutant des solutions qui soient des imaginaires conjuguées, de parvenir à une solution réelle, que l'on peut d'ailleurs trouver directement par des procédés analogues à ceux que l'on vient de décrire.

L'équation

$$y'' + a^2y = 0$$

où a est une constante réelle, admet pour intégrale générale

$$y = A\cos ax + B\sin ax = R\sin a(x - x_0);$$

où A, B, R, x_0 sont des constantes arbitraires; on peut déterminer ces constantes par la condition que, pour une valeur donnée de x, y et y' prennent des valeurs données [1].

Si l'on veut, par exemple, que, pour $x = x_0$, y soit nul et y' égal à 1, on prendra $y = \frac{1}{a} \sin a(x - x_0)$. L'équation

$$y'' - a^2 y = 0$$

a pour solution générale

$$y = A e^{ax} + B e^{-ax} = A' \operatorname{ch} a x + B' \operatorname{sh} a x,$$

en désignant par A, B, A′, B′ des constantes arbitraires. Suivant que A, B sont, ou non, de même signe, y peut se mettre sous l'une des formes

$$R \operatorname{ch} a(x - x_0), \quad R \operatorname{sh} a(x - x_0)$$

où R et x_0 sont des constantes : ces expressions vérifient l'équation différentielle, quelles que soient R et x_0.

Considérons l'équation

$$y'' - y = 3 e^{2x} + x^2 e^x - \sin x.$$

L'intégrale générale s'obtiendra en ajoutant à $A e^x + B e^{-x}$, où A et B sont des constantes arbitraires, les solutions particulières des équations dont les seconds membres sont $3 e^{2x}$, $x^2 e^x$, $-\sin x$. Pour la première, on trouve e^{2x}; pour la seconde, on commence par poser $y = v e^x$ et l'on forme l'équation en v $v'' + 2v' = x^2$ qui admet pour solution

$$v = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x}{12};$$

on pourra écrire la troisième sous la forme

$$y'' - y = -\frac{1}{2i} e^{xi} + \frac{1}{2i} e^{-xi}$$

et déterminer des solutions particulières des équations

$$y'' - y = -\frac{1}{2i} e^{xi}, \qquad y'' - y = \frac{1}{2i} e^{-xi},$$

on trouvera les deux solutions conjuguées $\frac{1}{4i} e^{xi}$, $-\frac{1}{4i} e^{-xi}$, dont la somme

---

(1) Cette observation s'applique à toutes les équations du second ordre : cela est évident quand il s'agit d'équations linéaires à coefficients constants, avec ou sans second membre. En d'autres termes, la courbe que définit l'équation est déterminée quand on se donne un point de cette courbe et la tangente en ce point.

est $\frac{1}{2}\sin x$; on arrive au même résultat en cherchant directement une solution de l'équation $y''-y=-\sin x$, qui soit de la forme $a\sin x$, a étant une constante.

On aura finalement pour l'intégrale générale de l'équation proposée

$$y = Ae^x + Be^{-x} + e^{2x} + \frac{2x^3-3x^2+3x}{12}e^x + \frac{1}{2}\sin x.$$

Considérons encore l'équation

$$y''-2y'+y = 4\sin^3 x;$$

l'intégrale de l'équation sans second membre est $e^x(Ax+B)$, en désignant par A et B des constantes : on remplacera le second membre par

$$3\sin x - \sin 3x$$

pour le ramener à l'un des types précédents et l'on cherchera des solutions particulières des équations dont les seconds membres sont $3\sin x$, $-\sin 3x$; pour la seconde, par exemple, on cherchera une solution de la forme

$$a\sin 3x + b\cos 3x;$$

le premier membre, en y remplaçant y par cette expression, deviendra

$$\sin 3x(-8a+6b)+\cos 3x(-8b-6a),$$

et l'on déterminera les constantes a et b par les équations

$$-8a+6b=-1, \qquad -8b-6a=0,$$

d'où l'on tire

$$a = 0{,}08; \qquad b = -0{,}06.$$

On obtiendra finalement pour l'intégrale générale

$$y = e^x(Ax+B)+1{,}5\cos x + 0{,}08\sin 3x - 0{,}06\cos 3x.$$

354. Je terminerai en donnant un exemple de la recherche d'une série dont la somme vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, à savoir l'équation

$$(1) \qquad (x^2-x)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y = 0,$$

où α, β, γ sont des nombres quelconques dont le dernier toutefois n'est pas un entier nul ou négatif.

Cherchons à vérifier cette équation par une série entière en x, à coefficients indéterminés $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$; on remplacera respectivement dans le premier membre y, y', y'' par

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,\\
&a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,\\
&2a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots;
\end{aligned}$$

on ordonnera par rapport à x et l'on écrira que le résultat est identiquement nul; on trouvera ainsi, en égalant à o le coefficient de x^n, la relation

$$a_{n+1} = a_n \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)},$$

d'où l'on déduit

$$a_{n+1} = a_0 \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1.2\ldots(n+1)\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}.$$

En appliquant la règle relative au rapport d'un terme au précédent on reconnaît sans peine que la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots$$

est convergente à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$, divergente à l'extérieur; je laisse de côté ce qui concerne les valeurs ± 1. On désigne cette série sous le nom de *série hypergéométrique* et sa somme, qui est une fonction continue de x pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(-1, 1)$, par la notation $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. L'équation (1) admet donc comme solution la fonction $a_0 F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, en désignant par a_0 une constante arbitraire; elle n'admet pas d'autre solution qui soit développable en série procédant suivant les puissances entières et positives de x.

Le calcul de a_n revient au calcul de la valeur, pour $x = 0$, de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de y. En égalant à o la dérivée $n^{\text{ième}}$ du premier membre de l'équation (1), on trouve de suite la relation

$$(x^2 - x) y^{(n+2)} + [(\alpha + \beta + 2n + 1)x - \gamma - n]\, y^{(n+1)} + (\alpha + n)(\beta + n) y^{(n)} = 0,$$

entre trois dérivées consécutives $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$; en faisant $x=0$ dans cette relation, la dérivée $(n+2)^{\text{ième}}$ disparaît et l'on trouve, entre les valeurs $y_0^{(n+1)}$ et $y_0^{(n)}$ des dérivées pour $x=0$, la relation

$$(\gamma+n)y_0^{(n+1)}=(\alpha+n)(\beta+n)y_0^{(n)}$$

qui équivaut à la relation trouvée plus haut entre a_{n+1} et a_n.

On est ici dans un cas très particulier; pour $x=0$, toutes les dérivées d'une fonction y qui vérifie l'équation (1) sont déterminées par les valeurs que cette fonction prend pour $x=0$; il en serait de même pour $x=1$, tandis que, pourt oute autre valeur $x=a$, toutes les dérivées s'exprimeraient au moyen des valeurs que prennent, pour $x=a$, les fonctions y et y', en sorte que le développement (en supposant qu'il soit légitime) suivant les puissances de $x-a$ dépendrait des deux valeurs pour $x=a$ de y et de y', qui joueraient le rôle de constantes arbitraires.

Il ne faut pas conclure du calcul précédent qu'il n'y a pas d'autres fonctions à vérifier l'équation (1) que la fonction $a_0F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, mais seulement qu'il n'y a pas d'autre fonction que celle-là qui satisfasse à l'équation et qui soit développable en série entière en x.

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ jouit d'un très grand nombre de propriétés, parmi lesquelles je me contente d'indiquer les suivantes :

Elle se réduit à un polynome quand α ou β est un nombre entier négatif.

On a

$$\frac{d^nF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx^n}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x).$$

$$(1+x)^n=F(-n, 1, 1, -x),$$

$$\lg(1+x)=xF(1, 1, 2, -x),$$

$$\lg\frac{1+x}{1-x}=2xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$\cos na=F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \sin^2\frac{a}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

EXERCICES.

358. Effectuer les intégrations indiquées ci-dessous ([1]).

$$\int \lg^2 x\,dx,\quad \int x \lg x\,dx,\quad \int \frac{\lg x}{x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{x \lg x},$$

$$\int x^{\alpha} \lg^{n} x\,dx,\quad \int \frac{dx}{x \lg^{\alpha} x},$$

$$\int (1+x^2)(\text{arc tang}\,x)^n\,dx,\quad \int \frac{\text{arc tang}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx,$$

$$\int \frac{(\text{arc sin}\,x)^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int (\text{tang}\,x + \text{tang}^3 x)\,dx,$$

$$\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx,$$

$$\int x \,\text{arc sin}\,x\,dx,\quad \int x^n \,\text{arc tang}\,x,$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx,\quad \int \sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)^3}},$$

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2+4x+1)^2},\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)(1+x+x^2)^2},$$

$$\int \frac{dx}{\text{sh}\,x},\quad \int \frac{dx}{\text{ch}\,x},\quad \int \frac{dx}{\text{th}\,x},\quad \int \frac{dx}{\text{sh}\,x - \text{sh}\,a},$$

$$\int \frac{dx}{\text{ch}\,x - \text{ch}\,a},\quad \int \frac{dx}{\text{th}\,x - \text{th}\,a},\quad \int \frac{dx}{1+\cos a \cos x}.$$

359. Calculer avec deux chiffres significatifs exacts les intégrales définies

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+2\cos x},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+2\sin x)^2},\quad \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx,$$

$$\int_1^2 \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\quad \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2},$$

$$\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - \alpha - \beta x)^2\,dx,\qquad \text{pour}\qquad \alpha = \pi - 2,\qquad \beta = 4 - 3\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{0,1} \left(e^{-x} - \frac{12 - 6x + x^2}{12 + 6x + x^2}\right) dx.$$

([1]) Dans tous les exercices de ce Chapitre n désignera un nombre naturel.

360. Que devient l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

quand on y fait la substitution définie par l'équation

$$\frac{x-a}{\sin^2 t} = \frac{b-x}{\cos^2 t}?$$

Que deviennent les intégrales

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+a^2}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-a^2}},$$

quand on y fait respectivement les substitutions

$$x = a\cos t, \qquad x = a\,\mathrm{sh}\,t, \qquad x = a\,\mathrm{ch}\,t?$$

361. Évaluer les intégrales

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{4x^2+1}},$$

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}.$$

362. Calculer la partie entière de la racine de l'équation

$$\int_0^x \sqrt{x^2+1}\,dx = 10^6.$$

363. 1° Si l'on pose [1]

$$y = ax^2+2bx+c, \qquad \delta = ac-b^2,$$

$$\mathfrak{J}_n = \int \frac{dx}{y^{n+1}},$$

on a [2]

$$2n\delta\mathfrak{J}_n - (2n-1)a\mathfrak{J}_{n-1} = \frac{ax+b}{y^n}.$$

---

[1] Dans les exercices 364, 365 y et δ conserveront la même signification.
[2] Sur la résolution des équations de cette forme, voir *Exercice* 160.

En déduire

$$\frac{2n\,\delta y^n}{ax+b}\mathfrak{I}_n = 1 + \frac{2n-1}{2n-2}\,\frac{a}{\delta}\,y + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\,\frac{a^2}{\delta^2}\,y^2 + \ldots$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)}{(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2r)}\,\frac{a^r}{\delta^r}\,y^r + \ldots$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\,\frac{a^{n-1}}{\delta^{n-1}}\,y^{n-1}$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\,\frac{a^n}{\delta^n}\,\mathfrak{I}_0,$$

où l'on suppose

$$\mathfrak{I}_0 = \int \frac{dx}{y}.$$

Établir les formules analogues qui suivent, pour lesquelles la signification de $\mathfrak{I}_n$ est donnée chaque fois; en déduire chaque fois l'expression explicite de $\mathfrak{I}_n$. Dans quels cas l'expression de $\mathfrak{I}_n$ est-elle algébrique?

2°
$$\mathfrak{I}_n = \int \frac{dx}{y^{\frac{2n+1}{2}}},$$
$$(2n-1)\delta\,\mathfrak{I}_n - (2n-2)a\,\mathfrak{I}_{n-1} = \frac{ax+b}{y^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

3°
$$\mathfrak{I}_n = \int y^{\frac{2n-1}{2}}\,dx, \qquad \mathfrak{I}_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{y}},$$
$$2na\,\mathfrak{I}_n - (2n-1)\delta\,\mathfrak{I}_{n-1} = (ax+b)\,y^{\frac{2n-1}{2}}.$$

4°
$$\mathfrak{I}_n = \int (ax+b)^n\sqrt{y}\,dx, \qquad \mathfrak{I}_0 = \int \sqrt{y}\,dx,$$
$$(n+2)\mathfrak{I}_n + (n-1)\delta\,\mathfrak{I}_{n-2} = (ax+b)^{n-1}\,y^{\frac{3}{2}}.$$

5°
$$\mathfrak{I}_n = \int \frac{(ax+b)^n\,dx}{\sqrt{y}}, \qquad \mathfrak{I}_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{y}},$$
$$n\,\mathfrak{I}_n + (n-1)\delta\,\mathfrak{I}_{n-2} = (ax+b)^{n-1}\sqrt{y}.$$

6°
$$\mathfrak{I}_n = \int \frac{dx}{(ax+b)^n\sqrt{y}},$$
$$(n-1)\delta\,\mathfrak{I}_n + (n-2)\mathfrak{I}_{n-2} = \frac{-\sqrt{y}}{(ax+b)^{n-1}}.$$

364. Démontrer que, si p est différent de 1, on a

$$\int \frac{(ax+b)^{p-2}}{y^{\frac{p+1}{2}}}\,dx = \frac{1}{(p-1)\delta}\,\frac{(ax+b)^{p-1}}{y^{\frac{p-1}{2}}}.$$

365. Si $a\delta$ est positif, on a

$$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a\delta}}\lg\left|\frac{a\sqrt{y}-\sqrt{a\delta}}{ax+b}\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a\delta}}\lg\left|\frac{(ax+b)a}{a\sqrt{y}+\sqrt{a\delta}}\right|.$$

En supposant x choisi de manière que y soit positif, la quantité entre deux barres est du même signe que a et δ.

Si $a\delta$ est négatif, on a

$$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{y}} = \frac{-\operatorname{sgn}(ax+b)}{\sqrt{-a\delta}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{-\delta}}{ax+b}\right).$$

366. Montrer que l'on a

$$\int \frac{dx}{\cos x-\cos a} = \frac{1}{\sin a}\lg\left|\frac{\sin\dfrac{x+a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}}\right|,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x-\sin a} = \frac{1}{\cos a}\lg\left|\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\cos\dfrac{x+a}{2}}\right|.$$

Pour l'une ou l'autre intégrale, si x varie dans un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas, la quantité entre les deux barres ne s'annule pas et ne devient pas infinie.

Que devient la première formule quand on fait tendre a vers 0?

367. Montrer, en désignant par $\varphi(x)$ l'une ou l'autre des fonctions $\sin x$, $\cos x$, que, si l'on pose

$$\mathfrak{I}_n = \int \frac{dx}{[\varphi(x)-\varphi(a)]^n},$$

on a

$$\varphi'^2(a)\mathfrak{I}_2 = \varphi(a)\mathfrak{I}_1 - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)},$$
$$(n-1)\varphi'^2(a)\mathfrak{I}_n = (2n-3)\varphi(a)\mathfrak{I}_{n-1} + (n-2)\mathfrak{I}_{n-2} - \frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)-\varphi(a)]^{n-1}}.$$

368. Évaluer la longueur de l'arc de l'une ou de l'autre des courbes définies par les équations

$$y^2 = 2px, \qquad y^2 = x^3,$$

ou par les équations

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t,$$

$$x = \frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t, \qquad y = \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t.$$

369. On considère la courbe définie en coordonnées polaires par les équations

$$\rho = \frac{1}{(m\cos t)^{\frac{1}{m-1}}}, \qquad \omega = \frac{1}{m-1}(\operatorname{tang} t - t),$$

on demande quelle relation il y a entre le rayon vecteur et l'arc de cette courbe, compté à partir du point A qui correspond à $t = 0$.

En prenant $m = \frac{3}{2}$, on fait croître t de la valeur 0 jusqu'à ce que ω soit égal à $\frac{\pi}{2}$; soit B le point de la courbe auquel on aboutit ainsi; évaluer l'arc AB et l'aire du secteur OAB (O est le pôle).

370. Construire la courbe définie par les équations

$$x = \cos^2 t + \lg \sin t, \qquad y = \sin t \cos t.$$

Évaluer la longueur de l'arc compris entre les deux points de rebroussement.

Évaluer l'aire située dans l'angle des coordonnées positives, limitée par la courbe et l'axe des y.

371. Aire de la boucle de la courbe définie par l'équation

$$(a + x)(x^2 + y^2) = 2ay^2.$$

Aire comprise entre la courbe et son asymptote.

372. Construire la courbe définie par l'équation

$$y^2 - 2x^2(1 + x) + x^4 = 0,$$

montrer que cette courbe est unicursale. Évaluer l'aire comprise entre les deux branches de courbe qui aboutissent à l'origine et la droite dont l'équation est $x = 1$.

373. La courbe définie par l'équation

$$16x^4 + 37x^2y^2 + 10y^4 - 2(4x^2 + xy + 3y^2)y + y^2 = 0$$

est unicursale; elle est fermée. Évaluer l'aire qu'elle limite.

374. Aire de la courbe fermée définie en coordonnées polaires par l'équation

$$(A\cos^2\omega + 2B\cos\omega\sin\omega + C\sin^2\omega)\rho^2 = 1;$$

on suppose $AC - B^2$ positif.

375. Montrer que la courbe définie par l'équation

$$y^2(x + 3a) = (a - x)(x + 2a)^2$$

est unicursale. Soient O l'origine des coordonnées, I le point double de la courbe, A le point autre que le point I, où elle rencontre l'axe des x, B le milieu de OI.

En désignant par M un point quelconque de la courbe, quelle relation y a-t-il entre les angles AOM, AIM?

Soient M, M′ deux points voisins de la courbe, M_1 et M'_1 les points où les droites IM, IM′ rencontrent la parallèle à l'axe des y menée par le point B; on demande d'évaluer la limite du rapport des aires du triangle $OM_1M'_1$ et du secteur compris entre OM, OM′ et l'arc de courbe MM′.

Déduire du résultat une expression géométrique de l'aire du secteur OAM.

376. On a, en supposant que p et q soient des nombres naturels,

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}\,dx = (-1)^{q-1}(b-a)^{p+q-1}\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

377. On a (n° 321)

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Montrer que

$$\left[(2n+1)\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)} - \int_0^x \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est un polynome de degré $2n$, et que ce polynome est formé par les $n+1$

premiers termes du développement en série entière de

$$(2n+1)\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Montrer que l'expression

$$\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\arcsin x-\int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est un polynome du degré $2n-1$ et que ce polynome est formé par les n premiers termes du développement en série entière de

$$\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

378. On suppose que, dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, la fonction $f(x)$ soit développable en une série de la forme

$$\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+B_1\sin x+A_2\cos 2x+B_2\sin 2x+\ldots+A_n\cos nx+B_n\sin nx+\ldots$$

en désignant par $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ des constantes, et que la série obtenue en la multipliant pas $\cos nx$ ou par $\sin nx$ soit intégrable terme à terme.

Montrer que l'on a

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

A quel développement parviendrait-on en appliquant ces formules au cas où l'on aurait $f(x)=x$?

379. Construire les courbes

$$y=e^{-x}\sin x, \qquad y=e^{-x^2}\sin x$$

pour les valeurs positives de x. Pour $x>1$, la seconde courbe est constamment située entre l'axe des x et la première.

Chacune forme au-dessus et au-dessous de l'axe des x une infinité d'*arches*. Numérotons ces arches 1, 2, 3, ..., en commençant par celle qui part de l'origine. Soient, en valeur absolue, U_n et u_n les aires respectives des arches de rang n. Les séries

$$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots,$$
$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

sont convergentes.

L'intégrale $\int_0^x e^{-x^2}\sin x\,dx$ tend vers une limite quand x augmente indéfiniment.

380. La courbe définie par l'équation $y = \sin x^2$ forme aussi des arches au-dessus et au-dessous de l'axe des x; l'aire A_n de la $n^{\text{ième}}$ arche est, en valeur absolue,

$$(-1)^{n-1}\int_{\sqrt{(n-1)\pi}}^{\sqrt{n\pi}} \sin x^2\,dx = \int_0^{\sqrt{n\pi}-\sqrt{(n-1)\pi}} \sin\left[t^2 + 2t\sqrt{(n-1)\pi}\right]dt;$$

montrer que l'on a $A_n < \sqrt{n\pi} - \sqrt{(n-1)\pi}$, que la série $A_1 - A_2 + A_3 - \ldots$ est convergente, que l'intégrale $\int_0^x \sin x^2\,dx$ tend vers une limite quand x augmente indéfiniment.

381. L'intégrale $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ tend vers une limite quand x augmente indéfiniment.

382. Évaluer avec deux chiffres significatifs exacts les intégrales

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{e^x - 1}{x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}\,dx,$$
$$\int_{10}^{12} \frac{dx}{\log x}, \qquad \int_0^\pi \sqrt{\sin x}\,dx.$$

383. Déterminer les constantes *numériques* A, B, C, λ de manière que les dérivées de la fonction

$$\int_a^{a+x} f(x)\,dx - x[Af(a) + Bf(a+\lambda x) + Cf(a+x)]$$

soient nulles pour $x = 0$, jusqu'au quatrième ordre inclusivement. En déduire une justification de la méthode d'approximation exposée dans la note du n° 331.

384. Déterminer les constantes numériques A, B, C, D, λ, μ de manière que les dérivées de la fonction

$$\int_a^{a+x} f(x)\,dx - x[Af(a) + Bf(a+\lambda x) + Cf(a+\mu x) + Df(a+x)]$$

soient nulles jusqu'au sixième ordre inclusivement, pour $x = 0$.

Les constantes étant ainsi déterminées, montrer que l'expression précédente est nulle identiquement quand $f(x)$ est un polynome du cinquième degré, au plus.

385. Déterminer [1] le centre de gravité d'un arc de cycloïde, ou de chaînette, dont on donne les extrémités.

386. Déterminer le centre de gravité d'un secteur circulaire, de la surface limitée par une cycloïde et sa base, de la surface limitée par une demi-ellipse et l'un des axes.

387. Volume et surface engendrés par une cycloïde tournant autour de sa base; par une chaînette limitée à une perpendiculaire à l'axe et tournant autour de l'axe; centre de gravité de ce dernier volume et de cette dernière surface.

388. En reprenant les notations de l'exercice 342, on demande de déterminer les courbes telles que l'une des lignes TN, MT, MN soit constante.

389. En reprenant les notations de l'exercice 343, on demande de déterminer les courbes (en coordonnées polaires) telles que l'une des lignes MT, MN, TN soit constante.

Évaluer pour cette dernière courbe l'arc qui va du pôle au point de rebroussement, l'aire comprise entre cet arc et la corde.

390. En conservant les mêmes notations, trouver la courbe telle que la surface du triangle MTN soit constante. Forme de la courbe.

On considère l'arc de courbe qui part de l'origine et qui aboutit au premier point d'intersection avec l'axe des x. Évaluer la longueur de cet arc, l'aire comprise entre cet arc et l'axe des x.

391. Intégrer les équations différentielles

$$(x^2 + y'^2)^2 = x^2 + y'^2,$$
$$(y^2 + y'^2)^2 = y^2 - y'^2.$$

392. Trajectoires orthogonales des cercles de rayon constant tangents à l'axe des x.

---

(1) Dans les exercices relatifs aux centres de gravité on supposera toujours la matière homogène et la densité égale à 1.

393. Séparer les variables dans les équations différentielles

$$\frac{y'}{y} = f(x), \qquad \frac{y'}{x} = f(x), \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour la dernière on prendra $\frac{y}{x} = t$ pour variable indépendante, et l'on ramènera l'intégration de l'équation à celle de l'équation $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f(t) - t}$.

394. Montrer comment on peut ramener à des quadratures l'intégration des équations appartenant à l'un des types

$$f\left(\frac{y'}{y}, x\right) = 0, \qquad f\left(\frac{y'}{x}, x\right) = 0, \qquad f\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0,$$

quand la courbe dont l'équation est $f(X, Y) = 0$ est unicursale.

395. Trouver les trajectoires orthogonales du faisceau de paraboles définies par l'équation $y^2 = 2px$, où p est un paramètre variable.

396. Ramener aux quadratures l'intégration de l'équation

$$y' + Ay + By^n = 0$$

où A, B sont des fonctions données de x, en prenant $\frac{1}{y^{n-1}}$ pour fonction inconnue.

Trouver la fonction de x qui vérifie l'équation différentielle $xy' - y + y^2 = 0$ et qui, pour $x = 1$, prend la valeur 1.

397. Chercher les solutions de l'équation

$$(1) \qquad (ax + b)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + A(ax + b)\frac{dy}{dx} + By = 0$$

qui sont de la forme $(ax + b)^r$: a, b, A, B désignent des constantes.

Quel changement de la variable indépendante faut-il faire dans l'équation précédente pour la ramener à la forme

$$(2) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$$

où α, β sont des constantes?

Que devient le premier membre de l'équation (2) quand on y fait le changement de variable $x = e^t$. Déduire du résultat la solution générale de l'équation (1).

Quelle est la forme de cette solution quand l'équation en r

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

a ses racines égales?

398. Trouver la solution générale du système d'équations

$$\frac{dy}{dx} = ay + bz,$$
$$\frac{dz}{dx} = a'y + b'z,$$

où a, b, a', b' sont des constantes.

On pourra prendre les dérivées des deux membres des deux équations, éliminer z et $\frac{dz}{dx}$, et faire dépendre la résolution de l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre en y.

Chercher directement les solutions de la forme $y = \lambda e^{rx}$, $z = \mu e^{rx}$, en désignant par λ, μ, r des constantes.

Examiner le cas où l'équation

$$(a-r)(b'-r) - a'b = 0$$

a une racine double.

399. Dans l'équation différentielle homogène

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$; on obtient ainsi une nouvelle équation différentielle linéaire du second ordre entre y et t.

Déterminer la fonction $\varphi(t)$ de façon que, dans la nouvelle équation, le coefficient de $\frac{dy}{dt}$ soit nul. Intégrer l'équation à laquelle on parvient et l'équation proposée.

400. Si les fonctions u, v vérifient l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0,$$

où A et B sont des fonctions de x, on a

$$u'v - v'u = Ce^{-\int A\,dx}.$$

Soit (α, β) un intervalle dans lequel on suppose que les fonctions A, u, v, u', v' sont continues. Dans cet intervalle aucune des fonctions u, v ne peut avoir de racine commune à sa dérivée. Entre deux racines consécutives de l'une des fonctions u, v il y a une racine de l'autre, et une seule.

401. Montrer d'après la proposition précédente que, lorsque l'on connaît une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre. L'intégrale générale est de la forme $Cu + C'v$ en désignant par u, v deux solutions dont le rapport n'est pas constant et par C, C' des constantes arbitraires.

Intégrer l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

sachant qu'elle admet la solution $y = 2x^2 - 1$.

Intégrer l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

sachant qu'elle admet la solution $y = 3x^2 - 1$.

402. Si A, B, C sont des fonctions de x telles que l'on ait identiquement

$$\begin{vmatrix} A'' & A' & A \\ B'' & B' & B \\ C'' & C' & C \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant par A', A'', ... les dérivées de A, ..., il existe trois constantes λ, μ, ν, non toutes nulles, telles que l'on ait identiquement

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

403. L'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

admet comme solution un polynome $P_n(x)$ (Ex. 38) [1]; montrer qu'une seconde solution de l'équation est

$$P_n \int \frac{dx}{(1-x^2)P_n^2};$$

montrer que, si l'on décompose en fractions simples l'expression $\frac{1}{(1-x^2)P_n^2}$, les résidus (n° 110) relatifs aux racines de l'équation $P_n = 0$ sont tous nuls; en conclure que la seconde solution est de la forme $\frac{P_n}{2} \lg \frac{x+1}{x-1} + Q_n$, Q_n étant un polynome. On pourra se servir, pour déterminer les coefficients de ce polynome, de l'équation obtenue en remplaçant, dans l'équation proposée, y par l'expression précédente.

404. Soit P_n le polynome du degré n formé par les $n+1$ premiers termes du développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; montrer qu'il existe un polynome Q_n de degré n tel que l'on ait identiquement, en x,

$$(1-x)P_n^2 + x^{n+1}Q_n = 1,$$

qu'il existe une constante α_n telle qu'on ait identiquement, en x,

$$P_n - 2(1-x)P'_n = \alpha_n x^n,$$
$$(n+1)Q_n + xQ'_n = \alpha_n P_n.$$

Déterminer cette constante et les coefficients du polynome Q_n.

Les équations $P_n = 0$, $Q_n = 0$ n'ont pas de racine réelle quand n est pair; elles en ont une seule quand n est impair.

Intégrer les deux équations

$$y - 2(1-x)y' = \alpha_n x^n,$$
$$(n+1)z + xz' = \alpha_n P_n.$$

---

[1] La relation entre trois polynomes P_n doit être rétablie ainsi :

$$n P_n(x) - (2n-1)x P_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0,$$

elle permet de calculer successivement les polynomes P_n, en prenant

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = x.$$

FIN DU TOME SECOND.

ERRATA DU TOME PREMIER.

Page	58,	ligne	16,	*au lieu de*	$-\frac{2b^2+a}{3b}$	*lire*	$-\frac{2b^3+a}{3b}$
»	130	»	18	»	$(2n+1)$	»	$(2n-1)$
»	130	»	20	»	$P_1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	»	$P_1 = x$
»	137	»	17	»	diviseur	»	dividende
»	341	»	10	»	$y+z+1.$	»	$y+z+1=0.$
»	345	»	16	»	sz	»	sx
»	348	»	4 et 5	»	qu'il occupera	»	qu'ils occuperont
»	348	»	8	»	de	»	des

ERRATA DU TOME SECOND.

Page 159, ligne 19, *effacez* **PRIMITIVES**.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SECOND.

CHAPITRE XI

SÉRIES.

CHAPITRE XII.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

CHAPITRE XIII.

DÉRIVÉES.

CHAPITRE XIV.

SÉRIES DE FONCTIONS.

CHAPITRE XV.

APPLICATIONS A L'ÉTUDE D'UNE FONCTION, A LA SÉPARATION ET AU CALCUL DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

CHAPITRE XVI.

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

CHAPITRE XVII.

NOTATION DIFFÉRENTIELLE. COURBES PLANES.

CHAPITRE XVIII.

NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

37285 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins 55.