ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES ŒUVRES D'EUCLIDE.

LES ŒUVRES
D'EUCLIDE,

TRADUITES EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE.

TOME PREMIER.

A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1814.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :

CHEZ
- L'AUTEUR, place Cambrai, n° 6;
- TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17;
- FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24;
- Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

PRÆFATIO.

EUCLIDES vixit temporibus Ptolemæi-Lagi, circiter annum 272 ante æram vulgarem; Archimedes suis in libris sæpe de illo meminit. Euclides a Ptolemæo interrogatus an non esset methodus discendæ Geometriæ methodo suâ facilior : Non est regia, inquit Euclides, ad Geometriam via. Hæc tantum de Euclide novimus : quâ sit patriâ oriundus ignoratur.

Ante Euclidem permulti floruerunt geometræ. Primus omnium Græcorum, Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quæ fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit.

Plurima opera Euclides conscripserat; ex quibus tredecim libri Elementorum et Data tantum supersunt.

Librorum omnium qui de scientiarum elementis agunt liber perfectissimus semper habita sunt Euclidis Elementa, quæ in omnes omnino linguas fuerunt conversa.

De Elementis Euclidis sic Cardanus : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Ait Pemberton se non semel Newtonem audivisse mœrentem quod sese Cartesii aliorumque algebristarum operibus totum dedisset, antequam studuisset Euclidis Elementis, et illa fuisset meditatus.

D. *Lagrange* quem extinctum luget et diu lugebit Europa, mihi dictitabat Geometriam esse linguam mortuam; et qui in Euclidis Elementis

PRÉFACE.

EUCLIDE vivait du temps de Ptolémée-Lagus, vers l'an 272 avant l'ère vulgaire; Archimède l'a cité dans plusieurs de ses livres. Ptolémée ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de manière plus facile que la sienne pour apprendre la Géométrie, Euclide répondit qu'il n'y avait point de chemin royal pour arriver à cette science. C'est tout ce que nous savons d'Euclide : on ignore même quelle fut sa patrie.

Beaucoup de géomètres avaient paru avant Euclide. Le premier des Grecs, Euclide rassembla leurs ouvrages, les mit dans un ordre convenable, et donna des démonstrations inattaquables de ce qui n'avait pas été démontré d'une manière rigoureuse.

Euclide avait composé un grand nombre d'ouvrages. Les treize livres des Éléments et les Données sont les seuls qui soient parvenus jusqu'à nous.

Les Éléments d'Euclide ont toujours été regardés comme le plus parfait de tous les livres élémentaires ; ils ont été traduits et commentés dans toutes les langues.

Cardan, en parlant des Éléments d'Euclide, s'exprime ainsi : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas ; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Pemberton nous apprend qu'il avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes, et des autres algébristes, avant d'avoir étudié et médité les Éléments d'Euclide.

M. Lagrange, dont l'Europe déplore et déplorera long-temps la perte, me répétait souvent que la Géométrie était une langue morte; que celui qui

Geometriæ non studebat, eum perinde facere ac si quis græcam latinamve linguam in recentioribus operibus græce et latine scriptis discere velit.

Theoremata subsequentia, quæ in quolibet Geometriæ tractatu adesse solent, in Elementis Euclidis desiderantur:

Circulorum circumferentiæ inter se sunt ut eorum diametri.

Quilibet circulus æqualis est triangulo rectangulo cujus unum ex lateribus angulum rectum continentibus æquale est semi-diametro, alterum autem æquale circumferentiæ.

Cujuslibet cylindri recti superficies convexa æqualis est rectangulo cujus altitudo æqualis est cylindri lateri, cujus autem basis æqualis circumferentiæ basis cylindri, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter latus cylindri et diametrum basis cylindri.

Cujuslibet coni recti, exceptâ basi, superficies convexa æqualis est triangulo rectangulo cujus unum laterum angulum rectum continentium æquale est coni lateri, alterum vero æquale circumferentiæ basis coni, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter coni latus et semi-diametrum circuli qui coni est basis.

Superficies convexæ cylindrorum rectorum et similium, et etiam conorum rectorum et similium, sunt inter se ut diametri basium eorumdem cylindrorum et conorum.

Cujuslibet sphæræ superficies æqualis est quatuor maximis ejusdem sphæræ circulis, vel superficiei convexæ cylindri circumscripti.

Sphærarum superficies inter se sunt ut quadrata earum diametrorum.

Quælibet sphæra æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

Nonnulli credidere hæc theoremata ex Euclidis Elementis evanuisse temporum inclementiâ; sed falso. Hæc enim theoremata quæ demonstrari non possunt nisi ope quatuor primorum postulatorum in initio primi libri *de Sphærâ et Cylindro* positorum, demonstrari non potuerunt ab Euclide, qui hæc Archimedis postulata non admiserat.

n'étudiait pas la Géométrie dans Euclide, faisait la même chose que celui qui voudrait apprendre le grec et le latin, en lisant les ouvrages modernes écrits dans ces deux langues.

Les théorèmes suivants, qui se trouvent ordinairement dans tout traité élémentaire de Géométrie, ne se trouvent pas dans les Éléments d'Euclide:

Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres.

Un cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.

La surface convexe d'un cylindre droit est égale à un rectangle dont la hauteur est égale au côté du cylindre, et dont la base est égale à la circonférence de la base du cylindre, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

La surface d'un cône droit, la base exceptée, est égale à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au côté du cône, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cône, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, des cônes droits et semblables, sont entre elles comme les diamètres des bases de ces cylindres et de ces cônes.

La surface d'une sphère est égale à quatre grands cercles, ou à la surface convexe du cylindre circonscrit.

Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres.

Une sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Des personnes ont pensé que ces théorèmes avaient disparu des Éléments d'Euclide par l'injure des temps; c'est une erreur. Ces théorèmes, qui ne peuvent se démontrer qu'à l'aide des quatre premières demandes placées au commencement du premier livre *de la Sphère et du Cylindre*, n'ont pu l'être par Euclide, qui n'avait point admis ces demandes d'Archimède.

Forsan dici potest solam dissimilitudinem quæ intercedit Euclidis inter et Archimedis methodum, consistere in rejectione vel in admissione postulatorum de quibus hic incidit sermo.

In præfatione meæ versionis librorum 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 Elementorum Euclidis, quæ anno 1804 edita fuit, suscepi munus edendi versiones operum completorum Euclidis, Archimedisque et Apollonii. Mea versio operum Archimedis vulgata est anno 1808; quo quidem tempore, vertendis Euclidis operibus ultimam manum admoveram. Sed antequam prelo subjiceretur, consulere volui codices manuscriptos bibliothecæ imperialis de plurimis locis qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione Oxoniæ, quâ usus fueram in convertendo Euclide. Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi fuerunt, et statim animadverti editionem Oxoniæ nullius horum manuscriptorum esse exemplar; hos omnes manuscriptos explere lacunas, et restituere locos corruptos in editione basiliensi et in editione Oxoniæ quæ nihil aliud est quam ejus exemplar. Quin etiam animadverti hos omnes manuscriptos, manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme consentaneos; manuscriptum autem 190 explere lacunas, restituere locos corruptos qui ope aliorum manuscriptorum nec explebantur nec restituebantur.

Manuscriptus 190 ad bibliothecam vaticanam pertinebat: is Româ Lutetiam a comite *de Peluse* fuit missus.

In manuscripto græco 2348, sub finem sæculi decimi sexti exarato, quique continet Euclidis Data cum quinque antiquissimis vaticanis manuscriptis græcis collata a Josepho Auriâ, celebri geometrâ, nec unam quidem reperias e pretiosissimis lectionibus manuscripti 190 variantibus; quod probare videtur hunc manuscriptum tunc temporis in bibliothecâ vaticanâ fuisse desideratum.

Manuscriptus 190 manuscriptorum exeunte nono sæculo exaratorum omnia præ se fert indicia; alii vero manuscripti pertinent ad sæcula multo recentiora.

Hoc manuscripto mihi commisso, statim in animum incidit edere græce, latine et gallice Elementa et Data, sola procul dubio quæ supersint Euclidis

On pourrait peut-être dire que la seule différence entre la méthode d'Euclide et celle d'Archimède, consiste dans le rejet ou l'admission des quatre demandes dont je viens de parler.

Dans la préface de ma traduction des livres 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 des Éléments d'Euclide, qui parut en 1804, je pris l'engagement de publier les traductions des œuvres complètes d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius. Ma traduction des œuvres d'Archimède parut en 1808. A cette époque j'avais mis la dernière main à la traduction des œuvres d'Euclide. Mais avant de la livrer à l'impression, je voulus consulter les manuscrits de la bibliothèque impériale sur les passages qui me paraissaient tronqués ou altérés dans l'édition d'Oxford, d'après laquelle j'avais fait ma traduction. Ces manuscrits, qui sont au nombre de 23, me furent confiés, et je ne tardai pas à m'apercevoir que l'édition d'Oxford n'est la copie d'aucun de ces manuscrits; que tous ces manuscrits remplissent des lacunes, et rétablissent des passages altérés qui se trouvent dans l'édition de Bâle, et dans celle d'Oxford qui n'en est que la copie. Je remarquai aussi que tous ces manuscrits, le n° 190 seul excepté, sont à peu de choses près conformes les uns aux autres; que le n° 190 remplit des lacunes, et rétablit des passages altérés, qui ne peuvent pas l'être à l'aide des autres manuscrits.

Le manuscrit 190 appartenait à la bibliothèque du Vatican : il fut envoyé de Rome à Paris par le comte de Peluse.

Dans le manuscrit grec n° 2348, qui est de la fin du seizième siècle, et qui contient les Données d'Euclide collationnées par Joseph Auria, géomètre célèbre, avec les cinq plus anciens manuscrits grecs de la bibliothèque du Vatican, on ne trouve aucune des précieuses variantes du manuscrit 190; ce qui semble prouver que ce manuscrit n'était pas alors à la bibliothèque du Vatican.

Le manuscrit 190 porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle, tandis que les autres appartiènent à des siècles beaucoup plus rapprochés de nous.

Étant dépositaire de ce précieux manuscrit, je me déterminai, sans balancer, à donner une édition grecque, latine et française des Éléments et opera. Quapropter, contuli manuscriptum 190 cum editione Oxoniæ, exaravique lectiones variantes in margine operi impressi.

His perfectis, ad variantes lectiones margini appositas sedulus attendi, et aliis manuscriptis accersitis, hanc aut illam lectionem variantem in editionem parisiensem admisi, vel ab eà rejeci. Manuscriptum 190 potiorem habui, quotiescumque nulla mihi fuit ratio cur hanc aut illam lectionem præferrem.

Textum græcum sic constitutum in latinum converti, et quæcunque ex variantibus quas admiseram lectionibus, mutari fuit opportunum, hæc in versione gallicâ mutata sunt.

Mea latina versio ad verbum textui græco congruit, nisi quid peculiare me coegerit ut secus facerem. Nonnulli in meâ versione occurrent forte hellenismi, aut saltem quædam locutiones a quibus lingua latina abhorrere videtur. Illas quidem vitare potuissem; sed mea versio cum textu græco minus fuisset consentanea.

De meâ convertendi ratione, viros in græcâ latinâque linguâ versatissimos consului. D. *Delambre*, secretarius perpetuus classis scientiarum physicarum et mathematicarum Instituti imperialis Franciæ, necnon Universitatis imperialis quæstor, meam versionem dignatus est perpendere, et utilia mihi dare consilia. Hanc eâ de re ad me scripsit epistolam :

Parisiis, 20 februarii 1812.

Cum voluptate legimus sex prima folia tui Euclidis trilinguis. Tui commissarii desiderium enuntiaverant videndi editum Euclidis textum græcum expurgatum omnibus mendis quas castigavisti manuscriptorum ope, et locupletatum omnibus incrementis quæ tibi suppeditaverunt manuscripti : mox eorum omniumque doctorum explebis desiderium.

Multum probo quod constitutum habuisti reddere versionem latinam tam consentaneam quam utraque lingua ferre potest. Græcis erant duæ viæ indicandorum casuum obliquorum, terminatio scilicet et articulus ; quando una earum duarum rationum eos deficiebat, quod sæpe in geometriâ contingit, articulus satis erat ad omnem tollendam dubitationem.

des Données d'Euclide, qui sont certainement les seuls ouvrages qui nous restent de ce géomètre à jamais célèbre. Pour cela, je comparai le manuscrit 190 avec l'édition d'Oxford, et j'écrivis les variantes en marge de l'ouvrage imprimé.

Ce travail terminé, j'examinai attentivement les variantes marginales, et à l'aide des autres manuscrits, j'adoptai ou je rejetai, pour l'édition de Paris, telle ou telle variante. Le manuscrit 190 a toujours eu la préférence, toutes les fois que je n'avais pas de motif pour préférer une leçon à une autre.

Le texte grec étant ainsi arrêté, je le traduisis en latin, et je fis à la traduction française les changements exigés par les variantes que j'avais adoptées.

Ma traduction latine correspond mot pour mot au texte grec, à moins que quelque règle particulière ne m'ait forcé de faire autrement. On trouvera quelquefois des hellénismes dans ma traduction, ou du moins certaines expressions qui semblent s'écarter un peu du génie de la langue latine. J'aurais pu les éviter; mais ma traduction aurait été moins fidèle.

J'avais soumis mon système de traduction à des personnes versées dans la langue grecque et dans la langue latine. M. Delambre, secrétaire perpétuel de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut impérial de France et trésorier de l'université impériale, eut la complaisance de l'examiner avec soin, et de m'aider de ses sages conseils. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire à ce sujet :

Paris, ce 20 février 1812.

Monsieur, j'ai lu avec plaisir les six premières feuilles de votre Euclide en trois langues. Vos commissaires avaient exprimé le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits vous ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils vous ont fournies : vous allez remplir leur vœu, et celui de tous les savants.

J'approuve beaucoup le parti que vous avez pris de rendre la version latine aussi littérale que le permet le génie des deux langues. Les grecs avaient deux moyens pour indiquer les cas obliques, la terminaison et l'article; quand l'une de ces deux ressources leur manquait, comme il arrive souvent en géométrie, l'article suffisait pour ôter toute incertitude.

Tibi autem in linguâ latinâ hæc via non erat; tua versio nimis consentanea, sæpe obscura fuisset. Eorum qui te præcesserunt exemplo, usus es pronominibus ipse, ipsius, ipsi. Non ignoras mihi ei de re aliquid fuisse hæsitandum: horum loco his ipsi αβ, ipsi αβγ, interposuissem his nominibus *lineæ* αβ, *angulo* αβγ, quod longiusculum est.

Sed quoniam omnes geometrarum græcorum interpretes jamdudum iisdem interpositionibus usi sunt, expositioni recte visum brevissimam adhibendam in rebus eorum quæ singulis momentis occurrunt, etc.

Ad significandum duos angulos eumdem verticem et latus commune habentes super eadem recta collocatos esse, græce dicitur: αἱ ἐφεξῆς γωνίαι. Commandini, Torelli, etc. exemplo, has tres græcas voces converti in has duas voces latinas: *deinceps anguli*. Sunt qui me dehortati sunt ab utendo voce hac *deinceps*, quia, inquiebant, *deinceps* in linguâ latinâ rerum ordinem numquam significavit. Non illis morem gessi. Nam, cum in Thesauro linguæ latinæ Roberti Stephani, edito Lipsiæ anno 1730, legissem: *duo deinceps reges*. Tit. Liv. *Funera deinde deinceps duo duxit*. Tit. Liv. *His perfectis collocatisque aliæ deinceps rates jungebat*. Cæs. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui accubarent, canerent*. Cic., etc. pro certo habui Titum-Livium, Cæsarem et Ciceronem, etc. vocem *deinceps* eodem sensu accepisse, quo ego acceperam.

Quod ad versionem gallicam attinet, ea cum textu græco tam consentanea est quam per eam linguam licet.

Sed finem cujusque tomi collocavi recensionem accuratissimam omnium variantium meæ editionis cum manuscripto 190, et cum editione Oxoniæ: ita ut harum lectionum variantium ope, possit, si quis velit, habere manuscripti 190 exemplar huic plane congruum.

Ad calcem tomi tertii, qui hoc anno 1814 currente edetur, adjicientur animadversiones in variantes lectiones insignissimas, et in quosdam locos Euclidis.

Summâ diligentiâ usus sum ut mea editio quam maxime emendata esset: specimina a me perlecta, lecta fuerunt deinde a D. *Jannet*, necnon a D. *Patris*, mei operis editore, rursusque a me relecta. In nullo specimine

Vous n'aviez pas cette ressource en latin ; votre version trop littérale eût été souvent obscure. A l'exemple de ceux qui vous ont précédé, vous vous êtes permis l'emploi du pronom *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Vous savez que j'avais à cet égard quelque scrupule : au lieu de *ipsi* ΑΓ, *ipsi* ΑΒΓ, j'aurais mieux aimé *lineæ* ΑΓ, *angulo* ΑΒΓ, ce qui est un peu plus long.

Mais tous les traducteurs des géomètres grecs vous ont déjà donné l'exemple de pareilles intercalations, et vous avez bien fait de choisir le moyen le plus court pour vous tirer d'un embarras qui renaît à chaque instant, etc.

Pour exprimer que deux angles, qui ont le même sommet et un côté commun, sont placés sur une même droite, le grec dit : αἱ ἐφεξῆς γωνίαι. A l'exemple de Commandin, de Torelli, etc. j'ai traduit ces trois mots grecs par *deinceps anguli*. Plusieurs personnes m'avaient invité à ne pas me servir du mot *deinceps*, parce que, disaient-elles, le mot *deinceps* n'a jamais en latin exprimé l'ordre des choses. Je ne me rendis pas à leur avis. Car, ayant lu dans le Trésor de la langue latine de Robert Étienne, édition de 1739 : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque aliis deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent canerent*. CIC., etc. il me parut démontré que Tite-Live, César, Cicéron, etc. donnaient au mot *deinceps* la même signification que moi.

Quant à la traduction française, elle est aussi littérale que le permet le génie de cette langue.

J'ai placé à la fin de chaque volume la liste exacte de toutes les variantes de mon édition avec le manuscrit 190 et l'édition d'Oxford. Par le moyen de ces variantes, on pourrait, si on le désirait, avoir une copie du manuscrit 190 qui lui serait parfaitement conforme.

Le dernier volume, qui paraîtra dans le courant de 1814, sera terminé par des observations sur les variantes les plus remarquables, et sur quelques passages d'Euclide.

J'ai fait tous mes efforts pour que mon édition fût de la plus grande correction : les épreuves, après avoir été lues par moi, ont été lues par M. Jannet, par M. Patris, éditeur de mon ouvrage, et relues encore par prius subscripsi, *prelo subjiciatur*, quam illud mendis omnibus fuisset expurgatum. Ope erratorum ad finem ultimi tomi collocatorum, corrigi poterunt mendæ, si quas detexero in legendo perattente opere impresso.

D. *Nicolopoulo*, smyrnæus, vir eximiâ doctrinâ commendabilis et diligentissimus emendator, sponte suâ legit plurima specimina. D. *Patris*, qui linguam græcam, latinam et gallicam diu excoluit, summâ curâ et diligentiâ usus est ut mea editio prelis gallicis honori esset; in speciminibus legendis, versionem latinam et gallicam cum textu græco perattente comparabat, et margini notationes apponebat.

Ex lectionibus variantibus tomi primi, quædam præsertim sunt notandæ.

In omnibus editionibus græcis et latinis postulata 4, 5, 6 inter communes notiones collocata sunt.

Demonstratio propositionis septimæ libri primi duos habet casus, et tamen unus solum casus demonstratur in omnibus manuscriptis, nullo excepto, et in editionibus Basiliæ et Oxoniæ. Secundus casus est cùm punctum Δ incidit in triangulum ΑΒΓ, vel punctum Γ in triangulum ΑΒΔ. Ut secundus casus demonstraretur, antea demonstrandum fuerat, lateribus æqualibus trianguli isocelis productis, angulos sub basi inter se æquales esse; quod quidem Euclides demonstravit in propositione quintâ, et hoc tantum propositionis septimæ causâ, quandoquidem, propositione septimâ exceptâ, hæc demonstratio nullum usum habet in reliquis Euclidis Elementis; ex hoc manifeste sequitur, inquiunt omnes Euclidis commentatores, textum græcum propositionis septimæ esse mutilatum. Omnes commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus manuscriptis et in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram; produxi rectas ΒΓ, ΒΔ, et demonstratio completa fuit, in textu græco nullâ voce mutatâ.

Demonstratio propositionis 24 tertii libri tres casus habet. Posito enim Α super Γ, et puncto Β super Δ, oportet demonstrare segmentum ΑΕΒ non moi. Je n'ai jamais donné de bon à tirer que je ne me fusse assuré auparavant que toutes les corrections avaient été faites. Par le moyen d'un *errata*, que je placerai à la fin du dernier volume, on pourra corriger les fautes qu'une lecture très-attentive que je ferai de l'ouvrage imprimé m'aura fait découvrir.

M. Nicolopoulo, de Smyrne, homme recommandable par ses rares talents et très-habile correcteur, a bien voulu lire un grand nombre de mes épreuves. M. Patris, qui a cultivé long-temps les langues grecque, latine et française, s'est donné des peines infinies pour que mon édition fît honneur aux presses françaises; en lisant les épreuves, il avait soin de comparer soigneusement la version latine et la version française au texte grec, et de me faire des observations marginales.

Parmi les variantes de ce premier volume, il en est quelques-unes qui méritent surtout d'être remarquées.

Dans toutes les éditions grecques et latines, les demandes 4, 5, 6 sont placées au nombre des notions communes.

La démonstration de la proposition 7 du livre Ier a deux cas, et cependant un seul cas est démontré dans tous les manuscrits sans exception, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Le second cas est celui où le point Δ tombe dans le triangle ABΓ, ou bien le point Γ dans le triangle ABΔ. La démonstration du second cas exige qu'il soit démontré auparavant que les côtés égaux d'un triangle isocèle étant prolongés, les angles au dessous de la base sont égaux entre eux; et c'est ce qu'a fait Euclide dans la proposition 5, et ce qu'il n'a fait que pour la proposition 7, puisque, hors de là, cette démonstration n'est plus nécessaire dans le reste des Éléments d'Euclide; d'où il suit évidemment, disent tous les commentateurs, que le texte grec de la démonstration de la proposition 7 est tronqué. Tous les commentateurs avaient tort. La figure était incomplète dans tous les manuscrits et dans toutes les éditions. J'ai tracé une seconde figure; j'ai prolongé les droites BΓ, BΔ, et la démonstration s'est trouvée complète, sans que j'eusse changé un seul mot au texte grec.

La démonstration de la proposition 24 du livre trois a trois cas. En effet, le point A étant sur le point Γ, et le point B sur le point Δ, il faut démontrer posse incidere vel intra segmentum AZΔ, vel extra, vel partim intra et partim extra; hi tres casus in manuscripto 190 et in editione parisiensi demonstrantur.

Sed in omnibus aliis manuscriptis, et in omnibus aliis editionibus græcis, tantum demonstratur segmentum AEB non incidere posse partim intra segmentum ΓZΔ, et partim extra. *Commandinus* dat aliorum casuum demonstrationem. At *Robert Simson* ex propositione 24 eximit partem quam propositioni 23 adjungit.

In propositione 26 libri sexti locus quidam minime intelligi poterat, lectio varians tertia omnem ex eà obscuritatem dispulit.

Gregorius, de corollario propositionis 19 libri quinti sermonem habens, sic loquitur : *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius in locum hujus corollarii alterum subdidit. *Robert Simson* dicit : « Hoc corollarium manifeste ostendere librum quintum a geometriæ » ignaris corruptum fuisse, et hoc corollarium nullo modo pendere ex » propositione 19. » In hoc errat *Robert Simson*, et illum sæpissime errare in meis animadversionibus ostendam.

Gregorii versio intellectu est perdifficilis.

Suppressi tertiam vocem corollarii ἐδείχθη. Loco proportionis : ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ZΔ, scripsi hanc proportionem : ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ; loco tandem proportionis : ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓZ, scripsi hanc proportionem : ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ZΔ. Ope harum levium correctionum corollarium evasit inconcussum.

In meâ editione, phrasis ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ZΔ, *sed ostensum est ut* AB *ad* EB *ita* ΔΓ *ad* ZΔ (19. 5), manifeste locum habet harum duarum phrasium : ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ZΔ, ἐνάλλαξ ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ZΔ, *ostensum autem est ut* AB *ad* ΓΔ *ita* EB *ad* ZΔ (19. 5); *alterne igitur ut* AB *ad* EB *ita* ΓΔ *ad* ZΔ (16. 5.).

que le segment AEB ne peut tomber ni en dedans du segment AZΔ, ni en dehors, ni partie en dedans et partie en dehors. Ces trois cas sont démontrés dans le manuscrit 190 et dans l'édition de Paris.

Mais dans tous les autres manuscrits et dans toutes les autres éditions grecques, on démontre seulement que le segment AEB ne peut point tomber partie en dedans du segment ΓZΔ et partie en dehors. Commandin donne la démonstration des deux autres cas. Robert Simson retranche une partie de la proposition 24, qu'il ajoute à la proposition 23.

Dans la proposition 26 du livre six, il y avait un passage tout à fait inintelligible ; la variante 3 en a fait disparaître l'obscurité.

Grégori, en parlant du corollaire de la proposition 19 du livre cinq, s'exprime ainsi : *Corruptissimus est hic locus ; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius a remplacé ce corollaire par un autre de sa façon. Robert Simson nous dit que ce corollaire prouve manifestement que le cinquième livre a été corrompu par des ignares en géométrie, et que ce corollaire ne dépend en aucune manière de la proposition 19. Robert Simson a tort ici comme dans une foule d'autres occasions, ainsi que je le ferai voir dans mes remarques.

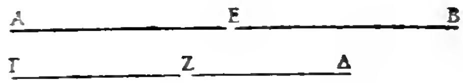
La version de Grégori est inintelligible.

J'ai fait disparaître le troisième mot du corollaire ἐδείχθη. A la place de ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ZΔ, j'ai mis ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ ; et à la place de ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓZ, j'ai écrit ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ZΔ. Par le moyen de ces légères corrections, le corollaire se trouve rétabli dans toute sa pureté.

Dans mon édition, la phrase ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ZΔ, *mais on a démontré que* AB *est à* EB *comme* ΔΓ *est à* ZΔ (19. 5), tient évidemment lieu de ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ZΔ, ἐνάλλαξ ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ZΔ, *mais on a démontré que* AB *est à* ΓΔ *comme* EB *est à* ZΔ (19. 5) ; *donc par permutation* AB *est à* EB *comme* ΓΔ *est à* ZΔ (16. 5).

Euclides hoc corollarium mutare potuisset in theorema, hoc modo :

Si magnitudines compositæ (*) sint proportionales, proportionales erunt per conversionem.



Sint magnitudines compositæ AB, AE, ΓΔ, ΓZ, et sit AB ad AE ita ΓΔ ad ΓZ; dico per conversionem ut AB ad EB ita esse ΓΔ ad ZΔ.

Quoniam enim ut AB ad AE ita ΓΔ est ad ΓZ, alterne igitur ut AB ad ΓΔ ita est AE ad ΓZ (16. 5); ostensum autem est ut AB ad ΓΔ ita esse EB ad ZΔ (19. 5); alterne igitur ut AB ad EB ita est ΓΔ ad ZΔ, hoc est ut AB ad AB—AE ita est ΓΔ ad ΓΔ—ΓZ (16. 5); quod est per conversionem. Quod erat demonstrandum.

In textu græco manuscripti 190, nequaquam agitur de circulorum sectoribus in ultimâ sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quæ ad sectores attinent, et quæ adsunt in textu græco omnium aliorum manuscriptorum et in editionibus Basiliæ et Oxoniæ. Hoc addimentum, quod in meam editionem admittere non debuissem, textui a Theone factum est. Sic loquitur Theon in suis in Almagestum commentariis, p. 50, l. 7, edit. Basiliæ, anno 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐπ' ἴσων κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἕκτου βιβλίου. » *Quod autem in æqualibus circulis sectores inter se sunt ut anguli in illis positi, ostensum fuit a nobis in editione Elementorum ad finem libri sexti.*

Hoc Theonis addimentum, quod in subsequentibus nullum habet usum, Euclidis festinationi moram affert. In libris præsertim 10, 14, 15, necnon in Datis bene multas surperfluitates reperias quarum nullam in textu manuscripto 190. Ob id præcipue Euclidem mirati sunt quod ille ad propositum directe tendit, numquam de viâ declinans suâ demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam sunt necessaria. Sed hoc soli manuscripto 190 convenire potest ; itaque non absurde conjecerim emendatum Euclidis

(*) Quatuor magnitudines dicuntur compositæ, quando secunda est quædam fractio primæ, et quarta quædam fractio tertiæ.

Euclide aurait pu donner à ce corollaire la forme d'un théorème, en disant : **Si des grandeurs composées (*) sont proportionnelles, elles sont proportionnelles par conversion.**

Soient les grandeurs composées ΑΒ, ΑΕ, ΓΔ, ΓΖ, et que ΑΒ soit à ΑΕ comme ΓΔ est à ΓΖ; je dis que par conversion ΑΒ est à ΕΒ comme ΓΔ est à ΖΔ.

Car, puisque ΑΒ est à ΑΕ comme ΓΔ est à ΓΖ, par permutation ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ (16. 5); mais on a démontré que ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΒ est à ΖΔ (19. 5); donc, par permutation, ΑΒ est à ΕΒ comme ΓΔ est à ΖΔ, c'est-à-dire que ΑΒ est à ΑΒ—ΑΕ comme ΓΔ est à ΓΔ—ΓΖ (16. 5); ce qui est par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

Dans le texte du manuscrit 190, il n'est nullement question de secteurs circulaires dans la dernière proposition du livre 6. Une main étrangère a interligné et écrit en marge de ce manuscrit ce qui se trouve de relatif aux secteurs circulaires dans le texte de tous les autres manuscrits, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Cette addition au texte, que je n'aurais pas dû conserver, est de Théon. Voici ce qu'il dit lui-même dans ses commentaires sur l'Almageste, pag. 50, l. 7, édit. de Bâle, 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐν ἴσοις κύκλοις τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἕκτου βιβλίου. » *J'ai démontré dans mon édition des Éléments, et à la fin du sixième livre, que dans les cercles égaux les secteurs sont entre eux comme les angles placés dans ces cercles.*

Cette addition de Théon, qui n'est d'aucun usage dans la suite, ne sert qu'à retarder la marche d'Euclide. On trouve dans les livres 10. 14. 15 surtout, ainsi que dans les Données, une foule de pareilles superfluités dont aucune n'est admise dans le texte du manuscrit 190. On a toujours admiré Euclide en ce qu'il marchait directement vers son but, sans jamais s'écarter de son chemin, pour démontrer ce qui ne lui était pas nécessaire pour aller en avant. Mais cela n'est vrai que pour le seul manuscrit 190; c'est pour-

(*) Quatre grandeurs sont dites composées, lorsque la seconde est une fraction de la première, et que la quatrième est une fraction de la troisième.

textum in hoc manuscripto contineri, aliosque manuscriptos nihil aliud esse quam editionis vulgatæ a Theone exemplaria. Non diffiteor tamen editione in meâ quasdam adesse superfluitates, quarum indicem ad calcem animadversionum subjiciam, hoc est, indicem instituam omnium quæ licet sublata subsequentibus nullo modo obesse possunt.

Corollarium propositionis 15 primi libri suppressi, quamvis eâdem manu in margine manuscripti 190 exaratum sit, quia hoc corollarium non præ se fert signum quod in hoc manuscripto monet in margine exarata ad textum pertinere, ac insuper hoc corollarium tantum adest in textu unius ex manuscriptis, quia tandem hoc corollarium in subsequentibus nullum habet usum.

Definitio 5 sexti libri eâdem manu in imâ paginâ exarata est cum signo quod monet eam ad textum pertinere: sed manifestum est erravisse transcriptorem. Eam suppressi, quia nullum in Euclidis Elementis usum habet. *Robert Simson* sex paginas in-4° scripsit probandi causâ illam a Geometriæ ignaro in textum fuisse admissam.

Non plura dicam de lectionibus meæ editionis variantibus; lectori se certiorem facere licebit permulta evanuisse menda typographica, necnon et plurimos locos obscuros vel corruptos, vel detruncatos, præsertim in libris 10, 14, 15, et in Datis; Euclidisque textum permultis superfluitatibus me curante fuisse expurgatum.

Dixi Euclidis in omnes linguas conversa fuisse opera et commentariis illustrata; editiones et versiones notabilissimæ Euclidis hæ sunt:

Campanus primum in latinum ex arabico convertit Euclidem. Hæc versio Venetiis anno 1482 edita, comprehendit quindecim libros Elementorum.

Zambertus, venetus, ex græco convertit in latinum quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Hæc versio edita fuit Parisiis anno 1516, deinde Basiliæ anno 1537 et anno 1546. Euclidis Data adsunt tantum in duabus posterioribus editionibus.

quoi il me sera permis de penser que ce manuscrit contient le texte pur d'Euclide, et que les autres ne sont que des copies de l'édition de Théon. J'avoue cependant qu'il existe quelques superfluités dans le manuscrit 190, et par conséquent dans mon édition; j'en donnerai la liste à la suite de mes remarques, c'est-à-dire, que je donnerai la liste de tout ce qui peut se supprimer sans nuire à ce qui suit.

J'ai supprimé le corollaire de la proposition 15 du premier livre, quoiqu'il soit écrit de la même main dans la marge du manuscrit 190, parce que ce corollaire n'est pas précédé du signe qui, dans ce manuscrit, sert toujours à indiquer que ce qui est écrit en marge doit faire partie du texte, parce que ce corollaire ne se trouve que dans le texte d'un seul manuscrit, et enfin, parce qu'il n'est d'aucun usage dans la suite.

La définition 5 du sixième livre est écrite de la même main au bas de la page, et avec le signe qui indique qu'elle doit faire partie du texte; mais il est hors de doute que c'est une faute du copiste. Je l'ai supprimée, parce qu'elle n'est d'aucun usage dans les Éléments d'Euclide. Robert Simson a écrit six pages in-4° pour prouver qu'elle a été introduite dans le texte par un ignare en Géométrie.

Je n'en dirai pas davantage sur les variantes de mon édition; le lecteur pourra s'assurer lui-même qu'elle a fait disparaître un très-grand nombre de fautes typographiques, beaucoup de passages obscurs ou altérés, ou tronqués, surtout dans les livres 10, 14, 15, et dans les Données, et que j'ai purgé le texte d'Euclide d'un très-grand nombre de superfluités.

J'ai dit que les œuvres d'Euclide ont été traduites et commentées dans toutes les langues; voici quelles sont les éditions et les traductions les plus remarquables.

La première traduction latine que nous ayons d'Euclide est celle de Campanus, qui parut à Venise en 1482. Cette traduction, qui a été faite d'après l'arabe, contient les quinze livres des Éléments.

Zamberti, vénitien, traduisit en latin, d'après le grec, les quinze livres des Éléments et les Données d'Euclide. Cette traduction, qui parut à Paris en 1516, reparut à Bâle en 1537, et ensuite en 1546. Les Données d'Euclide ne se trouvent que dans ces deux dernières éditions.

Textus græcus quindecim librorum Elementorum Euclidis cum commentario Theonis et Procli, primum editus fuit Basiliæ anno 1533, apud Herwagem, celeberrimum typographum. Simon Grynæus textûs græci fuit editor. Quindecim libri Elementorum editi fuerunt ex duobus manuscriptis qui Simoni Grynæo suppeditati fuerunt, alter Venetiis á Lazaro Bayfio, alter Parisiis a Joanne Ruellio. Commentarium Procli editum fuit ex manuscripto inemendato qui Oxonià Simoni Grynæo missus fuit a Joanne Claymando.

Candalla edidit, anno 1566, versionem latinam quindecim librorum Elementorum.

Commandinus unus optimorum geometrarum suæ ætatis, et apprime versatus in linguâ græcâ et latinâ, convertit in latinum quindecim libros Elementorum ex textu græco editionis basiliensis. Hæc versio, omnium Euclidis versionum, textui græco erat maxime consentanea; illa edita fuit Pisauri anno 1572, et deinde anno 1619.

Versio latina quindecim librorum Elementorum quam Clavius edidit Romæ, anno 1574, est quam minime consentanea; Clavius sibi concessit facultatem commutandi in permultis locis textum Euclidis; sed nonnullo in pretio est commentarium quod suæ versioni adjunxit, quamvis nimio plus sit diffusum.

Textus græcus Datorum Euclidis, cum versione latinà Hardiæi, editus primum fuit anno 1625.

Henrion edidit, anno 1615, versionem gallicam quindecim librorum Elementorum et Datorum Euclidis. Hæc versio a textu Euclidis differt singulis momentis.

Le Mardelé edidit, non multo post, alteram versionem gallicam quindecim librorum Elementorum. Hæc versio in permultis locis differt a textu Euclidis.

Gregorius edidit Oxoniæ, anno 1703, græce et latine, quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Gregorius usus fuit, in quindecim libris Elementorum, versione latinà Commandini, et in Datis, versione latinà Hardiæi : quas duas versiones Gregorius ipse recognoverat.

Le texte grec des quinze livres des Éléments d'Euclide avec le commentaire de Théon et de Proclus, parut pour la première fois à Bâle en 1533, chez Herwage, célèbre imprimeur. Simon Grynæus en fut l'éditeur. Les quinze livres des Éléments furent imprimés d'après deux manuscrits grecs envoyés à Simon Grynæus; l'un de Venise, par Lazare Bayfius, et l'autre de Paris, par Jean Ruellius. Le commentaire de Proclus fut imprimé, d'après un manuscrit très-défectueux envoyé d'Oxford à Simon Grynæus, par Jean Claymandus.

Candalle publia, en 1566, une traduction latine des quinze livres des Éléments.

Commandin, un des plus grands géomètres de son temps, et homme très-versé dans les langues, traduisit en latin les quinze livres des Éléments d'après le texte grec de l'édition de Bâle. C'était, de toutes les traductions, la plus conforme au texte grec d'Euclide; elle parut à Pesaro en 1572, et ensuite en 1619.

La traduction latine des quinze livres des Éléments que Clavius publia à Rome, en 1574, n'est rien moins que fidèle; Clavius s'est permis de faire de nombreux changements au texte d'Euclide; mais on estime le commentaire qui accompagne sa traduction, malgré sa très-grande prolixité.

Le texte grec des Données d'Euclide, accompagné d'une traduction latine de Hardi, parut pour la première fois en 1625.

Henrion publia, en 1615, une traduction française des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide. Cette traduction diffère à chaque instant du texte d'Euclide.

Le Mardelé publia, quelque temps après, une nouvelle traduction des quinze livres des Éléments. Cette traduction diffère dans une foule d'endroits du texte d'Euclide.

Grégori publia à Oxford, en 1703, en grec et en latin, les quinze livres des Éléments et les Données d'Euclide. Grégori fit usage, pour les quinze livres des Éléments, de la traduction latine de Commandin, et pour les Données, de celle de Hardi. Ces deux traductions avaient été revues par Grégori lui-même.

In hâc editione, præter quindecim libros Elementorum, et Data, adsunt plura opera quæ procul dubio Euclidis non sunt; quod quidem Gregorius ipse non diffitetur in suâ præfatione.

Robert Simson edidit, anno 1756, versionem latinam librorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 Elementorum.

Robert Simson, in pluribus locis, commutavit textum Euclidis.

Dixi in bibliothecâ imperiali adesse manuscriptos græcos tres et viginti. Eorum manuscriptorum secundum vetustatis ordinem hic est index :

N° 190. Is manuscriptus præ se fert omnia indicia manuscriptorum sub finem noni sæculi exaratorum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14 et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo contigit alio manuscripto. In meâ editione eumdem ordinem sum secutus, ipsomet D. *Lagrange* suadente.

N° 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium Elementorum usque ad propositionem octavam secundi libri, ineunte undecimo sæculo exaratus videtur. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur reliqua Elementa et Data, Româ Parisios fuit missus a comite *de Peluse*.

N° 2466. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur tredecim libri Elementorum, duodecimo sæculo exaratus videtur.

N° 2344. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo duodecimo exaratus videtur.

N° 2345. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo tertio exaratus videtur.

Omnes ii manuscripti sunt membranacei; subsequentes sunt cartacei.

N° 2373. Is manuscriptus, in quo deprehenditur Euclidis Geometria cum scholiis, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

N° 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium usque ad propositionem 23 primi libri, et in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, et Data, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

N° 2762. Is codex, in quo tantum deprehenduntur octo priores libri Elementorum, sub finem sæculi decimi quinti exaratus videtur.

N° 2346. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Dans cette édition, outre les quinze livres des Éléments, et les Données, on trouve plusieurs autres traités qui bien évidemment ne sont pas d'Euclide ; Grégori lui-même en convient dans sa préface.

Robert Simson publia, en 1756, la traduction latine des livres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 des Éléments d'Euclide. C'est la traduction de Commandin, revue par Robert Simson.

Robert Simson a fait de nombreux changements au texte d'Euclide.

J'ai dit que la bibliothèque impériale renferme vingt-trois manuscrits grecs. En voici la liste par ordre d'ancienneté :

N° 190. Ce manuscrit porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle. Les Données sont placées immédiatement après le treizième livre des Éléments. Le 14e et le 15e livre vienent ensuite ; ce qui n'existe dans aucun autre manuscrit de la bibliothèque impériale. J'ai suivi le même ordre dans mon édition, d'après le conseil de M. Lagrange.

N° 1038. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 8 du second livre, paraît être du commencement du onzième siècle. Il contient le reste des Éléments, et les Données ; il appartenait à la bibliothèque du Vatican ; et il fut envoyé de Rome à Paris, avec le manuscrit 190, par le comte de Peluse.

N° 2466. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du douzième siècle.

N° 2344. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des Éléments, paraît être du douzième siècle.

N° 2345. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des Éléments, paraît être du treizième siècle.

Tous ces manuscrits sont en parchemin ; les suivants sont en papier.

N° 2373. Ce manuscrit, qui contient la Géométrie d'Euclide avec des scholies, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2342. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 23 du premier livre, et qui contient le reste des Éléments, et les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2762. Ce manuscrit, qui ne contient que les huit premiers livres des Éléments, paraît être de la fin du quinzième siècle.

N° 2346. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2481. Is codex, in quo tantum deprehenduntur decem priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

N° 2531. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

N° 2343. Is codex, in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 2547. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, et Data, ineunte sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 2448. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

N° 2352. Is codex, in quo Data deprehenduntur, a J. *Rossi* fuit exaratus anno 1488.

N° 2363. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

N° 2349. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 2350. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 1981. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 2467. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 2472. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur; sub finem nonnulla desiderantur.

N° 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

N° 2348. Is codex comprehendit Euclidis Data, collata cum quinque antiquissimis manuscriptis bibliothecæ vaticanæ, a Josepho Auriâ, neapolitano, celebri geometrâ sæculi decimi sexti decedentis.

Anno 1814 currente editurus sum versionem gallicam Diophanti operum. Lectiones variantes manuscriptorum bibliothecæ imperialis cum editione 1670, meam versionem subsequentur. Imprimis usus sum manuscripto 2380 græco et latino, cujus initio legere est : *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auriâ interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auriæ.*

Mea versio conicorum Apollonii edetur anno 1815 currente.

N° 2481. Ce manuscrit, qui contient les dix premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2531. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2343. Ce manuscrit, qui contient les quinze livres des Éléments, paraît être du seizième siècle.

N° 2547. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, et les Données, paraît être du commencement du seizième siècle.

N° 2448. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2352. Ce manuscrit, qui contient les Données, fut écrit par J. Rossi en 1488.

N° 2363. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quinzième siècle.

N° 2349. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2350. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 1981. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2467. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2472. Ce manuscrit, qui contient les Données d'Euclide, paraît être du quatorzième siècle ; il manque quelque chose à la fin.

N° 3366. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2348. Ce manuscrit contient les Données d'Euclide comparées avec les cinq plus anciens manuscrits de la bibliothèque du Vatican, par Joseph Auria de Naples, célèbre géomètre de la fin du seizième siècle.

Je publierai dans le courant de l'année 1814 une traduction française des œuvres de Diophante. Les variantes des manuscrits de la bibliothèque impériale, avec l'édition de 1670, seront placées à la suite de ma traduction. J'ai fait principalement usage du manuscrit 2380 grec et latin. On lit en tête de ce manuscrit : *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auriâ interprete ; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auriæ.*

Ma traduction des coniques d'Apollonius paraitra dans le courant de l'année 1815.

INSTITUT DE FRANCE.

Rapport de MM. Delambre *et* Prony, *sur une édition grecque, latine et française des quinze livres des Éléments et du livre des Données d'Euclide, par M.* Peyrard.

La classe avait déjà, sur le rapport de MM. Lagrange, Legendre et Delambre, donné son approbation à une traduction complète des OEuvres qui nous restent d'Euclide; M. Peyrard, auteur de ce travail, avait comparé tous les manuscrits grecs qui sont à la bibliothèque impériale, au nombre de vingt-trois. Il était résulté de cette comparaison qu'aucun de ces manuscrits n'est entièrement conforme à l'édition d'Oxford; que cette édition, qui passe pour la meilleure, et qui est sans contredit la plus belle, n'est pourtant, quant au texte grec, qu'une copie de l'édition de Bâle, dont elle a reproduit jusqu'aux fautes les plus palpables; que la plupart de ces manuscrits offrent des variantes qui remplissent quelques lacunes, ou éclaircissent quelques passages de ces deux éditions principales; qu'en général cependant tous ces manuscrits diffèrent peu les uns des autres, et diffèrent beaucoup d'un manuscrit portant le n° 190, qui provient de la bibliothèque du Vatican, d'où il fut envoyé en France par M. Monge.

Ce manuscrit porte tous les caractères qui peuvent en attester l'ancienneté, tous les autres paraissent plus modernes; M. Peyrard le croit de la fin du neuvième siècle. Mais cette date n'est pas son principal mérite; le texte y paraît plus pur, plus clair, moins prolixe, et par-là même plus intelligible. C'est à ce manuscrit que M. Peyrard s'est principalement attaché, il en avait porté toutes les variantes aux marges d'un exemplaire de l'édition d'Oxford; cet exemplaire et le manuscrit qui avait servi à le corriger, furent remis aux commissaires nommés par la classe; ils vérifièrent les notes marginales de M. Peyrard; ils y remarquèrent des additions nécessaires, d'autres simplement utiles, des suppressions qui n'étaient pas moins avantageuses, d'autres changements sur lesquels les avis pouvaient être partagés, quelques-uns même qui ne semblaient pas devoir être adoptés, et leur conclusion fut que la classe pouvait donner son approbation au travail de M. Peyrard; que s'il n'était pas permis d'espérer une édition du texte grec purgé de toutes les fautes que les manuscrits pouvaient corriger, et enrichi de toutes les additions qu'ils pouvaient fournir, édition qui ne pouvait manquer d'être dispendieuse et qui demanderait beaucoup de temps, il était au moins à souhaiter que M. Peyrard ajoutât à sa traduction la liste des variantes qu'il aurait adoptées ou simplement recueillies, afin que les géomètres pussent corriger les éditions anciennes en attendant l'édition plus correcte qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Ces conclusions adoptées par la classe inspirèrent un nouveau courage à M. Peyrard; il entreprit l'édition grecque, latine et française, dont nous avons à rendre compte; elle aura deux volumes in-4°; le premier est achevé. Sur la demande de l'auteur, S. E. le Ministre de l'intérieur, par sa lettre du 20 novembre 1813, invite la classe à examiner *si l'ouvrage est aussi exact que l'auteur a desiré le faire, si les leçons choisies sont en effet celles qui méritaient* *d'être adoptées de préférence, enfin si le livre remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées.*

La classe d'histoire et de littérature ancienne a été en même temps invitée à considérer la traduction sous le rapport du style et de l'exécution; S. E. *prie les deux classes de vouloir bien, soit en particulier, soit en se réunissant, examiner le volume sous ces divers rapports.*

Deux commissions ont été nommées; les deux rapporteurs choisis par elles ont eu plusieurs conférences; ils se sont trouvés du même avis, et chacun d'eux s'attachera plus particulièrement aux objets qui sont de sa compétence, en observant la ligne de démarcation tracée par S. E. le Ministre de l'intérieur.

L'ouvrage est précédé d'une préface, où l'éditeur rend compte des recherches qu'il a faites, des secours qu'il s'est procurés, du système qu'il a suivi; cette préface est en deux langues, nous n'en examinerons ici que les idées.

Ce qu'on sait sur la personne d'Euclide se réduit à bien peu de chose, mais son ouvrage jouit de la plus grande réputation. On convient assez généralement qu'Euclide n'a fait que rassembler et mettre en ordre les théorèmes trouvés par les géomètres qui étaient venus avant lui; peut-être a-t-il augmenté le nombre de ces théorèmes, il se peut qu'il en ait perfectionné les démonstrations; cependant quelques auteurs attribuent ces démonstrations à Théon, l'un des plus anciens et plus célèbres commentateurs des Éléments. Proclus, qui nous a laissé quatre livres de commentaires sur le premier livre d'Euclide, dans une longue liste de tous les grecs qui se sont distingués dans les mathématiques, en cite quatre qui avaient composé des éléments avant Euclide. Le premier est Hippocrate de Chios, célèbre encore aujourd'hui par ses Lunules; le second est Léon, dont l'ouvrage était plus plein, plus utile que celui de son prédécesseur; le troisième est Theudius de Magnésie, que Proclus loue pour l'ordre qu'il a mis dans la rédaction; après Léon vient Hermotime de Colophon, qui, perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Thætète, mit aussi beaucoup du sien dans les éléments; peu de temps après vint Euclide, qui, suivant le témoignage de Proclus, *rassembla les éléments, mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Thætète, et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. Euclide vivait sous le premier des Ptolémées, car Archimède le cite dans son premier livre; il avait fait beaucoup d'autres ouvrages remarquables par leur admirable exactitude et pleins de théories savantes.* Proclus cite particulièrement son optique, sa catoptrique, ses éléments de musique, et enfin, son livre des diærèses, διαιρέσεων; mais ce qu'il admire surtout c'est le livre des éléments, tant pour l'ordre que pour le choix des théorèmes et des problèmes, qui méritent véritablement le nom d'*élémentaires:* il est à remarquer que Proclus ne dit rien des *données*, et qu'il n'a pas nommé Théon.

Ce passage que nous traduisons fidèlement, et dont Grégori dans sa préface avait seulement extrait quelques lignes, semble décisif; aussi l'idée de ceux qui voulaient dépouiller presque entièrement Euclide en faveur de Théon, a-t-elle été vivement combattue par Butéon et Savilius; Robert Simson en se rangeant à leur avis, le modifie d'une manière qui le rend encore plus favorable à Euclide. Par une espèce de superstition, excusable dans un traducteur, il a l'air de poser comme un axiôme qu'il est impossible qu'Euclide se soit jamais trompé, ou qu'il ait eu la moindre distraction. Ainsi quand il est obligé de reconnaître qu'une définition n'est pas assez juste, qu'une démonstration est incomplète ou peu rigoureuse, il en rejète assez durement la faute sur Théon ou quelque autre commentateur, qu'il accuse nettement d'ineptie ou au moins d'ignorance en mathématiques. Le nouveau traducteur, sans s'éloigner beaucoup de cette manière de voir de Simson, est au moins plus modéré dans les termes; et pour rejetter plusieurs choses qui véritablement paraissent peu dignes d'Euclide, il a, ce qui manquait à Simson, l'autorité d'un bon manuscrit, dans lequel les passages dignes de censure se trouvent omis ou corrigés.

Cette prévention en faveur de son auteur, et la supériorité du manuscrit du Vatican sur tous les autres, ont fait penser à M. Peyrard, que ce manuscrit pourrait bien être le véritable texte d'Euclide, tandis que tous les autres, et en particulier ceux qui ont servi à l'édition de Bâle ou d'Oxford, seraient les éditions données par Théon, ou par les commentateurs venus après lui.....

En avouant que nous n'avons aucun argument bien péremptoire pour rejeter la conjecture de M. Peyrard, nous dirons pourtant qu'elle ne nous paraît pas suffisamment établie.......

Nous n'attribuerons donc pas à Théon toutes les différences qui se trouvent entre les manuscrits plus modernes et le manuscrit du Vatican; nous ne dirons pas que ce manuscrit soit le texte véritable d'Euclide, car alors il faudrait attribuer à Euclide les mauvaises leçons que M. Peyrard a justement rejetées de son édition pour suivre ou les autres manuscrits ou les éditions de Bâle et d'Oxford. Nous ne dirons pas même que Théon soit décidément l'auteur de la définition condamnée par Simson; il est vrai que Théon la développe et l'explique dans son commentaire sur l'Almageste; mais il la rapporte sans pour cela s'en déclarer l'auteur, au lieu que dans un autre endroit il donne formellement comme de lui le théorème concernant les secteurs, qu'il dit avoir démontré dans son explication d'Euclide, car c'est ainsi que pour éviter l'équivoque nous traduisons le mot ἐκδόσει, qu'on traduit communément par le mot *édition*.

Nous n'accuserons point Théon d'avoir supprimé des démonstrations rigoureuses, pour en substituer d'autres qui ne prouvent rien ou qui sont inintelligibles. Nous admettrons aisément que Théon a pu commettre quelques fautes par inattention, mais non qu'il ait été assez ignorant pour ne sentir ni le mérite d'une bonne démonstration, ni les défauts de celles qu'il mettait à la place. Au reste, ce reproche que nous avons l'air d'adresser à M. Peyrard, va bien plus justement à Simson, dont la préface toute entière roule sur cette idée; et d'ailleurs nous sommes loin de donner trop d'importance à l'opinion d'un commentateur sur la source des erreurs avouées qu'il s'agit de rectifier. Que ces erreurs viènent d'Euclide lui-même ou de l'un de ses commentateurs, ou, ce qui souvent est plus probable, qu'elles viènent des copistes, rien n'est plus indifférent; pourvu que le nouvel éditeur les corrige bien, il aura rempli sa tâche; et s'il peut prouver que ses corrections sont appuyées du témoignage d'un ancien manuscrit, on n'a rien de plus à lui demander.

Ce qui distingue les Éléments d'Euclide, ce sont moins les théorèmes eux-mêmes, ou l'ordre dans lequel il les a fait dériver les uns des autres, que la manière dont il les a démontrés......

Le mérite principal est dans la marche rigoureuse qu'il a suivie dans toutes ses démonstrations; on pourrait dire cependant que cette méthode même a trouvé plus de prôneurs que d'imitateurs.......

Mais sans nous déclarer exclusivement les admirateurs d'une manière passée de mode, nous dirons que cette manière a des avantages précieux, en même temps qu'elle a des inconvénients graves; qu'elle forme un langage aujourd'hui peu connu et qui mérite de l'être d'avantage; qu'en la voyant appliquée par Euclide à des théorèmes assez simples, on pourra devenir en état de suivre plus facilement les démonstrations plus longues et plus obscures d'Apollonius et d'Archimède ; que cette étude sera du moins un exercice utile pour s'habituer à la rigueur des démonstrations dont on n'est que trop disposé à se relâcher. On ne serait écouté de personne aujourd'hui si l'on proposait de commencer l'étude des mathématiques dans Euclide ; mais on dira une chose vraie en assurant que tout géomètre fera très-bien de lire une fois en sa vie Euclide en entier, pour avoir une idée nette de ce genre de démonstrations, et se mettre en état de l'employer dans l'occasion.

Ces réflexions prouvent l'utilité de l'entreprise formée par M. Peyrard. Aujourd'hui que l'étude du grec commence à refleurir dans l'Université impériale, il est à croire que peu de géomètres désormais se refuseront la satisfaction de lire Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante dans leur langue. Il ne faut pas avoir fait une longue étude du grec pour entendre ces auteurs, qui ne sont pas plus difficiles que les fables d'Ésope, et bien moins, certainement, que les dialogues de Lucien, ou les vies de Plutarque, qu'on met entre les mains des enfants. Euclide surtout est d'une grande simplicité, ses phrases sont courtes, elles offrent peu d'inversions, on n'y voit pas une réflexion, pas un raisonnement grammaticalement compliqué ; les mêmes expressions reparaissent à chaque instant ; le vocabulaire n'est que trop borné, et les termes techniques que l'on y rencontre ne paraissent jamais sans avoir été préalablement définis.

L'intelligence du texte grec sera rendue plus facile encore par le système que M. Peyrard a suivi dans sa traduction latine. Partout il lui a donné la même fidélité qu'aux traductions interlinéaires des ouvrages qui servent à la première instruction. Les termes correspondants se suivent dans le même ordre dans les deux langues. Il n'est pas jusqu'aux articles qui manquent au latin, que le traducteur n'ait tenté de reproduire, par l'emploi continuel du pronom *ipse*, *ipsius*, etc., pour marquer les cas obliques des lignes, des angles, des figures, désignés en grec par des lettres indéclinables. Ces mots subsidiaires dont la répétition continuelle a quelque chose de fatigant, auraient pu être évités, sans doute, en les remplaçant parfois par les mots *rectæ*, *anguli*, *arcus*, ou tels autres qui n'auraient guères été plus longs ; mais M. Peyrard est suffisamment excusé par l'exemple des traducteurs qui l'ont précédé, et même par celui des géomètres modernes qui ont écrit en latin. D'ailleurs, la traduction latine est moins destinée à être lue de suite, qu'à faciliter l'intelligence du texte grec ; et ceux qui y trouveraient trop de difficulté pourront se borner à la traduction française qui est au bas de chaque page ; outre le secours qu'il trouvait dans nos articles indéfinis, l'auteur n'a pas fait scrupule d'y introduire ces mots *ligne*, *angle*, etc., que nous regretions tout-à-l'heure de ne pas trouver dans le latin. Cette licence est la seule qu'il ait prise ; à cela près, le français est presque aussi littéral que le latin ; on serait tenté quelquefois d'en faire un reproche au traducteur ; mais la phrase d'Euclide est si simple, qu'il n'y a guères deux manières de la traduire, à moins de prendre des libertés qui, sans avantages bien réels, changeraient tout-à-fait le style de la démonstration.

Il nous reste à parler des variantes qui assurent à la nouvelle édition du texte une supériorité marquée sur les éditions précédentes, lesquelles d'ailleurs commencent à devenir un peu rares.

La première de ces variantes est celle qui place parmi les *demandes* trois propositions, que les éditions précédentes avaient rangées parmi les *notions communes*. Tous les auteurs qui ont depuis reproduit ces propositions se sont crus obligés de les démontrer ; Euclide qui s'en est dispensé, n'a pu cependant les regarder comme des vérités évidentes, mais seulement comme des principes qu'on pouvait lui accorder et qui lui étaient indispensables pour établir sa doctrine. Il faut convenir pourtant que ces trois demandes sont d'un genre tout différent des trois précédentes. En effet, il faudrait être d'un esprit bien difficile pour nier à Euclide la possibilité de mener une droite d'un point donné à un point donné, de prolonger une droite donnée, ou de décrire un cercle d'un centre et d'un rayon donnés. Mais on pourrait lui demander la preuve que tous les angles droits sont égaux, que deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace, et surtout que deux droites se couperont nécessairement si on les prolonge suffisamment du côté où elles forment sur une autre droite deux angles dont la somme est moindre que celle de deux angles droits.

L'édition de Paris est conforme à tous les manuscrits de la Bibliothèque impériale, si ce n'est que le n° 2345 place parmi les notions communes la troisième des propositions dont nous venons de parler, et que les n^{os} 2346 et 2481 la placent tout à la fois, et parmi les demandes et parmi les notions communes. L'édition de Paris est encore conforme à l'édition arabe, à la traduction latine de Campan, faite d'après l'arabe, et à la traduction latine de Zamberti, faite d'après le texte grec, avant l'édition de Bâle; Proclus, qui a démontré d'une manière très-simple que tous les angles droits sont égaux, place parmi les demandes, les deux premières propositions, et la troisième parmi les notions communes; Boëce, qui a supprimé la troisième, place aussi les deux autres parmi les demandes. Tout porte donc à croire que Simon Grynœus, qui est l'auteur de l'édition de Bâle, jugeant ces trois propositions déplacées, changea les accusatifs en nominatifs, les infinitifs en indicatifs, pour reposer ces propositions à une place qu'il jugeait plus convenable. Quoi qu'il en soit, nous croyons M. Peyrard plus qu'autorisé à la leçon qu'il a adoptée de préférence.

La proposition 7 du premier livre a plusieurs cas; un seul cependant est énoncé et démontré dans tous les manuscrits. Clavius a senti la nécessité de nouveaux développements, il y consacre cinq figures et donne cinq démonstrations, qu'il pouvait réduire à trois; Simson donne double démonstration et double figure, et la seconde est prise dans Clavius. M. Peyrard qui ne voyait dans les manuscrits qu'une seule figure et qu'une seule démonstration, pouvait dire tout simplement qu'Euclide avait eu un moment de distraction; il pouvait compléter la démonstration dans une note. Il a voulu sauver Euclide de tout reproche; en empruntant comme Simson, une figure à Clavius, et prolongeant deux lignes dans la figure d'Euclide, il a fait que la démonstration d'Euclide s'applique à la fois aux deux figures et aux deux cas qui renferment tous les autres. Ainsi *la démonstration s'est trouvée complète sans y changer un seul mot*, dit M. Peyrard, et cela est vrai; mais dans la préparation il a été obligé d'ajouter une ligne qu'il a enfermée entre deux crochets, parce qu'elle ne ne se trouve dans aucun manuscrit; il serait assez difficile d'imaginer comment les copistes auraient non-seulement omis une figure toute entière, mais encore les deux prolongements de la première figure, et enfin la ligne du texte qui explique ces prolongements; ce n'est donc pas ici une variante que M. Peyrard porte dans le texte, c'est une véritable correction faite à un passage incomplet, mais du moins il l'a faite dans les moindres termes, et c'est par dévouement à son auteur qu'il se borne au mérite d'avoir retrouvé la véritable leçon.

La proposition 24 du livre III, a trois cas; les éditions grecques n'en démontrent qu'un seul, Commandin dans sa traduction démontre les deux autres: Clavius développe la proposition, il y emploie cinq figures ; Simson retranche une partie de la proposition qu'il reporte à la précédente; à l'aide de son manuscrit M. Peyrard remplit la lacune.

Dans la proposition 26, la variante (3) éclarcit la démonstration, elle est donc utile ; M. Peyrard a bien fait de l'introduire dans le texte. Tous les traducteurs en avaient senti la nécessité, le manuscrit a légitimé leurs conjectures.

Le corollaire de la proposition 19 du livre V a paru si corrompu, que Gregori s'est cru obligé de le changer pour y donner un sens raisonnable. Clavius lui en avait donné l'exemple. Robert Simson, avec son aménité ordinaire, dit que tout ce livre V a été corrompu par des ignares en géométrie......

Le manuscrit est absolument semblable à l'édition d'Oxford, c'est par des changements assez légers que M. Peyrard l'a rendu plus intelligible ; mais ces changements nécessaires ne sont autorisés par aucun manuscrit ; il lui donne ensuite la forme d'un théorème, et le démontre directement d'une manière assez courte dans sa préface.

Dans la dernière proposition du livre VI, ce qui regarde les secteurs circulaires paraît une addition de Théon, qui en réclame formellement la démonstration à la page 50 de son commentaire sur Ptolémée. Cet article ne se trouve pas dans le manuscrit du Vatican, et M. Peyrard se reproche de ne l'avoir pas retranché de son édition, par la raison qu'il n'est d'aucun usage dans tout ce qui suit ; mais puisque ce théorème est vrai, nous croyons le scrupule exagéré. Pour qu'un théorème soit admis dans un livre d'éléments, il n'est pas bien nécessaire qu'il serve à démontrer un théorème subséquent...... Cet article des secteurs a cependant trouvé grâce aux yeux de Simson, qui en ignorait probablement le véritable auteur, ou qui n'a pas vu dans le passage de Théon une preuve bien sûre qu'Euclide n'eût pas donné lui-même ce théorème.

Le traducteur continue de donner les raisons pour lesquelles il a rejeté du texte plusieurs variantes qu'il discute. Ces raisons sont assez plausibles, mais quand on ne les admettrait pas, comme les leçons rejetées se retrouvent à la fin du volume, personne n'aurait à se plaindre ; on sait qu'en pareille matière les éditeurs les plus estimables sont rarement du même avis.

Après avoir examiné la préface, nous aurions à passer en revue les variantes que l'auteur, soit en les admettant, soit en les rejetant, n'a pas jugées assez importantes pour leur consacrer un article particulier ; mais cet examen serait beaucoup trop long, nous nous bornerons à celles qui pourront nous fournir quelque remarque ; nous laisserons toutes celles qui nous ont paru ou indifférentes ou bien placées, soit qu'elles se trouvent dans le texte ou qu'elles soient à la fin du volume.

Dans la définition 15 du livre Ier, l'éditeur, d'après plusieurs manuscrits, a reçu dans le texte les mots πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, qui nous paraissent un double emploi, une glose fort inutile des mots πρὸς ἣν qui se trouvent deux lignes plus haut.

L'éditeur a marqué par des titres les différentes parties dont se compose la première proposition. Ces dénominations qui nous ont été conservées par Proclus, et qui sont *exposition*, *détermination*, *construction*, *démonstration* et *conclusion*, paraissent une pédanterie de commentateur, et le nouvel éditeur a bien fait de ne les employer qu'une seule fois pour exemple.

Il a rejeté parmi les variantes le corollaire de la proposition XV, qui dit que la somme des angles autour d'un même point est toujours égale à quatre angles droits. Sa raison est qu'il manque dans la plupart des manuscrits, et que dans les autres il est écrit d'une main étrangère. Il nous semble qu'on aurait pu le conserver, à l'exemple de Simson. S'il n'est pas d'Euclide, s'il est implicitement renfermé dans ce qui précède, il a le mérite d'être court, et de contenir une remarque qui aurait pu échapper à quelques lecteurs. Il aurait pu, sans inconvénient, conserver quatre mots qu'il a retranchés de la proposition XX ; à la vérité, ils n'étaient pas bien nécessaires, mais ils paraissent dans la manière d'Euclide. Dans la proposition XXII, au contraire, il a rétabli dans le manuscrit deux lignes qui ne gâtent rien, mais dont on pouvait se passer.

Dans la proposition XXVI, l'addition faite (13) était nécessaire, quoique dans le manuscrit elle fût écrite en marge et d'une autre main ; elle se trouvait déjà dans l'édition d'Oxford.

Dans la proposition XXVII, la leçon du manuscrit est plus concise et suffisante ; celle d'Oxford est plus développée et plus dans la manière d'Euclide. On peut en dire autant de la proposition XXVIII. La leçon nouvelle de la proposition XXIX a le mérite de la brièveté.

A la proposition XXXI, l'éditeur s'est écarté de son manuscrit pour se conformer à l'édition d'Oxford ; il a cru parfaitement inutiles les mots qu'il supprimait : il y a dans tous ces choix un peu d'arbitraire, et nul inconvénient. Ainsi à la proposition XXXIV, le mot *χωρίον* ajouté à *παραλληλόγραμμον* n'était nullement nécessaire ; mais en le rétablissant, on a rendu l'énoncé plus conforme à celui de la proposition. A la proposition XXXVII, le retranchement autorisé par le manuscrit n'a aucun inconvénient : on fait toujours bien quand on retranche des mots inutiles ; la démonstration y gagne toujours, car celles des Grecs sont toujours un peu longues.

A la fameuse proposition XLVII (le carré de l'hypoténuse), on trouve une faute qui ne peut échapper au lecteur, et dont nous n'aurions pas fait mention, si elle ne se trouvait dans les trois langues : c'est un ΔA au lieu de BA.

Dans le livre II, proposition VIII, on serait tenté de regarder comme inutiles les quatre lignes introduites d'après le manuscrit ; mais dans la proposition IX, on a très-bien fait d'introduire ces mots *et elles sont égales*, qu'on était obligé de sous-entendre. La variante (12) de la même proposition est préférable à la leçon d'Oxford, qui pourtant revient à peu près au même ; car si les carrés sont égaux, les racines ou les côtés le sont nécessairement.

Le manuscrit avait, dans la proposition X, une faute évidente, qui n'était ni dans l'édition d'Oxford, ni dans celle de Bâle.

Dans le livre III, définition 2, l'éditeur a bien fait d'ajouter, d'après le manuscrit, les mots *ἐπὶ μηδέτερα μερὴ* ; mais il a oublié de les traduire en français.

Dans la proposition VIII, l'éditeur a bien fait de suivre l'édition d'Oxford plutôt que le manuscrit ; la longue variante n'offre rien de bien intéressant.

Dans la proposition XIII on a ajouté, d'après le manuscrit, deux mots qui étaient si nécessaires, que Gregori les avait traduits ; quoiqu'ils ne fussent pas dans le texte.

Dans la proposition XXIV, le manuscrit et l'édition nouvelle présentent un sens moins incomplet : il y manque pourtant encore quelque chose, mais le sens ne peut être douteux.

La variante (6) de la proposition XXXVII, est certainement une amélioration.

Livre IV, au corrollaire de la proposition V, la correction tirée du manuscrit est bonne ; la leçon d'Oxford était défectueuse ; cependant le sens était visible.

Livre V, proposition IV, l'éditeur a rétabli d'après le manuscrit deux mots qui manquaient, et que Simson avait jugés indispensables. Il y a ensuite, dans le manuscrit, trois lignes que l'éditeur a bien fait de ne point admettre dans son texte.

Proposition V., la variante (1) était nécessaire.

Proposition VII, l'éditeur n'a point inséré dans le texte un corollaire qui contient une proposition vraie, utile, et qui manque à ce livre, mais qui ne peut se conclure de la proposition précédente : il ne se trouve dans aucun manuscrit, si ce n'est celui du Vatican. Simson a donné à part cette proposition, qu'il a marquée de la lettre B. Dans la manière moderne de traiter les proportions, ce théorème est évident; il suffira d'en trouver l'énoncé parmi les variantes; mais il pouvait figurer dans le texte, avec une note.

A la proposition VIII, les sept lignes ajoutées d'après le manuscrit améliorent la démonstration sans la rendre encore bien claire. Simson avait raison de la trouver incomplète; mais il avait probablement tort d'en rejeter la faute sur Théon. Au reste, la proposition en elle-même est si simple, qu'on serait tenté d'en faire un axiôme; et de là vient peut-être la difficulté de la démontrer à la manière des anciens. Il y avait dans l'édition d'Oxford une faute de grammaire, un indicatif pour un infinitif; cette faute a été corrigée d'après le manuscrit.

A la proposition XXI, variante (3), la leçon d'Oxford était tronquée; on y ajoutait une explication qui paraît avoir été une note marginale, qui depuis aurait passé dans le texte. La leçon rend la glose inutile; ainsi le passage devient à la fois et plus court et plus clair.

A la proposition XXIII, on trouve une longue variante fournie par quatre manuscrits. Elle est préférable à la leçon d'Oxford. Simson a refondu la démonstration, et dans ses notes il critique vivement les interprètes qui l'ont précédé. Sa démonstration n'est pas non plus d'une grande clarté. Le théorème est un de ceux qu'on n'explique nulle part, et qu'on applique sans le connaître. Il suffit de l'écrire algébriquement pour en sentir la justesse. Cette espèce de traduction est en général le moyen le plus sûr pour juger les démonstrations des divers éditeurs; mais alors, si on les rend plus claires, on aperçoit en même temps qu'elles sont longues et peu naturelles.

Au livre VI, l'éditeur a supprimé la 5ᵉ définition, parce qu'elle n'est pas dans son manuscrit. Elle pourrait être de Théon; c'est celle que Simson a si vivement critiquée. La meilleure raison, c'est qu'elle est à peu près inutile, et qu'elle n'est point assez correcte. C'est la définition de la raison composée.

Dans la proposition II, l'éditeur a supprimé deux fois le mot παράλληλος qui n'est pas dans le manuscrit, et qui est de trop dans les imprimés. Αγειν παρὰ signifie chez les Grecs ce que nous exprimons par *mener parallèlement.* On voit donc que le mot *parallèle* devient inutile. Deux lignes sont parallèles quend elles sont *à côté* l'une de l'autre sans jamais se couper; c'est ce que signifie παρὰ chez les géomètres grecs.

Dans la proposition III, l'éditeur a rétabli quelques articles qui manquaient, et adopté quelques variantes qui, sans être bien importantes par le sens, rendent la phrase plus correcte.

A la proposition X, il y avait dans l'édition d'Oxford une répétition inutile, occasionnée par l'insertion d'une phrase également superflue. L'éditeur, d'après quatre manuscrits, a donné une leçon plus courte et plus exacte.

A la fin de la deuxième démonstration de la proposition XIV, on a supprimé, d'après le manuscrit, quatre lignes qui formaient une glose peu nécessaire.

La proposition XXI avait un double emploi plus sensible, que le manuscrit a fait supprimer.

A la proposition XXII, le manuscrit a fourni deux développements utiles, qu'on pouvait cependant sous-entendre.

A la proposition XXVI, les éditeurs de Bâle et d'Oxford offraient un texte altéré, une figure mal faite. Clavius avait changé la démonstration et substitué deux figures à la figure unique du texte. Le manuscrit a fourni un texte correct et une figure exacte. Simson, en conservant la figure, avait changé le texte pour l'y faire cadrer. Sa correction était bonne, mais rien ne l'appuyait. Il est à croire que la nouvelle édition offre la véritable rédaction d'Euclide.

A la proposition XXVII, τὴν était une faute d'impression dans l'édition d'Oxford.

Livre VII. C'est le premier de ceux qui sont omis dans les éditions communes d'Euclide; il traite des nombres. La définition de l'unité ne signifie pas grand chose en grec, et ce défaut est bien plus sensible en latin et en français, où les mots *un* et *unité* ont une ressemblance que n'ont pas les mots *monade* et *un; μονὰς* et ἓν.

L'éditeur a rétabli, d'après le manuscrit, la définition du nombre impairement pair qui manquait évidemment, quoiqu'on pût la supposer comprise dans celle du nombre pairement impair qui précède.

A la proposition X, on trouve une addition utile.

A la proposition XIX, δευτέρου pour τετάρτου, était dans l'édition d'Oxford une faute prise dans celle de Bâle, et d'autant plus étonnante dans celle-là, qu'elle était corrigée dans la traduction.

A la proposition XXIII, la première variante a le mérite de plus de brièveté, la seconde celui de plus de justesse.

Nous sentons plus que personne combien ces détails sont arides et minutieux. Nous avons dû les rapporter pour donner à la Classe la preuve du scrupule avec lequel nous avons fait l'examen dont elle nous avait chargés. Notre conclusion sera que, nonobstant quelques fautes d'impression dont nous ajouterons ici la liste (1), qui étaient presque inévitables dans une entreprise de ce genre, et qui d'ailleurs sont bien moins nombreuses que celles de la belle édition d'Archimède, imprimée à Oxford; l'ouvrage est *exact*, non pas sans doute *autant que l'auteur aurait désiré le faire*, mais autant qu'il était possible de l'espérer; *que les leçons choisies sont en général celles qui méritaient la préférence*. Si quelquefois à cet égard nous nous sommes trouvés différer de sentiment avec l'éditeur, nous n'oserions assurer que nous ayons toujours raison; et ceux qui se trouveraient de notre avis auraient toujours la ressource de consulter la table des variantes; ainsi l'inconvénient, s'il en existe, est extrêmement léger. Nous dirons *que l'ouvrage remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées*, et que l'édition est évidemment supérieure à toutes celles que nous connaissons.

Fait à Paris, le 21 février 1814.

Signé PRONY et DELAMBRE; *rapporteur*.

Certifié conforme à l'original.

Le Secrétaire perpétuel, Chevalier de l'Empire,

Signé DELAMBRE.

(1) Cette liste est imprimée à la fin du volume.

INSTITUT DE FRANCE.

CLASSE D'HISTOIRE ET DE LITTÉRATURE ANCIENNE.

Paris, le 26 Février 1814.

Le Secrétaire perpétuel de la Classe, à Son Excellence le Ministre de l'intérieur.

MONSIEUR LE COMTE,

Les Éléments d'Euclide ne renfermant que des définitions et des propositions de géométrie, sont essentiellement du ressort de la Classe des Sciences physiques et mathématiques, et sont entièrement étrangers, pour le fonds, au genre des travaux de celle d'histoire et de littérature ancienne. Cette Classe cependant, pour répondre, autant qu'il est en elle, au témoignage de confiance que Votre Excellence a jugé à propos de lui donner en la consultant sur le mérite du travail de M. Peyrard, s'est empressée de l'examiner sous le petit nombre de rapports qui la concernent et sur lesquels elle peut avoir une opinion motivée. Le compte que M. Delambre rendit il y a quelques années à la première Classe de la traduction française d'Euclide, et celui qu'il vient de lui rendre de l'édition du texte et des traductions latine et française dont il est accompagné, ainsi que de l'ensemble du travail de M. Peyrard, présentent les détails les plus intéressants qui supposent un examen très-approfondi de ce travail sous le rapport littéraire et sous celui de la science, et font connaître suffisamment ce qu'on doit en penser.

La classe d'histoire a donc cru devoir se borner à soumettre à Votre Excellence quelques observations générales sur la partie littéraire de l'ouvrage, et sur la manière dont il est exécuté.

Le texte d'Euclide lui a paru plus correct dans la nouvelle édition que dans les éditions antérieures; cependant elle pense que celle qui fut publiée à Bâle en 1533, par Simon Grynœus, malgré quelques fautes d'impression, moins nombreuses qu'on ne le croit communément, et faciles à corriger, sera toujours précieuse aux amateurs de la langue grecque.

LA partie typographique est en général soignée dans l'édition de M. Peyrard : il s'y est néanmoins glissé quelques fautes d'impressiou, surtout vers la fin du volume.

En comparant le texte grec de cette édition avec celui des éditions précédentes, on y remarque quelques différences. Les plus essentielles ont été relevées et appréciées dans le rapport fait à la première Classe, qui constate encore que l'éditeur a rempli heureusement plusieurs lacunes avec le secours des manuscrits......

Les deux traductions jointes au texte sont très-littérales; peut-être même la traduction française l'est-elle trop. Cette manière de traduire mot à mot peut être bonne pour une version latine, dans laquelle on cherche plutôt l'exactitude et la fidélité que l'élégance, et dont quelques personnes peuvent avoir besoin pour entendre le texte; mais il semble que la traduction française aurait dû être faite avec un peu plus de liberté (1).

J'ai l'honneur de faire repasser à Votre Excellence l'ouvrage de M. Peyrard qu'elle m'avait envoyé, et de lui renouveler l'hommage de mes sentiments les plus respectueux.

Signé DACIER.

Certifié conforme à l'original,

Signé BARBIER DE NEUVILLE, *chef de la* 3me *divion du Ministère de l'intérieur.*

(1) Voyez le rapport de M. Delambre, page 36, alinéa trois.

INSTITUT DE FRANCE.

Paris, 14 août 1809.

Rapport de MM. Lagrange, Legendre *et* Delambre, *sur une traduction complète des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide, par M.* Peyrard.

La Classe a déjà donné son approbation à une traduction d'Euclide, par M. Peyrard. A l'exemple de presque tous les éditeurs qui l'ont précédé, il avait omis les livres qui traitent des Quantités numériques, les trois derniers livres, et le livre des Données; mais il avait annoncé dès-lors une traduction complète. Le désir de lui donner toute la perfection possible lui a fait consulter tous les manuscrits de la bibliothèque royale. . . . .

Dépositaire de ces précieux manuscrits, M. Peyrard les a comparés soigneusement avec l'édition grecque d'Oxford; il a noté en marge de l'imprimé toutes les variantes, les a traduites en latin; et c'est sur ce texte rectifié qu'il a composé sa version, qui est aussi littérale que l'a permis le génie des deux langues.

Il a fait principalement usage du n° 190, qu'il nous a remis pour que nous pussions examiner son travail, et vérifier toutes les variantes dont il a enrichi les marges de son exemplaire de l'édition d'Oxford. Nous avons fait cette vérification, et nous avons reconnu partout la plus grande conformité avec le manuscrit.

Ces variantes, comme on peut s'y attendre, ne sont pas toutes de la même importance, et ne méritent pas toujours la préférence sur les leçons imprimées. Parmi ces variantes, il en est qui consistent en quelques mots omis dans les imprimés, dont les traducteurs avaient senti la nécessité, et que Grégori a fait entrer dans son texte, en les enfermant entre deux crochets; quelquefois c'est un présent au lieu d'un futur; ἔσται au lieu de ἐστὶν, ou réciproquement; le mot ἴσος au lieu de ὁ αὐτὸς, *égal*, pour *le même;* des expressions plus ou moins conformes au style ordinaire des géomètres, ou d'Euclide en particulier. Toutes ces variantes n'auraient de valeur qu'aux yeux des philologues et des érudits; mais il en est de vraiment dignes de l'attention des géomètres, en ce qu'elles changent en mieux le sens, ou qu'elles donnent un sens raisonnable à ce qui n'en présentait aucun. Ce sont des superfluités élaguées, des lignes entières omises dans les imprimés, et qui sont ou absolument nécessaires à la démonstration, ou y portent au moins des développements utiles. D'autres fois on y rencontre des leçons plus concises, et qui présentent un sens tout aussi clair; des transpositions qui rendent parfaitement intelligible ce qui paraissait obscur ou peu exact. La définition 5ᵉ du VIᵉ livre, qui se trouve dans toutes les éditions grecques, est une simple note placée au bas du manuscrit, d'où elle avait été mal à propos portée dans le texte : Robert Simson a écrit six pages contre cette mauvaise et inutile définition, et elle n'est pas d'Euclide.

Le même traducteur relève une bévue remarquable de tous les textes grecs imprimés; un changement de lettre dans la figure avait causé tout l'embarras. En rétablissant la lettre véritable φ au lieu de ω, on ne donne plus à Euclide le ridicule de paraître ignorer une vérité de la géométrie la plus élémentaire. Voyez *Prop.* 17, *liv.* XII.

La proposition 86 des *Données* avait fort inquiété Grégori qui, dans sa préface, en propose deux rédactions identiques, et à laquelle il voulait en ajouter une troisième, qui compléterait le système de la résolution des équations bi-quadratiques à la manière des anciens. Cette dernière conjecture n'est pas confirmée par le manuscrit, qui n'offre que l'une des deux premières rédactions. Grégori croyait le théorème singulièrement altéré; son erreur venait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve dans le manuscrit à la fin des *Données*, et qui doit précéder la proposition 86.

M. Peyrard donne ce lemme qui, au reste, est une proposition bien simple et bien connue. Il s'agit de trouver la surface d'un parallélogramme obtus-angle; mais cette proposition renferme une construction nécessaire à la démonstration des propositions 86 et 87, qui disent que si deux lignes formant un angle donné comprènent un espace donné, et que le carré de l'une, augmenté ou diminué d'un espace donné, soit au carré de la seconde, en raison donnée, ces deux lignes seront connues.

D'après toutes ces considérations, nous pensons que la classe peut donner son approbation au travail de M. Peyrard, pour l'encourager encore à terminer l'entreprise qu'il poursuit avec une persévérance digne d'éloges, et qui nous fera mieux connaître tous les mathématiciens grecs. Nous exprimerions le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils ont fournies; mais cette édition serait dispendieuse et demanderait beaucoup de temps : nous nous bornerons donc à souhaiter que M. Peyrard ajoute à sa traduction la liste de toutes les variantes qu'il a recueillies, et qui lui paraîtront mériter quelque attention. Ainsi les géomètres pourront corriger les éditions anciennes, en attendant celle qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Signé à la minute, LAGRANGE, LEGENDRE, DELAMBRE, *rapporteur.*

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. ΣΗΜΕΙΟΝ ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β΄. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε΄. Επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ς΄. Επιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

DEFINITIONES.

1. Punctum est, cujus pars nulla.
2. Linea autem, longitudo non lata.
3. Lineæ vero extrema, sunt puncta.
4. Recta linea est, quæ ex æquo ipsis in eâ punctis ponitur.
5. Superficies autem est, quod longitudinem et latitudinem solum habet.
6. Superficiei vero extrema, sunt lineæ.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce qui n'a pas de parties.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée aux points qui sont en elle.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν εἰρημένην[1] γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι[2]· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν[3] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo ipsis in eâ rectis ponitur.

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando vero continentes dictum angulum lineæ rectæ sunt, rectilineus appellatur angulus.

10. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistens recta perpendicularis vocatur in quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major recto.

12. Acutus autem, qui minor recto.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab unâ lineâ contenta, quæ vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum intra figuram positorum, omnes cadentes rectæ ad circuli circumferentiam æquales inter se sunt.

7. La surface plane est celle qui est également placée aux droites qui sont en elle.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprènent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

ιϛʹ. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζʹ. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιηʹ. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε τῆς[4] διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς[5] τοῦ κύκλου περιφερείας.

ιθʹ. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα[6] ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου[7].

κʹ. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι[8], τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

καʹ. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβʹ. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγʹ. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδʹ. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς[9] τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

16. Centrum autem circuli, hoc puuctum vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utrâque parte a circuli circumferentiâ; quæ et bifariam secat circulum.

18. Semicirculus vero est contenta figura ab et diametro, et circumferentiâ circuli aprehensâ ab diametro.

19. Segmentum circuli est, contenta figura ab et rectâ, et circuli circumferentiâ, vel majore vel minore semicirculo existente.

20. Figuræ rectilineæ sunt, quæ ab rectis continentur.

21. Trilateræ quidem, quæ ab tribus.

22. Quadrilateræ autem, quæ ab quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ ab pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum quidem triangulum est quod tria æqualia habet latera.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

κέ. Ισοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κϛ'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους [10] ἔχον πλευράς.

κζ'. Ετι τε [11], τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κή. Αμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ'. Οξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς [12] τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

λά. Ετερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λϐ'. Ρόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ρομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

25. Isosceles vero, quod duo solum æqualia habet latera.

26. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

27. Insuper, trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectum angulum.

28. Obtusangulum autem, quod habet obtusum angulum.

29. Acutangulum vero, quod tres acutos habet angulos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod et æquilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero æquilaterum.

32. Rhombus vero, quod æquilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboïdes autem, quod et opposita latera et angulos æqualia inter se habet, quod neque æquilaterum est, nec rectangulum.

34. Præter hæc autem quadrilatera trapezia vocentur.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

λέ. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς[13] ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

ά. Ηιτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

6'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς[1] ἐκβάλλειν.

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

έ. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις[2] ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι[3].

ς'. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ[4] περιέχειν.

35. Parallelæ sunt rectæ, quæ in eodem plano existentes, et productæ in infinitum ad utramque partem, in neutram sibi coincidunt.

POSTULATA.

1. Postuletur, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.
2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.
3. Et omni centro et intervallo circulum describere.
4. Et omnes angulos rectos æquales inter se esse.
5. Et si in duas rectas recta quædam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.
6. Et duas rectas spatium non continere.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

NOTIONES COMMUNES.

1. Quæ eidem æqualia, et inter se sunt æqualia.
2. Et si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
4. Et si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.
5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
6. Et quæ ejusdem duplicia, æqualia inter se sunt.
7. Et quæ ejusdem dimidia, æqualia inter se sunt.
8. Et quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt.
9. Et totum parte majus est.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΕΚΘΕΣΙΣ [1]. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα [2] πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ [3]. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας πεπερασμένης [4] τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ [5]. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

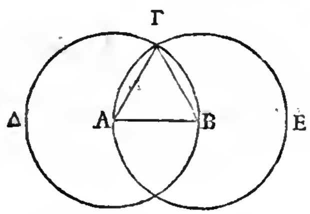
PROPOSITIO I.

Super datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum constituere.

Expositio. Sit data recta terminata AB.

Determinatio. Oportet igitur super AB rectam terminatam triangulum æquilaterum constituere.

Constructio. Centro quidem A, intervallo autem AB, circulus describatur BΓΔ; et rursus, centro quidem B, intervallo autem BA, circulus describatur AΓE; et ab Γ puncto, in quo sese secant circuli, ad A, B puncta adjungantur rectæ ΓA, ΓB.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ [6]. Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

Demonstratio. Et quoniam A punctum centrum est BΓΔ circuli, æqualis est AΓ ipsi AB; rursus, quoniam B punctum centrum est AΓE circuli, æqualis est BΓ ipsi BA. Ostensa

PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.

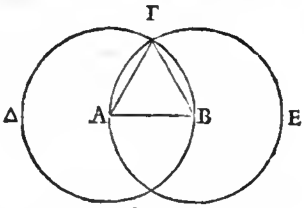
Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).

Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le

ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν[7] ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

est autem et ΓΑ ipsi ΑΒ æqualis; utraque igitur ipsarum ΓΑ, ΓΒ ipsi ΑΒ æqualis est. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΓΑ igitur ipsi ΓΒ est æqualis; tres igitur ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ æquales inter se sunt.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ[8]. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται[9] ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Conclusio. Æquilaterum igitur est ΑΒΓ triangulum, et constitutum est super datam rectam terminatam ΑΒ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ[1] ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

Sit quidem datum punctum Α, data autem recta ΒΓ; oportet igitur ad Α punctum, datæ rectæ ΒΓ æqualem rectam ponere.

Adjungatur enim ab Α puncto ad Β punctum recta ΑΒ, et constituatur super eam triangulum

centre du cercle ΑΓΕ, la droite ΒΓ est égale à la droite ΒΑ; mais on a démontré que la droite ΓΑ était égale a la droite ΑΒ; donc chacune des droites ΓΑ, ΓΒ est égale à la droite ΑΒ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΒ; donc les trois droites ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sont égales entre elles.

Conclusion. Donc le triangle ΑΒΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

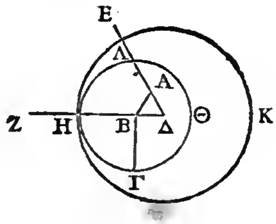
PROPOSITION II.

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point Α placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.

Menons du point Α au point Β la droite ΑΒ (dem. 1); sur cette droite construisons τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ [2] ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι [3] τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

æquilaterum ΔAB, et producantur in directum ipsis ΔA, ΔB rectæ AE, BZ, et centro quidem B, intervallo vero BΓ, circulus describatur ΓHΘ; et rursus centro Δ, et intervallo ΔH circulus describatur HKΛ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν[4], ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur B punctum centrum est ΓHΘ circuli, æqualis est BΓ ipsi BH. Rursus, quoniam Δ punctum centrum est HKΛ circuli, æqualis est ΔΛ ipsi ΔH, quarum ΔA ipsi ΔB æqualis est; reliqua igitur AΛ reliquæ BH est æqualis. Ostensa est autem et BΓ ipsi BH æqualis; utraque igitur ipsarum AΛ, BΓ ipsi BH est æqualis. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et AΛ igitur ipsi BΓ est æqualis.

Ad datum igitur punctum A, datæ rectæ BΓ æqualis recta ponitur AΛ. Quod oportebat facere.

le triangle équilatéral ΔAB (prop. 1); menons les droites AE, BZ dans la direction de ΔA, ΔB; du centre B et de l'intervalle BΓ, décrivons le cercle ΓHΘ (dem. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔH, décrivons le cercle HKΛ.

Puisque le point B est le centre du cercle ΓHΘ, BΓ est égal à BH (déf. 15); de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle HKΛ, la droite ΔΛ est égale à la droite ΔH; mais ΔA est égal à ΔB; donc le reste AΛ est égal au reste BH (not. 3). Mais on a démontré que BΓ est égal à BH; donc chacune des droites AΛ, BΓ est égale à BH. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc AΛ est égal à BΓ.

Donc, au point donné A, on a placé une droite AΛ égale à la droite donnée BΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

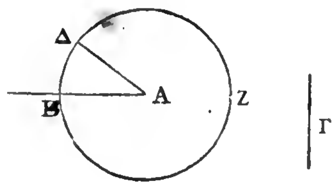
Κείσθω γὰρ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

PROPOSITIO III.

Duobus datis rectis inæqualibus, a majore minori æqualem rectam auferre.

Sint datæ duæ rectæ inæquales AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur a majore AB minori Γ æqualem rectam auferre.

Ponatur enim ad A punctum ipsi Γ rectæ æqualis AΔ; et centro quidem A, intervallo vero AΔ circulus describatur ΔEZ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. Εκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ 'στὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam A punctum centrum est ΔEZ circuli, æqualis est AE ipsi AΔ; sed et Γ ipsi AΔ est æqualis; utraque igitur ipsarum AE, Γ ipsi AΔ est æqualis; quare et AE ipsi Γ est æqualis.

Duabus igitur datis rectis inæqualibus AB, Γ, a majore AB minori Γ æqualis ablata est AE. Quod oportebat facere.

PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données, que AB soit la plus grande; il faut de la plus grande AB retrancher une droite égale à la plus petite Γ.

Au point A plaçons une droite AΔ égale à Γ (prop. 2), et du centre A et de l'intervalle AΔ, décrivons le cercle ΔEZ (dem. 3).

Puisque le point A est le centre du cercle ΔEZ, AE est égal à AΔ; mais Γ est égal à AΔ; donc chacune des droites AE, Γ, est égale à la droite AΔ; donc la droite AE est égale à la droite Γ.

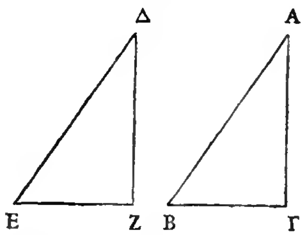
Donc les deux droites inégales AB, Γ, étant données, on a retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite Γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO IV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant, ab æqualibus rectis contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt.



Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καί βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται,

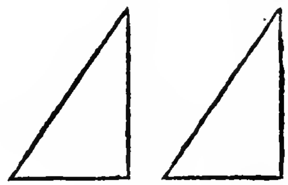
Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ æqualem esse, et ΑΒΓ triangulum ΔΕΖ triangulo æquale fore, et reliquos angulos reliquis angulis æquales fore utrumque utrique, quos æqualia

PROPOSITION IV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ; que ces deux triangles aient les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ au côté ΔΖ, et qu'ils aient aussi l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ, que le triangle ΑΒΓ sera égal au triangle ΔΕΖ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

latera subtendunt, ABΓ quidem ipsi ΔEZ, AΓB vero ipsi ΔZE.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον[2] ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ το ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. Αλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν[3] ἀδύνατον. Εφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις

Congruente enim ABΓ triangulo ΔEZ triangulo, et posito quidem A puncto super Δ punctum, AB vero rectâ super ΔE; congruet et B punctum ipsi E, quia est æqualis AB ipsi ΔE; congruente autem AB ipsi ΔE, congruet et AΓ recta ipsi ΔZ, quia æqualis est BAΓ angulus ipsi EΔZ; quare et Γ punctum Z puncto congruet, quia æqualis rursus est AΓ ipsi ΔZ. Sed quidem et B ipsi E congruebat; quare basis BΓ basi EZ congruet; si enim quidem B ipsi E congruente, Γ vero ipsi Z, BΓ basis ipsi EZ non congruat, duæ rectæ spatium continebunt, quod est impossibile. Congruet igitur BΓ basis ipsi EZ, et æqualis ei erit; quare et totum ABΓ triangulum toti ΔEZ

seront égaux chacun à chacun; l'angle ABΓ égal à l'angle ΔEZ, et l'angle ABΓ égal à l'angle ΔZE.

Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔEZ, le point A étant posé sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à ΔE; mais AB étant appliqué sur ΔE, la droite AΓ s'appliquera sur ΔZ, parce que l'angle BAΓ est égal à l'angle EΔZ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Z, parce que AΓ est égal à ΔZ; mais le point B s'applique sur le point E; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ; car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point Γ sur le point Z, la base BΓ ne s'appliquait pas sur la base EZ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6); donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ, et lui sera ἐπὶ τὴν EZ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

triangulo congruet, et æquale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et æquales eis erunt, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ vero ipsi ΔΖΕ.

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant ab æqualibus lateribus contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt; et productis æqualibus rectis, sub basim anguli æquales inter se erunt.

égale; donc le triangle entier ΑΒΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔΕΖ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ΑΒΓ à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ à l'angle ΔΖΕ.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

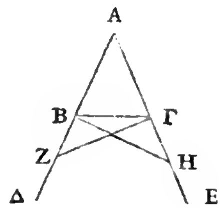
Dans les triangles isoscèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux.

Εστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκϐεϐλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Sit triangulum isosceles ΑΒΓ, æquale habens ΑΒ latus ΑΓ lateri, et producantur in directum ipsis ΑΒ, ΑΓ rectæ ΒΔ, ΓΕ; dico quidem ΑΒΓ angulum ipsi ΑΓΒ æqualem esse, ΓΒΔ vero ipsi ΒΓΕ.

Sumatur enim in ΒΔ quodlibet punctum Ζ, et auferatur à majore ΑΕ minori ΑΖ æqualis ipsa ΑΗ, et jungantur ΖΓ, ΗΒ rectæ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

Quoniam igitur est quidem ΑΖ ipsi ΑΗ, ΑΒ vero ipsi ΑΓ, duæ igitur ΖΑ, ΑΓ duabus ΗΑ, ΑΒ æquales sunt, utraque utrique, et angulum communem continent ΖΑΗ; basis igitur ΖΓ basi ΗΒ æqualis est, et ΑΖΓ triangulum ΑΗΒ triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt, ΑΓΖ quidem

Soit le triangle isoscèle ΑΒΓ, ayant le côté ΑΒ égal au côté ΑΓ; menons les droites ΒΔ, ΓΕ, dans la direction de ΑΒ, ΑΓ (dem. 2); je dis que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΑΓΒ, et que l'angle ΓΒΔ est aussi égal à l'angle ΒΓΕ.

Car prenons dans ΒΔ un point quelconque Ζ, et de la droite ΑΕ, plus grande que ΑΖ, retranchons une droite ΑΗ égale à la plus petite ΑΖ, et joignons les droites ΖΓ, ΗΒ.

Puisque ΑΖ est égal à ΑΗ, et ΑΒ à ΑΓ, les deux droites ΖΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΗΑ, ΑΒ, chacune à chacune; mais elles comprennent un angle commun ΖΑΗ; donc (4) la base ΖΓ est égale à la base ΗΒ, le triangle ΑΖΓ sera égal au triangle ΑΗΒ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront τείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Επεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν· τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsi ΑΒΗ, ΑΖΓ vero ipsi ΑΗΒ. Et quoniam tota ΑΖ toti ΑΗ est æqualis, quarum ΑΒ ipsi ΑΓ est æqualis, reliqua igitur ΒΖ reliquæ ΓΗ est æqualis. Ostensa est autem et ΖΓ ipsi ΗΒ æqualis; duæ igitur ΒΖ, ΖΓ duabus ΓΗ, ΗΒ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΒΖΓ angulo ΓΗΒ æqualis, et basis eorum communis ΒΓ; et ΒΖΓ igitur triangulum ΓΗΒ triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est quidem ΖΒΓ ipsi ΗΓΒ, ΒΓΖ vero ipsi ΓΒΗ. Quoniam igitur totus ΑΒΗ angulus toti ΑΓΖ angulo ostensus est æqualis, quorum ΓΒΗ ipsi ΒΓΖ æqualis; reliquus igitur ΑΒΓ reliquo ΑΓΒ est æqualis, et est ad basim ΑΒΓ trianguli; ostensus est autem et ΖΒΓ ipsi ΗΓΒ æqualis, et sunt sub basim; isoscelium igitur triangulorum, etc.

égaux chacun à chacun; l'angle ΑΓΖ à l'angle ΑΒΗ, et l'angle ΑΖΓ à l'angle ΑΗΒ. Et puisque la droite entière ΑΖ est égale à la droite entière ΑΗ, et que ΑΒ est égal à ΑΓ, la restante ΒΖ sera égale à la restante ΓΗ (not. 3). Mais on a démontré que ΖΓ est égal à ΗΒ; donc les deux droites ΒΖ, ΖΓ sont égales aux droites ΓΗ, ΗΒ, chacune à chacune; mais l'angle ΒΖΓ est égal à l'angle ΓΗΒ, et la droite ΒΓ est leur base commune; donc le triangle ΒΖΓ sera égal au triangle ΓΗΒ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; donc l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle ΗΓΒ, et l'angle ΒΓΖ égal à l'angle ΓΒΗ. Mais on a démontré que l'angle entier ΑΒΗ est égal à l'angle entier ΑΓΖ, et l'angle ΓΒΗ est égal à l'angle ΒΓΖ; donc l'angle restant ΑΒΓ est égal à l'angle restant ΑΓΒ (not. 3), et ces angles sont sur la base; mais on a démontré aussi que l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle ΗΓΒ, et ces angles sont sous la base; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Εὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ [1] ἐστὶν ἴση.

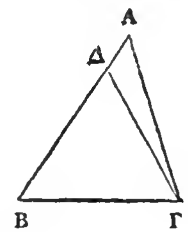
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, μία [2] αὐτῶν μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ ΑΒ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales inter se sunt, et æquales angulos subtendentia latera æqualia inter se erunt.

Sit triangulum ΑΒΓ æqualem habens ΑΒΓ angulum ΑΓΒ angulo; dico et latus ΑΒ lateri ΑΓ esse æquale.

Si enim inæquale est ΑΒ ipsi ΑΓ, unum eorum majus est. Sit majus ΑΒ, et auferatur a majore ΑΒ minori ΑΓ æqualis ΔΒ, et jungatur ΔΓ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπο ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ [1]

Quoniam igitur æqualis est ΔΒ ipsi ΑΓ, communis autem ΒΓ, duæ igitur ΔΒ, ΒΓ duabus ΑΓ, ΓΒ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΔΒΓ angulo ΑΓΒ est æqualis; basis igitur ΔΓ basi ΑΒ æqualis est, et ΔΒΓ trian-

PROPOSITION VI.

Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΑΓΒ; je dis que le côté ΑΒ est égal au côté ΑΓ.

Car si le côté ΑΒ n'est pas égal au côté ΑΓ, l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit ΑΒ le plus grand; retranchons du plus grand côté ΑΒ la droite ΔΒ égale au plus petit ΑΓ (3), et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΒ est égal à ΑΓ, et que ΒΓ est commun, les deux côtés ΔΒ, ΒΓ sont égaux aux deux côtés ΑΓ, ΓΒ, chacun à chacun; mais l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΑΓΒ; donc la base ΔΓ est égale à la base ΑΒ, et le triangle ΔΒΓ sera égal τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι[2], ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ AΓ· ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

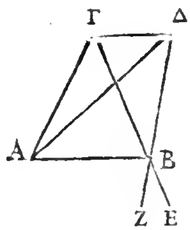
gulum AΓB triangulo æquale erit, minus minori, quod est absurdum; non igitur inæqualis est AB ipsi AΓ; ergo æqualis. Si igitur trianguli, etc.

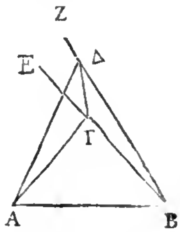
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

PROPOSITIO VII.

Super eâdem rectâ, duabus eisdem rectis aliæ duæ rectæ æquales utraque utrique non constituentur, ad aliud et aliud punctum ad easdem partes, eosdem terminos habentes quos primæ rectæ.





Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς AΓ, ΓB ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ[1] AΔ, ΔB ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ A, B[2]· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓA τῇ ΔA, τὸ αὐτὸ πέρας

Si enim possibile, super eâdem rectâ AB duabus eisdem rectis AΓ, ΓB, aliæ duæ rectæ AΔ, ΔB æquales utraque utrique constituantur ad aliud et aliud punctum Γ et Δ, ad easdem partes, Γ, Δ, et eosdem terminos habentes A, B; ita ut æqualis sit quidem ΓA ipsi ΔA, eumdem terminum habens quem illa, punctum A,

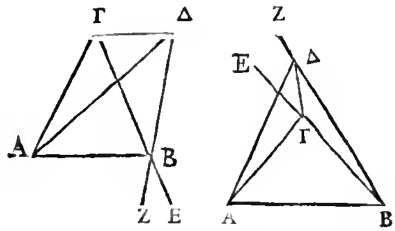
au triangle AΓB, le plus petit au plus grand, ce qui est absurde; donc les droites AB, AΓ ne sont pas inégales; donc AB est égal à AΓ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Sur une même droite, et à deux points différents placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

Car, si cela est possible, sur une même droite A, B, et à deux points différents Γ et Δ, placés du même côté, construisons les deux droites AΔ, ΔB égales à deux autres droites AΓ, ΓB, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités A, B; de manière que la droite ΓA soit égale à la droite ΔA, et ait la même extrémité A que ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· (καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκϐεϐλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ Ε, Ζ[3].)

ΓΒ vero ipsi ΔΒ, eumdem terminum habens quem illa, punctum Β; et jungatur ΓΔ; (et ipsæ ΒΓ, ΒΔ producantur in directum ad Ε, Ζ.)



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΕ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΖ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΕ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ; major igitur ΑΔΓ ipso ΔΓΕ; multo igitur ΓΔΖ major est ipso ΔΓΕ. Rursus quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΔΒ, æqualis est et angulus ΓΔΖ angulo ΔΓΕ. Ostensus est autem ipso et multo major, quod est impossibile. Non igitur super, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basim basi æqualem; et angulum angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis contentum.

celle-ci, et que la droite ΓΒ soit égale à la droite ΔΒ, et ait la même extrémité Β que celle-ci; joignons ΓΔ, (et prolongeons ΒΓ, ΒΔ vers les points Ε, Ζ.)

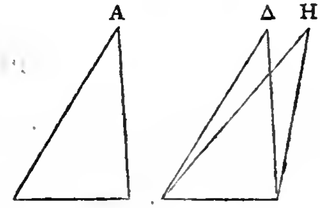
Puisque ΑΓ est égal à ΑΔ, l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΑΔΓ (5); donc l'angle ΑΔΓ est plus grand que l'angle ΔΓΕ; donc l'angle ΓΔΖ est beaucoup plus grand que l'angle ΔΓΕ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΔΒ, l'angle ΓΔΖ est égal à l'angle ΔΓΕ; mais on a démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ; habeat autem et basim ΒΓ basi ΕΖ æqualem; dico et angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ esse æqualem.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς

Congruente enim ΑΒΓ triangulo ipsi ΔΕΖ triangulo, et posito quidem Β puncto super Ε punctum, ΒΓ vero rectâ super ΕΖ, congruet et Γ punctum ipsi Ζ, quia æqualis est ΒΓ ipsi ΕΖ; congruente igitur ΒΓ ipsi ΕΖ, congruent et ΒΑ, ΓΑ ipsis ΕΔ, ΔΖ. Si enim basis quidem ΒΓ basi ΕΖ congruat, ΒΑ, ΑΓ vero latera ipsis ΕΔ, ΔΖ non congruant, sed situm mutent ut ΕΗ, ΗΖ, constituentur super eâdem rectâ duabus rectis aliæ duæ rectæ æquales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non constituuntur

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; qu'ils aient de plus la base ΒΓ égale à la base ΕΖ; je dis que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΖ.

Car le triangle ΑΒΓ étant appliqué sur le triangle ΔΕΖ, le point Β étant placé sur le point Ε, et la droite ΒΓ sur la droite ΕΖ, le point Γ s'appliquera sur le point Ζ, parce que ΒΓ est égal à ΕΖ; la droite ΒΓ s'appliquant sur la droite ΕΖ, les droites ΒΑ, ΓΑ s'appliqueront sur les droites ΕΔ, ΔΖ; car si la base ΒΓ s'appliquant sur la base ΕΖ, les côtés ΒΑ, ΑΓ ne s'appliquaient pas sur les côtés ΔΕ, ΔΖ, et prenaient une autre position, comme ΕΗ, ΗΖ, on pourrait construire sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, deux droites ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ[2] ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

quidem. Non igitur, congruente BΓ basi EZ basi, non congruent et BA, AΓ latera ipsis EΔ, ΔZ. Congruent igitur; quare et angulus BAΓ angulo EΔZ congruet, et æqualis ei erit. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

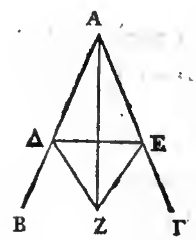
Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Εστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAΓ; oportet igitur ipsum bifariam secare.



Εἰλήφθω γάρ[1] ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω

Sumatur enim in AB quodlibet punctum Δ, et auferatur ab AΓ ipsi AΔ æqualis AE, et jungatur ΔE, et constituatur super ΔE triangulo æquilatero ΔEZ, et jungatur AZ;

égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres; mais elles ne peuvent pas être construites (7); donc la base BΓ s'appliquant sur la base EZ, les côtés BA, AΓ ne peuvent pas ne point s'appliquer sur les côtés EΔ, ΔZ; donc ils s'appliqueront les uns sur les autres; donc l'angle BAΓ s'applique sur l'angle EΔZ; donc il lui est égal. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit BAΓ un angle rectiligne donné; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite AB un point quelconque Δ, retranchons de la droite AΓ une droite AE égale à la droite AΔ, joignons ΔE, sur la droite ΔE, construisons ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν [a].

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

dico ΒΑΓ angulum bifariam secari ab ΑΖ rectâ.

Quoniam enim æqualis est ΑΔ ipsi ΑΕ, communis autem ΑΖ, duæ ΔΑ, ΑΖ duabus ΕΑ, ΑΖ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΕΖ æqualis est; angulus igitur ΔΑΖ angulo ΕΑΖ æqualis est.

Datus igitur angulus rectilineus ΒΑΓ bifariam secatur ab ΑΖ rectâ. Quod obortebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

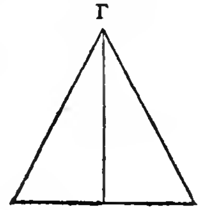
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata ΑΒ; oportet igitur ΑΒ rectam terminatam bifariam secare.



Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα

Constituatur super ipsâ triangulum æquilaterum ΑΒΓ, et secetur ΑΓΒ angulus bifariam

le triangle équilatéral ΔΕΖ (1), et joignons ΑΖ; je dis que l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ.

Puisque ΑΔ est égal à ΑΕ, et que la droite ΑΖ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΖ seront égales aux deux droites ΕΑ, ΑΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΕΖ; donc l'angle ΔΑΖ est égal à l'angle ΕΑΖ (8).

Donc l'angle rectiligne donné ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ; ce qu'il fallait faire.

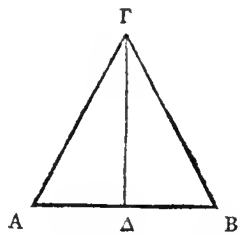
PROPOSITION X.

Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit donnée une droite finie ΑΒ; il faut partager la droite finie ΑΒ en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ΑΒΓ (1), et partageons τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ AB εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

ab ΓΔ rectâ; dico AB rectam bifariam secari in Δ puncto.



Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ AΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς BΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BΓΔ ἴση ἐστί [2]· βάσις ἄρα ἡ AΔ βάσει τῇ BΔ ἴση ἐστίν [3].

Η ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est AΓ ipsi ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ AΓ, ΓΔ duabus BΓ, ΓΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus AΓΔ angulo BΓΔ æqualis est; basis igitur AΔ basi BΔ æqualis est.

Ergo data recta terminata AB bifariam secatur in puncto Δ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XI.

Datæ rectæ, a puncto in eâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta AB, datum vero punctum in eâ Γ; oportet igitur a Γ puncto ipsi AB rectæ ad rectos angulos rectam lineam ducere.

l'angle AΓB en deux parties égales par la droite ΓΔ (9); je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point Δ.

Car puisque la droite AΓ est égale à la droite ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites AΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites BΓ, ΓΔ, chacune à chacune; mais l'angle AΓΔ est égal à l'angle BΓΔ; donc la base AΔ et égale à la base BΔ (4).

Donc la droite donnée et finie AB est partagée en deux parties égales au point Δ; ce qu'il fallait faire.

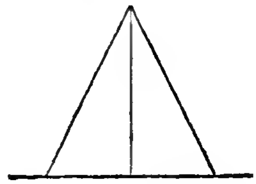
PROPOSITION XI.

A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Soit AB une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite; il faut du point Γ mener à la droite AB une ligne droite à angles droits.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Sumatur in ΑΓ quodlibet punctum Δ, et ponatur ipsi ΓΔ æqualis ΓΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatero ΖΔΕ, et jungatur ΖΓ; dico datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos rectam lineam ductam esse ΖΓ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν[1]· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται[2] ἡ ΖΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est ΓΔ ipsi ΓΕ, communis vero ΓΖ, duæ sane ΔΓ, ΓΖ duabus ΕΓ, ΓΖ æquales sunt utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΖΕ æqualis est; angulus igitur ΔΓΖ angulo ΕΓΖ æqualis est, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Ergo datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos recta linea ducta est ΓΖ. Quod oportebat facere.

Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (3), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ; je dis que la droite ΓΖ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10); donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit.

Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

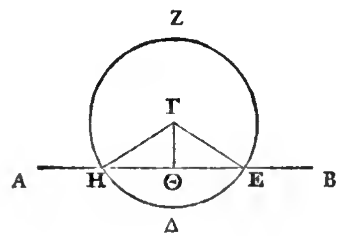
Επὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XII.

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta infinita AB, datum vero punctum Γ, quod non est in eâ; oportet igitur super datam rectam infinitam AB, a dato puncto Γ, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα[1] δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι[2]· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Sumatur enim ad alteram partem AB rectæ quodlibet punctum Δ, et centro quidem Γ, intervallo autem ΓΔ, circulus describatur EZH, et secetur EH recta bifariàm in Θ, et jungantur ΓH, ΓΘ, ΓE rectæ; dico super datam rectam infinitam AB, a dato puncto Γ, quod non est in eâ, perpendicularem ductam esse ΓΘ.

PROPOSITION XII.

A une droite indéfinie et donnée, et d'un point donné qui n'est pas dans cette droite, mener une ligne droite perpendiculaire.

Soit AB une droite indéfinie et donnée, et Γ un point donné qui n'est pas dans cette droite; il faut à cette droite indéfinie et donnée AB, mener du point donné Γ qui n'est pas daus cette droite, une ligne droite perpendiculaire.

Prenons de l'autre côté de la droite AB un point quelconque Δ, et du centre Γ et d'un intervalle ΓΔ, décrivons le cercle EZH (dem. 3), partageons la droite EH en deux parties égales au point Θ (10), et joignons ΓH, ΓΘ, ΓE; je dis qu'à la droite indéfinie et donnée AB, et du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, on a mené une perpendiculaire ΓΘ.

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΘΗ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν[3]· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Quoniam enim æqualis est ΗΘ ipsi ΘΕ, communis autem ΘΓ, duæ utique ΘΗ, ΘΓ duabus ΕΘ, ΘΓ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΓΗ basi ΓΕ est æqualis; angulus igitur ΓΘΗ angulo ΕΘΓ est æqualis, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistens recta perpendicularis appellatur in quam insistit.

Επι τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Super datam igitur rectam infinitam ΑΒ a dato puncto Γ quod non est in eâ, perpendicularis ducta est ΓΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὰν[1] εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἤτοι[2] δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

PROPOSITIO XIII.

Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet.

Recta enim quædam ΑΒ in rectam ΓΔ insistens angulos faciat ΓΒΑ, ΑΒΔ; dico ΓΒΑ, ΑΒΔ angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales.

Car puisque la droite ΗΘ est égale à la droite ΘΕ, et que la droite ΘΓ est commune, les deux droites ΘΓ, ΘΗ sont égales aux deux droites ΕΘ, ΘΓ, chacune à chacune; mais la base ΓΗ est égale à la base ΓΕ (déf. 15); donc l'angle ΓΘΗ est égal à l'angle ΕΘΓ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

On a donc mené ΓΘ perpendiculaire à la droite indéfinie ΑΒ, du point donné Γ placé hors de cette droite. Ce qu'il fallait faire.

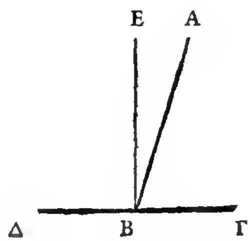
PROPOSITION XIII.

Si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Qu'une droite ΑΒ placée sur une droite ΓΔ fasse les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ; je dis que les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ sont ou deux droits, ou égaux à deux droits.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. Εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ εὐθείᾳ[3] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσί[4]. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ,

Si igitur quidem æqualis est ΓΒΑ ipsi ΑΒΔ, duo recti sunt. Si vero non, ducatur a Β puncto ΓΔ rectæ ad rectos ipsa ΒΕ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt. Et quoniam ΓΒΕ duobus ΓΒΑ, ΑΒΕ æqualis est, communis addatur ΕΒΔ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ æquales sunt. Rursus, quoniam ΔΒΑ duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ æqualis est, communis addatur ΑΒΓ; ergo



κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα[5] ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εὰν[6] ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΔΒΑ, ΑΒΓ tribus ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus eisdem æquales; quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; ergo et ΓΒΕ, ΕΒΔ ipsis ΔΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt; sed ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt; ergo et ΔΒΑ, ΑΒΓ duobus rectis æquales sunt. Si igitur, etc.

Car si l'angle ΓΒΑ est égal à l'angle ΑΒΔ, ces deux angles sont droits (déf. 10). Si non, du point Β conduisons ΒΕ à angles droits à ΓΔ (11); les deux angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront droits; et puisque l'angle ΓΒΕ est égal aux deux angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, si l'on ajoute l'angle commun ΕΒΔ, les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront égaux aux trois angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. De plus, puisque l'angle ΔΒΑ est égal aux deux angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, si l'on ajoute l'angle commun ΑΒΓ, les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ seront égaux aux trois angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Mais on a démontré que les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ leur sont égaux; et les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles; donc les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont égaux aux angles ΔΒΑ, ΑΒΓ; mais les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont deux angles droits; donc les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Εὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶ ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

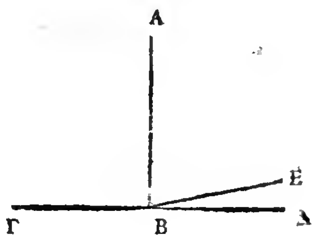
Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

PROPOSITIO XIV.

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in eâ, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciant, in directum erunt sibi ipsis rectæ.

Ad aliquam enim rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Β, duæ rectæ ΒΓ, ΒΔ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos ΑΒΓ, ΑΒΔ duobus rectis æquales faciant; dico in directum esse ipsi ΓΒ ipsam ΒΔ.

Si enim non est ipsi ΒΓ in directum ΒΔ, sit ipsi ΓΒ in directum ΒΕ.



Επεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ

Quoniam igitur recta ΑΒ super rectam ΓΒΕ insistit, ΑΒΓ, ΑΒΕ anguli duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ΑΒΓ, ΑΒΔ duobus

PROPOSITION XIV.

Si à une droite, et à un point de cette droite, deux droites, non placées du même côté font les angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites seront dans la même direction.

Qu'à une droite ΑΒ, et à un point Β de cette droite, les deux droites ΒΓ, ΒΔ, non placées du même côté, fassent les angles de suite ΑΒΓ, ΑΒΔ égaux à deux droits; je dis que ΒΔ est dans la direction de ΓΒ.

Car si ΒΔ n'est point dans la direction de ΒΓ, que ΒΕ soit dans la direction de ΓΒ (dem. 2).

Puisque la droite ΑΒ est placée sur la droite ΓΒΕ, les angles ΑΒΓ, ΑΒΕ sont égaux à deux droits (13); mais les angles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont égaux à deux droits;

δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

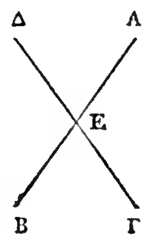
rectis æquales; ergo ΓΒΑ, ΑΒΕ ipsis ΓΒΑ, ΑΒΔ æquales sunt. Communis auferatur ΓΒΑ; reliquus igitur ΑΒΕ reliquo ΑΒΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur in directum est ΒΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque esse aliam quamdam præter ΒΔ; in directum igitur est ΓΒ ipsi ΒΔ. Si igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese secent, ad verticem angulos æquales inter se facient.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ sese secent in Ε puncto; dico æqualem esse quidem ΑΕΓ angulum ipsi ΔΕΒ, ΓΕΒ vero ipsi ΑΕΔ.

donc les angles ΓΒΑ, ΑΒΕ sont égaux aux angles ΓΒΑ, ΑΒΔ. Retranchons l'angle commun ΓΒΑ, l'angle restant ΑΒΕ sera égal à l'angle restant ΑΒΔ, le plus petit au plus grand; ce qui est impossible. ΒΕ n'est donc pas dans la direction de ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre excepté ΒΔ; donc ΓΒ est dans la direction de ΒΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.

Que les droites ΑΒ, ΓΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΔΕΒ, et l'angle ΓΕΒ égal à l'angle ΑΕΔ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. Ομοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς [1].

Quoniam enim recta AE in rectam ΓΔ insistit angulos faciens ΓEA, AEΔ; ipsi ΓEA, AEΔ anguli duobus rectis æquales sunt. Rursus, quoniam recta ΔE in rectam AB insistit, angulos faciens AEΔ, ΔEB; ipsi AEΔ, ΔEB anguli duobus rectis æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓEA, AEΔ duobus rectis æquales; ergo ΓEA, AEΔ ipsis AEΔ, ΔEB æquales sunt. Communis auferatur AEΔ, reliquus igitur ΓEA reliquo BEΔ æqualis est. Similiter autem ostendemus et ΓEB, ΔEA esse æquales. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης [1], ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν [2] μείζων ἐστίν.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum major est.

Sit triangulum ABΓ, et producatur ipsius unum latus BΓ ad Δ; dico exteriorem angulum

Car puisque la droite AE est placée sur la droite ΓΔ, faisant les angles ΓEA, AEΔ, les angles ΓEA, AEΔ sont égaux à deux droits. De plus, puisque la droite ΔE est placée sur la droite AB, faisant les angles AEΔ, ΔEB, les angles AEΔ, ΔEB sont égaux à deux droits. Mais on a démontré que les angles ΓEA, AEΔ sont égaux à deux droits; donc les angles ΓEA, AEΔ sont égaux aux angles AEΔ, ΔEB. Retranchons l'angle commun AEΔ; l'angle restant ΓEA sera égal à l'angle restant BEΔ. On démontrera semblablement que les angles ΓEB, ΔEA sont égaux. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

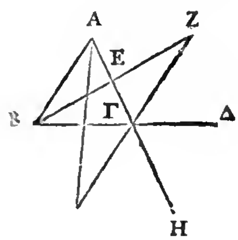
Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ABΓ, prolongeons le côte BΓ vers Δ; je dis que l'angle ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας[3] ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

ΑΓΔ majorem esse utroque interiorum et oppositorum ΓΒΑ, ΒΑΓ angulorum.

Secetur ΑΓ bifariam in Ε, et juncta ΒΕ producatur in directum ad Ζ, et ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, et jungatur ΖΓ, et producatur ΑΓ ad Η.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ·

Quoniam igitur æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΓ, ΒΕ vero ipsi ΕΖ, duæ ΑΕ, ΕΒ duabus ΓΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΕΒ angulo ΖΕΓ æqualis est, ad verticem enim est; basis igitur ΑΒ basi ΖΓ æqualis est, et ΑΒΕ triangulum ΖΕΓ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΑΕ ipsi ΕΓΖ. Major autem est ΕΓΔ ipso ΕΓΖ; major est

extérieur ΑΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Partageons la droite ΑΓ en deux parties égales en Ε (10); et ayant joint la droite ΒΕ, prolongeons-la vers Ζ, faisons ΕΖ égal à ΒΕ (3), joignons la droite ΖΓ, et prolongeons ΑΓ vers Η.

Puisque ΑΕ est égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΖ, les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΓΕ, ΕΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΖΕΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base ΑΒ est égale à la base ΖΓ (4); le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΖΕΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΓΖ (not. 9); mais l'angle ΕΓΔ est plus grand que l'angle ΕΓΖ; donc l'angle ΑΓΔ est plus grand μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὲ, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur ΑΓΔ ipso ΒΑΕ. Similiter autem, ΒΓ sectâ bifariam, ostendetur et ΒΓΗ, hoc est ΑΓΔ, major et ipso ΑΒΓ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

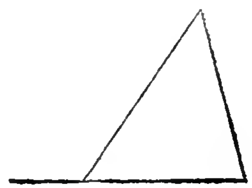
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Sit triangulus ΑΒΓ; dico ΑΒΓ trianguli duos angulos duobus rectis minores esse, omnifariam sumptos.



Εκϐεϐλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές

Producatur enim ΒΓ ad Δ.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ exterior est angulus ΑΓΔ, major est interiore et opposito ΑΒΓ. Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ ipsis ΑΒΓ, ΒΓΑ majores sunt. Sed ΑΓΔ, ΑΓΒ duobus

que l'angle ΒΑΕ. Si on partage le côté ΒΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle ΒΓΗ, c'est-à-dire ΑΓΔ, est plus grand que l'angle ΑΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; je dis que deux angles du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons ΒΓ vers Δ (dem. 2).

Puisque l'angle ΑΓΔ du triangle ΑΒΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ (16). Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ, les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront εἰσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Ομοίως δὴ [1] δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

rectis æquales sunt; ergo ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus rectis minores sunt. Similiter autem ostendemus et ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis minores esse, et adhuc ipsos ΓΑΒ, ΑΒΓ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

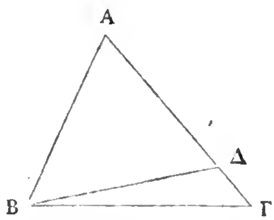
Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Εστω γὰρ [1] τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

PROPOSITION XVIII.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit enim triangulum ΑΒΓ, majus habens ΑΓ latus ipso ΑΒ; dico et angulum ΑΒΓ majorem esse ipso ΒΓΑ.



Επεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ

Quoniam enim major est ΑΓ ipsâ ΑΒ, ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΑΔ, et jungatur ΒΔ.

Et quoniam trianguli ΒΓΔ exterior est angulus ΑΔΒ, major est interiore et opposito ΑΓΒ. Æqualis autem ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ, quia et latus ΑΒ

plus grands que les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ sont moindres que deux droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΓ, ΑΓΒ, et les angles ΓΑΒ, ΑΒΓ sont moindres que deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant le côté ΑΓ plus grand que le côté ΑΒ; je dis que l'angle ΑΒΓ est plus grand que l'angle ΒΓΑ.

Puisque ΑΓ est plus grand que ΑΒ, faisons ΑΔ égal à ΑΒ (3), et joignons ΒΔ.

Puisque ΑΔΒ est un angle extérieur du triangle ΒΔΓ, cet angle est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΔΓΒ (16); mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5), parce ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

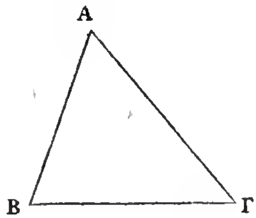
Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

ipsi ΑΔ est æquale; major igitur et ΑΒΔ ipso ΑΓΒ; multo igitur ΑΒΓ major est ipso ΑΓΒ. Omnis igitur trianguli, etc.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli majorem angulum majus latus subtendit.

Sit triangulum ΑΒΓ, majorem habens ΑΒΓ angulum ipso ΒΓΑ; dico et latus ΑΓ latere ΑΒ majus esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Si enim non; vel æqualis est ΑΓ ipsi ΑΒ, vel minor; æqualis quidem non est ΑΓ ipsi ΑΒ, æqualis enim esset et angulus ΑΒΓ ipsi ΑΓΒ. Non est autem; non igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΑΒ. Neque tamen minor est ΑΓ ipsâ ΑΒ; minor enim esset et angulus ΑΒΓ ipso ΑΓΒ; non est

que le côté ΑΒ est égal au côté ΑΔ; donc l'angle ΑΒΔ est plus grand que l'angle ΑΓΒ; donc l'angle ΑΒΓ est beaucoup plus grand que l'angle ΑΓΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΑΒΓ plus grand que l'angle ΒΓΑ; je dis que le côté ΑΓ est plus grand que le côté ΑΒ.

Car si cela n'est point, ΑΓ est égal à ΑΒ, ou plus petit. Mais ΑΓ n'est pas égal à ΑΒ, car alors l'angle ΑΒΓ serait égal à l'angle ΑΓΒ (5); mais il ne l'est pas; donc ΑΓ n'est pas égal à ΑΒ. Le côté ΑΓ n'est pas plus petit que le côté ΑΒ, car alors l'angle ΑΒΓ serait plus petit que l'angle ΑΓΒ (18); mais il ne l'est pas; donc le

Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

autem ; non igitur minor est ΑΓ ipsâ ΑΒ. Ostensum est autem neque æqualem esse ; major igitur est ΑΓ ipsâ ΑΒ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ΄.

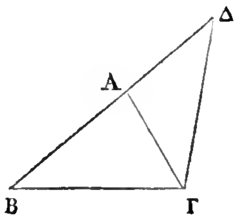
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumta.

Sit enim tringulum ΑΒΓ; dico ΑΒΓ trianguli duo latera reliquo majora esse, omnifariam sumpta; ipsa quidem ΒΑ, ΑΓ ipso ΒΓ, ipsa vero ΑΒ, ΒΓ ipso ΑΓ, et ipsa ΒΓ, ΓΑ ipso ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ [1]· μείζων ἄρα ἡ

Producatur enim ΒΑ ad Δ punctum, et ponatur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΔΑ ipsi ΑΓ, æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ, major

côté ΑΓ n'est pas plus petit que le côté ΑΒ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal ; donc ΑΓ est plus grand que ΑΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ΑΒΓ ; je dis que deux côtés du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant; les côtés ΒΑ, ΑΓ plus grands que ΒΓ ; les côtés ΑΒ, ΒΓ plus grands que ΑΓ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus grands que ΑΒ.

Prolongeons ΒΑ vers Δ, faisons ΑΔ égal à ΓΑ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΑΓ, l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5); donc l'angle ΒΓΔ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ [2]· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

utique est ΒΓΔ ipso ΑΔΓ; et quoniam triangulum est ΔΓΒ, majorem habens ΒΓΔ angulum ipso ΒΔΓ, majorem autem angulum majus latus subtendit; ΔΒ igitur ipsâ ΒΓ est major; æqualis autem ΔΑ ipsi ΑΓ; majores igitur ΒΑ, ΑΓ ipsâ ΒΓ. Similiter autem ostendemus et ipsas quidem ΑΒ, ΒΓ ipsâ ΓΑ majores esse; ipsas vero ΒΓ, ΓΑ ipsâ ΑΒ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ πλευραὶ [1] τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

PROPOSITIO XXI.

Si trianguli super uno laterum a terminis duæ rectæ intus constituantur, constructæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ΑΒΓ super uno laterum ΒΓ, a terminis Β, Γ, duæ rectæ intus constituantur ΒΔ, ΔΓ; dico ΒΔ, ΔΓ latera reliquis trianguli duobus lateribus ΒΑ, ΑΓ minora quidem esse, majorem vero angulum continere, ipsum ΒΔΓ ipso ΒΑΓ.

est plus grand que l'angle ΑΔΓ (not. 9); donc, puisque dans le triangle ΔΓΒ, l'angle ΒΓΔ est plus grand que l'angle ΒΔΓ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΔΒ est plus grand que le côté ΒΓ; mais ΔΑ est égal à ΑΓ; donc les côtés ΒΑ, ΑΓ sont plus grands que ΒΓ. Nous démontrerons semblablement que les côtés ΑΒ, ΒΓ sont plus grands que ΓΑ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus grands que ΑΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si des extrémités d'un des côtés d'un triangle, on construit intérieurement deux droites, ces deux droites seront plus petites que les deux côtés restans du triangle, mais elles comprendront un plus grand angle.

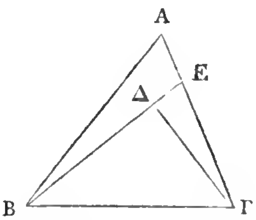
Des extrémités Β, Γ du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ, construisons intérieurement les deux droites ΒΔ, ΔΓ; je dis que les droites ΒΔ, ΔΓ sont plus petites que les deux côtés restants ΒΑ, ΑΓ, et qu'elles comprennent un angle ΒΔΓ plus grand que l'angle ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ [2] αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.

Producatur enim ΒΔ ad Ε.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ΑΒΕ trianguli duo latera ΑΒ, ΑΕ ipso ΒΕ majora sunt. Communis addatur ΕΓ; ergo ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΕ, ΕΓ majores sunt. Rursus, quoniam ΓΕΔ trianguli duo latera ΓΕ, ΕΔ ipso ΓΔ majora sunt; communis addatur ΔΒ; ergo ΓΕ, ΕΒ ipsis ΓΔ, ΔΒ majores sunt. Sed ipsis ΒΕ, ΕΓ majores ostensæ sunt ΒΑ, ΑΓ; multo igitur ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ majores sunt.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ ταῦτα τοίνυν [3] καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Rursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito major est, ΓΔΕ trianguli exterior angulus ΒΔΓ major est ipso ΓΕΔ. Propter eadem utique et ΑΒΕ trianguli exterior angulus ΓΕΒ major est ipso ΒΑΓ. Sed ipso ΓΕΒ major ostensus est ΒΔΓ; multo igitur ΒΔΓ major est ipso ΒΑΓ. Si igitur, etc.

Prolongeons ΒΔ vers Ε.

Puisque deux côtés d'un triangle quelconque sont plus grands que le côté restant (20), les deux côtés ΑΒ, ΑΕ du triangle ΑΒΕ sont plus grands que le côté ΒΕ; donc si nous ajoutons la droite commune ΒΓ, les droites ΒΑ, ΑΓ seront plus grandes que ΒΕ, ΕΓ. De plus, puisque les deux côtés ΓΕ, ΕΔ du triangle ΓΕΔ sont plus grands que ΓΔ, si nous ajoutons la droite commune ΔΒ, les droites ΓΕ, ΕΒ seront plus grandes que ΓΔ, ΔΒ; mais on a démontré que les droites ΒΑ, ΑΓ sont plus grandes que ΒΕ, ΕΓ; donc les droites ΒΑ, ΑΓ sont beaucoup plus grandes que ΒΔ, ΔΓ.

De plus, puisqu'un angle extérieur d'un triangle quelconque est plus grand qu'un des angles intérieurs et opposés (16), l'angle ΒΔΓ, qui est un angle extérieur du triangle ΔΕΓ, est plus grand que l'angle ΓΕΔ. Par la même raison l'angle ΓΕΒ, qui est un angle extérieur du triangle ΑΒΕ, est plus grand que l'angle ΒΑΓ; mais il a été démontré que l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΓΕΒ; donc l'angle ΒΔΓ est beaucoup plus grand que l'angle ΒΑΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

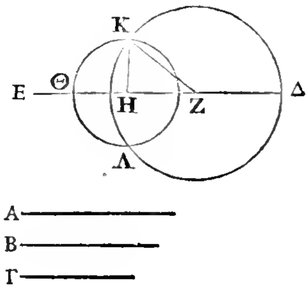
Εκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις [1], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου, τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας [2].

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliquâ majores esse, omnifariam sumptas, quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumpta.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ, quarum duæ reliquâ majores sint, omnifariam sumptæ, ipsæ quidem Α, Β ipsâ Γ, ipsæ vero Α, Γ ipsâ Β, et denique ipsæ Β, Γ ipsâ Α; oportet igitur ex rectis æqualibus ipsis Α, Β, Γ triangulum constituere.



Εκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση

Exponatur aliqua recta ΔΕ, terminata quidem ad Δ, infinita vero ad Ε; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΖ, ipsi vero Β æqualis ΖΗ, et ipsi Γ

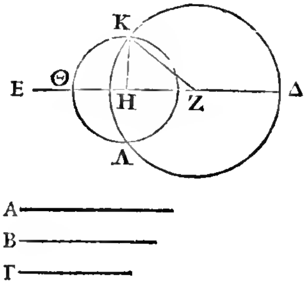
PROPOSITION XXII.

Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle: il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grande que la troisième; parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

Soient données les trois droites Α, Β, Γ, dont deux, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième; les droites Α, Β plus grandes que Γ; les droites Α, Γ plus grandes que Β, et enfin les droites Β, Γ plus grandes que Α; il faut, avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ, construire un triangle.

Soit la droite ΔΕ, terminée en Δ, et indéfinie en Ε; faisons la droite ΔΖ égale à la droite Α (prop. 3), la droite ΖΗ égale à la droite Β, et la droite ΗΘ égale à ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ [3] τῷ ΗΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται [4] τὸ ΚΖΗ.

æqualis ΗΘ; et centro quidem Ζ, intervallo vero ΖΔ, circulus describatur ΔΚΛ; et rursus, centro quidem Η, intervallo vero ΗΘ, circulus describatur ΚΛΘ, et jungantur ΚΖ, ΚΗ; dico ex tribus rectis, æqualibus ipsis Α, Β, Γ, triangulum constitutum esse ΚΖΗ.



Επεὶ οὖν [5] τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Εστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Εκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ΔΚΛ circuli, æqualis est ΖΔ ipsi ΖΚ; sed ΖΔ ipsi Α est æqualis; et ΚΖ igitur ipsi Α est æqualis. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ΛΚΘ circuli, æqualis est ΗΘ ipsi ΗΚ; sed ΗΘ ipsi Γ est æqualis; et ΚΗ igitur ipsi Γ est æqualis. Est autem et ΖΗ ipsi Β æqualis; tres igitur rectæ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ tribus Α, Β, Γ æquales sunt.

Ex tribus igitur rectis ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, quæ sunt æquales datis rectis Α, Β, Γ, triangulum constitum est ΚΖΗ. Quod oportebat facere.

la droite Γ; du centre Ζ et de l'intervalle ΖΔ décrivons le cercle ΔΚΛ (dem. 3); et de plus du centre Η et de l'intervalle ΗΘ décrivons le cercle ΔΚΘ, et joignons ΚΖ, ΚΗ; je dis que le triangle ΚΖΗ est construit avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ.

Car puisque le point Ζ est le centre du cercle ΔΚΛ, ΖΔ est égal à ΖΚ (déf. 15); mais ΖΔ est égal à Α; donc ΚΖ égal à Α. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΛΚΘ, ΗΘ est égal à ΗΚ; mais ΗΘ est égal à Γ; donc ΚΗ est égal à Γ. Mais ΖΗ est égal à Β; donc les trois droites ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ sont égales aux trois droites Α, Β, Γ.

Donc le triangle ΚΖΗ a été construit avec trois droites ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, qui sont égales aux trois droites données Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

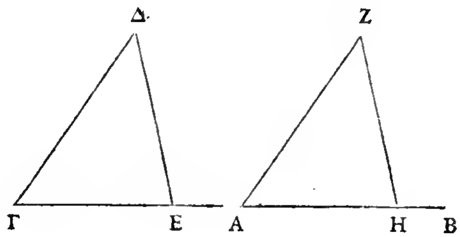
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam, et ad punctum in eâ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit quidem data recta AB, in eâ vero punctum A, et datus angulus rectilineus ΔΓΕ; oportet igitur ad datam rectam AB, et ad punctum in eâ A, dato angulo rectilineo ΔΓΕ æqualem angulum rectilineum constituere.



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Sumantur in utrâque ipsarum ΓΔ, ΓΕ quælibet puncta Δ, E, et jungatur ΔE; et ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus ΓΔ, ΔE, ΓE, triangulum constituatur AZH, ita ut æqualis sit ΓΔ quidem ipsi AZ, ipsa vero ΓE ipsi AH, et denique ΔE ipsi ZH.

PROPOSITION XXIII.

A une droite donnée, et à un point de cette droite, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soient donnés la droite AB, et un point A dans cette droite; que ΔΓE soit l'angle rectiligne donné; il faut à la droite donnée AB et au point A de cette droite, construire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné ΔΓE.

Soient pris, dans l'une et l'autre des droites ΓΔ, ΓE, deux points quelconques Δ, E, joignons ΔE, et avec trois droites égales aux droites ΓΔ, ΔE, ΓE, construisons le triangle AZH (22), de manière que ΓΔ soit égal à AZ, ΓE égal à AH, et ΔE égal à ZH.

Επεὶ οὖν ¹ δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur duæ ΔΓ, ΓΕ duabus ΖΑ, ΑΗ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΕ basi ΖΗ æqualis, angulus utique ΔΓΕ angulo ΖΑΗ est æqualis.

Ad datam igitur rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ, æqualis angulus rectilineus constitutus est ΖΑΗ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ ¹ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo majorem habeant, qui ab æqualibus lateribus continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ major sit; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ majorem esse.

Puisque les deux droites ΔΓ, ΓΕ sont égales aux deux droites ΖΑ, ΑΗ, chacune à chacune, et que la base ΔΕ est égale à la base ΖΗ, l'angle ΔΓΕ sera égal à l'angle ΖΑΗ (8).

Donc à la droite ΑΒ, et au point Α de cette droite, on a construit l'angle rectiligne ΖΑΗ égal à l'angle rectiligne ΔΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

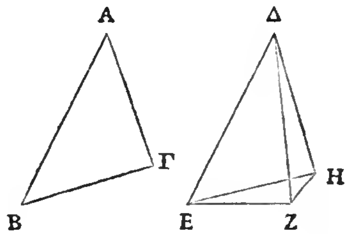
PROPOSITION XXIV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; que l'angle ΒΑΓ soit plus grand que l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est plus grande que la base ΕΖ.

Επεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν [2] ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ [3] σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Quoniam enim major est ΒΑΓ angulus ΕΔΖ angulo, constituatur ad ΔΕ rectam, et ad punctum in eâ Δ, ipsi ΒΑΓ angulo æqualis ΕΔΗ; et ponatur alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΖ æqualis ΔΗ, et jungantur ΕΗ, ΖΗ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστί [4]· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ [5] ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ [6] πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ιση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ ipsa vero ipsi ΔΗ, duæ utique ΒΑ, ΑΓ duabus ΕΔ, ΔΗ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΗ æqualis est; basis igitur ΒΓ basi ΕΗ est æqualis. Rursus, quoniam æqualis est ΔΖ ipsi ΔΗ, æqualis est et ΔΖΗ angulus ipsi ΔΗΖ; major igitur ΔΖΗ ipso ΕΗΖ; multo igitur major est ΕΖΗ ipso ΕΗΖ. Et quoniam triangulum est ΕΖΗ, majorem habens ΕΖΗ angulum ipso ΕΗΖ; majorem autem angulum majus latus subtendit; majus igitur et latus ΕΗ ipso ΕΖ. Æquale autem ΕΗ ipsi ΒΓ; majus igitur et ΒΓ ipso ΕΖ. Si igitur duo, etc.

Car puisque l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ, construisons sur la droite ΔΕ, et au point Δ de cette droite, un angle ΕΔΗ égal à l'angle ΒΑΓ (23); faisons la droite ΔΗ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΖ (3), et joignons ΕΗ, ΖΗ.

Puisque ΑΒ est égal à ΔΕ, et ΑΓ à ΔΗ, les deux droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΕΔ, ΔΗ, chacune à chacune; mais l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΗ; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΗ (4). De plus, puisque ΔΖ est égal à ΔΗ, l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΗΖ (5); donc l'angle ΔΖΗ est plus grand que l'angle ΕΗΖ; donc l'angle ΕΖΗ est beaucoup plus grand que l'angle ΕΗΖ; et puisque ΕΖΗ est un triangle, ayant l'angle ΕΖΗ plus grand que l'angle ΕΗΖ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΕΗ est plus grand que le côté ΕΖ; mais ΕΗ est égal à ΒΓ; donc le côté ΒΓ est plus grand que le côté ΕΖ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

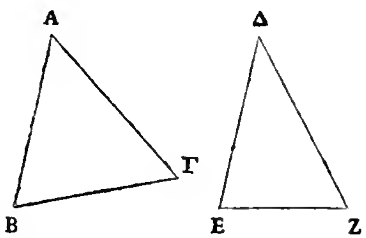
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς[1] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ[2] βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἤχῃ[3]· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, basim autem basi majorem habeant; et angulum angulo majorem habebunt, qui ab æqualibus rectis continetur.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, basis autem ΒΓ basi ΕΖ major sit; dico et angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ majorem esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ[4] τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, ἴση γὰρ ἂν ἦν[5] καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία[6] ἡ ὑπὸ

Si enim non, vel æqualis est ei, vel minor; æqualis autem non est ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ, æqualis enim esset et basis ΒΓ basi ΕΖ; non est autem; non igitur æqualis est angulus ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.

PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; que la base ΒΓ soit plus grande que la base ΕΖ; je dis que l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ.

Car si cela n'est point, il lui est égal, ou il est plus petit; mais l'angle ΒΑΓ n'est pas égal à l'angle ΕΔΖ, car alors la base ΒΓ seroit égale à la base ΕΖ (4); mais elle ne l'est point; donc l'angle ΒΑΓ n'est pas égal à l'angle ΕΔΖ. Mais l'angle ΒΑΓ

ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ [7], ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν [8] καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ [9] τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Neque tamen minor est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ, minor enim esset et basis ΒΓ basi ΕΖ; non est autem; non igitur minor est ΒΑΓ angulus ipso ΕΔΖ. Ostensum est autem neque æqualem esse; major igitur est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς [1] δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι [2] τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Εστω [3] δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, vel quod est ad æquales angulos, vel quod subtendit unum æqualium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus ΔΕΖ, ΕΖΔ æquales habentia, utrumque utrique, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΒΓΑ vero ipsi ΕΖΔ, habeant autem et unum latus uni lateri æquale; primum, quod est ad æquales angulos, ipsum ΒΓ ipsi ΕΖ; dico et reliqua latera

n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ, car alors la base ΒΓ serait plus petite que la base ΕΖ (24); mais elle ne l'est point; donc l'angle ΒΑΓ n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVI.

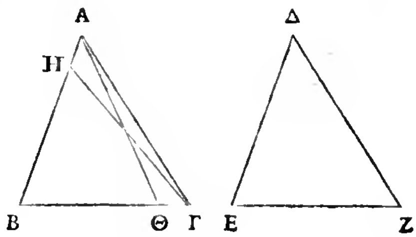
Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΔΕΖ, ΕΖΔ, chacun à chacun, l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΕΖΔ; que ces deux triangles aient aussi un côté égal à un côté, et d'abord celui qui est adjacent aux angles égaux, le côté ΒΓ égal au γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν [4]. Εστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

reliquis lateribus æqualia habitura esse, utrumque utrique, AB quidem ipsi ΔE, AΓ vero ipsi ΔZ, et reliquum angulum reliquo angulo, BAΓ ipsi EΔZ.

Si enim inæqualis est AB ipsi ΔE, una earum major est. Sit major AB, et ponatur ipsi ΔE æqualis BH, et jungatur HΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ [5], καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται [6], ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ

Quoniam igitur æqualis est BH quidem ipsi ΔE, BΓ vero ipsi EZ, duæ utique BH, BΓ duabus ΔE, EZ æquales sunt, utraque utrique, et angulus HBΓ angulo ΔEZ æqualis est; basis igitur HΓ basi ΔZ æqualis est, et HBΓ triangulum ΔEZ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur HΓB angulus ipsi ΔZE. Sed ΔZE ipsi BΓA ponitur æqualis; igitur et BΓH ipsi BΓA æqualis est,

côté EZ; je dis qu'ils auront les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔE, le côté AΓ égal au côté ΔZ, et l'angle restant égal à l'angle restant, l'angle BAΓ égal à l'angle EΔZ.

Car si le côté AB n'est pas égal au côté ΔE, l'un d'eux est plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand; faisons BH égal à ΔE (3), et joignons HΓ.

Puisque BH est égal à ΔE, et BΓ égal à EZ, les deux côtés BH, BΓ sont égaux aux deux côtés ΔE, EZ, chacun à chacun; mais l'angle HBΓ est égal à l'angle ΔEZ; donc la base HΓ est égale à la base ΔZ (4); le triangle HBΓ est égal au triangle ΔEZ, et les angles restants, soutendus par les côtés égaux, seront égaux aux angles restants; donc l'angle HΓB est égal à l'angle ΔZE; mais l'angle ΔZE est supposé ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ[7] λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ[8] τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ[9] ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων, εἰ δυνατὸν, ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ[10], καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση

minor majori, quod impossibile. Non igitur inæqualis est ΑΒ ipsi ΔΕ; æqualis igitur est. Est autem et ΒΓ ipsi ΕΖ æqualis, duæ utique ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ est æqualis; basis igitur ΑΓ basi ΔΖ æqualis est, et reliquus angulus ΒΑΓ reliquo angulo ΕΔΖ æqualis est.

Sed et rursus, sint ipsa æquales angulos latera subtendentia æqualia, ut ΑΒ ipsi ΔΕ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia futura esse, ΑΓ quidem ipsi ΔΖ, ΒΓ vero ipsi ΕΖ, et adhuc reliquum angulum ΒΑΓ reliquo angulo ΕΔΖ æqualem esse.

Si enim inæqualis est ΒΓ ipsi ΕΖ, una earum major est. Sit major, si possibile est, ΒΓ ipsâ ΕΖ, et ponatur ipsi ΕΖ æqualis ΒΘ, et jungatur ΑΘ.

Et quoniam æqualis est ΒΘ quidem ipsi ΕΖ, ΑΒ vero ipsi ΔΕ, duæ utique ΑΒ, ΒΘ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur ΑΘ basi ΔΖ

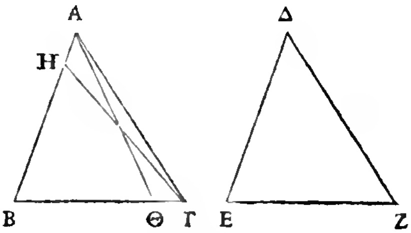
égal à l'angle ΒΓΑ; donc l'angle ΒΓΗ est égal à l'angle ΒΓΑ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les côtés ΑΒ, ΔΕ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais ΒΓ est égal à ΕΖ; donc les deux côtés ΑΒ, ΒΓ sont égaux aux deux côtés ΔΕ, ΕΖ, chacun à chacun; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΔΖ (4), et l'angle restant ΒΑΓ est égal à l'angle restant ΕΔΖ.

Mais de plus, que les côtés opposés aux angles égaux soient égaux, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ; je dis que les côtés restants seront égaux aux côtés restants, le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ, et le côté ΒΓ égal au côté ΕΖ, et que l'angle restant ΒΑΓ est égal à l'angle restant ΕΔΖ.

Car si le côté ΒΓ n'est pas égal au côté ΕΖ, l'un d'eux est plus grand que l'autre; que ΒΓ soit plus grand que ΕΖ, s'il est possible; faisons ΒΘ égal à ΕΖ (3), et joignons ΑΘ.

Puisque ΒΘ est égal à ΕΖ, et ΑΒ égal à ΔΕ, les deux côtés ΑΒ, ΒΘ sont égaux aux deux côtés ΔΕ, ΕΖ, chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base ΑΘ est égale à la base ΔΖ (4); le triangle ΑΒΘ est égal au ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται [11], ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. Αλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ [12] ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση [13]· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ

æqualis est, et triangulum ΑΒΘ triangulo ΔΕΖ æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΘΑ angulus ipsi ΕΖΔ. Sed ΕΖΔ ipsi ΒΓΑ est æqualis; et ΒΘΑ igitur ipsi ΒΓΑ est æqualis; trianguli igitur ΑΘΓ exterior angulus ΒΘΑ æqualis est interiori et opposito ΒΓΑ, quod est impossibile. Non igitur inæqualis est



ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. Εστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ [14] γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση [15]. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΒΓ ipsi ΕΖ; æqualis igitur. Est autem et ΑΒ ipsi ΔΕ æqualis; duæ igitur ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur ΑΓ basi ΔΖ æqualis est, et triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquale, et reliquus angulus ΒΑΓ reliquo angulo ΕΔΖ æqualis. Si igitur duo, etc.

triangle ΔΕΖ, et les angles restants, opposés aux côtés égaux, seront égaux aux angles restants, chacun à chacun; donc l'angle ΒΘΑ est égal à l'angle ΕΖΔ; mais l'angle ΕΖΔ est égal à l'angle ΒΓΑ; donc l'angle ΒΘΑ est égal à l'angle ΒΓΑ; donc l'angle extérieur ΒΘΑ du triangle ΑΘΓ est égal à l'angle intérieur et opposé ΒΓΑ; ce qui est impossible (16); donc les côtés ΒΓ, ΕΖ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais le côté ΑΒ est égal au côté ΔΕ; donc les deux côtés ΑΒ, ΒΓ sont égaux aux deux côtés ΔΕ, ΕΖ, chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base ΑΓ est égale à la base ΔΖ (4); le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ, et l'angle restant ΒΑΓ égal à l'angle restant ΕΔΖ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

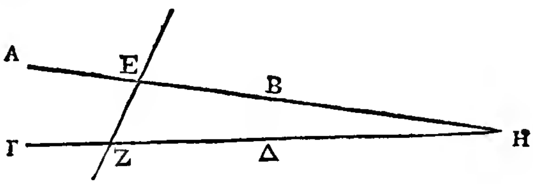
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ [1].

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos æquales inter se faciat, parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas AB, ΓΔ recta incidens EZ, alternos angulos AEZ, EZΔ æquales inter se faciat; dico parallelam esse AB ipsi ΓΔ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ΑΓ. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη κατὰ τὸ Η.

Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΗΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ [2], ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ΒΔ

Si enim non, productæ AB, ΓΔ, convenient vel ad BΔ partes, vel ad AΓ; producantur, et conveniant ad BΔ partes in H.

Trianguli igitur EHZ exterior angulus AEZ æqualis est interiori et opposito EZH, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ productæ convenient ad BΔ partes. Similiter autem osten-

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB, ΓΔ fasse les angles alternes AEZ, EZΔ égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB, ΓΔ étant prolongées se rencontreront, ou du côté BΔ, ou du côté AΓ. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté BΔ, au point H.

L'angle extérieur AEZ du triangle EHZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH, ce qui est impossible (16); donc les droites AB, ΓΔ prolongées du côté BΔ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se ren-

μέρη. Ομοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

detur neque ad ΑΓ; quæ autem in neutras partes conveniunt, parallelæ sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

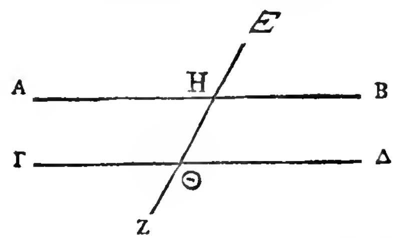
Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ[1]· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον[2] γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales faciat; parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidens ΕΖ exteriorem angulum ΕΗΒ interiori et opposito, angulo ΗΘΔ æqualem faciat, vel interiores et ad easdem partes ipsos ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.



contreront pas non plus du côté ΑΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite ΕΖ tombant sur les droites ΑΒ, ΓΔ fasse l'angle extérieur ΕΗΒ égal à l'angle intérieur ΗΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ.

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim æqualis est ΕΗΒ ipsi ΗΘΔ, sed ΕΗΒ ipsi ΑΗΘ est æqualis, et ΑΗΘ igitur ipsi ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Rursus, quoniam anguli ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales sunt, sunt autem anguli ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Communis auferatur ΒΗΘ; reliquus igitur ΑΗΘ reliquo ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην [1], καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τάς τε[2]

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos æquales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes æqualem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales.

In parallelas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidat ΕΖ; dico eam alternos angulos ΑΗΘ, ΗΘΔ æquales

Car puisque l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ, et que l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΑΗΘ (15), l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ (27).

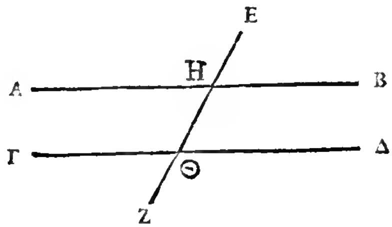
De plus, puisque les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΘΗ, ΗΘΔ. Retranchons l'angle commun ΒΗΘ; l'angle restant ΑΗΘ sera égal à l'angle restant ΗΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite ΕΖ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes ΑΗΘ, ΗΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur ΕΗΒ, égal à ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη[3] τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

facere, et exteriorem angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes HΘΔ æqualem, et interiores ad easdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ[4]. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. Αλλὰ[5] αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ[6] ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα.

Si enim inæqualis est AHΘ ipsi HΘΔ, unus eorum major est; sit major AHΘ ipso HΘΔ. Communis addatur BHΘ; ergo AHΘ, BHΘ ipsis BHΘ, HΘΔ majores sunt. Sed AHΘ, BHΘ duobus rectis æquales sunt; et igitur BHΘ, HΘΔ duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ in infinitum concurrunt. Ipsæ igitur AB, ΓΔ productæ in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelæ ponuntur; non igitur inæqualis est AHΘ ipsi HΘΔ; æqualis igitur.

l'angle HΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.

Car si l'angle AHΘ n'est pas égal à l'angle HΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle AHΘ soit plus grand que HΘΔ. Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles AHΘ, BHΘ seront plus grands que les angles BHΘ, HΘΔ; mais les angles AHΘ, BHΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles BHΘ, HΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites AB, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles AHΘ, Αλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. Αλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Η ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἑξῆς.

Sed ΑΗΘ ipsi ΕΗΒ est æqualis; et ΕΗΒ igitur ipsi ΗΘΔ est æqualis.

Communis addatur ΒΗΘ; ergo ΕΗΒ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Sed ΕΗΒ, ΒΗΘ duobus rectis æquales sunt; et ΒΗΘ, ΗΘΔ igitur duobus rectis æquales sunt. Ergo in parallelas, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Εστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

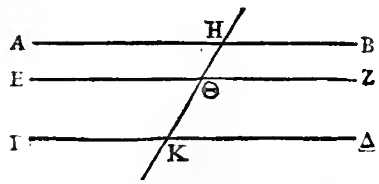
Εμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ parallelæ sunt, et inter se sunt parallelæ.

Sit utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ipsi ΕΖ parallela; dico et ΑΒ ipsi ΓΔ esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta ΗΚ.



Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παρ-

Et quoniam in parallelas rectas ΑΒ, ΕΖ recta incidit ΗΚ, æqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΖ. Rursus quoniam in parallelas rectas ΕΖ, ΓΔ recta in-

ΗΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΕΗΒ (15); donc l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ.

Ajoutons l'angle commun ΒΗΘ, les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΗΘ, ΗΘΔ; mais les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites ΑΒ, ΓΔ soit parallèle à ΕΖ; je dis que ΑΒ est parallèle à ΓΔ.

Que la droite ΗΚ tombe sur les droites ΑΒ, ΓΔ.

ἀλλήλους[2] εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ[3], καὶ τὰ ἑξῆς.

cidit HK, æqualis est HΘZ ipsi HKΔ. Ostensus est autem et AHK ipsi HΘZ æqualis; AHK igitur ipsi HKΔ est æqualis; et sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi ΓΔ. Quæ igitur eidem rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

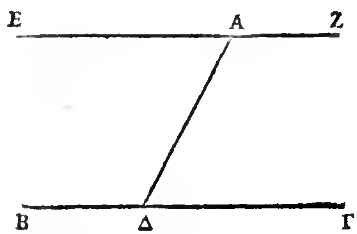
Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου[1], τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum, datæ rectæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit quidem datum punctum A, data vero recta BΓ; oportet igitur, per A punctum, ipsi BΓ rectæ parallelam rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ

Sumatur in BΓ quodlibet punctum Δ, et jungatur AΔ; et constituatur ad ΔA rectam, et ad

Puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles AB, EZ, l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘZ (27). De plus, puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles EZ, ΓΔ, l'angle HΘZ est égal à l'angle HKΔ (28). Mais on a démontré que l'angle AHK est égal à l'angle HΘZ; donc l'angle AHK est égal à l'angle HKΔ; mais ces angles sont alternes; donc AB est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.

Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée; il faut par le point A conduire une ligne droite parallèle à la droite BΓ.

Prenons sur la droite BΓ un point quelconque Δ, et joignons AΔ; construisons εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκϐεϐλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα[2] ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

punctum in eâ A, angulo ΑΔΓ æqualis angulus ΔΑΕ, et producatur in directum ipsi EA recta AZ.

Et quoniam in duas rectas ΒΓ, EZ recta incidens ΑΔ alternos angulos ΕΑΔ, ΑΔΓ æquales inter se facit, parallela est EZ ipsi ΒΓ.

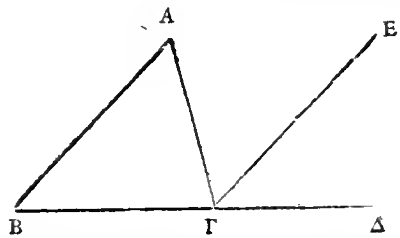
Per datum igitur punctum A, datæ rectæ ΒΓ parallela recta linea ducta est EAZ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκϐληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis æqualis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt.



Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκϐεϐλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

Sit triangulus ΑΒΓ, et producatur ipsius unum latus ΒΓ in Δ; dico exteriorem angulum

sur la droite ΔA, et au point A de cette droite, l'angle ΔAE égal à l'angle AΔΓ (23), et prolongeons la droite AZ dans la direction de EA.

Puisque la droite AΔ, tombant sur les deux droites BΓ, EZ, fait les angles alternes EAΔ, AΔΓ égaux entr'eux, la droite EZ est parallèle à droite BΓ (27).

Donc la ligne droite EAZ a été menée, par le point donné A, parallèle à la droite donnée BΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

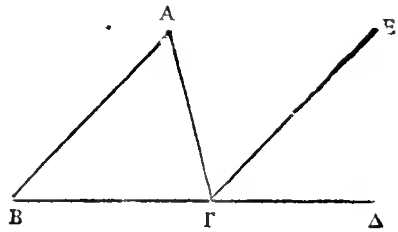
Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ABΓ; et prolongeons le côté BΓ en Δ; je dis que l'angle extéἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς[1] δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ηχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

ΑΓΔ æqualem esse duobus interioribus et oppositis ΓΑΒ, ΑΒΓ, et interiores trianguli tres angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duabus rectis æquales esse.

Ducatur enim, per Γ punctum, ipsi ΑΒ rectæ parallela ΓΕ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ· Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς[2] γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit ΑΓ, alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit recta ΒΔ, exterior angulus ΕΓΔ æqualis est interiori et opposito ΑΒΓ. Ostensus autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΔ exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ æquales sunt. Sed ΑΓΔ,

rieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.

Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois εἰσίν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ igitur duobus rectis æquales sunt. Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

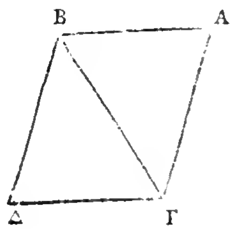
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Εστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ,ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε ' καὶ παράλληλοί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Quæ et æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.

Sint et æquales et parallelæ ΑΒ, ΓΔ, et conjungant ipsas ad easdem partes rectæ ΑΓ, ΒΔ; dico et ΑΓ, ΒΔ et æquales et parallelas esse.



Επεζεύχθω γὰρ ² ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ

Jungatur enim ΒΓ.

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΑΒ

angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (15); donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

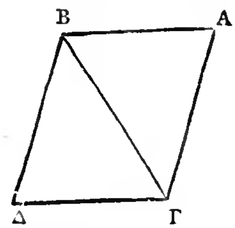
Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

Joignons ΒΓ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν[3]. Βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ[4] ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. Εδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsi ΓΔ, communis autem ΒΓ; duæ igitur ΑΒ, ΒΓ duabus ΓΔ, ΒΓ æquales sunt, et angulus ΑΒΓ angulo ΒΓΔ æqualis. Basis igitur ΑΓ basi ΒΔ est æqualis, et ΑΒΓ triangulum ΒΓΔ triangulo æquale est; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis est igitur ΑΓΒ angulus ipsi ΓΒΔ. Et quoniam in duas rectas ΑΓ, ΒΔ recta incidens ΒΓ, alternos angulos ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se facit, parallela est ΑΓ ipsi ΒΔ. Ostensa est autem ipsi et æqualis; quæ igitur æquales, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδʹ.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli æqualia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

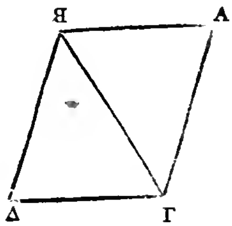
la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux deux droites ΓΔ, ΒΓ; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΒΓΔ, et les angles restans, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΓΒΔ. Mais la droite ΒΓ tombant sur les deux droites ΑΓ, ΒΔ fait les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ égaux entr'eux; donc la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΒΔ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Εστω παραλληλόγραμμον χωρίον[1] τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Sit parallelogrammum spatium ΑΓΔΒ, diameter autem ipsius ΒΓ; dico ΑΓΔΒ parallelogrammi opposita et latera et angulos æqualia inter se esse, et ΒΓ diametrum illud bifariam secare.



Επεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν[2] μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ·

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit recta ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ, æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΓ ipsi ΒΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se sunt. Duo igitur triangula sunt ΑΒΓ, ΒΓΔ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, commune utrique ΒΓ; et reliqua igitur reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo; æquale igitur est ΑΒ quidem latus ipsi ΓΔ,

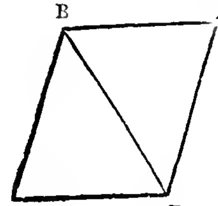
Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν[3] ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση[4]· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση·

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΑΓ vero ipsi ΒΔ, et adhuc æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΒΔΓ. Et quoniam æqualis est quidem ΑΒΓ angulus ipsi ΒΓΔ, et ΓΒΔ ipsi ΑΓΒ; totus igitur ΑΒΔ toti ΑΓΔ est æqualis; ostensus est autem et ΒΑΓ ipsi ΓΔΒ æqualis;

Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli æqualia inter se sunt.



Λέγω δὲ[5] ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί[6]· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Η ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim æqualis est ΑΒ ipsi ΓΔ, communis autem ΒΓ, duæ igitur ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΓ, ΓΒ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΒΓ angulo ΒΓΔ æqualis est; et basis igitur ΑΓ ipsi ΒΔ æqualis est; et igitur triangulum ΑΒΓ triangulo ΒΔΓ æquale est;

Ergo ΒΓ diameter bifariam secat ΑΓΔΒ parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

ΒΑΓ égal à l'angle ΒΔΓ. Puisque l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΒΔ égal à l'angle ΑΓΒ, l'angle total ΑΒΔ est égal à l'angle total ΑΓΔ. Mais on a démontré que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΒ;

Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque ΑΒ est égal à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites ΑΒ, ΒΓ sont égales aux droites ΔΓ, ΓΒ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ (4), et le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΒΔΓ.

Donc la diagonale ΒΓ partage le parallélogramme ΑΓΔΒ en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

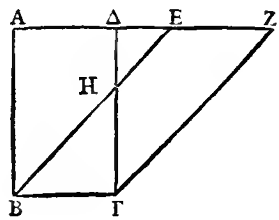
Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα[1] τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ[2].

PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma, super eâdem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ super eâdem basi ΒΓ constituta et in eisdem parallelis ΑΖ, ΒΓ; dico æquale esse ΑΒΓΔ ipsi ΕΒΓΖ.



Επεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ[3]. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση[4]· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση[5]· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Εστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, æqualis est ΑΔ ipsi ΒΓ. Propter eadem, et ΕΖ ipsi ΒΓ est æqualis. Quare et ΑΔ ipsi ΕΖ est æqualis; et communis ΔΕ; tota igitur ΑΕ toti ΔΖ est æqualis. Est autem et ΑΒ ipsi ΔΓ æqualis; duæ igitur ΕΑ, ΑΒ duabus ΖΔ, ΔΓ æquales sunt utraque utrique, et angulus ΖΔΓ angulo ΕΑΒ

PROPOSITION XXXV.

Les parallélogrammes, contruits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ soient construits sur la même base ΒΓ, et entre les mêmes parallèles ΑΖ, ΒΓ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΒΓΖ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, ΑΔ est égal à ΒΓ (34); par la même raison, ΕΖ est égale à ΒΓ; donc ΑΔ est égal à ΕΖ; mais la droite ΔΕ est commune; donc la droite totale ΑΕ est égale à la droite totale ΔΖ (not. 2); mais ΑΒ est égal à ΔΓ (34); donc les deux droites ΕΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΖΔ, ΔΓ, chacune à chacune; mais l'angle extérieur ΖΔΓ est égal à l'angle intérieur ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶν ἴση[6], ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται 7. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον[8]. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.

est æqualis, exterior interiori; basis igitur ΕΒ basi ΖΓ æqualis est, et ΕΑΒ triangulum ipsi ΔΓΖ triangulo æquale erit. Commune auferatur ΔΗΕ; reliquum igitur ΑΒΗΔ trapezium reliquo ΕΗΓΖ trapezio est æquale. Commune addatur ΗΒΓ triangulum; totum igitur ΑΒΓΔ parallelogrammum toti ΕΒΓΖ parallelogrammo æquale est. Ergo parallelogramma, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν[1] ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα[2] τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

PROPOSITION XXXVI.

Parallelogramma, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΖΗ, et in eisdem parallelis ΑΘ, ΒΗ; dico æquale esse ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΘ.

ΕΑΒ (29); donc la base ΕΒ est égale à la base ΖΓ (4); donc le triangle ΕΑΒ sera égal au triangle ΔΓΖ. Retranchons la partie commune ΔΗΕ; le trapèze restant ΑΒΗΔ sera égal au trapèze restant ΕΗΓΖ (not. 3); ajoutons le triangle commun ΗΒΓ, le parallélogramme total ΑΒΓΔ sera égal au parallélogramme total ΕΒΓΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

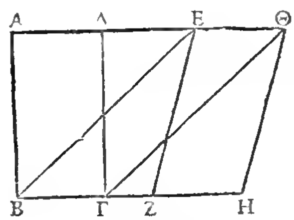
Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΖΗ, et entre les mêmes parallèles ΑΘ, ΕΗ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ.

Joignons ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ [3] ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε [4] καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα

Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΖΗ, et ΖΗ ipsi ΕΘ est æqualis; et ΒΓ igitur ipsi ΕΘ est æqualis. Sunt autem et parallelæ, et jungunt ipsas ipsæ ΒΕ, ΓΘ, quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales et parallelæ sunt; et ΕΒ, ΓΘ igitur et æquales sunt et parallelæ. Parallelogrammum



ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον[5]. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur est ΕΒΓΘ, et est æquale ipsi ΑΒΓΔ; basim enim eamdem habet ΒΓ quam ipsum, et in eisdem parallelis est ΒΓ, ΑΘ. Propter eadem, et ΕΖΗΘ eidem ΕΒΓΘ est æquale; quare et ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ est æquale. Ergo parallelogramma, etc.

Puisque ΒΓ est égal à ΖΗ, et ΖΗ égal à ΕΘ, la droite ΒΓ est égale à ΕΘ; mais les droites ΒΕ, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (33); donc les droites ΕΒ, ΓΘ sont égales et parallèles; donc ΕΒΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ΑΒΓΔ (35); car il a la même base ΒΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme ΕΖΗΘ est égal au parallélogramme ΕΒΓΘ; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζʹ.

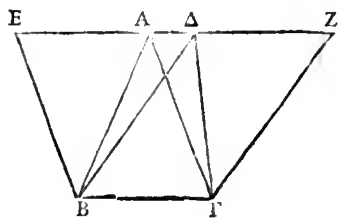
Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα [1] τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula super eâdem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula ΑΒΓ, ΔΒΓ super eâdem basi constituta ΒΓ et in eisdem parallelis ΑΔ, ΒΓ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum ΔΒΓ triangulo.



Εκϐεϐλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ [2], καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα [3]· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι [4] τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παρ-

Producatur ΑΔ ex utrâque parte in Ε, Ζ, et per Β quidem ipsi ΓΑ parallela ducatur ΒΕ, per Γ vero ipsi ΒΔ parallela ducatur ΓΖ.

Parallelogrammum igitur est utramque ipsorum ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ; et æqualia sunt, nam super eâdem basi sunt ΒΓ et in eisdem parallelis ΒΓ, ΕΖ; et est ipsius ΕΒΓΑ quidem parallelogrammi

PROPOSITION XXXVII.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΒΓ soient sur la même base ΒΓ et entre les mêmes parallèles ΑΔ, ΒΓ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ.

Prolongeons de part et d'autre la droite ΑΔ aux points Ε, Ζ, et par le point Β conduisons ΒΕ parallèle à ΓΑ (31), et par le point Γ conduisons ΓΖ parallèle à ΒΔ.

Les figures ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ sont des parallélogrammes, et ces parallélogrammes sont égaux (35); car ils sont sur la même base ΒΓ, et entre les mêmes parallèles; mais le triangle ΑΒΓ est la moitié du parallélogramme ΕΒΓΑ; car αλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

dimidium ΑΒΓ triangulum, nam ΑΒ diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius ΔΒΓΖ parallelogrammi dimidium ΔΒΓ triangulum, nam ΔΓ diameter ipsum bifariam secat; æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΒΓ triangulo. Ergo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

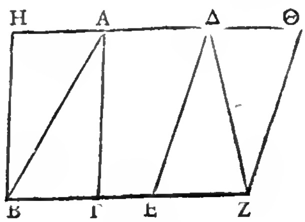
Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν[1].

Εστω τρίγωνα τὰ[2] ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα[3] τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΕΖ et in eisdem parallelis ΒΖ, ΑΔ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo.



Εκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ[4] τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ

Producatur enim ΑΔ ex utrâque parte in Η, Θ, et per Β quidem ipsi ΓΑ parallela

la diagonale ΑΒ le partage en deux parties égales; le triangle ΔΒΓ est la moitié du parallélogramme ΔΒΓΖ, car la diagonale ΔΓ la partage en deux parties égales (34); mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ. Donc, etc.

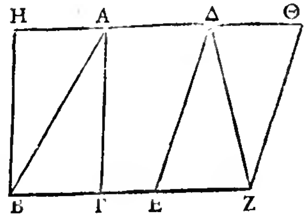
PROPOSITION XXXVIII.

Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΕΖ et entre les mêmes parallèles ΒΖ, ΑΔ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ.

Prolongeons de part et d'autre la droite ΑΔ aux points Η, Θ; par le παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

ducatur BH, per Z vero ipsi ΔE parallela ducatur ZΘ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα [5] τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα [6] τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum HBΓA, ΔEZΘ; et æquale HBΓA ipsi ΔEZΘ, in æqualibus enim et basibus sunt BΓ, EZ, et in eisdem parallelis BZ, HΘ; et est autem ipsius HBΓA parallelogrammi dimidium ABΓ triangulum, AB enim diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius ΔEZΘ parallelogrammi dimidium ZEΔ triangulum, nam ΔZ diameter ipsum bifariam secat. Æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo. Ergo triangula, etc.

point B conduisons la droite BH parallèle à la droite ΓA (32), et par le point Z conduisons la droite ZΘ parallèle à la droite ΔE.

Les figures HBΓA, ΔEZΘ sont des parallélogrammes; mais le parallélogramme HBΓA est égal au parallélogramme ΔEZΘ (36), car ils sont construits sur des bases égales BΓ, EZ et entre les mêmes parallèles BZ, HΘ; mais le triangle ABΓ est la moitié du parallélogramme HBΓA, car la diagonale AB le partage en deux parties égales (34); le triangle ZEΔ est la moitié du parallélogramme ΔEZΘ, car la diagonale ΔZ le partage en deux parties égales, et les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ABΓ est égal au triangle ΔEZ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθʹ.

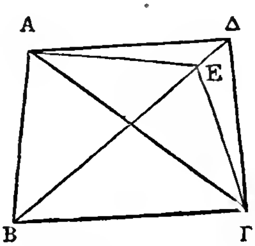
Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ[1] ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εστω ἴσα τρίγωνα[2] τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη[3]· λέγω ὅτι[4] καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Επεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

PROPOSITIO XXXIX.

Æqualia triangula, super eâdem basi constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula ΑΒΓ, ΔΒΓ, super eâdem basi ΒΓ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Jungatur enim ΑΔ; dico parallelam esse ΑΔ ipsi ΒΓ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ισον ἄρα[5] ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ[6]. Αλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον[7] τῷ ΔΒΓ ἐστὶν

Si enim non, ducatur per Α punctum ipsi ΒΓ rectæ parallela ΑΕ, et jungatur ΕΓ.

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ triangulo; super eâdem enim basi est ΒΓ super quâ ipsum ΒΕΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ; sed ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΒΓ est æquale; ergo

PROPOSITION XXXIX.

Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

Que les deux triangles égaux ΑΒΓ, ΔΒΓ soient construits sur la même base ΒΓ, et placés du même côté; je dis que ces deux triangles sont compris entre les mêmes parallèles. Joignons ΑΔ; je dis que ΑΔ est parallèle à ΒΓ.

Car si cela n'est pas, par le point Α conduisons ΑΕ parallèle à ΒΓ (31), et joignons ΕΓ.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΕΒΓ (37), puisque ces deux triangles sont construits sur la base ΒΓ, et placés entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ. Mais le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ; donc le triangle ΔΒΓ est égal au ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν[8] ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

et ΔΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ æquale est, majus minori, quod est impossible. Non igitur parallela est ΑΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse præter ΑΒ; ΑΔ igitur ipsi ΒΓ est parallela. Ergo æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν[1] ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ[2] ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εστω ἴσα τρίγωνα[3] τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη[4]· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Επεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ.

PROPOSITIO XL.

Æqualia triangula, super æqualibus basibus constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΓΕ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse; jungatur enim ΑΔ; dico parallelam esse ΑΔ ipsi ΒΕ.

Si enim non, ducatur per Α ipsi ΒΕ parallela ΑΖ, et jungatur ΕΖ.

triangle ΕΒΓ, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible; donc ΑΕ n'est point parallèle à ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucune autre droite, excepté ΑΔ, n'est parallèle à ΒΓ; donc ΑΔ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XL.

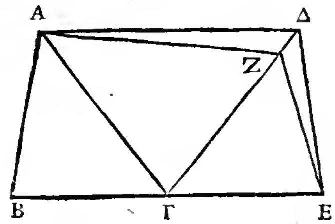
Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

Que les triangles égaux ΑΒΓ, ΔΓΕ soient construits sur les bases égales ΒΓ, ΓΕ et placés du même côté; je dis qu'ils sont entre les mêmes parallèles. Joignons ΑΔ; je dis que ΑΔ est parallèle à ΒΕ.

Car si cela n'est pas, par le point Α, conduisons ΑΖ parallèle à ΒΕ, et joignons ΕΖ.

Ισον ἄρα[5] ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. Αλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ[6]· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον[7] ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστίν[8] ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν[9] ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστὶ παράλληλος[10]. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΓΕ triangulo; in æqualibus enim basibus sunt ΒΓ, ΓΕ et in eisdem parallelis ΒΕ, ΑΖ. Sed ΑΒΓ triangulum æquale est ipsi ΔΓΕ triangulo; et ΔΓΕ triangulum igitur æquale est ipsi ΖΓΕ triangulo, majus minori, quod est impossibile; non igitur parallela est ΑΖ ipsi ΒΕ. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse præter ΑΔ; ΑΔ igitur ipsi ΒΕ est parallela. Ergo æqualia, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

Εὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἐστὶ[1] τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum quam triangulum basim habeat eamdem, et in eisdem parallelis sit, duplum est parallelogrammum trianguli.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΖΓΕ (38); puisque ces deux triangles sont construits sur des bases égales ΒΓ, ΓΕ, et qu'ils sont entre les mêmes parallèles ΒΕ, ΑΖ. Mais le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΓΕ; donc le triangle ΔΓΕ est égal au triangle ΖΓΕ, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible; donc ΑΖ n'est point parallèle à ΒΕ. Nous démontrerons semblablement qu'aucune autre droite, excepté ΑΔ, n'est parallèle à ΒΕ; donc ΑΔ est parallèle à ΒΕ. Donc, etc.

PROPOSITION XLI.

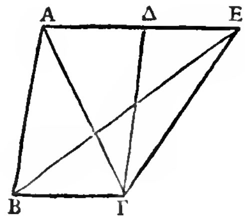
Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε[2] ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω[3] ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Parallelogrammum enim ΑΒΓΔ quam triangulum ΕΒΓ basim habeat eamdem ΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ sit; dico duplum esse ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓ trianguli.

Jungatur enim ΑΓ.



Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον[3] τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ triangulo; nam super eâdem basi est ΒΓ super quâ ipsum ΕΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ. Sed ΑΒΓΔ parallelogrammum duplum est ipsius ΑΒΓ trianguli, nam ΑΓ diameter ipsum bifariam secat; quare ΑΒΓΔ parallelogrammum et ipsius ΕΒΓ trianguli est duplum. Si igitur parallelogrammum, etc.

Que le parallélogramme ΑΒΓΔ ait la même base ΒΓ que le triangle ΕΒΓ, et qu'il soit entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ.

Joignons ΑΓ.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΕΒΓ (37), puisqu'il est sur la même base ΒΓ que lui et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ. Mais le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΑΒΓ, car la diagonale ΑΓ partage ce parallélogramme en deux parties égales (34); donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

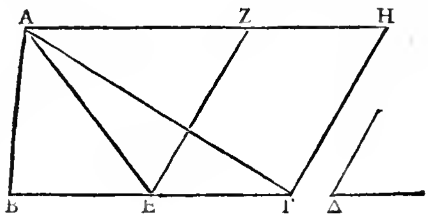
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ[1].

Εστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ[2] Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ[3] τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum ΑΒΓ, datus vero angulus rectilineus Δ; oportet igitur ipsi ΑΒΓ triangulo æquale parallelogrammum constituere in æquali ipsi Δ angulo rectilineo.



Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ

Secetur ΒΓ bifariam in Ε, et jungatur ΑΕ, et constituatur ad ΕΓ rectam et ad punctum in eâ Ε ipsi Δ angulo æqualis ΓΕΖ, et per Α quidem ipsi ΕΓ parallela ducatur ΑΗ, per Γ vero ipsi ΕΖ parallela ducatur ΓΗ; parallelogrammum igitur est ΖΕΓΗ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΓ, æquale est et ΑΒΕ triangulum ipsi ΑΕΓ triangulo; nam super

PROPOSITION XLII.

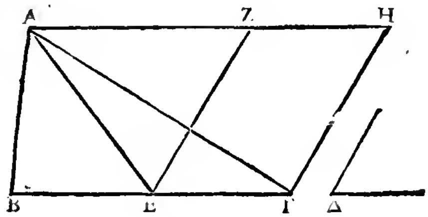
Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.

Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (23), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. Εστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν

æqualibus basibus ΒΕ, ΕΓ sunt, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΗ; duplum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsius ΑΕΓ trianguli. Est autem et ΖΕΓΗ parallelogrammum duplum ipsius ΑΕΓ trianguli; basim enim quam ΑΕΓ eamdem habet,



ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται[5] τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις[6] ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

et in eisdem est parallelis in quibus ipsum ΑΕΓ; æquale igitur est ΖΕΓΗ parallelogrammum ipsi ΑΒΓ triangulo, et habet ΓΕΖ angulum æqualem dato Δ.

Dato igitur triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum constitutum est ΖΕΓΗ in angulo ΓΕΖ qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

ils sont sur des bases égales ΒΕ, ΕΓ, et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΗ; donc le triangle ΑΒΓ est double du triangle ΑΕΓ. Mais le parallélogramme ΖΕΓΗ est double du triangle ΑΕΓ (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ΖΕΓΗ est égal au triangle ΑΒΓ (not. 6), et il a l'angle ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ.

Donc le parallélogramme ΖΕΓΗ a été construit égal au triangle ΑΒΓ dans un angle qui est ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

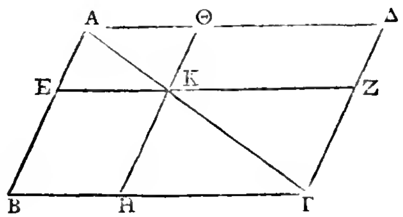
Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi eorum circa diametrum parallelogrammorum complementa æqualia inter se sunt.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, et circa ΑΓ parallelogramma quidem sint ΕΘ, ΖΗ, ipsa vero dicta complementa ΒΚ, ΚΔ; dico æquale esse ΒΚ complementum ipsi ΚΔ complemento.



Επεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα[1] ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, æquale est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΓΔ triangulo. Rursus quoniam parallelogrammum est ΕΚΘΑ, diameter autem ipsius est ΑΚ, æquale est ΑΕΚ triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo. Propter eadem et ΚΖΓ triangulum ipsi ΚΗΓ

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les complémens des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle compléments; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ[2] ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμά λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον[3]. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας

est æquale. Quoniam igitur AEK quidem triangulum ipsi AΘK triangulo est æquale; KZΓ vero ipsi KHΓ, triangulum AEK cum ipso KHΓ est æquale ipsi AΘK triangulo cum KZΓ triangulo; est autem et totum ABΓ triangulum toti AΔΓ æquale. Reliquum igitur BK complementum reliquo HΔ complemento est æquale. Omnis igitur parallelogrammi, etc.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit quidem data recta AB, datum vero triangulum Γ, et datus angulus rectilineus Δ; oportet igitur ad datam rectam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare in æquali ipsi Δ angulo.

Constituatur ipsi Γ triangulo æquale parallelogrammum BEZH, in angulo EBH qui est æqualis ipsi Δ; et ponatur in directum BE ipsi BA, et

triangle AEK est égal au triangle AΘK, et le triangle KZΓ égal au triangle KHΓ, le triangle AEK, avec le triangle KHΓ, est égal au triangle AΘK avec le triangle KZΓ; mais le triangle entier ABΓ est égal au triangle entier AΔΓ; donc le complément restant BK est égal au complément restant HΔ (not. 3). Donc, etc.

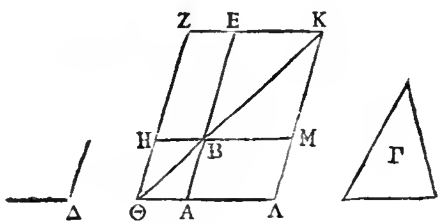
PROPOSITION XLIV.

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que AB soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite AB et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle EBH égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme BEZH égal au triangle Γ (42), plaçons la droite BE dans la direction de la droite BA, prolonεἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΒΑ[1], καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν[2] ἡ ΘΖ, αἱ ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα[3] γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι[4]· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Εκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα.

producatur ZH ad Θ, et per A alterutri ipsarum BH, EZ parallela ducatur AΘ, et jungatur ΘB. Et quoniam in parallelas AΘ, EZ recta incidit ΘZ, ipsi AΘZ, ΘZE anguli duobus rectis sunt æquales; ergo BΘH, HZE duobus rectis minores sunt; rectæ autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productæ concurrunt; ΘB, ZE igitur productæ concurrent. Producantur et concurrant in K, et per K punctum alterutri ipsarum EA, ZΘ parallela ducatur KΛ, et producantur ΘA, HB ad Λ, M puncta.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ[5] παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ[6] ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ

Parallelogrammum igitur est ΘΛKZ, diametrum autem ipsius ΘK, et circa ΘK parallelogramma quidem AH, ME, ipsa vero dicta complementa AB, BZ; æquale igitur est AB ipsi BZ,

geons la droite ZH vers Θ, par le point A conduisons AΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BH, EZ (31), et joignons ΘB. Puisque la droite ΘZ tombe sur les parallèles AΘ, EZ, les angles AΘZ, ΘZE sont égaux à deux droits (29); donc les angles BΘH, HZE sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits, se rencontrent (dém. 5); donc les droites ΘB, ZE étant prolongées, se rencontreront; qu'elles soient prolongées (dém. 2), et qu'elles se rencontrent en K; par le point K, conduisons KΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites EA, ZΘ (31), et prolongeons les droites ΘA, HB vers les points Λ, M.

La figure ΘΛKZ est un parallélogramme, ΘK est sa diagonale, et autour de ΘK sont les parallélogrammes AH, ME, et les parallélogrammes AB, BZ, qu'on nomme compléments; donc AB est égal à BZ (43). Mais BZ est égal au triangle τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. Ἀλλὰ[7] τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα[8] τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sed ΒΖ ipsi Γ triangulo est æquale; et ΛΒ igitur ipsi Γ est æquale. Et quoniam æqualis est ΗΒΕ angulus ipsi ΑΒΜ, sed ΗΒΕ ipsi Δ est æquale; et ΑΒΜ igitur ipsi Δ angulo est æqualis.

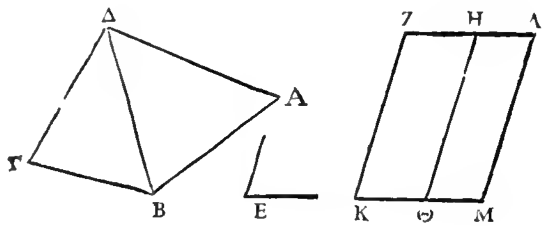
Ad datam igitur rectam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΛΒ, in angulo ΑΒΜ qui est æqulis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ[1].

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.



Ἔστω τὸ μὲν[2] δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ[3] γωνίᾳ τῇ Ε.

Sit quidem datum rectilineum ΑΒΓΔ, datus vero angulus rectilineus Ε; oportet igitur ipsi ΑΒΓΔ rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo Ε.

Γ; donc ΛΒ est égal à Γ. Et puisque l'angle ΗΒΕ est égal à l'angle ΑΒΜ (15), et que l'angle ΗΒΕ est égal à l'angle Δ, l'angle ΑΒΜ est égal à l'angle Δ.

Donc à la droite donnée ΑΒ, et dans l'angle ΑΒΜ égal à Δ, on applique le parallélogramme ΛΒ égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ΑΒΓΔ la figure rectiligne donnée, et Ε l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné Ε, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ΑΒΓΔ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἴση ἐστὶ τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα[5] τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστὶν ἴση[6]. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα[7] ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν

Jungatur enim ΔΒ, et constituatur ipsi ΑΒΔ triangulo æquale parallelogrammum ΖΘ, in ΘΚΖ angulo, qui æqualis est ipsi Ε; et applicetur ad ΘΗ rectam ipsi ΔΒΓ triangulo æquale parallelogrammum ΗΜ, in ΗΘΜ angulo, qui est æqualis ipsi Ε.

Et quoniam Ε angulus utrique ipsorum ΘΚΖ, ΗΘΜ est æqualis; et ΘΚΖ igitur ipsi ΗΘΜ est æqualis. Communis addatur ΚΘΗ; ergo ΖΚΘ, ΚΘΗ, ipsis ΚΘΗ, ΗΘΜ æquales sunt. Sed ΖΚΘ, ΚΘΗ duobus rectis æquales sunt; et ΚΘΗ, ΗΘΜ igitur duobus rectis æquales sunt. Ad aliquam igitur rectam ΗΘ, et ad punctum in eâ Θ, duæ rectæ ΘΚ, ΘΜ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est ΚΘ ipsi ΘΜ. Et quoniam in parallelas ΚΜ, ΖΗ recta incidit ΘΗ, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ æquales inter se sunt. Communis addatur ΘΗΛ; ergo ΜΘΗ, ΘΗΛ ipsis ΘΗΖ, ΘΗΛ æquales sunt. Sed ΜΘΗ, ΘΗΛ duobus rectis æquales sunt; et ΘΗΖ, ΘΗΛ igitur duobus rectis æquales sunt; in directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. Et quoniam ΚΖ

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle ΘΚΖ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons dans l'angle ΗΘΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au triangle ΔΒΓ.

Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles ΘΚΖ, ΗΘΜ, l'angle ΘΚΖ est égal à l'angle ΗΘΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΘΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΘΜ sont égaux à deux droits. Donc les deux droites ΘΚ, ΘΜ, non placées du même côté, font avec la droite ΗΘ, et au point Θ de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite ΘΜ (14). Et puisque la droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΛ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΛ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΛ sont aussi égaux à deux ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν[8] ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον 9.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ[10] δοθείσῃ τῇ Ε. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ipsi ΘΗ æqualis et parallela est, sed ΘΗ ipsi ΜΛ; et ΚΖ igitur ipsi ΜΛ æqualis et parallela est; et jungunt ipsas rectæ ΚΜ, ΖΛ, et ΚΜ, ΖΛ æquales et parallelæ sunt; parallelogrammum igitur est ΚΖΛΜ. Et quoniam aquale est quidem ΑΒΔ triangulum ipsi ΖΘ parallelogrammo; ΔΒΓ vero ipsi ΗΜ; totum igitur ΑΒΓΔ rectilineum toti ΚΖΛΜ parallelogrammo est æquale.

Ergo dato rectilineo ΑΒΓΔ æquale parallelogrammum constitutum est ΚΖΛΜ in angulo ΖΚΜ, qui est æqualis dato Ε. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO XLVI.

Ex datâ rectâ quadratum describere.

Sit data recta ΑΒ; oportet igitur ex ΑΒ rectâ quadratum describere.

droits; donc la droite ΖΗ est dans la direction de la droite ΗΛ; mais ΚΖ est égal et parallèle à ΘΗ, et ΘΗ égale et parallèle à ΜΛ; donc la droite ΚΖ est égale et parallèle à ΜΛ (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les droites ΚΜ, ΖΛ, et les droites ΚΜ, ΖΛ sont égales et parallèles (33); donc ΚΖΛΜ est un parallélogramme. Mais le triangle ΑΒΔ est égal au parallélogramme ΖΘ, et le triangle ΔΒΓ est égal au parallélogramme ΗΜ; donc la figure rectiligne entière ΑΒΓΔ est égale au parallélogramme entier ΚΖΛΜ.

Donc le parallélogramme ΚΖΛΜ a été construit égal à la figure rectiligne donnée ΑΒΓΔ, dans l'angle ΖΚΜ égal à l'angle donné Ε; ce qu'il fallait faire.

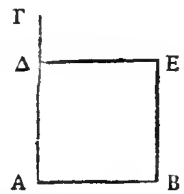
PROPOSITION XLVI.

Décrire un quarré avec une droite donnée.

Soit ΑΒ la droite donnée; il faut décrire un quarré avec la droite ΑΒ.

Ηχθω τῇ ΑΒ εὐθεία, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Ducatur ipsi AB rectæ, a puncto in eâ A, ad rectos ipsa AΓ; et ponatur ipsi AB æqualis AΔ; et per Δ quidem punctum ipsi AB parallela ducatur ΔE; per B vero punctum ipsi AΔ parallela ducatur BE.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. Αλλὰ[1] ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Επεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον

Parallelogrammum igitur est AΔEB; æqualis igitur est quidem AB ipsi ΔE, AΔ vero ipsi BE. Sed AB ipsi AΔ est æqualis; quatuor igitur BA, AΔ, ΔE, EB æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est AΔEB parallelogrammum. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim in parallelas AB, ΔE recta incidit AΔ; ergo BAΔ, AΔE anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem est BAΔ; rectus igitur et AΔE. Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli æqualia inter se sunt; rectus igitur et uterque oppositorum ABE, BEΔ angulorum; rectangulum igitur est AΔEB. Ostensum autem est et æquilaterum;

Du point A, donné dans cette droite, conduisons AΓ perpendiculaire à AB (11); faisons AΔ égal à AB (3); par le point Δ conduisons ΔE parallèle à AB (31); et par le point B conduisons BE parallèle à AΔ.

La figure AΔEB est un pallalélogramme; donc AB est égal à ΔE, et AΔ égal à BE. Mais AB est égal à AΔ; donc les quatre droites BA, AΔ, ΔE, EB sont égales entr'elles; donc le parallélogramme AΔEB est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite AΔ tombe sur les parallèles AB, ΔE, les angles BAΔ, AΔE sont égaux à deux droits (29); mais l'angle BAΔ est droit; donc l'angle AΔE est droit aussi. Mais les côtés et angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux (34); donc chacun des angles opposés ABE, BEΔ est droit; donc le parallélogramme AΔEB est rectangle; mais nous avons démontré qu'il est ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

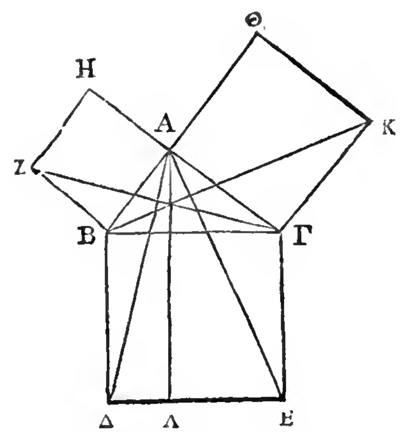
quadratum igitur est, et est ex AB rectâ descriptum. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis ex lateribus rectum angulum continentibus.



Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν[1]· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens ΒΑΓ angulum; dico quadratum ex ΒΓ æquale esse quadratis ex ipsis ΒΑ, ΑΓ.

équilatéral; donc le parallélogramme ΑΔΕΒ est un quarré, et il est décrit avec la droite ΑΒ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré côté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ[2] τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὴ[3] αἱ ΔΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση[4]· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ[5] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι[6] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς

Describatur enim ex ΒΓ quidem quadratum ΒΔΕΓ; ex ipsis vero ΒΑ, ΑΓ ipsa ΗΒ, ΘΓ; et per Α alterutri ipsarum ΒΔ, ΓΕ parallela ducatur ΑΛ; et jungantur ΑΔ, ΖΓ.

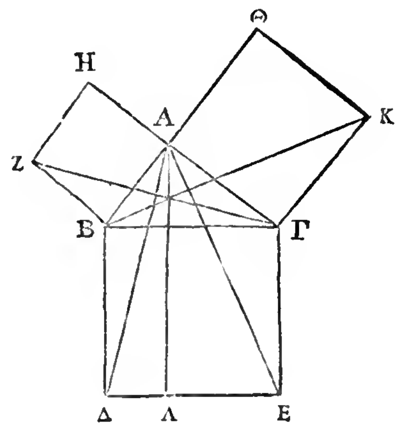
Et quoniam rectus est uterque ipsorum ΒΑΓ, ΒΑΗ angulorum, ad aliquam igitur rectam ΒΑ, et ad punctum in eâ Α, duæ rectæ ΑΓ, ΑΗ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in rectum igitur est ΓΑ ipsi ΑΗ. Propter eadem et ΒΑ ipsi ΑΘ est in rectum. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΖΒΑ, rectus enim uterque, communis addatur ΑΒΓ; totus igitur ΔΒΑ toti ΖΒΓ est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem ΔΒ ipsi ΒΓ, ipsa vero ΖΒ ipsi ΒΑ; duæ utique ΔΒ, ΒΑ duabus ΓΒ, ΒΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΔΒΑ angulo ΖΒΓ æqualis; basis igitur ΑΔ basi ΖΓ æqualis, et ΑΒΔ triangulum ipsi ΖΒΓ triangulo est æquale. Et est quidem ipsius ΑΒΔ trianguli duplum ΒΛ parallelogrammum, basim enim eamdem habent ΒΔ et in eisdem sunt parallelis ΒΔ, ΑΛ; ipsius vero ΖΒΓ trianguli duplum ΒΗ quadratum, et enim rursus basim eamdem habent et in eisdem

Décrivons avec ΒΓ le quarré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les quarrés ΗΒ, ΘΓ; et par le point Α conduisons ΑΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.

Puisque chacun des angles ΒΑΓ, ΒΑΗ est droit, les deux droites ΑΓ, ΑΗ, non placées du même côté, font avec la droite ΒΑ au point Α de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓΑ est dans la direction de ΑΗ; la droite ΒΑ est dans la direction ΑΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΖΒΑ, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ΑΒΓ, l'angle entier ΔΒΑ sera égal à l'angle entier ΖΒΓ (not. 4). Et puisque ΔΒ est égal à ΒΓ, et ΖΒ à ΒΑ, les deux droites ΔΒ, ΒΑ sont égales aux deux droites ΓΒ, ΒΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΖΓ, et le triangle ΑΒΔ égal au triangle ΖΒΓ (4). Mais le parallélogramme ΒΛ est double du triangle ΑΒΔ (41), car ils ont la même base ΒΔ et ils sont entre

ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις[7] ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ομοίως δὲ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγρωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον[8] ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Εν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

sunt parallelis ΖΒ, ΗΓ; æqualium autem dupla æqualia inter se sunt; æquale igitur est et ΒΛ parallelogrammum ipsi ΗΒ quadrato. Similiter autem junctis ΑΕ, ΒΚ ostendetur et ΓΛ parallelogrammum æquale ipsi ΘΓ quadrato. Totum igitur ΒΔΕΓ quadratum duobus ΗΒ, ΘΓ quadratis æquale est, et est quidem ΒΔΕΓ quadratum ex ΒΓ descriptum, ipsa vero ΗΒ, ΘΓ ex ΒΑ, ΑΓ; ergo quadratum ex ΒΓ latere æquale est quadratis ex ΒΑ, ΑΓ lateribus; ergo in rectangulis, etc.



les mêmes parallèles ΒΔ, ΑΛ; le quarré ΒΗ est double du triangle ΖΒΓ, car ils ont la même base ΒΖ et ils sont entre les mêmes parallèles ΖΒ, ΗΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme ΒΛ est égal au quarré ΗΒ. Ayant joint ΑΕ, ΒΚ, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux quarrés ΗΒ, ΘΓ. Mais le quarré ΒΔΕΓ est décrit avec ΒΓ, et les quarrés ΗΒ, ΘΓ sont décrits avec ΒΑ, ΑΓ; donc le quarré du coté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Donc dans les triangles, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

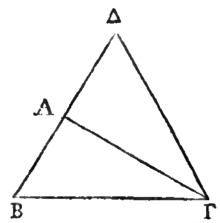
Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

PROPOSITIO XLVIII.

Si trianguli ex uno laterum quadratum æquale est quadratis ex reliquis trianguli duobus lateribus; contentus angulus a reliquis trianguli duobus lateribus rectus est.

Trianguli enim ΑΒΓ ex uno ΒΓ latere quadratum æquale sit quadratis ex ΒΑ, ΑΓ lateribus; dico rectum esse ΒΑΓ angulum.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ[1] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ

Ducatur enim ab Α puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΑΔ, et ponatur ipsi ΒΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, æquale est et ex ΔΑ quadratum ipsi ex ΑΒ quadrato. Commune addatur ex ΑΓ quadratum; ipsa igitur ex

PROPOSITION XLVIII.

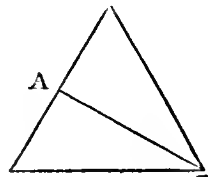
Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le quarré du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ soit égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ est droit.

Du point Α, conduisons la droite ΑΔ perpendiculaire à ΑΓ (11), faisons ΑΔ égal à ΒΑ, et joignons ΔΓ.

Car puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, le quarré de ΔΑ est égal au quarré de ΑΒ. Ajoutons le quarré commun de ΑΓ; les quarrés des droites ΔΑ, ΑΓ seront égaux τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. Αλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε

ΔΑ, ΑΓ quadrata æqualia sunt ipsis ex ΒΑ, ΑΓ quadratis. Sed ipsis quidem ex ΔΑ, ΑΓ æquale est ipsum ex ΔΓ, rectus enim est ΔΑΓ angulus; ipsis vero ex ΒΑ, ΑΓ æquale est ipsum ex ΒΓ, ponitur enim; ipsum igitur ex ΔΓ quadratum æquale est ipsi ex ΒΓ quadrato; quare et latus ΔΓ ipsi ΒΓ est æquale; et quoniam æqualis est



καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ [2] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [3] ἴση. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΔ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ est æqualis; angulus igitur ΔΑΓ angulo ΒΑΓ est æqualis. Rectus autem ΔΑΓ; rectus igitur et ΒΑΓ. Si igitur trianguli, etc.

aux quarrés des droites ΒΑ, ΑΓ. Mais le quarré de ΔΓ est égal aux quarrés des droits ΔΑ, ΑΓ (47), car l'angle ΔΑΓ est droit, et le quarré de ΒΓ est supposé égal aux quarrés des droites ΒΑ, ΑΓ; donc le quarré de ΔΓ est égal au quarré de ΒΓ; donc le côté ΔΓ est égal au côté ΒΓ; mais ΑΔ est égal à ΑΒ, et ΑΓ est commun; donc les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ, ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8). Mais l'angle ΔΑΓ est droit; donc l'angle ΒΑΓ est droit aussi. Donc, etc.

FIN DU PREMIER LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β΄. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν[1] ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

DEFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectum angulum continentibus rectis.

2. Omnis autem parallelogrammi spatii eorum circa diametrum ipsius parallelogrammorum unumquodque cum duobus complementis gnomon vocetur.

LE DEUXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Tout parallélogramme rectangle est dit contenu sous deux droites qui comprènent un angle droit.

2. Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

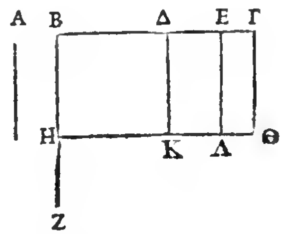
Εὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ[1] τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ[2] τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι[3] τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

PROPOSITIO I.

Si sint duæ rectæ, secta fuerit autem altera ipsarum in æqualia quotcunque segmenta; contentum rectangulum sub duabus rectis æquale est et ipsis sub non sectâ et unoquoque segmentorum contentis rectangulis.

Sint duæ rectæ Α, ΒΓ, et secta sit ΒΓ utcunque in Δ, Ε punctis; dico ipsum sub Α, ΒΓ contentum rectangulum æquale esse et ipsi sub Α, ΒΔ contento rectangulo, et ipsi sub Α, ΔΕ, et etiam ipsi sub Α, ΕΓ.



Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν[4] τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ducatur enim a Β ipsi ΒΓ ad rectos ΒΖ, et ponatur ipsi Α æqualis ΒΗ, et per Η quidem ipsi ΒΓ parallela ducatur ΗΘ; per Δ, Ε, Γ vero ipsi ΒΗ parallelæ ducantur ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre.

Soient deux droites Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit coupé à volonté aux points Δ, Ε; je dis que le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle contenu sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et au rectangle sous Α, ΕΓ.

Par le point Β, conduisons la droite ΒΖ perpendiculaire à ΒΓ (11. 1); faisons ΒΗ égal à Α, et par le point Η conduisons ΗΘ parallèle à ΒΓ (31. 1); et par les points Δ, Ε, Γ, conduisons les droites ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ parallèles à la droite ΒΗ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν[5] ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ[6] ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ[7] ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ[8] ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ. Ἐὰν ἄρα ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Æquale utique est ΒΘ ipsis ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ; et est quidem ΒΘ ipsum sub Α, ΒΓ, continetur enim sub ΗΒ, ΒΓ, æqualis autem ΒΗ ipsi Α; ΒΚ vero ipsum sub Α, ΒΔ, continetur enim sub ΗΒ, ΒΔ, æqualis autem ΒΗ ipsi Α; ΔΛ vero ipsum sub Α, ΔΕ, æqualis enim ΔΚ, hoc est ΒΗ, ipsi Α; et etiam similiter ΕΘ ipsum sub Α, ΕΓ; ergo ipsum sub Α, ΒΓ æquale est ipsi sub Α, ΒΔ, et ipsi sub ipsis Α, ΔΕ, et etiam ipsi sub Α, ΕΓ. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ[1] ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα[2] ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς[3] ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν[4] ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

PROPOSITIO II.

Si recta linea secetur utcunque, ipsa sub totâ et utroque segmentorum contenta rectangula æqualia sunt ipsi ex totâ quadrato.

Recta enim ΑΒ secetur utcunque in Γ puncto; dico ipsum sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum, cum ipso sub ΒΑ, ΑΓ contento rectangulo, æquale esse ipsi ex ΑΒ quadrato.

Le rectangle ΒΘ est égal aux rectangles ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Mais ΒΘ est le rectangle sous Α, ΒΓ, puisqu'il est contenu sous ΗΒ, ΒΓ, et que ΒΗ est égal à Α; ΒΚ est le rectangle sous Α, ΒΔ, puisqu'il est contenu sous ΗΒ, ΒΔ, et que ΒΗ est égal à Α; ΔΛ est le rectangle sous Α, ΔΕ, puisque ΔΚ, c'est-à-dire ΒΗ, est égal à Α; et semblablement, ΕΘ est le rectangle sous Α, ΕΓ; donc le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et encore au rectangle sous Α, ΕΓ. Donc, etc.

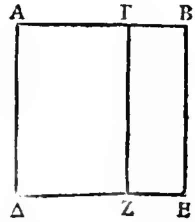
PROPOSITION II.

Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au quarré de la droite entière.

Que la droite ΑΒ soit coupée à volonté en un point Γ; je dis que le rectangle contenu sous ΑΒ, ΒΓ, avec le rectangle contenu sous ΑΒ, ΑΓ, est égal au quarré de ΑΒ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

Describatur enim ex AB quadratum AΔEB, et ducatur per Γ alterutri ipsarum AΔ, BE parallela ΓZ.



Ἴσον δή ἐστι[5] τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Æquale utique est AE ipsis AZ, ΓE; et est quidem AE ipsum ex AB quadratum, AZ vero ipsum sub BA, AΓ contentum rectangulum, continetur etenim sub ΔA, AΓ, æqualis autem AΔ ipsi AB; ΓE vero ipsum sub AB, BΓ, æqualis enim BE ipsi AB; ipsum igitur sub BA, AΓ, cum ipso sub AB, BΓ, æquale est ipsi ex AB quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε[1], τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO III.

Si recta linea secetur utcunque, ipsum sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum æquale est et ipsi sub segmentis contento rectangulo, et ipsi ex prædicto segmento quadrato.

Avec AB décrivons le quarré AΔEB (46. 1), et par le point Γ conduisons ΓZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, BE (31. 1).

Le quarré AE est égal aux rectangles AZ, ΓE; mais AE est le quarré de AB, AZ est le rectangle contenu sous BA, AΓ, puisqu'il est contenu sous ΔA, AΓ, et que AΔ est égal à AB; et ΓE est le rectangle contenu sous AB, BΓ; puisque BE est égal à AB; donc le rectangle sous BA, AΓ, avec le rectangle sous AB, BΓ, est égal au quarré de AB. Donc, etc.

PROPOSITION III.

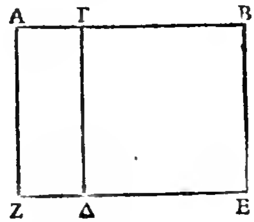
Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la droite entière et l'un des segments, est égal au rectangle contenu sous les segments et au quarré du segment premièrement dit.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ[2]· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[3] BΓ τετραγώνου.

Recta enim AB secetur utcunque in Γ; dico ipsum sub AB, BΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub AΓ, ΓB contento rectangulo, cum ipso ex BΓ quadrato.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον τὸ ΓΔEB, καὶ διήχθω[4] ἡ EΔ ἐπὶ τὸ Z, καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, BE παράλληλος ἤχθω ἡ AZ.

Describatur enim ex ΓB quadratum ΓΔEB, et producatur EΔ in Z, et per A alterutri ipsarum ΓΔ, BE parallela ducatur AZ.



Ἴσον δή ἐστι τὸ AE τοῖς AΔ, ΓE· καὶ ἔστι τὸ μὲν AE τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν AB, BE, ἴση δὲ ἡ BE τῇ BΓ· τὸ δὲ AΔ τὸ[5] ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB, ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓB· τὸ δ' ΔB τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, κατὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Æquale utique est AE ipsis AΔ, ΓE; et est quidem AE ipsum sub AB, BΓ contentum rectangulum, continetur etenim sub AB, BE, æqualis autem BE ipsi BΓ; AΔ vero ipsum sub AΓ, ΓB, æqualis enim ΔΓ ipsi ΓB; ΔB autem ex ΓB est quadratum; ipsum igitur sub AB, BΓ contentum rectangulum æquale est ipsi sub AΓ, ΓB contento rectangulo, cum ipso ex ΓB quadrato. Si igitur recta, etc.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ; je dis que le rectangle contenu sous AB, BΓ est égal au rectangle contenu sous AΓ, ΓB, avec le quarré de BΓ.

Avec ΓB décrivons le quarré ΓΔEB (46. 1), prolongeons EΔ en Z, et par le point A conduisons AZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΔ, BE (31. 1).

Le rectangle AE est égal aux rectangles AΔ, ΓE; mais AE est le rectangle contenu sous AB, BΓ, puisqu'il est contenu sous AB, BE, et que BE est égal à BΓ; AΔ est le rectangle sous AΓ, ΓB, puisque ΔΓ est égal à ΓB; et ΔB est le quarré de ΓB; donc le rectangle contenu sous AB, ΓB est égal au rectangle contenu sous AΓ, ΓB, avec le quarré de ΓB. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

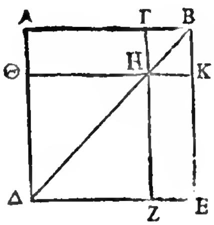
Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO IV.

Si recta linea secetur utcunque, ipsum ex totâ quadratum æquale est et ipsis ex segmentis quadratis, et ipsi bis sub segmentis contento rectangulo.

Recta enim linea AB secetur utcunque in Γ; dico ipsum ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex AΓ, ΓB quadratis, et ipsi bis sub AΓ, ΓB contento rectangulo.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ.

Describatur enim ex AB quadratum AΔEB, et jungatur BΔ, et per Γ quidem alterutri ipsarum AΔ, EB parallela ducatur ΓHZ, per H vero alterutri ipsarum AB, ΔE parallela ducatur ΘK.

PROPOSITION IV.

Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ; je dis que le quarré de AB est égal aux quarrés des segments AΓ, ΓB, et à deux fois le rectangle contenu sous AΓ, ΓB.

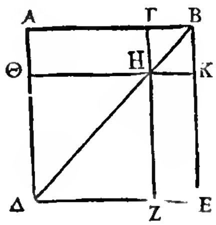
Avec AB décrivons le quarré AΔEB (46. 1); joignons BΔ; par le point Γ conduisons ΓHZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EB (31. 1), et par le point H conduisons ΘK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, ΔE.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση[2]. Αλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Επεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ[3]· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι[4]. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ. Ωστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἔστιν ἀπὸ[5] τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνά ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση

Et quoniam parallela est ΓΖ ipsi ΑΔ, et in ipsas incidit ΒΔ, interior angulus ΓΗΒ æqualis est interiori et opposito ΑΔΒ. Sed ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΒΑ ipsi ΑΔ est æquale; et ΓΗΒ igitur angulus ipsi ΗΒΓ est æqualis; quare et latus ΒΓ lateri ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΒ est æqualis; æquilaterum igitur est ΓΗΚΒ. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parallela est ΓΗ ipsi ΒΚ, et in ipsas incidit ΓΒ; ipsi igitur ΚΒΓ, ΒΓΗ anguli duobus rectis sunt æquales. Rectus autem est ΚΒΓ; rectus igitur et ΒΓΗ. Quare et oppositi ΓΗΚ, ΗΚΒ recti sunt; rectangulum igitur est ΓΗΚΒ. Ostensum autem est et æquilaterum; quadratum igitur est, et est ex ΓΒ. Propter eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est ex ΘΗ, hoc est ex ΑΓ; ipsa igitur ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ sunt. Et quoniam æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub ΑΓ, ΓΒ, æqualis enim ΗΓ ipsi ΓΒ; et ΗΕ igitur æquale ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ipsa igitur ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ipsi bis

Puisque ΓΖ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΔ tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ΓΗΒ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΔΒ (29. 1). Mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5. 1), puisque le côté ΒΑ est égal au côté ΑΔ; donc l'angle ΓΗΒ est égal à l'angle ΗΒΓ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (6. 1); mais ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΓΗ égal à ΒΚ; donc ΗΚ est égal à ΚΒ; donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est équilatéral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓΗ est parallèle à ΒΚ, et que ΓΒ tombe sur ces deux droites, les angles ΚΒΓ, ΒΓΗ sont égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle ΚΒΓ est droit (déf. 30. 1); donc l'angle ΒΓΗ est droit. Donc les angles opposés ΓΗΚ, ΗΚΒ sont droits aussi (34. 1); donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et ce quarré est décrit avec ΓΒ. Par la même raison ΘΖ est aussi un quarré, et ce quarré est décrit avec ΘΗ, c'est-à-dire avec ΑΓ; donc ΘΖ, ΓΚ sont des quarrés décrits avec ΑΓ, ΓΒ. Et puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), et que le rectangle ΑΗ est com-γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν[6] ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Εστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ

sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; ergo quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Sed quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ totum sunt ΑΔΕΒ, quod est ex ΑΒ quadratum; ergo ex ΑΒ qua-



περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Αλλὰ τὰ τέσσαρα[7] ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστι τὸ[8] ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

dratum æquale est et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Si igitur recta, ect.

pris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, car ΗΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΗΕ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quarrés ΘΖ, ΓΚ sont décrits avec les droites ΑΓ, ΓΒ; donc les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΔΕΒ, qui est le quarré de ΑΒ; donc le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ[1].

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Επεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καί εἰσιν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ[2] ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ[3] Α· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Αλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. Εχει δὲ καὶ[4] ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἔστιν

ET ALITER.

Dico ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex AΓ, ΓB quadratis et ipsi bis sub AΓ, ΓB contento rectangulo.

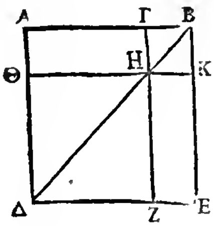
Quoniam enim, in eâdem figurâ, æqualis est BA ipsi AΔ, æqualis est et angulus ABΔ ipsi AΔB; et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo ABΔ trianguli tres anguli ABΔ, AΔB, BAΔ duobus rectis æquales sunt. Rectus autem BAΔ; reliqui igitur ABΔ, AΔB uni recto æquales sunt; et sunt æquales; uterque igitur ipsorum ABΔ, AΔB dimidius est recti. Rectus est autem BΓH, æqualis enim est interiori et opposito qui ad A; reliquus igitur ΓHB dimidius est recti; æqualis igitur est ΓHB angulus ipsi ΓBH; quare et latus BΓ ipsi ΓH est æquale. Sed ΓB quidem ipsi HK est æqualis, ΓH vero ipsi BK; æquilaterum igitur est ΓK. Habet autem et rectum ΓBK angulum; quadratum igitur est ΓK, et est ex ΓB. Propter

ET AUTREMENT.

Je dis que le quarré de AB est égal au quarré des droites AΓ, ΓB et à deux fois le rectangle compris sous AΓ, ΓB.

Car puisque, dans la même figure, BA est égal à AΔ, l'angle ABΔ est égal à l'angle AΔB (5. 1); et puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ABΔ, AΔB, BAΔ du triangle ABΔ sont égaux à deux droits. Mais l'angle BAΔ est droit; donc les deux angles restants ABΔ, AΔB sont égaux à un droit; et ils sont égaux; donc chacun des angle ABΔ, AΔB est la moitié d'un droit. Mais l'angle BΓH est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé en A; donc l'angle restant ΓHB est la moitié d'un droit; donc l'angle ΓHB est égal à ΓBH; donc le côté BΓ est égal au côté ΓH (34. 1). Mais ΓB est égal à HK, et ΓH égal à l'angle BK (34. 1); donc ΓK est équilatéral. Mais il a l'angle droit ΓBK; donc ΓK est ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι[5], καὶ ἔστιν ἴσον[6] τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση ἐστὶ[7] γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα[8] ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Εστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ

eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est æquale ipsi ex ΑΓ; ergo ΓΚ, ΘΖ quadrata sunt, et sunt æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub ΑΓ, ΓΒ, æqualis est enim ΓΗ ipsi ΓΒ; et ΕΗ igitur æquale est ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ergo ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et ipsa ΓΚ, ΘΖ æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ; ergo ΓΚ,



ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Αλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed ΓΚ, ΘΖ et ΑΗ, ΗΕ totum sunt ΑΕ, quod est ex ΑΒ quadratum; ergo ex ΑΒ quadratum æquale est et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Quod oportebat ostendere.

un quarré, et il est le quarré de ΓΒ. Par la même raison, ΘΖ est un quarré, et il est égal à celui de ΑΓ; donc ΓΚ, ΘΖ sont des quarrés, et ils sont égaux à ceux des droites ΑΓ, ΓΒ. Et puisque ΑΗ est égal à ΗΕ (31. 1), et que ΑΗ est sous ΑΓ, ΓΒ, car ΓΗ est égal à ΓΒ; le rectangle ΕΗ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quarrés ΓΚ, ΘΖ sont égaux aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ; donc les figures ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les figures ΓΚ, ΘΖ, et ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΕ, qui est le quarré de ΑΒ; donc le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

COROLLARIUM.

Ex his utique evidens est, in quadratis spatiis, circa diametrum parallelogramma quadrata esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

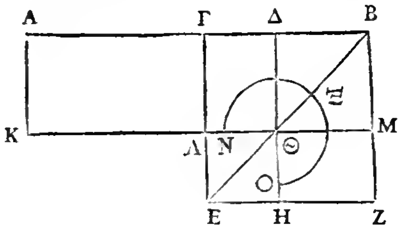
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ

PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ipsum sub inæqualibus totius segmentis contentum rectangulum cum ipso ex ipsâ inter sectiones quadrato æquale est ipsi ex dimidiâ quadrato.

Recta enim aliqua AB secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico



ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

ipsum sub AΔ, ΔB contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale esse ipsi ex ΓB quadrato.

COROLLAIRE.

De là il est évident que, dans les quarrés, les parallélogrammes autour de la diagonale sont des quarrés.

PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière.

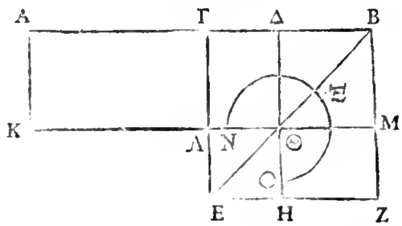
Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ, et en deux parties inégales au point Δ, je dis que le rectangle compris sous AΔ, ΔB, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓB.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ[1].

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ

Describatur enim ex ΓΒ quadratum ΓΕΖΒ, et jungatur ΒΕ; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓΕ, ΒΖ parallela ducatur ΔΗ, per Θ vero alterutri ipsarum ΑΒ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ, et rursus per Α alterutri ipsarum ΓΛ, ΒΜ parallela ducatur ΑΚ.

Et quoniam æquale est ΓΘ complementum ipsi ΘΖ complemento, commune addatur ΔΜ; totum igitur ΓΜ toti ΔΖ æquale est. Sed ΓΜ



τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστὶν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση[2]· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΞΟ γνώμονι[3] ἴσον ἐστί. Ἀλλὰ τὸ μὲν[4] ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ[5] ΔΘ τῇ ΔΒ[6]· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ

ipsi ΑΛ æquale est quia et ΑΓ ipsi ΓΒ est æqualis; et ΑΛ igitur ipsi ΔΖ æquale est. Commune addatur ΓΘ; totum igitur ΑΘ ipsi ΝΞΟ gnomoni æquale est. Sed ΑΘ quidem ipsum sub ΑΔ, ΔΒ est, æqualis enim ΔΘ ipsi ΔΒ; et ΝΞΟ igitur gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ. Commune addatur ΛΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΔ; ergo ΝΞΟ gnomon et ΛΗ æqualia sunt ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo et ipsi ex ΓΔ quadrato.

Avec la droite ΓΒ décrivons le quarré ΓΕΖΒ (46. 1), et joignons ΒΕ; par le point Δ conduisons ΔΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΒΖ (31. 1); par le point Θ conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΕΖ; et par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΛ, ΒΜ.

Puisque le complément ΓΘ est égal au complément ΘΖ (43. 1), ajoutons le quarré commun ΔΜ, le rectangle entier ΓΜ sera égal au rectangle entier ΔΖ. Mais ΓΜ est égal à ΑΛ (36. 3), puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ; donc le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΔΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΘ, le rectangle entier ΑΘ sera égal au gnomon ΝΞΟ; mais ΑΘ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, puisque ΔΘ est égal à ΔΒ; donc le gnomon ΝΞΟ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le quarré commun ΛΗ, qui est égal au quarré de ΓΔ (corol. 4. 2), le gnomon ΝΞΟ et le quarré ΛΗ seront égaux au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, et au quarré ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Αλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΙΒ· τὸ ἄρα ὑπο τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Sed ΝΞΟ gnomon et ΛΗ totum sunt ΓΕΖΒ quadratum, quod est ex ΓΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale est ipsi ex ΓΒ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

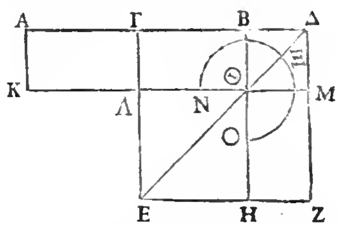
Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsum sub totâ cum adjectâ, et sub adjectâ contentum parallelogrammum cum ipso ex dimidiâ quadrato æquale est ipsi ex compositâ ex dimidiâ et adjectâ tanquam ex unâ descripto quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secetur bifariam ad Γ punctum, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum ΒΔ; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΒ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΔ quadrato.



de ΓΔ. Mais le gnomon ΝΞΟ et ΛΗ sont le quarré entier ΓΕΖΒ, qui est décrit avec ΓΒ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΙΒ. Donc, etc.

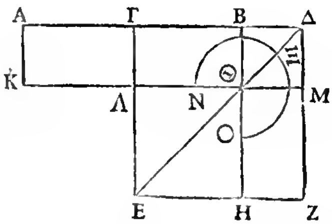
PROPOSITION VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite ΑΒ soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite ΒΔ; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΒ, est égal au quarré de ΓΔ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρα τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρα τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Describatur enim ex ΓΔ quadratum ΓΕΖΔ, et jungatur ΔΕ, et per Β quidem punctum alterutri ipsarum ΓΕ, ΔΖ parallela ducatur ΒΗ; per Θ vero punctum alterutri ipsarum ΑΔ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ; et adhuc per Α alterutri ipsarum ΓΛ, ΔΜ parallela ducatur ΑΚ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν[2] ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. Αλλὰ[3] τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστὶν ἴσον[4]. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. Αλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ[5]. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, æquale est et ΑΛ ipsi ΓΘ. Sed ΓΘ ipsi ΘΖ æquale est; et ΑΛ igitur ipsi ΘΖ est æquale. Commune addatur ΓΜ; totum igitur ΑΜ ipsi ΝΞΘ gnomoni est æquale. Sed ΑΜ est ipsum sub ΑΔ, ΔΒ, æqualis enim est ΔΜ ipsi ΔΒ; et igitur ΝΞΘ gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo. Commune addatur ΛΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΒ quadrato; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ΝΞΟ gnomoni et ipsi ΛΗ. Sed ΝΞΟ gno-

Avec la droite ΓΔ décrivons le quarré ΓΕΖΔ (46. 1); joignons ΔΕ; par le point Β conduisons ΒΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (31. 1); par le point Θ, conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΕΖ, et enfin par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΛ, ΔΜ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘΖ (43. 1); donc le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΘΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΜ, le rectangle entier ΑΜ sera égal au gnomon ΝΞΟ. Mais ΑΜ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, car ΔΜ est égal à ΔΒ (4. 2); donc le gnomon ΝΞΟ est égal au rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le quarré ΛΗ qui est égal au quarré de ΓΒ, le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le quarré de ΓΒ sera égal au gnomon ΝΞΟ et au quarré ΛΗ.

ΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΑΗ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

mon et ΑΗ totum sunt ΓΕΖΔ quadratum, quod est ex ΓΔ; ergo sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ex ΓΔ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

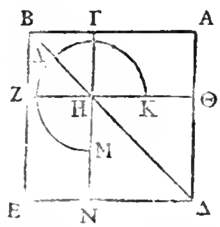
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur utcunque, ipsa ex totâ et ex uno segmentorum, simul sumpta quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub totâ et dicto segmento contento rectangulo, et ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit utcunque in Γ puncto; dico ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia esse et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectangulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.



Mais le gnomon ΝΞΟ, et le quarré ΑΗ sont le quarré entier ΓΕΖΔ, qui est le quarré de ΓΔ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le quarré de ΓΒ est égal au quarré de ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si une ligne droite est coupée d'une manière quelconque, le quarré de la droite entière et le quarré de l'un des segments, pris ensemble, sont égaux à deux fois le rectangle compris sous la droite entière et ledit segment, et au quarré du segment restant.

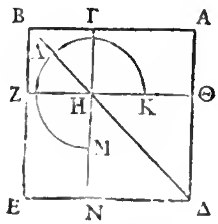
Qu'une droite ΑΒ soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis que les quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ, et au quarré de ΓΑ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν[1] ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν[2]· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Αλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΑΜ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΑΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Εστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ

Describatur enim ex AB quadratum ΑΔΕΒ; et construatur figura.

Quoniam igitur æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, commune addatur ΓΖ; totum igitur ΑΖ toti ΓΕ æquale est; ergo ΑΖ, ΓΕ dupla sunt ipsius ΑΖ. Sed ΑΖ, ΓΕ ipse ΚΑΜ sunt gnomon et ΓΖ quadratum; ΚΑΜ igitur gnomon et ΓΖ dupla sunt ipsius ΑΖ Est autem ipsius ΑΖ duplum et ipsum bis sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΖ



ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΝ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Αλλὰ ὁ ΚΑΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ

ipsi ΒΓ; ergo ΚΑΜ gnomon et ΓΖ quadratum æqualia sunt ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ. Commune addatur ΘΝ, quod est ex ΑΓ quadratum; ergo ΚΑΜ gnomon et ΓΖ, ΘΝ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectangulo et ipsi ex ΑΓ quadrato. Sed ΚΑΜ gnomon et ΓΖ, ΘΝ quadrata totum sunt ΑΔΕΒ et ΓΖ, quæ sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia sunt ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ con-

Avec AB décrivons le quarré ΑΔΕΒ (46. 1); et construisons la figure.

Puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), ajoutons le quarré commun ΓΖ; le rectangle entier ΑΖ sera égal au rectangle entier ΓΕ; donc les rectangles ΑΖ, ΓΕ sont doubles du rectangle ΑΖ. Mais les rectangles ΑΖ, ΓΕ sont le gnomon ΚΑΜ et le quarré ΓΖ; donc le gnomon ΚΑΜ et le quarré ΓΖ sont doubles du rectangle ΑΖ. Mais deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle ΑΖ, car ΒΖ est égal à ΒΓ (cor. 4. 2); donc le gnomon ΚΑΜ et le quarré ΓΖ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Ajoutons le quarré commun ΘΝ, qui est le quarré de ΑΓ; le gnomon ΚΑΜ et les quarrés ΓΖ, ΘΝ seront égaux à deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, et au quarré de ΑΓ. Mais le gnomon ΚΑΜ et les quarrés ΓΖ, ΘΝ sont les quarrés entiers ΑΔΕΒ, ΓΖ, qui sont les τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ, τῷ[3] δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

tento rectangulo cum ex ΑΓ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

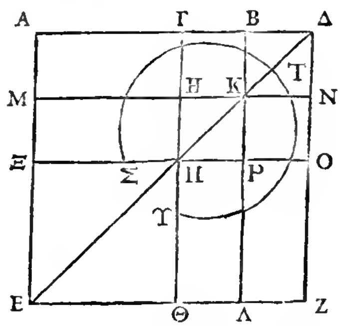
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ[1] λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur utcunque, quater sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum cum ipso ex reliquo segmento quadrato æquale est ipsi ex totâ et dicto segmento tanquam ex unâ descripto quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit utcunque in Γ puncto; dico et quater sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΑΓ quadrato æquale esse ipsi ex ipsâ ΑΒ, ΒΓ tanquam ex unâ descripto quadrato.



quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ; donc les quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ, et au quarré de ΑΓ. Donc, etc.

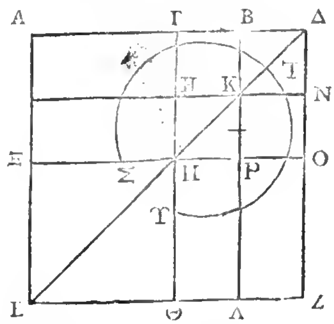
PROPOSITION VIII.

Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, avec le quarré du segment restant, est égal au quarré décrit avec la droite entière et ledit segment, comme avec une seule droite.

Qu'une droite ΑΒ soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis que quatre fois le rectangle compris sous les droites ΑΒ, ΒΓ, avec le quarré de ΑΓ, est égal au quarré décrit avec les droites ΑΒ, ΒΓ, comme avec une seule droite.

Ἐκϐεϐλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ[2], καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα[3] τῇ ΚΝ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν[4] ΓΒ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ[5] τὸ μὲν[6] ΓΚ



τῷ ΒΝ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΚΟ. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστὶν ἴσον[7], παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΒΝ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστίν[8]· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΓΗ ἐστὶν[9] ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΗΠ ἐστὶν

Producatur enim in directum ipsi ΑΒ recta ΒΔ, et ponatur æqualis ipsi ΓΒ ipsa ΒΔ, et describatur ex ΑΔ quadratum ΑΕΖΔ, et construatur dupla figura.

Quoniam igitur æqualis est ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, et ΒΔ ipsi ΚΝ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΝ est æqualis. Propter eadem utique et ΠΡ ipsi ΡΟ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΓΒ quidem ipsi ΒΔ, et ΗΚ ipsi ΚΝ; æquale igitur est ΓΚ quidem ipsi ΒΝ, et ΗΡ ipsi ΚΟ. Sed ΓΚ ipsi ΡΝ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΓΟ parallelogrammi; et ΒΝ igitur ipsi ΗΡ æquale est; quatuor igitur ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ æqualia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius ΓΚ. Rursus, quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΒΔ, sed ΒΔ quidem ipsi ΒΚ, hoc est, ipsi ΓΗ est æqualis, ΓΒ vero ipsi ΗΚ, hoc est,

Conduisons la droite ΒΔ dans la direction de ΑΒ; faisons ΒΔ égal à ΒΓ; décrivons avec ΑΔ le quarré ΑΕΖΔ (46. 2), et construisons une double figure.

Puisque ΒΓ est égal à ΒΔ, que ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΒΔ égal à ΚΝ, la droite ΗΚ est égale à la droite ΚΝ. La droite ΠΡ est égale à la droite ΡΟ, par la même raison. Et puisque ΒΓ est égal à ΒΔ, et ΗΚ égal à ΚΝ, le rectangle ΓΚ est égal au rectangle ΒΝ, et le rectangle ΗΡ égal au rectangle ΚΟ (36. 1). Mais le rectangle ΓΚ est égal au rectangle ΡΝ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΓΟ; donc le rectangle ΒΝ est égal au rectangle ΗΡ; donc les quatre rectangles ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont le quadruple du rectangle ΓΚ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΒΔ, et ΒΔ égal à ΒΚ, c'est-à-dire à ΓΗ (34. 1), et que ΓΒ est égal à ΗΚ, c'est-à-dire à ΗΠ, la ἴση[10]· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν[11]. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν[12] ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσιά ἐστιν[13]. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ[14]. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστὶν, ἴση γάρ[15] ἡ ΚΒ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ[16] τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. Ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ,

ipsi ΗΠ est æqualis; et ΓΗ igitur ipsi ΗΠ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΓΗ quidem ipsi ΗΠ, et ΗΡ ipsi ΡΟ; æquale est et ΑΗ quidem ipsi ΜΠ, et ΠΛ ipsi ΡΖ. Sed ΜΠ ipsi ΠΛ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΜΛ parallelogrammi; et ΑΗ igitur ipsi ΡΖ æquale est; quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ æqualia inter se sunt; quatuor igitur ipsius ΑΗ quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ ipsius ΓΚ quadrupla; ergo octo quæ continet ΣΤΥ gnomonon quadrupla sunt ipsius ΑΚ. Et quoniam ΑΚ ipsum sub ΑΒ, ΒΔ est, æqualis enim est ΚΒ ipsi ΒΔ; ergo ipsum quater sub ΑΒ, ΒΔ quadruplum est ipsius ΑΚ. Ostensus est autem ipsius ΑΚ quadruplus et ΣΤΥ gnomon. Ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni. Commune addatur ΞΘ, quod æquale est ipsi ex ΑΓ quadrato; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ contentum rectangulum cum ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni et ipsi ΞΘ. Sed ΣΤΥ gnomon et ΞΘ totum sunt ΑΕΖΔ

droite ΓΗ est égale à la droite ΗΠ. Et puisque ΓΗ est égal à ΗΠ, et que ΠΡ est égal à ΡΟ, le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΜΠ, et le rectangle ΠΛ égal au rectangle ΡΖ (36. 1). Mais le rectangle ΜΠ est égal au rectangle ΠΛ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΜΛ; donc le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΡΖ; donc les quatre rectangles ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont quadruples du rectangle ΑΗ. Mais on a démontré que les quatre quarrés ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ sont quadruples du quarré ΓΚ; donc les huit figures qui composent le gnomon ΣΤΥ sont quadruples du rectangle ΑΚ. Mais le rectangle ΑΚ est sous ΑΒ, ΒΔ; car ΚΒ est égal à ΒΔ (cor. 4. 2); donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est quadruple du rectangle ΑΚ. Mais on a démontré que le gnomon ΣΤΥ est quadruple du rectangle ΑΚ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est égal au gnomon ΣΤΥ. Ajoutons le quarré commun ΞΘ, qui est égal au quarré de ΑΓ (cor. 4. 2); quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΔ, avec le quarré de ΑΓ sera égal au gnomon ΣΤΥ et au quarré ΞΘ. Mais le gnomon ΣΤΥ et le quarré ΞΘ sont le quarré entier ΑΕΖΔ, qui est décrit

ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[17] ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς[18] ΑΔ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ[19]· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[20] ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

quadratum, quod est ex ΑΔ; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ cum ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato. Æqualis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ; ergo quater sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato, hoc est, ex ipsâ ΑΒ et ΒΓ tanquam ex unâ descripto quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπ-

PROPOSITIO IX.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ex inæqualibus totius segmentis quadrata dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex ipsâ inter sectiones quadrati.

Recta enim aliquia ΑΒ secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla esse ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum.

Ducatur enim a Γ ipsi ΑΒ ad rectas ΓΕ, et ponatur æqualis utrique ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et jun-

avec ΑΔ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ avec le quarré de ΒΓ est égal au quarré de ΑΔ. Mais ΒΔ est égal à ΒΓ; donc quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ avec le quarré de ΑΓ est égal au quarré de ΑΔ, c'est-à-dire au quarré décrit avec ΑΒ et ΒΓ comme avec une seule droite. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, les quarrés des segments inégaux de la droite entière sont doubles du quarré de la moitié de cette droite et du quarré de la droite placée entre les sections.

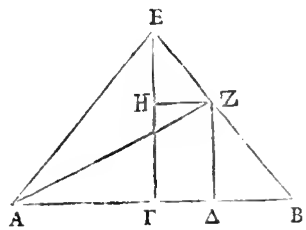
Que la droite ΑΒ soit coupée en parties égales en Γ, et en parties inégales en Δ; je dis que les quarrés des droits ΑΔ, ΔΒ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ.

Du point Γ conduisons ΓΕ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1); faisons la droite ΕΓ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΓΒ, et joignons ΕΑ, ΕΒ; par le point ἐζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω[1] ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν, καὶ εἰσὶν ἴσαι[2]· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν[3] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση

gantur AE, EB, et per Δ quidem ipsi EΓ parallela ducatur ΔZ, per Z vero ipsi AB parallela ducatur ZH, et jungatur AZ.

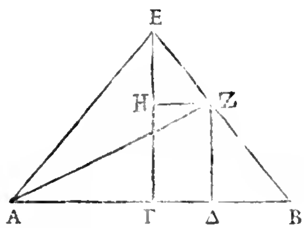
Et quoniam æqualis est AΓ ipsi ΓE, æqualis est et EAΓ angulus ipsi AEΓ. Et quoniam rectus est ad Γ; reliqui igitur EAΓ, AEΓ uni recto æquales sunt, et sunt æquales; dimidius igitur recti est uterque ipsorum ΓEA, ΓAE. Propter eadem utique et uterque ipsorum ΓEB, EBΓ dimidius est recti; totus igitur AEB rectus est. Et quoniam HEZ dimidius est recti, rectus autem EHZ, æqualis enim est interiori et opposito EΓB; reliquus igitur EZH dimidius est recti; æqualis igitur est HEZ angulus ipsi EZH; quare et latus EH lateri HZ est æquale. Rursus quoniam ad B angulus dimidius est recti, rectus autem ZΔB, æqualis enim est rursus interiori et opposito



Δ conduisons ΔZ parallèle à EΓ (31. 1), et par le point Z conduisons ZH parallèle à AB, et joignons AZ.

Puisque AΓ est égal à ΓE, l'angle EAΓ est égal à l'angle AEΓ (5. 1). Et puisque l'angle en Γ est droit, les angles restants EAΓ, AEΓ sont égaux à un droit (32. 1); mais ils sont égaux; donc chacun des angles ΓEA, ΓAE est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles ΓEB, EBΓ est la moitié d'un droit; donc l'angle entier AEB est droit. Et puisque l'angle HEZ est la moitié d'un droit, et que l'angle EHZ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé EΓB (29. 1), l'angle EZH est la moitié d'un droit; donc l'angle HEZ est égal à l'angle EZH; donc le côté EH est égal au côté HZ (6. 1). De plus, puisque l'angle en B est la moitié d'un droit, et que l'angle ZΔB est droit, car il égal à l'angle intérieur γάρ ἐστι πάλιν[5] τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς[6] ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς[7] ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς[8] ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς[9] ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ[10] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον[11]. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ[12]· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς

ΕΓΒ; reliquus igitur ΔΖΒ dimidius est recti; æqualis igitur ad Β angulus ipsi ΔΖΒ; quare et latus ΖΔ lateri ΔΒ est æquale. Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æquale est et ipsum ex ΑΓ ipsi ex ΓΕ; ergo ex ΑΓ, ΓΕ quadrata dupla sunt ipsius ex ΑΓ. Ipsis autem ex ΑΓ, ΓΕ æquale est ex ΑΕ quadratum, rectus enim est ΑΓΕ angulus; ipsum igitur ex ΑΕ duplum est ipsius ex ΑΓ. Rursus quoniam æqualis est ΕΗ ipsi ΗΖ, æquale est et ipsum ex ΕΗ ipsi ex ΗΖ; ergo ex ΕΗ, ΗΖ quadrata dupla sunt ipsius ex ΗΖ quadrati. Ipsis autem ex ΕΗ, ΗΖ quadratis æquale est ipsum ex ΕΖ; ergo ex ΕΖ quadratum duplum est ipsius ex ΗΖ. Sed æquale ipsum est ΗΖ ipsi ex ΓΔ; ipsum igitur ex ΕΖ duplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem ipsum ex ΕΑ duplum ipsius ex ΑΓ; ergo ex ΑΕ, ΕΖ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum; ipsis vero ex ΑΕ, ΕΖ æquale est ex ΕΖ quadratum,



et opposé ΕΓΒ (29. 1), l'angle restant ΔΖΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle en Β est égal à l'angle ΔΖΒ; donc le côté ΖΔ est égal au côté ΔΒ (6. 1). Et puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, le quarré de ΑΓ est égal au quarré de ΓΕ; donc les quarrés des droites ΑΓ, ΓΕ sont doubles du quarré de ΑΓ. Mais le quarré de ΕΑ est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΕ (47, 1), car l'angle ΑΓΕ est droit; donc le quarré de ΑΕ est double du quarré de ΑΓ. De plus, puisque ΕΗ est égal à ΗΖ, le quarré de ΕΗ est égal au quarré de ΗΖ; donc les quarrés des droites ΕΗ, ΗΖ sont doubles du quarré de ΗΖ. Mais le quarré de ΕΖ est égal aux quarrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1); donc le quarré de ΕΖ est double du quarré de ΗΖ. Mais ΗΖ est égal à ΓΔ (34. 1); donc le quarré de ΕΖ est double du quarré de ΗΖ. Mais le quarré de ΕΑ est

ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γάρ ἐστιν[13] ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

rectus enim est ΑΕΖ angulus; ergo ΑΖ quadratum duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi vero ex ΑΖ æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΖ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsa igitur ex ΑΔ, ΔΖ dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Æqualis autem ΔΖ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου[1].

PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsa ex totâ cum adjectâ et ex adjectâ, simul sumpta quadrata, dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex compositâ ex dimidiâ et adjectâ tanquam ex unâ descripti quadrati.

double du quarré de ΑΓ; donc les quarrés des droites ΑΕ, ΕΖ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le quarré de ΑΖ est égal aux quarrés des droites ΑΕ, ΕΖ (47. 1), car l'angle ΑΕΖ est droit; donc le quarré ΑΖ est double des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les quarrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont égaux au quarré de ΑΖ (47. 1), car l'angle en Δ est droit; donc les quarrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais ΔΖ est égal à ΔΒ; donc les quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION X.

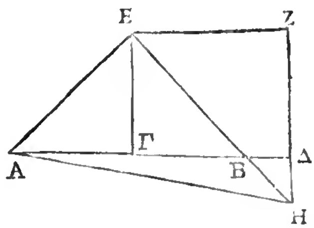
Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le quarré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le quarré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du quarré de la moitié de la droite entière, et du quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ πάλιν παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Recta enim aliqua AB secta sit bifariam in Γ, adjiciatur autem aliqua ei recta in directum BΔ; dico ex AΔ, ΔB quadrata dupla esse ex AΓ, ΓΔ quadratorum.

Ducatur enim a Γ puncto ipsi AB ad rectos ΓE, et ponatur æqualis utrique ipsorum AΓ, ΓB, et jungantur EA, EB; et per E quidem ipsi AΔ parallela ducatur EZ; per Δ vero ipsi ΓE rursus parallela ducatur ZΔ. Et quoniam in parallelas rectas EΓ, ZΔ recta aliqua incidit EZ, anguli ΓEZ, EZΔ duobus rectis æquales sunt; ergo ZEB, EZΔ duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ conveniunt; ergo EB, ZΔ productæ ad partes BΔ convenient. Producantur, et conveniant in H, et jungatur AH.



Qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales en Γ, et qu'on lui ajoute directement une droite BΔ; je dis que les quarrés des droites AΔ, ΔB sont doubles des quarrés des droites AΓ, ΓΔ.

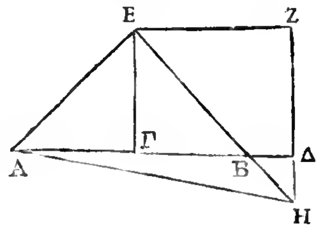
Du point Γ conduisons ΓE perpendiculaire à AB (11. 1); faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites AΓ, ΓB; joignons EA, EB; par le point E conduisons EZ parallèle à AΔ; et par le point Δ conduisons ZΔ parallèle à ΓE (31. 1). Puisque la droite EZ tombe sur les parallèles EΓ, ZΔ, les angles ΓEZ, EZΔ sont égaux à deux droits (29. 1); donc les angles ZEB, EZΔ sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits (dém. 5); donc les droites EB, ZΔ prolongées se rencontreront du côté BΔ. Prolongeons ces droites; qu'elles se rencontrent au point H; et joignons AH.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν[3] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς[4]· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. Εστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθὴ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλὰξ γάρ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπο ΔΗΒ[5] τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς[6] ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ

Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æqualis est et angulus ΑΕΓ ipsi ΕΑΓ; atque rectus est ad Γ; dimidius igitur recti est uterque ipsorum ΕΑΓ, ΑΕΓ. Propter eadem utique et uterque ipsorum ΓΕΒ, ΕΒΓ dimidius est recti; rectus igitur est ΑΕΒ. Et quoniam dimidius recti est ΕΒΓ, dimidius igitur recti est et ΔΒΗ. Est autem et ΒΔΗ rectus; æqualis enim est ispi ΔΓΕ alterno. Reliquus igitur ΔΗΕ ipsi ΔΒΗ est æqualis; quare et latus ΒΔ lateri ΔΗ est æquale. Rursus, quoniam ΕΗΖ dimidius est recti, rectus autem est qui ad Ζ, æqualis enim est opposito qui ad Γ; reliquus igitur ΖΕΗ dimidius est recti; æqualis igitur ΕΗΖ angulus ipsi ΖΕΗ; quare et latus ΗΖ lateri ΖΕ est æquale. Et quoniam æqualis est ΕΓ ipsi ΓΑ, æquale est et ex ΕΓ quadratum ipsi ex ΓΑ quadrato. Ergo ex ΕΓ, ΓΑ quadrata dupla sunt ex ΓΑ quadrati. Ipsis autem ex ΕΓ, ΓΑ æquale est ipsum ex ΑΕ; ergo ex ΕΑ quadratum duplum est ipsius ex ΑΓ quadrato. Rursus, quoniam æqualis est ΖΗ ipsi ΖΕ, æquale est et ipsum ex ΗΖ ipsi ex ΖΕ. Ipsa igitur ex ΗΖ, ΖΕ dupla sunt ipsius ex ΕΖ. Ipsis autem ex ΗΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΗ. Ipsum

Puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΕΑΓ (5. 1.); mais l'angle en Γ est droit; donc chacun des angles ΕΑΓ, ΑΕΓ est la moitié d'un droit (32. 1). Par la même raison, chacun des angles ΓΕΒ, ΕΒΓ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΑΕΒ est droit. Et puisque l'angle ΕΒΓ est lá moitié d'un angle droit, l'angle ΔΒΗ est la moitié d'un droit (15. 1). Mais l'angle ΒΔΗ est droit (29. 1), car il est égal à l'angle alterne ΔΓΕ; donc l'angle restant ΔΗΒ est égal à l'angle ΔΒΗ; donc le côté ΒΔ est égal au côté ΔΗ (6. 1). De plus, puisque l'angle ΕΗΖ est la moitié d'un droit, et que l'angle en Ζ est droit, car il est égal à l'angle opposé en Γ (34. 1), l'angle restant ΖΕΗ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΕΗΖ est égal à l'angle ΖΕΗ; donc le côté ΗΖ est égal au côté ΖΕ (6. 1). Et puisque ΕΓ est égal à ΓΑ, le quarré de ΕΓ est égal au quarré de ΓΑ; donc les quarrés des droites ΕΓ, ΓΑ sont doubles du quarré de ΓΑ. Mais le quarré de ΑΕ est égal aux quarrés dés droites ΕΓ, ΓΑ (47. 1); donc le quarré de ΕΑ est double du quarré de ΑΓ. De καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ[7] τῷ ἀπὸ τῆς ZE[8]· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν HZ, ZE διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν HZ, ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH[9]· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Ἴση δὲ EZ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE, EH τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE, EH τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔH· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AΔ, ΔH[10] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ[11]. Ἴση δὲ ἡ ΔH τῇ ΔB· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur ex EH duplum est ipsius ex EZ. Æqualis autem EZ ipsi ΓΔ; ergo ex EH quadratum duplum est ipsius ex ΓΔ. Demonstratum est autem et ipsum ex EA duplum ipsius AΓ; ergo ex AE, EH quadrata dupla sunt ex AΓ, ΓΔ quadratorum. Ipsis autem ex AE, EH quadratis æquale est ex AH quadratum; ipsum igitur ex AH duplum est ipsorum AΓ, ΓΔ. Ipsi autem ex AH æqualia sunt ipsa ex AΔ, ΔH; ipsa igitur ex AΔ, ΔH dupla sunt ipsorum ex AΓ, ΓΔ. Æqualis autem est ΔH ipsi ΔB; ergo ex AΔ, ΔB quadrata dupla sunt ex AΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.



plus, puisque ZH est égal à ZE, le quarré de HZ est égal au quarré de ZE; donc les quarrés des droites HZ, ZE sont doubles du quarré de EZ. Mais le quarré de EH est égal aux quarrés des droites HZ, ZE (47. 1); donc le quarré de EH est double du quarré de EZ. Mais EZ est égal à ΓΔ; donc le quarré de EH est double du quarré de ΓΔ. Mais on a démontré que le quarré de EA est double du quarré de AΓ; donc les quarrés des droites AE, EH sont doubles des quarrés des droites AΓ, ΓΔ. Mais le quarré de AH est égal aux quarrés des droites AE, EH (47. 1); donc le quarré AH est double des quarrés des droites AΓ, ΓΔ. Mais les quarrés des droites AΔ, ΔH sont égaux au quarré de AH (47. 1); donc les quarrés des droites AΔ, ΔH sont doubles des quarrés des droites AΓ, ΓΔ; mais la droite ΔH est égale à la droite ΔB; donc les quarrés des droites AΔ, ΔB sont doubles des quarrés des droites AΓ, ΓΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

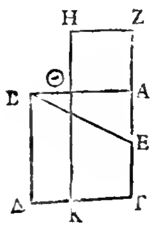
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Sit data recta AB; oportet igitur ipsam AB secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ὑπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ αναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ

Describatur enim ex AB quadratum ABΔΓ, et secetur AΓ bifariam in E puncto, et jungatur BE, et producatur ΓA in Z, et ponatur ipsi BE æqualis EZ, et describatur ex AZ quadratum ZΘ, et producatur HΘ ad K; dico AB sectam

PROPOSITION XI.

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

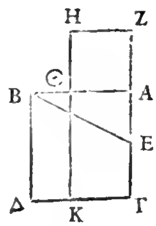
Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Avec la droite AB décrivons le quarré ABΔΓ (46. 1); coupons AΓ en deux parties égales au point E (10. 1); joignons BE, prolongeons ΓA vers Z; faisons EZ égal à BE (3. 1); décrivons avec AZ le quarré ZΘ; et prolongeons HΘ vers K; je dis que la διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν[1] τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. Ιση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ[2]. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς[3] ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον[4] ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ

esse in Θ, ita ut sub AB, BΘ contentum rectangulum æquale faciat ipsi ex AΘ quadrato.

Quoniam enim recta AΓ secatur bifariam in E, adjicitur autem ei ipsa AZ; ergo sub ΓZ, ZA contentum rectangulum cum ex AE quadrato æquale est ipsi ex EZ quadrato. Æqualis autem EZ ipsi EB; ergo sub ΓZ, ZA contentum rectangulum cum ex AE quadrato æquale est ipsi ex EB quadrato. Sed ipsi ex EB æqualia sunt ipsa ex BA, AE, rectus enim est ad A angulus; ipsum igitur sub ΓZ, ZA cum ipso ex AE æquale est ipsis ex BA, AE. Commune auferatur ipsum ex AE; reliquum igitur sub ΓZ, ZA contentum rectangulum æquale est ipsi ex AB quadrato. Et est ipsum quidem sub ΓZ, ZA ipsum ZK, æqualis enim est AZ ipsi ZH; ipsum



droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de AΘ.

Puisque la droite AΓ est coupée en deux parties égales en E, que AZ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZA avec le quarré de AE est égal au quarré de EZ (6. 2). Mais EZ est égal à EB; donc le rectangle compris sous ΓZ, ZA avec le quarré de AE, est égal au quarré de EB. Mais les quarrés des droites BA, AE sont égaux au quarré de EB (47. 1), car l'angle en A est droit; donc le rectangle sous ΓZ, ZA avec le quarré de AE est égal aux quarrés des droites BA, AE. Retranchons le quarré commun de AE; le rectangle restant compris sous ΓZ, ZA sera égal au quarré de AB. Mais le rectangle sous les droites ΓZ, ZA est le rectangle τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ[5]· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς[6] ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

vero ex AB ipsum AΔ; ipsum igitur ZK æquale est ipsi AΔ. Commune auferatur AK; reliquum igitur ZΘ ipsi ΘΔ æquale est. Et est quidem ZΘ ipsum ex AΘ; ipsum vero ΘΔ ipsum sub AB, BΘ; ipsum igitur sub AB, BΘ contentum rectangulum æquale est ipsi ex ΘA quadrato.

Ergo data recta AB secta est in Θ, ita ut ipsum sub AB, BΘ contentum rectangulum æquale faciat ipsi ex ΘA quadrato. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν[1] ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XII.

In obtusangulis triangulis quadratum ex latere obtusum angulum subtendente majus est quam quadrata ex lateribus obtusum angulum continentibus, contento bis sub uno ipsorum circa obtusum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et assumptâ extra a perpendiculari ad obtusum angulum.

ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le quarré de AB est le quarré AΔ; donc le rectangle ZK est égal au quarré AΔ. Retranchons le rectangle commun AK; le quarré restant ZΘ sera égal au rectangle ΘΔ. Mais ZΘ est le quarré de AΘ, et ΘΔ est le rectangle sous AB, BΘ; donc le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA.

Donc la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

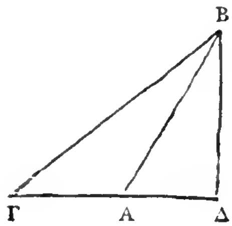
Dans les triangles obtusangles, le quarré du côté qui soutend l'angle obtus est plus grand que les quarrés des côtés qui comprènent l'angle obtus, de deux fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la perpendiculaire à l'angle obtus.

Εστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν[2], καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων[1], τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ[3]. Αλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ[4] Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον[5] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον[6] ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ

Sit obtusangulum triangulum ΑΒΓ obtusum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur a Β puncto ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ; dico ex ΒΓ quadratum majus esse quam ex ΒΑ, ΑΓ quadrata, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo.

Quoniam enim recta ΓΔ secatur utcunque in Α puncto; ipsum igitur ex ΓΔ æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΔ quadratis, et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. Commune addatur ipsum ex ΔΒ; ipsa igitur ex ΓΔ, ΔΒ æqualia sunt ipsis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΔΑ contento rectangulo. Sed ipsis quidem ex ΓΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΓΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΑΒ; ergo ex ΓΒ quadratum æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo; quare ex ΓΒ quadratum quam ipsa ex ΓΑ, ΑΒ



Soit le triangle obtusangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΒΑΓ obtus; du point Β conduisons ΒΔ perpendiculaire sur ΓΑ prolongé; je dis que le quarré de ΒΓ est plus grand que les quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ.

Car puisque la droite ΓΔ est coupée d'une manière quelconque au point Α, le quarré de ΓΔ est égal aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΔ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ (4. 2). Ajoutons le quarré commun de ΔΒ; les quarrés de ΓΔ, ΔΒ seront égaux aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ. Mais le quarré de ΓΒ est égal aux quarrés des droites ΓΔ, ΔΒ (47.), car l'angle en Δ est droit, et le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ;

δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Εν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

quadrata majus est, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. In obtusangulis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

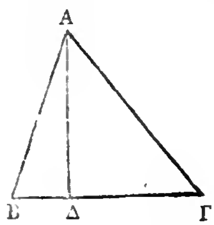
Εν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Εστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ[1] Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς[2] ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO XIII.

In acutangulis triangulis ex latere acutum angulum subtendente quadratum minus est quam quadrata ex lateribus acutum angulum continentibus contento bis sub uno ipsorum circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, et assumptâ intus a perpendiculari ad acutum angulum.

Sit acutangulum triangulum ΑΒΓ acutum habens ad Β angulum, et ducatur ab Α puncto ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico ex ΑΓ quadratum minus esse quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo.



donc le quarré de ΓΒ est égal aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ; donc le quarré de ΓΒ est plus grand que les quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ de deux fois le rectangle sous ΓΑ, ΑΔ. Donc, etc.

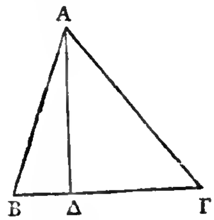
PROPOSITION XIII.

Dans les triangles acutangles, le quarré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les quarrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

Soit le triangle acutangle ΑΒΓ ayant l'angle aigu en Β; du point Α conduisons sur la droite ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. Αλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ[3] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ[1] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ· καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν[5] ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ[6] ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· Εν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim recta ΓΒ secta est utcunque in Δ; ergo ex ΓΒ, ΒΔ quadrata æqualia sunt et ipsi bis ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsi ex ΔΓ quadrato. Commune addatur ex ΔΑ quadratum; ergo ex ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsis ex ΑΔ, ΔΓ quadratis. Sed ipsis quidem ex ΒΔ, ΔΑ æquale est ex ΑΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsum ex ΑΓ; ipsa igitur ex ΓΒ, ΒΑ æqualia sunt et ipsi ex ΑΓ, et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ; quare solum ex ΑΓ minus est quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo. Ergo in acutangulis, etc.



Car puisque la droite ΓΒ est coupée d'une manière quelconque au point Δ, les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ et au quarré de ΔΓ (7. 2). Ajoutons le quarré commun de ΑΔ; les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ seront égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ, et aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ. Mais le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΒΔ, ΔΑ (47. 1), car l'angle en Δ est droit, et le quarré de ΑΓ est égal aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ; donc les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ sont égaux au quarré de ΑΓ et à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ; donc le seul quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ. Donc, etc.

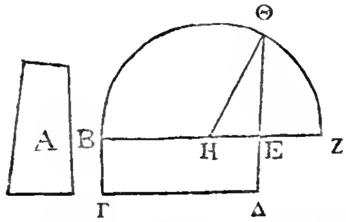
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Εστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γάρ[1] τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. Συνίσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν[2] τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Επεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,



PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A; oportet igitur ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere.

Constituatur enim ipsi A rectilineo æquale parallelogrammum rectangulum BΔ. Si igitur æqualis est BE ipsi EΔ, factum erit propositum; constitutum est enim ipsi A rectilineo æquale quadratum BΔ; si autem non, una ipsarum BE, EΔ major est. Sit major BE, et producatur ad Z, et ponatur ipsi EΔ æqualis EZ, et secetur BZ bifariam in H, et centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum HB, HZ semicirculus describatur BΘZ, et producatur ΔE in Θ, et jungatur HΘ.

Quoniam igitur BZ secta est in æqualia quidem in H, in inæqualia vero in E; ergo sub

PROPOSITION XIV.

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit A la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.

Construisons un parallélogramme rectangle BΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45. 1). Si BE était égal à EΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré BΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est point, l'un des côtés BE, EΔ est plus grand que l'autre. Que BE soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3. 1); coupons BZ en deux parties égales au point H; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem. 3); prolongeons ΔE vers Θ, et joignons HΘ.

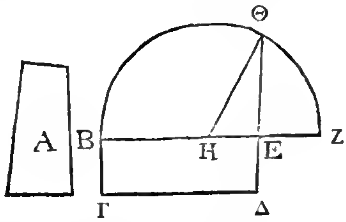
Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties

ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς[3] ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ ἐστιν[4], ἴση γὰρ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· καὶ[5] τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

BE, EZ contentum rectangulum cum ex HE quadrato æquale est ipsi ex HZ quadrato. Æqualis autem HZ ipsi HΘ; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsi ex HΘ. Ipsi autem ex HΘ æqualia sunt ex ΘE, EH quadrata; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsis ex ΘE, EH. Commune auferatur ex HE quadratum; reliquum igitur sub BE, EZ contentum rectangulum æquale est ipsi ex EΘ quadrato. Sed ipsum sub BE, EZ ipsum sub BE, EΔ est, æqualis enim est EZ ipsi EΔ; ergo BΔ parallelogrammum æquale est ipsi ex ΘE quadrato. Æquale autem est BΔ ipsi A rectilineo; et A igitur rectilineum æquale est ipsi ex EΘ descripto quadrato.

Ergo dato rectilineo A æquale quadratum constituitur ex ΘE descriptum. Quod oportebat facere.



inégales au point E; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47. 1); donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A; ce qu'il fallait faire.

FIN DU DEUXIÈME LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. Ισοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν[1]. ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β΄. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον ἐπὶ μηδέτερα μερή[2].

γ΄. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ΄. Εν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ[3] τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι.

DEFINITIONES.

1. Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt; vel quorum quæ ex centris æquales sunt.

2. Recta circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum et producta non secat circulum in neutrâ parte.

3. Circuli tangere sese dicuntur, qui sese tangentes non sese secant.

4. In circulo æqualiter distare a centro rectæ dicuntur, quando ex centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt.

LIVRE TROISIEME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux, ou ceux dont les droites menées des centres aux circonférences sont égales.

2. Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle.

3. Les cercles qui ne se touchent et qui ne se coupent point, sont dits tangents entr'eux.

4. Dans un cercle, on dit que des droites sont également éloignées du centre, lorsque les perpendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales.

ε'. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Εν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Οταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία[5], τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ιά. Ομοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam major perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est contenta figura et ab rectâ et circuli circumferentiâ.

7. Segmenti autem angulus est, qui continetur ab rectâ et circuli circumferentiâ.

8. In segmento autem angulus est, quando in circumferentiâ segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectæ quæ est basis segmenti conjunguntur rectæ, contentus angulus ab junctis rectis.

9. Quando autem continentes angulum rectæ assumunt aliquam circumferentiam, illi dicitur insistere angulus.

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli positus est angulus, contenta figura et ab angulum continentibus rectis et assumptâ ab ipsis circumferentiâ.

11. Similia segmenta circuli sunt, quæ capiunt æquales angulos; vel in quibus anguli æquales inter se sunt.

5. La droite sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire est dite la plus éloignée du centre.

6. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par une circonférence de cercle.

7. L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et par une circonférence de cercle.

8. L'angle dans le segment est l'angle compris par les droites menées d'un point pris dans la circonférence du segment aux extrémités de la droite qui est la base du segment.

9. Mais lorsque les droites qui comprennent l'angle embrassent une portion de la circonférence, cet angle est dit appuyé à la circonférence.

10. Un secteur de cercle est une figure comprise entre deux rayons qui font un angle au centre et la portion de la circonférence qu'embrassent ces deux rayons.

11. Les segments des cercles sont semblables, lorsqu'ils reçoivent des angles égaux ou lorsque les angles qu'ils contiennent sont égaux entr'eux.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΔΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

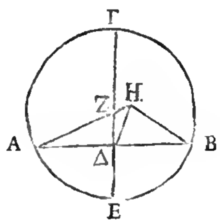
Ἤχθω[1] τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου[2].

PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ΑΒΓ; oportet igitur ΑΒΓ circuli centrum invenire.

Ducatur aliqua in ipso utcunque recta ΑΒ, et secetur bifariam in Δ puncto, et a Δ ipsi ΑΒ ad rectos ducatur ΓΔ, et producatur in Ε, et secetur ΓΕ bifariam in Ζ; dico Ζ centrum esse ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση[4], ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ Η[5]· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ

Non enim, sed si possibile sit Η, et jungantur ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem ΔΗ, duæ utique ΑΔ, ΔΗ duabus ΗΔ, ΔΒ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΗΑ basi ΗΒ est æqualis, ex centro enim Η; angulus igitur ΑΔΗ

PROPOSITION PREMIÈRE.

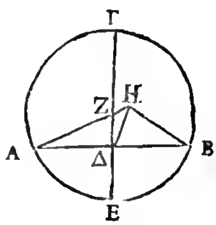
Trouver le centre d'un cercle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné ; il faut trouver le centre du cercle ΑΒΓ.

Conduisons dans le cercle une droite quelconque ΑΒ, partageons-la en deux parties égales au point Δ (10. 1); du point Δ conduisons ΓΔ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1), prolongeons ΓΔ en Ε, et partageons ΓΕ en deux parties égales en Ζ; je dis que le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Que Ζ ne le soit pas, et que Η le soit, si cela est possible. Joignons ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et puisque ΑΔ est égal à ΔΒ et que ΔΗ est commun, les deux droites ΑΔ, ΔΗ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΒ, chacune à chacune; mais la base ΗΑ est égale à la base ΗΒ, car ce sont deux rayons (déf. 15. 1); donc l'angle ΑΔΗ est égal à l'angle ΗΔΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν[6]. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων[7] γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι[8], ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Ζ.

angulo ΗΔΒ æqualis est. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium est; rectus igitur est ΗΔΒ. Est autem et ΖΔΒ rectus; æqualis igitur est ΖΔΒ ipsi ΗΔΒ, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Η centrum est ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam præter Ζ.



Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου[9]. Οπερ ἔδει ποιῆσαι[10].

Ergo Ζ punctum est centrum ΑΒΓ circuli. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις[11] εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου[12].

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in circulo recta quædam rectam quamdam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

une droite fait avec elle les angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10. 1); donc l'angle ΗΔΒ est droit. Mais l'angle ΖΔΒ est droit; donc l'angle ΖΔΒ est égal à l'angle ΗΔΒ; le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point Η n'est point le centre du cercle ΑΒΓ. On démontrera semblablement que tout autre point, excepté Ζ, ne l'est pas.

Donc le point Ζ est le centre du cercle. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si dans un cercle une droite en coupe une autre en deux parties égales, et à angles droits, le centre du cercle est dans la secante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

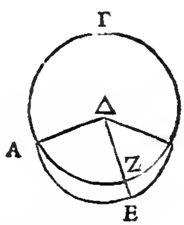
Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῆ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ[1] σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα[2] σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO II.

Si circuli in circumferentiâ sumantur duo quælibet puncta, hæc puncta conjungens recta intra cadet circulum.

Sit circulus ΑΒΓ, et in circumferentiâ ipsius sumantur duo quælibet puncta A, B; dico ab ipso A ad B conjunctam rectam intra cadere circulum.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ[3].

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ,

Non enim, sed si possibile, cadat extra ut AEB, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli, et sit Δ, et jungantur ΔA, ΔB, et ducatur ΔZE.

Et quoniam æqualis est ΔA ipsi ΔB, æqualis igitur et angulus ΔAE ipsi ΔBE; et quoniam trianguli ΔAE unum latus AEB producitur,

PROPOSITION II.

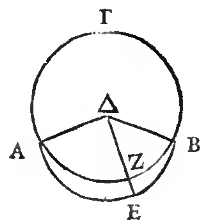
Si dans une circonférence de cercle, on prend deux points quelconques, la droite qui joindra ces deux points tombera dans le cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ; qu'on prène deux points quelconques A, B, dans sa circonférence; je dis que la droite menée du point A au point B, tombera dans le cercle.

Car que cela ne soit point, et qu'elle tombe en dehors, si c'est possible, comme AEZ; prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Δ, joignons ΔA, ΔB, et menons ΔZE.

Puisque ΔA est égal à ΔB, l'angle ΔAE est égal à l'angle ΔBE (5. 1); et puisque l'on a prolongé un côté AEB du triangle ΔAE, l'angle ΔEB est plus grand μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ιση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Υπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ιση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ

major igitur est ΔΕΒ angulus ipso ΔΑΕ. Æqualis autem ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; major igitur est ΔΕΒ ipso ΔΒΕ. Majorem autem angulum majus latus subtendit; major igitur est ΔΒ ipsâ ΔΕ. Æqualis autem ΔΒ ipsi ΔΖ; major igitur est ΔΖ



τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα πεσεῖται. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsâ ΔΕ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur ab A ad B conjuncta recta extra cadet circulum. Similiter utique ostendemus, neque in ipsam circumferentiam; intus igitur cadet. Si igitur circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta aliqua per centrum rectam aliquam non per centrum bifariam secet,

que l'angle ΔΑΕ (16. 1). Mais l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ; donc l'angle ΔΕΒ est plus grand que l'angle ΔΒΕ. Mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (18. 1); donc ΔΒ est plus grand que ΔΕ. Mais ΔΒ est égal à ΔΖ; donc ΔΖ est plus grand que ΔΕ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point A au point B ne tombe pas hors du cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe pas dans la circonférence; donc elle tombe en dedans du cercle. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Si dans un cercle une droite menée par le centre coupe en deux parties égales une droite non menée par le centre, elle la coupera à angles πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

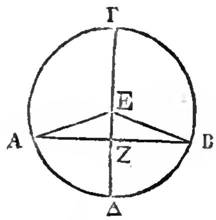
Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

et ad rectos ipsam secat; et si eam ad rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ipso recta aliqua ΓΔ per centrum, rectam aliquam ΑΒ non per centrum bifariam secet in Ζ puncto; dico et ad rectos ipsam secare.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Ε, et jungantur ΕΑ, ΕΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ[1] δυσὶν ἴσαι εἰσὶ[2], καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα[3] ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ[4]. Η ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα[5] τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν[6] τέμνει.

Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, communis autem ΖΕ, duæ utique duabus æquales sunt, et basis ΕΑ basi ΕΒ æqualis; angulus igitur ΑΖΕ angulo ΕΖΒ æqualis est. Quando autem recta super rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΑΖΕ, ΒΖΕ. Ergo ΓΔ per centrum ducta ipsam ΑΒ non per centrum ductam bifariàm secans, et ad rectos ipsam secat.

droits; et si elle la coupe à angles droits, elle la coupera en deux parties égales.

Soit le cercle ΑΒΓ; que dans ce cercle, la droite ΓΔ menée par le centre coupe en deux parties égales au point Ζ la droite ΑΒ non menée par le centre; je dis qu'elle la coupe à angles droits.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 5); qu'il soit Ε, et joignons ΕΑ, ΕΒ.

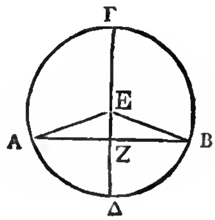
Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite ΖΕ est commune, deux droites sont égales à deux droites; mais la base ΕΑ est égale à la base ΕΒ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΕΖΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur une autre droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit; donc chacun des angles ΑΖΕ, ΒΖΕ est droit. Donc la droite ΓΔ, menée par le centre, et qui coupe en deux parties égales la droite ΑΒ non menée par le centre, coupe aussi cette droite à angles droits.

Ἀλλὰ δὴ καὶ [7] ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ[8] ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ

Sed et ΓΔ ipsam AB ad rectos secet; dico et bifariam ipsam secare, hoc est, æqualem esse AZ ipsi ZB.

Eisdem enim constructis, quoniam æqualis est EA ipsi EB, æqualis est et angulus EAZ ipsi EBZ. Est autem et rectus AZE recto BZE æqua-



ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα[9] τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

lis; duo igitur triangula sunt EAZ, EZB duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsis EZ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur est AZ ipsi ZB. Si igitur in circulo, etc.

Mais que la droite ΓΔ coupe la droite AB à angles droits; je dis qu'elle la coupe en deux parties égales, c'est-à-dire que AZ est égal à ZB.

Faisons la même construction; puisque EA est égal à EB, l'angle EAZ est égal à l'angle EEZ (5. 1). Mais l'angle droit AZE est égal à l'angle droit BZE; donc EAZ, EZB sont deux triangles qui ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, c'est-à-dire leur côté commun EZ, qui soutend un des angles égaux; donc ces deux triangles auront les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc AZ est égal à ZB. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

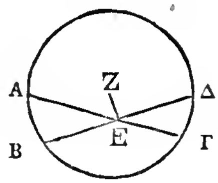
Εὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον[1], μὴ δία τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ sese secent, non per centrum ductæ, non sese secabunt bifariam.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secent in Ε puncto, non per centrum ductæ; dico non eas sese secare bifariam.



Εἰ γὰρ δυνατον, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Επεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου[2] τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα[3]

Si enim possibile, sese secent bifariam, ita ut æqualis sit ΑΕ quidem ipsi ΕΓ, et ΒΕ ipsi ΕΔ; et sumatur centrum ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et jungatur ΖΕ.

Quoniam igitur recta aliqua ΖΕ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum bifariam secat, et ad rectos ipsam secat;

PROPOSITION IV.

Si dans un cercle deux droites non menées par le centre se coupent, elles ne se coupent point en deux parties égales.

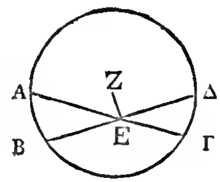
Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que dans ce cercle les deux droites ΑΓ, ΒΔ, non menées par le centre, se coupent au point Ε; je dis qu'elles ne se coupent point en deux parties égales.

Car si cela est possible, qu'elles se coupent en deux parties égales, de manière que ΑΕ soit égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΔ; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ, et joignons ΖΕ.

Puisque la droite ΖΕ, menée par le centre, coupe en deux parties égales la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits (3. 3);

ἐστὶν[4] ἡ ὑπὸ ZEA. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ZE εὐθεῖάν τινα τὴν BΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα[5]

rectus igitur est ZEA. Rursus, quoniam recta aliqua ZE rectam aliquam BΔ non per centrum, bifariam secat, et ad rectos ipsam secat; rectus



ἡ ὑπὸ ZEB. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEA ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEB, ἡ[6] ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν[7] ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ AΓ, BΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur est ZEB. Ostensus est autem et ZEA rectus; æqualis igitur ZEA ipsi ZEB, minor majori, quod est impossibile. Non igitur AΓ, BΔ sese secant bifariam. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ABΓ, ΓΔH τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ B, Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EΓ, καὶ διήχθω ἡ EZH ὡς ἔτυχε.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli sese secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli ABΓ, ΓΔH sese secent in B, Γ punctis; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim possibile, sit E, et jungatur EΓ, et ducatur EZH utcunque.

donc l'angle ZEA est droit. De plus, puisque la droite ZE coupe en deux parties égales la droite BΔ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits; donc l'angle ZEB est droit. Mais on a démontré que l'angle ZEA est droit; donc l'angle ZEA est égal à l'angle ZEB, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les droites AΓ, BΔ ne se coupent point en deux parties égales. Donc, etc.

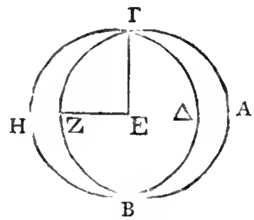
PROPOSITION V.

Si deux cercles se coupent, leur centre ne sera pas le même.

Que les deux cercles ABΓ, ΓΔH se coupent aux deux points B, Γ; je dis que leur centre ne sera pas le même.

Car si cela est possible, que leur centre soit le point E; joignons EΓ, et menons EZH d'une manière quelconque.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Εδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ[1] τῇ ΕΖ



ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση[2], ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν[3] ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam E punctum centrum est ΑΒΓ circuli, æqualis est ΕΓ ipsi ΕΖ. Rursus, quoniam E punctum centrum est ΓΔΗ circuli, æqualis est ΓΕ ipsi ΕΗ. Ostensa est autem et ΕΓ ipsi ΕΖ æqualis; et ΖΕ igitur ipsi ΕΗ est æqualis, minor majori, quod est impossibile Non igitur E punctum centrum est ΑΒΓ, ΓΔΗ circulorum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς[1], οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν[2] ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται[3] αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli sese intra tangant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΕ sese tangant in Γ puncto; dico non esse ipsorum idem centrum.

Puisque le point E est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΕΓ est égale à ΕΖ (déf. 5. 1.). De plus, puisque le point E est le centre du cercle ΓΔΗ, la droite ΓΕ est égale à ΕΗ. Mais on a démontré que ΕΓ est égal à ΕΖ; donc ΖΕ est égal à ΕΗ, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible. Donc le point E n'est pas le centre des cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, leur centre n'est pas le même.

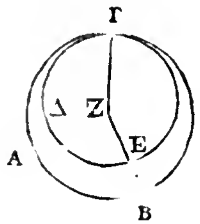
Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΕ se touchent au point Γ; je dis que leur centre n'est pas le même.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΖΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ΖΓ τῇ ΖΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ[4] ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση[5], ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν[6] ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Si enim possibile, sit Z, et jungatur ZΓ, et ducatur utcumque ZEB.

Quoniam igitur Z punctum centrum est ABΓ circuli, æqualis est ZΓ ipsi BZ. Rursus, quoniam Z punctum centrum est ΓΔE circuli, æqualis est ZΓ ipsi ZE. Ostensa est autem et ZΓ ipsi ZB æqualis; et ZE igitur ipsi ZB est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Z punctum centrum est ABΓ, ΓΔE circulorum. Si igitur duo, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί

PROPOSITIO VII.

Si circuli in diametro sumatur aliquod punctum quod non sit centrum circuli, ab ipso autem puncto in circulum cadant rectæ quæ-

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Z; joignons ZΓ, et menons ZEB d'une manière quelconque.

Puisque le point Z est le centre du cercle ABΓ, la droite ZΓ est égale à BZ. De plus, puisque le point Z est le centre du cercle ΓΔE, la droite ZΓ est égale à ZE. Mais on a démontré que ZΓ est égal à ZB; donc ZE est égal à ZB, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible; donc le point Z n'est point le centre des cercles ABΓ, ΓΔE. Donc, etc.

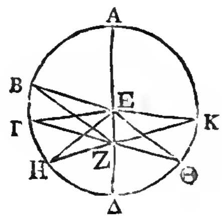
PROPOSITION VII.

Si dans le diamètre d'un cercle on prend un point qui ne soit pas le centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circonτινες[1]· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δυο δὲ μόνον[2] ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες

dam, maxima quidem erit in quâ centrum, minima vero reliqua; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major est; duæque solum æquales ab eodem puncto cadent in circulum, ex utrâque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, et in ipsâ ΑΔ sumatur aliquod punctum Ζ, quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit Ε, et a Ζ in ΑΒΓΔ circulum cadant rectæ quædam ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; dico ma-



αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ΕΒ, ΕΖ ἄρα[3] τῆς ΒΖ μεί-

ximam quidem esse ΖΑ, minimam vero ΖΔ; aliarum autem, ΖΒ quidem majorem ipsâ ΖΓ; et ΖΓ ipsâ ΖΗ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ipsæ ΕΒ, ΕΖ igitur ipsâ ΒΖ

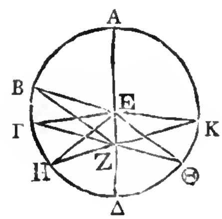
férence; la plus grande sera celle dans laquelle est le centre, et la plus petite la droite restante; quant aux autres droites, la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui en est plus éloignée; et du même point on ne peut mener à la circonférence que deux droites égales de l'un et l'autre côté de la plus petite.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, que ΑΔ soit son diamètre, prenons dans ΑΔ un point quelconque Ζ qui ne soit pas le centre de ce cercle, que le centre du cercle soit le point Ε, du point Ζ menons à la circonférence ΑΒΓΔ les droites ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; je dis que ΖΑ est la plus grande, et ΖΔ la plus petite; et que parmi les autres, la droite ΖΒ est plus grande que ΖΓ, et la droite ΖΓ plus grande que ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Puisque deux côtés d'un triangle sont plus grands que le côté restant ζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ, αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ[4] ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΗΖ μείζων ἐστί[5].

majores sunt. Æqualis autem AE ipsi BE; ergo BE, EZ æquales sunt ipsi AZ; major igitur est AZ ipsâ BZ. Rursus, quoniam æqualis est BE ipsi ΓE, communis autem ZE, duæ utique BE, EZ duabus ΓE, EZ æquales sunt. Sed et angulus BEZ angulo ΓEZ major; basis igitur BZ basi ΓZ major est. Propter eadem utique et ΓZ ipsâ HZ major est.



Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι[6] προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον,

Rursus, quoniam HZ, ZE ipsâ EH majores sunt, æqualis autem EH ipsi EΔ; ergo HZ, ZE ipsâ EΔ majores sunt. Communis auferatur EZ; reliqua igitur HZ reliquâ ZΔ major est. Maxima quidem igitur ZA, minima vero ZΔ; major autem ZB quidem ipsâ ZΓ, et ZΓ ipsâ ZH.

Dico et a Z puncto duas solum æquales cadere in ABΓΔ circulum, ex utrâque parte ip-

(21. 1), les droites EB, EZ sont plus grandes que la droite BZ. Mais la droite AE est égale à la droite BE; donc les droites BE, EZ sont égales à la droite AZ; donc la droite AZ est plus grande que la droite BZ. De plus, puisque BE est égal à ΓE, et que la droite ZE est commune, les deux droites BE, EZ sont égales aux deux droites ΓE, EZ. Mais l'angle BEZ est plus grand que l'angle ΓEZ; donc la base BZ est plus grande que la base ΓZ (24. 1). Par la même raison la droite ΓZ est plus grande que la droite HZ.

De plus, puisque les droites HZ, ZE sont plus grandes que la droite EH, et que EH est égal à EΔ, les droites HZ, ZE sont plus grandes que EΔ. Retranchons la droite commune EZ; la droite restante HZ sera plus grande que la droite restante ZΔ. Donc la droite ZA est la plus grande, et la droite ZΔ la plus petite; donc la droite ZB est plus grande que la droite ZΓ, et la droite ZΓ plus grande que la droite ZH.

Je dis que du point Z, on ne peut mener à la circonférence ABΓΔ que deux ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση[7], ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ[8]· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση[9], ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ[10] ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἢ καὶ οὕτως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ[11] τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν[12] ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

sius ZΔ minimæ. Constituatur enim ad EZ rectam, et ad punctum in eâ E, ipsi HEZ angulo æqualis ZEΘ, et jungatur ZΘ. Quoniam igitur æqualis est HE ipsi EΘ, communis autem EZ, duæ utique HE, EZ duabus ΘE, EZ æquales sunt; et angulus HEZ angulo ΘEZ æqualis; basis igitur ZH basi ZΘ æqualis est. Dico autem ipsi ZH aliam æqualem non cadere in circulum a Z puncto. Si enim possibile, cadat ZK. Et quoniam ZK ipsi ZH est æqualis, sed quidem et ZΘ ipsi ZH; et ZK igitur ipsi ΘZ est æqualis, propinquior ei quæ per centrum remotiori æqualis, quod impossibile.

Vel et hoc modo. Jungatur EK. Et quoniam æqualis est HE ipsi EK, communis autem EZ, et basis ZH basi ZK æqualis; angulus igitur HEZ angulo KEZ æqualis est. Sed HEZ ipsi ZEΘ est æqualis; et ZEΘ igitur ipsi KEZ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur a Z puncto alia aliqua cadet in circulum æqualis ipsi HZ; una igitur sola. Si igitur circuli, etc.

droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ZΔ. Car sur la droite EZ et au point E de cette droite, faisons l'angle ZEΘ égal à l'angle HEZ (23. 1), et joignons ZΘ. Puisque la droite HE est égale à la droite EΘ, et que la droite EZ est commune, les deux droites HE, EZ sont égales aux deux droites ΘE, EZ; mais l'angle HEZ est égal à l'angle ΘEZ; donc la base ZH est égale à la base ZΘ (4. 1). Je dis que du point Z on ne peut mener à la circonférence une autre droite égale à ZH. Car si cela est possible, menons ZK. Puisque ZK est égal à ZH, et ZΘ égal à ZH, la droite ZK est égale à la droite ΘZ, une droite plus près de celle qui passe par le centre, égale à une droite qui en est plus éloignée, ce qui est impossible.

Ou d'une autre manière. Joignons EK. Et puisque HE est égal à EK, que la droite EZ est commune, et que la base ZH est égale à la base ZK, l'angle HEZ est égal à l'angle KEZ (8. 1). Mais l'angle HEZ est égal à l'angle ZEΘ; donc l'angle ZEΘ est égal à l'angle KEZ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc du point Z, on ne peut pas mener à la circonférence une autre droite qui soit égale à HZ; donc on n'en peut mener qu'une seule. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectæ quædam, quarum una per centrum, reliquæ autem utcunque; ipsarum quidem ad concavam circumferentiam cadentium rectarum maxima quidem est quæ per centrum; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major erit; ipsarum vero in convexam circumferentiam cadentium rectarum, minima quidem est quæ inter et punctum et diametrum; aliarum autem, semper propinquior minimæ remotiore est minor. Duæ autem solum æquales a puncto cadent in circulum, ex utrâque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓ, et extra ipsum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ab eo ducantur rectæ quædam ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, sit autem ΔΑ per centrum; dico earum quidem in ΑΕΖΓ conca-

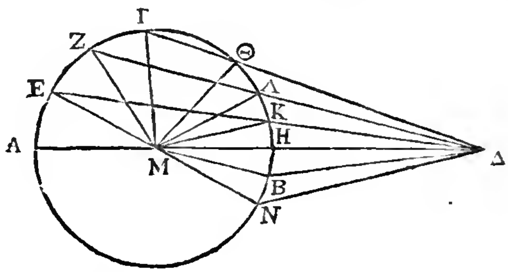
PROPOSITION VIII.

Si hors d'un cercle on prend un point quelconque, si de ce point on mène à ce cercle des droites, si une d'elles est menée par le centre, et les autres comme on voudra; parmi les droites menées à la circonférence concave, la plus grande est celle qui passe par le centre, et parmi les autres celle qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est entre le point pris hors du cercle et le diamètre, et parmi les autres celle qui est plus près de la plus petite est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; et du point pris hors du cercle, on ne peut mener à la circonférence de l'un et l'autre côté de la plus petite, que deux droites égales.

Soit le cercle ΑΒΓ, et hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ; de ce point menons à ce cercle les droites ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, et que ΔΑ passe

ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ[1].

vam circumferentiam cadentium rectarum maximam quidem esse ΔΑ quæ per centrum; semper autem propinquior ei quæ per centrum remotiore major erit, ΔΕ quidem ipsâ ΔΖ, et ΔΖ ipsâ ΔΓ; ipsarum autem in ΘΛΚΗ convexam circumferentiam cadentium rectarum, minima quidem ΔΗ, quæ inter et punctum Δ et diametrum ΑΗ; semper autem propinquior ipsi ΔΗ minimæ minor est remotiore, ΔΚ quidem ipsâ ΔΛ, et ΔΛ ipsâ ΔΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. Αἱ δὲ[2] ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Μ; et jungantur ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

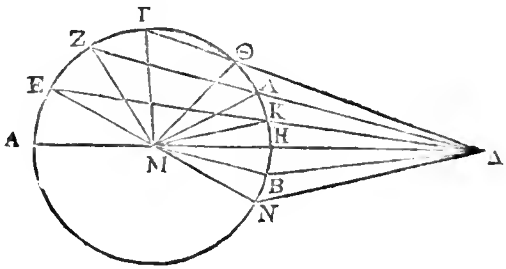
Et quoniam æqualis est ΑΜ ipsi ΕΜ, communis addatur ΜΔ; ergo ΑΔ æqualis est ipsis ΕΜ, ΜΔ. Sed ΕΜ, ΜΔ ipsâ ΕΔ majores sunt;

par le centre; je dis que de toutes les droites menées à la circonférence concave ΑΕΖΓ, la plus grande est la droite ΔΑ, menée par le centre, et que la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre sera toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage, la droite ΔΕ plus grande que ΔΖ, et la droite ΔΖ plus grande que ΔΓ; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe ΘΛΚΗ, la droite ΔΗ placée entre le point Δ et le diamètre ΑΗ est la plus petite, et la droite placée plus près de la plus petite ΔΗ est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; la droite ΔΚ plus petite que ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit le point Μ; et joignons ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Puisque la droite ΑΜ est égale à la droite ΕΜ, ajoutons la droite commune ΜΔ; la droite ΑΔ sera égale aux droites ΕΜ, ΜΔ. Mais les droites ΕΜ, ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προσκείσθω[3] ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

et AΔ igitur ipsâ EΔ major est. Rursus, quoniam æqualis est EM ipsi ZM, communis addatur MΔ; ergo EM, MΔ ipsis ZM, MΔ æquales sunt, et angulus EMΔ angulo ZMΔ major est. Basis igitur EΔ basi ZΔ major est. Similiter autem ostendemus, et ZΔ ipsâ ΓΔ majorem esse; maxima quidem igitur est ΔA, major vero ΔE ipsâ ΔZ, et ΔZ ipsâ ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάσσων ἐστὶν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστί. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ[5] ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων

Et quoniam MK, KΔ ipsâ MΔ majores sunt, æqualis autem MH ipsi MK, reliqua igitur KΔ reliquâ HΔ major est; quare et ΔH ipsâ ΔK minor est; minima igitur est. Et quoniam trianguli MΛΔ super uno laterum MΔ, duæ rectæ intus constituuntur; MK, KΔ igitur ipsis MΛ, ΛΔ minores sunt; æqualis autem MK ipsi MΛ; reliqua igitur ΔK reliquâ ΔΛ minor est. Similiter

MΔ sont plus grandes que la droite EΔ (20. 1); donc la droite AΔ est plus grande que la droite EΔ. De plus, puisque la droite EM est égale à la droite ZM, ajoutons la droite commune MΔ, les droites EM, MΔ seront égales aux droites ZM, MΔ; mais l'angle EMΔ est plus grand que l'angle ZMΔ; donc la base EΔ est plus grande que la base ZΔ (24. 1). Nous démontrerons semblablement que la droite ZΔ est plus grande que la droite ΓΔ; donc la droite ΔA est la plus grande, la droite ΔE plus grande que ΔZ, et la droite ΔZ plus grande que ΔΓ.

De plus, puisque les droites MK, KΔ sont plus grandes que la droite MΔ (20. 1), et que la droite MH est égale à la droite MK, la droite restante KΔ est plus grande que la droite restante HΔ; donc la droite ΔH est plus petite que la droite ΔK; donc elle est la plus petite. Et puisque sur un des côtés MΔ du triangle MΛΔ on a construit intérieurement deux droites, les droites MK, KΔ sont plus petites que les droites MΛ, ΛΔ (21. 1); mais MK est égal à MΛ; donc la droite ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι[6] ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται[7] πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση[8]· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί. Λέγω δὴ[9] ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση[10], ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

Η καὶ ἄλλως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. Ἐπεὶ[11] ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ

autem ostendemus et ΔΛ ipsâ ΔΘ minorem esse; minima quidem igitur est ΔΗ, minor vero ΔΚ ipsâ ΔΛ, et ΔΛ ipsâ ΔΘ.

Dico et duas solum æquales a Δ puncto cadere in circulum, ex utrâque parte ipsius ΔΗ minimæ. Constituatur ad ΜΔ rectam, et ad punctum in eâ Μ, ipsi ΚΜΔ angulo æqualis angulus ΔΜΒ, et jungatur ΔΒ. Et quoniam æqualis est ΜΚ ipsi ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ utique ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΚΜΔ angulo ΒΜΔ æqualis; basis igitur ΔΚ basi ΔΒ æqualis est. Dico autem ipsi ΔΚ rectæ aliam æqualem non cadere in circulum a Δ puncto. Si enim possibile, cadat, et sit ΔΝ. Quoniam igitur ΔΚ ipsi ΔΝ est æqualis, sed ΔΚ ipsi ΔΒ est æqualis; et ΔΒ igitur ipsi ΔΝ est æqualis; propinquior minimæ ipsius ΔΗ remotiori est æqualis, quod impossibile ostensum est.

Vel et aliter. Jungatur ΜΝ. Quoniam æqualis est ΚΜ ipsi ΜΝ, communis autem ΜΔ, et basis

restante ΔΚ est plus petite que la droite restante ΔΛ. Nous démontrerons semblablement que la droite ΔΛ est plus petite que la droite ΔΘ; donc la droite ΔΗ est la plus petite, et la droite ΔΚ est plus petite que la droite ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Je dis aussi que du point Δ, on ne peut mener au cercle que deux droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ. Construisons sur la droite ΜΔ, et au point Μ de cette droite, un angle ΔΜΒ égal à l'angle ΚΜΔ (23. 1), et joignons ΔΒ. Puisque la droite ΜΚ est égale à ΜΒ, et que la droite ΜΔ est commune, les deux droites ΚΜ, ΜΔ sont égales aux deux droites ΒΜ, ΜΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc la base ΔΚ est égale à la base ΔΒ (4. 1). Je dis qu'on ne saurait mener du point Δ au cercle ΑΒΓ une autre droite égale à ΔΚ. Qu'elle soit menée, s'il est possible, et qu'elle soit ΔΝ. Puisque ΔΚ est égal à ΔΝ, et ΔΚ égal à ΔΒ, la droite ΔΒ est égale à ΔΝ; donc une droite plus près de la plus petite ΔΗ est égale à une droite qui s'en éloigne davantage, ce qui a été démontré impossible.

Ou autrement. Joignons ΜΝ. Puisque la droite ΚΜ est égale à ΜΝ, que la

ΔΚ βάσει τῆ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστὶν ἴση[12]· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα[13] τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστὶν ἴση[14], ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι[15] πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΔΚ basi ΔΝ æqualis ; angulus igitur ΚΜΔ angulo ΝΜΔ æqualis est. Sed ΚΜΔ ipsi ΒΜΔ est æqualis ; et ΒΜΔ igitur ipsi ΝΜΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur plures quam duæ æquales in ΑΒΓ circulum a Δ puncto ex utrâque parte ipsius ΔΗ minimæ cadent. Si igitur extra circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

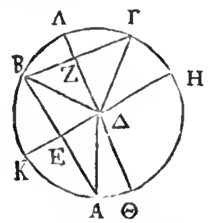
Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι[1], τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι[2], αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, sumptum punctum centrum est circuli.

Sit circulus ΑΒΓ, intra autem ipsum punctum Δ, et a Δ in ΑΒΓ circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico Δ punctum centrum esse ΑΒΓ circuli.



droite ΜΔ est commune et que la base ΔΚ est égale à la base ΔΝ, l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ (8. 1). Mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ ; donc l'angle ΒΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc il est impossible de mener du point Δ au cercle ΑΒΓ, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ, plus de deux droites égales. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Si dans un cercle, l'on prend un point quelconque, et si plus de deux droites menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles, le point qu'on aura pris sera le centre du cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ, et le point intérieur Δ, et que plus de deux droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ menées du point Δ à la circonférence soient égales entre elles, je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Κ, Η, Λ, Θ σημεῖα.

Επεὶ οὖν ἐστὶν ἴση[3] ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση[4]· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς[5]. Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ[6] κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου[7]. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Jungantur enim ΑΒ, ΒΓ, et secentur bifariam in Ε, Ζ punctis, et junctæ ΕΔ, ΖΔ producantur ad Κ, Η, Λ, Θ puncta.

Quoniam igitur æqualis est ΑΕ ipsi ΕΒ, communis autem ΕΔ, duæ utique ΑΕ, ΕΔ duabus ΒΕ, ΕΔ æquales sunt; et basis ΔΑ ipsi ΔΒ æqualis; angulus igitur ΑΕΔ angulo ΒΕΔ æqualis est; rectus igitur uterque ΑΕΔ, ΒΕΔ angulorum. ΗΚ igitur ipsam ΑΒ secat bifariam et ad rectos. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos secet, in secante est centrum circuli; in ΗΚ igitur est centrum ipsius ΑΒΓ circuli. Propter eadem utique et in ΘΛ est centrum ipsius ΑΒΓ circuli. Et nullum aliud commune habent ΗΚ, ΘΛ rectæ quam Δ punctum; Δ igitur punctum centrum est ΑΒΓ circuli. Si igitur circuli, etc.

Joignons les droites ΑΒ, ΒΓ, coupons-les en deux parties égales aux points Ε, Ζ (10. 1), et ayant joint les droites ΕΔ, ΖΔ, prolongeons-les vers les points Κ, Η, Λ, Θ.

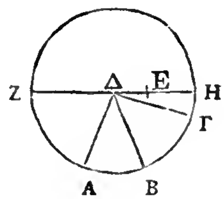
Puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, et que la droite ΕΔ est commune, les deux droites ΑΕ, ΕΔ sont égales aux deux droites ΒΕ, ΕΔ; mais la base ΔΑ est égale à la base ΔΒ; donc l'angle ΑΕΔ est égal à l'angle ΒΕΔ (8. 1); donc chacun des angles ΑΕΔ, ΒΕΔ est droit; donc la droite ΗΚ coupe la droite ΑΒ en deux parties égales et à angles droits. Mais lorsque, dans un cercle, une droite coupe une autre droite en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante (cor. 1. 3); donc le centre du cercle ΑΒΓ est dans ΗΚ. Par la même raison, le centre du cercle ΑΒΓ est dans ΘΛ. Mais les droites ΗΚ, ΘΛ n'ont d'autre point commun que le point Δ; donc le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

ALITER.

Intra enim circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, a Δ autem in ΑΒΓ circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico sumptum punctum Δ centrum esse ipsius ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ΖΗ ἄρα[8] διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου εἴληπταί τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου[9], μεγίστη μὲν ἔσται ἡ ΔΗ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι

Non enim, sed si possibile, sit Ε, et juncta ΔΕ producatur in Ζ, Η puncta; ergo ΖΗ diameter est ipsius ΑΒΓ circuli. Quoniam igitur circuli ΑΒΓ in ΖΗ diametro sumptum est aliquod punctum Δ, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit ΔΗ, major vero ΔΓ ipsâ ΔΒ, et ΔΒ ipsâ ΔΑ. Sed et æqualis, quod est impossibile; non igitur Ε centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud

AUTREMENT.

Dans le cercle ΑΒΓ soit pris un point quelconque Δ, et que plus de deux droites égales tombent du point Δ dans le cercle ΑΒΓ, les droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Qu'il ne le soit point, mais s'il est possible, que ce soit le point Ε; ayant joint ΔΕ, prolongeons cette droite vers les points Ζ, Η; la droite ΖΗ sera le diamètre du cercle ΑΒΓ. Puisque l'on a pris dans le diamètre ΖΗ du cercle ΑΒΓ un point Δ, qui n'est pas le centre de ce cercle, la droite ΔΗ sera la plus grande, la droite ΔΓ plus grande que la droite ΔΒ, et la droite ΔΒ plus grande que la droite ΔΑ (7, 3). Mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc le οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου[10].

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο[1].

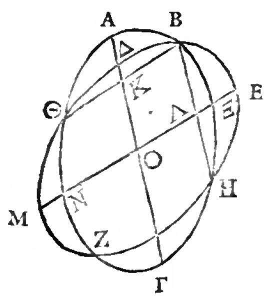
Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεῖα[2].

præter Δ; ergo Δ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli.

PROPOSITIO X.

Circulus circulum non secat in pluribus punctis quam duobus.

Si enim possibile, circulus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ secet in pluribus punctis quam duobus, in



ipsis Β, Η, Ζ, Θ, et junctæ ΒΘ, ΒΗ bifariam secentur in Κ, Λ punctis; et ab ipsis Κ, Λ ipsis ΒΘ, ΒΗ ad rectos ductæ ΚΓ, ΛΜ producantur in Α, Ε puncta.

point Ε n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point, excepté Δ, ne peut l'être; donc le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

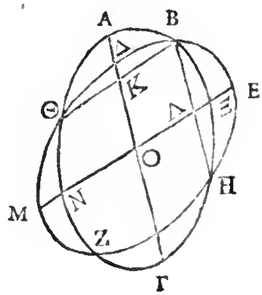
PROPOSITION X.

Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΓ coupe le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux points Β, Η, Ζ, Θ; joignons les droites ΒΘ, ΒΗ; coupons-les en deux parties égales aux points Κ, Λ, et par les points Κ, Λ, ayant conduit les droites ΚΓ, ΛΜ perpendiculaires à ΒΘ, ΒΗ, prolongeons-les vers les points Α, Ε.

Επεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει[3], ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς

Quoniam igitur in circulo ΑΒΓ recta aliqua ΑΓ rectam aliquam ΒΘ bifariam et ad rectos secat, in ΑΓ igitur est centrum ipsius ΑΒΓ circuli. Rursus, quoniam in circulo eodem ΑΒΓ recta aliqua ΝΞ rectam aliquam ΒΗ bifariam et ad rectos secat, in ΝΞ igitur centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Ostensum autem ipsum esse et in ΑΓ, et



ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις[4] ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο[5], ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

in nullo puncto conveniunt ΑΓ, ΝΞ rectæ inter se præterquam in Ο; ergo Ο punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, et ipsius ΔΕΖ circuli centrum esse Ο; duorum igitur circulorum sese secantium ΑΒΓ, ΔΕΖ, idem erit centrum Ο, quod est impossibile. Non igitur circulus, etc.

Puisque dans le cercle ΑΒΓ, la droite ΑΓ coupe la droite ΒΘ en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle ΑΒΓ est dans la droite ΑΓ (cor. 1. 3). De plus, puisque dans le même cercle ΑΒΓ la droite ΝΞ coupe la droite ΒΗ en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle ΑΒΓ est dans la droite ΝΞ. Mais on a démontré qu'il est dans la droite ΑΓ, et les deux droites ΑΓ, ΝΞ ne se rencontrent qu'au point Ο; donc le point Ο est le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement que le point Ο est le centre du cercle ΔΕΖ; donc le même point Ο est le centre des deux cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ, qui se coupent mutuellement, ce qui est impossible (5. 3). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

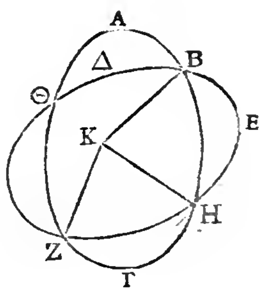
Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἴληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον προσπεπτώκασι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι[6], αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ[7] τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ[8] αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ALITER.

Circulus enim rursus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ secet in pluribus punctis quam duobus, in ipsis Β, Η, Ζ, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓ circuli, ipsum Κ, et jungantur ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Quoniam igitur intra circulum ΔΕΖ sumptum est aliquod punctum Κ, et a Κ in ΔΕΖ circulum incidunt plures quam duæ rectæ æquales, ipsæ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ; ergo Κ punctum centrum est ipsius ΔΕΖ circuli. Est autem et ipsius ΑΒΓ circuli centrum ipsius Κ; duorum igitur circulorum sese secantium idem centrum est Κ, quod impossibile. Non igitur circulus, etc.



AUTREMENT.

Car que le cercle ΑΒΓ coupe encore le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux points Β, Η, Ζ; prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ, et joignons ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Puisque dans le cercle ΔΕΖ, on a pris un point Κ, et que plus de deux droites égales ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ tombent du point Κ dans le cercle ΔΕΖ, le point Κ est le centre du cercle ΔΕΖ (9. 3). Mais le point Κ est le centre du cercle ΑΒΓ; donc le même point Κ est le centre de deux cercles qui se coupent; ce qui est impossible (5. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

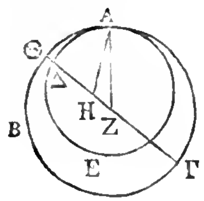
Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ[1] ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν[2] ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου[3] κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α[4] πεσεῖται.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli sese contiugant intus, et sumantur eorum centra, centra eorum conjungens recta producta in contactum cadet circulorum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant intus in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius autem ΑΔΕ ipsum Η; dico ab Η ad Ζ conjungentem rectam productam in Α cadere.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ τουτ' ἔστι τῆς ΖΘ[5], μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΖΗ· λοίπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν,

Non enim, sed si possibile, cadat ut ΖΗΘ, et jungantur ΑΖ, ΑΗ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ ipsâ ΖΑ, hoc est ipsâ ΖΘ majores sunt, communis auferatur ΖΗ; reliqua igitur ΑΗ reliquâ ΗΘ major est. Æqualis autem ΑΗ ipsi ΔΗ; et ΗΔ igitur ipsâ ΗΘ

PROPOSITION XI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, et si on prend leurs centres, la droite qui joint leurs centres étant prolongée tombera au contact de ces cercles.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent intérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Η au point Ζ, étant prolongée, tombera en Α.

Que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΗΘ; et joignons ΑΖ, ΑΗ.

Puisque les droites ΑΗ, ΗΖ sont plus grandes que ΖΑ (20. 1), c'est-à-dire que ΖΘ, retranchons la droite commune ΖΗ; la droite restante ΑΗ sera plus grande que la droite restante ΗΘ. Mais ΑΗ est égal à ΔΗ; donc ΗΔ est plus grand que ΘΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν[6] ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσεῖται· κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πέσειται[7]. Εὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

major est, minor majore, quod est impossibile. Non igitur a Z ad H conjuncta recta extra contactum ad A cadet. Ergo in contactum ad A cadet. Si igitur duo circuli, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Αλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ, καὶ ἐκϐεϐλήσθω[8] ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΖΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Επεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΖΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΓ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ομοίως, κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον[9].

ALITER.

Sed etiam cadat ut HZΓ, et producatur in directum ipsa HΓZ ad Θ punctum, et jungantur AH, AZ.

Quoniam igitur AH; HZ majores sunt ipsâ AZ, sed ZA æqualis est ipsi ZΓ, hoc est ipsi ZΘ, communis auferatur ZH; reliqua igitur AH reliquâ HΘ major est, hoc est HΔ ipsâ HΘ, minor majore, quod est impossibile. Similiter, et si extra parvum sit centrum majoris circuli, ostendemus hoc idem absurdum.

le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Z au point H ne tombera pas hors du contact en A ; donc elle tombera dans le contact en A. Donc, etc.

AUTREMENT.

Mais qu'elle tombe comme HZΓ, prolongeons HZΓ directement vers le point Θ, et joignons AH, HZ.

Puisque les droites AH, HZ sont plus grandes que AZ, et que ZA est égal à ZΓ, c'est-à-dire à ZΘ, retranchons la droite commune ZH ; la droite restante AH sera plus grande que la droite restante HΘ, c'est-à-dire, HΔ plus grand que HΘ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Si le centre du grand cercle était hors du petit cercle, nous démontrerons semblablement qu'il s'en suivrait une absurdité.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

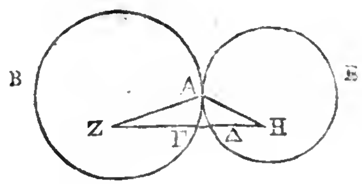
Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται[1] ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγμένη εὐθεῖα[2] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου[3] κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli sese contingant extra, centra ipsorum cunjungens recta per contactum transibit.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant extra in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius vero ΑΔΕ ipsum Η; dico a Ζ ad Η conjungentem rectam per contactum ad Α transire.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

Επεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ

Non enim, sed si possibile, eat ut ΖΓΔΗ, et jungantur ΖΑ, ΑΗ.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli, æqualis est ΖΑ ipsi ΖΓ. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ipsius ΑΔΕ circuli, æqualis est ΑΗ ipsi ΗΔ. Ostensa est

PROPOSITION XII.

Si deux cercles se touchent extérieurement, la droite qui joint leurs centres passera par le contact.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent extérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Ζ au point Η passera par le contact en Α.

Car que cela ne soit point, mais, s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΓΔΗ, et joignons ΖΑ, ΑΗ.

Puisque le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΖΑ est égale à ΖΓ. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΑΔΕ, la droite ΑΗ est égale à ΗΔ. Mais on a démontré que ΖΑ est égal à la droite ΖΓ; donc les droites ΖΑ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν. Αλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Εὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

est autem ZA ipsi ZΓ æqualis; ipsæ igitur ZA, AH ipsis ZΓ, ΔH æquales sunt; quare tota ZH ipsis ZA, AH major est. Sed et minor, quod impossibile. Non igitur a Z ad H ducta recta per contactum ad A non transibit; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

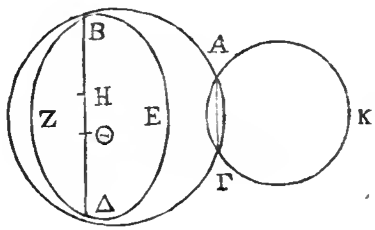
Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐφάπτηται ἐάν τε ἐκτός[1].

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΔΓ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω[2] πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Β, Δ.

PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

Si enim possibile, circulus ABΔΓ circulum EBZΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in B, Δ.



Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Et sumatur ipsius quidem ABΔΓ circuli centrum H; ipsius autem EBZΔ, ipsum Θ.

AH sont égales aux droites ZΓ, ΔH; donc la droite entière ZH est plus grande que les droites ZA, AH. Mais au contraire, elle est plus petite (20. 1), ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Z au point H ne peut pas ne pas passer par le contact en A; donc elle y passe. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

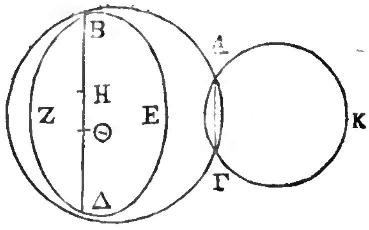
Un cercle ne touche point un cercle en plus d'un point, soit qu'il le touche intérieurement, ou extérieurement.

Car si cela est possible, que le cercle ABΔΓ touche d'abord intérieurement le cercle EBZΔ en plus d'un point, aux points B, Δ.

Prenons le centre H du cercle ABΔΓ, et le centre Θ du cercle EBZΔ.

Η ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα[3] ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ. Εδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Ipsa igitur ab Η ducta recta ad Θ in puncta Β, Δ cadet. Cadat ut ΒΗΘΔ. Et quoniam Η punctum centrum est ipsius ΑΒΔΓ circuli, æqualis est ΒΗ ipsi ΗΔ; major igitur ΒΗ ipsâ ΘΔ; ergo multo major ΒΘ ipsâ ΘΔ. Rursus, quoniam Θ punctum centrum est ipsius ΕΒΖΔ circuli, æqualis est ΒΘ ipsi ΘΔ. Ostensa est autem ipsâ et multo major, quod impossibile; non igitur circulus circulum contingit intus in pluribus punctis quam in uno.



Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ[5] ΑΒΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Α, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.

Επεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ ἄρα[6] ἐπὶ τὰ αὐτὰ[7] σημεῖα ἐπιζευγνυμένη

Dico etiam neque extra. Si enim possibile, circulus ΑΓΚ circulum ΑΒΓΔ contingat extra in pluribus punctis quam in uno, in Α, Γ, et jungatur ΑΓ.

Quoniam igitur circulorum ΑΒΔΓ, ΑΓΚ sumpta sunt in circumferentiis utriusque duo quælibet puncta Α, Γ, hæc utique puncta conjungens recta

La droite menée du point Η au point Θ passera par les points Β, Δ (11.5). Qu'elle tombe comme ΒΗΘΔ. Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΔΓ, la droite ΒΗ est égale à ΗΔ; donc ΒΗ est plus grand que ΘΔ; donc ΒΘ est beaucoup plus grand que ΘΔ. De plus, puisque le point Θ est le centre du cercle ΕΒΖΔ, la droite ΒΘ est égale à ΘΔ. Mais on a démontré qu'elle est beaucoup plus grande, ce qui est impossible; donc un cercle ne touche pas intérieurement un cercle en plus d'un point.

Je dis aussi qu'il ne le touche pas extérieurement en plus d'un point. Car, s'il est possible, que le cercle ΑΓΚ touche extérieurement le cercle ΑΒΔΓ en plus d'un point, aux points Α, Γ; joignons ΑΓ.

Puisque dans la circonférence des cercles ΑΒΔΓ, ΑΓΚ, on a pris deux points quelconques Α, Γ, la droite qui joindra ces deux points tombera dans εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. Αλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. Εδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

intra utrumque cadet. Sed quidem intra ipsum ΑΒΔΓ cadit, extra vero ipsum ΑΓΚ, quod absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

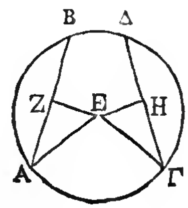
Εν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ æqualiter distant a centro, et quæ æqualiter distant a centro æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΔΓ, et in eo æquales rectæ sint ΑΒ, ΓΔ; dico ipsas ΑΒ, ΓΔ æqualiter distare a centro.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΓΕ.

Sumatur enim centrum ipsius ΑΒΔΓ circuli, et sit Ε, et ab Ε ad ΑΒ, ΓΔ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, et jungantur ΑΕ, ΓΕ.

l'un et l'autre cercle (2. 3). Mais elle tombe dans le cercle ΑΒΔΓ, et hors du cercle ΑΓΚ (déf. 3. 3), ce qui est absurde; donc un cercle ne touche pas extérieurement un cercle en plus d'un point. Mais on a démontré qu'il ne le touche pas intérieurement en plus d'un point. Donc etc.

PROPOSITION XIV.

Dans un cercle les droites égales sont également éloignées du centre, et les droites également éloignées du centre sont égales entr'elles.

Soit le cercle ΑΒΔΓ, et que dans ce cercle les droites ΑΒ, ΓΔ soient égales; je dis que les droites ΑΒ, ΓΔ sont également éloignées du centre.

Prenons le centre du cercle ΑΒΔΓ, qu'il soit le point Ε, du point Ε menons les droites ΕΖ, ΕΗ perpendiculaires aux droites ΑΒ, ΓΔ, et joignons ΑΕ, ΓΕ.

Επεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ EZ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ιση ἄρα ἡ AZ τῇ BZ· διπλῆ ἄρα ἡ AB τῆς AZ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ[2] AB τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ AZ τῇ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς EΓ. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum rectam aliquam AB non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat. Æqualis igitur AZ ipsi BZ; dupla igitur AB ipsius AZ. Propter eadem utique et ΓΔ ipsius ΓH est dupla, et est æqualis AB ipsi ΓΔ; æqualis igitur et AZ ipsi ΓH. Et quoniam æqualis est AE ipsi EΓ, æquale et ipsum ex AE ipsi ex EΓ. Sed ipsi quidem

ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AZ, ZE, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς EΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH, HΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ H γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AZ, ZE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓH, HE, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓH, ἴση γάρ ἐστιν ἡ AZ τῇ ΓH· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZE λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα[3] ἡ ZE τῇ EH. Εν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέν-

ex AE æqualia ipsa ex AZ, ZE, rectus enim ad Z angulus; ipsi vero ex EΓ æqualia ipsa ex EH, HΓ, rectus enim ad H angulus; ipsa igitur ex AZ, ZE æqualia sunt ipsis ex ΓH, HE, quorum ipsum ex AZ æquale est ipsi ex ΓH, æqualis enim est AZ ipsi ΓH; reliquum igitur ipsum ex ZE reliquo ex EH æquale est, æqualis igitur ZE ipsi EH. In circulo autem æqualiter distare à centro rectæ dicuntur, quando a cen-

Puisque la droite EZ menée par le centre, coupe à angles droits la droite AB, non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 3). Donc AZ est égal à BZ; donc AB est double de AZ. Par la même raison ΓΔ est double de ΓH; mais AB est égal à ΓΔ; donc AZ est égal à ΓH. Et puisque AE est égal à EΓ, le quarré de AE est égal au quarré de EΓ. Mais les quarrés des droites AZ, ZE sont égaux au quarré de AE (47. 1), car l'angle en Z est droit; et les quarrés des droites EH, HΓ sont égaux au quarré de EΓ, car l'angle en H est droit; donc les quarrés des droites AZ, ZE sont égaux aux quarrés des droites ΓH, HE; mais le quarré de AZ est égal au quarré de ΓH, car AZ est égal à ΓH; donc le quarré restant de ZE est égal au quarré restant de EH; donc ZE est égal à EH. Mais dans un cercle les droites sont dites également éloignées du centre, lorsque les perτρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Αλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον[5], ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν[6]· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

tro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt; ergo AB, ΓΔ æqualiter distant a centro.

Sed demum æqualiter AB, ΓΔ distent a centro, hoc est, æqualis sit EZ ipsi EH; dico æqualem esse et AB ipsi ΓΔ.

Etenim iisdem constructis, similiter utique ostendemus duplam esse quidem AB ipsius AZ, et ΓΔ ipsius ΓH; et quoniam æqualis est AE ipsi ΓE, æquale est ipsum ex AE ipsi ex ΓE; sed ipsi quidem ex AE æqualia sunt ipsa ex EZ, ZA, ipsi vero ex ΓE ipsa ex EH, HΓ; ipsa igitur ex EZ, ZA æqualia sunt ipsis ex EH, HΓ, quorum ipsum ex EZ ipsi ex EH est æquale, æqualis enim EZ ipsi EH; reliquum igitur ex AZ reliquo ex ΓH est æquale; æqualis igitur AZ ipsi ΓH, et est ipsius quidem AZ dupla AB, ipsius vero ΓH dupla ΓΔ. Æqualis igitur AB ipsi ΓΔ. In circulo igitur, etc.

pendiculaires menées du centre sur ces droites sont egales (déf. 4. 3); donc les droites AB, ΓΔ sont également éloignées du centre.

Mais que les droites AB, ΓΔ soient également éloignées du centre, c'est-à-dire, que ZE soit égal à EH; je dis que AB est égal à ΓΔ.

Les mêmes constructions étant faites, nous démontrerons semblablement que AB est double de AZ, et ΓΔ double de ΓH. Et puisque AE est égal à ΓE, le quarré de AE est égal au quarré de ΓE. Mais les quarrés des droites EZ, ZA sont égaux au quarré de AE (47. 1), et les quarrés des droites EH, HΓ égaux au quarré de ΓE; donc les quarrés des droites EZ, ZA sont égaux aux quarrés des droites EH, HΓ; mais le quarré de EZ est égal au quarré de EH, car EZ est égal à EH; donc le quarré restant de AZ est égal au quarré restant de ΓH; donc AZ est égal à ΓH; mais AB est double de la droite AZ, et ΓΔ double de ΓH; donc AB est égal à ΓΔ. Donc etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

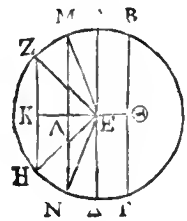
Εν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν[1] ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ[2], ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem est diameter ; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore major est.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, centrum vero Ε, et propinquior quidem ipsi Ε centro sit ΒΓ, remotior vero ΖΗ ; dico maximam esse ΑΔ, majorem vero ΒΓ ipsâ ΖΗ.



Ηχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε[3] κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΑΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Ducantur enim ab Ε centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. Et quoniam propinquior quidem centro est ΒΓ, remotior vero ΖΗ, major igitur ΕΚ ipsâ ΕΘ. Ponatur ipsi ΕΘ æqualis ΕΛ, et per Λ ipsi ΕΚ ad rectos ducta ΑΜ producatur ad Ν, et jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

PROPOSITION XV.

Dans un cercle le diamètre est la plus grande de toutes les droites, et parmi les autres, celle qui est plus près du centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Soit le cercle ΑΒΓΔ ; que ΑΔ en soit le diamètre, et Ε le centre, et que ΒΓ soit plus près du centre que ΖΗ ; je dis que la droite ΑΔ est la plus grande, et que ΒΓ est plus grand que ΖΗ.

Menons du centre Ε les droites ΕΘ, ΕΚ perpendiculaires aux droites ΒΓ, ΖΗ. Et puisque ΒΓ est plus près du centre que ΖΗ, la droite ΕΚ est plus grande que ΕΘ (déf. 5. 3). Faisons la droite ΕΛ égale à ΕΘ, par le point Λ menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΕΚ, prolongeons-la vers Ν, et joignons ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΕΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα[4] τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων[5]· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν[6] ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam æqualis est ΕΘ ipsi ΕΛ, æqualis est et ΒΓ ipsi ΜΝ. Rursus, quoniam æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΜ, et ΕΔ ipsi ΕΝ, ergo ΕΔ ipsis ΜΕ, ΕΝ æqualis est. Sed ΜΕ, ΕΝ ipsâ ΜΝ majores sunt, et ΑΔ ipsâ ΜΝ major est. Æqualis autem ΜΝ ipsi ΒΓ, ergo ΑΔ ipsâ ΒΓ major est. Et quoniam duæ ΜΕ, ΕΝ duabus ΖΕ, ΕΗ æquales sunt, et angulus ΜΕΝ angulo ΖΕΗ major; basis igitur ΜΝ basi ΖΗ major est. Sed ΜΝ ipsi ΒΓ ostensa est æqualis, et ΒΓ ipsâ ΖΗ major est. Maxima quidem igitur ΑΔ diameter, major vero ΒΓ ipsâ ΖΗ. In circulo igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται[1]· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας[2] εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

PROPOSITIO XVI.

Recta diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta extra cadet circulum; et in locum inter et rectam et circumferentiam altera recta non cadet; et quidem semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus vero minor.

Puisque ΕΘ est égal à ΕΛ, la droite ΒΓ est égale à ΜΝ (14. 3). De plus, puisque ΑΕ est égal à ΕΜ, et ΕΔ égal à ΕΝ, la droite ΑΔ est égale aux droites ΜΕ, ΕΝ. Mais les droites ΜΕ, ΕΝ sont plus grandes que ΜΝ; donc ΑΔ est plus grand que ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΒΓ; donc ΑΔ est plus grand que ΒΓ. Et puisque les deux droites ΜΕ, ΕΝ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΗ, et que l'angle ΜΕΝ est plus grand que l'angle ΖΕΗ, la base ΜΝ est plus grande que la base ΖΗ (24. 1). Mais on a démontré que ΜΝ est égal à ΒΓ; donc ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc le diamètre ΑΔ est la plus grande de toutes les droites, et ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

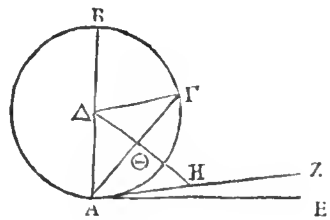
Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée de l'une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite; et l'angle du demicercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Sit circulus ΑΒΓ circa centrum Δ et diametrum ΑΒ; dico ipsam ab Α ad ΑΒ ad rectos ab extremitate ductam extra cadere circulum.

Non enim, sed si possibile, cadat intus, ut ΑΓ, et jungatur ΔΓ.



Επεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν[3]. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ[4] ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ ΑΕ.

Λέγω δὴ[5] ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΓ, et angulus ΔΑΓ angulo ΑΓΔ æqualis est. Rectus autem ΔΑΓ, rectus igitur et ΑΓΔ; trianguli utique ΑΓΔ duo anguli ΔΑΓ, ΑΓΔ duobus rectis æquales sunt, quod est impossibile. Non igitur ab Α puncto, ipsi ΒΑ ad rectos ducta intra cadet circulum. Similiter utique ostendemus, neque in circumferentiam; extra igitur cadet, ut ΑΕ.

Dico etiam in locum inter ΑΕ rectam et ΓΘΑ circumferentiam alteram rectam non cadere.

Soit le cercle ΑΒΓ ayant pour centre le point Δ, et pour diamètre la droite ΑΒ; je dis que la perpendiculaire menée du point Α à la droite ΑΒ, tombe hors du cercle.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe en-dedans comme ΓΑ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΓ, l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1); mais l'angle ΔΑΓ est droit; donc l'angle ΑΓΔ est droit aussi; donc les angles ΔΑΓ, ΑΓΔ du triangle ΑΓΔ sont égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (17. 1); donc la perpendiculaire menée du point Α au diamètre ΑΒ, ne tombe point dans le cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe point dans la circonférence; donc elle tombe en-dehors comme ΑΕ.

Je dis encore qu'aucune droite ne peut tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence ΓΘΑ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας[6] εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ[7] περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα[8] παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε

Si enim possibile, cadat ut ΖΑ, et ducatur a puncto Δ ad ΖΑ perpendicularis ΔΗ.

Et quoniam rectus est ΑΗΔ, minor autem recto ipse ΔΑΗ; major igitur ΑΔ ipsâ ΔΗ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΔΘ; major igitur ΔΘ ipsâ ΔΗ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur in locum inter rectam et circumferentiam altera recta cadet.

Dico et quidem semicirculi angulum, comprehensum et a ΒΑ rectâ et ΓΘΑ circumferentiâ, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero comprehensum et a ΓΘΑ circumferentiâ et ΑΕ rectâ, quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, major quidem comprehenso et a ΒΑ rectâ et ΓΘΑ circumferentiâ, minor vero comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiâ et ΑΕ rectâ, in locum inter et ΓΘΑ circumferentiam et ΑΕ rectam recta cadet, quæ faciet angulum a rectis comprehensum, majorem quidem comprehenso et a ΒΑ rectâ

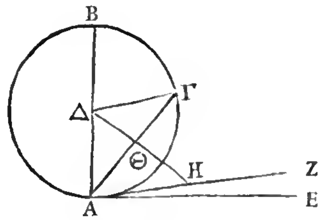
Car si cela est possible, qu'elle tombe comme ΖΑ, et du point Δ menons ΔΗ perpendiculaire à ΖΑ.

Puisque l'angle ΑΗΔ est droit, et que l'angle ΔΑΗ est plus petit qu'un droit, la droite ΑΔ est plus grande que ΔΗ. Mais ΑΔ est égal à ΔΘ; donc ΔΘ est plus grand que ΔΗ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc une droite ne peut pas tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence.

Je dis enfin, que l'angle du demi-cercle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ est plus grand que tout angle rectiligne aigu, et que l'angle restant compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ est plus petit que tout angle rectiligne aigu.

Car s'il y a un angle rectiligne plus grand que l'angle compris par la droite ΒΑ et par la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, dans l'espace compris entre la circonféτῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et ΓΘΑ circumferentiâ, minorem vero comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiâ et AE rectâ. Non cadit autem; non igitur comprehenso angulo et a BA rectâ et ΓΘΑ circumferentiâ erit major acutus a rectis comprehensus, neque quidem minor comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiâ et AE rectâ. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου[10] φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. Ἐπεὶ δήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη[11].

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est rectam diametro circuli ad rectos ab extremitate ductam contingere circulum; et rectam circulum in unico contingere puncto. Quoniam et recta in duobus ipsi occurens intra ipsum cadere ostensa est.

rence ΓΘΑ et la droite AE, il y aura une droite qui fera un angle plus grand que l'angle compris par la droite BA et la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite AE. Mais il n'y en a point; donc il n'y a point d'angle aigu, compris par des droites, plus grand que l'angle compris par la droite BA et la circonférence ΓΘΑ, ni d'angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite AE. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que la droite perpendiculaire au diamètre, et menée d'une de ses extrémités, touche la circonférence, et que cette droite ne la touche qu'en un seul point. Puisqu'il a été démontré que la droite qui rencontre un cercle en deux points entre dans ce cercle (2. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

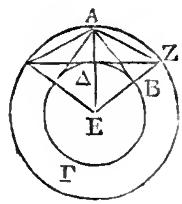
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ circulum datum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus vero circulus ΒΓΔ; oportet igitur ab A puncto rectam lineam ducere, quæ ΒΓΔ circulum contingat.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ[1] κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ

Sumatur enim centrum circuli E, et jungatur AE, et centro quidem E, intervallo vero EA circulus describatur AZH, et a Δ ipsi EA ad rectos ducatur ΔZ, et jungantur EZ, AB; dico quod ab A puncto ipsum ΒΓΔ circulum contingens ducta est ipsa AB.

Quoniam enim E centrum est ΒΓΔ, AZH circulorum, æqualis igitur est quidem EA ipsi EZ,

PROPOSITION XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit A le point donné, et ΒΓΔ le cercle donné; il faut mener du point A une ligne droite qui touche le cercle ΒΓΔ.

Prenons le centre E de ce cercle, joignons AE, du centre E et de l'intervalle EA, décrivons le cercle AZH (dém. 3); par le point Δ menons ΔZ perpendiculaire à AE, et joignons EZ, AB; je dis que la droite AB, menée du point A, touche le cercle ΒΓΔ.

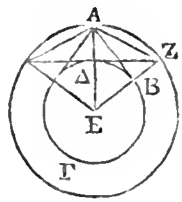
Car puisque le point E est le centre des cercles ΒΓΔ, AZH, la droite AE est

ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν[2] πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ[3]. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΑ[4] κύκλου.

Απὸ τοῦ ἄρα δοθέντος[5] σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

et ΕΔ ipsi ΕΒ; duæ utique ΑΕ, ΕΒ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, et angulum communem comprehendunt ad Ε; basis igitur ΔΖ basi ΑΒ æqualis est; et ΕΔΖ triangulum ΕΒΑ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis; æqualis igitur ΕΔΖ ipsi ΕΒΑ. Rectus autem ΕΔΖ, rectus igitur et ΕΒΑ; et est ΕΒ ex centro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum; ΑΒ igitur contingit ΒΓΑ circulum.

A dato igitur puncto Α datum circulum ΒΓΔ contingens recta linea ducta est ΑΒ. Quod oportebat facere.



égale à ΕΖ, et ΕΔ égal à ΕΒ; donc les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΔ; mais ces droites comprènent un angle commun en Ε; donc la base ΔΖ est égale à la base ΑΒ, le triangle ΕΔΖ égal au triangle ΕΒΑ, et les angles restants égaux aux angles restants (4. 1); donc l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΕΒΑ. Mais l'angle ΕΔΖ est droit; donc l'angle ΕΒΑ est droit aussi. Mais la droite ΕΒ est menée par le centre, et la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une des extrémités du diamètre touche le cercle (16. 3); donc la droite ΑΒ touche le cercle ΒΓΑ.

Donc la ligne droite ΑΒ, menée par le point donné Α, touche le cercle ΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

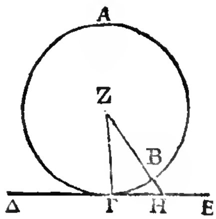
Εὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην[1].

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω[2] τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, conjungens perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli Ζ, et a Ζ ad Γ conjungatur ΖΓ; dico ΖΓ perpendicularem esse ad ΔΕ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ[3] ΖΒ τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ

Si enim non, ducatur a Ζ ad ΔΕ perpendicularis ΖΗ.

Quoniam igitur ΖΗΓ angulus est rectus, acutus igitur est ΖΓΗ; majorem autem angulum majus latus subtendit, major igitur ΖΓ ipsâ ΖΗ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; major igitur et ΖΒ ipsâ ΖΗ, minor majore, quod est impossibile.

PROPOSITION XVIII.

Si une droite touche un cercle, et si du centre on mène une droite au point de contact, cette droite sera perpendiculaire à la tangente.

Que la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et du point Ζ au point Γ menons ΖΓ; je dis que la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ.

Car si elle ne l'est pas, du point Ζ menons ΖΗ perpendiculaire à ΔΕ (12. 1).

Puisque l'angle ΖΗΓ est droit, l'angle ΖΓΗ est aigu (17. 1); mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (19. 1); donc ΖΓ est plus grand que ΖΗ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc la droite ΖΒ est plus grande que la droite ΖΗ, ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Non igitur ZH perpendicularis est ad ΔE. Similiter utique ostendemus neque aliam quampiam præter ipsam ZΓ; ergo ZΓ perpendicularis est ad ΔE. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

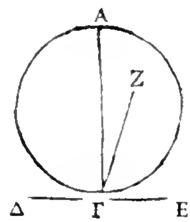
Εὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς[1] εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς[2] ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad rectos recta linea ducatur, in ductâ erit centrum circuli.

Circulum enim ABΓ contingat aliqua recta ΔE in Γ puncto, et a Γ ipsi ΔE ad rectos ducatur ΓA; dico in AΓ esse centrum circuli.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Non enim, sed si possibile, sit Z, et jungatur ΓZ.

la plus petite que la plus grande, ce qui est impossible; donc ZH n'est pas une perpendiculaire à ΔE. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre, excepté ZΓ; donc ZΓ est perpendiculaire à ΔE. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une ligne droite perpendiculaire à la tangente, le centre du cercle sera dans la droite qui aura été menée.

Car qu'une droite ΔE touche le cercle ABΓ au point Γ, et du point Γ menons ΓA perpendiculaire à ΔE; je dis que le centre du cercle est dans AΓ.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, que le centre soit Z, et joignons ΓZ.

Επεὶ οὖν[3] κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. Εστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλό τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΔΕ, a centro autem ad contactum ducta est ΖΓ, ΖΓ ergo perpendicularis est ad ΔΕ; rectus igitur est ΖΓΕ. Est autem et ΑΓΕ rectus; æqualis igitur est ΖΓΕ ipsi ΑΓΕ, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Ζ centrum est ΑΒΓ circuli. Similiter utique ostendemus, neque aliud aliquod esse præterquam in ipsâ ΑΓ. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

PROPOSITIO XX.

In circulo, ad centrum angulus duplus est ipsius ad circumferentiam, quando eamdem circumferentiam pro basi habent anguli.

Sit circulus ΑΒΓ, et ad centrum quidem ejus angulus sit ΒΕΓ, ad circumferentiam vero ipsi ΒΑΓ, habeant autem eamdem circumferentiam pro basi ΒΓ; dico duplum esse ΒΕΓ angulum ipsius ΒΑΓ.

Puisque la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΖΓ a été mené du centre au point de contact, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ (18. 3); donc l'angle ΖΓΕ est droit. Mais l'angle ΑΓΕ est droit aussi; donc l'angle ΖΓΕ est égal à l'angle ΑΓΕ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point Ζ n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point ne peut l'être, à moins qu'il ne soit dans ΑΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

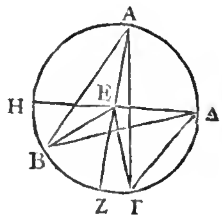
Soit le cercle ΑΒΓ, que l'angle ΒΕΓ soit au centre de ce cercle, que l'angle ΒΑΓ soit à la circonférence, et que ces angles ayent pour base le même arc ΒΓ; je dis que l'angle ΒΕΓ est double de l'angle ΒΑΓ.

Επιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση[1] καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. Ιση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

Juncta enim AE producatur ad Z.

Quoniam igitur æqualis est EA ipsi EB, æqualis et angulus EAB ipsi EBA; anguli igitur EAB, EBA ipsius EAB dupli sunt. Æqualis autem BEZ ipsis EAB, EBA; et BEZ igitur ipsius EAB est duplus. Propter eadem utique et ZEΓ ipsius EAΓ est duplus; totus igitur BEΓ totius BAΓ est duplus.



Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία[2] ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΔΓ. Εν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Inclinetur autem rursus, et sit alter angulus BΔΓ, et juncta ΔE producatur ad H. Similiter utique ostendemus duplum esse HEΓ angulum ipsius HΔΓ, quorum HEB duplus est ipsius HΔB; reliquus igitur BEΓ duplus est BΔΓ. In circulo igitur, etc.

Joignons la droite AE, et prolongeons-la vers Z.

Puisque EA est égal à EB, l'angle EAB est égal à l'angle EBA (5. 1); donc les angles EAB, EBA sont doubles de l'angle EAB. Mais l'angle BEZ est égal aux angles EAB, EBA (32. 1); donc l'angle BEZ est double de l'angle EAB. L'angle ZEΓ est double de l'angle ZAΓ par la même raison; donc l'angle entier BEΓ est double de l'angle entier BAΓ.

Que l'angle BAΓ change de position, et qu'il soit un autre angle BΔΓ; ayant joint la droite ΔE, prolongeons-la vers H. Nous démontrerons semblablement que l'angle HEΓ est double de l'angle HΔΓ; mais l'angle HEB est double de l'angle HΔB; donc l'angle restant BEΓ est double de l'angle restant BΔΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Εν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ[1] τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

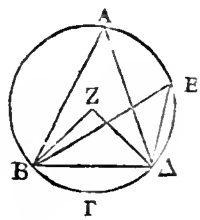
Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

PROPOSITIO XXI.

In circulo in eodem segmento anguli æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in eodem segmento ΒΑΕΔ anguli sint ΒΑΔ, ΒΕΔ; dico ΒΑΔ, ΒΕΔ angulos æquales inter se esse.

Sumatur enim ΑΒΓΔ circuli centrum, et sit Ζ, et jungantur ΒΖ, ΖΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Εν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam quidem ΒΖΔ angulus ad centrum est, ipse vero ΒΑΔ ad circumferentiam, et habent eamdem circumferentiam ΒΓΔ pro basi; ergo ΒΖΔ angulus duplus est ipsius ΒΑΔ. Propter eadem utique ΒΖΔ et ipsius ΒΕΔ est duplus; æqualis igitur ΒΑΔ ipsi ΒΕΔ. In circulo igitur, etc.

PROPOSITION XXI.

Dans un cercle, les angles placés dans le même segment sont égaux entr'eux.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ soient dans le même segment ΒΑΕΔ; je dis que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ sont égaux entr'eux.

Car prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 5), qu'il soit Ζ, et joignons ΒΖ, ΖΔ.

Puisque l'angle ΒΖΔ est au centre, que l'angle ΒΑΔ est à la circonférence, et que ces deux angles ont pour base le même arc ΒΓΔ, l'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΑΔ (20. 5). L'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΕΔ, par la même raison; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΒΕΔ (not. 7). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

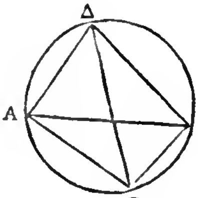
Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

PROPOSITIO XXII.

In circulis quadrilaterorum oppositi anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso quadrilaterum sit ΑΒΓΔ; dico oppositos ipsius angulos duobus rectis æquales esse.

Jungantur ΑΓ, ΒΔ.



Ἐπεὶ οὖν[1] παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου[2] αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ,

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ipsius ΑΒΓ trianguli tres anguli ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus rectis æquales sunt. Æqualis autem quidem ΓΔΒ ipsi ΒΑΓ, etenim in eodem sunt segmento ΒΑΔΓ, et ΑΓΒ ipsi ΑΔΒ, etenim in eodem sunt segmento ΑΔΓΒ. Totus igitur ΑΔΓ ipsis ΒΑΓ, ΑΓΒ æqualis est. Communis addatur ΑΒΓ; ergo ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ

PROPOSITION XXII.

Les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que le quadrilatère ΑΒΓΔ lui soit inscrit; je dis que les angles opposés de ce quadrilatère sont égaux à deux droits.

Joignons ΑΓ, ΒΔ.

Puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ du triangle ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΒΑΓ (21. 3), car ils sont dans le même segment ΒΑΔΓ; et l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, car ils sont dans le même segment ΑΔΓΒ; donc l'angle entier ΑΔΓ est égal aux angles ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ajoutons l'angle

ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα[3] δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsis ΑΒΓ, ΑΔΓ æquales sunt. Sed ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΒΓ, ΑΔΓ igitur duobus rectis æquales sunt. Similiter utique ostendemus, et ΒΑΔ, ΔΓΒ angulos duobus rectis esse. In circulis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

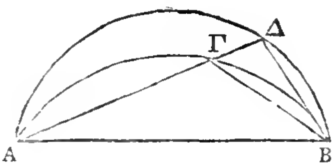
Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται[1] ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

PROPOSITIO XXIII.

Super eâdem rectâ duo segmenta circulorum similia et inæqualia non constituentur ex eâdem parte.

Si enim possibile, ad eamdem rectam ΑΒ duo segmenta circulorum similia et inæqualia constituantur ex eâdem parte ΑΓΒ, ΑΔΒ, et ducatur ΑΓΔ, et jungantur ΓΒ, ΔΒ.



Επεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δε-

Quoniam igitur simile est ΑΓΒ segmentum ipsi ΑΔΒ segmento, similia autem segmenta

commun ΑΒΓ; les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ seront égaux aux angles ΑΒΓ, ΑΔΓ. Mais les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits; donc les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux angles droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΔ, ΔΓΒ sont aussi égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Sur une même droite, on ne peut pas décrire du même côté deux segments de cercles semblables et inégaux.

Car si cela est possible, décrivons du même côté, sur la même droite ΑΒ les deux segments de cercles ΑΓΒ, ΑΔΒ semblables et inégaux; menons ΑΓΔ, et joignons ΓΒ, ΔΒ.

Puisque le segment ΑΓΒ est semblable au segment ΑΔΒ, et que les segments χόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

circulorum sunt quæ capiunt angulos æquales; æqualis igitur est ΑΓΒ angulus ipsi ΑΔΒ, exterior interiori, quod est impossibile. Non igitur super eâdem rectâ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

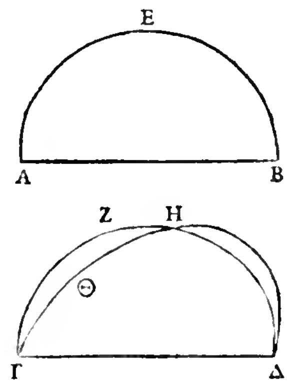
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

PROPOSITIO XXIV.

Super æqualibus rectis similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt.

Sint enim super æqualibus rectis ΑΒ, ΓΔ similia segmenta circulorum ipsa ΑΕΒ, ΓΖΔ; dico æquale esse ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ segmento.



de cercles semblables sont ceux qui reçoivent des angles égaux (déf. 11. 3), l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, l'angle intérieur à l'angle extérieur; ce qui est impossible (16. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Sur des droites égales, les segments de cercles semblables sont égaux entr'eux.

Que sur les droites égales ΑΒ, ΓΔ soient décrits les segments de cercles semblables ΑΕΒ, ΓΖΔ; je dis que le segment ΑΕΒ est égal au segment ΓΖΔ.

Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης[2], ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ[3], ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Congruente enim AEB segmento ipsi ΓZΔ, et posito quidem A puncto super Γ, rectâ vero AB super ΓΔ, congruet et B punctum ipsi Δ puncto, propterea quod æqualis est AB ipsi ΓΔ; ipsâ autem AB ipsi ΓΔ congruente, congruet et AEB segmentum ipsi ΓZΔ. Si enim AB recta ipsi ΓΔ congruat, segmentum autem AEB ipsi ΓZΔ non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel situm mutabit ut ΓΘHΔ, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis Γ, H, Δ, quod est impossibile. Non igitur congruente AB rectâ ipsi ΓΔ non congruet et AEB segmentum ipsi ΓZΔ. Congruet igitur, et æquale ipsi erit. Ergo super æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

PROPOSITIO XXV.

Circuli segmento dato, describere circulum cujus est segmentum.

Car le segment AEB étant appliqué sur le segment ΓZΔ, le point A étant posé sur le point Γ, et la droite AB sur la droite ΓΔ, le point B tombera sur le point Δ, parce que la droite AB est égale à la droite ΓΔ; mais la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB coïncidera avec le segment ΓZΔ. Car si la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB ne coïncidait pas avec le segment ΓZΔ, ou il tomberait en dedans, ou en dehors, ou bien prenant une position comme ΓΘHΔ, un cercle couperait un cercle en plus de deux points, aux points Γ, H, Δ, ce qui est impossible (10. 3). Donc la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment ABΔ ne peut pas ne pas coïncider avec le segment ΓZΔ; donc il coïncinde avec lui, et lui est par conséquent égal. Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

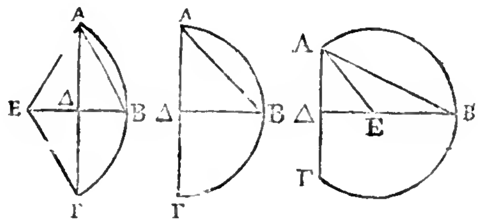
Un segment de cercle étant donné, décrire le cercle dont il est le segment.

Εστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ[1] προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα[2] τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Sit datum circuli segmentum ΑΒΓ; oportet igitur describere circulum, cujus est ΑΒΓ segmentum.

Secetur enim ΑΓ bifariam in Δ, et ducatur a Δ puncto ipsi ΑΓ ad rectos ΔΒ, et jungatur ΑΒ. Ergo ΑΒΔ angulus ipso ΒΑΔ vel major est, vel æqualis, vel minor.



Εστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε[3], καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα εὐθείᾳ[4] τῇ ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση[5], ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις[6] ἄρα

Sit primum major, et constituatur ad ΒΑ rectam, et ad punctum in eâ Α, ipsi ΑΒΔ angulo æqualis ipse ΒΑΕ, et producatur ΔΒ ad Ε, et jungatur ΕΓ. Et quoniam igitur æqualis est ΑΒΕ angulus ipsi ΒΑΕ, æqualis utique est et ΒΕ recta rectæ ΕΑ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΓ, communis autem ΔΕ, duæ utique ΑΔ, ΔΕ duabus ΓΔ, ΔΕ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΔΕ angulo ΓΔΕ est æqualis; rectus enim uterque; basis igitur ΑΕ basi ΓΕ est æqua-

Soit ΑΒΓ le segment de cercle donné; il faut décrire le cercle dont ΑΒΓ est le segment.

Coupons la droite ΑΓ en deux parties égales au point Δ (10. 1), du point Δ menons ΔΒ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΒ (11. 1); l'angle ΑΒΔ sera ou plus grand que l'angle ΒΑΔ, ou il lui sera égal, ou il sera plus petit.

Qu'il soit d'abord plus grand; sur la droite donnée ΒΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΑΒΔ (23. 1); prolongeons ΔΒ vers Ε, et joignons ΕΓ. Puisque l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle ΒΑΕ, la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΑ (6. 1). Et puisque ΑΔ est égal à ΔΓ, et que la droite ΔΕ est commune, les deux droites ΑΔ, ΔΕ sont égales aux deux droites ΓΔ, ΔΕ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΔΕ est égal à l'angle ΓΔΕ, car ils sont droits l'un et l'autre ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση[7]. Ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ[8] Ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος κύκλος[9]. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ[10] τυγχάνειν.

Ομοίως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ[11] τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Εἀν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησόμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α[12], τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ ὡς τὸ Ε[13], καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

lis. Sed AE ipsi EB ostensa est æqualis; et BE igitur ipsi ΓE est æqualis; tres igitur AE, EB, EΓ æquales inter se sunt; ergo centro E, intervallo autem unâ ipsarum AE, EB, EΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est ABΓ segmentum minus esse semicirculo, propterea quod E centrum extra ipsum cadit.

Similiter et si angulus ABΔ æqualis sit ipsi BAΔ, ipsâ AΔ æquali factâ alterutri ipsarum BΔ, ΔΓ, tres igitur ΔA, ΔB, ΔΓ æquales inter se erunt, et erit autem Δ centrum completi circuli, et erit utique ABΓ semicirculus.

Si autem ABΔ minor sit ipso BAΔ, et si constituamus ad BA rectam, et ad punctum in eâ A, ipsi ABΔ angulum æqualem, intra ABΓ segmentum cadet centrum in ΔB, ut E, et erit utique ABΓ segmentum majus semicirculo.

donc la base AE est égale à la base ΓE (4. 1). Mais AE a été démontré égal à EB; donc BE est égal à ΓE; donc les trois droites AE, EB, EΓ sont égales entre elles; donc le cercle décrit du centre E et d'un intervalle égal à une des droites AE, EB, EΓ, passera par les autres points, et le cercle sera décrit. Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment (9. 3). Il est évident que le segment ABΓ est plus petit qu'un demi-cercle; car le centre E tombe hors du segment.

Semblablement, si l'angle ABΔ est égal à l'angle BAΔ, la droite AΔ étant égale à chacune des droites BΔ, ΔΓ, les trois droites ΔA, ΔB, ΔΓ seront égales entre elles; donc le point Δ sera le centre du cercle entier (9. 3), et le segment ABΓ sera évidemment un demi-cercle.

Mais si l'angle ABΔ est plus petit que l'angle BAΔ, et si sur la droite BA, et au point A de cette droite, nous faisons l'angle BAE égal à l'angle ABΔ, le centre tombera en dedans du segment ABΓ dans la droite ΔB, comme en E, et le segment sera évidemment plus grand qu'un demi-cercle.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὗπέρ ἐστι τὸ τμῆμα[4]. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus est segmentum. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

PROPOSITIO XXVI.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

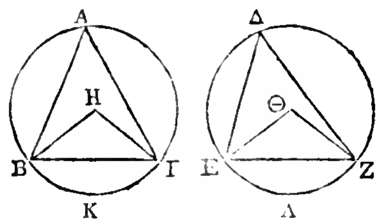
Εστωσαν γὰρ[1] ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι[2] ἔστωσαν, αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus circumferentiis insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes.

Sint enim æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis quidem ad centra æquales anguli sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, et ad circumferentias ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico æqualem esse ΒΚΓ circumferentiam ipsi ΕΛΖ circumferentiæ.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.



Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Dans des cercles égaux, les angles égaux s'appuient sur des arcs égaux, soit qu'ils soient placés aux centres, ou bien aux circonférences.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, que les angles égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ soient aux centres, et que les angles égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ soient aux circonférences; je dis que l'arc ΒΚΓ est égal à l'arc ΕΛΖ.

Joignons ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶν ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι εἰσί[3]· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση ἐστί[4]· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση[5]. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καὶ ἔστιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν[6]· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι[7]. Εστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΛΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρειά ἐστιν ἴση τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ[8]. Εὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam æquales sunt ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, æquales sunt ipsæ ex centris; duæ igitur ΒΗ, ΗΓ duabus ΕΘ, ΘΖ æquales sunt; et angulus ad Η angulo ad Θ æqualis est; basis igitur ΒΓ basi ΕΖ est æqualis. Et quoniam æqualis est ad Α angulus ipsi ad Δ, simile igitur est ΒΑΓ segmentum ipsi ΕΔΖ segmento, et sunt super æquales rectas ΒΓ, ΕΖ; ipsa autem super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt; æquale igitur ΒΑΓ segmentum ipsi ΕΔΖ segmento. Est autem et totus ΑΒΓ circulus toti ΔΕΖ circulo æqualis; reliquum igitur ΒΚΓ segmentum reliquo ΕΛΖ æquale; ergo ΒΚΓ circumferentia æqualis est ΕΛΖ circumferentiæ. Si igitur in æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis ipsi æqualibus circumferentiis insistentes anguli æquales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes.

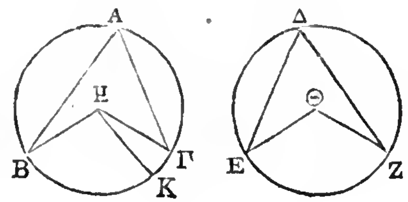
Puisque les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites ΒΗ, ΗΓ sont égales aux deux droites ΕΘ, ΘΖ; mais l'angle en Η est égal à l'angle en Θ; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ (4. 1). Mais l'angle en Α est égal à l'angle en Δ; donc le segment ΒΑΓ est semblable au segment ΕΔΖ (déf. 11. 3); mais ils sont placés sur les droites égales ΒΓ, ΕΖ, et les segments de cercles semblables, qui sont placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3); donc le segment ΒΑΓ est égal au segment ΕΔΖ. Mais le cercle entier ΑΒΓ est égal au cercle entier ΔΕΖ; donc le segment restant ΒΚΓ est égal au segment restant ΕΛΖ; donc l'arc ΒΚΓ est égal à l'arc ΕΛΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVII.

Dans les cercles égaux, les angles qui comprènent des arcs égaux sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient aux centres, ou aux circonférences.

Εν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐπὶ[1] ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία[2] τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση[3].

In æqualibus enim circulis ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualibus circumferentiis ΒΓ, ΕΖ, ad Η, Θ quidem centra anguli insistant ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico ΒΗΓ quidem angulum ipsi ΕΘΖ esse æqualem, ipsum vero ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται[4]. Εστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. Αλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. Καὶ ἐστὶ τῆς

Si enim inæqualis sit ΒΗΓ ipsi ΕΘΖ, unus ipsorum major erit. Sit major ΒΗΓ, et constituatur ad ΒΗ rectam, et ad punctum in eâ Η, ipsi ΕΘΖ angulo æqualis ipse ΒΗΚ; æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistunt, quando ad centra sunt; æqualis igitur ΒΚ circumferentia ipsi ΕΖ circumferentiæ. Sed ΕΖ ipsi ΒΓ æqualis est, et ΒΚ igitur ipsi ΒΓ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur inæqualis est ΒΗΓ angulus ipsi ΕΘΖ; æqualis igitur. Et est ipsius quidem ΒΗΓ

Que dans les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ placés aux centres Η, Θ, et les angles ΒΑΓ, ΕΔΖ placés aux arcs ΒΑΓ, ΕΔΖ comprènent les arcs égaux ΒΓ, ΕΖ; je dis que l'angle ΒΗΓ est égal à l'angle ΕΘΖ, et l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ.

Car si les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ sont inégaux, l'un d'eux sera le plus grand. Que l'angle ΒΗΓ soit le plus grand; sur la droite ΒΗ, et au point Η de cette droite, faisons l'angle ΒΗΚ égal à l'angle ΕΘΖ (23. 1). Puisque les angles égaux comprènent des arcs égaux, lorsqu'ils sont aux centres (26. 3), l'arc ΒΚ est égal à l'arc ΕΖ. Mais l'arc ΕΖ est égal à l'arc ΒΓ; donc l'arc ΒΚ est égal à l'arc ΒΓ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ ne sont pas inégaux; donc ils sont μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὴ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Εν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

dimidius ipse ad Α, ipsius vero ΕΘΖ dimidius ipse ad Δ; æqualis igitur et ad Α angulus ipsi ad Δ. In æqualibus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

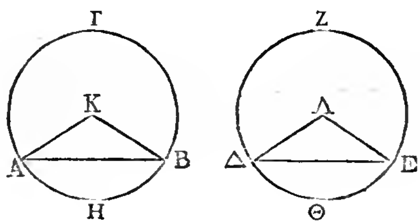
Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Εστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς[1] ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι[2].

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis æquales rectæ sint ΑΒ, ΔΕ, ipsas quidem ΑΓΒ, ΔΖΕ circumferentias majores auferentes, ipsas



vero ΑΗΒ, ΔΘΕ minores; dico ipsam quidem ΑΓΒ majorem circumferentiam æqualem esse ipsi ΔΖΕ majori circumferentiæ, ipsam vero ΑΗΒ minorem ip i ΔΘΕ minori.

égaux. Mais l'angle en Α est la moitié de l'angle ΒΗΓ, et l'angle en Δ la moitié de l'angle ΕΘΖ (20. 3); donc l'angle en Α est égal à l'angle en Δ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Dans des cercles égaux, les droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit.

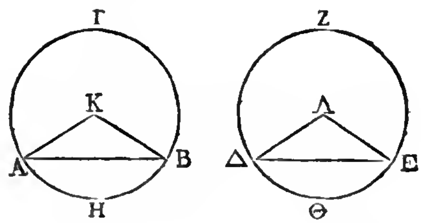
Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, et que dans ces cercles, les droites égales ΑΒ, ΔΕ soutendent les plus grands arcs ΑΓΒ, ΔΖΕ, et les plus petits arcs ΑΗΒ, ΔΘΕ; je dis que le plus grand arc ΑΓΒ est égal au plus grand arc ΔΖΕ, et que le plus petit arc ΑΗΒ est égal au plus petit arc ΔΘΕ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ περιφερείᾳ[3]. Εστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ[4] λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. Εν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Sumantur enim centra circulorum, Κ, Λ, et jungantur BK, KB, ΔΛ, ΛΕ.

Et quoniam æquales circuli sunt, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur AK, KB duabus ΔΛ, ΛΕ æquales sunt, et basis AB basi ΔΕ æqualis; angulus igitur AKB ipsi ΔΛΕ æqualis est. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistunt, quando ad centra sunt; æqualis igitur AHB circumferentia ipsi ΔΘΕ circumferentiæ. Est autem et totus ΑΒΓ circulus toti ΔΕΖ circulo æqualis; reliqua igitur et ΑΓΒ circumferentia reliquæ ΔΖΕ circumferentiæ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.



Prenons les centres K, Λ de ces cercles (1. 3), et joignons AK, KB, ΔΛ, ΛΕ. Puisque ces cercles sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites AK, KB sont égales aux deux droites ΔΛ, ΛΕ; mais la base AB est égale à la base ΔΕ; donc l'angle AKB est égal à l'angle ΔΛΕ (8. 1). Mais des angles égaux comprènent des arcs égaux, quand ils sont aux centres (26. 3); donc l'arc AHB est égal à l'arc ΔΘΕ. Mais la circonférence entière ΑΒΓ est égale à la circonférence entière ΔΕΖ; donc l'arc restant ΑΓΒ est égal à l'arc restant ΔΖΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ[1] τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Εστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα[2] τῇ ΕΖ.

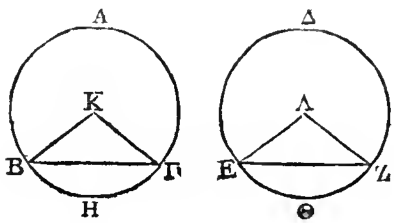
Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω[3] τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectæ subtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis æquales circumferentiæ sumantur ΒΗΓ, ΕΘΖ, et jungantur ΒΓ, ΕΖ rectæ; dico æqualem esse ΒΓ rectam ipsi ΕΖ.

Sumantur enim centra circulorum, et sint Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας[4] περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Εν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam æqualis est ΒΗΓ circumferentia ipsi ΕΘΖ circumferentiæ, æqualis est et angulus ΒΚΓ ipsi ΕΛΖ. Et quoniam æquales sunt ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur ΒΚ, ΚΓ duabus ΕΛ, ΛΖ æquales sunt, et angulos æquales continent; basis igitur ΒΓ basi ΕΖ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

PROPOSITION XXIX.

Dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des droites égales.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ; dans ces cercles prenons les arcs égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ, et joignons les droites ΒΓ, ΕΖ; je dis que la droite ΒΓ est égale à la droite ΕΖ.

Prenons les centres de ces cercles, qu'ils soient Κ, Λ, et joignons ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Puisque l'arc ΒΗΓ est égal à l'arc ΕΘΖ, l'angle ΒΚΓ est égal à l'angle ΕΛΖ (27. 3). Mais les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égaux; donc leurs rayons seront égaux; donc les deux droites ΒΚ, ΚΓ sont égales aux deux droites ΕΛ, ΛΖ; mais ces droites comprènent des angles égaux; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ (4. 1). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν[1].

Εστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν[2].

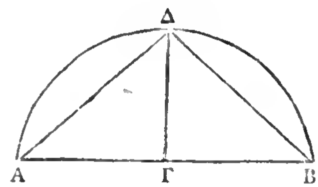
Επεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

POPOSITIO XXX.

Datam circonferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ΑΔΒ; oportet igitur ΑΔΒ circumferentiam bifariam secare.

Jungatur ΑΒ, et secetur bifariam in Γ, et a Γ puncto ipsi ΑΒ rectæ ad rectos ducatur ΓΒ, et jungantur ΑΔ, ΔΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσί. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα[3] ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, communis autem ΓΔ; duæ igitur ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt. Et angulus ΑΓΔ angulo ΒΓΔ æqualis, rectus enim uterque; basis igitur ΑΔ basi ΔΒ æqualis est. Æquales autem rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; et est utraque ipsarum ΑΔ, ΔΒ circumferentiarum minor semicirculo; æqualis igitur ΑΔ circumferentia ipsi ΔΒ circumferentiæ.

PROPOSITION XXX.

Couper un arc donné en deux parties égales.

Soit ΑΔΒ l'arc donné; il faut couper l'arc ΑΔΒ en deux parties égales.

Joignons la droite ΑΒ, et coupons-la en deux parties égales en Γ (10. 1); du point Γ menons ΓΔ perpendiculaire à la droite ΑΒ (11. 1), et joignons ΑΔ, ΔΒ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites ΑΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ. Mais l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΓΔ; car ils sont droits l'un et l'autre; donc la base ΑΔ est égale à la base ΔΒ (4. 1). Mais des droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit (28. 3), et l'un et l'autre des arcs ΑΔ, ΔΒ est plus petit que la demi-circonférence; donc l'arc ΑΔ est égal à l'arc ΔΒ.

Η ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον⁴. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ergo data circumferentia bifariam secta est in Δ puncto. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

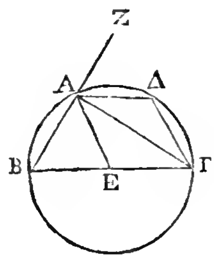
Εν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι[1] μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς[2].

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ[3] ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ

PROPOSITIO XXXI.

In circulo, ipse quidem in semicirculo angulus rectus est; ipse vero in majore segmento minor recto; ipse autem in minore segmento major recto. Et insuper ipse quidem majoris segmenti angulus major est recto; ipse vero minoris segmenti angulus minor recto.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΒΓ, centrum vero Ε, et jungantur ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ; dico ipsum quidem in ΒΑΓ semicirculo angulum ΒΑΓ rectum esse; ipsum autem in



Donc l'arc donné a été coupé en deux parties égales au point Δ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans un cercle, l'angle placé dans le demi-cercle est droit; l'angle placé dans un segment plus grand est plus petit qu'un droit; l'angle placé dans un segment plus petit est plus grand qu'un droit; l'angle du plus grand segment est plus grand qu'un droit, et l'angle du plus petit segment est plus petit qu'un droit.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, dont le diamètre est ΒΓ et le centre le point Ε; joignons ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ placé dans le demi-cercle ΒΑΓ est droit;

ἐν τῷ ΑΒΓ *μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ* ΑΒΓ, *ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ* ΑΔΓ *ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ* ΑΔΓ[4] *μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.*

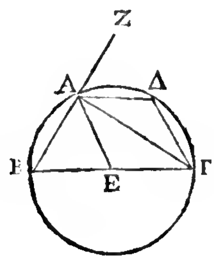
Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, *καὶ διήχθω ἡ* ΒΑ *ἐπὶ τὸ* Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ *τῇ* ΕΑ, *ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ* ΑΒΕ *τῇ ὑπὸ* ΒΑΕ. *Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ* ΓΕ *τῇ* ΕΑ, *ἴση ἐστὶ καὶ*[5] *ἡ ὑπὸ* ΑΓΕ *τῇ ὑπὸ*

ΑΒΓ majore semicirculo segmento angulum ΑΒΓ minorem recto; ipsum vero in ΑΔΓ minorem semicirculo segmento angulum ΑΔΓ majorem esse recto.

Jungatur ΑΕ, et producatur ΒΑ ad Ζ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΑ, æqualis est et angulus ΑΒΕ, ipsi ΒΑΕ. Rursus, quoniam æqualis est ΓΕ ipsi ΕΑ, æqualis est et ΑΓΕ ipsi



ΓΑΕ· *ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ* ΒΑΓ *δυσὶ ταῖς ὑπὸ* ΑΒΓ, ΑΓΒ *ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ* ΖΑΓ *ἐκτὸς τοῦ* ΑΒΓ *τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ* ΑΒΓ, ΑΓΒ *γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ* ΒΑΓ *γωνία τῇ ὑπὸ* ΖΑΓ, *ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ* ΒΑΓ *ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ* ΒΑΓ *ὀρθή ἐστι.*

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ *τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ* ΑΒΓ, ΒΑΓ *δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ*

ΓΑΕ; totus igitur ΒΑΓ duobus ΑΒΓ, ΑΓΒ æqualis est. Est autem et ipse ΖΑΓ, extra ΑΒΓ triangulum, duobus ΑΒΓ, ΑΓΒ angulis æqualis; æqualis igitur et ΒΑΓ angulus ipsi ΖΑΓ; rectus igitur uterque; ipse igitur in ΒΑΓ semicirculo angulus ΒΑΓ rectus est.

Et quoniam ΑΒΓ trianguli duo anguli ΑΒΓ, ΒΑΓ duobus rectis minores sunt, rectus autem

que l'angle ΑΒΓ placé dans le segment ΑΒΓ plus grand que le demi-cercle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit, et que l'angle ΑΔΓ placé dans le segment ΑΔΓ plus petit que le demi-cercle, est plus grand qu'un droit.

Joignons ΑΕ, et prolongeons ΒΑ vers Ζ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΑ, l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle ΒΑΕ (5. 1). De plus, puisque ΓΕ est égal à ΕΑ, l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΓΑΕ; donc l'angle entier ΒΑΓ est égal aux deux angles ΑΒΓ, ΑΓΒ. Mais l'angle ΖΑΓ placé hors du triangle ΑΒΓ est égal aux deux angles ΑΒΓ, ΑΓΒ (32. 1); donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΖΑΓ; donc chacun de ces angles est droit (déf. 10. 1); donc l'angle ΒΑΓ, placé dans le demi-cercle ΒΑΓ, est droit.

Puisque les deux angles ΑΒΓ, ΒΑΓ du triangle ΑΒΓ sont plus petits que deux δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ[6]· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστι, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι[7].

Λέγω[8] ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε[9] τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε[10] τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Επεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία[11] ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΔ περιφερείας περιεχομένη[12] ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Εν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΒΑΓ; minor igitur recto est ΑΒΓ angulus, et in ΑΒΓ segmento semicirculo majore.

Et quoniam in circulo quadrilatum est ΑΒΓΔ, in circulis autem quadrilatorum oppositi duobus rectis æquales sunt; ipsi igitur ΑΒΓ, ΑΔΓ duobus rectis æquales sunt. Et est ΑΒΓ minor recto; reliquus igitur ΑΔΓ angulus major recto est, et est in ΑΔΓ segmento semicirculo minore.

Dico autem et majoris quidem segmenti angulum comprehensum et ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, majorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum et ab ΑΔΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quoniam enim ipse a ΒΑ, ΑΓ rectis comprehensus rectus angulus est, ergo ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ comprehensus major est recto. Rursus, quoniam ipse ab ΑΓ, ΑΖ rectis comprehensus rectus est, ergo a ΓΑ rectâ, et ΑΓΔ circumferentiâ comprehensus minor est recto. In circulo igitur, etc.

droits (17. 1), et que l'angle ΒΑΓ est droit, l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΒΓ plus grand que le demi-cercle.

Puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est dans un cercle, et que les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits (22. 3), les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle restant ΑΔΓ est plus grand qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΔΓ plus petit que le demi-cercle.

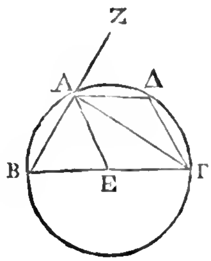
Je dis aussi que l'angle du plus grand segment, compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ, est plus grand qu'un droit, et que l'angle du plus petit segment, compris par l'arc ΑΔΓ et la droite ΑΓ, est plus petit qu'un droit, ce qui est évident; car puisque l'angle compris par les droites ΒΑ, ΑΓ est droit, l'angle compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ est plus grand qu'un droit. De plus, puisque l'angle compris par les droites ΑΓ, ΑΖ est droit, l'angle compris par la droite ΓΑ et l'arc ΑΓΔ est plus petit qu'un droit. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Η[13] ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. Επεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Αλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ALITER.

Demonstratur rectum esse ΒΑΓ. Quoniam duplus est ΑΕΓ ipsius ΒΑΕ, æqualis enim duobus interioribus et oppositis; est autem et ΑΕΒ duplus ipsius ΕΑΓ; ipsi igitur ΑΕΒ, ΑΕΓ dupli sunt ipsius ΒΑΓ. Sed ipsi ΑΕΒ, ΑΕΓ duobus rectis æquales sunt; ergo ΒΑΓ rectus est. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία·

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum, si unus angulus trianguli duobus æqualis sit, rectum esse angu-

AUTREMENT.

On démontre autrement que l'angle ΒΑΓ est droit. En effet, puisque l'angle ΑΕΓ est double de l'angle ΒΑΕ, car il est égal aux deux angles intérieurs et opposés (32. 1), et que l'angle ΑΕΒ est double de l'angle ΕΑΓ, les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont doubles de l'angle ΒΑΓ. Mais les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle ΒΑΓ est droit. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit, parce que son angle extérieur est égal à ces διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτος ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Οταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν[14].

lum, propterea quod et ejus angulus exterior iisdem est æqualis. Quando autem ipsi deinceps sunt æquales, recti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ′.

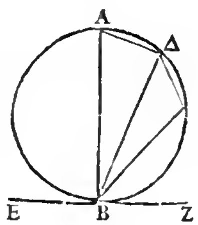
Εὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς[1] τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem in circulum ducatur aliqua recta ducta secans circulum, quos facit angulos ad contingentem ipsi æquales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Circulum enim ΑΒΓΔ contingat aliqua recta ΕΖ in Β puncto, et a Β puncto ducatur aliqua



διήχθω τις εὐθεῖα εἰς[2] τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γω-

recta ΒΔ in ΑΒΓΔ circulum secans ipsum; dico quos facit angulos ΒΔ cum ΕΖ contingente eos æquales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est ΖΒΔ quidem angulum æ-

mêmes angles, et que quand deux angles de suite sont égaux, ils sont droits (déf. 10. 1).

PROPOSITION XXXII.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle.

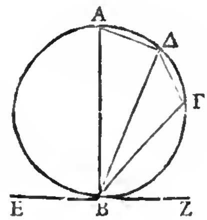
Qu'une droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et du point Β menons une droite ΒΔ qui coupe le cercle ΑΒΓΔ; je dis que les angles que fait ΒΔ avec la tangente ΕΖ sont égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle;

νίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ[3].

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

qualem esse angulo in ΒΑΔ segmento constituto, ΔΒΕ vero angulum æqualem esse in ΑΓΒ segmento constituto.

Ducatur enim a Β ipsi ΕΖ ad rectos ΒΑ, et sumatur in ΒΔ circumferentiâ quodlibet punctum Γ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.



Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ΕΖ κατὰ τὸ Β, ἀπὸ δὲ τῆς[4] ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα[5] τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Η ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου[6]· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ

Et quoniam circulum ΑΒΓΔ contingit aliqua recta ΕΖ in Β, a contactu autem ducta est tangenti ad rectas ΒΑ, in ΒΑ igitur centrum est ΑΒΓΔ circuli. ΒΑ igitur diameter est ΑΒΓΔ circuli; ergo ΑΔΒ angulus in semicirculo constitutus rectus est; reliqui igitur ΒΑΔ, ΑΒΔ uni recto æquales sunt. Est autem et ΑΒΖ rectus; ergo ΑΒΖ æqualis est ipsis ΒΑΔ, ΑΒΔ. Communis auferatur ΑΒΔ; reliquus igitur ΔΒΖ angulus æqualis est angulo ΒΑΔ in alterno

c'est-à-dire, que l'angle ΖΒΔ est égal à l'angle placé dans le segment ΒΑΔ, et que l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle placé dans le segment ΔΓΒ.

D'un point Β menons la droite ΒΑ perpendiculaire à ΕΖ (11. 1), et dans l'arc ΒΔ, prenons un point quelconque Γ, et joignons ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et que la droite ΒΑ, menée du point de contact Β, est perpendiculaire à la tangente ΕΖ, le centre du cercle ΑΒΓΔ est dans la droite ΒΑ (19. 3). Donc ΒΑ est le diamètre du cercle ΑΒΓΔ; donc l'angle ΑΔΒ, placé dans le demi-cercle, est droit (31. 3). Donc les angles restants ΒΑΔ, ΑΒΔ sont égaux à un droit. Mais l'angle ΑΒΖ est droit; donc l'angle ΑΒΖ est égal aux angles ΒΑΔ, ΑΒΔ (not. 10). Retranchons l'angle commun ΑΒΔ; l'angle restant ΔΒΖ sera égal à l'angle ΒΑΔ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι[1]· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

segmento circuli. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΑΒΓΔ, oppositi ejus anguli duobus rectis æquales sunt. Sunt autem et ipsi ΔΒΖ, ΔΒΕ duobus rectis æquales; ipsi igitur ΔΒΖ, ΔΒΕ ipsis ΒΑΔ, ΒΓΔ æquales sunt, quorum ΒΑΔ ipsi ΔΒΖ ostensus est æqualis; reliquus igitur ΔΒΕ angulo ΔΓΒ in alterno circuli segmento ΔΓΒ æqualis est. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ[1]. Η δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία[2] ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα.

PROPOSITIO XXXIII.

Super datâ rectâ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit data recta ΑΒ, datus autem angulus rectilineus ad Γ; oportet igitur super datâ rectâ ΑΒ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Ipse autem ad Γ angulus vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

placé dans le segment alterne du cercle. Et puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est inscrit dans le cercle, ses angles opposés sont égaux à deux droits (22. 3). Mais les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux à deux droits ; donc les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux aux angles ΒΑΔ, ΒΓΔ (13. 1) ; mais on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΔΒΖ ; donc l'angle restant ΔΒΕ est égal à l'angle ΑΓΒ placé dans le segmeut alterne du cercle ΔΓΒ ; donc, etc.

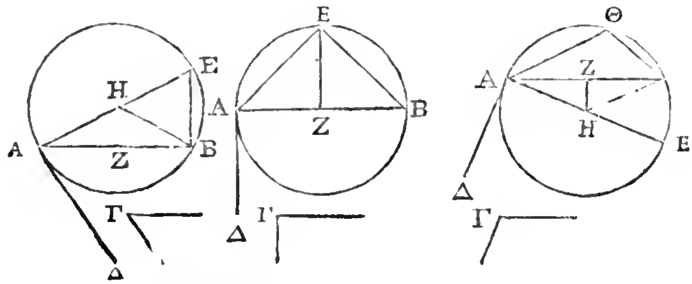
PROPOSITION XXXIII.

Sur une droite donnée, décrire un segment de cercle, qui recoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒ la droite donnée et Γ l'angle rectiligne donné ; il faut sur la droite donnée ΑΒ décrire un segment de cercle qui recoive un angle égal à l'angle donné Γ. L'angle Γ est aigu, ou droit, ou obtus.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς[3] ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ[4] συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ. Καὶ[5] ἤχθω τῇ AΔ ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB,

Sit primum acutus, ut in primâ figurâ, et constituatur ad AB rectam et ad punctum in A, ipsi ad Γ angulo æqualis ipse BAΔ; acutus igitur est et BAΔ. Ducatur ipsi AΔ ab A puncto ad rectos ipsa AE, et secetur AB bifariam in Z, et ducatur a Z puncto ipsi AB ad rectos ipsa ZH, et jungatur HB. Et quoniam æqualis est AZ ipsi ZB, communis autem ZH, duæ utique



κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὴ αἱ AZ, ZH δυσὶ ταῖς ZB, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνίᾳ[6] τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσις ἄρα ἡ AH βάσει τῇ HB ἴση ἐστίν. Ο ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ HA, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B. Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE. Επεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A, τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ AΔ, ἡ AΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Επεὶ

AZ, ZH duabus ZB, ZH æquales sunt, et angulus AZH ipsi angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi HB æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Describatur, et sit ABE, et jungatur BE. Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos est AΔ, ipsa utique AΔ contingit circulum. Quoniam igitur circulum ABE tangit aliqua recta AΔ, et a

Premièrement qu'il soit aigu, comme dans la première figure; sur la droite AB et au point A construisons un angle BAΔ égal à l'angle Γ (23. 1); l'angle BAΔ sera aigu. Du point A menons AE perpendiculaire à AΔ (11. 1); coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1), et du point Z menons ZH pendiculaire à AB, et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites ZB, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base HB (4. 1). Donc le cercle décrit du centre H, et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il soit décrit, et qu'il soit ABE, et joignons EB. Puisque la droite AΔ menée de l'extrémité A du diamètre AE est perpendiculaire a AE, la droite AΔ touchera le cercle (16. 3). Puisque la droite AΔ touche le cercle ABE, σῦν κύκλου τοῦ ABE ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ AΔ[7], καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἀφῆς εἰς[8] τὸ ABE κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ κύκλου[9] τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AEB. Ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον ἔστω πάλιν[10] ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ[11]. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ZA, ZB, κύκλος γεγράφθω ὁ AEB. Ἐφάπτεται ἄρα ἡ AΔ εὐθεῖα τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAΔ γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι[12], ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί[13]. Καὶ ἡ ἐν

contactu ad A in ABE circulum ducta est aliqua AB, angulus utique ΔAB æqualis est angulo AEB in alterno circuli segmento. Sed ΔAB ipsi ad Γ est æqualis; et ad Γ igitur angulus æqualis est ipsi AEB. Super datâ igitur rectâ AB segmentum circuli descriptum est AEB, capiens angulum AEB æqualem dato ad Γ.

Sed et rectus sit ipse ad Γ; et oporteat rursus super AB describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ recto angulo. Constituatur enim rursus ipsi ad Γ recto angulus æqualis BAΔ, ut se habet in secundâ figurâ, et secetur AB bifariam in Z, et centro quidem Z, intervallo vero alterutrâ ipsarum AZ, ZB, circulus describatur AEB; contingit igitur AΔ recta ABE circulum, propterea quod rectus est ad A angulus. Et æqualis est quidem BAΔ angulus ipsi in AEB segmento, rectus enim et ipse est in semicirculo consistens. Sed BAΔ ipsi ad Γ æqualis est; et ipse

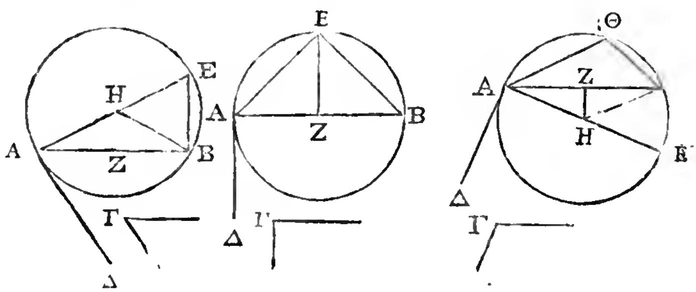
et que du point de contact en A on a mené une droite AB dans le cercle ABE, l'angle ΔAB est égal à l'angle AEB placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle ΔAB est égal à l'angle Γ; donc l'angle Γ est égal à l'angle AEB. Donc sur la droite donnée AB, on a décrit un segment de cercle AEB qui reçoit un angle AEB égal à l'ange donné Γ.

Mais que l'angle Γ soit droit, et qu'il faille encore décrire sur la droite AB un segment de cercle qui reçoive un angle égal à l'angle droit Γ. Construisons un angle BAΔ égal à l'angle droit Γ (23. 1), comme dans la seconde figure; coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1); du centre Z, et d'un intervalle égal à l'une ou à l'autre des droites ZA, ZB, décrivons le cercle AEB. La droite AΔ sera tangente au cercle ABE (16. 3), parce que l'angle est droit en A. Mais l'angle BAΔ est égal à l'angle qui est placé dans le segment AEB, car cet angle est droit, puisqu'il est placé dans un demi-cercle (31. 3). Mais l'angle BAΔ est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment est égal à l'angle Γ, τῷ ΑΕΒ τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ[14]· γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπεὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ

in AEB segmento igitur æqualis est ipsi ad Γ. Descriptum est igitur rursus super AB segmentum circuli AEB, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ.

Sed etiam ad Γ obtusus sit, et constituatur ipsi æqualis ad AB rectam et ad A punctum ipse BAΔ, ut se habet in tertiâ figurâ, et ipsi AΔ ad rectos ducatur AE, et secetur rur-



ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ[15] ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. Ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ[16]. Καὶ

sus AB bifariam in Z, et ipsi AB ad rectos ducatur ZH, et jungatur HB. Et quoniam rursus æqualis est AZ ipsi ZB, et communis ZH, duæ utique AZ, ZH duabus BZ, ZH æquales sunt, et angulus AZH angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi BH æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Transeat ut AEB. Et Quoniam ipsi AB diametro ab extremitate ad rec-

donc on a décrit sur la droite AB un segment de cercle AEB qui reçoit un angle égal à l'angle droit Γ.

Mais enfin que l'angle Γ soit obtus. Sur la droite AB et au point A construisons un angle BAΔ égal à l'angle Γ (23. 1), et menons AE perpendiculaire à AΔ (11. 1); coupons la droite AB en deux parties égales en Z (10. 1); menons ZH perpendiculaire à AB (11. 1), et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites BZ, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base BH (4. 1). Donc le cercle décrit du point H et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il y passe comme AEB, puisqu'on a mené de l'extrémité du ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται[20] ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας[21] τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

tos ducta est ΑΔ, ipsa ΑΔ igitur contingit ΑΕΒ circulum. Et a contactu ad Α ducta est ΑΒ; ergo ΒΑΔ angulus æqualis est angulo constituto in alterno circuli segmento ΑΘΒ. Sed ΒΑΔ angulus ipsi ad Γ æqualis est. Et ipse in ΑΘΒ igitur segmento angulus æqualis est ipsi ad Γ. Ergo super datam rectam ΑΒ descriptum est segmentum circuli ΑΘΒ, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.

PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo segmentum auferre; capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datus vero angulus rectilineus ad Δ; oportet igitur ab ΑΒΓ circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo ad Δ.

diamètre ΑΕ, la droite ΑΔ perpendiculaire à ce diamètre, la droite ΑΔ touchera le cercle ΑΕΒ (16. 3). Et puisque la droite ΑΒ a été menée du point de contact Α, l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΑΘΒ du cercle. Mais l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment ΑΘΒ est égal à l'angle Γ. Donc on a décrit sur la droite donnée ΑΒ un segment de cercle ΑΘΒ, qui reçoit un angle égal à l'angle Γ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXIV.

D'un cercle donné, retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut du cercle ΑΒΓ retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ.

Ηχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου[2] ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

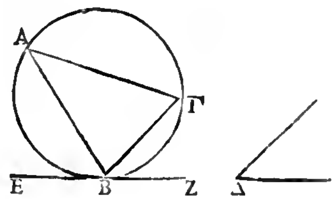
Επεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ[3].

Απὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ducatur ipsum ΑΒΓ circulum contingens ΕΖ ad Β punctum, et constituatur ad ΕΖ rectam et ad punctum in eâ Β ipsi ad Δ angulo æqualis ΖΒΓ.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΕΖ, et a contactu ad Β ducta est ΒΓ; ipse ΖΒΓ igitur æqualis est angulo constituto in ΒΑΓ alterno segmento. Sed ΖΒΓ ipsi ad Δ æqualis est; et ipse in ΒΑΓ igitur segmento æqualis est ipsi ad Δ angulo.

A dato igitur circulo ΑΒΓ segmentum ablatum est ΒΑΓ, capiens angulum æqualem ipsi dato angulo rectilineo ad Δ. Quod oportebat facere.



Menons une droite ΕΖ qui touche le cercle ΑΒΓ au point Β (17. 3), et sur la droite ΕΖ, et au point Β de cette droite, faisons l'angle ΖΒΓ égal à l'angle Δ (23. 1).

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΒΓ a été menée du point de contact Β, l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΒΑΓ du cercle (32. 3). Mais l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle Δ; donc l'angle placé dans le segment ΒΑΓ est égal à l'angle Δ.

Donc du cercle donné ΑΒΓ on a retranché un segment ΒΑΓ, qui reçoit un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

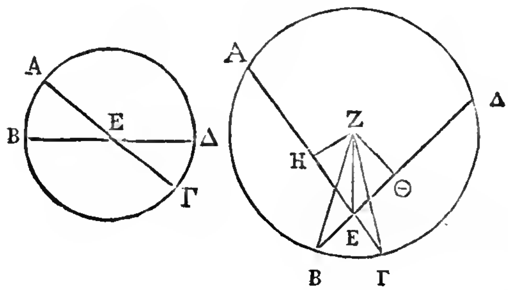
Εὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν[1] ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ sese secent, ipsum sub unius segmentis contentum rectangulum æquale est ipsi sub alterius segmentis contento rectangulo.

In circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secent in Ε puncto; dico ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Si igitur ipsæ quidem ΑΓ, ΒΔ per centrum sunt, ita ut Ε centrum sit ipsius ΑΒΓΔ circuli; manifestum est æqualibus existentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, et ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.

PROPOSITION XXXV.

Si dans un cercle, deux droites se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

Que dans le cercle ΑΒΓΔ les deux droites ΑΓ, ΒΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

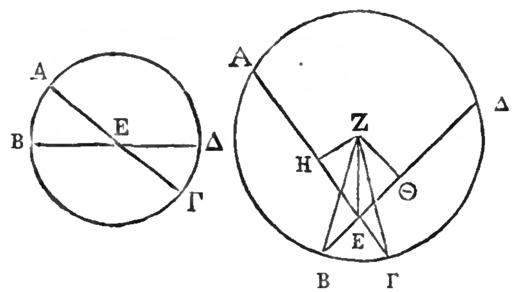
Si les droites ΑΓ, ΒΔ passent par le centre, de manière que le point Ε soit le centre du cercle ΑΒΓΔ, il est évident que les droites ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ étant égales, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

Μὴ[2] ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου[3], καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει[4]· ἴση

Non sint autem ΑΓ, ΔΒ per centrum, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et a Ζ ad ΑΓ, ΔΒ rectas perpendiculares ducantur ΖΗ, ΖΘ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Et quoniam recta aliqua ΖΗ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat; æqualis igitur



ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Προσκείσθω κοινὸν[5] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ[5] τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴσον[6] ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ

ΑΗ ipsi ΗΓ. Quoniam igitur ΑΓ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε, ipsum utique sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΗΕ quadrato æquale est ipsi ex ΗΓ. Commune addatur ipsum ex ΗΖ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipsis ex ΖΗ, ΗΕ æquale est ipsis ex ΓΗ, ΗΖ. Sed ipsis quidem ex ΕΗ, ΗΖ est æquale ipsum ex ΖΕ, ipsis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale est ipsi ex ΖΓ; ipsum igitur

Mais que les droites ΑΓ, ΔΒ ne passent pas par le cèntre; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ; du point Ζ menons les droites ΖΗ, ΖΘ perpendiculaires à ΑΓ, ΔΒ (12. 1), et joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Puisque la droite ΖΗ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 3); donc ΑΗ est égal à ΗΓ. Puisque ΑΓ est coupé en deux parties égales en Η, et en deux parties inégales en Ε, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΗΕ, est égal au quarré de ΗΓ (5. 2). Ajoutons le quarré commun de ΗΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec les quarrés des droites ΖΗ, ΗΕ sera égal aux quarrés des droites ΓΗ, ΗΖ. Mais le quarré de ΖΕ est égal aux quarrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1), et le quarré de ΖΓ égal aux quarrés des droites ΓΗ, τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ· Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

sub AE, ΕΓ cum ipso ex ZE, æquale est ipsi ZΓ. Æqualis autem ZΓ ipsi ZB, ipsum igitur sub AE, ΕΓ cum ipso ex EZ æquale est ipsi ex ZB. Propter eadem utique et ipsum sub ΔE, EB cum ipso ex ZE æquale est ipsi ex ZB. Ostensum est autem et ipsum sub AE ΕΓ cum ipso ex ZE æquale esse ipsi ex ZB; ipsum igitur sub AE, ΕΓ cum ipso ex ZE æquale est ipsi sub ΔE, EB cum ipso ex ZE. Commune auferatur ipsum ex ZE; reliquum igitur sub AE, ΕΓ contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΔE, EB contento rectangulo. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit ipsum sub totâ secante et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et convexam

HZ; donc le rectangle sous AE, EΓ, avec le quarré de ZE, est égal au quarré de ZΓ. Mais ZΓ est égal à ZB; donc le rectangle sous AE, EΓ, avec le quarré de EZ, est égal au quarré de ZB. Par la même raison, le rectangle sous ΔE, EB, avec le quarré de ZE, est égal au quarré de ZB. Mais on a démontré que le rectangle sous AE, EΓ, avec le quarré de ZE, est égal au quarré de ZB; donc le rectangle sous AE, EΓ, avec le quarré de ZE est égal au rectangle sous ΔE, EB, avec le quarré de ZE. Retranchons le quarré commun de ZE; le rectangle restant compris sous AE, EΓ sera égal au rectangle compris sous ΔE, EB. Donc, etc.

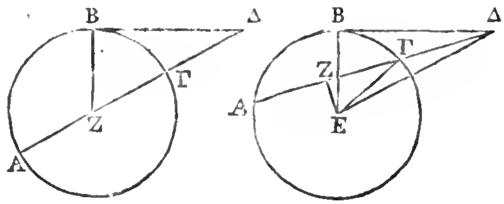
PROPOSITION XXXVI.

Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise extéτοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον[1] ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. Η ἄρα ΔΓΑ[2] ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ.

circumferentiam contentum rectangulum æquale ipsi ex contingente quadrato.

Extra circulum ABΓ sumatur aliquod punctum Δ, et a Δ ad ABΓ circulum cadant duæ rectæ ΔΓA, ΔB, et ipsa quidem ΔΓA secet ABΓ circulum, ipsa vero ΔB contingat; dico ipsum sub AΔ, ΔΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex ΔB quadrato. Ipsa igitur ΔΓA vel per centrum est', vel non.



Εστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ[3] μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ιση δὲ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ

Sit primum per centrum, et sit Z centrum ipsius ABΓ circuli, et jungatur ZB; rectus igitur est ZBΔ. Et quoniam recta AΓ bifariam secta est in Z, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub AΔ, ΔΓ cum ipso ex ZΓ æquale est ipsi ex ZΔ. Æqualis autem ZΓ ipsi ZB; ipsum igitur sub AΔ, ΔΓ cum ipso ex ZB æquale est ipsi

rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au quarré de la tangente.

Hors du cercle ABΓ, prenons un point quelconque Δ, et de ce point menons les deux droites ΔΓA, ΔB; que la droite ΔΓA coupe le cercle ABΓ, et que la droite ΔB lui soit tangente; je dis que le rectangle compris sous AΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΔB, soit que la droite ΔΓA passe par le centre, ou non.

Qu'elle passe premièrement par le centre du cercle, et que Z soit le centre du cercle ABΓ, joignons ZB; l'angle ZBΔ sera droit (18. 3). Et puisque la droite AΓ est coupée en deux parties égales au point Z, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous AΔ, ΔΓ, avec le quarré de ZΓ, est égal au quarré de ZΔ (6. 2). Mais la droite ZΓ est égale à la droite ZB; donc le rectangle τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ[4] ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ[5]· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον[6], πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον[7] ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ

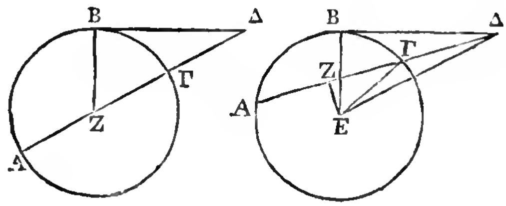
ex ΖΔ. Ipsi vero ex ΖΔ æqualia sunt ipsa ex ΖΒ, ΒΔ, rectus enim ipse ΖΒΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΒ æquale est ipsis ex ΖΒ, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ΖΒ; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ contingente.

Sed et ΔΓΑ non sit per centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et sumatur centrum Ε, et ex Ε ad ΑΓ perpendicularis ducatur ΕΖ, et jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; rectus igitur est ΕΖΔ. Et quoniam recta aliqua ΕΖ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secabit; ΑΖ igitur ipsi ΖΓ est æqualis. Et quoniam recta ΑΓ secatur bifariam in Ζ puncto, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ΖΓ æquale est ipsi ex ΖΔ. Commune addatur ex ΖΕ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsis ex ΔΖ, ΖΕ. Sed ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΓ, rectus enim ΕΖΓ angulus; ip-

sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal au quarré de ΖΔ. Mais les quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΖΔ (47. 1), car l'angle ΖΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal aux quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΖΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de la tangente ΔΒ.

Mais que la droite ΔΓΑ ne passe pas par le centre du cercle ΑΒΓ; prenons le centre Ε, et du point Ε menons ΕΖ perpendiculaire à ΑΓ (12. 1), et joignons ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; l'angle ΕΖΔ sera droit. Et puisque la droite ΕΖ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, la droite ΕΖ coupe la droite ΑΓ en deux parties égales (3. 3); donc la droite ΑΖ est égale à la droite ΖΓ. Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous les droites ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΓ, est égal au quarré de ΖΔ (6. 2). Ajoutons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec les quarrés des droites ΓΖ, ΖΕ, sera égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ. Mais le quarré de ΕΓ est égal aux quarrés de ΓΖ, ΖΕ (47. 1), car l'angle ΕΖΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ[8]· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ

sis autem ex ΔΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΔ. Ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΓ æquale est ipsi ex ΕΔ. Æqualis autem ΕΓ ipsi ΕΒ; ipsum igitur ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsi ex ΕΔ. Ipsi autem ex ΕΔ æqua-



ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

lia sunt ipsa ex ΕΒ, ΒΔ, rectus enim ΕΒΔ angulus; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsis ex ΕΒ, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ΕΒ; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ. Si igitur extra circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ

PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum altera, vero

est droit, et le quarré de ΕΔ est égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΕΓ, est égal au quarré de ΕΔ. Mais ΕΓ est égal à ΕΒ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΕΒ est égal au quarré de ΕΔ. Mais les quarrés des droites ΕΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΕΔ (47. 1), car l'angle ΕΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré ΕΒ, est égal aux quarrés des droites ΕΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΕΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de ΔΒ. Donc, etc.

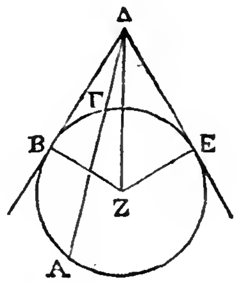
PROPOSITION XXXVII.

Si l'on prend un point quelconque hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'angle tombe sur προσπίπτη, ἦ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς[1] τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν

in eum cadat, sit autem ipsum sub totâ secante et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et convexam circumferentiam æquale ipsi ex incidente; incidens continget circulum.

Extra circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ex Δ in ΑΒΓ circulum incidant duæ rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet



ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ[2] ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ηχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ[3], καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον

circulum, ipsa vero ΔΒ in eum incidat, sit autem ipsum sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ; dico ipsam ΔΒ contingere ΑΒΓ circulum.

Ducatur enim ipsum ΑΒΓ contingens ipsa ΔΕ, et sumatur centrum circuli ΑΒΓ, et sit Ζ, et jungantur ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; ipse igitur ΖΕΔ rectus est.

Et quoniam ΔΕ contingit ΑΒΓ circulum, secat autem ipsa ΔΓΑ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ

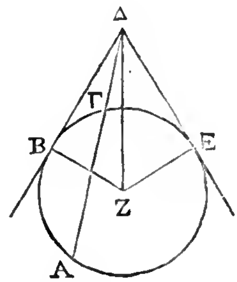
ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise extérieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au quarré de la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur le cercle sera tangente à ce cercle.

Hors du cercle ΑΒΓ prenons un point quelconque Δ, et menons de ce point les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ, que la droite ΔΓΑ coupe le cercle, et que la droite ΔΒ tombe sur le cercle; que le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ soit égal au quarré de ΔΒ; je dis que la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ.

Menons la droite ΔΕ tangente au cercle ΑΒΓ (17. 3), prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Ζ; joignons ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; l'angle ΖΕΔ sera droit (18. 3).

Puisque ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΔΓΑ le coupe, le rectangle sous ΑΔ, ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ην δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶν[5] τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. Εστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία

æquale est ipsi ex ΔE. Erat autem et ipsum sub AΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔB; ipsum igitur ex ΔE æquale est ipsi ex ΔB; æqualis igitur ΔE ipsi ΔB. Est autem et ZE ipsi ZB æqualis, duæ igitur ΔE, EZ duabus ΔB, BZ æquales sunt, et basis ipsarum communis ZΔ; angulus igitur



τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΖ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὲ δειχθήσεται κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΔEZ angulo ΔBZ est æqualis. Rectus autem ΔEZ; rectus igitur et ΔBZ. Et est BZ producta diameter, ipsa vero diametro circuli ab extremitate ducta contingit et circulum; ipsa ΔB igitur contingit ABΓ circulum. Similiter autem ostendemus, et si centrum in AΓ sit. Si igitur extra circulum, etc.

AΓ est égal au quarré de ΔE (36. 3). Mais le rectangle sous AΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΔB; donc le quarré de ΔE est égal au quarré de ΔB; donc ΔE est égal à ΔB. Mais ZE est égal à ZB; donc les deux droites ΔE, EZ sont égales aux deux droites ΔB, BZ; mais la base ZΔ est commune; donc l'angle ΔEZ est égal à l'angle ΔBZ (8. 1). Mais l'angle ΔEZ est droit; donc l'angle ΔBZ est droit aussi. Mais la droite BZ prolongée est un diamètre, et une droite perpendiculaire au diamètre et menée d'une de ses extrémités est tangente au cercle (16. 3). Donc la droite ΔB est tangente au cercle ABΓ. La démonstration serait la même si le centre était dans AΓ. Donc, etc.

FIN DU TROISIÈME LIVRE.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

ΟΡΟΙ.

ά. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulorum unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

LIVRE QUATRIEME
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une figure rectiligne, lorsque chacun des angles de la figure inscrite touche chaque côté de celle dans laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement une figure est dite circonscrite à une figure, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche chaque angle de la figure à laquelle elle est circonscrite.

γʹ. Σχῆμα δὲ[1] εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δʹ. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας[2].

εʹ Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

ϛʹ. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

ζʹ. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾗ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αʹ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circulum circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figurâ similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini ejus in circumferentiâ sunt circuli.

PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ, non majori existenti circuli diametro, æqualem rectam aptare.

3. Une figure rectiligne est dite inscrite dans un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

4. Une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche la circonférence de ce cercle.

5. Semblablement un cercle est dit inscrit dans une figure rectiligne, lorsque la circonférence du cercle touche chaque côté de la figure dans laquelle il est inscrit.

6. Un cercle est dit circonscrit à une figure, lorsque la circonférence du cercle touche chaque angle de la figure à laquelle il est circonscrit.

7. Une droite est dite adaptée dans un cercle, lorsque ses extrémités sont dans la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Dans un cercle donné, adapter une droite égale à une droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ηχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ[1] μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω[2] τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν[3] τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Επεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Αλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ[4] ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

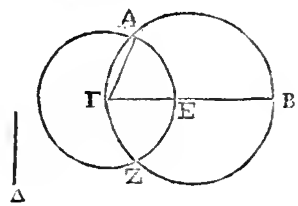
Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ[5], ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sit datus circulus ΑΒΓ, data autem recta Δ non major circuli diametro ; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualem rectam aptare.

Ducatur ΑΒΓ circuli diameter ΒΓ. Si quidem igitur æqualis est ΒΓ ipsi Δ, factum erit propositum. Aptata est enim in ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualis ΒΓ. Si vero major est ΒΓ ipsâ Δ, ponatur ipsi Δ æqualis ΓΕ, et centro quidem Γ, intervallo vero ΓΕ, circulus describatur ΑΕΖ, et jungatur ΓΑ.

Quoniam igitur Γ punctum centrum est ipsius ΑΕΖ circuli, æqualis est ΓΑ ipsi ΓΕ. Sed ipsi Δ ipsa ΓΕ est æqualis; et Δ igitur ipsi ΓΑ est æqualis.

In dato igitur circulo ΑΒΓ, datæ rectæ Δ, æqualis aptata est ΓΑ. Quod oportebat facere.



Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ la droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre de ce cercle ; il faut dans le cercle ΑΒΓ adapter une droite égale à la droite Δ.

Menons le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ. Si la droite ΒΓ est égale à la droite Δ, on aura fait ce qui était proposé. Car on aura adapté dans le cercle ΑΒΓ, une droite ΒΓ égale à la droite Δ. Mais si la droite ΒΓ est plus grande que la droite Δ, faisons ΓΕ égal à Δ (3. 1), du centre Γ et de l'intervalle ΓΕ décrivons le cercle ΑΕΖ, et joignons ΓΑ.

Puisque le point Γ est le centre du cercle ΑΕΖ, la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΕ ; mais Δ est égal à ΓΕ ; donc Δ est égal à ΓΑ.

Donc dans le cercle donné ΑΒΓ on a adapté une droite ΓΑ égale à la droite donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

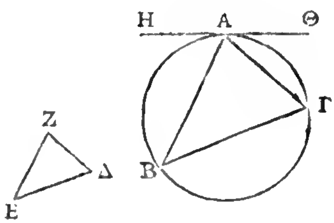
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO II.

In dato circulo dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum vero triangulum ΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum inscribere.



Ηχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς[1] τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς[2] τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ[3] ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ducatur ΑΒΓ circulum contingens ipsa ΗΘ in Α, et constituatur ad ΑΘ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΘΑΓ; rursus, ad ΗΑ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΖΔΕ æqualis ΗΑΒ, et jungatur ΒΓ.

PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut dans le cercle ΑΒΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔΕΖ.

Menons la droite ΗΘ, de manière qu'elle touche le cercle ΑΒΓ en un point Α, et sur la droite ΑΘ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΘΑΓ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1). De plus sur la droite ΗΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΗΑΒ égal à l'angle ΖΔΕ, et joignons ΒΓ.

Επεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ[4]· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον[5].

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur ABΓ circulum contingit aliqua recta ΘA, a contactu autem ad A in circulo ducta est recta AΓ, ipse utique ΘAΓ æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo ABΓ. Sed ipse ΘAΓ ipsi ΔEZ est æqualis; et ABΓ igitur angulus ipsi ΔEZ est æqualis. Propter eadem utique et ipse AΓB ipsi ZΔE est æqualis, et reliquus igitur BAΓ reliquo EZΔ est æqualis. Æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo, et inscriptum est in ABΓ circulo.

In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO III.

Circa datum circulum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Puisque la droite ΘA touche le cercle ABΓ, et que la droite AΓ a été menée dans le cercle du point de contact A, l'angle ΘAΓ est égal à l'angle ABΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle ΘAΓ est égal à l'angle ΔEZ; donc l'angle ABΓ est égal à l'angle ΔEZ. Par la même raison l'angle AΓB est égal à l'angle ZΔE; donc l'angle restant BAΓ est égal à l'angle restant EZΔ (32. 1); donc le triangle ABΓ est équiangle avec le triangle ΔEZ, et il est inscrit dans le cercle ABΓ (déf. 3. 4).

Donc dans le cercle donné, on a inscrit un triangle équiangle avec un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III.

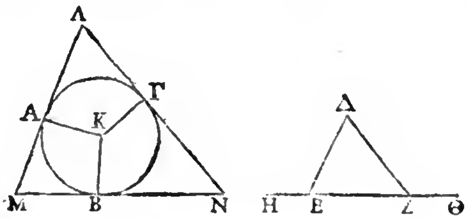
Au cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκϐεϐλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ[1] τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum autem triangulum ΔΕΖ; oportet igitur circa ΑΒΓ circulum ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Producatur ΕΖ ex utrâque parte ad Η, Θ puncta, et sumatur ΑΒΓ circuli centrum Κ, et ducatur utcunque recta ΚΒ, et constituatur ad ΚΒ rectam et ad punctum in eâ Κ ipsi qui-



αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα, καὶ[2] ἐπιζευγνύμεναί εἰσιν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι

dem ΔΕΗ angulo æqualis ΒΚΑ, ipsi vero ΔΖΘ æqualis ΒΚΓ, et per Α, Β, Γ puncta ducantur tangentes ipsum ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Et quoniam contingunt ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ in Α, Β, Γ punctis, et junctæ sunt ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ; recti utique sunt ipsi ad Α, Β, Γ puncta anguli. Et quoniam ΑΜΒΚ quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales sunt, quandoqui-

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut au cercle ΑΒΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔΕΖ.

Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐπεὶ δήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ, καὶ εἴσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΑΚ, ΚΒΜ γωνίαι[3]· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΑΝΜ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΑΝ λοιπῇ[4] τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Ισογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

dem et in duo triangula dividitur AMBK, et sunt recti MAK, KBM anguli; reliqui igitur AKB, AMB duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ΔEH, ΔEZ duobus rectis æquales; ipsi igitur AKB, AMB ipsis ΔEH, ΔEZ æquales sunt, quorum AKB ipsi ΔEH est æqualis; reliquus igitur AMB reliquo ΔEZ est æqualis. Similiter utique ostendetur et ipsum ANM ipsi ΔZE esse æqualem; et reliquus igitur MAN reliquo EΔZ est æqualis. Æquiangulum igitur est AMN triangulum ipsi ΔEZ triangulo, et circumscribitur circum ABΓ circulum.

Circa datum igitur circulum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère AMBK peut se diviser en deux triangles; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles MAK, KBM sont droits; donc les angles restants AKB, AMB sont égaux à deux droits. Mais les angles ΔEH, ΔEZ sont égaux à deux droits (13. 1); donc les angles AKB, AMB sont égaux aux angles ΔEH, ΔEZ; mais l'angle AKB est égal à l'angle ΔEH; donc l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ΔEZ. Nous démontrerons semblablement que l'angle ANM est égal à l'angle ΔZE; donc l'angle restant MAN est égal à l'angle restant EΔZ (32. 1). Donc le triangle AMN est équiangle avec le triangle ΔEZ, et il est circonscrit au cercle ABΓ (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Εστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

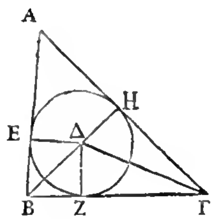
Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

PROPOSITIO IV.

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum ΑΓΒ ; oportet igitur in ΑΒΓ triangulo circulum inscribere.

Secentur ΑΒΓ, ΑΓΒ anguli bifariam ab ipsis ΒΔ, ΓΔ rectis, et conveniant inter se in Δ puncto, et ducantur a Δ ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas perpendiculares ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΓ[1], ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ, τὰς δύο γωνίας ταῖς[2] δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν[3] ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ,

Et quoniam æqualis est ΑΒΔ angulus ipsi ΔΒΓ, est autem et rectus ΒΕΔ recto ΒΖΔ æqualis ; duo igitur triangula sunt ΕΒΔ, ΖΒΔ, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, sustendens unum æqualium angulorum, commune iis ipsum ΒΔ. Et

PROPOSITION IV.

Inscrire un cercle dans un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné ; il faut dans le triangle ΑΒΓ inscrire un cercle.

Partageons en deux parties égales les angles ΑΒΓ, ΑΓΒ par les droites ΒΔ, ΓΔ ; que ces droites se rencontrent au point Δ, et du point Δ menons aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (12. 1).

Puisque l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΔΒΓ, et que l'angle droit ΒΕΔ est égal à l'angle droit ΒΖΔ, les deux triangles ΕΒΔ, ΖΒΔ ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΒΔ qui soutend un des καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν[4]· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ, καὶ[5] διαστήματι ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη[6]· οὐκ ἄρα ὁ[7] κέντρῳ Δ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γραφόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς[8] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Εγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ[9].

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ[10] ΕΖΗ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur ΔΕ ipsi ΔΖ. Propter eadem utique et ΔΗ ipsi ΔΖ est æqualis. Tres igitur rectæ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ æquales inter se sunt; ergo centro Δ, et intervallo unâ ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas, propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η puncta anguli. Si enim secet ipsas, erit ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta intra ipsum cadens circulum, quod absurdum ostensum est; non igitur centro Δ, intervallo autem unâ ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ descriptus circulus secat ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas; contingit igitur ipsas, et erit circulus descriptus in ΑΒΓ triangulo. Inscribatur ut ΖΗΕ.

In dato igitur triangulo ΑΒΓ circulus inscriptus est ΕΖΗ. Quod oportebat facere.

angles égaux; ils ont donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc ΔΕ est égal à ΔΖ. Par la même raison ΔΗ est égal à ΔΖ. Donc les trois droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ sont égales entr'elles; donc le cercle décrit du point Δ et d'un intervalle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ passera par les autres points, et touchera les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, les angles étant droits en Ε, Ζ, Η. Car si le cercle coupait ces droites, une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée d'une de ses extrémités tomberait dans ce cercle, ce qui a été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du point Δ et d'un intervalle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ne coupera point les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ; donc elle les touchera, et ce cercle sera inscrit dans le triangle ΑΒΓ (déf. 5. 4). Qu'il soit inscrit comme ΖΗΕ.

Donc dans le triangle donné ΑΒΓ, on a inscrit le cercle ΕΖΗ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Εστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

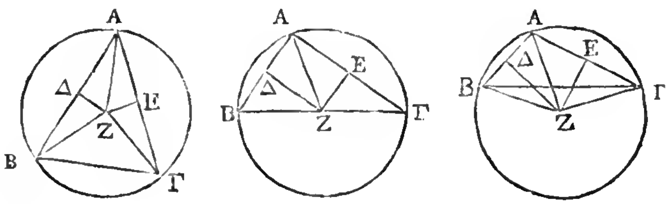
Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι[1] δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΖΕ· συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum ΑΒΓ; oportet igitur circa datum triangulum ΑΒΓ circulum circumscribere.

Secentur ΑΒ, ΑΓ rectæ bifariam in Δ, Ε punctis, et ab ipsis Δ, Ε punctis ipsis ΑΒ, ΑΓ ad rectos ducantur ΔΖ, ΖΕ. Convenient autem vel intra ΑΒΓ triangulum, vel in ΒΓ rectâ, vel extra ΒΓ.



Συμπιπτέτωσαν οὖν[2] ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΔ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση[3].

Conveniant igitur intus primum in Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΒΔ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Simi-

PROPOSITION V.

Circonscrire un cercle à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné; il faut au triangle donné ΑΒΓ circonscrire un cercle.

Coupons les droites ΑΒ, ΑΓ en deux parties égales aux points Δ, Ε (10. 1), et des points Δ, Ε menons aux droites ΑΒ, ΑΓ les perpendiculaires ΔΖ, ΖΕ (11. 1); ces perpendiculaires se rencontreront ou dans le triangle ΑΒΓ, ou dans la droite ΒΓ, ou hors de la droite ΒΓ.

Premièrement que ces perpendiculaires se rencontrent dans le triangle, au point Ζ; joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Puisque ΑΔ est égal à ΒΔ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν[4] ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφέσθω[5] ὡς ὁ ΑΒΓ.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν[6] ἴση· ὁ ἄρα πάλιν[7] κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος

liter utique ostendemus et ipsam ΓΖ ipsi ΑΖ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ æquales inter se sunt. Ergo centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circulus circa ΑΒΓ triangulum. Circumscribatur ut ΑΒΓ.

Sed et ΔΖ, ΕΖ conveniant in ΒΓ rectâ in Ζ, ut se habet in secundâ figurâ, et jungatur ΑΖ. Similiter utique ostendemus Ζ punctum centrum esse ipsius circa ΑΒΓ triangulum circumscripti circuli.

Sed et ΔΖ, ΕΖ conveniant extra ΑΒΓ triangulum, in Ζ rursus, ut se habet in tertiâ figurâ, et jungantur ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Et quoniam rursus æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Similiter utique ostendemus et ΖΓ ipsi ΖΑ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; ergo rursus centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per

démontrerons semblablement que ΓΖ est égal à ΑΖ ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ ; donc les trois droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ sont égales entr'elles. Donc si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce cercle passera par les autres points, et ce cercle sera circonscrit au triangle ΑΒΓ (déf. 6. 4). Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓ.

Mais que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent dans la droite ΒΓ, au point Ζ, comme dans la seconde figure ; joignons ΑΖ. Nous démontrerons semblablement que le point Ζ est le centre du cercle circonscrit au triangle ΑΒΓ.

Mais enfin, que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent hors du triangle ΑΒΓ, au point Ζ, comme dans la troisième figure, et joignons ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Puisque ΑΔ est encore égal à ΔΒ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous démontrerons semblablement que ΖΓ est égal à ΖΑ ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ ; donc encore si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ΑΒΓ[8].

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

reliqua puncta, et erit circumscriptus circa ABΓ triangulum. Et describatur ut ABΓ.

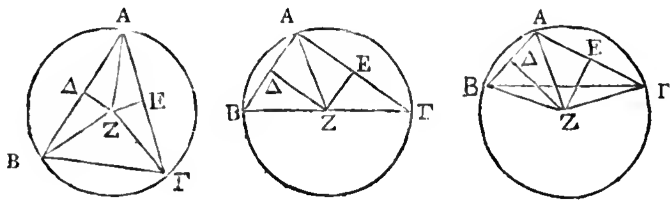
Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει[9], ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ[10] ἡμικυκλίου

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quando quidem intra triangulum cadit centrum circuli, ipsum BAΓ angulum, in segmento majore quam semicirculo existentem, minorem esse recto; quando autem in BΓ rectam centrum cadit, ipsum BAΓ angulum, in semicirculo existentem, rectum esse; quando vero centrum circuli extra triangulum cadit, ipsum BAΓ, in segmento minore quam semicir-



cercle passera par les points restants, et il sera circonscrit au triangle ABΓ. Qu'il soit circonscrit comme ABΓ.

Donc un cercle a été circonscrit dans un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il est évident que si le centre du cercle tombe dans le triangle, l'angle BAΓ compris dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est plus petit qu'un angle droit; que si le centre du cercle tombe dans la droite BΓ, l'angle BAΓ compris dans un demi-cercle, est droit; que si enfin le centre du cercle tombe hors du triangle BAΓ, l'angle BAΓ compris dans un segment plus petit qu'un demiτυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ωστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται[11] αἱ ΔΖ, ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθὴ, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐντὸς τῆς ΒΓ[12].

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν[1] ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ηχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο[2] διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

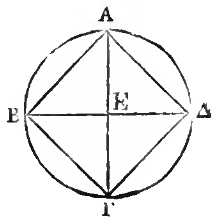
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γὰρ τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστί. Διὰ[3] τὰ αὐτὰ

culo, majorem esse recto. Quare et quando minor recto est datus angulus, intra triangulum convenient ΔΖ, ΕΖ; quando autem rectus, in ΒΓ; quando vero major recto, extra ΒΓ.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quadratum inscribere.



Ducantur ipsius ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, centrum enim Ε, communis autem et ad rectos ipsa ΕΑ; basis igitur ΑΒ basi ΑΔ æqualis est. Propter

cercle, est plus grand qu'un angle droit. C'est pourquoi si l'angle donné est plus petit qu'un droit, les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontreront dans le triangle; s'il est droit, elles se rencontreront dans ΒΓ, et s'il est plus grand qu'un droit, elles se rencontreront hors de la droite ΒΓ.

PROPOSITION VI.

Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un quarré dans le cercle ΑΒΓΔ.

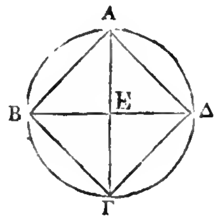
Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre (11. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1).

δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γάρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία[4]. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον[5].

Εἰς ἄρα δοθέντα[6] κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

eadem utique et utraque ipsarum ΒΓ, ΓΔ utrique ipsarum ΒΑ, ΑΔ æqualis est; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim ΒΔ recta diameter est ipsius ΑΒΓΔ circuli, semicirculum igitur est ΒΑΔ; rectus igitur ΒΑΔ angulus. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ,



ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus est; rectangulum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Ostensum est autem et æquilaterum; quadratum igitur est. Et inscriptum est in dato ΑΒΓΔ circulo.

In dato igitur circulo ΑΒΓΔ quadratum inscriptum est ΑΒΓΔ. Quod oportebat facere.

Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (31. 1). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré. Et ce quarré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

Donc on a inscrit le quarré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Εστω δοθεὶς κύκλος ὁ[1] ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ[2] περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

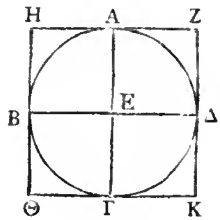
Ηχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et per Α, Β, Γ, Δ puncta ducantur contingentes ΑΒΓΔ circulum ipsæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.



Επεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπεζεύκται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ[3] αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ

Quoniam igitur contingit ΖΗ ipsum ΑΒΓΔ circulum, ab Ε autem centro ad contactum Α ducitur ΕΑ; ipsi igitur ad Α anguli recti sunt. Propter eadem utique et ad Β, Γ, Δ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est ΑΕΒ angulus, est autem rectus et ΕΒΗ; parallela

PROPOSITION VII.

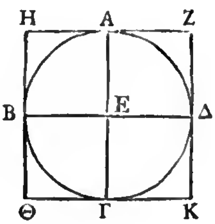
Circonscrire un quarré à un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné ; il faut circonscrire un quarré au cercle ΑΒΓΔ.

Menons dans le cercle ΑΒΓΔ, les deux diamètres ΑΓ, ΒΔ perpendiculaires l'un à l'autre, et par les points Α, Β, Γ, Δ menons les droites ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ tangentes au cercle ΑΒΓΔ (17. 3).

Puisque la droite ΖΗ est tangente au cercle ΑΒΓΔ, et que la droite ΕΑ a été menée du centre Ε au point de contact Α, les angles sont droits en Α (28. 3). Par la même rasion, les angles sont droits aux points Β, Γ, Δ. Et puisque l'angle ΑΕΒ est droit, et que l'angle ΕΒΗ est droit aussi, la droite ΗΘ est paralἡ ὑπὸ ΕΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος[4]. Ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος[5]. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλόγραμμα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ[6] ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ[7], ἡ δὲ ΕΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση[8]. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Λέγω δὴ[9] ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον[10].

igitur est HΘ ipsi AΓ. Propter eadem utique et AΓ ipsi ZK est parallela; quare et HΘ ipsi ZK est parallela. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum HZ, ΘK ipsi BEΔ esse parallelam. Parallelograma igitur sunt HK, HΓ, AK, ZB, BK; æqualis igitur est HZ quidem ipsi ΘK, ipsa vero HΘ ipsi ZK. Et quoniam æqualis est AΓ ipsi BΔ, sed et ipsa quidem AΓ utrique ipsarum HΘ, ZK, ipsa vero EΔ utrique ipsarum HZ, ΘK est æqualis; et uterque igitur ipsarum HΘ, ZK utrique ipsarum HZ, ΘK est æqualis. Æquilaterum igitur est ZHΘK quadrilaterum. Dico et rectangulum. Quoniam enim parallelogrammum est HBEA, et est rectus AEB; rectus igitur et AHB. Similiter utique ostendemus et ipsos ad Θ, K, Z angulos rectos esse; rectangulum igitur est ZHΘK quadrilaterum. Os-



lèle à la droite AΓ (28. 1). Par la même raison, la droite AΓ est parallèle à la droite ZK. Donc HΘ est parallèle à ZK. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites HZ, ΘK est parallèle à la droite BEΔ. Donc les figures HK, HΓ, AK, ZB, BK sont des parallélogrammes; donc HZ est égal à ΘK (34. 1), et HΘ égal à ZK; et puisque AΓ est égal à BΔ, que AΓ est égal à l'une et à l'autre des droites HΘ, ZK, et que BΔ est égal à l'une et à l'autre des droites HZ, ΘK, les droites HΘ, ZK sont égales aux droites HZ, ΘK. Donc le quadrilatère ZHΘK est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle, car puisque HBEA est un parallélogramme, et que l'angle AEB est droit, l'angle AHB est droit aussi (34. 1). Nous démontrerons semblablement que les angles sont droits en Θ, K, Z; donc le quadrilatère ZHΘK est rectangle; mais on

Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

tensum est autem et æquilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa ΑΒΓΔ circulum.

Circa datum igitur circulum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

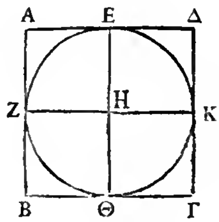
Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato circulum inscribere.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ quadrato circulum inscribere.



Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ, δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ,

Secetur utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam in Ε, Ζ punctis, et per Ε quidem alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallela ducatur ΕΘ; per Ζ vero alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ducatur ΖΚ; parallelogramum igitur est unumquodque ipso-

a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔ.

On a donc circonscrit un quarré à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

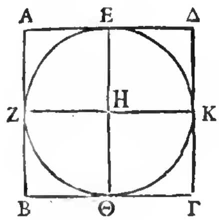
PROPOSITION VIII.

Inscrire un cercle dans un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut incrire un cercle dans le quarré ΑΒΓΔ.

Coupons en deux parties égales l'une et l'autre des droites ΑΒ, ΑΔ aux points Ζ, Ε (10. 1), et par le point Ε menons ΕΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΓΔ (31. 1), et par le point Ζ menons aussi la droite ΖΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ; donc chacune des figures ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσί[1]. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν[2], ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν[3]. Ο ἄρα κέν-

rum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ, et opposita ipsorum latera utique æqualia sunt. Et quoniam æqualis est AΔ ipsi AB, et est ipsius quidem AΔ dimidia AE, ipsius vero AB dimidia AZ, æqualis igitur et AE ipsi AZ; quare et opposita æqualia sunt, æqualis igitur et ZH ipsi HE. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum HΘ, HK utrique ipsarum ZH, HE esse æqualem. Quatuor igitur HE, HZ, HΘ, HK æquales



τρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη[4]. Οὐκ ἄρα ὁ

inter sesunt. Ipse igitur centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget AB, BΓ, ΓΔ, ΔA rectas, propterea quod recti sunt ad E, Z, Θ, K anguli; si enim secat circulus ipsas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta intra cadet circulum, quod absurdum osten-

KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ est un parallélogramme, et leurs côtés opposés sont égaux (34. 1). Et puisque AΔ est égal à AB, que AE est la moitié de AΔ, et AZ la moitié de AB, la droite AE est égale à AZ; donc les côtés opposés sont égaux; donc ZH est égal à HE. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites HΘ, HK est égale à l'une et à l'autre des droites ZH, HE. Donc les quatre droites HE, HZ, HΘ, HK sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre H, et d'un intervalle égal à une des droites HE, HZ, HΘ, HK passera par les autres points, et sera tangent aux droites AB, BΓ, TΔ, ΔA, parce que les angles sont droits en E, Z, Θ, K; car si ce cercle coupait les droites AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une de ses extrémités tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3). Donc le cercle décrit du centre H, et κέντρῳ μὲν[5] τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Εφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν[6] τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

sum est. Non igitur centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus secat AB, BΓ, ΓΔ, ΔA rectas. Continget igitur ipsas et erit inscriptus in ABΓΔ quadrato.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

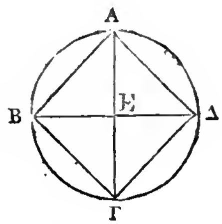
Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Εστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum ABΓΔ; oportet igitur circa ABΓΔ quadratum circulum circumscribere.



Επεζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Junctæ enim AΓ, BΔ, sese secent in E.

d'un intervalle égal à des droites HE, HZ, HΘ, HK ne coupe point les droites AB, BΓ, ΓΔ, ΔA. Donc il sera tangent à ces droites, et il sera inscrit dans le quarré ABΓΔ (déf. 5. 4).

Donc on a inscrit un cercle dans un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION IX.

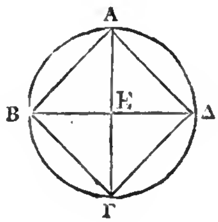
Circonscrire un cercle à un quarré donné.

Soit ABΓΔ le quarré donné; il faut circonscrire un cercle au quarré ABΓΔ.

Joignons AΓ, BΔ, et que ces droites se coupent au point E.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση[1]· γωνία ἄρα ἴση ἐστίν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ[2]· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ æqualis; angulus igitur æqualis est ΔΑΓ ipsi ΒΑΓ; ipse igitur ΔΑΒ angulus bifariam sectus est ab ΑΓ. Similiter utique ostendemus et unumquemque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ bifariam sectum esse ab ΑΓ, ΔΒ rectis. Et quoniam æqualis est ΔΑΒ angulus ipsi ΑΒΓ, et est ipsius quidem ΔΑΒ di-



ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρῳ τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος

midius ipse ΕΑΒ, et ipsius ΑΒΓ dimidius ipse ΕΒΑ; et ΕΑΒ igitur ipsi ΕΒΑ est æqualis. Quare et latus ΕΑ lateri ΕΒ est æquale. Similiter utique ostendemus, et utramque ΕΑ, ΕΒ rectarum utrique ipsarum ΕΓ, ΕΔ æqualem esse; quatuor igitur ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ε, et intervallo unâ ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus tran-

Puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, et que la doite ΑΓ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ; ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8. 1); donc l'angle ΔΑΒ est coupé en deux parties égales par la droite ΑΓ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est coupé en deux parties égales par les droites ΑΓ, ΔΒ. Et puisque l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΑΒΓ, que l'angle ΕΑΒ est la moitié de l'angle ΔΑΒ, et l'angle ΕΒΑ la moitié de l'angle ΑΒΓ, l'angle ΕΑΒ est égal à l'angle ΕΒΑ; donc le côté ΕΑ est égal au côté ΕΒ (6. 1). Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΒ est égale à l'une et à l'autre des droites ΕΓ, ΕΔ; donc les quatre droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Ε, et d'un intervalle égal à une des droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ passera par les autres points, γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circa ΑΒΓΔ quadratum. Circumscribatur ut ΑΒΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

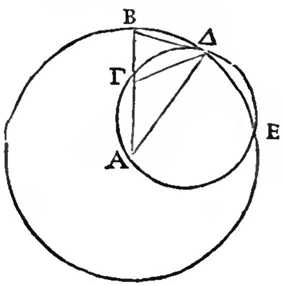
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α, καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ[1] κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque ipsorum ad basim angulorum duplum reliqui.

Exponatur aliqua recta ΑΒ, et secetur in Γ puncto, ita ut ipsum sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum æquale sit ipsi ex ΓΑ quadrato; et centro Α, et intervallo ΑΒ circulus describatur ΒΔΕ, et aptetur in ΒΔΕ circulo ipsi ΑΓ



et il sera circonscrit au quarré ΑΒΓΔ. Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓΔ.

Donc on a circonscrit un cercle à un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.

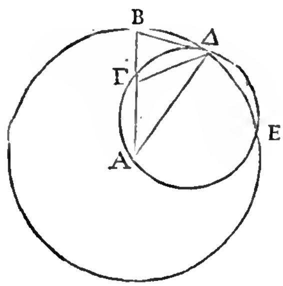
Soit une droite ΑΒ; que cette droite soit coupée en un point Γ, de manière que le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ soit égal au quarré de ΓΑ (11. 2); du centre Α et de l'intervalle ΑΒ décrivons le cercle ΒΔΕ (dém. 3); dans le cercle

ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ

rectæ, non majori existenti ipsâ ΒΔΓ circuli diametro, æqualis recta ΒΔ; et jungantur ΑΔ, ΓΔ, et circumscribatur circa ΑΓΔ triangulum circulus ΑΓΔ.

Et quoniam ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est quadrato ex ΑΓ, æqualis autem ΑΓ ipsi ΒΔ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΒΔ. Et quoniam extra circulum ΑΓΔ sumptum est



Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν[2] ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ[3], ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

aliquod punctum Β, et a Β in ΑΓΔ circulum cadunt duæ rectæ ΒΑ, ΒΔ, et altera quidem ipsarum secat, altera vero incidit; et est ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale ipsi ex ΒΔ; ipsa ΒΔ igitur contingit ΑΓΔ. Et quoniam contingit quidem ipsa ΒΔ, a contactu vero ad Δ ducta est ΔΓ; ipse igitur ΒΔΓ angulus æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo ΔΓΑ. Quoniam igitur æ-

ΒΔΕ adaptons une droite ΒΔ égale à la droite ΑΓ, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle ΒΔΕ (1. 4); joignons ΑΔ, ΓΔ, et circonscrivons le cercle ΑΓΔ au triangle ΑΓΔ (5. 4).

Puisque le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au quarré ΑΓ, et que ΑΓ est égal à ΒΔ, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au quarré de ΒΔ. Et puisque le point Β a été pris hors du cercle ΑΓΔ, que les droites ΒΑ, ΒΔ vont du point Β au cercle ΑΓΔ, que l'une d'elles le coupe, et que l'autre ne le coupe point, et que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au quarré de ΒΔ, la droite ΒΔ est tangente au cercle ΑΓΔ (37. 3). Donc, puisque la droite ΒΔ est tangente, et que la droite ΔΓ a été menée du point de contact Δ, l'angle ΒΔΓ est égal à

ΔΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση[4] ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ[5] τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίους[6]. Ἴση δὲ καὶ[7] ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ[8]. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

qualis est ΒΔΓ ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ. Totus igitur ΒΔΑ æqualis est duobus ΓΔΑ, ΔΑΓ. Sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ æqualis est exterior ΒΓΔ; ipse igitur ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. Sed ΒΔΑ ipsi ΓΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΔΑ ips ΑΒ est æquale; quare et ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ est æqualis. Tres igitur ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ips ΒΓΔ, æquale est et latus ΒΔ lateri ΔΓ. Sed ΒΔ ipsi ΓΑ ponitur æqualis; et ΑΓ igitur ipsi ΓΔ est æqualis; quare et angulus ΓΔΑ angulo ΔΑΓ est æqualis; ipsi igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ ipsius ΔΑΓ sunt dupli. Æqualis autem et ΒΓΔ ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ; et ΒΓΔ igitur ipsius ΔΑΓ est duplus. Æqualis autem et ΒΓΔ utrique ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ; et uterque igitur ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΒΑΔ est duplus.

Isosceles igitur triangulum constitutum est ΑΔΒ habens utrumque ipsorum ad ΑΒ basim angulorum duplum reliqui. Quod oportebat facere.

l'angle ΔΑΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΑΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔΑ, l'angle entier ΒΔΑ sera égal aux deux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ. Mais l'angle extérieur ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Mais l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΓΒΔ (5. 1), puisque le côté ΔΑ est égal au côté ΑΒ; donc l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Donc les trois angles ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, le côté ΒΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté ΒΔ est supposé égal au côté ΓΑ; donc le côté ΑΓ est égal au côté ΓΔ; donc l'angle ΓΔΑ est égal à l'angle ΔΑΓ (5. 1); donc les angles ΓΔΑ, ΔΑΓ sont doubles de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΓΔ est double de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal à chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ; donc chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ est double de l'angle ΒΑΔ.

Donc on a construit un triangle isocèle ΑΔΒ, ayant chacun des angles de la base ΒΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

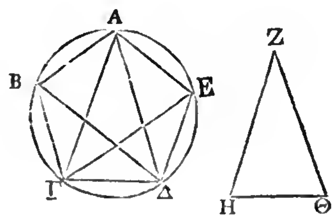
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· *δεῖ δὴ εἰς τὸν* ΑΒΓΔΕ *κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι*[1].

PROPOSITIO XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Εκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, *διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς* Η, Θ *γωνιῶν*[2] *τῆς πρὸς τῷ* Ζ, *καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν* ΑΒΓΔΕ *κύκλον τῷ* ΖΗΘ *τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ* ΑΓΔ, *ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ* Ζ *γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ* ΓΑΔ, *ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς* Η, Θ *ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ* ΑΓΔ, ΓΔΑ· *καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ* ΑΓΔ, ΓΔΑ *τῆς ὑπὸ*

Exponatur triangulum isosceles ΖΗΘ, duplum habens utrumque ipsorum ad Η, Θ angulorum ipsius ad Ζ, et inscribatur in ΑΒΓΔΕ circulo, ipsi ΖΗΘ triangulo æquiangulum triangulum ΑΓΔ, ita ut ipsi quidem Ζ angulo æqualis sit ipse ΓΑΔ, uterque vero ipsorum ad Η, Θ æqualis utrique ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ; et uterque igitur ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ ipsius ΓΑΔ est duplus. Sece-

PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut inscrire dans le cercle ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ΖΗΘ, ayant chacun des angles en Η, Θ double de l'angle Ζ (10. 4); inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le triangle ΑΓΔ équiangle avec le triangle ΖΗΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓΑΔ soit égal à l'angle Ζ, et que chacun des angles Η, Θ soit égal à chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ; chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ sera double de l'angle ΓΑΔ. Coupons chacun des angles ΑΓΔ

ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας[3] τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ[4].

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση[5], κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση[6]. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνίᾳ[7] τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση[8]. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκα-

tur autem uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam ab utrâque ipsarum ΓΕ, ΔΒ rectarum, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Quoniam igitur uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ augulorum duplus est ipsius ΓΑΔ; et secti sunt bifariam à ΓΕ, ΔΒ rectis; quinque igitur anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistunt; quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; quinque igitur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Dico et æquiangulum. Quoniam enim ΑΒ circumferentia ipsi ΔΕ circumferentiæ est æqualis, communis addatur ΒΓΔ; tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti ΕΔΓΒ circumferentiæ est æqualis. Et insistit ipsi quidem ΑΒΓΔ circumferentiæ angulus ΑΕΔ, ipsi vero ΕΔΓΒ circumferentiæ angulus ΒΑΕ, et ΒΑΕ igitur angulus ipsi ΑΕΔ est æqualis. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ angulo-

ΓΔΑ en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ (9. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Puisque chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ est double de l'angle ΓΑΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ, les cinq angles ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3); donc les cinq arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc les cinq droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égales entr'elles; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΑΒ est égal à l'arc ΔΕ, ajoutons l'arc commun ΒΓΔ; l'arc entier ΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒ. Mais l'angle ΑΕΔ est appuyé sur l'arc ΑΒΓΔ, et l'angle ΒΑΕ sur l'arc ΕΔΓΒ; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΑΕΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ est égal à chacun des angles ΒΑΕ, τέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

rum utrique ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum;

In dato igitur circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

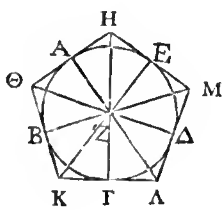
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.



Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας·

Intelligantur inscripti pentangoni angulorum puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, ita ut æquales sint ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ circumferentiæ; et per Α,

ΑΕΔ; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Circonscrire à un cercle donné un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut au cercle ΑΒΓΔΕ circonscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Concevons que Α, Β, Γ, Δ, Ε soient les sommets des angles du pentagone inscrit (11. 4), de manière que les arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ soient égaux;

καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν[1] ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ[2]· ὥστε τὰ[3] ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ[4] τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ[5]. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ

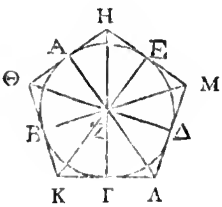
B, Γ, Δ, E ducantur circulum contingentes HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH; et sumatur ABΓΔE circuli centrum Z, et jungantur ZB, ZK, ZΓ, ZΛ, ZΔ.

Et quoniam recta quidem KΛ contingit ABΓΔE circulum in Γ, ab ipso vero Z centro in contactum ad Γ ducta est ZΓ; ergo ZΓ perpendicularis est ad KΛ; rectus igitur est uterque ipsorum ad Γ angulorum. Propter eadem utique et ipsi ad B, Δ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est ZΓK angulus, ipsum igitur ex ZK æquale est ipsis ex ZΓ, ΓK. Propter eadem utique et ipsis ex ZB, BK æquale est ipsum ex ZK; quare ipsa ex ZΓ, ΓK ipsis ex ZB, BK æqualia sunt, quorum ipsum ex ZΓ ipsi ZB est æquale; reliquum igitur ex ΓK reliquo ex BK est æquale; æqualis igitur ΓK ipsi BK. Et quoniam æqualis est ZB ipsi ZΓ, et communis ZK, duæ utique BZ, ZK duabus ΓZ, ZK æquales sunt, et basis BK basi ΓK est æqualis; angulus igitur quidem BZK angulo KZΓ est æqualis, ipse vero BKZ ipsi ZKΓ est æqualis; duplus igi-

par les points A, B, Γ, Δ, E, menons au cercle les tangentes HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH (17. 3); prenons le centre Z du cercle ABΓΔE, et joignons ZB, ZK, ZΓ, ZΛ, ZΔ.

Puisque la droite KΛ touche le cercle ABΓΔE au point Γ, et que la droite ZΓ est menée du centre Z au point de contact Γ, la droite ZΓ est perpendiculaire à KΛ (18. 3); donc chacun des angles en Γ est droit. Chacun des angles aux points B, Δ est droit, par la même raison. Et puisque l'angle ZΓK est droit, le quarré de la droite ZK est égal aux quarrés des droites ZΓ, ΓK (47. 1). Le quarré de la droite ZK est égal aux quarrés des droites ZB, BK, par la même raison; donc les quarrés des droites ZΓ, ΓK sont égaux aux quarrés des droites ZB, BK; mais le quarré de ZΓ est égal au quarré de ZB; donc le quarré restant de ΓK est égal au quarré restant de BK; donc ΓK est égal à BK. Et puisque ZB est égal à ZΓ, et que la droite ZK est commune, les deux droites BZ, ZK sont égales aux deux droites ΓZ, ZK; mais la base BK est égale à la base ΓK; donc l'angle BZK δὲ ὑπὸ BKZ τῇ ὑπὸ ZKΓ ἐστὶν ἴση[6]· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ BZΓ τῆς ὑπὸ KZΓ, ἡ δὲ ὑπὸ BKΓ τῆς ὑπὸ ZKΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓZΔ τῆς ΓZΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛZ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BZΓ τῇ ὑπὸ ΓZΔ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ BZΓ τῆς ὑπὸ KZΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔZΓ διπλῆ[7] τῆς ὑπὸ ΛZΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ KZΓ τῇ ὑπὸ ΛZΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZΓK

tur ipse quidem BZΓ ipsius KZΓ, ipse vero BKΓ ipsius ZKΓ. Propter eadem utique et ipse quidem ΓZΔ ipsius ΓZΛ est duplus, ipse vero ΓΛΔ ipsius ΓΛZ. Et quoniam æqualis est BΓ circumferentia ipsi ΓΔ, æqualis est et angulus BZΓ ipsi ΓZΔ. Et est ipse quidem BZΓ ipsius KZΓ duplus, ipse vero ΔZΓ duplus ipsius ΛZΓ; æqualis igitur et KZΓ ipsi ΛZΓ; est autem et ZΓK angulus ipsi ZΓΛ æqualis. Duo utique triangula sunt ZKΓ, ZΛΓ duos an-



γωνία τῇ ὑπὸ ZΓΛ ἴση[8]. Δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ[9] τὰ ZKΓ, ZΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ[10], καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ZΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν KΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ZKΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

gules duobus angulis æquales habentia utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsis ipsum ZΓ, et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo; æqualis igitur ipsa quidem KΓ recta ipsi ΓΛ, ipse vero ZKΓ angulus ipsi ZΛΓ. Et quoniam æqualis est KΓ ipsi ΓΛ, dupla igitur KΛ ipsius KΓ. Propter eadem

est égal à l'angle KZΓ, et l'angle BKZ à l'angle ZKΓ (8. 1); donc l'angle BZΓ est double de l'angle KZΓ, et l'angle BKΓ double de l'angle ZKΓ. Par la même raison, l'angle ZΓΔ est double de l'angle ΓZΛ, et l'angle ΓΛΔ double de l'angle ΓΛZ. Et puisque l'arc BΓ est égal à l'arc ΓΔ, l'angle BZΓ est égal à l'angle ΓZΔ (27. 3). Mais l'angle BZΓ est double de l'angle KZΓ, et l'angle ΔZΓ double de l'angle ΛZΓ; donc l'angle KZΓ est égal à l'angle ΛZΓ; mais l'angle ZΓK est égal à l'angle ZΓΛ; donc les triangles ZKΓ, ZΛΓ ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, le côté ZΓ, qui leur est commun; donc ces deux triangles ont les côtés restants égaux aux côtés restants, et l'angle restant égal à l'angle restant (26. 1); donc la droite KΓ est égale à la droite ΓΛ, et l'angle ZKΓ est égal à l'angle ZΛΓ. Mais KΓ est égal à ΓΛ; donc ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. Καί ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση[11]· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ισογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

utique ostendetur, et ΘΚ ipsius ΒΚ dupla. Et est ΒΚ ipsi ΚΓ æqualis; et ΘΚ igitur ipsi ΚΛ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unaquæque ipsarum ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ utrique ipsarum ΘΚ, ΚΛ æqualis; æquilaterum igitur est ΗΘΚΛΜ pentagonum. Dico autem et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΚΓ angulus ipsi ΖΛΓ, et ostensus est ipsius quidem ΖΚΓ duplus ipse ΘΚΛ, ipsius vero ΖΛΓ duplus ipse ΚΛΜ; et ΘΚΛ igitur ipsi ΚΛΜ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unusquisque ipsorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ utrique ipsorum ΘΚΛ, ΚΛΜ æqualis; quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ æquales inter se sunt. Æquiangulum igitur est ΗΘΚΛΜ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et circumscriptum est circa ΑΒΓΔΕ circulum. Quod oportebat facere.

ΚΛ est double de ΚΓ. On démontrera de la même manière que ΘΚ est double de ΒΚ. Mais ΒΚ est égal à ΚΓ; donc ΘΚ est égal à ΚΛ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ est égale à l'une et à l'autre des droites ΘΚ, ΚΛ; donc le pentagone ΗΘΚΛΜ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle; car puisque l'angle ΖΚΓ est égal à l'angle ΖΛΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΘΚΛ est double de l'angle ΖΚΓ, et l'angle ΚΛΜ double de l'angle ΖΛΓ, l'angle ΘΚΛ est égal à l'angle ΚΛΜ. On démontrera semblablement que chacun des angles ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ est égal à l'un et à l'autre des angles ΘΚΛ, ΚΛΜ; donc les cinq angles ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ sont égaux entr'eux. Donc le pentagone ΗΘΚΛΜ est équiangle. Mais nous avons démontré qu'il est équilatéral, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔΕ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

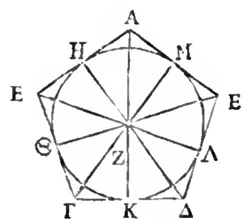
Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Εστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν[1] τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum inscribere.

Sit datum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inscribere.



Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ[2] ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί[3]· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶ ἴσον[4],

Secetur enim uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utrâque ipsarum ΓΖ, ΔΖ rectarum; et a Ζ puncto, in quo conveniunt inter se ΓΖ, ΔΖ rectæ, ducantur ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectæ. Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ utique ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ æquales sunt, et angulus ΒΓΖ angulo ΔΓΖ æqualis est; basis igitur ΒΖ basi ΔΖ est æqualis, et ΒΖΓ triangulum ipsi ΔΖΓ triangulo est æquale,

PROPOSITION XIII.

Dans un pentagone équilatéral et équiangle donné, inscrire un cercle.

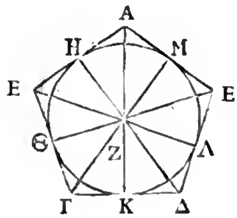
Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut inscrire un cercle dans le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Coupons chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ en deux parties égales par les droites ΓΖ, ΔΖ (9. 1); et du point Ζ où les deux droites ΓΖ, ΔΖ se rencontrent, menons les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque ΒΓ est égal à ΓΔ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΒΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΔΓ, ΓΖ; mais l'angle ΒΓΖ est égal à l'angle ΔΓΖ; donc la base ΒΖ est égale à la base ΔΖ (4. 1), et le triangle ΒΖΓ est égal au triangle ΔΓΖ, et les angles restants καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται[5], ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ[6], ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ[7] τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς[8] δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε

et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΓΒΖ angulus ipsi ΓΔΖ. Et quoniam duplus est ΓΔΕ ipsius ΓΔΖ, æqualis autem ipse quidem ΓΔΕ ipsi ΑΒΓ, ipse vero ΓΔΖ ipsi ΓΒΖ, et ΓΒΑ igitur ipsius ΓΒΖ est duplus; æqualis igitur ΑΒΖ angulus ipsi ΖΒΓ. Ergo ΑΒΓ angulus bifariam secatur à ΒΖ rectâ. Similiter utique ostendetur et utrumque ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ bifariam secari ab utrâque ipsarum ΖΑ, ΖΕ rectarum. Ducantur autem à Ζ puncto ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ rectas perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Et quoniam æqualis est ΘΓΖ angulus ipsi ΚΓΖ, est autem et rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis, duo utique triangula sunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsorum ΖΓ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur ΖΘ perpendicularis ipsi ΖΚ perpendiculari. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ, utrique ipsarum ΖΘ,

égaux aux angles restants, ceux qui soutendent des côtés égaux (4. 1); donc l'angle ΓΒΖ est égal à l'angle ΓΔΖ. Et puisque l'angle ΓΔΕ est double de l'angle ΓΔΖ, que ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΓ, et que ΓΔΖ est égal à ΓΒΖ, l'angle ΓΒΑ est double de l'angle ΓΒΖ; donc l'angle ΑΒΖ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc l'angle ΑΒΓ est coupé en deux parties égales par la droite ΒΖ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΑ, ΖΕ. Du point Ζ menons sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ les perpendiculaires ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Puisque l'angle ΘΓΖ est égal à l'angle ΚΓΖ, et que l'angle droit ΖΘΓ est égal à l'angle droit ΖΚΓ, les deux triangles ΖΘΓ, ΖΚΓ auront deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΖΓ qui soutend un des angles égaux; ils auront donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc la perpendiculaire ΖΘ est égale à la perpendiculaire ΖΚ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ est égale à l'une et à l'autre ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτὰς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμήτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς

ZK æqualem esse; quinque igitur rectæ ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM æquales inter se sunt. Ergo centro Z, intervallo vero unâ ipsarum ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA rectas; propterea quod recti sunt ad H, Θ, K, Λ, M puncta anguli. Si enim non contingit ipsas, sed secat ipsas, eveniet ut ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta



πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας. Εφάψεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

intra cadat circulum, quod absurdum ostensum est. Non igitur centro Z, intervallo vero unâ ipsarum ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM rectarum descriptus circulus secabit ipsas AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA rectas; continget igitur ipsas. Describatur ut HΘKΛM.

In dato igitur pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

des droites ZΘ, ZK; donc les cinq droites ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Z, et d'un intervalle égal à une des droites ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM, passera par les autres points, et touchera les droites AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA, parce que les angles sont droits en H, Θ, K, Λ, M. Car s'il ne les touchait pas, et s'il les coupait, la perpendiculaire menée d'une de ses extrémités au diamètre, tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du centre Z, et d'un intervalle égal à une des droites ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM, ne coupera point les droites AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA; donc il les touchera. Décrivons le cercle HΘKΛM.

Donc on a inscrit un cercle dans un pentangone équilatéral et équiangle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

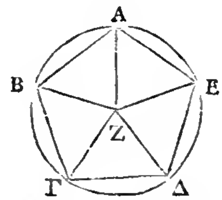
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Εστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ[1] ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum circumscribere.

Sit datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulum circumscribere.



Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ[2] εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ομοίως δὴ τὸ πρὸς τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΑΖ, ΕΖ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία

Secetur quidem uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utrâque ipsarum ΓΖ, ΖΔ, et a Ζ puncto, in quo conveniunt rectæ, ad Β, Α, Ε puncta ducantur rectæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Similiter utique ut antea ostendetur et unumquemque ipsorum ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ angulorum bifariam secari ab unâquaque ipsarum ΖΒ, ΑΖ, ΕΖ rectarum. Et quoniam æqualis est

PROPOSITION XIV.

Circonscrire un cercle à un pentagone équilatéral et équiangle donné.

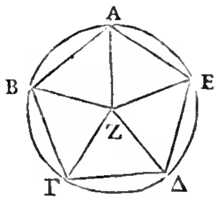
Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut au pentagone ΑΒΓΔΕ circonscrire un cercle.

Coupons en deux parties égales chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ par les droites ΓΖ, ΖΔ (9. 1), et du point Ζ où ces droites se rencontrent, menons aux points Β, Α, Ε les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Nous démontrerons, comme auparavant, que chacun des angles ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΒ, ΑΖ, ΕΖ. Et puisque l'angle ΒΓΔ est égal à l'angle ΓΔΕ, et τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, καὶ διαστήματι[3] ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ[4], ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος[1]. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν[5] πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΓΔ angulus ipsi ΓΔΕ, et est ipsius quidem ΒΓΔ dimidius ipse ΖΓΔ, ipsius vero ΓΔΕ dimidius ΓΔΖ, et ΖΓΔ igitur ipsi ΖΔΓ est æqualis; quare et latus ΖΓ lateri ΖΔ est æquale. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ utrique ipsarum ΖΓ, ΖΔ esse æqualem; quinque igitur rectæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ζ et intervallo unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus. Circumscribatur, et sit ΑΒΓΔΕ.

Circa datum igitur pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.



que l'angle ΖΓΔ est la moitié de l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΔΖ la moitié de l'angle ΓΔΕ, l'angle ΖΓΔ est égal à l'angle ΖΔΓ; donc le côté ΖΓ est égal au côté ΖΔ (6. 1). On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ est égale à chacune des droites ΖΓ, ΖΔ; donc les cinq droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du point Ζ et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ passera par les autres points, et sera circonscrit. Qu'il soit circonscrit, et qu'il soit ΑΒΓΔΕ.

Donc un cercle a été circonscrit à un pentagone équilatéral et équiangle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

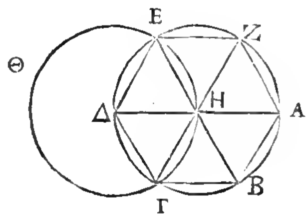
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕΖ circulo hexagouum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ

Ducatur ΑΒΓΔΕΖ circuli diameter ΑΔ, et sumatur centrum circuli Η, et centro quidem Δ, intervallo vero ΔΗ circulus describatur ΕΗΓΘ, et junctæ ΕΗ, ΓΗ producantur ad Β, Ζ puncta, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; dico ΑΒΓΔΕΖ hexagonum æquilaterumque esse et æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum est ΑΒΓΔΕΖ circuli, æqualis est ΗΕ ipsi ΗΔ. Rur-

PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

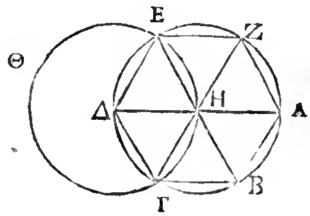
Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à

Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. Ἀλλ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν[1]· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν.

sus, quoniam Δ punctum centrum est ΕΗΓΘ circuli, æqualis est ΔΕ ipsi ΔΗ. Sed ΗΕ ipsi ΗΔ ostensa est æqualis, ΗΕ igitur ipsi ΕΔ æqualis est; æquilaterum igitur est ΕΗΔ triangulum, et tres igitur ipsius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ æquales inter se sunt, quia isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales; ipse igitur ΕΗΔ angulus tertia pars



Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ,

est duorum rectorum. Similiter utique ostendetur et ΔΗΓ tertia pars duorum rectorum. Et quoniam ΓΗ recta super ΕΒ insistens deinceps angulos ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales facit, et reliquus igitur ΓΗΒ tertia pars est duorum rectorum; ipsi igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ anguli æquales inter se sunt; quare et ad verticem ipsi ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales sunt ipsis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ; sex igitur anguli ΕΗΔ,

ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits; donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ

ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ[2] ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ[3] ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ[4] ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας[5] ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ὁμοίως δὴ[6] δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ[7] τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistunt; sex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΕ, ΕΖ, ΖΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; sex igitur rectæ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum; dico etiam et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΑ circumferentia ipsi ΕΔ circumferentiæ, communis addatur ΑΒΓΔ circumferentia; tota igitur ΖΑΒΓΔ toti ΕΔΓΒΑ est æqualis, et insistit quidem ipsi ΖΑΒΓΔ circumferentiæ ipse ΖΕΔ angulus, ipsi vero ΕΔΓΒΑ circumferentiæ ipse ΑΖΕ angulus. Æqualis igitur ΑΖΕ angulus ipsi ΖΕΔ. Similiter utique ostendetur et reliquos angulos ipsius ΑΒΓΔΕΖ hexagoni secundum unum æquales esse alterutri ipsorum ΑΖΕ, ΖΕΔ angulorum. Æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et inscriptum est in ΑΒΓΔΕΖ circulo.

In dato igitur circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων[8] ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν[9].

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus æquale esse ipsi ex circuli centro.

Et si per Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ puncta contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum æquilaterumque et æquiangulum, congruenter eis de pentagono dictis. Et etiam congruenter eis de pentagono dictis, in dato hexagono circulum inscribemusque et circumscribemus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

COROLLAIRE.

De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle. Semblablement si par les points Α, Β, Δ, Γ, Ε, Ζ nous menons des tangentes au cercle, on circonscrira à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscrirons un cercle à un hexagone donné.

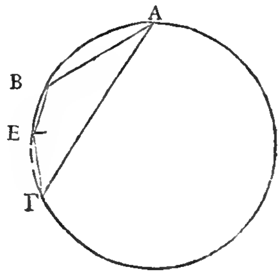
PROPOSITION XVI.

Inscrire dans un cercle donné un quindécagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindécagone équilatéral et équiangle.

Εγγεγράφθω[1] εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε. ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὖσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω

Inscribatur in ΑΒΓΔ circulo trianguli quidem æquilateri in ipso inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri ipsum ΑΒ; qualium igitur est ΑΒΓΔ circulus æqualium segmentorum quindecim, talium ΑΒΓ quidem circumferentia tertia pars existens circuli erit quinque; ΑΒ vero circumferentia, quinta existens circuli, erit trium; reliqua igitur ΒΓ æqualium duarum. Secetur



ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατον ἔσται[2] τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Εὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας[3], ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδέγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΓ bifariam in Ε, utraque igitur ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima erit ΑΒΓΔ circuli. Si igitur jungentes ipsas ΒΕ, ΕΓ rectas, æquales ipsis in continuum rectas aptemus in ΑΒΓΔ circulo, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Quod oportebat facere.

Inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le côté ΑΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté ΑΒ d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ΑΒΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ΑΒΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc ΑΒ qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant ΒΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant ΒΓ en deux parties égales au point Ε (30. 3), chacun des arcs ΒΕ, ΕΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓΔ. Donc, si ayant joint les droites ΒΕ, ΕΓ, nous adaptons dans le cercle ΑΒΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

Ομοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ετι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις[4], καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον[5], κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν[6].

Congruenter autem eis quæ de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Et insuper congruenter eis de pentagono dictis, et in dato quindecagono circulum inscribemus et circumscribemus.

Conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, si par les points de divisions d'un cercle, on mène des tangentes à ce cercle, on circonscrira à ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. De plus, conformément à ce qui a été dit pour les démonstrations du pentagone, nous inscrirons et nous circonscrirons une circonférence de cercle à un quindécagone équilatéral et équiangle donné.

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

ΟΡΟΙ.

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μιγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σκέσις[1].

DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando mensurat majorem.

2. Multiplex autem major minoris, quando mensuratur a minore.

3. Ratio est duorum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem inter se quædam habitudo.

LIVRE CINQUIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

δ'. Αναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης[2].

έ. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ς'. Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα[3].

ζ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη[4], ἀνάλογον καλείσθω.

ή. Οταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λεγέται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη[5] ἐστίν.

4. Proportio autem, rationum identitas.

5. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese superare.

6. In eâdem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æque multiplices, secundæ et quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt comparatæ inter se.

7. Ipsæ autem eamdem rationem habentes magnitudines proportionales vocentur.

8. Quando vero æque multiplicium, primæ quidem multiplex superat secundæ multiplicem, tertiæ vero multiplex non superat quartæ multiplicem, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

9. Proportio autem in tribus terminis minima est.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ[6] τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως ὡς[7] ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται[8], τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιε'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιϛ'. Διαίρεσις δὲ[9] λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur, ejus quam ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines proportionales sint, prima ad quartam triplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio rationis est sumptio excessûs, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

ιζ'. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιη'. Διίσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων[10] τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Η ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι[11].

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων[12] τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλό

17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens consequentem.

18. Ex æqualitate ratio est, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, binis sumptis et in eâdem ratione, quando est ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per substractionem mediarum.

19. Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; est autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, fit, ut quidem in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

17. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières gran-

τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν[3] ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

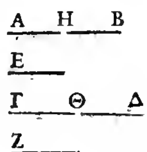
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν[1] ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ παντὰ τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσακις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, ΓΔ quot cunque magnitudinum E, Z æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiplices; dico quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices esse et AB, ΓΔ ipsarum E, Z.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius E ac ΓΔ ipsius Z; quot igitur sunt in AB magni-

deurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

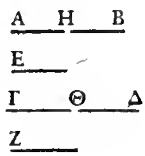
Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

Soient AB, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à d'autres grandeurs E, Z, chacune étant le même multiple de chacune; je dis que AB est le même multiple de E, que la somme de AB et de ΓΔ l'est de la somme de E et de Z.

Puisque AB est multiple de E, que ΓΔ l'est de Z, il y aura dans AB autant

AB μεγέθη[2] ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. Διῃρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ[2]. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ

tudines æquales ipsi E, tot sunt et in ΓΔ æquales ipsi Z. Dividatur AB quidem in magnitudines AH, HB æquales ipsi E, ipsa vero ΓΔ in ipsas ΓΘ, ΘΔ æquales ipsi Z; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΓΘ, ΘΔ. Et quoniam æqualis est AH quidem ipsi E, ipsa vero ΓΘ ipsi Z; æqualis igitur et AH, ΓΘ



ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z[3]· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα τοῖς E, Z· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsis E, Z; propter eadem utique æqualis est HB ipsi E, et ΘΔ ipsi Z; æquales igitur et HB, ΘΔ ipsis E, Z; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB, ΓΔ æquales ipsis E, Z; quam multiplex igitur est AB ipsius E, tam multiplices erunt et AB, ΓΔ ipsarum E, Z. Si igitur quotcunque etc.

de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β′.

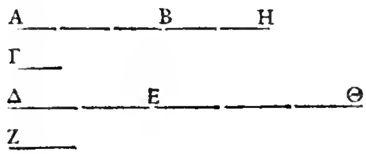
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πεμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

PROPOSITIO II.

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sit autem et quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; et simul sumptæ prima et quinta secundæ æque erunt multiplices ac tertia et sexta quartæ.

Prima enim AB secundæ Γ æque sit multiplex ac tertia ΔE quartæ Z, sit autem et quinta BH secundæ Γ æque multiplex ac sexta EΘ quartæ Z; dico et simul sumptas primam et quintam AH secundæ Γ æque fore multiplices ac tertiam et sextam ΔΘ ipsius Z.



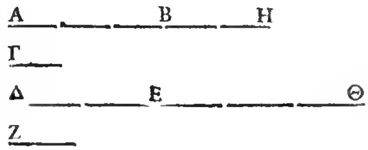
PROPOSITION II.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième.

Que la première AB soit le même multiple de la seconde Γ que la troisième ΔE l'est de la quatrième Z, et que la cinquième BH soit le même multiple de la seconde Γ que la sixième EΘ l'est de la quatrième Z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Z.

Επεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη[1] ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα[2] πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔE ipsius Z; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot et in ΔE æquales ipsi Z. Propter eadem utique et quot sunt in BH æquales ipsi Γ, tot et in EΘ æquales ipsi Z; quot igitur sunt in totâ AH æquales ipsi Γ, tot et in totâ ΔΘ æquales ipsi Z; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ, tam multiplex erit et ΔΘ ipsius Z; et simul sumptæ igitur prima et quinta AH secundæ Γ æque erunt multiplices ac tertia et sexta ΔΘ quartæ Z. Si igitur prima, etc.



Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔE l'est de Z, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔE de grandeurs égales à Z. Par la même raison, il y a dans BH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans EΘ de grandeurs égales à Z. Il y a donc dans la grandeur entière AH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans la grandeur entière ΔΘ de grandeurs égales à Z. Donc AH est le même multiple de Γ que ΔΘ l'est de Z; donc la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

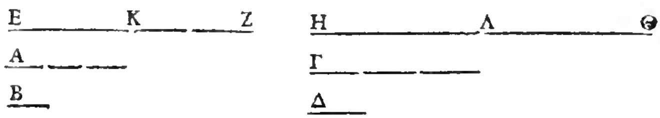
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον[1] τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

PROPOSITIO III.

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem æque multiplices primæ et tertiæ; et ex æquo sumptarum utraque utriusque æque erit multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A secundæ B æque sit multiplex ac tertia Γ quartæ Δ, et sumantur ipsarum A, Γ æque multiplices EZ, HΘ; dico æque esse multiplicem EZ ipsius B ac HΘ ipsius Δ.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα[2] καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διῃρήσθω τὸ μὲν[3] ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη

Quoniam enim æque est multiplex EZ ipsius A ac HΘ ipsius Γ; quot igitur sunt in EZ æquales ipsi A, tot et in HΘ æquales ipsi Γ. Dividatur EZ quidem in magnitudines ipsi A æqua-

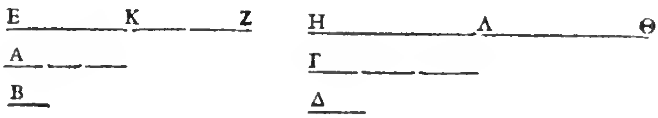
PROPOSITION III.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième, le multiple de la première sera, par égalité, le même multiple de la seconde que le multiple de la troisième l'est de la quatrième.

Que la première A soit le même multiple de la seconde B que la troisième Γ l'est de la quatrième Δ; prenons les équimultiples EZ, HΘ de A et de Γ; je dis que EZ est le même multiple de B que HΘ l'est de Δ.

Puisque EZ est le même multiple de A que HΘ l'est de Γ, il y a dans EZ autant de grandeurs égales à A qu'il y a dans HΘ de grandeurs égales à Γ. Diἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ.

les EK, KZ, ipsa vero HΘ in magnitudines ipsi Γ æquales HΛ, ΛΘ; erit utique æqualis multitudo ipsarum EK, KZ multitudini ipsarum HΛ, ΛΘ. Et quoniam æque est multiplex A ipsius B ac Γ ipsius Δ; æqualis autem BK quidem ipsi A, ipsa vero HΛ ipsi Γ; æque igitur est multiplex EK ipsius B ac HΛ ipsius Δ. Propter eadem utique æque est multiplex KZ ipsius B ac ΛΘ ipsius Δ. Quoniam



Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur prima EK secundæ B æque est multiplex ac tertia HΛ quartæ Δ; est autem et quinta KZ secundæ B æque multiplex ac sexta ΛΘ quartæ Δ; et simul sumptæ igitur prima et quinta EZ secundæ B æque sunt multiplices ac tertia et sexta HΘ quartæ Δ. Si igitur prima, etc.

visons EZ en grandeurs égales à A, et que ces grandeurs soient EK, KZ; divisons HΘ en grandeurs égales à Γ, et que ces grandeurs soient HΛ, ΛΘ. Le nombre des parties EK, KZ sera égal au nombre des parties HΛ, ΛΘ. Et puisque A est le même multiple de B que Γ l'est de Δ, que EK est égal à A, et HΛ égal à Γ, la grandeur EK est le même multiple de B que HΛ l'est de Δ. Par la même raison, KZ est le même multiple de B que ΛΘ l'est de Δ. Et puisque la première EK est le même multiple de la seconde B que la troisième HΛ l'est de la quatrième Δ, et que la cinquième KZ est le même multiple de la seconde B que la sixième ΛΘ l'est de la quatrième Δ, la somme de la première et de la cinquième, qui est EZ, sera le même multiple de la seconde B, que la somme de la troisième et de la sixième, qui est HΘ, l'est de la quatrième Δ (2. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ᾿ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν[1] ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

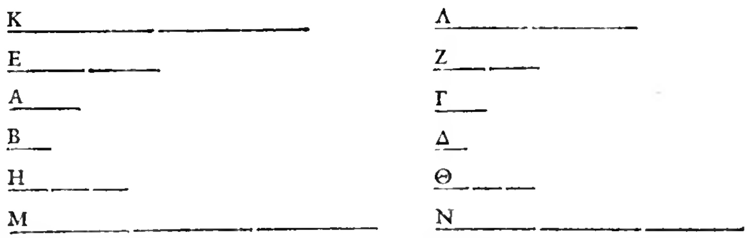
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν[2] ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam; et æque multiplices primæque et tertiæ ad æque multiplices secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eamdem habebunt rationem inter se comparatæ.

Prima enim A ad secundam B eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, et sumantur ipsarum quidem A, Γ æque multiplices E, Z, ipsarum vero B, Δ aliæ utcunque æque multiplices H, Θ; dico esse ut E ad H, ita Z ad Θ.

Sumantur enim ipsarum quidem E, Z æque multiplices K, Λ, ipsarum vero H, Θ aliæ utcunque multiplices M, N.



PROPOSITION IV.

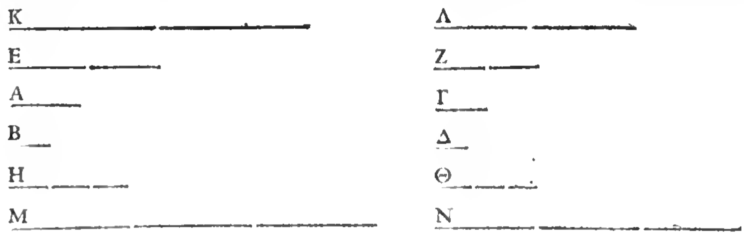
Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équimultiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, auront entre eux la même raison.

Car que la première A ait avec la seconde B la même raison que Γ avec Δ, prenons des équimultiples quelconques E, Z de A et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques H, Θ de B et de Δ; je dis que E est à H comme Z est à Θ.

Prenons des équimultiples quelconques K, Λ de E et de Z, et d'autres équimultiples quelconques M, N de H et de Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν

Et quoniam æque est multiplex E quidem ipsius A, ipsa vero Z ipsius Γ, et sumptæ sunt ipsarum E, Z æque multiplices K, Λ; æque igitur est multiplex K ipsius A ac Λ ipsius Γ. Propter eadem utique æque est multiplex M ipsius B ac N ipsius Δ. Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem A, Γ æque multiplices K, Λ, ipsarum vero B, Δ aliæ utcun-



δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια[3], τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

que æque multiplices M, N; si igitur superat K ipsam M, superat et Λ ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt K, Λ quidem ipsarum E, Z æque multiplices, ipsæ vero M, N ipsarum H, Θ aliæ utcunque multiplices; est igitur ut E ad H, ita Z ad Θ. Si igitur prima, etc.

Puisque E est le même multiple de A que Z l'est de Γ, et que l'on a pris des équimultiples K, Λ de E et de Z, la grandeur K est le même multiple de A que Λ l'est de Γ (3. 5). Par la même raison, M est le même multiple de B que N l'est de Δ. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ, que l'on a pris des équimultiples quelconques K, Λ de A et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques M, N de B et de Δ, si K surpasse M, Λ surpasse N; si K est égal à M, Λ est égal à N, et si K est plus petit que M, Λ est plus petit que N (déf. 5. *). Mais K, Λ sont des équimultiples quelconques de E et de Z, et M, N d'autres équimultiples quelconques de H et de Θ; donc E est à H comme Z est à Θ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

COROLLARIUM.

Quoniam igitur ostensum est, si superat Κ ipsam Μ, superare et Λ ipsam Ν; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; manifestum est et si Μ superat Κ, superare et Ν ipsam Λ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; et propter hoc erit et ut Η est ad Ε, ita Θ ad Ζ. Ex hoc utique manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sunt, et inversione proportionales fore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO V.

Si magnitudo magnitudinis æque sit multiplex ac ablata ablatæ, et reliqua reliquæ æque erit multiplex ac multiplex est tota totius.

COROLLAIRE.

Puisqu'il a été démontré que si Κ surpasse Μ, Λ surpasse Ν; que si Κ est égal à Μ, Λ est égal à Ν, et que si Κ est plus petit que Μ, Λ est plus petit que Ν, il est évident que si Μ surpasse Κ, Ν surpasse Λ; que si Μ est égal à Κ, Ν est égal à Λ, et que si Μ est plus petit que Κ, Ν est plus petit que Λ; par conséquent Η est à Ε comme Θ est à Ζ. De là il est évident que si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

PROPOSITION V.

Si une grandeur est le même multiple d'une grandeur que la grandeur retranchée l'est de la grandeur retranchée, le reste sera le même multiple du reste que le tout l'est du tout.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

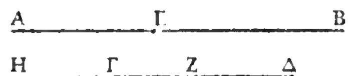
Οσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ[1] καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ· κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ισάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλα-

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓΔ æque sit multiplex ac ablata AE ablatæ ΓZ; dico et reliquam EB reliquæ ZΔ æque fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓΔ.

Quam multiplex enim est AE ipsius ΓZ, tam multiplex fiat et EB ipsius ΓH.

Et quoniam æque multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius HΓ; æque igitur est multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius HZ; ponitur autem æque multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex AB utriusque ipsarum HZ, ΓΔ; æqualis igitur HZ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓZ; reliqua igitur HΓ reliquæ ΔZ est æqualis. Et quoniam æque est multiplex AE ipsius ΓZ ac EB ipsius HΓ, æqualis autem ipsi HΓ ipsa ΔZ; æque igitur est multiplex AE ipsius ΓZ ac EB ipsius ZΔ. Æque autem ponitur multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex EB ipsius



Que la grandeur AB soit le même multiple de la grandeur ΓΔ que la grandeur retranchée AE l'est de la grandeur retranchée ΓZ ; je dis que la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entiére AB l'est de la grandeur entière ΓΔ.

Que AE soit le même multiple de ΓZ que EB l'est de ΓH.

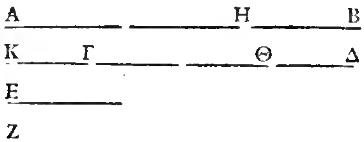
Puisque AE est le même multiple de ΓZ que EB l'est de HΓ, AE est le même multiple de ΓZ que AB l'est de HZ (1. 5). Mais l'on a supposé que AE est le même multiple de ΓZ qué AB l'est de ΓΔ ; donc AB est le même multiple de HZ et de ΓΔ ; donc HZ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓZ ; le reste HΓ sera égal au reste ΔZ. Et puisque AE est le même multiple de ΓZ que EB l'est de HΓ, et que ZΔ est égal à HΓ, AE est le même multiple de ΓZ que EB l'est de ZΔ. Mais on a supposé que AE est le même multiple de ΓZ πλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἐσταὶ[2] πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Εἀν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΖΔ ac AB ipsius ΓΔ; et reliqua igitur EB reliquæ ΖΔ æque erit multiplex ac multiplex est tota AB totius ΓΔ. Si igitur magnitudo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Εὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τίνα τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

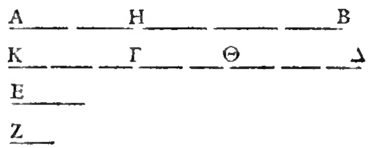
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.



PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque sint multiplices, et ablatæ quædam earumdem æque sint multiplices; et reliquæ iisdem vel æquales sunt, vel æque earum multiplices.

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ duarum magnitudinum E, Z æque sint multiplices, et ablatæ AH, ΓΘ earumdem E, Z æque sint multiplices; dico et reliquas HB, ΘΔ ipsis E, Z vel æquales esse, vel æque earum multi plices.



que AB l'est de ΓΔ; donc EB est le même multiple de ZΔ que AB l'est de ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ. Donc, etc.

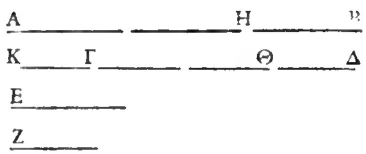
PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs sont des équimultiples de deux grandeurs, et si certaines grandeurs retranchées sont des équimultiples des dernières, les grandeurs restantes seront égales à ces dernières, ou des équimultiples de ces dernières.

Que les deux grandeurs AB, ΓΔ soient des équimultiples des deux grandeurs E, Z, et que les grandeurs retranchées AH, ΓΘ soient des équimultiples de E et de Z; je dis que les grandeurs restantes HB, ΘΔ sont égales aux grandeurs E, Z, ou des équimultiples de ces grandeurs.

Εστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ[1] ἴσον ἐστί. Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Καὶ[2] ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ισάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ

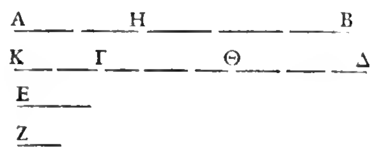


τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Επεὶ οὖν ἑκάτερον τῆς ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Αλλὰ τῷ Ζ τὸ ΚΓ[3] ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν[4]. Ωστε εἰ[5] τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ. Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Sit enim primum HB ipsi E æqualis; dico et ΘΔ ipsi Z æqualem esse. Ponatur enim ipsi Z æqualis ΓK.

Et quoniam æque est multiplex AH ipsius E ac ΓΘ ipsius Z, æqualis autem HB quidem ipsi E, ipsa vero KΓ ipsi Z; æque igitur est multiplex AB ipsius E ac KΘ ipsius Z. Æque autem ponitur multiplex AB ipsius E ac ΓΔ ip-



sius Z; æque igitur est multiplex KΘ ipsius Z ac ΓΔ ipsius Z. Et quoniam utraque ipsarum KΘ, ΓΔ ipsius Z æque est multiplex; æqualis igitur est KΘ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΘ; reliqua igitur KΓ reliquæ ΘΔ æqualis est. Sed ipsi Z ipsa KΓ est æqualis; et ΘΔ igitur ipsi Z æqualis est. Quare si HB ipsi E æqualis est, et ΘΔ æqualis erit ipsi Z.

Similiter utique ostendemus et si multiplex est HB ipsius E, multiplicem fore et magnitudinem ΘΔ ipsius Z. Si igitur duæ, etc.

Premièrement, que HB soit égal à E; je dis que ΘΔ est égal à Z. Faisons ΓK égal à Z.

Puisque AH est le même multiple de E que ΓΘ l'est de Z, que HB est égal à E, et KΓ égal à Z, AB est le même multiple de E que KΘ l'est de Z (2. 5). Mais on a supposé que AB est le même multiple de E que ΓΔ l'est de Z; donc KΘ est le même multiple de Z que ΓΔ l'est de Z. Et puisque les grandeurs KΘ, ΓΔ sont chacune le même multiple de Z, KΘ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΘ; la grandeur restante KΓ sera égale à la grandeur restante ΘΔ. Mais KΓ est égal à Z; donc ΘΔ est égal à Z; donc si HB est égal à E, ΘΔ sera égal à Z.

Nous démontrerons semblablement, que si HB est un multiple de E, la grandeur ΘΔ sera le même multiple de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Εστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι[1] ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν[2] Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

PROPOSITIO VII.

Æquales ad camdem camdem habent rationem, et eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A, B, alia autem quælibet magnitudo Γ; dico utramque ipsarum A, B ad Γ habere eamdem rationem, et Γ ad utramque ipsarum A, B.

Sumantur enim ipsarum A, B quidem æque multiplices Δ, E, ipsius vero Γ alia utcunque multiplex Z.

Επεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Αλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον[3]· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον·

Quoniam igitur æque est multiplex Δ ipsius A ac E ipsius B, æqualis autem A ipsi B; æqualis igitur et Δ ipsi E. Alia vero Z ipsius Γ utcunque multiplex; si igitur superat Δ ipsam Z, superat et E ipsam Z; et si æqualis, æqua-

PROPOSITION VII.

Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales A, B, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs A, B a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A, B.

Prenons des équimultiples quelconques Δ, E de A et de B, et un autre multiple quelconque Z de Γ.

Puisque Δ est le même multiple de A que E l'est de B, et que A est égal à B, Δ est égal à E. Mais Z est un autre multiple quelconque de Γ; donc, si Δ surpasse Z, E surpasse Z; si Δ est égal à Z, E est égal à Z; et si Δ est plus petit καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον ἐστιν[4]· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω δὴ[5] ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

lis; et si minor, minor. Et sunt quidem Δ, E ipsarum A, B æque multiplices, ipsa vero Z ipsius Γ alia utcunque multiplex est; est igitur ut A ad Γ, ita B ad Γ.

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum A, B eamdem habere rationem.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ[6] δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει τὸ Ζ[7] καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς[8].

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus æqualem esse Δ ipsi E; alia vero quædam Z; si igitur superat Z ipsam Δ, superat Z et ipsam E; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et est Z quidem ipsius Γ multiplex; ipsæ autem Δ, E ipsarum A, B aliæ utcunque æque multiplices; est igitur ut Γ ad A, ita Γ ad B. Æquales igitur, etc.

que Z, E est plus petit que Z. Mais Δ, E sont des équimultiples quelconques de A et de B, et Z est un autre multiple quelconque de Γ; donc A est à Γ comme B est à Γ (déf. 6. 5).

Je dis aussi que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A, B.

La même construction étant faite, nous démontrerons semblablement que Δ est égal à E; mais Z est un autre multiple quelconque; donc si Z surpasse Δ, Z surpasse E; si Z est égal à Δ, Z est égal à E, et si Z est plus petit que Γ, Z est plus petit que E. Mais Z est un multiple de Γ, et Δ, E sont d'autres équimultiples quelconques de A et de B; donc Γ est à A comme Γ est à B (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

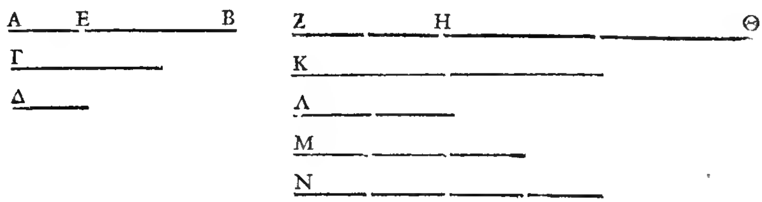
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Εστω ἄνισα μεγέθη τὰ AB, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ AB[1], ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ AB.

PROPOSITIO VIII.

Inæqualium magnitudinum, major ad eamdem majorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem majorem rationem habet quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines AB, Γ, et sit major AB, alia vero utcunque Δ; dico AB ad Δ majorem rationem habere quam Γ ad Δ, et Δ ad Γ majorem rationem habere quam ad AB.



Επεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ AB τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ BE, τὸ δὴ ἔλασσον τῶν AE, EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Εστω πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ AE, καὶ ἔστω[2] αὐτοῦ πολλαπλάσιον

Quoniam enim major est AB ipsâ Γ, ponatur ipsi Γ æqualis BE, minor utique ipsarum AE, EB multiplicata, erit aliquando ipsâ Δ major. Sit primum AE minor ipsâ EB, et multiplicetur AE, et sit ipsius multiplex ZH major

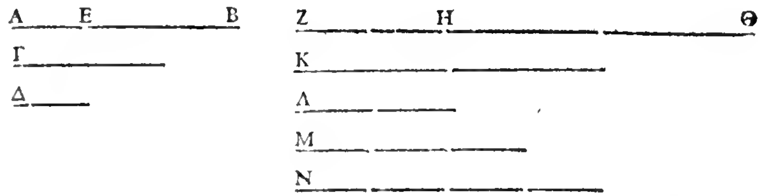
PROPOSITION VIII.

Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande.

Soient les grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande, et que Δ soit une autre grandeur quelconque; je dis que AB a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Δ, et que Δ a avec Γ une plus grande raison qu'avec AB.

Car puisque AB est plus grand que Γ, faisons BE égal à Γ; la plus petite des grandeurs AE, EB étant multipliée, deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Que AE soit d'abord plus petit que EB; multiplions AE, que son multiple τὸ ZH μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ZH τοῦ AE, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν HΘ τοῦ EB, τὸ δὲ K τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ M, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον ἕως οὗ[3] τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ K. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ N τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ K.

ipsâ Δ, et quam multiplex est ZH ipsius AE, tam multiplex fiat et HΘ quidem ipsius EB, ipsa vero K ipsius Γ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem ipsa Λ, tripla vero M, et deinceps unâ major quoad sumpta multiplex quidem fiat ipsius Δ, primum vero major ipsâ K. Sumatur, et sit N quadrupla quidem ipsius Δ, primum vero major ipsâ K.



Ἐπεὶ οὖν τὸ K τοῦ N πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ K ἄρα τοῦ M οὐκ ἔστιν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ HΘ τοῦ EB, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ ZΘ τοῦ AB. Ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ K τοῦ Γ. Ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZΘ τοῦ AB, καὶ τὸ K τοῦ Γ· τὰ ZΘ, K ἄρα τῶν AB, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολ-

Quoniam igitur K ipsâ N primum est minor, ipsa K igitur ipsâ M non est minor. Et quoniam æque est multiplex ZH ipsius AE ac HΘ ipsius EB, æque igitur est multiplex ZH ipsius AE ac ZΘ ipsius AB. Æque autem est multiplex ZH ipsius AE ac K ipsius Γ; æque igitur est multiplex ZΘ ipsius AB ac K ipsius Γ; ipsæ ZΘ, K igitur ipsarum AB, Γ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque est multiplex HΘ ipsius

ZH soit plus grand que Δ, et que HΘ soit le même multiple de EB, et K le même multiple de Γ, que ZH l'est de AE. Prenons la grandeur Λ double de Δ, la grandeur M triple de Δ, et ainsi de suite, une fois de plus, jusqu'à ce que le multiple de Δ deviène pour la première fois plus grand que K. Prenons ce multiple; que N, quadruple de Δ, soit plus grand que K, pour la première fois.

Puisque K est pour la première fois plus petit que N, la grandeur K n'est pas plus petite que M. Mais ZH est le même multiple de AE que HΘ l'est de EB; donc ZH est le même multiple de AE que ZΘ l'est de AB (1. 5). Mais ZH est le même multiple de AE que K l'est de Γ; donc ZΘ est le même multiple de AB que K l'est de Γ; donc ZΘ, K sont des équimultiples de AB et de Γ. De plus, puisλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. Αλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστὶν ἴσα· ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Αλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μεῖζον ἐστίν[5]· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ[6] οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς το ΑΒ.

EB ac K ipsius Γ, æqualis autem EB ipsius Γ; æqualis igitur et K ipsi HΘ. Ipsa vero K ipsâ M non est minor; non igitur HΘ ipsâ M minor est. Major autem ZH ipsâ Δ; tota igitur ZΘ utrisque simul Δ, M major est. Sed utræque simul Δ, M ipsi N sunt æquales, quandoquidem M ipsius Δ est tripla, utræque autem simul Δ, M ipsius Δ sunt quadruplæ, est vero et N ipsius Δ quadrupla, utræque simul igitur M, Δ ipsi N æquales sunt. Sed ZΘ ipsis Δ, M major est; ZΘ igitur ipsam M superat. K vero ipsam N non superat. Et sunt ipsæ quidem ZΘ, K ipsarum AB, Γ æque multiplices, ipsa vero N ipsius Δ alia utcunque multiplex; AB igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico autem et Δ ad Γ majorem rationem habere, quam Δ ad AB.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, N quidem ipsam K superare, N vero ipsam ZΘ non superare. Et est N quidem ipsius Δ multiplex, et ipsæ ZΘ, K ipsarum AB, Γ aliæ utcunque æque multiplices; Δ igitur ad Γ majorem rationem habet quam Δ ad AB.

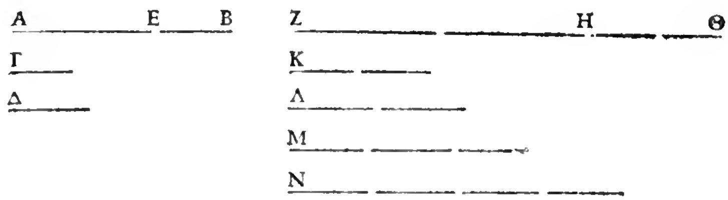
que HΘ est le même multiple de EB que K l'est de Γ, et que EB est égal à Γ, HΘ est égal à K. Mais K n'est pas plus petit que M; donc HΘ n'est pas plus petit que M. Mais ZH est plus grand que Δ; donc la grandeur entière ZΘ est plus grande que Δ et M pris ensemble. Mais Δ, M pris ensemble sont égaux à N, puisque M est triple de Δ, que Δ, M pris ensemble sont quadruples de Δ, et que N est quadruple de Δ, les grandeurs M, Δ prises ensemble sont égales à N. Mais ZΘ est plus grand que Δ, M; donc ZΘ surpasse N. Mais K ne surpasse pas N, et ZΘ, K sont des équimultiples de AB et de Γ, et N est un autre multiple quelconque de Δ; donc AB a une plus grande raison avec Δ, que Γ avec Δ (déf. 8. 5).

Je dis de plus que Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec AB.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que N surpasse K, et que N ne surpasse pas ZΘ. Mais N est un multiple de Δ, et ZΘ, K sont d'autres équimultiples quelconques de AB et de Γ; donc Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec AB (déf. 8. 5).

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως

Sed et AE ipsâ EB major sit; minor EB utique multiplicata, erit aliquando ipsâ Δ major. Multiplicetur, et sit HΘ multiplex quidem ipsius EB, major vero ipsâ Δ; et quam multiplex est HΘ ipsius EB, tam multiplex fiat et ZH quidem ipsius AE, ipsa vero K ipsius Γ. Similiter utique ostendemus ipsas ZΘ, K ipsarum AB, Γ æque esse multiplices. Et sumatur similiter N multiplex quidem ipsius Δ, primum vero major ipsâ ZH;



δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ μὴ ἔλασσον εἶναι[8], μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ τουτέστι τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τὸ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως[9] κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

quare rursus ZH ipsâ M non minor erit, major autem HΘ ipsâ Δ; tota igitur ZΘ ipsas Δ, M, hoc est N superat, K vero ipsam N non superat, quandoquidem et ZH quæ major est ipsâ HΘ, hoc est ipsâ K, ipsam N non superat. Et similiter subsequentes superiora absolvemus demonstrationem. Ergo inæqualium, etc.

Mais que AE soit plus grand que EB ; la plus petite grandeur EB étant multipliée deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Qu'elle soit multipliée, et que HΘ soit un multiple de EB plus grand que Δ, et que ZH soit le même multiple de AE, et K de Γ, que HΘ l'est de EB. Nous démontrerons semblablement que ZΘ, K sont des équimultiples de AB et de Γ. Prenons semblablement un multiple N de Δ qui soit plus grand pour la première fois que ZH ; ZH ne sera pas plus petit que M. Mais HΘ est plus grand que Δ ; donc la grandeur entière ZΘ surpasse Δ, M pris ensemble, c'est-à-dire N. Mais K ne surpasse pas N, parce que ZH étant plus grand que HΘ, c'est-à-dire que K, ne surpasse pas N. Et conformément a ce qui a été dit auparavant, nous achèverons la démonstration. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν[1].

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

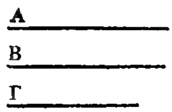
Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, æquales inter se sunt; et ad quas eadem eamdem habet rationem, illæ æquales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad Γ eamdem rationem; dico æqualem esse A ipsi B.

Si enim non, non utraque ipsarum A, B ad Γ eamdem haberet rationem, habet autem; æqualis igitur est A ipsi B.



Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Habeat autem rursus Γ ad utramque A, B eamdem rationem; dico æqualem esse A ipsi B.

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum A, B eamdem haberet rationem; habet autem; æqualis igitur est A ipsi B. Quæ igitur ad eamdem, etc.

PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entr'elles, et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entr'elles.

Que chacune des grandeurs A, B ait avec Γ la même raison; je dis que A est égal à B.

Car, si cela n'était point, chacune des grandeurs A, B n'aurait pas avec Γ la même raison (8. 5); mais elle l'a; donc A est égal à B.

Que Γ ait la même raison avec chacune des grandeurs A, B; je dis que A est égal à B.

Car, si cela n'était point, la grandeur Γ n'aurait pas la même raison avec chacune des grandeurs A, B (8. 5). Mais elle l'a; donc A est égal à B. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν[1] μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Εχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

PROPOSITIO X.

Ipsarum ad eamdem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est; ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Habeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ; dico majorem esse A ipsâ B.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. Ισον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον[2] ἤπερ

Si enim non, vel æqualis est A ipsi B, vel minor. Æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad Γ eamdem haberet rationem. Non habet vero; non igitur æqualis est A ipsi B. Neque tamen minor est A ipsâ B, nam A ad Γ minorem haberet rationem quam

PROPOSITION X.

Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite.

Que A ait avec Γ une plus grande raison que B avec Γ; je dis que A est plus grand que B.

Car, si cela n'est pas, A est égal à B, ou plus petit. A n'est pas égal à B, car chacune des grandeurs A, B aurait la même raison avec Γ (7. 5). Mais chacune de ces grandeurs n'a pas la même raison avec Γ; donc A n'est pas égal à B. A n'est pas cependant plus petit que B; car A aurait avec Γ une plus petite raison que B avec Γ (8. 5). Mais A n'a pas avec Γ une plus petite raison que τὸ Β πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Εδείχθη δὲ ὅτι[3] οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Εχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. Ισον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐ δὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

B ad Γ. Non habet autem, non igitur minor est A ipsâ B. Ostensa autem est neque æqualis, major igitur est A ipsâ B.

Habeat autem rursus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A; dico minorem esse B ipsâ A.

Si enim non, vel æqualis est, vel major. Æqualis quidem non est B ipsi A, nam Γ ad utramque ipsarum A, B camdem haberet rationem. Non habet vero, non igitur æqualis est A ipsi B. Non autem tamen major est B ipsâ A, nam Γ ad B minorem rationem haberet quam ad A. Non habet vero, non igitur major est B ipsâ A. Ostensa autem est neque æqualis, minor igitur est B ipsâ A. Ipsarum igitur ad eamdem, etc.

B avec Γ; donc A n'est pas plus petit que B. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc A est plus grand que B.

De plus, que Γ ait avec B une raison plus grande que Γ avec A; je dis que B est plus petit que A.

Car, si cela n'est pas, il lui est égal, ou il est plus grand. Mais la grandeur B n'est pas égale à A; car alors la grandeur Γ aurait la même raison avec chacune des grandeurs A, B (7. 5). Mais elle ne l'a pas; donc A n'est pas égal à B. La grandeur B n'est pas cependant plus grande que A; car alors Γ aurait avec B une raison plus petite qu'avec A (8. 5). Mais Γ n'a pas avec B une raison plus petite qu'avec A; donc B n'est pas plus grand que A. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc B est plus petit que A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Εστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως[2] τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

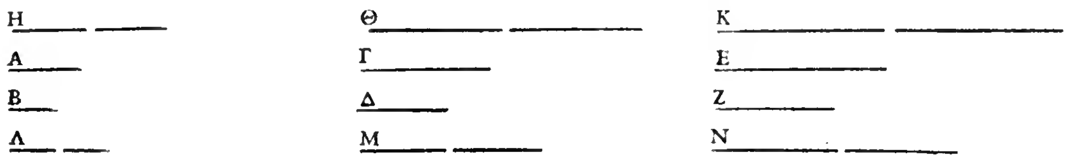
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν[1] Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

PROPOSTIO XI.

Eidem rationes eædem, et inter se sunt eædem.

Sint enim ut Α quidem ad Β ita Γ ad Δ, ut Γ vero ad Δ, ita Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.

Sumantur enim ipsarum Α, Γ, Ε quidem æque multiplices Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiplices Λ, Μ, Ν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν[2] Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ[3]· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ·

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiplices Η, Θ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque multiplices Λ, Μ; si igitur Η superat ipsam Λ, superat et Θ ipsam Μ; et si æqualis, æqualis; et

PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que Α soit à Β comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme Ε est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Γ; et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ de Β et de Δ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ;

καὶ εἰ ἴσον, ἴσον[4]· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον[5]. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μεν[6] Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Αλλα εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξῆς.

si minor, minor. Rursus, quoniam est ut Γ ad Δ ita E ad Z, et sumptæ ipsarum quidem Γ, E æque multiplices Θ, K, ipsarum vero Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices M, N; si igitur superat Θ ipsam M, superat et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed si superat Θ ipsam M, superat et H ipsam Λ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; quare et si superat H ipsam Λ, superat et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt H, K quidem ipsarum A, E æque multiplices, ipsæ vero Λ, N ipsarum B, Z aliæ utcunque multiplices; est igitur ut A ad B ita E ad Z. Ergo eidem, etc.

et si H est plus petit que Λ, Θ est plus petit que M (déf. 6. 5). De plus, puisque Γ est à Δ comme E est à Z, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Θ, K de Γ et de E, et d'autres équimultiples quelconques M, N de Δ et de Z; si Θ surpasse M, K surpasse N; si Θ est égal à M, K est égal à N, et si Θ est plus petit que M, K est plus petit que N. Mais si Θ surpasse M, H surpasse Λ; si Θ est égal à M, H est égal à Λ, et si Θ est plus petit que M, H est plus petit que Λ; donc, si H surpasse Λ, K surpasse N; si H est égal à Λ, K est égal à N, et si H est plus petit que Λ, K est plus petit que N. Mais H, K sont des équimultiples quelconques de A et de E, et Λ, N d'autres équimultiples quelconques de B et de Z; donc A est à B comme E est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

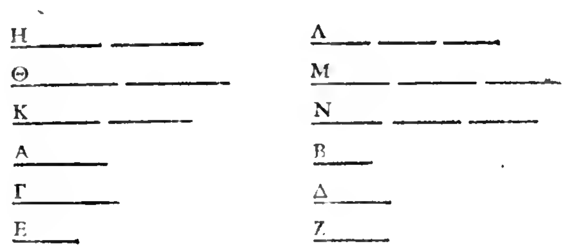
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

PROPOSITIO XII.

Si sint quoteunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quoteunque magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Α, Γ, Ε ad ipsas Β, Δ, Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque multiplices Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ uteunque æque multiplices Λ, Μ, Ν.

Et quoniam est Α ad Β ita Γ ad Δ et Ε ad Ζ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ; que l'on a pris τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ωστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν[1]· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα[2]. Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπειδήπερ ἂν[3] ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσια[4], ὁσαπλάσιόν ἐστι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ[5] Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Εὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

multiplices Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiplices Λ, Μ, Ν; si igitur Η superat ipsam Λ, superat et Θ ipsam Μ, et Κ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare et si superat Η ipsam Λ, superant et Η, Θ, Κ ipsas Λ, Μ, Ν; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Et est Η quidem et Η, Θ, Κ ipsius Α et ipsarum Α, Γ, Ε æque multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Propter eadem utique et Λ et Λ, Μ, Ν ipsius Β et ipsarum Β, Δ, Ζ æque sunt multiplices; est igitur ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ. Si igitur sint quotcunque, etc.

des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν; et si Η est plus petit que Λ, Θ est plus petit que Ν, et Κ plus petit que Ν (déf. 6. 5). Donc, si Η surpasse Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν; si Η est égal à Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν; et si Η est plus petit que Λ, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν. Mais la grandeur Η et la somme des grandeurs Η, Θ, Κ sont des équimultiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Λ et la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν sont des équimultiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ[1] πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ[2] πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν[3] γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ[4] πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ[5].

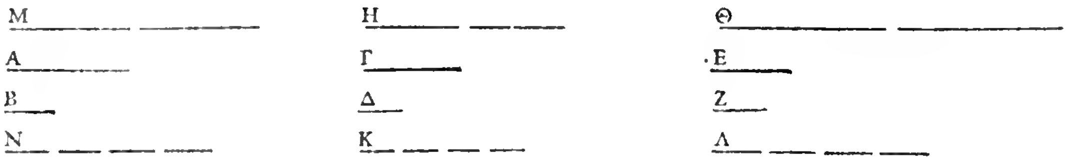
Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ[6]· ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam majorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima quidem enim A ad secundam B eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, tertia vero Γ ad quartam Δ majorem rationem habeat quam quinta E ad sextam Z; dico et primam A ad secundam B majorem rationem habituram esse quam quintam E ad sextam Z.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem rationem habet quam E ad Z, sunt quædam ipsarum



PROPOSITION XIII.

Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que la troisième Γ ait avec la quatrième Δ une raison plus grande que la cinquième E avec la sixième Z; je dis que la première A aura avec la seconde B une raison plus grande que la cinquième E avec la sixième Z.

Puisque Γ a avec Δ une raison plus grande que E avec Z, parmi des équiἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει[7], τὸ δὲ τοῦ E πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Z πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, E ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, τῶν δὲ Δ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, ὥστε τὸ μὲν H τοῦ K ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ H τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ M τοῦ A· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ K τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ N τοῦ B.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ M, H, τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ N, K· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ M τοῦ N, ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ K· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ H τοῦ K, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ M τοῦ N. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν M, Θ τῶν A, E ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ N, Λ τῶν B, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν

quidem Γ, E æque multiplices, ipsarum vero Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices; et ipsius quidem Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superat, ipsius vero E multiplex ipsius Z multiplicem non superat. Sumantur, et sint ipsarum quidem Γ, E æque multiplices H, Θ; ipsarum vero Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices K, Λ; ita ut H quidem ipsam K superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex quidem est H ipsius Γ, tam multiplex sit et M ipsius A; quam vero multiplex K ipsius Δ, tam multiplex sit et N ipsius B.

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem A, Γ æque multiplices M, H, ipsarum vero B, Δ aliæ utcunque æque multiplices N, K; si igitur superat M ipsam N, superat et H ipsam K; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superat autem H ipsam K, superat igitur et M ipsam N. Ipsa vero Θ ipsam Λ non superat; et sunt M, Θ quidem ipsarum A, E æque multiplices, ipsæ vero N, Λ ipsarum B, Z aliæ utcunque æque multiplices; ergo A

multiples quelconques de Γ et de E, et parmi d'autres équimultiples quelconques de Δ et de Z, un multiple de Γ surpasse un multiple de Δ, et un multiple de E ne surpasse pas un multiple de Z (déf. 8. 5). Prenons ces équimultiples, et que H, Θ soient des équimultiples de Γ et de E, et que K, Λ soient d'autres équimultiples quelconques de Δ et de Z, de manière que H surpasse K, et que Θ ne surpasse pas Λ; et que M soit le même multiple de A que H l'est de Γ, et que N soit le même multiple de B que K l'est de Δ.

Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques M, H de A et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques N, K de B et de Δ; si M surpasse N, H surpasse K; si M est égal à N, H est égal à K; et si M est plus petit que N, H est plus petit que K (déf. 6. 5). Mais H surpasse K; donc M surpasse N. Mais Θ ne surpasse pas Λ; et M, Θ sont des équimultiples quelconques de A et de E; et N, Λ sont d'autres équimultiples quelconques de B ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ad B majorem rationem habet quam E ad Z. Si igitur prima, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

PROPOSITIO XIV.

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertiâ major sit, et secunda tertiâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, major

τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Επεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ[1], ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος[2] τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα

autem sit A ipsâ Γ; dico et B ipsâ Δ majorem esse.

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia autem utcunque magnitudo B; ergo A ad B majorem

et de Z; donc A a avec B une raison plus grande que E avec Z (déf. 8. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que A soit plus grand que Γ; je dis que B est plus grand que Δ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur quelconque, λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται, καὶ[3] τὸ Β τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

rationem habet quam Γ ad Β. Ut autem Α ad Β, ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Β. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur Δ ipsâ Β; quare major est Β ipsâ Δ.

Similiter utique ostendemus et si æqualis sit Α ipsi Γ, æqualem fore et Β ipsi Δ; et si minor sit Α ipsâ Γ, minorem fore et Β ipsâ Δ. Si igitur prima, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

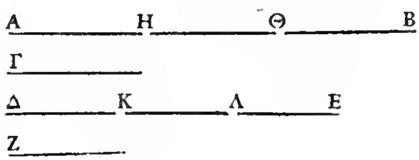
Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

PROPOSITIO XV.

Partes inter se comparatæ eamdem habent rationem quam æque multiplices.

Sit enim æque multiplex ΑΒ ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; dico esse ut Γ ad Ζ ita ΑΒ ad ΔΕ.



Α a avec Β une plus grande raison que Γ avec Β (8. 5). Mais Α est à Β comme Γ est a Δ ; donc Γ a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Β (13. 5). Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a la plus grande raison est la plus petite (10. 5) ; donc Δ est plus petit que Β, et par conséquent Β plus grand que Δ.

Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ, Β sera égal à Δ, et que si Α est plus petit que Γ, Β sera plus petit que Δ. Donc, etc.

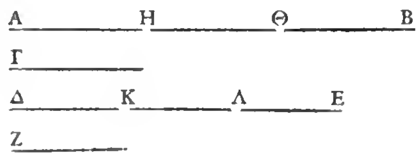
PROPOSITION XV.

Les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples.

Que ΑΒ soit le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ ; je dis que Γ est à Ζ comme ΑΒ est à ΔΕ.

Επεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη[1] ἴσα, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Ισον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Τα ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim æque est multiplex ΑΒ ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in ΑΒ magnitudines æquales ipsi Γ, tot sunt et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Dividatur ΑΒ quidem in magnitudines ipsi Γ æquales ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ipsa vero ΔΕ in ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ipsi Ζ æquales; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ multitudini ipsarum ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et quoniam æquales sunt ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ inter se, sunt autem et ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ æquales inter se; est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, et ΘΒ ad ΛΕ; erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΑΒ ad ΔΕ. Æqualis autem ΑΗ quidem ipsi Γ, ipsa vero ΔΚ ipsi Ζ; est igitur ut Γ ad Ζ ita ΑΒ ad ΔΕ. Ergo partes, etc.



Puisque ΑΒ est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans ΑΒ autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Divisons ΑΒ en parties égales à Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ; divisons aussi ΔΕ en parties égales à Ζ, et que ces parties soient ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Le nombre des parties ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ sera égal au nombre des parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et puisque les parties ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ sont égales entr'elles, et que les parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ sont aussi égales entr'elles, ΑΗ est à ΔΚ comme ΗΘ est à ΚΛ, et comme ΘΒ est à ΛΕ (7. 5); donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); donc ΑΗ est à ΔΚ comme ΑΕ est à ΔΕ. Mais ΑΗ est égal à Γ, et ΔΚ égal à Ζ; donc Γ est à Ζ comme ΑΒ est à ΔΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

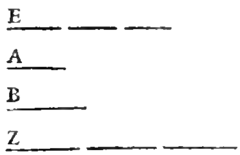
Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

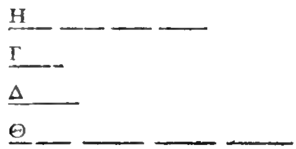
Εστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς το Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἐστὶν[1], ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales esse, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.





Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα[2]· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ως δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Β æque multiplices Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices Η, Θ.

Et quoniam æque est multiplex Ε ipsius Α ac Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ eamdem habent rationem, quam earum æque multiplices; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. Ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ; et ut igitur

PROPOSITION XVI.

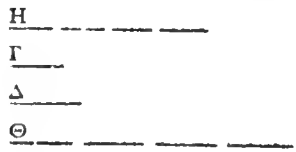
Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Prenons des équimultiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Β, et d'autres équimultiples quelconques Η, Θ de Γ et de Δ.

Puisque Ε est le même multiple de Α que Ζ l'est de Β, et que les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5), la grandeur Α est à Β comme Ε est à Ζ. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ως δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· Καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Εὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ[3] ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ' ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Γ ad Δ ita E ad Z. Rursus, quoniam H, Θ ipsarum Γ, Δ æque sunt multiplices; est igitur ut Γ ad Δ ita H ad Θ. Ut autem Γ ad Δ ita E ad Z; et ut igitur E ad Z ita H ad Θ. Si autem quatuor maguitudines proportionales sint, prima autem tertiâ major sit, et vero secunda quartâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur superat E ipsam H, superat et Z ipsam Θ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt ipsæ quidem E, Z ipsarum A, B æque multiplices, ipsæ vero H, Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ. Si igitur quatuor, etc.



Γ est à Δ comme E est à Z (11. 5). De plus, puisque H, Θ sont des équimultiples de Γ et de Δ; Γ est à Δ comme H est à Θ. Mais Γ est à Δ comme E est à Z; donc E est à Z comme H est à Θ (11. 5). Mais si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde est égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde est plus petite que la quatrième (14. 5). Donc si E surpasse H, Z surpasse Θ; si E est égal à H, Z est égal à Θ; et si E est plus petit que H, Z est plus petit que Θ. Mais E, Z sont des équimultiples quelconques de A et de B, et H, Θ sont d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Δ; donc A est à Γ comme B est à Δ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

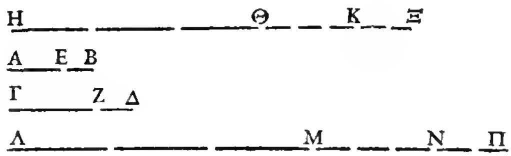
Εὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Εστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, *ὡς τὸ* ΑΒ *πρὸς τὸ* ΒΕ *οὕτως τὸ* ΓΔ *πρὸς τὸ* ΔΖ· *λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ* ΑΕ *πρὸς τὸ* ΕΒ *οὕτως τὸ* ΓΖ *πρὸς τὸ* ΖΔ.

PROPOSITIO XVII.

Si compositæ magnitudines proportionales sint, et divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ; dico et divisas proportionales fore, ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ *ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ* ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· *τῶν δὲ* ΕΒ, ΖΔ *ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ* ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ *τοῦ* ΑΕ *καὶ τὸ* ΘΚ *τοῦ* ΕΒ· *ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ* ΗΘ *τοῦ* ΑΕ *καὶ τὸ* ΗΚ *τοῦ* ΑΒ.

Sumantur enim ipsarum quidem ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ æque multiplices ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ipsarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΘΚ ipsius ΕΒ; æque igitur est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΗΚ ipsius ΑΒ.

PROPOSITION XVII.

Si des grandeurs étant composées sont proportionnelles, ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles.

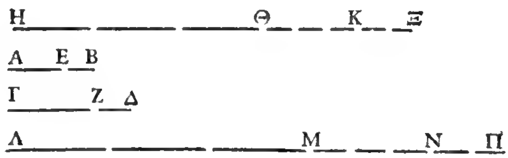
Que les grandeurs composées ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ soit à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; je dis que ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ.

Prenons des équimultiples quelconques ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ des grandeurs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, et d'autres équimultiples quelconques ΚΞ, ΝΠ de ΕΒ et de ΖΔ.

Puisque ΗΘ est le même multiple de ΑΕ que ΘΚ l'est de ΕΒ, ΗΘ est le même multiple de ΑΕ que ΗΚ l'est de ΑΒ (1. 5). Mais ΗΘ est le même multiple de

Ἰσάκις δέ ἐστι[1] πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ[2]. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν[3] ἰσάκις πολλαπλά-

Æque autem est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΛΜ ipsius ΓΖ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΛΜ ipsius ΓΖ. Rursus, quoniam æque est multiplex ΛΜ ipsius ΓΖ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; æque igitur est multiplex ΛΜ ipsius ΓΖ ac ΛΝ ipsius ΓΔ. Æque autem erat multiplex ΛΜ ipsius ΓΖ ac ΗΚ ipsius ΑΒ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΛΝ ipsius ΓΔ; ipsæ ΗΚ, ΛΝ igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque est multiplex ΘΚ ipsius ΕΒ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; est autem et ΚΞ ipsius ΕΒ æque multiplex ac ΝΠ ipsius ΖΔ; et composita ΘΞ ipsius ΕΒ æque est multiplex ac ΜΠ ipsius ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, et sumptæ sunt ipsarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΛΝ, ipsarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ, ΜΠ;



ΑΕ que ΛΜ l'est de ΓΖ ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΛΜ l'est de ΓΖ. De plus, puisque ΛΜ est le même multiple de ΓΖ que ΜΝ l'est de ΖΔ, ΛΜ est le même multiple de ΓΖ que ΛΝ l'est de ΓΔ. Mais ΛΜ est le même multiple de ΓΖ que ΗΚ l'est de ΑΒ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΛΝ l'est de ΓΔ ; donc ΗΚ, ΛΝ sont des équimultiples de ΑΒ et de ΓΔ. De plus, puisque ΘΚ est le même multiple de ΕΒ que ΜΝ l'est de ΖΔ, et que ΚΞ est le même multiple de ΕΒ que ΝΠ l'est de ΖΔ, la grandeur composée ΘΞ est le même multiple de ΕΒ que ΜΠ l'est de ΖΔ (2. 5). Et puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; que ΗΚ, ΛΝ sont des équimultiples quelconques de ΑΒ et de ΓΔ, et que ΘΞ et ΜΠ sont d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΛΝ surσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἑξῆς.

si igitur superat ΗΚ ipsam ΘΞ, superat et ΑΝ ipsam ΜΠ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superet autem ΗΚ ipsam ΘΞ, et communi ablatâ ΘΚ, superat igitur et ΗΘ ipsam ΚΞ. Sed si superat ΗΚ ipsam ΘΞ, superat et ΑΝ ipsam ΜΠ; superat igitur et ΑΝ ipsam ΜΠ; et communi ΜΝ ablatâ, superat et ΛΜ ipsam ΝΠ; quare si superat ΗΘ ipsam ΚΞ, superat et ΛΜ ipsam ΝΠ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit ΗΘ ipsi ΚΞ, æqualem fore et ΛΜ ipsi ΝΠ; et si minor, minorem. Et sunt ΗΘ, ΛΜ quidem ipsarum ΑΕ, ΓΖ æque multiplices, ipsæ vero ΚΞ, ΝΠ ipsarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ. Si igitur compositæ, etc.

passe ΜΠ; si ΗΚ est égal à ΘΞ, ΑΝ est égal à ΜΠ, et si ΗΚ est plus petit que ΘΞ, ΑΝ est plus petit que ΜΠ (déf. 6. 5). Que ΗΚ surpasse ΘΞ; ayant retranché la partie commune ΘΚ, ΗΘ surpassera encore ΚΞ. Mais si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΑΝ surpassera ΜΠ. Donc ΑΝ surpasse ΜΠ; retranchons la partie commune ΜΝ; la grandeur ΛΜ surpassera ΝΠ. Donc, si ΗΘ surpasse ΚΞ, ΛΜ surpassera ΝΠ. Nous démontrerons semblablement que si ΗΘ est égal à ΚΞ, ΛΜ sera égal à ΝΠ, et que si ΗΘ est plus petit que ΚΞ, ΛΜ sera plus petit que ΝΠ. Mais ΗΘ, ΛΜ sont des équimultiples quelconques de ΑΕ et de ΓΖ, et ΚΞ et ΝΠ d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

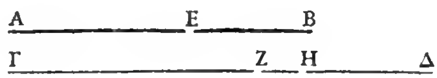
Εὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Εστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

PROPOSITIO XVIII.

Si divisæ magnitudines proportionales sint, et compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales AE, EB, ΓZ, ZΔ, ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; dico et compositas proportionales fore, ut AB ad BE ita ΓΔ ad ZΔ.



Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ πρὸς μεῖζον.

Εστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα

Si enim non est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ZΔ; erit ut AB ad BE ita ΓΔ, vel ad minorem ipsâ ΔZ, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem ΔH. Et quoniam est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔH, compositæ magnitudines proportionales sunt; quare et divisæ proportionales erunt; est igitur ut AE ad EB

PROPOSITION XVIII.

Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs AE, EB, ΓZ, ZΔ, étant divisées, soient proportionnelles, c'est-à-dire que AE soit à EB comme ΓZ est à ZΔ; je dis que ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que AB sera à BE comme ΓΔ est à ZΔ.

Car, si AB n'est pas à BE comme ΓΔ est à ZΔ, AB sera à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΔZ ou à une grandeur plus grande.

Que AB soit premièrement à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ZΔ, savoir à ΔH. Puisque AB est à BE comme ΓΔ est à ΔH, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles; donc ces grandeurs étant divisées seront ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Υπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Αλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Εὰν ἄρα διῃρημένα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ita ΓΗ ad ΗΔ. Ponitur autem et ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; et ut igitur ΓΗ ad ΗΔ ita ΓΖ ad ΖΔ. Major autem prima ΓΗ tertiâ ΓΖ; major igitur et secunda ΗΔ quartâ ΖΔ. Sed, et minor, quod est impossibile; non igitur est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad minorem ipsâ ΖΔ. Similiter utique ostendemus neque ad majorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Εὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Εστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως

PROPOSITIO XIX.

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ ita ablata

encore proportionnelles (17. 5). Donc ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΗ est à ΗΔ. Mais on a supposé que ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ; donc ΓΗ est à ΗΔ comme ΓΖ est à ΖΔ (11. 5). Mais la première ΓΗ est plus grande que la troisième ΓΖ; donc la seconde ΗΔ est plus grande que la quatrième ΖΔ (14. 5). Mais elle est plus petite, ce qui est impossible; donc ΑΒ n'est pas à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΖΔ. Nous démontrerons semblablement que ΑΒ n'est pas à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus grande que ΖΔ; donc ΑΒ est à ΒΕ, comme ΓΔ est a ΖΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une grandeur entière est à une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière.

Que la grandeur entière ΑΒ soit à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ[1] οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα

AE ad ablatam ΓZ; dico et reliquam EB ad reliquam ZΔ fore ut tota AB ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ; et alterne ut BA ad AE ita ΔΓ ad ΓZ. Et quoniam compositæ magnitudines proportionales sunt, et divisæ proportionales

ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα[2] τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἐναλλὰξ[3], ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν ΔΖ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς.

erunt; ut igitur BE ad EA ita ΔZ ad ZΓ; et alterne, ut BE ad ΔZ ita EA ad ZΓ. Ut autem AE ad ΓZ ita posita est tota AB ad totam ΓΔ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΔZ erit ut tota AB ad totam ΓΔ. Si igitur sit, etc.

retranchée AE est à la grandeur retranchée ΓZ ; je dis que la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ZΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ.

Car puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme AE est à ΓZ, par permutation, BA est à AE comme ΔΓ est à ΓZ (16. 5). Et puisque les grandeurs composées sont proportionnelles, les grandeurs divisées seront encore proportionnelles (17. 5); donc BE est à EA comme ΔZ est à ZΓ; donc, par permutation, BE est à ΔZ comme EA est à ZΓ. Mais, par supposition, AE est à ΓZ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ΔZ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (11. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Εδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι[1]. Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIUM.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ; et alterne ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓZ; compositæ igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est ut AB ad EB ita ΔΓ ad ZΔ, et est per conversionem. Ex hoc utique manifestum est si compositæ magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.'

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ[1] ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἐὰν[2] ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν[3] ἔλασσον, ἔλασσον.

PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eâdem ratione, ex æquo autem prima tertiâ major sit; et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

COROLLAIRE.

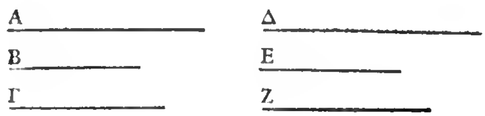
Puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓZ, par permutation (16. 5), AB est à AE comme ΓΔ est à ΓZ; donc ces grandeurs étant composées sont proportionnelles. Mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ZΔ; ce qui est par conversion. De là il est évident que si des grandeurs composées sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison; si, par égalité, la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, διΐσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, E, Z, binæ sumptæ in eâdem ratione, ut quidem A ad B ita Δ ad E, ut vero B ad Γ ita E ad Z, ex æquo autem major sit A ipsâ Γ; dico et Δ ipsâ Z majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.



Επεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι [4] τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Αλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως[5] τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ[6] Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia autem quædam B, et major vero ad eamdem majorem rationem habet quam minor; ipsa igitur A ad B majorem rationem habet quam Γ ad B. Sed ut A quidem ad B ita Δ ad E, ut vero Γ ad B per inversionem ita Z ad E; et Δ igitur ad E majorem habet rationem quam Z ad E. Ipsarum autem ad eamdem rationem habentium, majorem rationem habens major est; major

Soient A, B, Γ trois grandeurs, et Δ, E, Z d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, c'est-à-dire que A soit à B comme Δ est à E, et que B soit à Γ comme E est à Z; que, par égalité, A soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera aussi plus grand que Z; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z.

Puisque la grandeur A est plus grande que la grandeur Γ, et que B est une autre grandeur quelconque, la plus grande grandeur aura avec celle-ci une plus grande raison que la plus petite (8. 5); donc A a avec B une raison plus grande que Γ avec B. Mais A est à B comme Δ est à E, et, par inversion, Γ est à B comme Z est à E; donc Δ a avec E une plus grande raison que Z avec E. Mais, parmi les grandeurs qui ont une raison avec une même grandeur, celle-là est la plus grande qui a une plus grande raison (10. 5); donc Δ est plus grand que Z. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, μεῖζόν ἐστι[7]· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Εὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur est Δ ipsâ Z. Similiter ostendemus, et si A æqualis sit ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

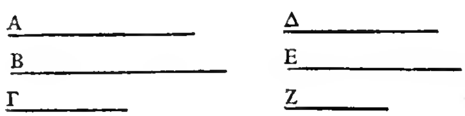
Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Εστω τρία μεγέθη[1] τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ

PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ex æquo autem prima tertiâ major sit, et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, E, Z, binæ sumptæ et in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut A quidem ad B ita E ad Z, ut vero B ad Γ ita Δ ad E, ex æquo autem



Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

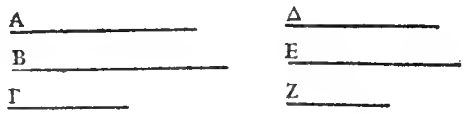
Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, si leur proportion est troublée, et si par égalité la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; et si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient les trois grandeurs A, B, Γ, et d'autres grandeurs Δ, E, Z égales aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison; que leur raison soit troublée, c'est-à-dire que A soit à B comme E est à Z, Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι'ἴσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς

A ipsâ Γ major sit; dico et Δ ipsâ Z majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia vero quædam B; ergo A ad B majorem rationem habet quam Γ ad B. Sed ut A quidem ad B ita E ad Z, ut vero Γ ad B per inversionem ita



τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζόν ἐστι[2] ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον[3] ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

E ad Δ; et E igitur ad Z majorem rationem habet quam E ad Δ. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur est Z ipsâ Δ; major est igitur Δ ipsâ Z. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit A ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur tres, etc.

que B soit à Γ comme Δ est à E, et que par égalité A soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera plus grand que Z; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur, A aura avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme E est à Z, et par inversion, Γ est à B comme E est à Δ; donc E a avec Z une plus grande raison que E avec Δ. Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a une raison plus grande est la plus petite (10, 5); donc Z est plus petit que Δ; donc Δ est plus grand que Z. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

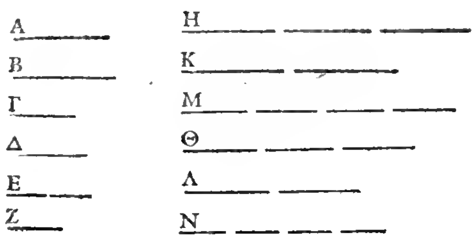
Εὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ[1] ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ[2].

PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eâdem ratione; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint quotcunque magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eâdem ratione, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo in eâdem ratione fore, ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Δ æque multiplices Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ utcunque æque multiplices Κ, Λ, et insuper ipsarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiplices Μ, Ν.

PROPOSITION XXII.

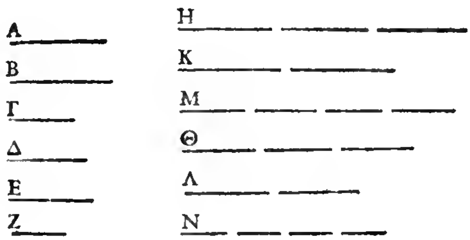
Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, elles auront la même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de grandeurs que l'on voudra, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que ces grandeurs auront la même raison par égalité, c'est-à-dire que Α sera à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ; prenons d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε, et enfin d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de Γ et de Ζ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. Επεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διΐσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ[3]. Εὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam est ut A ad B ita Δ ad E, et sumptæ sunt ipsarum quidem A, Δ æque multiplices H, Θ, ipsarum vero B, E aliæ utcunque æque multiplices K, Λ; est igitur ut H ad K ita Θ ad Λ. Propter eadem utique et ut K ad M ita Λ ad N. Et quoniam tres magnitudines sunt H, K, M, et aliæ ipsis æquales multitudine Θ, Λ, N binæ sumptæ et in eâdem ratione; ex æquo igitur si superat H ipsam M, superat et Θ ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt H, Θ quidem ipsarum A, Δ æque multiplices, ipsæ vero M, N ipsarum Γ, Z aliæ utcunque æque multiplices; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Si igitur quotcunque, etc.



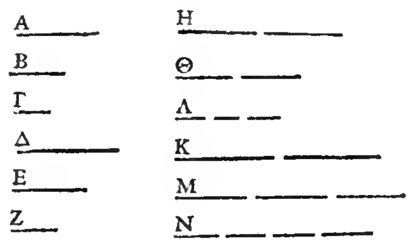
Puisque A est à B comme Δ est à E, que l'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ de A et de Δ, et d'autres équimultiples quelconques K, Λ de B et de E; H est à K comme Θ est à Λ (4. 5). Par la même raison, K est à M comme Λ est à N. Donc, puisque l'on a trois grandeurs H, K, M, et d'autres grandeurs Θ, Λ, N égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison; si, par égalité, H surpasse M, Θ surpasse N; si H est égal à M, Θ est égal à N, et si H est plus petit que M, Θ est plus petit que N (20. 5). Mais H, Θ sont des équimultiples quelconques de A et de Δ, et M, N d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Z; donc A est à Γ comme Δ est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.



PROPOSITIO XXIII.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem ratione Δ, E, Z, sit autem perturbata earum proportio, ut A quidem ad B ita E ad Z, ut B vero ad Γ ita Δ ad E; dico esse ut A ad Γ ita Δ ad Z.

Sumantur ipsarum quidem A, B, Δ æque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero Γ, E, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

PROPOSITION XXIII.

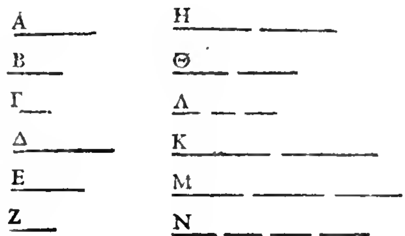
Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité.

Soient les trois grandeurs A, B, Γ, et d'autres grandeurs Δ, E, Z égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, et que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que A soit à B comme E est à Z, et que B soit à Γ comme Δ est à E; je dis que A est à Γ comme Δ est à Z.

Prenons des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, B, Δ, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs Γ, E, Z.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως το Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ.

Et quoniam æque sunt multiplices H, Θ ipsarum A, B, partes vero eamdem habent rationem quam earum æque multiplices; est igitur ut A ad B ita H ad Θ. Propter eadem utique ut E ad Z ita M ad N; et est ut A ad B ita E ad Z; et ut igitur H ad Θ ita M ad N. Et quoniam est ut B ad Γ ita Δ ad E, et alterne ut B ad Δ ita Γ ad E. Et quoniam Θ, K ipsarum B, Δ æque sunt multiplices; partes autem eamdem habent rationem quam æque multiplices; est igitur ut B ad Δ ita Θ ad K; sed ut B ad Δ ita Γ ad E; et ut igitur Θ ad K ita Γ ad E. Rursus quoniam Λ, M ipsarum Γ, E æque sunt multiplices; est igitur ut Γ ad E ita Λ ad M. Sed ut Γ ad E ita Θ ad K; et ut igitur Θ ad K ita Λ ad M, et alterne ut Θ ad Λ ita K ad M. Ostensum autem est et ut H ad Θ ita M ad N; et quoniam tres magnitudines sunt



Puisque H, Θ sont des équimultiples de A et de B, et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5); A est à B comme H est à Θ. Par la même raison, E est à Z comme M est à N; mais A est à B comme E est à Z; donc H est à Θ comme M est à N (11. 5). Et puisque B est à Γ comme Δ est à E, B est à Δ par permutation, comme Γ est à E. Et puisque Θ, K sont des équimultiples de B et de Δ, et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples, B est à Δ comme Θ est à K. Mais B est à Δ comme Γ est à E; donc Θ est à K comme Γ est à E. De plus, puisque Λ, M sont des équimultiples de Γ et de E, Γ est à E comme Λ est à M. Mais Γ est à E comme Θ est à K; donc Θ est à K comme Λ est à M, et par permutation, Θ est à Λ

Αλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Εδείχθη δὴ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· διίσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα ᾖ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

H, Θ, Λ, et aliæ ipsis æquales multitudine, ipsæ K, M, N, binæ sumptæ in eàdem ratione, et est earum perturbata proportio; ex æquo igitur si superat H ipsam Λ, superat et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt H, K quidem ipsarum A, Δ æque multiplices, ipsæ vero Λ, N ipsarum Γ, Z; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Si igitur sint tres, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ[1] δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eámdem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptæ prima et quinta ad secùndam eamdem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

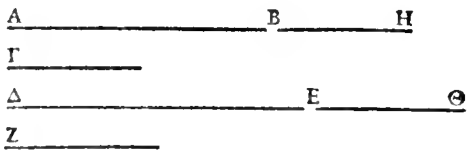
comme K est à M. Mais on a démontré que H est à Θ comme M est à N; donc, puisque l'on a trois grandeurs H, Θ, Λ, et d'autres grandeurs K, M, N égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et que leur proportion est troublée; si, par égalité, H surpasse Λ, K surpasse N; si H est égal à Λ, K est égal à N; et si H est plus petit que Λ, K est plus petit que N (21. 5). Mais H, K sont des équimultiples de A et de Δ, et Λ, N des équimultiples de Γ et de Z; donc A est à Γ comme Δ est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la cinquième a avec la seconde la même raison que la sixième avec la quatrième, la somme de la première et de la cinquième aura la même raison avec la seconde que la somme de la troisième et de la sixième avec la quatrième.

Πρῶτον μὲν[2] γὰρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔE πρὸς τέταρτον τὸ Z· ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ EΘ πρὸς τέταρτον τὸ Z· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν[3] πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Z.

Prima quidem enim AB ad secundam Γ eamdem habeat rationem quam tertia ΔE ad quartam Z; habeat vero et quinta BH ad secundam Γ eamdem rationem quam sexta EΘ ad quartam Z; dico et simul sumptas primam et quintam AH ad secundam Γ eamdem habituras esse rationem quam tertia et sexta ΔΘ ad quartam Z.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ EΘ πρὸς τὸ Z· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ EΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔE πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ EΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ ΔE πρὸς τὸ EΘ. Καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς[4] τὸ AH πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘE. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ EΘ πρὸς τὸ Z· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Z. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim est ut BH ad Γ ita EΘ ad Z; per inversionem igitur ut Γ ad BH ita Z ad EΘ. Et quoniam est ut AB ad Γ ita ΔE ad Z, ut autem Γ ad BH ita Z ad EΘ; ex æquo igitur est ut AB ad BH ita ΔE ad EΘ. Et quoniam divisæ magnitudines proportionales sunt, et compositæ proportionales erunt; ut igitur AH ad BH ita ΔΘ ad ΘE. Est autem et ut BH ad Γ ita EΘ ad Z; ex æquo igitur est ut AH ad Γ ita ΔΘ ad Z. Si igitur prima, etc.

Que la première AB ait avec la seconde Γ la même raison que la troisième ΔE a avec la quatrième Z, et que la cinquième BH ait avec la seconde Γ la même raison que la sixième EΘ avec la quatrième Z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH aura avec la seconde Γ la même raison que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ a avec la quatrième Z.

Puisque BH est à Γ comme EΘ est à Z, par inversion, Γ est à BH comme Z est à EΘ (cor. 4. 5). Mais AB est à Γ comme ΔE est à Z, et Γ est à BH comme Z est à EΘ; donc, par égalité, AB est à BH comme ΔE est à EΘ (22. 5); donc, puisque ces grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles (18. 5); donc AH est à BH comme ΔΘ est à ΘE. Mais BH est à Γ comme EΘ est à Z; donc, par égalité, AH est à Γ comme ΔΘ est à Z (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

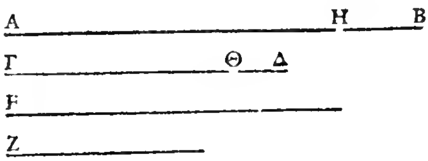
Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον[1] δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Εστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν[2] αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστι.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis majores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; sit autem maxima quidem ipsarum AB, minima vero Z; dico AB, Z ipsis ΓΔ, E majores esse.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Επεὶ οὖν[3] ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ[4]· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς

Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AH, ipsi vero Z æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem ipsa quidem E ipsi AH, ipsa vero Z ipsi ΓΘ; est igitur ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. Et quoniam est ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; et reliqua

PROPOSITION XXV.

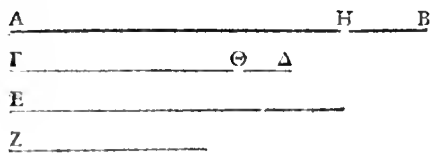
Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

Que les quatre grandeurs AB, ΓΔ, E, Z soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; que AB soit la plus grande, et Z la plus petite; je dis que les grandeurs AB, Z sont plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E.

Faisons AH égal à E, et ΓΘ égal à Z.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z, AB est à ΓΔ comme AH est à ΓΘ, et puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée AH est à la grandeur ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ,

igitur HB ad reliquam ΘΔ erit ut tota AB ad totam ΓΔ. Major autem AB ipsâ ΓΔ; major igitur et HB ipsâ ΘΔ. Et quoniam æqualis est AH quidem ipsi E, ΓΘ vero ipsi Z; ipsæ igitur AH, Z æquales sunt ipsis ΓΘ, E. Et quoniam si inæqualibus æqualia addantur, tota



τὰ ὅλα ἄνισα ἐστίν[5]· ἐὰν ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ μὲν[6] ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε. Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

inæqualia sunt; si igitur ipsis HB, ΘΔ inæqualibus existentibus, et majore ipsâ HB, ipsi quidem HB addantur AH, Z, ipsi vero ΘΔ addantur ΓΘ, E, fient AB, Z majores ipsis ΓΔ, E. Si igitur quatuor, etc.

retranchée ΓΘ, la grandeur restante HB sera à la grandeur restante ΘΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (19. 5). Mais AB est plus grand que ΓΔ; donc HB est plus grand que ΘΔ. Mais AH est égal à E, et ΓΘ à Z; donc les grandeurs AH, Z sont égales aux grandeurs ΓΘ, E. Mais si on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales, les grandeurs entières sont inégales; donc, puisque les grandeurs HB, ΘΔ sont inégales, et que HB est la plus grande, si l'on ajoute à HB les grandeurs AH, Z, et à ΘΔ les grandeurs ΓΘ, E, les grandeurs AB, Z seront plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E. Donc, etc.

FIN DU CINQUIÈME LIVRE.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

ΟΡΟΙ.

α'. Ομοία σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β'. Αντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγων[1] ὦσιν.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ et angulos æquales habent singulos singulis, et circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocæ autem figuræ sunt, quando in utrâque figurarum antecedentesque et consequentes rationum sunt.

LIVRE SIXIEME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ[2] ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὕψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη[3].

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην[1]· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκϐεϐλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ

3. Secundum extremam et mediam rationem recta secta esse dicitur, quando est ut tota ad majus segmentum ita majus ad minus.

4. Altitudo est omnis figuræ a vertice ad basim perpendicularis ducta.

PROPOSITIO I.

Triangula et parallelogramma, sub eâdem altitudine existentia, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, parallelogramma vero ΕΓ, ΓΖ, sub eâdem altitudine existentia, ipsâ ab Α ad ΒΔ perpendiculari ductâ; dico esse ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum, et ΕΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum.

Producatur enim ΒΔ ex utrâque parte ad Θ, Λ puncta, et ponantur ipsi quidem ΒΓ basi

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

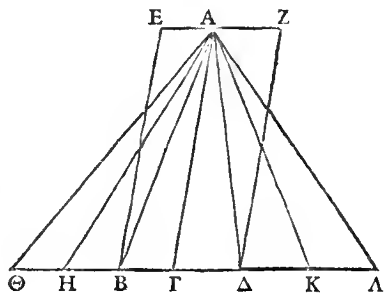
Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Λ; prenons tant βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν[2] αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ

æquales quotcunque ΒΗ, ΗΘ, ipsi vero ΓΔ basi æquales quotcunque ΔΚ, ΚΛ, et jungantur ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Et quoniam æquales sunt ipsæ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ inter se, æquales sunt et ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ triangula inter se; quam multiplex igitur est ΘΓ basis ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est et ΑΘΓ triangulum ipsius ΑΒΓ trianguli. Propter eadem uti-



αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΓΛ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσων, ἔλασσον. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ,

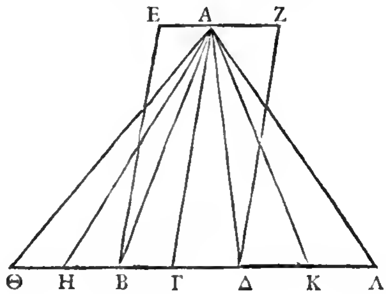
que quam multiplex est ΓΛ basis ipsius ΓΔ basis, tam multiplex est et ΑΛΓ triangulum ipsius ΑΓΔ trianguli; et si æqualis est ΘΓ basis ipsi ΓΛ basi, æquale est et ΑΘΓ triangulum ipsi ΑΛΓ triangulo; et si superat ΘΓ basis ipsam ΓΛ basim, superat et ΑΘΓ triangulum ipsum ΑΛΓ triangulum; et si minor, minus. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus,

de droites qu'on voudra ΒΗ, ΗΘ, égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. 1); donc le triangle ΑΘΓ est le même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base ΓΛ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. 1); et si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre

ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ

duabus quidem basibus ΒΓ, ΓΔ, duobus vero triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem ΒΓ et ΑΒΓ trianguli, ipsa ΘΓ basis et ΑΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ et trianguli ΑΓΔ alia utcunque æque multiplicia, ipsaque ΓΛ basis et ΑΛΓ triangulum. Et ostensum est si superat ΘΓ basis ipsam ΓΛ basim, superare et ΑΘΓ triangulum ipsum ΑΛΓ triangulum;



ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον[3]· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ

et si æqualis, æquale; et si minor, minus; est igitur ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ quidem duplum est ΕΓ parallelogrammum, ipsius vero ΑΓΔ trianguli duplum est ΖΓ parallelogrammum, partes autem eamdem habent rationem quam earum æque multiplices; est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad

grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équimultiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a demontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5).

Puisque le parallélogramme ΕΓ est double du triangle ΑΒΓ, que le parallélogramme ΖΓ est double aussi du triangle ΑΓΔ (prop. 41. 1), et que les parties τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Επεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν[4] ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον[5], ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον[6] οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸν ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον[7]. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis quidem ΒΓ ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum; ut autem ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum; et ut igitur ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Ergo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Εὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα[1], ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν[2].

PROPOSITIO II.

Si trianguli juxta unum laterum ducatur quædam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, ipsa sectiones conjungens recta juxta reliquum erit trianguli latus.

ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5)., le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ. Puisqu'on a démontré que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ, la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ (11. 5). Donc, etc.

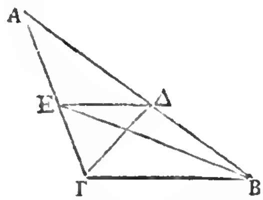
PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον δὴ[3] ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. Ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον[4] οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ[5] ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.



Trianguli enim ΑΒΓ parallela uni laterum ΒΓ ducatur ΔΕ; dico esse ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΔ.

Æquale utique est ΒΔΕ triangulum ipsi ΓΔΕ triangulo, in eâdem enim basi sunt ΔΕ et intra easdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. Aliud autem quoddam ΑΔΕ triangulum; æqualia vero ad idem eamdem habent rationem; est igitur ut ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum, ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum. Sed ut ΒΔΕ quidem triangulum ad ΑΔΕ ita ΒΔ ad ΔΑ; nam cum sub eâdem altitudine sint, sub ipsâ ab Ε ad ΑΒ perpendiculari ductâ, inter se sunt ut bases. Propter eadem utique ut ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ; et ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ.

Menons ΔΕ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ; je dis que ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ.

Joignons ΒΕ, ΓΔ.

Le triangle ΒΔΕ sera égal au triangle ΓΔΕ (37. 1), parce qu'ils ont la même base ΔΕ, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔΕ, ΒΓ. Mais ΑΔΕ est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ. Mais le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΒΔ est à ΔΑ; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Ε sur la droite ΑΒ, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΓΕ est à ΕΑ; donc ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ (11. 5).

Αλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον[6], ὡς δὲ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον προς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον[7]· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον[8] οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον[9]. Εκατέρον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον[10] τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ισον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἴσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ[11] ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Sed et ΑΒΓ trianguli latera ΑΒ, ΑΓ proportionaliter secta sint in Δ, Ε punctis, ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ, et jungatur ΔΕ; dico parallelam esse ΔΕ ipsi ΒΓ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ, sed ut ΒΔ quidem ad ΔΑ ita ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum, ut ΓΕ vero ad ΕΑ ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum; et ut igitur ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum. Utrumque igitur ΒΔΕ, ΓΔΕ triangulorum ad ΑΔΕ triangulum eamdem habet rationem. Æquale igitur est ΒΔΕ triangulum ipsi ΓΔΕ triangulo; et sunt super eâdem basi ΔΕ. Æqualia autem triangula et super eâdem basi constituta et intra easdem parallelas sunt. Parallela igitur est ΔΕ ipsi ΒΓ. Si igitur trianguli, etc.

Mais que les côtés ΑΒ, ΑΓ du triangle ΑΒΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, Ε, c'est-à-dire que ΒΔ soit à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, et joignons ΔΕ; je dis que ΔΕ est parallèle à ΒΓ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, que ΒΔ est à ΔΑ comme le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ (1. 6), et que ΓΕ est à ΕΑ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ, le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ (11. 5). Donc chacun des triangles ΒΔΕ, ΓΔΕ a la même raison avec le triangle ΑΔΕ. Donc le triangle ΒΔΕ est égal au triangle ΓΔΕ (9. 5); et ils sont sur la même base ΔΕ. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39. 1). Donc ΔΕ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

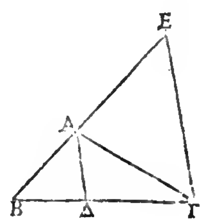
Εὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς[1] βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ[1] ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basim; basis segmenta eamdem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si basis segmenta eamdem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, ipsa a vertice ad sectionem ducta recta bifariam secat trianguli angulum.

Sit triangulum ΑΒΓ, et secetur ΒΑΓ angulus bifariam ab ipsâ ΑΔ rectâ; dico esse ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.



Ηχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Ducatur enim per Γ ipsi ΔΑ parallela ΓΕ, et producta ΒΑ conveniat cum ipsâ in Ε.

PROPOSITION III.

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle ΑΒΓ, que l'angle ΒΑΓ soit partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ; je dis que ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ.

Par le point Γ menons ΓΕ parallèle à ΔΑ (31. 1), et que ΒΑ prolongé rencontre ΓΕ au point Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν[3] ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνια ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία[1] τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. Ιση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα[5] ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Αλλὰ δὴ ἔστω ὡς[6] ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντον, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν[7] ἡ

Et quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit ΑΓ; ergo ΑΓΕ angulus æqualis est ipsi ΓΑΔ. Sed ΓΑΔ ipsi ΒΑΔ ponitur æqualis; et ΒΑΔ igitur ipsi ΑΓΕ est æqualis. Rursus quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit ΒΑΕ, exterior angulus ΒΑΔ æqualis est interiori ΑΕΓ. Ostensus autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΔ æqualis; et ΑΓΕ igitur angulus ipsi ΑΕΓ est æqualis; quare et latus ΑΕ lateri ΑΓ est æquale. Et quoniam trianguli ΒΓΕ juxta unum laterum ΕΓ ducta est ipsa ΑΔ; proportionaliter igitur est ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ. Æqualis autem est ΑΕ ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Sed et sit ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; et jungatur ΑΔ; dico bifariam sectum esse ΒΑΓ angulum ab ΑΔ rectâ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ, sed et ut ΒΔ ad ΔΓ ita est ΒΑ ad ΑΕ; trianguli enim ΒΓΕ juxta unum

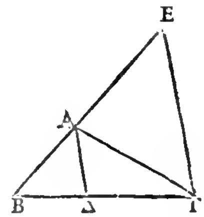
Puisque la droite ΑΓ tombe sur les parallèles ΑΔ, ΕΓ, l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΓΑΔ (29. 1). Mais l'angle ΓΑΔ est supposé égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΑΓΕ. De plus, puisque la droite ΒΑΕ tombe sur les parallèles ΑΔ, ΕΓ, l'angle extérieur ΒΑΔ est égal à l'angle intérieur ΑΕΓ (29. 1). Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΑΕΓ; donc le côté ΑΕ sera égal au côté ΑΓ (6. 1). Et puisqu'on a mené la droite ΑΔ parallèle à un des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6). Mais ΑΕ est égal à ΑΓ; donc ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ (7. 5).

Mais que ΒΔ soit à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ; joignons ΑΔ; je dis que l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ, et que ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6), car la droite ΑΔ est parallèle à un

ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται[8] ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση.

laterum ΕΓ ducta est ipsa ΑΔ; et ut igitur ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΑ ad ΑΕ; æqualis igitur ΑΓ ipsi ΑΕ; quare et angulus ΑΕΓ angulo ΑΓΕ est æqualis. Sed ΑΕΓ quidem exteriori ΒΑΔ æqualis, ipse vero et ΑΓΕ alterno ΓΑΔ est æqualis;



Αλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση[9]· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. Η ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα[10] τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

et ΒΑΔ igitur ipsi ΓΑΔ est æqualis. Ipse ΒΑΓ igitur angulus bifariam sectus est ab ΑΔ rectâ. Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί[1].

PROPOSITIO IV.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendunt latera.

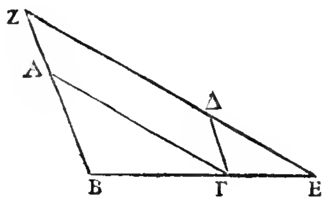
des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΑ est à ΑΓ comme ΒΑ est à ΑΕ; donc ΑΓ est égal à ΑΕ (9. 5); donc l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΑΓΕ (5. 1). Mais l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle extérieur ΒΑΔ (29. 1), et l'angle ΑΓΕ égal à l'angle alterne ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homologues.

Εστω[2] ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ[3]· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί[4].

Sint æquiangula triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, æqualem habentia ΒΑΓ quidem angulum ipsi ΓΔΕ, ipsum vero ΑΓΒ ipsi ΔΕΓ, et præterea ipsum ΑΒΓ ipsi ΔΓΕ; dico ΑΒΓ, ΔΓΕ triangulorum proportionalia esse latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendere latera.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ[5] ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Εκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ[6] ΑΒΓ, παραλλήλος ἄρα[7] ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ

Ponatur enim in directum ipsa ΒΓ ipsi ΓΕ. Et quoniam ΑΒΓ, ΑΓΒ anguli duobus rectis minores sunt, æqualis autem ΑΓΒ ipsi ΔΕΓ, ipsi igitur ΑΒΓ, ΔΕΓ duobus rectis minores sunt; ipsæ ΒΑ, ΕΔ igitur productæ convenient. Producantur, et conveniant in Ζ.

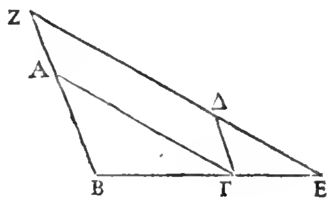
Et quoniam æqualis est ΔΓΕ angulus ipsi ΑΒΓ, parallela igitur est ΒΖ ipsi ΓΔ. Rursus, quoniam æqualis est ΑΓΒ ipsi ΔΕΓ, parallela est ΑΓ ipsi ΖΕ; parallelogrammum igitur est ΖΑΓΔ; æqualis igitur ΖΑ quidem ipsi ΔΓ, ipsa

Soient les triangles équiangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, ayant l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΓΔΕ, l'angle ΑΓΒ égal à l'angle ΔΕΓ, et l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΓΕ; je dis que dans les triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

Plaçons la droite ΒΓ dans la direction de ΓΕ. Et puisque les angles ΑΒΓ, ΑΓΒ sont plus petits que deux droits (17. 1), et que l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΕΓ, les angles ΑΒΓ, ΔΕΓ sont plus petits que deux droits; donc les droites ΒΑ, ΕΔ, étant prolongées, se rencontreront (not. com. 11); qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en Ζ.

Et puisque l'angle ΔΓΕ est égal à l'angle ΑΒΓ, la droite ΒΖ est parallèle à la droite ΓΔ (28. 1). De plus, puisque l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΕΓ, la droite ΑΓ est parallèle à ΖΕ; donc la figure ΖΑΓΔ est un paralléloτῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν⁹ τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλὰξ ἄρα⁹ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ[10] ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ[11] διίσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ προς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ τὰ ἑξῆς.

vero ΑΓ ipsi ΖΔ. Et quoniam trianguli ΖΒΕ juxta unum laterum ΖΕ ducta est ΑΓ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΓΔ; ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita ΒΓ ad ΓΕ, et alterne ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. Rursus, quoniam parallela est ΓΔ ipsi ΒΖ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. Æqualis autem ΖΔ ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad ΕΔ, alterne igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. Et quoniam ostensum est, ut ΑΒ quidem ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ; ut vero ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; et ex æquo igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ. Æquiangulorum igitur, etc.



gramme; donc ΖΑ est égal à ΔΓ, et ΑΓ égal à ΖΔ (34. 1). Et puisqu'un des côtés ΑΓ du triangle ΖΒΕ, est parallèle au côté ΖΕ, ΒΑ est à ΑΖ comme ΒΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΑΖ est égal à ΓΔ; donc ΒΑ est à ΓΔ comme ΒΓ est à ΓΕ (7. 5), et, par permutation (16. 5), ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ (16. 5). De plus, puisque ΓΔ est parallèle à ΒΖ, ΒΓ est à ΓΕ comme ΖΔ est à ΔΕ. Mais ΖΔ est égal à ΑΓ; donc ΒΓ est à ΓΕ comme ΑΓ est à ΕΔ, et, par permutation, ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ. Et puisqu'on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ, et que ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ, ΒΑ sera à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

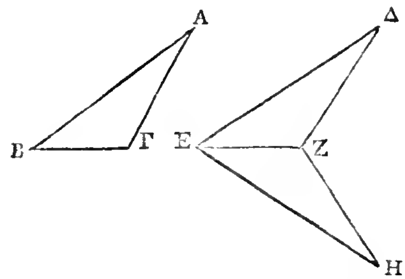
Εὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρας ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ latera proportionalia habentia, ut ΑΒ quidem ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, ut ΒΓ vero ad ΓΑ ita ΕΖ ad ΖΔ; et adhuc ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ; dico æquiangulum esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo, et æquales illa habitura esse angulos, quos homologa latera subtendunt, ipsum quidem ΑΒΓ ipsi ΔΕΖ, ipsum vero ΒΓΑ ipsi ΕΖΔ; et insuper ipsum ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.



PROPOSITION V.

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entr'eux.

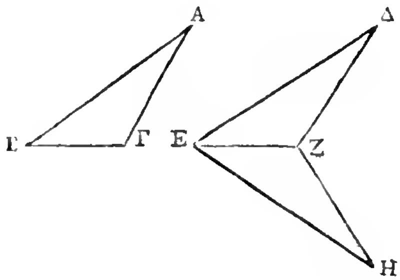
Soient deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les côtés proportionnels, que ΑΒ soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, que ΒΓ soit à ΓΑ comme ΕΖ est à ΖΔ, et que ΒΑ soit à ΑΓ comme ΕΔ est à ΔΖ; je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, et que les angles soutendus par les côtés homologues seront égaux, l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΕΖΔ, et enfin l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ZEH, τῇ δὲ ὑπὸ BΓA ἴση ἡ ὑπὸ EZH· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ H ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ EHZ[2]· τῶν ἄρα ABΓ, EHZ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως[3] ἡ HE πρὸς τὴν EZ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ· καὶ[4] ὡς ἄρα ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΔE, HE πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῇ HE. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔZ τῇ HZ ἐστὶν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔE τῇ EH, κοινὴ δὲ ἡ EZ, δύο δὴ αἱ ΔE,

Constituatur enim ad EZ rectam, et ad puncta in eâ E, Z, ipsi quidem ABΓ angulo æqualis ZEH, ipsi vero æqualis BΓA ipse EZH; reliquus igitur ad Δ reliquo ad H est æqualis.

Æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi EHZ; ipsorum igitur ABΓ, EHZ triangulorum proportionalia sunt latera, circum æquales angulos, et homologa æquales angulos latera subtendunt; est igitur ut AB ad BΓ ita HE ad EZ. Sed ut AB ad BΓ ita ponitur ΔE ad EZ; et ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ; utraque igitur ipsarum ΔE, HE ad EZ eamdem habet rationem; æqualis igitur est ΔE ipsi HE. Propter eadem utique et ΔZ ipsi HZ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΔE ipsi EH, communis autem EZ; duæ utique ΔE, EZ duabus HE, EZ



Construisons sur EZ et aux points E, Z l'angle ZEH égal à l'angle ABΓ et l'angle EZH égal à l'angle BΓA (23. 1); l'angle restant Δ sera égal à l'angle restant H (32. 1).

Les triangles ABΓ, EHZ seront équiangles; donc dans les triangles ABΓ, EHZ, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues (4. 6); donc AB est à BΓ comme HE est à EZ. Mais AB est supposé être à BΓ comme ΔE est à EZ; donc ΔE est à EZ comme HE est à EZ (11. 5); donc chacune des droites ΔE, HE a la même raison avec EZ; donc ΔE est égal à HE (9. 5). La droite ΔZ est égale à HZ, par la même raison. Donc, puisque ΔE est égal à EH, et que la droite EZ est

EZ δυσὶ ταῖς HE, EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ZΔ βάσει τῇ ZH ἐστὶν ἴση[5]· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ HEZ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ HEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία τῇ ὑπὸ HZE, ἡ δὲ ὑπὸ EΔZ τῇ ὑπὸ EHZ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ZEΔ τῇ ὑπὸ ZEH ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ HEZ τῇ ὑπὸ ABΓ ἐστὶν ἴση[6]· καὶ ἡ ὑπὸ ABΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν[7] ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ A πρὸς τῷ Δ[8]· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

æquales sunt, et basis ZΔ basi ZH est æqualis; angulus igitur ΔEZ angulo HEZ est æqualis. Et ΔEZ triangulum ipsi HEZ triangulo æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est et ΔZE quidem angulus ipsi HZE, ipse vero EΔZ ipsi EHZ. Et quoniam ipse quidem ZEΔ ipsi ZEH est æqualis, sed HEZ ipsi ABΓ est æqualis, et ABΓ igitur angulus ipsi ΔEZ est æqualis. Propter eadem utique ipse quidem ABΓ ipsi ΔZE est æqualis, et insuper ipse ad A ipsi ad Δ; æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

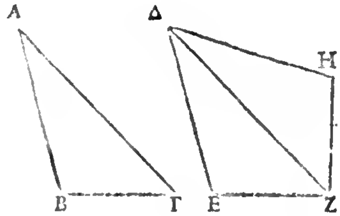
commune, les deux droites ΔE, EZ sont égales aux deux droites HE, EZ; mais la base ZΔ est égale à la base ZH; donc l'angle ΔEZ est égal à l'angle HEZ (8. 1); donc le triangle ΔEZ est égal au triangle HEZ, et les autres angles que soutendent des côtés égaux sont égaux; donc l'angle ΔZE est égal à l'angle HZE, et l'angle EΔZ égal à l'angle EHZ. Et puisque ZEΔ est égal à l'angle ZEH, et que l'angle HEZ est égal à l'angle ABΓ, l'angle ABΓ est égal à l'angle ΔEZ. Par la même raison, l'angle AΓB est égal à l'angle ΔZE, et l'angle en A égal à l'angle en Δ; donc les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰ ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum ΒΑΓ uni angulo ΕΔΖ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ; dico æquiangulum esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo, et æqualem habiturum esse ΑΒΓ quidem angulum ipsi ΔΕΖ, ipsum vero ΑΓΒ ipsi ΔΖΕ.



Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση[1] ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία[2] λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Υπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν

Constituatur enim ad ΔΖ quidem rectam, et ad puncta in ipsâ Δ, Ζ, alterutri ipsorum quidem ΒΑΓ, ΕΔΖ æqualis angulus ΖΔΗ, ipsi vero ΑΓΒ æqualis ipse ΔΖΗ.

Reliquus igitur ad Β angulus reliquo ad Η æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΗΔ ad ΔΖ. Ponitur autem et ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ; et ut igitur ΕΔ ad ΔΖ ita ΗΔ ad ΔΖ;

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ, et les côtés autour des angles égaux proportionnels, de manière que ΒΑ soit à ΑΓ comme ΕΔ est à ΔΖ; je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, et que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ égal à l'angle ΔΖΕ.

Sur la droite ΔΖ, et aux points Δ, Ζ de cette droite, construisons l'angle ΖΔΗ égal à l'un ou à l'autre des angles ΒΑΓ, ΕΔΖ, et l'angle ΔΖΗ égal à l'angle ΑΓΒ (23. 1).

L'angle restant en Β sera égal à l'angle restant en Η (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΗΖ sont équiangles; donc ΒΑ est à ΑΓ comme ΗΔ est à ΔΖ (4. 6). Mais on suppose que ΒΑ est à ΑΓ comme ΕΔ est à ΔΖ; donc ΕΔ est à ΔΖ comme ΗΔ

ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση[3]· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται[4], ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ[5]. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

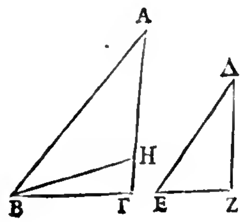
æqualis igitur ΕΔ ipsi ΔΗ, et communis ΔΖ; duæ igitur ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ æquales sunt, et angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ æqualis; basis igitur ΕΖ basi ΖΗ est æqualis, et ΔΕΖ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΔΖΗ quidem ipsi ΔΖΕ, ipse vero ΔΗΖ ipsi ΔΕΖ. Sed ipse ΔΖΗ ipsi ΑΓΒ est æqualis, et ΑΓΒ igitur ipsi ΔΖΕ est æqualis. Ponitur autem et ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ æqualis; et reliquus igitur ad Β reliquo ad Ε æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triangula, etc.

est à ΔΖ (11. 5); donc ΕΔ est égal à ΔΗ (9. 5); mais ΔΖ est commun; donc les deux droites ΕΔ, ΔΖ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΖ; mais l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΗΔΖ; donc la base ΕΖ est égale à la base ΖΗ (4. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΔΗΖ, et les autres angles seront égaux aux autres angles, savoir, ceux qui sont soutendus par des côtés égaux; donc l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΔΗΖ égal à l'angle ΔΕΖ. Mais l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΑΓΒ; donc l'angle ΑΓΒ est égal à ΔΖΕ. Mais l'angle ΒΑΓ est supposé égal à l'angle ΕΔΖ; donc l'angle restant en Β est égal à l'angle restant en Ε (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ

Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς[1] ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ



ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον[2], ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ

PROPOSITIO VII.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ, circa alios autem angulos ΑΒΓ, ΔΕΖ, latera proportionalia, ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, reliquorum vero ad Γ, Ζ primum utrumque simul minorem recto; dico æquiangulum esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ

PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant un angle égal à un angle, savoir, l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ, et les côtés autour des autres angles ΑΒΓ, ΔΕΖ proportionnels entr'eux, de manière que ΑΒ soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, et que chacun des autres angles en Γ, Ζ soit d'abord plus petit qu'un angle droit;

τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία[3] τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ως δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ ὑπόκειται οὕτως[4] ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ[5], ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ[6]· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστὶν ἴση[7]. Ελάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ[8] Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς[9] ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα

triangulo, et æqualem fore ΑΒΓ angulum ipsi ΔΕΖ, et reliquum videlicet ad Γ reliquo ad Ζ æqualem.

Si enim inæqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΔΕΖ, unus ipsorum major est. Sit major ΑΒΓ; et constituatur ad ΑΒ rectam et ad punctum in eâ Β, ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΑΒΗ.

Et quoniam æqualis est Α quidem angulus ipsi Δ, ipse vero ΑΒΗ angulus ipsi ΔΕΖ, reliquus igitur ΑΗΒ reliquo ΔΖΕ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; est igitur ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΖ. Ut autem ΔΕ ad ΕΖ ponitur ita ΑΒ ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΗ, ipsa igitur ΑΒ ad utramque ipsarum ΒΓ, ΒΗ eamdem habet rationem; æqualis igitur est ΒΓ ipsi ΒΗ; quare et angulus ad Γ angulo ΒΗΓ est æqualis. Minor autem recto ponitur ipse ad Γ; minor igitur est recto ipse ΒΗΓ, quare ipse ei deinceps angulus ΑΗΒ major est recto. Et ostensus est æqualis esse ipsi ad Ζ, et ipse ad Ζ igitur major est recto. Ponitur autem

je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle restant en Γ égal à l'angle restant en Ζ.

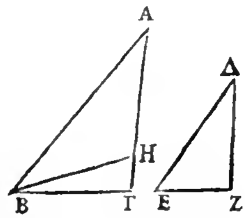
Car si l'angle ΑΒΓ n'est pas égal à l'angle ΔΕΖ, l'un des deux sera plus grand. Que l'angle ΑΒΓ soit le plus grand; et construisons sur la droite ΑΒ et au point Β de cette droite, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1).

Et puisque l'angle Α est égal à l'angle Δ, et l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ l'angle restant ΑΗΒ est égal à l'angle restant ΔΖΕ (32. 1); donc les triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ sont équiangles; donc ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΖ (4. 6). Mais ΔΕ est supposé être à ΕΖ comme ΑΒ est à ΒΓ (11. 5); donc ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΗ; donc la droite ΑΒ a la même raison avec chacune des droites ΒΓ, ΒΗ; donc ΒΓ est égal à ΒΗ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle ΒΗΓ (5. 1). Mais l'angle en Γ est supposé plus petit qu'un droit; donc l'angle ΒΗΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle de suite ΑΗΒ est plus grand qu'un droit (13. 1). Mais on a démontré qu'il est égal à l'angle Ζ; donc l'angle Ζ est plus grand qu'un μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Υπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Εστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Αλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι[10] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

minor recto, quod absurdum; non igitur inæqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΔΕΖ, æqualis igitur. Est autem et ipse ad Α æqualis ei ad Δ, et reliquus igitur ad Γ reliquo ad Ζ æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo.

Sed et rursus ponatur uterque ipsorum ad Γ, Ζ non minor recto; dico rursus et sic æquiangulum esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. Τριγώνου δὴ[11] τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Εστι

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus æqualem esse ΒΓ ipsi ΒΗ; quare et angulus ad Γ ipsi ΒΗΓ æqualis est. Non minor autem recto ad Γ; non minor igitur recto neque ipse ΒΗΓ. Trianguli igitur ΒΗΓ duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod est impossibile; non igitur rursus inæqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΔΕΖ; æqualis igitur.

droit. Mais on a supposé qu'il était plus petit qu'un droit, ce qui est absurde; donc les angles ΑΒΓ, ΔΕΖ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en Α est égal à l'angle en Δ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Ζ; donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles.

Mais que chacun des angles Γ, Ζ ne soit pas plus petit qu'un droit; je dis encore que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que ΒΓ est égal à ΒΗ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle ΒΗΓ. Mais l'angle Γ n'est pas plus petit qu'un droit; donc l'angle ΒΗΓ n'est pas plus petit qu'un droit. Donc deux angles du triangle ΒΗΓ ne sont pas plus petits que deux droits, ce qui est impossible (17. 1), donc les angles ΑΒΓ, ΔΕΖ ne sont pas encore δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Est autem et ipse ad A ipsi ad Δ æqualis, reliquus igitur ad Γ reliquo ad Z æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

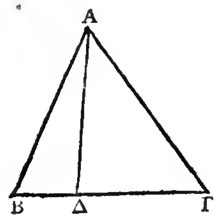
Εὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab recto angulo ad basim perpendicularis ducatur; ipsa ad perpendicularem triangula similia sunt et toti et inter se.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur ab A ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico simile esse utrumque ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΓ triangulorum toti ΑΒΓ et insuper inter se.



inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Z (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

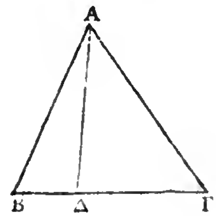
PROPOSITION VIII.

Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; du point A menons sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables au triangle entier ΑΒΓ et semblables entr'eux.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία[1] τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ[2], τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ[3] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι

Quoniam enim æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΑΔΒ, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis et ΑΒΓ et ΑΒΔ ipse ad Β; reliquus igitur ΑΓΒ reliquo ΒΑΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo. Est igitur ut ΒΓ subtendens rectum ipsius ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum rectum ipsius ΑΒΔ trianguli, ita eadem ΑΒ subtendens ipsum ad Γ angulum ipsius ΑΒΓ trianguli ad ΒΔ subtendentem angulum æqualem ipsi ad Γ, ipsum ΒΑΔ ipsius ΑΒΔ trianguli; et etiam ΑΓ ad ΑΔ subtendentem ipsum ad Β angulum, communem duobus triangulis; ipsum ΑΒΓ igitur triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo et æquiangulum est, et ipsa circa æquales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ trian-



Car puisque l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΑΔΒ, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en Β est commun aux deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ, l'angle restant ΑΓΒ est égal à l'angle restant ΒΑΔ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles. Donc le côté ΒΓ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΔ, comme le côté ΑΒ qui soutend l'angle en Γ du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΔ qui soutend un angle égal à l'angle Γ, c'est-à-dire l'angle ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ, et comme le côté ΑΓ est au côté ΑΔ qui soutend l'angle Β, commun aux deux triangles; donc les triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6); donc le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle ΑΔΓ est καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον[4]· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ[5].

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Επεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστὶν ἴση, ἀλλα μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Εστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν[6], ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνιαν, πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β· καὶ ἔτι ἡ ΒΑ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ[7]· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Εὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

gulo. Similiter utique ostendemus et ipsi ΑΔΓ triangulo simile esse ΑΒΓ triangulum; utrumque igitur ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΓ triangulorum simile est toti ΑΒΓ triangulo.

Dico etiam et inter se esse similia ΑΒΔ, ΑΔΓ triangula.

Quoniam enim rectus ΒΔΑ recto ΑΔΓ est æqualis, sed quidem et ipse ΒΑΔ ipsi ad Γ ostensus est æqualis, et reliquus igitur ad Β reliquo ΔΑΓ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΔ triangulum ipsi ΑΔΓ triangulo. Est igitur ut ΒΔ ipsius ΑΒΔ trianguli, subtendens ipsum ΒΑΔ, ad ΔΑ ipsius ΑΔΓ trianguli, subtendentem ipsum ad Γ angulum, æqualem ipsi ΒΑΔ, ita eadem ΑΔ ipsius ΑΒΔ trianguli, subtendens ipsum ad Β angulum, ad ΔΓ subtendentem ΔΑΓ angulum ipsius ΑΔΓ trianguli, æqualem ipsi ad Β, et etiam ΒΑ subtendens rectum ΑΔΒ, ad ΑΓ subtendentem rectum ΑΔΓ; simile igitur est ΑΒΔ triangulum ipsi ΑΔΓ triangulo. Si igitur in rectangulo, etc.

semblable au triangle ΑΒΓ; donc chacun des triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ est semblable au triangle entier ΑΒΓ.

Je dis aussi que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit ΒΔΑ est égal à l'angle droit ΑΔΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle en Γ, l'angle restant en Β est égal à l'angle restant ΔΑΓ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont équiangles. Donc le côté ΒΔ du triangle ΑΒΔ, qui soutend l'angle ΒΑΔ, est au côté ΔΑ du triangle ΑΔΓ, qui soutend l'angle Γ, égal à l'angle ΒΑΔ, comme le côté ΑΔ du triangle ΑΒΔ, qui soutend l'angle en Β, est au côté ΔΓ, qui soutend l'angle ΔΑΓ du triangle ΑΔΓ, égal à l'angle en Β; et comme le côté ΒΑ, qui soutend l'angle droit ΑΔΒ, est au côté ΑΓ qui soutend l'angle droit ΑΔΓ (4. 6); donc le triangle ΑΒΔ est semblable au triangle ΑΔΓ (déf. 1. 6). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν[8]· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in rectangulo triangulo a recto angulo ad basim perpendicularis ducta fuerit, ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basim et unum utriuslibet segmentorum, ipsum ad segmentum latus, medium proportionale esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Επιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ[1] διήχθω τὶς εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μέτα τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ

PROPOSITIO IX.

Ab datâ rectâ imperatam partem auferre.

Sit data recta AB; oportet igitur ab ipsâ AB imperatam partem auferre.

Imperetur et tertia; et ducatur quædam recta ΑΓ ab A, quemlibet angulum continens cum ipsâ AB; et sumatur quodlibet punctum Δ in ΑΓ, et ponantur ipsi ΑΔ æquales ΔΕ, ΕΓ;

COROLLAIRE.

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment contigu.

PROPOSITION IX.

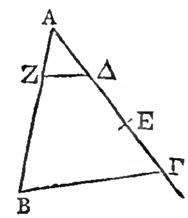
D'une droite donnée retrancher la partie demandée.

Soit AB la droite donnée; il faut de la droite AB retrancher la partie demandée.

Soit demandé le tiers; du point A menons une droite quelconque ΑΓ qui fasse un angle quelconque avec la droite AB; prenons dans ΑΓ un point quel-

ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ[2].

et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic ducatur ΔΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ juxta unum laterum ΒΓ ducta est ipsa ΖΔ; proportionaliter igitur est ut ΓΔ ad ΔΑ ita ΒΖ ad ΖΑ. Dupla autem ΓΔ ipsius ΔΑ; dupla igitur et ΒΖ ipsius ΖΑ; tripla igitur ΒΑ ipsius ΑΖ.

Ab ipsâ igitur datâ rectâ ΑΒ imperata tertia pars ablata est ipsa ΑΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ[1] τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam insectam datæ sectæ similiter secare.

conque Δ, et faisons les droites ΔΕ, ΕΓ égales à ΑΔ (3. 1); joignons ΒΓ, et par le point Δ menons ΔΖ parallèle à ΓΒ (31. 1).

Puisqu'on a mené ΖΔ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite ΓΔ est à ΔΑ comme ΒΖ est à ΖΑ (2. 6). Mais ΓΔ est double de ΔΑ; donc ΒΖ est double de ΖΑ; donc ΒΑ est triple de ΑΖ.

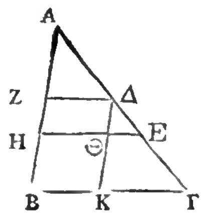
On a donc retranché de la droite donnée ΑΒ la troisième partie demandée ΑΖ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée, qui n'est point partagée de la même manière qu'une droite donnée est partagée.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ², κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

Sit data quidem recta insecta AB, ipsa vero secta AΓ in Δ, E punctis, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et jungatur ΓB, et per Δ, E ipsi BΓ parallelæ ducantur ΔZ, EH, per Δ autem ipsi AB parallela ducatur ΔΘK.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. Ισn δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Εδείχθη δὲ καὶ

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum ZΘ, ΘB; æqualis igitur ipsa quidem ΔΘ ipsi ZH, ipsa vero ΘK ipsi HB. Et quoniam trianguli ΔKΓ juxta unum laterum KΓ recta ducta est ΘE; proportionaliter igitur est ut ΓE ad EΔ ita KΘ ad ΘΔ. Æqualis autem ipsa quidem KΘ ipsi BH, ipsa vero ΘΔ ipsi HZ; est igitur ut ΓE ad EΔ ita BH ad HZ. Rursus, quoniam trianguli AHE juxta unum laterum EH ducta est ZΔ; proportionaliter igitur est ut EΔ ad ΔA ita HZ ad ZA. De-

Soit AB la droite donnée qui n'est point partagée, et AΓ une droite partagée aux points Δ, E; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprènent un angle quelconque; joignons BΓ, et par les points Δ, E, menons les droites ΔZ, EH parallèles à BΓ (31. 1), et par le point Δ menons ΔΘK parallèle à AB.

Les figures ZΘ, ΘB seront des parallélogrammes; donc ΔΘ est égal à ZH, et ΘK égal à HB (34. 1). Et puisqu'on a mené la droite ΘE parallèle à un des côtés KΓ du triangle ΔKΓ, la droite ΓE est à EΔ comme KΘ est à ΘΔ (2. 6). Mais KΘ est égal à BH, et ΘΔ est égal à HZ; donc ΓE est à EΔ comme BH est à HZ. De plus, puisqu'on a mené la droite ZΔ parallèle à un des côtés EH du triangle AHE, la droite EΔ est à ΔA comme ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἐστὶν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Η ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

monstratum autem est et ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΒΗ ad ΗΖ; est igitur ut ΓΕ quidem ad ΕΔ ita ΒΗ ad ΗΖ, ut vero ΕΔ ad ΔΑ ita ΗΖ ad ΖΑ.

Data igitur recta insecta ΑΒ datæ rectæ sectæ ΑΓ similiter secta est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

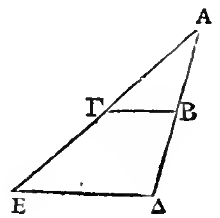
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι αἱ[1] ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν[2].

PROPOSTIO XI.

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ ΑΒ, ΑΓ, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant; oportet igitur ipsis ΑΒ, ΑΓ tertiam proportionalem invenire.



ΗΖ est à ΖΑ. Mais on a démontré que ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ; donc ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ, et ΕΔ est à ΔΑ comme ΗΖ est à ΖΑ.

Donc la droite donnée ΑΒ, qui n'est pas partagée, a été partagée de la même manière que la droite donnée ΑΓ. Ce qu'il fallait faire.

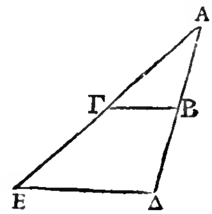
PROPOSITION XI.

Deux droites étant données, trouver une troisième proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΑΓ les deux droites données; posons-les de manière qu'elles comprènent un angle quelconque; il faut trouver une troisième proportionnelle aux droites ΑΒ, ΑΓ.

Εκϐεϐλήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ[3] ἤχθω ἡ ΔΕ.

Producantur enim ΑΒ, ΑΓ ad Δ, Ε puncta, et ponatur ipsi ΑΓ æqualis ΒΔ, et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic ducatur ΔΕ.



Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ιση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Quoniam igitur trianguli ΑΔΕ, juxta unum laterum ΔΕ ducta est ΒΓ, proportionaliter est ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΑΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΒΔ ipsi ΑΓ, est igitur ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρεται ἡ ΓΕ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Duabus igitur datis rectis ΑΒ, ΑΓ, tertia proportionalis inventa est ΓΕ. Quod oportebat facere.

Prolongeons les droites ΑΒ, ΑΓ vers les points Δ, Ε; faisons ΒΔ égal à ΑΓ; joignons ΒΓ, et par le point Δ menons ΔΕ parallèle à ΒΓ (31. 1).

Puisque la droite ΒΓ est parallèle à un des côtés ΔΕ du triangle ΑΔΕ, la droite ΑΒ est à ΒΔ comme ΑΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΒΔ est égal à ΑΓ; donc ΑΒ est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΕ.

Donc les deux droites ΑΒ, ΑΓ étant données, on a trouvé une troisième proportionnelle ΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

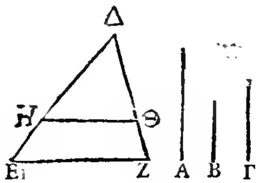
Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ· δεῖ δὴ τῶν A, B, Γ[1] τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ A, B, Γ; oportet igitur ipsis A, B, Γ quartam proportionalem invenire.



Εκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔE, ΔZ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν[2] τὴν ὑπὸ EΔZ· καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔH, τῇ δὲ B ἴση ἡ HE, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς HΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ E ἡ EZ.[1]

Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔEZ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν[3] τὴν EZ ἦκται ἡ HΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔH πρὸς τὴν HE, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘZ. Ιση δὲ ἡ μὲν ΔH τῇ A, ἡ δὲ HE τῇ B, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘZ.

Exponantur duæ rectæ ΔE, ΔZ, angulum continentes quemlibet EΔZ; et ponatur ipsi quidem A æqualis ΔH, ipsi vero B æqualis HE, et insuper ipsi Γ æqualis ΔΘ; et junctâ HΘ, parallela illi ducatur per E ipsa EZ.

Et quoniam trianguli ΔEZ juxta unum laterum EZ ducta est HΘ, est igitur ut ΔH ad HE ita ΔΘ ad ΘZ. Æqualis autem ΔH quidem ipsi A, ipsa vero HE ipsi B, ipsa autem ΔΘ ipsi Γ; est igitur ut A ad B ita Γ ad ΘZ.

PROPOSITION XII.

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient A, B, Γ les trois droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites A, B, Γ.

Soient les deux droites ΔE, ΔZ, comprenant un angle quelconque EΔZ; faisons la droite ΔH égale à A, la droite HE égale à B, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint HΘ, par le point E menons EZ parallèle à HΘ.

Puisque la droite HΘ est parallèle à un des côtés EZ du triangle ΔEZ, la droite ΔH est à HE comme ΔΘ est à ΘZ (2. 6). Mais ΔH est égal à A, la droite HE égale à B, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc A est à B comme Γ est à ΘZ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΘΖ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Tribus igitur datis rectis Α, Β, Γ, quarta proportionalis inventa est ΘΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

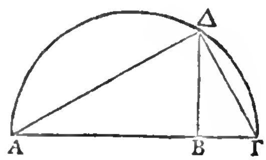
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; oportet igitur ipsis ΑΒ, ΒΓ mediam proportionalem invenire.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν

Ponantur in directum, et describatur super ipsâ ΑΓ semicirculus ΑΔΓ, et ducatur a Β puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΒΔ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ.

Et quoniam in semicirculo angulus est ΑΔΓ, rectus est. Et quoniam in rectangulo triangulo ΑΔΓ a recto angulo ad basim per-

Donc trois droites Α, Β, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘΖ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΒΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre ΑΒ, ΒΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite ΑΓ décrivons le demi-cercle ΑΔΓ; du point Β menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΔ, ΔΓ (11. 1).

Puisque l'angle ΑΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle ΑΔΓ on a mené de l'angle droit la droite βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΒΔ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

pendicularis ducta est ΔΒ; ipsa ΔΒ igitur inter basis segmenta ΑΒ, ΒΓ media proportionalis est.

Duabus igitur datis rectis ΑΒ, ΒΓ, media proportionalis inventa est ΒΔ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

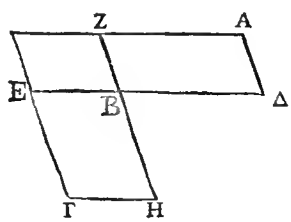
Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων[1] παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων[2], ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Εστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια[3] παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ,

PROPOSITIO XIV.

Æqualiumque et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

Sint æqualiaque et æquiangula parallelogramma ΑΒ, ΒΓ, æquales habentia ipsos ad Β angulos, et ponantur in directum ΔΒ, ΒΕ,



ΔΒ perpendiculaire à la base, la droite ΔΒ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΒ, ΒΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites ΑΒ, ΒΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle ΒΔ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIV.

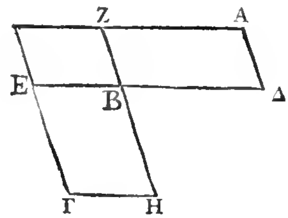
Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient ΑΒ, ΒΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον.

in directum igitur sunt et ZB, BH; dico ipsorum AB, BΓ reciproca esse latera circa æquales angulos, hoc est esse ut ΔB ad BE ita HB ad BZ.

Compleatur enim ZE parallelogrammum.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΔΒ, ΒΓ ἄρα[4] παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ[5] ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς

Et quoniam æquale est AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo, aliud autem quoddam ZE; est igitur ut AB ad ZE ita BΓ ad ZE. Sed ut AB quidem ad ZE ita ΔB ad BE, ut vero BΓ ad ZE ita HB ad BZ; et ut igitur ΔB ad BE ita HB ad BZ. Ipsorum ΔB, BΓ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos.

Sed et reciproca sint latera circa æquales angulos, et sit ut ΔB ad BE ita HB ad BZ; dico

égaux en B, plaçons BE dans la direction de ΔB, la droite BH sera dans la direction de ZB (14. 1); je dis que les côtés des parallélogrammes AB, BΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΔB est à BE comme HB est à BZ.

Achevons le parallélogramme ZE.

Puisque le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ, et que ZE est un autre parallélogramme, AB est à ZE comme BΓ est à ZE (7. 5). Mais AB est à ZE comme ΔB est à BE (1. 6); et BΓ est à ZE comme HB est à BZ; donc ΔB est à BE comme HB est à BZ (11. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΔB, BΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

Mais que les côtés adjacents aux angles égaux soient réciproquement pro-τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον[6]· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

æquale esse AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo.

Quoniam enim est ut ΔB ad BE ita HB ad BZ, sed ut ΔB quidem ad BE ita AB parallelogrammum ad ZE parallelogrammum, ut HB vero ad BZ ita BΓ parallelogrammum ad ZE parallelogrammum; et ut igitur AB ad ZE ita BΓ ad ZE; æquale igitur est AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo. Ergo æqualium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων[1], ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO XV.

Æqualium et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum, unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

portionnels, c'est-à-dire que ΔB soit à BE comme HB est à BZ; je dis que le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ.

Puisque ΔB est à BE comme HB est à BZ, que ΔB est à BE comme le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE (1. 6), et que HB est à BZ comme le parallélogramme BΓ est au parallélogramme ZE, AB est à ZE comme BΓ est à ZE (11. 5); donc le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XV.

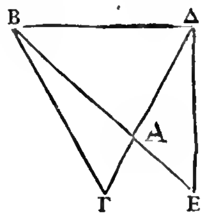
Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.

Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ[2] περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Sint æqualia triangula ΑΒΓ, ΑΔΕ, unum uni æqualem habentia angulum ΒΑΓ ipsi ΔΑΕ; dico ΑΒΓ, ΑΔΕ triangulorum reciproca esse latera, circa æquales angulos, hoc est esse ut ΓΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ.

Ponantur enim ita ut in directum sit ΓΑ ipsi ΑΔ; in directum igitur est et ΕΑ ipsi ΑΒ. Et jungatur ΒΔ.



Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ ΑΒΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον[3]. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ[4] πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων[5] ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Et quoniam æquale est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΔΕ triangulo, aliud autem ΑΒΔ; est igitur ut ΓΑΒ triangulum ad ΒΑΔ triangulum ita ΑΔΕ triangulum ad ΒΑΔ triangulum. Sed ut ΓΑΒ quidem ad ΒΑΔ ita ΓΑ ad ΑΔ, ut ΕΑΔ vero ad ΒΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ; et ut igitur ΓΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ; ipsorum ΑΒΓ, ΑΔΕ igitur triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos.

Soient les triangles égaux ΑΒΓ, ΑΔΕ, ayant un angle égal à un angle, l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΔΑΕ; je dis que les côtés des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΓΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ.

Plaçons ces triangles de manière que ΓΑ soit dans la direction de ΑΔ; la droite ΕΑ sera dans la direction de ΑΒ (14. 1). Joignons ΒΔ.

Puisque le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΔΕ, et que ΑΒΔ est un autre triangle, le triangle ΓΑΒ est au triangle ΒΑΔ comme le triangle ΑΔΕ est au triangle ΒΑΔ (7. 5). Mais le triangle ΓΑΒ est au triangle ΒΑΔ comme ΓΑ est à ΑΔ (1. 6), et le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ; donc ΓΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ (11. 5); donc les côtés des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Αλλα δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Επιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Sed utique reciproca sint latera ipsorum ΑΒΓ, ΑΔΕ triangulorum, et sit ut ΓΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΔΕ triangulo.

Junctâ enim rursus ΒΔ, quoniam est ut ΓΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ, sed ut ΓΑ quidem ad ΑΔ ita ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ triangulum, ut ΕΑ vero ad ΑΒ ita ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ triangulum; ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ ita ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ; utrumque igitur ipsorum ΑΒΓ, ΑΔΕ ad ΒΑΔ eamdem habet rationem; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΕΑΔ triangulo. Æqualium igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν[1]

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub mediis contento rectangulo; et si sub

Mais que les côtés des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ soient réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΓΑ soit à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΔΕ.

Joignons encore ΒΔ. Puisque ΓΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ, que ΓΑ est à ΑΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ (1. 6), et que ΕΑ est à ΑΒ comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ, le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ (11. 5); donc chacun des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ a la même raison avec le triangle ΒΑΔ; donc le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΕΑΔ (9. 5). Donc, etc.

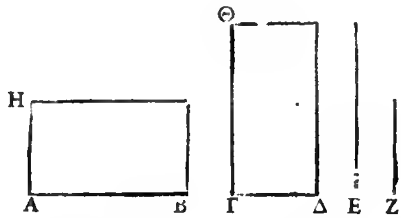
PROPOSITION XVI.

Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes; et si le τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Εστωσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ[2]· ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub extremis contento rectangulo, quatuor rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; dico sub AB, Z contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.



Ηχθωσαν γὰρ[3] ἀπὸ τῆς Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis AB, ΓΔ rectis ad rectos ipsæ AH, ΓΘ, et ponatur ipsi quidem Z æqualis AH, ipsi vero E æqualis ΓΘ, et compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων[4] ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ,

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem E quidem ipsi ΓΘ, ipsa vero Z ipsi AH; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH; ipsorum BH, ΔΘ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales an-

rectangle compris sous les extrêmes et égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

Soient AB, ΓΔ, E, Z quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; je dis que le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Des points A, Γ, et sur les droites AB, ΓΔ, menons les perpendiculaires AH, ΓΘ (11. 1); faisons AH égal à Z, et ΓΘ égal à E; et achevons les parallélogrammes BH, ΔΘ.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que E est égal à ΓΘ, et Z égal à AH, AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à AH (7. 5); donc les côtés des parallélogrammes BH, ΔΘ, placés autour des angles égaux, sont réciproquement proporαἱ[5] περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε[6]· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν[7] ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ[8]· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ[9]· καὶ ἔστιν[10] ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα

gulos. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est BH parallelogrammum ipsi ΔΘ parallelogrammo. Et est BH quidem sub AB, Z, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero ΔΘ ipsum sub ΓΔ, E, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur sub AB, Z contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.

Sed utique ipsum sub AB, Z contentum rectangulum æquale sit ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub AB, Z æquale est ipsi sub ΓΔ, E, et est ipsum quidem sub AB, Z ipsum BH, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero sub ΓΔ, E ipsum ΔΘ, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur BH æquale est ipsi ΔΘ; et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa

tionnels. Mais lorsque les côtés des parallélogrammes équiangles, placés autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, ces parallélogrammes sont égaux (14. 6); donc le parallélograme BH est égal au parallélogramme ΔΘ. Mais le parallélogramme BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z; et le parallélogramme ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Mais que le rectangle compris sous AB, Z soit égal au rectangle compris sous les droites ΓΔ, E; je dis que ces quatre droites sont proportionnelles, c'est-à-dire que AB est à ΓΔ comme E est à Z.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous AB, Z est égal au rectangle sous ΓΔ, E, que le rectangle BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z, et que le rectangle ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc BH est égal à ΔΘ; et ils sont équiangles. Mais les côtés des parallélogrammes égaux et équiangles, placés autour des angles sont égaux, sont réciproquement proporὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ. Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

æquales angulos; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΓΘ ad ΑΗ. Æqualis autem ΓΘ quidem ipsi Ε, ipsa vero ΑΗ ipsi Ζ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita Ε ad Ζ. Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν[1] τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ[2] τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως[3] ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Εὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale est ipsi ex mediâ quadrato; et si sub extremis contentum rectangulum æquale sit ipsi ex mediâ quadrato, tres rectæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico sub Α, Γ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex Β quadrato.

Ponatur ipsi Β æqualis Δ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Β ad Γ, æqualis autem Β ipsi Δ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Si autem quatuor rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale

tionnels (14. 6); donc ΑΒ est à ΓΔ comme ΓΘ est à ΑΗ; mais ΓΘ est égal à Ε, et ΑΗ à Ζ; donc ΑΒ est à ΓΔ comme Ε est à Ζ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au quarré de la moyenne; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au quarré de la moyenne, ces trois droites seront proportionnelles.

Soient Α, Β, Γ trois droites proportionnelles, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le rectangle compris sous Α, Γ est égal au quarré de Β.

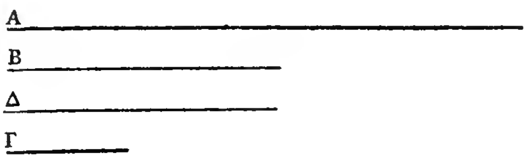
Faisons Δ égal à Β.

Puisque Α est à Β comme Β est à Γ, et que Β égal à Δ, Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Αλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστὶν[4], ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Αλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

est ipsi sub mediis contento rectangulo; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Sed ipsum sub Β, Δ ipsum ex Β est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ contentum rectangulum æquale est ipsi ex Β quadrato.

Sed et ipsum sub Α, Γ æquale sit ipsi ex Β; dico esse ut Α ad Β ita Β ad Γ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστὶν[5], ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. Εὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ιση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. Εὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub Α, Γ æquale est ipsi ex Β, sed ipsum ex Β ipsum sub Β, Δ est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Si autem ipsum sub extremis æquale est ipsi sub mediis, quatuor rectæ proportionales sunt; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Æqualis autem Β ipsi Δ; ut igitur Α ad Β ita Β ad Γ. Si igitur tres, etc.

les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Β, Δ. Mais le rectangle sous Β, Δ est égal au quarré de Β, car Β est égal à Δ; donc le rectangle compris sous Α, Γ est égal au quarré de Β.

Mais que le rectangle sous Α, Γ soit égal au quarré de Β; je dis que Α est à Β comme Β est à Γ.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous Α, Γ est égal au quarré de Β, et que le quarré de Β est le rectangle sous Β, Δ, car Β est égal à Δ, le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous les droites Β, Δ. Mais si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes, les quatre droites sont proportionnelles (16. 6); donc Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais Β est égal à Δ; donc Α est à Β comme Β est à Γ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

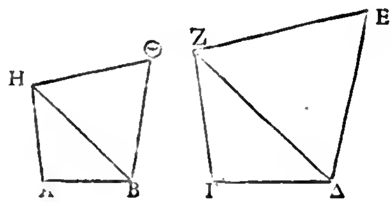
Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO XVIII.

Ex datâ rectâ ipsi dato rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Sit data quidem recta AB, datum autem rectilineum ΓE; oportet igitur ex AB rectâ ipsi ΓE rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.



Επεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ[1], τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση[2] ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπῇ[3] τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ

Jungatur ΔZ, et constituatur ad AB rectam et ad puncta in eâ A, B ipsi quidem ad Γ angulo æqualis ipsi sub HAB, ipsi vero sub ΓΔZ æqualis ipse sub ABH; reliquus igitur sub ΓZΔ reliquo sub AHB est æqualis; æquiangulum igitur est ZΓΔ triangulum ipsi HAB triangulo; proportionaliter igitur est ut ZΔ ad HB ita

PROPOSITION XVIII.

Sur une droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Soit AB la droite donnée, et ΓE la figure rectiligne donnée; il faut sur la droite AB décrire une figure rectiligne semblable à la figure rectiligne ΓE, et semblablement placée.

Joignons ΔZ, et sur la droite AB et aux points A, B de cette droite, faisons l'angle HAB égal à l'angle en Γ, et l'angle ABH égal à l'angle ΓΔZ (23. 1); l'angle restant ΓZΔ sera égal à l'angle restant AHB (32. 1); donc les triangles ZΓΔ, HAB sont équiangles; donc ZΔ est à HB comme ZΓ est à HA, et comme

ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἥ τε[4] ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῷ[5] πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ. Rursus, constituatur ad ΒΗ rectam et ad puucta in eâ Β, Η ipsi quidem ΔΖΕ angulo æqualis ΒΗΘ, ipsi vero ΖΔΕ æqualis ΗΒΘ; reliquus igitur ad Ε reliquo ad Θ est æqualis; æquiangulum igitur est ΖΔΕ triangulum ipsi ΗΒΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΔΖ ad ΗΒ ita ΖΕ ad ΗΘ, et ΕΔ ad ΘΒ. Ostensum est autem et ut ΖΔ ad ΗΒ et ita ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ; et ut igitur ΖΓ ad ΑΗ ita et ΓΔ ad ΑΒ et ΖΕ ad ΗΘ, et adhuc ΕΔ ad ΘΒ. Et quoniam æqualis est ipse quidem ΓΖΔ angulus ipsi ΑΗΒ, ipse vero ΔΖΕ ipsi ΒΗΘ; totus igitur ΓΖΕ toti ΑΗΘ est æqualis. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΒΘ est æqualis, est autem et ipse quidem ad Γ ipsi ad Α æqualis, ipse vero ad Ε ipsi ad Θ; æquiangulum igitur est ΑΘ ipsi ΓΕ, et circa æquales angulos cum ipso latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΘ rectilineum ipsi ΓΕ rectilineo.

ΓΔ est à ΑΒ (4. 6). De plus, construisons sur la droite ΒΗ, et aux points Β, Η de cette droite, l'angle ΒΗΘ égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΗΒΘ égal à l'angle ΖΔΕ; l'angle restant en Ε sera égal à l'angle restant en Θ; donc les triangles ΖΔΕ, ΗΒΘ sont équiangles; donc ΔΖ est à ΗΒ comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (4. 6). Mais on a démontré que ΖΔ est à ΗΒ comme ΖΓ est à ΗΑ, et comme ΓΔ est à ΑΒ; donc ΖΓ est à ΑΗ comme ΓΔ est à ΑΒ, comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (11. 5). Mais l'angle ΓΖΔ est égal à l'angle ΑΗΒ, et l'angle ΔΖΕ égal à l'angle ΒΗΘ; donc l'angle entier ΓΖΕ est égal à l'angle entier ΑΗΘ. Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΘ, l'angle en Γ égal à l'angle en Α, et l'angle en Ε égal à l'angle en Θ; donc les figures ΑΘ, ΓΕ sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels entr'eux; donc les deux figures ΑΘ, ΓΕ sont semblables (déf. 1. 6).

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

A datâ igitur rectâ AB dato rectilineo ΓE simileque et similiter positum rectilineum descriptum est AΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

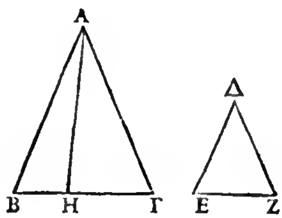
PROPOSITIO XIX.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ[1] Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Similia triangula inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similia triangula ABΓ, ΔEZ, æqualem habentia ipsum ad B angulum ipsi ad E, ut autem AB ad BΓ ita ΔE ad EZ, ita ut homologum sit BΓ ipsi EZ; dico ABΓ triangulum ad ΔEZ triangulum duplam rationem habere ejus quam BΓ ad EZ.



Donc, sur la droite donnée AB, on a décrit la figure rectiligne AΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΓE, et semblablement placée. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

Soient les triangles semblables ABΓ, ΔEZ, ayant l'angle en B égal à l'angle en E, et que AB soit à BΓ comme ΔE est à EZ, de manière que le côté BΓ soit l'homologue du côté EZ; je dis que le triangle ABΓ a avec le triangle ΔEZ une raison double de celle que BΓ a avec EZ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν[1] ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων[2] ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων[3], ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται[4] ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ

Sumatur enim ipsis ΒΓ, ΕΖ tertia proportionalis ΒΗ, ita ut sit ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; et jungatur ΗΑ.

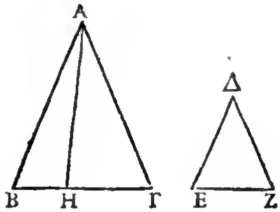
Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; alterne igitur est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. Sed ut ΒΓ ad ΕΖ ita est ΕΖ ad ΒΗ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΕ ita ΕΖ ad ΒΗ; ipsorum igitur ΑΒΗ, ΔΕΖ triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos. Quorum autem unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; si autem tres rectæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; ΒΓ igitur ad ΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΑΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Æquale autem ΑΒΗ

Prenons une troisième proportionnelle ΒΗ aux droites ΒΓ, ΕΖ, de manière que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; et joignons ΗΑ (11. 6).

Puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, par permutation, ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ (16. 6). Mais ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; donc ΑΒ est à ΔΕ comme ΕΖ est à ΒΗ (11. 5); donc les côtés des triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ, autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux, réciproquement proportionnels (15. 6); donc le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ. Et puisque ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ, et que lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle que la première a avec la seconde (10. 5), la droite ΒΓ a avec la droite ΒΗ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais ΒΓ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ (déf. 1. 6); donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΑΒΗ une raison double

ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ[6]· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ergo similia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν[7] τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον[8] πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ[9].

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si tres rectæ proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ triangulum ad ipsum ex secundâ simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum, hoc est ΔΕΖ.

de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ; donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ (7. 5). Donc, etc.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le triangle décrit sur la première est au triangle semblable décrit semblablement sur la seconde; puisqu'il a été démontré que ΓΒ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est est au triangle ΑΒΗ, c'est-à-dire ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ[1] πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Εστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

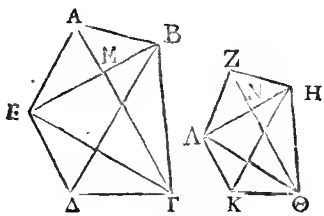
Επεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, et in æqualia multitudine et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Sint similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, homologum vero sit ΑΒ ipsi ΖΗ; dico ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ polygona et in similia triangula dividi et in æqualia multitudine et homologa totis, et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum duplam rationem habere ejus quam ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.



PROPOSITION XX.

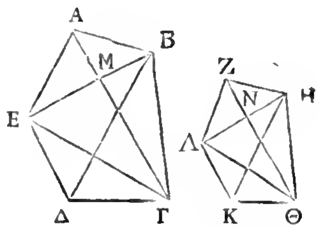
Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones ; et le polygone a avec le polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que ΑΒ soit l'homologue de ΖΗ; je dis que les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ peuvent être divisés en triangles semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones, et que le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que ΑΒ a avec ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Επεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Εστι δὲ καὶ ὅλη

Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum ipsi ΖΗΘΚΛ polygono, æqualis est ΒΑΕ angulus ipsi ΗΖΛ; et est ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΖΛ. Et quoniam duo triangula sunt ΑΒΕ, ΖΗΛ unum angulum uni angulo æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangulum igitur est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, quare et simile; æqualis igitur est ΑΒΕ angulus ipsi



ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ[2] τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γω-

ΖΗΛ. Est autem et totus ΑΒΓ toti ΖΗΘ æqualis, propter similitudinem polygonorum; reliquus igitur ΕΒΓ angulus reliquo ΛΗΘ est æqualis. Et quoniam propter similitudinem ipsorum ΑΒΕ, ΖΗΛ triangulorum, est ut ΕΒ ad ΒΑ ita ΛΗ ad ΗΖ, sed utique et propter similitudinem polygonorum, est ut ΑΒ ad ΒΓ, ita ΖΗ ad ΗΘ; ex æquo igitur est ut ΕΒ ad ΒΓ ita ΛΗ ad ΗΘ, et circa æquales angulos ΕΒΓ,

Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΛ, l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ; et ΒΑ est à ΑΕ comme ΖΗ est à ΖΛ. Mais les deux triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux proportionnels; donc les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont équiangles (6. 6), et par conséquent semblables (4. 6); donc l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle ΖΗΛ. Mais l'angle entier ΑΒΓ est égal à l'angle entier ΖΗΘ, à cause de la similitude des polygones; donc l'angle restant ΕΒΓ est égal à l'angle restant ΛΗΘ. Mais à cause de la similitude des triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ, ΕΒ est à ΒΑ comme ΛΗ est à ΗΖ, et à cause de la similitude des polygones, ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ; donc, par égalité, ΕΒ est à ΒΓ comme ΛΗ est à ΗΘ (22. 5);

νιας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν[3]· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον ἔτι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ[4]. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία[5] τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ,

ΛΗΘ latera proportionalia sunt; æquiangulum igitur est ΕΒΓ triangulum ipsi ΛΗΘ triangulo, quare et simile adhuc ΕΒΓ triangulum ipsi ΛΗΘ triangulo. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum simile est ipsi ΛΘΚ triangulo; ergo similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ et in similia triangula dividuntur et in æqualia multitudine.

Dico et homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sint ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, consequentia vero eorum ipsa ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur enim ΑΓ, ΖΘ.

Et quoniam propter similitudinem polygonorum æqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΖΗΘ, et est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; æquiangulum est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΗΘ triangulo; æqualis igitur est quidem ΒΑΓ angulus ipsi ΗΖΘ, ipse vero ΒΓΑ ipsi ΗΘΖ. Et quoniam æqualis est ΒΑΜ angulus ipsi ΗΖΝ, ostensum autem est et ΑΒΜ

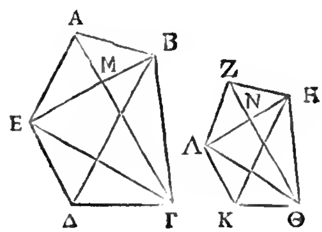
donc les côtés autour des angles égaux ΕΒΓ, ΛΗΘ sont proportionnels ; donc les triangles ΕΒΓ, ΛΗΘ sont équiangles (6. 6); donc le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΛΗΘ. Le triangle ΕΓΔ est semblable au triangle ΛΘΚ, par la même raison (4. 6); donc les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ sont divisés en triangles semblables et égaux en nombre.

Je dis de plus que ces triangles sont homologues aux polygones, c'est-à-dire que ces triangles sont proportionnels, que les antécédents sont ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, et que leurs conséquents sont ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ; et que de plus le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle qu'un côté a avec un côté, c'est-à-dire de celle que ΑΒ a avec ΖΗ.

Joignons ΑΓ, ΖΘ.

Puisqu'à cause de la similitude des polygones, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΖΗΘ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ, les triangles ΑΒΓ, ΖΗΘ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΗΖΘ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΗΘΖ. Et puisque l'angle ΒΑΜ est égal à l'angle ΗΖΝ, et qu'il a été ἐδείχθη[6] δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν[7]· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ διΐσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. Αλλ'

ipsi ΖΗΝ æqualis; et reliquus igitur ΑΜΒ reliquo ΖΝΗ æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΜ triangulum ipsi ΖΗΝ triangulo. Similiter utique ostendemus et ΒΜΓ triangulum æquiangulum esse ipsi ΗΝΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΑΜ quidem ad ΜΒ ita ΖΝ ad ΝΗ, ut vero ΒΜ ad ΜΓ ita ΗΝ ad ΝΘ; quare et ex æquo ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ. Sed ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΜ triangulum ad



ὡς μὲν[8] ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς ΕΜΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα[9] ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπομένα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. Αλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ προς ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ

ΜΒΓ, et ΑΜΕ ad ΕΜΓ, inter se enim sunt ut bases; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur ΑΜΒ triangulum ad ΒΜΓ ita ΑΒΕ ad ΓΒΕ. Sed ut ΑΜΒ ad ΒΜΓ ita ΑΜ ad ΜΓ; et ut igitur ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΕ triangulum ad ΕΒΓ triangulum. Propter eadem utique et ut ΖΝ ad ΝΘ ita ΖΗΛ triangulum ad ΗΛΘ triangulum. Et est

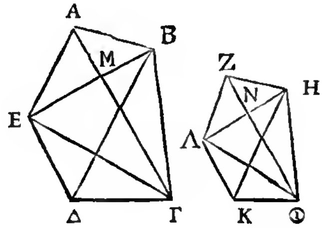
démontré que l'angle ΑΒΜ est égal à l'angle ΖΗΝ, l'angle restant ΑΜΒ est égal à l'angle restant ΖΝΗ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΜ, ΖΗΝ sont équiangles. Nous démontrerons semblablement que les deux triangles ΒΜΓ, ΗΝΘ sont équiangles; donc ΑΜ est à ΜΒ comme ΖΝ est à ΝΗ, et ΒΜ est à ΜΓ comme ΗΝ est à ΝΘ (4. 6); donc, par égalité, ΑΜ est à ΜΓ comme ΖΝ est à ΝΘ (22. 5). Mais ΑΜ est à ΜΓ comme le triangle ΑΒΜ est au triangle ΜΒΓ, et comme le triangle ΑΜΕ est au triangle ΕΜΓ, car ils sont entr'eux comme leurs bases (1. 6), et un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle ΑΜΒ est au triangle ΒΜΓ comme le triangle ΑΒΕ est au triangle ΓΒΕ. Mais ΑΜΒ est à ΒΜΓ comme ΑΜ est à ΜΓ; donc ΑΜ est à ΜΓ comme le triangle ΑΒΕ est au triangle ΕΒΓ (11. 5).

ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ[10] ΗΛΘ τρίγωνον. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΛ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον[11]. Ομοίως δὴ δείξομεν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον[12] πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον[13] οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. Αλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον[14] διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς

ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ; et ut igitur ΑΒΕ triangulum ad ΒΕΓ triangulum ita ΖΗΛ triangulum ad ΗΘΛ triangulum, et alterne ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ triangulum ita ΒΕΓ triangulum ad ΗΛΘ triangulum. Similiter utique ostendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, et ut ΒΕΓ triangulum ad ΗΛΘ triangulum ita ΕΓΔ triangulum ad ΛΘΚ triangulum. Et quoniam est ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ, et insuper ΕΓΔ ad ΛΘΚ; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ triangulum ita ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum. Sed ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΑΒ homologum latus ad ΖΗ homologum latus; Similia enim triangula in duplâ ratione sunt homologorum laterum; et ΑΒΓΔΕ igitur polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum duplam ra-

Par la même raison, ΖΝ est à ΝΘ comme le triangle ΖΗΛ est au triangle ΗΛΘ. Mais ΑΜ est à ΜΓ comme ΖΝ est à ΝΘ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΒΕΓ comme le triangle ΖΗΛ est au triangle ΗΘΛ (11. 5), et par permutation, le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΛΘ (16. 5). Nous démontrerons semblablement, après avoir joint ΒΔ, ΗΚ, que le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΛΘ comme le triangle ΕΓΔ est au triangle ΛΘΚ. Et puisque le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme ΕΒΓ est à ΛΗΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ, un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΛ. Mais le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΛ une raison double de celle que le côté homologue ΑΒ a avec le côté homologue ΖΗ; car les triangles semblables sont en raison double des côtés homologues; donc le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

tionem habet ejus quam AB homologum latus ad ZH homologum latus. Ergo similia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

Ὡσαύτως δὴ[15] καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ[16] καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Οπερ ἔδει δεῖξαι[17].

COROLLARIUM. I.

Similiter utique et in similibus quadrilateris ostendetur, ea in duplâ ratione esse homologorum laterum. Ostensum autem est et in triangulis; quare et universe similes rectilineæ figuræ inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum. Quod oportebat ostendere.

polygone ZHΘKΛ une raison double de celle que le côté homologue AB a avec le côté homologue ZH. Donc, etc.

COROLLAIRE I.

On démontrera de la même manière que les quadrilatères sont en raison double des côtés homologues ; mais cela a été démontré pour les triangles semblables (cor. 19. 6); donc généralement les figures rectilignes semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. Εχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ[18] τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν[19], τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

COROLLARIUM II.

Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem Ξ sumamus, AB ad Ξ duplam rationem habet ejus quam AB ad ZH. Habet autem et polygonum ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplam rationem ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est AB ad ZH; ostensum est autem hoc et in triangulis; quare et universe manifestum est, si tres rectæ proportionales sint, ut prima ad tertiam ita futuram esse ipsam a primâ figuram ad ipsam a secundâ, similem et similiter descriptam.

ΑΛΛΩΣ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

ALITER.

Ostendemus utique et aliter expeditius homologa triangula.

COROLLAIRE II.

Si nous prenons une troisième proportionnelle Ξ aux droites AB, ZH, la droite AB aura avec Ξ une raison double de celle que AB a avec ZH (déf. 10. 5). Mais le polygone a avec le polygone, et le quadrilatère avec le quadrilatère une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire, de celle que AB a avec ZH; et cela a été démontré pour les triangles; il est donc généralement évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et décrite semblablement sur la seconde.

AUTREMENT.

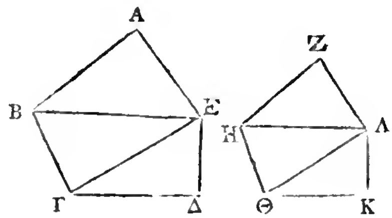
Nous démontrerons autrement et plus brièvement que les triangles sont homologues.

Εκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ.

Επεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον[20] οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

Exponantur enim rursus ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ polygona, et jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ; dico esse ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ et ΓΔΕ ad ΘΚΛ.

Quoniam enim simile est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, ΑΒΕ igitur triangulum ad ΖΗΛ duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΛ. Propter eadem utique et ΒΕΓ triangulum ad ΗΛΘ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΛ; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ triangulum ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ. Rursus, quoniam simile est ΕΒΓ triangulum ipsi ΛΗΘ triangulo; ΕΒΓ igitur ad ΛΗΘ duplam rationem habet ejus quam ΓΕ recta ad ΘΛ. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum ad ΛΘΚ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΓΕ ad ΘΛ; est igitur ut ΕΒΓ triangulum ad ΛΗΘ ita ΕΓΔ ad



Soient les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ; je dis que le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme ΕΒΓ est à ΛΗΘ, et comme ΓΔΕ est à ΘΚΛ.

Puisque les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont semblables, le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΛ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΛ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΒΕΓ a avec le triangle ΗΛΘ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΛ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme le triangle ΕΒΓ est au triangle ΛΗΘ (11. 5). De plus, puisque le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΛΗΘ, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΛΗΘ une raison double de celle que la droite ΓΕ a avec ΘΛ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΓΔ a avec le triangle ΛΘΚ une raison double de celle que ΓΕ a avec ΘΛ; donc le πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ[21]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΘΚ. Ostensum est autem et ut ΕΒΓ ad ΛΗΘ ita ΑΒΕ ad ΖΗΛ; et ut igitur ΑΒΕ ad ΖΗΛ ita ΒΕΓ ad ΗΛΘ et ΕΓΔ ad ΛΘΚ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

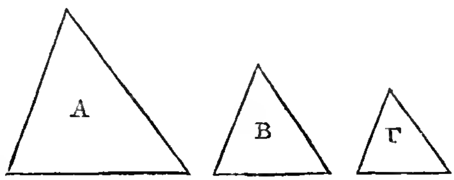
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.

PROPOSITIO XXI.

Ipsa eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia.

Sit enim utrumque ipsorum Α, Β rectilineorum ipsi Γ simile; dico et Α ipsi Β esse simile.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι[1] τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι

Quoniam enim est simile Α ipsi Γ, et æquiangulum est ipsi, et circa æquales angulos latera proportionalia habet. Rursus, quo-

triangle ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ (11. 5). Mais on a démontré que ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΑΒΕ est à ΖΗΛ; donc ΑΒΕ est à ΖΗΛ comme ΒΕΓ est à ΗΛΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ. Ce qu'il fallait démontrer.

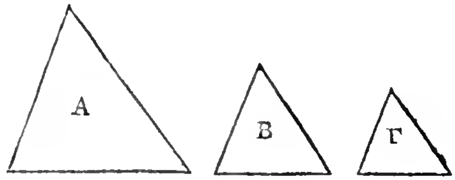
PROPOSITION XXI.

Les figures rectilignes semblables à une même figure sont semblables entr'elles.

Que chacune des figures rectilignes Α, Β soit semblable à la figure Γ; je dis que la figure Α est semblable à la figure Β.

Car, puisque la figure Α est semblable à la figure Γ, ces deux figures sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (déf. 1. 6).

τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τε ἐστὶ



καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει[2]. Ομοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

niam simile est B ipsi Γ, et æquiangulum est ipsi, et circa æquales angulos latera proportionalia habet; utrumque igitur ipsorum A, B ipsi Γ et æquiangulum est et circa æquales angulos latera proportionalia habet. Simile igitur est A ipsi B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ΄.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ proportionales sint, et ab ipsis rectilinea, similiaque et similiter descripta, proportionalia erunt; et si ab ipsis rectilinea similiaque et similiter descripta proportionalia sint, et ipsæ rectæ proportionales erunt.

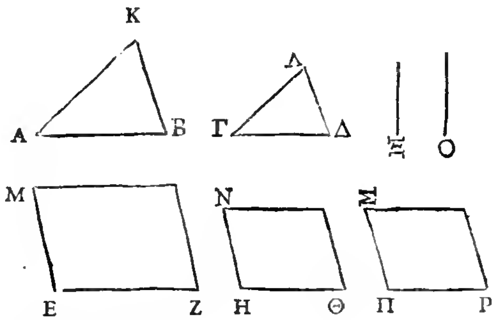
De plus, puisque la figure B est semblable à la figure Γ, ces deux figures sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels; donc chacune des figures A, B est équiangle avec la figure Γ, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels. Donc la figure A est semblable à la figure B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites, seront proportionnelles; et si des figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont proportionnelles, ces mêmes droites seront proportionnelles.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Sint quatuor rectæ proportionales ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ, et describantur ab ipsis quidem ΑΒ, ΓΔ similiaque et similiter posita rectilinea ΚΑΒ, ΛΓΔ, ab ipsis vero ΕΖ, ΗΘ similiaque et similiter posita rectilinea ΜΖ, ΝΘ; dico esse ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΒ

Sumatur enim ipsis quidem ΑΒ, ΓΔ tertia proportionalis Ξ, ipsis vero ΕΖ, ΗΘ tertia proportionalis Ο. Et quoniam est ut ΑΒ quidem ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ, ut ΓΔ vero ad Ξ ita ΗΘ ad Ο; ex æquo igitur est ut ΑΒ ad Ξ ita ΕΖ ad Ο. Sed ut ΑΒ quidem ad Ξ ita ΚΑΒ ad

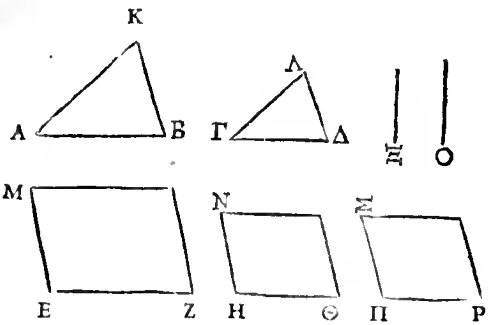
Soient ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ quatre droites proportionnelles, de manière que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ; soient décrites sur les droites ΑΒ, ΓΔ les figures rectilignes semblables et semblablement placées ΚΑΒ, ΛΓΔ, et sur les droites ΕΖ, ΗΘ, les figures semblables et semblablement placées ΜΖ, ΝΘ; je dis que ΚΑΒ est à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ.

Prenons une troisième proportionnelle Ξ aux droites ΑΒ, ΓΔ, et une troisième proportionnelle Ο aux droites ΕΖ, ΗΘ (11. 6). Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ, et que ΓΔ est à Ξ comme ΗΘ est à Ο, par égalité, ΑΒ est à Ξ comme ΕΖ est à Ο (22. 5). Mais ΑΒ est à Ξ comme ΚΑΒ est πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ[2] ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ[3] ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ[4] ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

ΛΓΔ, ut ΕΖ vero ad Ο ita ΜΖ ad ΝΘ; et ut igitur ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ.

Sed et sit ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ; dico esse et ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ.



Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω[5] ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως

Si enim non est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ, sit ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, et describatur a ΠΡ alterutri ipsorum ΜΖ, ΝΘ simileque et similiter positum rectilineum ΣΡ.

Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, et descripta sunt ab ipsis quidem ΑΒ, ΓΔ, similiaque et similiter posita ΚΑΒ, ΛΓΔ, ab ipsis vero ΕΖ, ΠΡ, similiaque et similiter posita

à ΛΓΔ (cor. 2. prop. 20. 6), et ΕΖ est à Ο comme ΜΖ est à ΝΘ; donc ΚΑΒ est à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ (11. 5).

Mais que ΚΑΒ soit à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ; je dis que ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ.

Car si ΑΒ n'est pas à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ, que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ (12. 6), et sur ΠΡ décrivons la figure rectiligne ΠΡ de manière qu'elle soit semblable à chacune des figures ΜΖ, ΝΘ, et semblablement placée (18. 6).

Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ, que les figures ΚΑΒ, ΛΓΔ décrites sur ΑΒ, ΓΔ sont semblables et semblablement placées, et que les figures κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. Υπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ[6]· τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ[7] τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. Εστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ[8] ΗΘ τῇ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΜΣ, ΣΡ; est igitur ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΣΡ. Ponitur autem et ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ; et ut igitur ΜΖ ad ΣΡ ita ΜΖ ad ΝΘ; ergo ΜΖ ad utrumque ipsorum ΝΘ, ΣΡ eamdem habet rationem; æquale igitur est ΝΘ ipsi ΣΡ. Est autem ipsi simile et similiter positum; æqualis igitur ΗΘ ipsi ΠΡ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, æqualis autem ΠΡ ipsi ΗΘ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ. Si igitur quatuor, etc.

ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Εστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

LEMMA.

Si autem rectilinea æqualia sint et similia, homologa ipsorum latera æqualia inter se esse, sic ostendemus.

Sint æqualia et similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ, et sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ; dico æqualem esse ΡΠ ipsi ΘΗ.

ΜΖ, ΣΡ décrites sur les droites ΕΖ, ΠΡ sont semblables et semblament placées, la figure ΚΑΒ est à la figure ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΣΡ. Mais on a supposé que ΚΑΒ est à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc ΜΖ est à ΣΡ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc la figure ΜΖ a la même raison avec chacune des figures ΝΘ, ΣΡ (11. 5); donc la figure ΝΘ est égale à la figure ΣΡ (9. 5). Mais elle lui est semblable, et elle est semblablement placée; donc ΗΘ est égal à ΠΡ (lem. suiv.). Et puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ, et que ΠΡ est égal à ΗΘ, ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ (7. 5). Donc, etc.

LEMME.

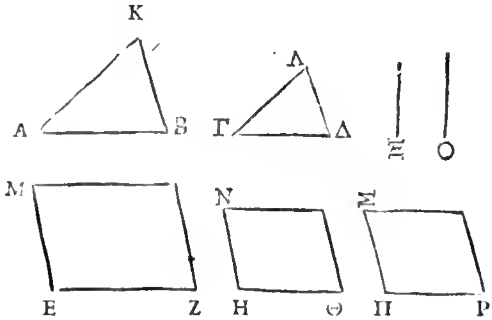
Si des figures rectilignes sont égales et semblables, nous démontrerons de cette manière que leurs côtés homologues sont égaux entr'eux.

Que les figures rectilignes ΝΘ, ΣΡ soient égales et semblables, et que ΗΘ soit à ΗΝ comme ΡΠ est à ΠΣ; je dis que ΡΠ est égal à ΘΗ.

44

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων

Si enim inæquales sint, una ipsarum major est. Sit major ΡΠ ipsâ ΘΗ. Et quoniam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ, et alterne ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. Major autem ΠΡ ipsâ ΘΗ; major igitur et ΠΣ ipsâ



ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΝ; quare et ΡΣ majus est ipso ΘΝ; sed et æquale, quod est impossibile; non igitur inæqualis est ΠΡ ipsi ΗΘ, æqualis igitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent compositam ex lateribus.

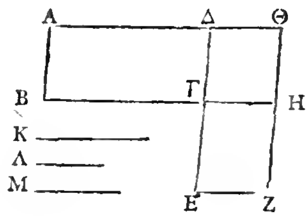
Car si ces droites sont inégales, une d'elles est plus grande. Que ΡΠ soit plus grand que ΘΗ. Puisque ΡΠ est à ΠΣ comme ΘΗ est à ΗΝ, par permutation, ΡΠ est à ΘΗ comme ΠΣ est à ΗΝ (16. 5). Mais ΠΡ est plus grand que ΘΗ; donc ΠΣ est plus grand que ΗΝ; donc la figure ΡΣ est plus grande que la figure ΘΝ (20. 6); mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc les droites ΠΡ, ΗΘ ne sont pas inégales; donc elles sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Εστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ'.

Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum ipsi ΕΓΗ; dico ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum rationem habere compositam ex lateribus, ex eâ quam habet ΒΓ ad ΓΗ et ex eâ quam habet ΔΓ ad ΓΕ.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσί τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Αλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς

Ponantur enim ita ut in directum sit ΒΓ ipsi ΓΗ; in directum igitur est et ΔΓ ipsi ΓΕ; et compleatur ΔΗ parallelogrammum, et exponatur quædam recta Κ, et fiat ut ΒΓ quidem ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut ΔΓ vero ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

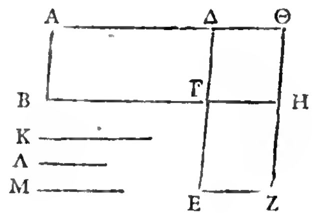
Rationes igitur et ipsius Κ ad Λ et ipsius Λ ad Μ eædem sunt quæ rationes laterum, et ipsius ΒΓ ad ΓΗ et ipsius ΔΓ ad ΓΕ. Sed ipsius Κ ad Μ ratio componitur et ex ratione ipsius Κ ad Λ et ex ratione ipsius Λ ad Μ;

Soient les parallélogrammes équiangles ΑΓ, ΓΖ, ayant l'angle ΒΓΔ égal à l'angle ΕΓΗ; je dis que le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés, c'est-à-dire de celle que ΒΓ a avec ΓΗ, et de celle que ΔΓ a avec ΓΕ.

Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite ΒΓ soit dans la direction de la droite ΓΗ; la droite ΔΓ sera dans la direction de ΓΕ (14. 1). Achevons le parallélogramme ΔΗ; prenons une droite quelconque Κ; faisons en sorte que ΒΓ soit à ΓΗ comme Κ est à Λ, et que ΔΓ soit à ΓΕ comme Λ est à Μ (12. 6).

Les raisons de Κ à Λ et de Λ à Μ seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est-à-dire que celle de ΒΓ à ΓΗ et que celle de ΔΓ à ΓΕ. Mais la raison de Κ à Μ est composée de celle de Κ à Λ, et de celle de Λ à τὴν Μ[2]· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ

quare et Κ ad Μ rationem habet compositam ex lateribus. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΓΗ ita ΑΓ parallelogrammum ad ΓΘ; sed ut ΒΓ ad ΓΗ ita Κ ad Λ; et ut igitur Κ ad Λ ita ΑΓ ad ΓΘ. Rursus, quoniam est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ΓΘ parallelogrammum ad ΓΖ; sed ut ΔΓ ad ΓΕ ita Λ ad Μ; et ut igitur Λ ad Μ ita ΓΘ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum.



οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον[3]· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον[4]. Η δὲ Κ πρὸς τὴν Μ

Quoniam igitur ostensum est ut Κ quidem ad Λ ita ΑΓ parallelogrammum ad ΓΘ parallelogrammum, ut Λ vero ad Μ ita ΓΘ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum; ex æquo igitur est ut Κ ad Μ ita ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum. At vero Κ ad Μ rationem habet compositam ex lateribus; et ΑΓ igitur ad ΓΖ rationem ha-

Μ; donc la droite Κ a avec la droite Μ une raison composée des côtés. Et puisque ΒΓ est à ΓΗ comme le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΓΘ (1. 6), et que ΒΓ est à ΓΗ comme Κ est à Λ, Κ est à Λ comme le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΓΘ (11. 5). De plus, puisque ΔΓ est à ΓΕ comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓΖ, et que ΔΓ est à ΓΕ comme Λ est à Μ (1. 6), Λ est à Μ comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓΖ (11. 5). Mais on a démontré que Κ est à Λ comme le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΓΘ, et Λ est à Μ comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓΖ; donc, par égalité, Κ est à Μ comme le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΓΖ (22. 5). Mais la λόγον ἔχει τὴν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια, καὶ τὰ ἑξῆς.

bet compositam ex lateribus. Ergo æquiangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

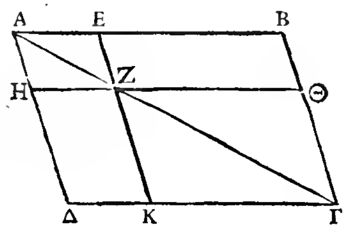
Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Εστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO XXIV.

Omnis parallelogrammi circa diametrum parallelogramma similia sunt et toti et inter se.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ejus ipsa ΑΓ, circa ΑΓ autem parallelogramma sint ΕΗ, ΘΚ; dico utrumque ipsorum ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum simile esse toti ΑΒΓΔ et inter se.



Επεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς

Quoniam enim trianguli ΑΒΓ juxta unum laterum ΒΓ ducta est ΕΖ, proportionaliter est

droite Κ a avec la droite Μ une raison composée des côtés; donc le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés. Donc, etc.

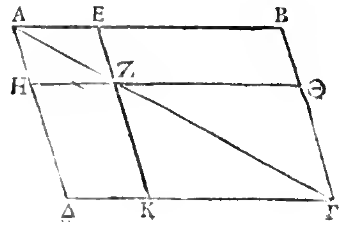
PROPOSITION XXIV.

Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes autour de la diagonale sont semblables au parallélogramme entier et semblables entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de la diagonale ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ; je dis que les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ sont semblables au parallélogramme entier ΑΒΓΔ, et semblables entr'eux.

Puisqu'on a mené ΕΖ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν[2] τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα[3] ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ[4] ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντεθέντι[5] ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν[6] ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς

ut BE ad EA ita ΓZ ad ZA. Rursus, quoniam trianguli ΑΓΔ juxta unum laterum ΓΔ ducta est ZH, proportionaliter igitur est ut ΓZ ad ZA ita ΔH ad HA. Sed ut ΓZ ad ZA ita ostensa est et BE ad EA; et ut igitur BE ad EA ita ΔH ad HA, et per compositionem, ut BA ad AE ita ΔA ad AH, et alterne ut BA ad AΔ ita EA ad AH; ipsorum igitur ABΓΔ, EH parallelogrammorum proportionalia sunt latera



τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ[7] παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ[8], καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ

circa communem angulum BAΔ. Et quoniam parallela est HZ ipsi ΔΓ, æqualis est ipse quidem AHZ angulus ipsi AΔΓ, ipse vero HZA ipsi ΔΓA, et communis duobus triangulis AΔΓ, AHZ ipse ΔAΓ angulus; æquiangulum igitur est AΔΓ triangulum ipsi AHZ triangulo. Propter eadem utique et AΓB triangulum æquiangulum est ipsi AZE triangulo; et totum igitur ABΓΔ parallelogrammum ipsi EH parallelo-

BE est à EA comme ΓZ est à ZA (2. 6). De plus, puisqu'on a mené ZH parallèle à un des côtés ΓΔ du triangle AΓΔ, la droite ΓZ est à ZA comme ΔH est à HA. Mais on a démontré que ΓZ est à ZA comme BE est à EA; donc BE est à EA comme ΔH est à HA (11. 5); et par composition, BA est à AE comme ΔA est à AH (18. 5), et par permutation, BA est à AΔ comme EA est à AH (16. 5); donc les côtés des parallélogrammes ABΓΔ, EH autour de l'angle commun BAΔ sont proportionnels. Et puisque HZ est parallèle à ΔΓ, l'angle AHZ est égal à l'angle AΔΓ (29. 1), et l'angle HZA égal à l'angle ΔΓA; mais l'angle ΔAΓ est commun aux deux triangles AΔΓ, AHZ; donc les triangles AΔΓ, AHZ sont équiτρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν[9]· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ως δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ[10] ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ[11] τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμῳ[12] ὅμοιόν ἐστι. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

grammo æquiangulum est; proportionaliter igitur est ut ΑΔ ad ΔΓ ita ΑΗ ad ΗΖ. Ut autem ΔΓ ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, ut ΑΓ vero ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ, et insuper ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΖΕ ad ΕΑ; et quoniam ostensum est ut ΔΓ quidem ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, ut ΑΓ vero ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ; ex æquo igitur est ut ΔΓ ad ΒΓ ita ΗΖ ad ΖΕ. Ipsorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ parallelogrammorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; simile igitur est ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΗ parallelogrammo. Propter eadem utique et ΑΒΓΔ parallelogrammum et ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est; utrumque igitur ipsorum ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum ipsi ΑΒΓΔ perallelogrammo simile est. Ipsa autem eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia; et ΕΗ igitur parallelogrammum ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est. Omnis igitur, etc.

angles. Les triangles ΑΓΒ, ΑΖΕ sont équiangles, par la même raison; donc le parallélogramme entier ΑΒΓΔ, et le parallélogramme ΕΗ sont équiangles; donc ΑΔ est à ΔΓ comme ΑΗ est à ΗΖ (4. 6). Mais ΔΓ est à ΓΑ comme ΗΖ est à ΖΑ, et ΑΓ est à ΓΒ comme ΑΖ est à ΖΕ, de plus, ΓΒ est à ΒΑ comme ΖΕ est à ΕΑ, et l'on a démontré que ΔΓ est à ΓΑ comme ΗΖ est à ΖΑ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme ΑΖ est à ΖΕ; donc, par égalité, ΔΓ est à ΒΓ comme ΗΖ est à ΖΕ (22. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ, autour des angles égaux, sont proportionnels; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΕΗ (déf. 1. 6). Le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΘΚ, par la même raison; donc chacun des parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ est semblable au parallélogramme ΑΒΓΔ. Mais les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont semblables entr'elles (21. 6); donc le parallélogramme ΕΗ est semblable au parallélogramme ΘΚ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

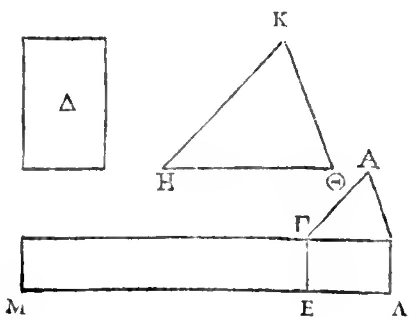
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Εστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ[1] ἴσον, τὸ Δ. δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, ipsum ΑΒΓ, cui vero oportet æquale ipsum Δ; oportet igitur ipsi quidem ΑΒΓ simile, ipsi vero Δ æquale idem constituere.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΑ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΑΕ

Applicetur enim ad ipsam quidem ΒΓ ipsi ΑΒΓ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕ, ad ipsam vero ΓΕ ipsi Δ æquale parallelogrammum ΓΜ in angulo ΖΓΕ, qui est æqualis ipsi ΓΒΑ; in directum igitur est ΒΓ quidem

PROPOSITION XXV.

Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Soit ΑΒΓ la figure rectiligne donnée, à laquelle il faut construire une figure semblable, et Δ la figure rectiligne à laquelle il faut la faire égale; il faut construire une figure qui soit semblable à la figure ΑΒΓ et égale à la figure Δ.

Construisons sur ΒΓ un parallélogramme ΒΕ qui soit égal au triangle ΑΒΓ (44 et 45. 1), et sur ΓΕ et dans l'angle ΖΓΕ qui est égal à l'angle ΓΒΑ, construisons un parallélogramme ΓΜ qui soit égal à la figure Δ; la droite ΒΓ sera dans la direction de ΓΖ, et ΑΕ dans la direction de ΕΜ (14. 1). Prenons τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε[2] καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν[3] ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον[4]. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ

ipsi ΓΖ, ipsa vero ΑΕ ipsi ΕΜ. Et sumatur inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, et describatur ex ΗΘ ipsi ΑΒΓ simileque et similiter positum ipsum ΚΗΘ.

Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ proportionales sint, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figura ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; est igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum. Sed et ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; et ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; alterne igitur ut ΑΒΓ triangulum ad ΒΕ parallelogrammum ita ΚΗΘ triangulum ad ΕΖ parallelogrammum. Æquale autem ΑΒΓ triangulum ipsi ΒΕ parallelogrammo; æquale igitur et ΚΗΘ triangulum ipsi ΕΖ parallelogrammo. Sed ΕΖ parallelogrammum ipsi Δ est æquale; et ΚΗΘ igitur ipsi Δ est æquale. Est autem ΚΗΘ et ipsi ΑΒΓ simile; ipsi igitur dato

une moyenne proportionnelle ΗΘ entre les droites ΒΓ, ΓΖ (13. 6), et sur ΗΘ construisons une figure ΚΗΘ semblable à la figure ΑΒΓ et semblablement placée (18. 6).

Puisque ΒΓ est à ΗΘ comme ΗΘ est à ΓΖ, et puisque, lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable construite sur la seconde, et semblablement placée (cor. 2. prop. 20. 6), la droite ΒΓ est à la droite ΓΖ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ. Mais ΒΓ est à ΓΖ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ (1. 6); donc le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ; donc, par permutation, le triangle ΑΒΓ est au parallélogramme ΒΕ comme le triangle ΚΗΘ est au parallélogramme ΕΖ(16. 5). Mais le triangle ΑΒΓ est égal au parallélogramme ΒΕ; donc le triangle ΚΗΘ est égal au parallélogramme ΕΖ. Mais le parallélogramme ΕΖ est égal à la figure Δ; donc le triangle ΚΗΘ est égal à la figure Δ.

τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ[5] ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

rectilineo ΑΒΓ simile, et alteri dato Δ æquale idem constitutum est ΚΗΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

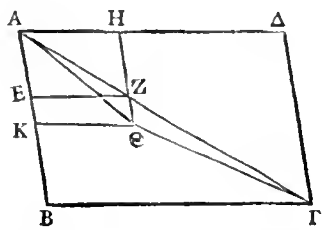
Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου γάρ[1] τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω[2] τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

PROPOSITIO XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, et simile toti et similiter positum, communem angulum habens cum ipso, circa eamdem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum auferatur ΑΕΖΗ, simile ipsi ΑΒΓΔ et similiter positum, communem angulum habens ΔΑΒ cum ipso; dico circa eamdem diametrum esse ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΑΕΖΗ.



Mais le triangle ΚΗΘ est semblable au triangle ΑΒΓ; on a donc construit la figure ΚΗΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΑΒΓ, et égale à une autre figure donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.

Que du parallélogramme ΑΒΓΔ on rétranche le parallélogramme ΑΕΖΗ, semblable au parallélogramme ΑΒΓΔ et semblablement placé, et ayant avec lui l'angle commun ΔΑΒ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est autour de la même diagonale que le parallélogramme ΑΕΖΗ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ[3], καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρα τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν[4] διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ[5]· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ, καὶ[6] ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα[7] πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ[8] ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Non enim, sed si possibile, sit ipsius diameter ΑΘΓ, et ejecta ΗΖ producatur ad Θ, et ducatur per Θ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ΘΚ.

Quoniam igitur circa eamdem diametrum est ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ, simile est ΑΒΓΔ ipsi ΚΗ; est igitur ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. Est autem et propter similitudinem ipsorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, et ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΕ; et ut igitur ΗΑ ad ΑΚ ita ΗΑ ad ΑΕ; ipsa ΗΑ igitur ad utramque ipsarum ΑΚ, ΑΕ eamdem habet rationem; æqualis igitur est ΑΕ ipsi ΑΚ, minor majori, quod est impossibile; non igitur non est circa eamdem diametrum ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ; circa eamdem igitur est diametrum ipsum ΑΒΓΔ parallelogrammum quam ΑΕΖΗ parallelogrammum. Si igitur a parallelogrammo, etc.

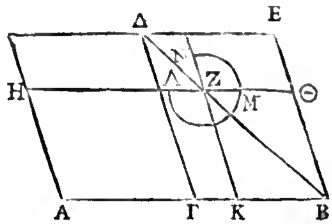
Que cela ne soit point, mais, si cela est possible, que ΑΘΓ soit sa diagonale; prolongeons ΗΖ vers Θ, et par le point Θ menons ΘΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ.

Puisque les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ sont autour de la même diagonale, le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΚΗ (24. 6); donc ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΚ (déf. 1. 6). Mais à cause de la similitude des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ, la droite ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΕ; donc ΗΑ est à ΑΚ comme ΗΑ est à ΑΕ (11. 5); donc ΗΑ a la même raison avec chacune des droites ΑΚ, ΑΕ; donc ΑΕ est égal à ΑΚ (9. 5), le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ ne peuvent point ne pas être autour de la même diagonale; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ sont autour de la même diagonale. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Εστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αὐτὴν[1] ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει



παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ[2], τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω ὅτι πάντων τῶν

PROPOSITIO XXVII.

Omnium ad eamdem rectam applicatorum parallelogrammorum et deficientium figuris parallelogrammis, similibusque et similiter positis ipsi ex dimidiâ descripto, maximum est ipsum ad dimidiam applicatum parallelogrammum, simile existens defectui.

Sit recta AB, et secetur bifariam in Γ, et applicetur ad eamdem AB rectam ipsum AΔ parallelogrammum deficiens figurâ parallelogrammâ ΓE, similique et similiter positâ ei ex dimidiâ AB descriptæ, hoc est ex ipsâ ΓB; dico omnium ad AB applicatorum parallelogram-

PROPOSITION XXVII.

De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite, et qui sont défaillants de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite, et semblablement placés, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut.

Soit la droite AB; que cettre droite soit coupée en deux parties égales au point Γ, et qu'à la droite AB soit appliqué le parallélogramme AΔ, défaillant du parallélogramme ΓE, semblable à celui qui est décrit sur la moitié de la droite AB, c'est-à-dire sur ΓB, et semblablement placé; je dis que de tous les paralléloπαρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις[3] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓE, μέγιστόν ἐστι τὸ AΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν AB εὐθεῖαν τὸ AZ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ KΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓE· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ AΔ τοῦ AZ.

Επεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓE παραλληλόγραμμον τῷ KΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. Ηχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔB, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓZ τῷ ZE, κοινὸν προσκείσθω τὸ KΘ[4]· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ KE ἐστὶν ἴσον. Αλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓH ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ AΓ τῇ ΓB ἴση ἐστίν[5]· καὶ τὸ HΓ ἄρα τῷ EK ἐστὶν ἴσον[6]. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓZ· ὅλον ἄρα τὸ AZ τῷ ΛMN γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε[7] τὸ ΓE παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ AΔ, τοῦ AZ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

morum, et deficientium figuris parallelogrammis similibusque et similiter positis ipsi ΓE, maximum esse AΔ. Applicetur enim ad AB rectam ipsum AZ parallelogrammum, deficiens figurâ parallelogrammâ KΘ, similique et similiter positâ ipsi ΓE; dico majus esse AΔ ipso AZ.

Quoniam simile enim est ΓE parallelogrammum ipsi KΘ parallelogrammo, circa eamdem sunt diametrum. Ducatur eorum diameter ΔB, det escribatur figura.

Quoniam igitur æquale est ΓZ ipsi ZE, commune addatur KΘ; totum igitur ΓΘ toti KE est æquale. Sed ΓΘ ipsi ΓH est æquale, quoniam et ipsa AΓ ipsi ΓB æqualis est; et HΓ igitur ipsi EK est æquale. Commune addatur ΓZ; totum igitur AZ ipsi AMN gnomoni est æquale; quare et ΓE parallelogrammum, hoc est AΔ, ipso AZ parallelogrammo majus est.

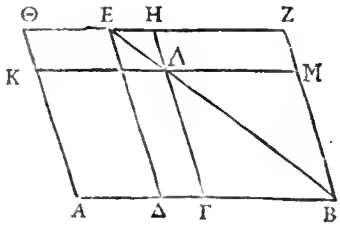
grammes qui sont appliqués à la droite AB, et qui sont défaillants de parallélogrammes semblables au parallélogramme ΓE, et semblablement placés, le plus graud est le parallélogramme AΔ. Car appliquons à la droite AB le parallélogramme AZ, défaillant du parallélogramme KΘ semblable au parallélogramme ΓE, et semblablement placé; je dis que le parallélogramme AΔ est plus grand que le parallélogramme AZ.

Car puisque le parallélogramme ΓE est semblable au parallélogramme KΘ, ces deux parallélogrammes sont placés autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΔB, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΓZ est égal au parallélogramme ZE (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun KΘ; le parallélogramme entier ΓΘ sera égal au parallélogramme entier KE. Mais ΓΘ est égal à ΓH (36. 1), parce que la droite AΓ est égale à la droite ΓB; donc HΓ est égal à EK. Ajoutons le parallélogramme commun ΓZ, le parallélogramme entier AZ sera égal au gnomon AMN; donc le parallélogramme ΓE, c'est-à-dire le parallélogramme AΔ, est plus grand que le parallélogramme AZ (36. 1).

Εστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔΖ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τῷ ΓΜ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς[8] ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΛ τοῦ ΑΕ.

Sit enim rursus AB secta bifariam in Γ, et applicatum ipsum AΛ, deficiens figurâ ΓM, et applicetur rursus ad AB ipsum AE parallelogrammum, deficiens ipso ΔZ, similique et similiter posito ipsi ΓM ex dimidiâ AB; dico majus esse ipsum ad dimidiam applicatum AΛ ipso AE.



Επεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΓΜ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΖ τοῦ ΚΕ. Ισον δὲ τὸ ΑΖ τῷ ΔΛ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΕΚ. Κοινὸν προσκείσθω[9] τὸ ΚΔ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΛ ὅλου τοῦ ΑΕ μεῖζόν ἐστιν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim simile est ΔZ ipsi ΓM, circa eamdem sunt diametrum; sit eorum diameter EB, et describatur figura.

Et quoniam æquale est AZ ipsi ΛΘ, quoniam et ipsa ZH ipsi HΘ; majus igitur AZ ipso KE. Æquale autem AZ ipsi ΔΛ; majus igitur et ΔΛ ipso EK. Commune addatur KΔ; totum igitur AΛ toto AE majus est. Omnium igitur, etc.

Coupons de nouveau la droite AB en deux parties égales au point Γ, et appliquons à cette droite le parallélogramme AΛ, défaillant du parallélogramme ΓM, et de plus appliquons à la droite AB le parallélogramme AE défaillant du parallélogramme ΔZ, semblable au parallélogramme décrit sur la moitié de AB, et semblablement placé; je dis que le parallélogramme AΛ qui est appliqué à la moitié de cette droite est plus grand que le parallélogramme AE.

Car, puisque les parallélogrammes ΔZ, ΓM sont semblables, ces deux parallélogrammes sont autour de la même diagonale (26. 6); soit EB leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque AZ est égal à AΘ (36. 1), car ZH est égal à HΘ, AZ est plus grand que KE. Mais AZ est égal à ΔΛ (43. 1); donc ΔΛ est plus grand que EK. Ajoutons le parallélogramme commun KΔ; le parallélogramme entier AΛ sera plus grand que le parallélogramme entier AE. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

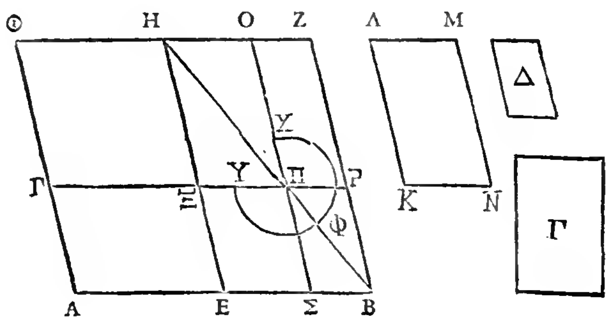
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ[1] τῷ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν[2].

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν

PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ simili ipsi dato; oportet utique datum rectilineum cui oportet æquale applicare, non majus esse ipso ad dimidiam applicato, similibus existentibus defectibus et ipso ad dimidiam et ipso cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta AB, datum vero Γ



εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

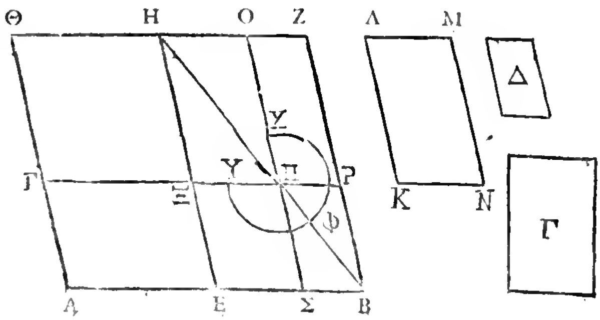
rectilineum, cui oportet æquale ad AB applicare, non majus existens eo ad dimidiam

PROPOSITION XXVIII.

A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défaillant d'un parallélogramme semblable étant semblables entr'eux.

Soit AB la droite donnée, et Γ la figure rectiligne à laquelle doit être égal le parallélogramme qu'il faut appliquer à la droite AB; que la figure recti-παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων[3], ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

applicato, similibus existentibus defectibus, ipsum autem Δ cui oportet simile deficere; oportet igitur ad datam rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, simili existente ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον· τὸ δὴ ΑΗ ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τὸν διορισμόν[1]. Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ, ἐλλεῖπον

Secetur AB bifariam in E puncto, et describatur ex ipsâ EB ipsi Δ simile et similiter positum EBZH, et compleatur AH parallelogrammum; AH utique vel æquale est ipsi Γ, vel majus ipso, ob determinationem. Et si quidem æquale est AH ipsi Γ, factum erit propositum; applicatum erit enim ad datam rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum AH, dificiens figurâ parallelogrammâ

ligne ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de AB, les défauts étant semblables, et soit Δ le parallélogramme auquel le défaut doit être semblable; il faut à la droite donnée AB appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons la droite AB en deux parties égales au point E (10. 1); sur EB décrivons le parallélogramme EBZH semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (18. 6), et terminons le parallélogramme AH; le parallélogramme AH sera égal à la figure Γ, ou plus grand, d'après ce qui a été dit. Si le parallélogramme AH est égal à la figure Γ, on aura fait ce qui était proposé; car on aura appliqué à la droite AB un parallélogramme AH semblable à la figure rectiligne εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΕΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν[4] ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον. Ἔστω οὖν[5] ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΛΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. Κείσθω τῇ μὲν[6] ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ[7]. Ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι[8]· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ

ΕΖ simili existenti ipsi Δ. Si autem non, majus est ΘΕ ipso Γ. Æquale autem ΘΕ ipsi ΗΒ; majus igitur et ΗΒ ipso Γ. Quo utique majus est ΗΒ ipso Γ, ei excessui æquale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constituatur ΚΛΜΝ. Sed Δ ipsi ΗΒ est simile; et ΚΜ igitur ipsi ΗΒ est simile. Sit igitur homologa quidem ΚΛ ipsi ΗΕ, ipsa vero ΛΜ ipsi ΗΖ. Et quoniam æquale est ΗΒ ipsis Γ, ΚΜ, majus igitur est ΗΒ ipso ΚΜ; major igitur est et ipsa quidem ΗΕ ipsâ ΛΚ, ipsa vero ΗΖ ipsâ ΛΜ. Ponatur ipsi quidem ΚΛ æqualis ΗΞ, ipsi vero ΛΜ æqualis ΗΘ, et compleatur ΞΗΟΠ parallelogrammum; æquale igitur et simile est ipsi ΚΜ ipsum ΗΠ. Sed ΚΜ ipsi ΗΒ simile est; et ΗΠ igitur ipsi ΗΒ simile est; circa eamdem igitur diametrum est ΗΠ circa quam ΗΒ. Sit eorum diameter ΗΠΒ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΒΗ ipsis Γ, ΚΜ,

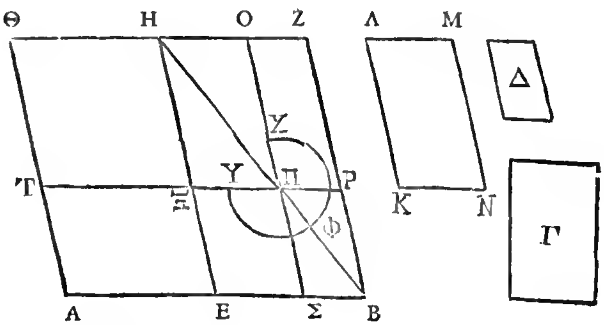
donnée Γ, et défaillant d'un parallélogramme ΕΖ semblable au parallélogramme Δ. Mais si cela n'est point, ΘΕ est plus grand que Γ. Mais ΘΕ est égal à ΗΒ; donc ΗΒ est plus grand que Γ. Construisons le parallélogramme ΚΛΜΝ égal à l'excès du parallélogramme ΗΒ sur la figure Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6). Mais le parallélogramme Δ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ. Que la droite ΚΛ soit l'homologue de la droite ΗΕ, et la droite ΛΜ l'homologue de la droite ΗΖ. Puisque le parallélogramme ΗΒ est égal aux deux figures Γ, ΚΜ, le parallélogramme ΗΒ est plus grand que le parallélogramme ΚΜ; donc ΗΕ est plus grand que ΑΚ, et ΗΖ plus grand que ΛΜ (20. 6). Faisons ΗΞ égal à ΚΛ, et ΗΟ égal à ΛΜ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΞΗΟΠ (31. 1); le parallélogramme ΗΠ sera égal et semblable au parallélogramme ΚΜ (24. 6). Mais le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΗΠ est semblable au parallélogramme ΗΒ (21. 6); donc les parallélogrammes ΗΠ, ΗΒ sont autour de la même diagonale (26. 6). Soit ΗΠΒ leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΒΗ est égal aux deux figures Γ, ΚΜ, et que

46

ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΥΦΧ γνώμονι ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

quorum ΗΠ ipsi ΚΜ est æquale; reliquus igitur ΥΦΧ gnomon reliquo Γ est æqualis. Et quoniam æquale est ΟΡ ipsi ΞΣ, commune apponatur ΠΒ; totum igitur ΟΒ toti ΞΒ æquale est. Sed ΞΒ ipsi ΤΕ est æquale, quoniam et latus ΑΕ lateri ΕΒ est æquale; et ΤΕ igitur ipsi ΟΒ est æquale. Commune apponatur ΞΣ; totum igitur ΤΣ toti ΥΦΧ gnomoni est æquale. Sed ΥΦΧ gnomon ipsi Γ ostensus est æqualis; et ΑΠ igitur ipsi Γ est æquale.



Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΣΤ, deficiens figurâ parallelogrammâ ΠΒ simili existenti ipsi Δ, quandoquidem ΠΒ ipsi ΗΠ simile est. Quod oportebat facere.

ΗΠ est égal à ΚΜ, le gnomon restant ΥΦΧ est égal à la figure restante Γ. Et puisque ΟΡ est égal à ΞΣ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun ΠΒ; le parallélogramme entier ΟΒ sera égal au parallélogramme entier ΞΒ. Mais ΞΒ est égal à ΤΕ (36. 1), parce que le côté ΑΕ est égal au côté ΕΒ; donc ΤΕ est égal à ΟΒ. Ajoutons le parallélogramme commun ΞΣ; le parallélogramme entier ΤΣ sera égal au gnomon entier ΥΦΧ. Mais on a démontré que le gnomon ΥΦΧ est égal à Γ; donc ΑΠ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite ΑΒ un parallélogramme ΣΤ, égal à la figure rectiligne donnée Γ, et défaillant d'un parallélogramme ΠΒ semblable à Δ, puisque ΠΒ est semblable à ΗΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθʹ.

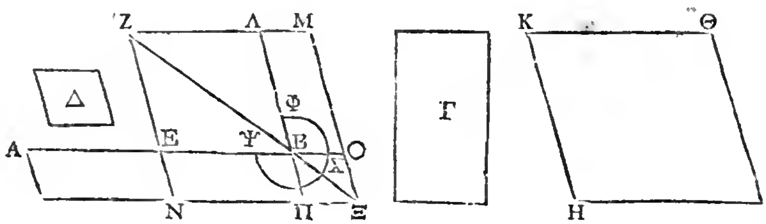
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili datæ.

Sit data quidem recta AB, datum vero rectilineum Γ, cui oportet æquale ad AB applicare, Δ autem cui oportet simile applicare; oportet igitur ad AB rectam ipsi Γ rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedeus figurâ parallelogrammâ simili ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφο-

Secetur AB bifariam in E, et describatur ex EB ipsi Δ simile et similiter positum parallelogrammum BZ, et utrisque simul quidem BZ,

PROPOSITION XXIX.

Appliquer à une droite donnée, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

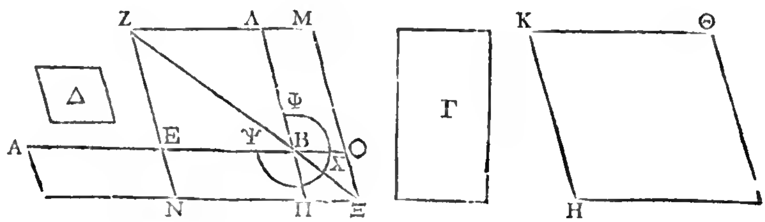
Soit AB la droite donnée, à laquelle il faut appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée Γ, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme Δ; il faut à la droite AB appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne Γ, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons AB en deux parties égales au point E (9. 1), sur la droite EB décrivons le parallélogramme BZ semblable au parallélogramme Δ et semblableτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ[1]. Ομόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Εκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Αλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ[2] ΕΛ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ηχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν[3] ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ

Γ æquale, ipsi vero Δ simile et similiter positum idem constituatur ΗΘ; simile igitur est ΗΘ ipsi ΕΛ. Homologa autem sit ΚΘ quidem ipsi ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsi ΖΕ. Et quoniam majus est ΗΘ ipso ΖΒ, major igitur est et ipsa quidem ΚΘ ipsâ ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsâ ΖΕ. Producantur ipsæ ΖΛ, ΖΕ, et ipsi quidem ΚΘ æqualis sit ΖΛΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ et compleatur ΜΝ; ipsum ΜΝ igitur ipsi ΗΘ æqualeque est et simile. Sed ΗΘ ipsi ΕΛ est simile; et ΜΝ igitur ipsi ΕΛ simile est; circa eamdem igitur diametrum est ipsum ΕΛ circa quam ΜΝ. Ducatur eorum diameter ΖΞ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ,



ment placé (18. 6), et construisons le parallélogramme ΗΘ égal aux deux figures ΕΛ, Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6); le parallélogramme ΗΘ sera semblable au parallélogramme ΕΛ. Que ΚΘ soit l'homologue de ΖΛ, et ΚΗ l'homologue de ΖΕ. Puisque ΗΘ est plus grand que ΖΒ, la droite ΚΘ est plus grande que ΖΛ, et la droite ΚΗ plus grande que ΖΕ. Prolongeons ΖΛ, ΖΕ, que ΖΛΜ soit égal à ΚΘ, et ΖΕΝ égal à ΚΗ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΜΝ. Le parallélogramme ΜΝ sera égal et semblable au parallélogramme ΗΘ. Mais le parallélogramme ΗΘ est semblable au parallélogramme ΕΛ; donc le parallélogramme ΜΝ est semblable au parallélogramme ΕΛ (21. 6); donc les deux parallélogrammes ΕΛ, ΜΝ sont autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΖΞ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΗΘ est égal aux figures ΕΛ, Γ, et que τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστί. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος[4]. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τὸ Γ ἴσος ἐστί· καὶ το ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ[5]. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sed ΗΘ ipsi ΜΝ æquale est; et ΜΝ igitur ipsis ΕΛ, Γ æquale est. Commune auferatur ΕΛ; reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΒ, æquale est et ΑΝ ipsi ΝΒ, hoc est ipsi ΛΟ. Commune apponatur ΕΞ; totum igitur ΑΞ æquale est ipsi ΦΧΨ gnomoni. Sed ΦΧΨ gnomon ipsi Γ æqualis est; et ΑΞ igitur ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figurâ parallelogrammâ ΠΟ simili existenti ipsi Δ, quoniam et ipsi ΕΛ est simile ΟΠ. Quod oportebat facere.

ΗΘ est égal à ΜΝ, le parallélogramme ΜΝ est égal aux figures ΕΛ, Γ. Retranchons le parallélogramme commun ΕΛ; le gnomon restant ΨΧΦ sera égal à Γ. Et puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, le parallélogramme ΑΝ est égal au parallélogramme ΝΒ (36. 1), c'est-à-dire au parallélogramme ΛΟ (43. 1). Ajoutons le parallélogramme commun ΕΞ, le parallélogramme entier ΑΞ sera égal au gnomon entier ΦΧΨ. Mais le gnomon ΦΧΨ est égal à Γ; donc le parallélogramme ΑΞ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite donnée ΑΒ un parallélogramme ΑΞ qui est égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui est excédent d'un parallélogramme ΠΟ semblable au parallélogramme Δ, parce le parallélogramme ΕΛ est semblable au parallélogramme ΟΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

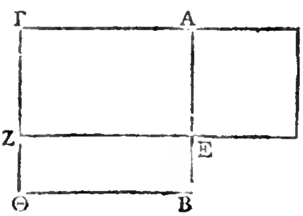
Ἀναγεγράφθω γὰρ[1] ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, ὑπερβάλλον εἴδει τὸ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam terminatam secundum extremam et mediam rationem secare.

Sit data recta terminata AB; oportet igitur AB rectam secundum extremam et mediam rationem secare.

Describatur enim ex AB quadratum BΓ, et applicetur ad AΓ ipsi BΓ æquale parallelogrammum ΓΔ, excedens figurâ AΔ simili ipsi BΓ.



Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ

Quadratum autem est BΓ; quadratum igitur est et AΔ. Et quoniam æquale est BΓ ipsi ΓΔ, commune auferatur ΓE; reliquum igitur BZ reliquo AΔ est æquale. Est autem ei et æquiangulum; ipsorum BZ, AΔ igitur reciproca

PROPOSITION XXX.

Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison.

Soit donnée la droite finie AB; il faut couper la droite AB en moyenne et extrême raison.

Sur la droite AB construisons le quarré BΓ (46. 1), et à la droite AΓ appliquons un parallélogramme ΓΔ, qui soit égal au quarré BΓ, et qui soit excédent d'un parallélogramme AΔ semblable à BΓ (29. 6).

Puisque BΓ est un quarré, AΔ est un quarré. Et puisque BΓ est égal à ΓΔ, retranchons la partie commune ΓE; le reste BZ sera égal au reste AΔ. Mais ces deux figures sont équiangles; donc les côtés des parallélogrammes BZ, AΔ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτέστι τῇ ΑΒ[2], ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ[3] μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ZE ad EΔ ita AE ad EB. Æqualis autem ipsa quidem ZE ipsi AΓ, hoc est ipsi AB, ipsa vero EΔ ipsi AE; est igitur ut BA ad AE ita AE ad EB. Major autem AB ipsâ AE; major igitur et AE ipsâ EB.

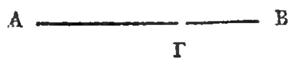
Ipsa igitur AB recta secundum extremam et mediam rationem secta est in E, et majus ejus segmentum est AE. Quod oportebat facere.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

ALITER.

Sit data recta AB; oportet igitur AB secundum extremam et mediam rationem secare.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ

Secetur enim AB in Γ, ita ut ipsum sub AB, BΓ æquale sit ipsi ex ipsâ AΓ quadrato.

Et quoniam ipsum sub AB, BΓ æquale est ipsi ex ΓA; est igitur ut AB ad AΓ ita AΓ ad ΓB;

autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ZE est à EΔ comme AE est à EB. Mais ZE est égal à AΓ (34. 1), c'est-à-dire à AB, et EΔ est égal à AE; donc BA est à AE comme AE est à EB. Mais AB est plus grand que AE; donc AE est plus grand que EB.

Donc la droite AB a été coupée au point E en moyenne et extrême raison, et AE est son plus grand segment. Ce qu'il fallait faire.

AUTREMENT.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB en moyenne et extrême raison.

Coupons AB au point Γ, de manière que le rectangle sous AB, BΓ soit égal au quarré de AΓ (11. 2).

Puisque le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré de ΓA, AB est à AΓ

ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Η ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

ipsa igitur AB secundum extremam et mediam rationem secta est in Γ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

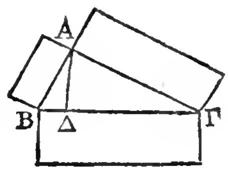
PROPOSITIO XXXI.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε[1] καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς

In rectangulis triangulis, figura ex latere rectangulum angulum subtendente æqualis est figuris ex lateribus rectum angulum subtendentibus, similibusque et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens BAΓ angulum; dico figuram ex BΓ



ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε[2] καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ηχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

æqualem esse figuris ex BA, AΓ, similibusque et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis AΔ.

comme AΓ est à ΓB (17. 6); donc la droite AB a été coupée en moyenne et extrême raison au point Γ (déf. 3. 6). Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprènent l'angle droit.

Soit le triangle rectangle ABΓ, ayant l'angle droit BAΓ; je dis que la figure construite sur BΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés BA, AΓ.

Menons la perpendiculaire AΔ.

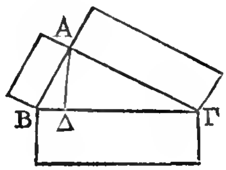
Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα[3] πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam in recto triangulo ΑΒΓ, ab ipso ad Α recto angulo super ΒΓ basim perpendicularis ducta est ΑΔ; ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur ad perpendicularem triangula similia sunt et toti ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. Et quoniam tres rectæ proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figurâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; ut igitur ΓΒ ad ΒΔ ita ex ipsâ ΓΒ figura ad ipsam ex ΒΑ, similem et similiter descriptam. Propter eadem utique et ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ipsâ ΒΓ figura, ad ipsam ex ΓΑ; quare et ut ΒΓ ad ipsas ΒΔ, ΔΓ ita ex ipsâ ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ, similes et similiter descriptas. Æqualis autem ΒΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ; æquale igitur et ex ipsâ ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

Puisque dans le triangle rectangle ΑΒΓ, on a mené de l'angle droit Α sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ, les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ, autour de la perpendiculaire, sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable, et semblablement construite sur la seconde (2. cor. 20. 6); donc ΓΒ est à ΒΔ comme la figure construite sur ΓΒ est à la figure semblable, et semblablement construite sur ΒΑ. Par la même raison, ΒΓ est à ΓΔ comme la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ; donc ΒΓ est à ΒΔ, ΔΓ comme la figure ΒΓ est aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ (24. 5). Mais la droite ΒΓ est égale aux droites ΒΔ, ΔΓ; donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Επεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ[5] τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος[6] πρός τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Εχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος[7] οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα.



ALITER.

Quoniam similes figuræ in duplâ ratione sunt homologorum laterum, ipsa ex ΒΓ igitur figura ad ipsam ex ΒΑ figuram duplam rationem habet ejus quam ΓΒ ad ΒΑ. Habet autem et ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum duplam rationem ejus quam ΓΒ ad ΒΑ; et ut igitur ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΒΑ figuram ita ex ΓΒ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum. Propter eadem utique et ut ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΓΑ figuram ita ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΓΑ quadratum; quare et ut ex ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ figuras ita ex ΒΓ quadratum ad ipsa ex ΒΑ, ΑΓ quadrata. Æquale autem ex ΒΓ quadratum ipsis ex ΒΑ, ΑΓ qua-

AUTREMENT.

Puisque les figures semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues (23. 6), la figure construite sur ΒΓ a avec la figure construite sur ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ. Mais le quarré de ΒΓ a avec le quarré de ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ (1. cor. 20. 6); donc la figure construite sur ΓΒ est à celle qui est construite sur ΒΑ comme le quarré de ΓΒ est au quarré de ΒΑ (11. 5). Par la même raison, la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ comme le quarré de ΒΓ est au quarré de ΓΑ; donc la figure construite sur ΒΓ est aux figures construites sur ΒΑ, ΑΓ comme le quarré de ΒΓ est aux quarrés des droites ΒΑ, Ισον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς[8] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Οπερ ἔδει δεῖξαι[9].

dratis; æqualis igitur et ex ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

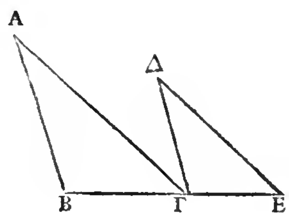
Εὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, duo latera ΒΑ, ΑΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔΕ proportionalia habentia, ut ΑΒ quidem ad ΑΓ ita ΔΓ



ΑΓ (24. 5). Mais le quarré de ΒΓ est égal aux quarrés des droites ΒΑ, ΑΓ (47. 1); donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les droites ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

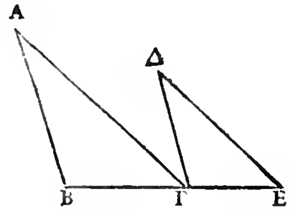
Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les côtés restants des triangles seront dans la même direction.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, ayant les deux côtés ΒΑ, ΑΓ proportionnels aux deux côtés ΓΔ, ΔΕ, de manière que ΑΒ soit à ΑΓ comme ΔΓ τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ[1] ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν

ad ΔΕ, parallela vero ΑΒ quidem ipsi ΔΓ, ipsa vero ΑΓ ipsi ΔΕ; dico in directum esse ipsam ΒΓ ipsi ΓΕ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΔΓ, et in ipsas incidit recta ΑΓ, et alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΔ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΓΔ est æqualis; quare et ΒΑΓ ipsi ΓΔΕ est æqualis. Et quoniam duo



ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ[2] ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ

triangula sunt ΑΒΓ, ΔΓΕ unum angulum ad Α uni angulo ad Δ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΓΕ triangulo; æqualis igitur ΑΒΓ angulus ipsi ΔΓΕ. Ostensus autem est et ΑΓΔ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ æqualis est. Communis

est à ΔΕ; et que ΑΒ soit parallèle à ΔΓ, et ΑΓ parallèle à ΔΕ; je dis que ΒΓ est dans la direction de ΓΕ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΔΓ, et que ΑΓ tombe sur ces deux droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΔ sont égaux entr'eux (29. 1.). Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΓΔ; donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΕ. Et puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ ont un angle en Α égal à un angle en Δ, et que les côtés qui comprènent ces angles égaux sont proportionnels, c'est-à-dire que ΒΑ est à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ, les triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΓΕ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle entier ΑΓΕ est égal aux deux ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί[3]· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

opponatur ΑΓΒ; ipsi igitur ΑΓΕ, ΑΓΒ ipsis ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ æquales sunt. Sed ipsi ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ipsi ΑΓΕ, ΑΓΒ igitur duobus rectis æquales sunt. Ad quamdam utique rectam ΑΓ, et ad punctum in eâ Γ, duæ rectæ ΒΓ, ΓΕ, non ad easdem partes positæ, ipsos deinceps angulos ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est ΒΓ ipsi ΓΕ. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι[1].

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς

PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis anguli eamdem rationem habent quam circumferentiæ in quas insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes; adhuc etiam et sectores quippe ad centra constituti.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et ad centra

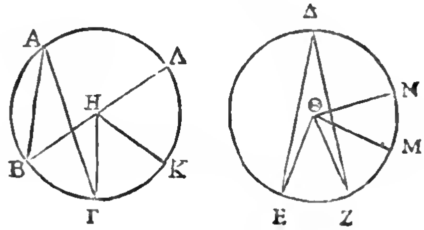
angles ΑΒΓ, ΒΑΓ. Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΕ, ΑΓΒ seront égaux aux angles ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ. Mais les angles ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ sont égaux à deux angles droits (32. 1); donc les angles ΑΓΕ, ΑΓΒ sont égaux à deux angles droits. Donc avec une droite quelconque ΑΓ, et au point Γ de cette droite, les deux droites ΒΓ, ΓΕ, placées de différents côtés, font les angles de suite ΑΓΕ, ΑΓΒ égaux à deux angles droits; donc la droite ΒΓ est dans la direction de ΓΕ (14. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprènent, soit que les angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ; que les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ soient placés à μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα[2].

quidem ipsorum Η, Θ anguli sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico esse ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΒΗΓ angulum ad ΕΘΖ, et ipsum ΒΑΓ ad ΕΔΖ; et adhuc ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.



Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν[3] αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν[4] αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. Διὰ τὰ

Ponantur enim ipsi ΒΓ quidem circumferentiæ æquales deinceps quotcumque ΓΚ, ΚΛ, ipsi vero ΕΖ circumferentiæ æquales quotcumque ΖΜ, ΜΝ, et jungantur ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Et quoniam igitur æquales sunt ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ circumferentiæ inter se, æquales sunt et ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ anguli inter se. Quam multiplex igitur est ΒΛ circumferentia ipsius ΒΓ, tam multiplex et est ΒΗΛ angulus ipsius ΒΗΓ. Propter

leurs centres Η, Θ, et que les angles ΒΑΓ, ΕΔΖ soient placés à leurs circonférences; je dis que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ, et comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

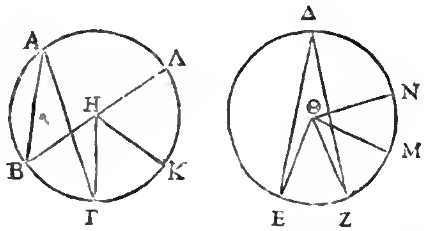
Faisons tant d'arcs de suite ΓΚ, ΚΛ, qu'on voudra égaux chacun à l'arc ΒΓ, et tant d'arcs qu'on voudra ΖΜ, ΜΝ, égaux chacun à l'arc ΕΖ, et joignons ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Puisque les arcs ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ sont égaux entr'eux, les angles ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ sont aussi égaux entr'eux (27. 3); donc l'angle ΒΗΛ est le même multiple de ΒΗΓ, que l'arc ΒΛ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, l'angle ΕΘΝ est αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. Εἰ ἄρα[5] ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας[6]· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας, ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλα-

eadem utique et quam multiplex est EN circumferentia ipsius EZ, tam multiplez est et EΘN angulus ipsius EΘZ. Si igitur æqualis est BΛ circumferentia ipsi EN circumferentiæ, æqualis est et angulus BHΛ ipsi EΘN; et si major est BΛ circumferentia ipsâ EN circumferentiâ, major est et BHΛ angulus ipso EΘN angulo; et si minor', minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BΓ, EZ, duobus vero angulis BHΓ, EΘZ, sumpta sunt ipsius quidem BΓ circumferentiæ, et ipsius BHΓ anguli æque multiplicia, et BΛ circumferentia et BHΛ angulus, ipsius vero EZ circumferentiæ et ipsius EΘZ anguli, et EN circumferentia et EΘN angulus; et ostensum est si superat BΛ circumferentia ipsam EN circumferentiam, superare et BHΛ angulum ipsum EΘN; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; est igitur ut BΓ circumferentia ad ipsam EZ ita BHΓ angulus ad ipsum EΘZ. Sed ut BHΓ angulus ad ipsum EΘZ ita ipse BAΓ ad ipsum EΔZ; duplus

le même multiple de EΘZ, que l'arc EN l'est de l'arc EZ. Donc si l'arc BΛ est égal à l'arc EN, l'angle BHΛ est égal à l'angle EΘN (27. 3); si l'arc BΛ est plus grand que l'angle EN, l'angle BHΛ est plus grand que l'angle EΘN; et si l'arc BΛ est plus petit que l'arc EN, l'angle BHΛ est plus petit que l'angle EΘN. Ayant donc quatre grandeurs, deux arcs BΓ, EZ, et deux angles BHΓ, EHZ, on a pris des équimultiples de l'arc BΓ et de l'angle BHΓ, savoir, l'arc BΛ et l'angle BHΛ; on a pris aussi des équimultiples de l'arc EZ et de l'angle EΘZ, savoir, l'arc EN et l'angle EΘN; et l'on a démontré que si l'arc BΛ surpasse l'arc EN, l'angle BHΛ surpasse l'angle EΘN; que si l'arc BΛ est égal à l'arc EN, l'angle BHΛ est égal à l'angle EΘN; que l'arc BΛ est plus petit que l'arc EN, l'angle BHΛ est plus petit que l'angle EΘN; donc l'arc BΓ est à l'arc EZ comme l'angle BHΓ est à l'angle EΘZ (déf. 6. 5). Mais l'angle BHΓ est à l'angle EΘZ comme l'angle BAΓ est à l'angle EΔZ (15. 5), car ils sont σίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ[8] ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

enim uterque utriusque ; et ut igitur ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita et ΒΗΓ angulus ad ipsum ΕΘΖ, et ipse ΒΑΓ ad ipsum ΕΔΖ.



Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

In æqualibus igitur circulis anguli eamdem habent rationem quam circumferentiæ in quas insistunt ; sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes. Quod oportebat ostendere.

Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Dico et ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, et sumptis in ΒΓ, ΓΚ circumferentiis punctis Ξ, Ο, jungantur et ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ,

Et quoniam duo ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ

doubles les uns des autres (2 o. 3) ; donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, et comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ.

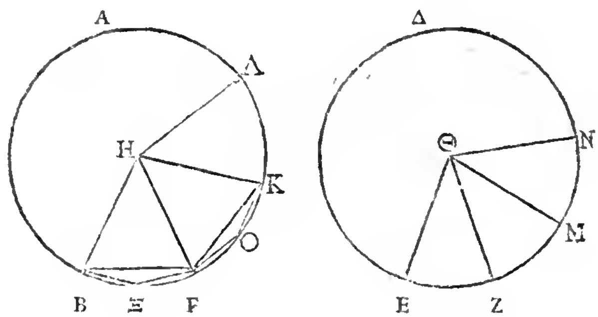
Donc, dans des cercles égaux, les angles sont proportionnels aux arcs, soit que ces angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences. Ce qu'il fallait démontrer.

Je dis de plus que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

Joignons ΒΓ, ΓΚ, et ayant pris sur les arcs ΒΓ, ΓΚ, les points Ξ, Ο, joignons ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Puisque les deux droites ΒΗ, ΗΓ sont égales aux deux droites ΓΗ, ΗΚ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ[9] καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ[10]· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ[11]

æquales sunt, et angulos æquales comprehendunt, et basis ΒΓ ipsi ΓΚ est æqualis; æquale igitur est et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ triangulo. Et quoniam æqualis est ΒΓ circumferentia ipsi ΓΚ circumferentiæ, et reliqua totius circuli circumferentia æqualis est reliquæ totius circuli circumferentiæ; quare et

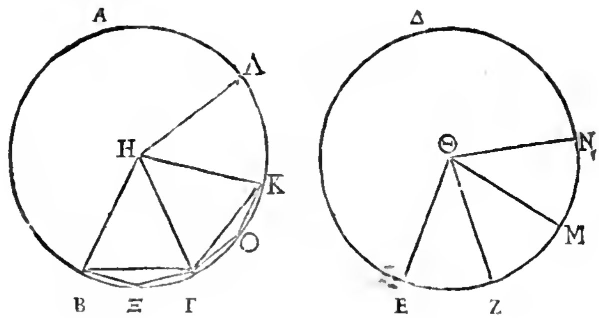


τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. Εστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς

angulus ΒΞΓ angulo ΓΟΚ est æqualis; simile igitur est ΒΞΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento; et sunt super æquales rectas ΒΓ, ΓΚ. Sed super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΒΞΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento. Est autem et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ triangulo æquale;

et qu'elles comprènent des angles égaux, la base ΒΓ est égale à la base ΓΚ; donc le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ (4. 1). Mais l'arc ΒΓ est égal à l'arc ΓΚ; donc le reste de la circonférence du cercle entier est égal au reste de la circonférence du cercle entier (ax. 3); donc l'angle ΒΞΓ est égal à l'angle ΓΟΚ (27. 3); donc le segment ΒΞΓ est semblable au segment ΓΟΚ (déf. 11. 3), et ces deux segments sont sur les droites égales ΒΓ, ΓΚ. Mais les segments de cercles semblables placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3); donc le segment ΒΞΓ est égal au segment ΓΟΚ. Mais le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΓΗΚ; donc le secteur entier ΗΒΓ est égal ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν[12]· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων

et totus igitur ΗΒΓ sector toti ΗΓΚ sectori æqualis est. Propter eadem utique et ΗΚΛ sector utrique ipsorum ΗΚΓ, ΗΓΒ æqualis est; tres igitur sectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sectores æquales inter se sunt; quam multiplex igitur est ΒΛ circumferentia



ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ[13], ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια

ipsius ΒΓ circumferentiæ, tam multiplex est et ΗΒΛ sector ipsius ΗΒΓ sectoris. Propter eadem utique et quam multiplex est ΕΝ circumferentia ipsius ΕΖ circumferentiæ, tam multiplex est et ΘΕΝ sector ipsius ΘΕΖ sectoris; si igitur æqualis est ΒΛ circumferentia ipsi ΕΝ circumferentiæ, æqualis est et ΗΒΛ sector ipsi

au secteur entier ΓΗΚ (ax. 2). Par la même raison, le secteur ΗΚΛ est égal à l'un et l'autre des secteurs ΗΚΓ, ΗΓΒ ; donc les trois secteurs ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ sont égaux entr'eux. Les secteurs ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sont égaux entr'eux, par la même raison; donc le secteur ΗΒΛ est le même multiple du secteur ΗΒΓ que l'arc ΒΛ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, le secteur ΘΕΝ est le même multiple du secteur ΘΕΖ que l'arc ΕΝ l'est de l'arc ΕΖ. Donc si l'arc ΒΛ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΛ est égal au secteur ΘΕΝ; si l'arc ΒΛ surpasse l'arc τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει[14]. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως, ἥτε ΒΑ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΑ τομεὺς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς. Καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

ΘΕΝ sectori ; et si superat ΒΑ circumferentia ipsam ΕΝ circumferentiam, superat et ΗΒΑ sector ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem ΒΓ, ΕΖ circumferentiis, duobus vero ΗΒΓ, ΘΕΖ sectoribus, sumpta sunt æque multiplicia ipsius ΒΓ quidem circumferentiæ et ipsius ΗΒΓ sectoris, ipsa et ΒΑ circumferentia et ΗΒΑ sector, ipsius vero ΕΖ circumferentiæ et ipsius ΘΕΖ sectoris æque multiplicia, ipsa et ΕΝ circumferentia et ipse ΘΕΝ sector. Et ostensum est si superat ΒΑ circumferentia ipsam ΕΝ circumferentiam, superare et ΗΒΑ sectorem ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si æqualis, æqualem ; et si dificit, dificere ; est igitur ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ ita ΗΒΓ sector ad ΘΕΖ sectorem.

ΕΝ, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, et si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux arcs ΒΓ, ΕΖ, et les deux secteurs ΗΒΓ, ΘΕΖ, on a pris des équimultiples de l'arc ΒΓ et du secteur ΗΒΓ, savoir, l'arc ΒΑ et le secteur ΗΒΑ ; on a pris aussi des équimultiples de l'arc ΕΖ et du secteur ΘΕΖ, savoir, l'arc ΕΝ et le secteur ΘΕΝ. Et on a démontré que si l'arc ΒΑ surpasse l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, que si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ, et que si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ ; donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ (déf. 6. 5).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

COROLLARIUM.

Et manifestum est et ut sector ad sectorem ita et angulnm ad angulum.

COROLLAIRE.

Il est évident que le secteur est au secteur comme l'angle est à l'angle (11. 5).

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEPTIMUS.

ΟΡΟΙ.	DEFINITIONES.
α΄. Μονάς ἐστι, καθ᾽ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.	1. Unitas est secundum quam unumquodque existentium unum dicitur.
β΄. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.	2. Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo.
γ΄. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.	3. Pars est numerus numeri, minor majoris, quando metitur majorem.

LIVRE SEPTIEME
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.

3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

έ. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

ς'. Αρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζ. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα· ἢ ὁ[2] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

ή. Αρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

θ'. Αρτιάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός[3] ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ί. Περισσάκις δὲ ἀρτιός ἐστιν, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν[4].

ιά. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν[5], ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ιβ'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

4. Partes autem, quando non metitur.

5. Multiplex autem, major minoris, quando mensuratur a minore.

6. Par autem numerus est ipse bifariam divisus.

7. Impar vero, ipse non divisus bifariam; vel ipse unitate differens a pari numero.

8. Pariter par numerus est, ipse a pari numero mensuratus per parem numerum.

9. Pariter autem impar numerus est, ipse a pari numero mensuratus per imparem numerum.

10. Impariter vero par est, ipse ab impari numero mensuratus per parem numerum.

11. Impariter vero impar numerus est, ipse ab impari numero mensuratus per imparem numerum.

12. Primus numerus est, ipse ab unitate solà mensuratus.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.

5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties egales.

7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

8. Le nombre pairement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre pair.

9. Le nombre pairement impair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre impair.

10. Le nombre impairement pair est celui qui est mésuré par un nombre impair, multiplié par un nombre pair.

11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre impair multiplié par un nombre impair.

12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

ιγ'. Πρῶτοι δὲ[6] πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιδ'. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιε'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιϛ'. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι[7] εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις[8] συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

ιζ'. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιη'. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται[9]· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

13. Primi autem inter se numeri sunt, ipsi ab unitate solâ mensurati communi mensurâ.

14. Compositus numerus est, ipse a numero aliquo mensuratus.

15. Compositi vero inter se numeri sunt, ipsi a numero aliquo mensurati communi mensurâ.

16. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in eo unitates toties additur multiplicatus, et gignitur aliquis.

17. Quando autem duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus planus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

18. Quando autem tres numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus solidus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.

ιθʹ. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ[10] ὑπὸ δύο ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κʹ. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων[11] περιεχόμενος.

καʹ. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

κβʹ. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγʹ. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

19. Quadratus numerus est ipse æqualiter æqualis, vel ipse sub duobus æqualibus numeris contentus.

20. Cubus autem, ipse æqualiter æqualis æqualiter; vel ipse sub tribus numeris æqualibus contentus.

21. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi et tertius quarti æque est multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes sunt.

22. Similes plani et solidi numeri sunt, ipsi proportionalia habentes latera.

23. Perfectus numerus est, ipse suis ipsius partibus æqualis existens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αʹ.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,

PROPOSITIO I.

Duobus numeris inæqualibus expositis, detracto autem semper minore de majore, si

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché ἐὰν[1] ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸς ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀνίσων[2] ἀριθμῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸς ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τουτέστιν, ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ[3].

relictus nunquam metiatur ipsum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; a principio numeri primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relictus nunquam metiatur eum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; dico ipsos AB, ΓΔ primos inter se esse, hoc est, ipsos AB, ΓΔ unitate solâ mensurari.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΖΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ, τὸν ΖΑ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΖΒ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΒ μετρεῖ. Μετρεῖ

Si enim non sunt AB, ΓΔ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit E, et ΓΔ quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem ZA, ipse vero ZA ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem HΓ, ipse HΓ autem ipsum ZA metiens relinquat unitatem ΘA.

Quoniam et E ipsum ΓΔ metitur, ipse autem ΓΔ ipsum ZB metitur; et ipse igitur E ipsum ZB

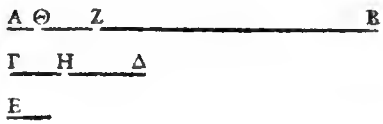
du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

Soient les deux nombres inégaux AB, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse HΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin HΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘA.

Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZΓ. Mais δὲ καὶ ὅλον τὸν ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΖ μετρήσει[4]. Ο δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει[5]. Ο δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει[6]. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

metitur. Metitur autem et totum AB; et reliquum igitur AZ metietur. Ipse autem AZ ipsum ΔH metitur; et E igitur ipsum ΔH metietur. Metitur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur ΓH metietur. Ipse autem ΓH ipsum ZΘ metitur; et E igitur ipsum ZΘ metietur. Metitur autem et totum ZA; et reliquam igitur AΘ unitatem metietur, numerus existens, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros metietur aliquis numerus; ipsi AB, ΓΔ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔH; donc E mesurera ΔH. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓH. Mais ΓH mesure ZΘ; donc E mesurera ZΘ. Mais il mesure ZA tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante AΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

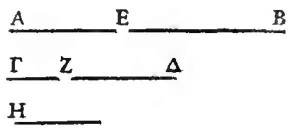
Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ[1]*· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.*

Sint dati duo numeri non primi inter se AB, ΓΔ, et sit minor ΓΔ; oportet igitur ipsorum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ[2] *κοινὸν μέτρον ἐστι. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.*

Si ΓΔ quidem ipsum AB metitur, metitur vero et se ipsum; ipse ΓΔ igitur ipsorum AB, ΓΔ communis mensura est. Et manifestum est et maximam; nullus enim major ipso ΓΔ ipsum ΓΔ metietur.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ληφθήσεταί τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Μονὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται. Εἰ δὲ μὴ, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ληφθήσεται ἄρα τις



Si autem non metitur ΓΔ ipsum AB, ipsorum AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur eum præ se ipso. Unitas quidem non enim relinquetur. Si autem non, erunt AB, ΓΔ primi inter se, quod non ponitur; relin-

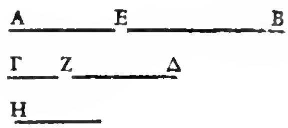
Soient donnés les deux nombres AB, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ.

Si ΓΔ mesure AB, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, AB, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas AB, et si on retranche toujours le plus petit des nombres AB, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres AB, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΕΑ μετρείτω. Επεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. Ο δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ

quetur igitur aliquis numerus, qui metietur eum præ se ipso. Et ipse quidem ΓΔ ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem EA, ipse vero EA ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ZΓ, ipse autem ΓZ ipsum EA metiatur. Et quoniam ΓZ ipsum AE metitur, ipse autem AE ipsum ΔZ metitur; et ΓZ igitur ipsum ΔZ metietur. Metitur autem et se ipsum; et totum igitur ΓΔ metietur. Ipse



μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρήσει[3]. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν

autem ΓΔ ipsum BE metitur; et ΓZ igitur ipsum BE metitur. Metitur autem et ipsum EA; et totum igitur BA metietur. Metitur autem et ipsum ΓΔ; ipse ΓZ igitur ipsos AB, ΓΔ metitur; ΓZ igitur ipsorum AB, ΓΔ communis mensura est. Dico utique et maximam. Si enim non est ΓZ ipsorum AB, ΓΔ maxima communis mensura, metietur aliquis AB, ΓΔ numeros numerus major existens ipso ΓZ. Me-

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant AB laisse EA plus petit que lui-même; que EA mesurant ΔΓ laisse ZΓ plus petit que lui-même; et enfin que ΓZ mesure EA. Puisque ΓZ mesure AE, et que AE mesure ΔZ, le nombre ΓZ mesurera ΔZ. Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure BE; donc ΓZ mesure BE. Mais il mesure EA; donc il mesurera BA tout entier. Mais il mesure ΓΔ; donc ΓZ mesure AB et ΓΔ; donc ΓZ est une commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓZ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓZ mesurera les nombres AB, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit H. Puisque H mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure BE, le nombre H mesurera BE. Mais il mesure BA tout entier; donc il mesurera le reste

ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. Ο δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tiatur, et sit H. Et quoniam H ipsum ΓΔ metitur, ipse vero ΓΔ ipsum BE metitur; et ipse H igitur ipsum BE metietur. Metitur autem et totum BA; et reliquum igitur ipsum AE metietur. Ipse autem AE ipsum ΔZ metitur; et H igitur ipsum ΔZ metitur. Metitur autem et totum ΔΓ; et reliquum igitur ΓZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros numerus aliquis metietur, major existens ipso ΓZ; ipse ΓZ igitur ipsorum AB, ΓΔ maxima est communis mensura. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει[4].

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

AE. Mais AE mesure ΔZ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là, que si un nombre en mesure deux autres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

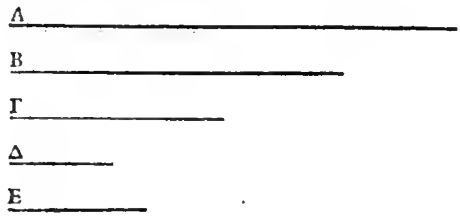
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se Α, Β, Γ; oportet igitur ipsorum Α, Β, Γ maximam communem mensuram invenire.



Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον[1], μετρήσει τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. Με-

Sumatur enim duorum Α, Β maxima communis mensura Δ; ipse utique Δ ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum, metitur autem et ipsos Α, Β; ipse Δ igitur ipsos Α, Β, Γ metitur; ipse Δ igitur ipsorum Α, Β, Γ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non est Δ ipsorum Α, Β, Γ maxima communis mensura, metietur Α,

PROPOSITION III.

Trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les trois nombres Α, Β, Γ non premiers entr'eux; il faut trouver leur plus grande commune mesure.

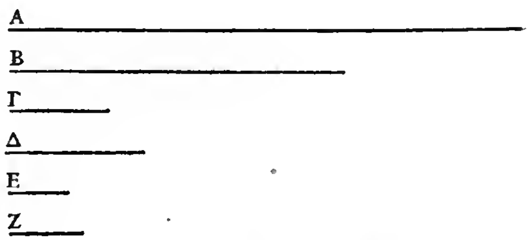
Prenons la plus grande commune mesure Δ des deux nombres Α, Β; le nombre Δ mesure, ou ne mesure pas le nombre Γ. Premièrement, qu'il le mesure; mais il mesure aussi les nombres Α, Β; donc il mesure les nombres Α, Β, Γ; donc Δ est une commune mesure des nombres Α, Β, Γ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si Δ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ, un nombre plus grand que Δ mesurera les nombres Α, Β, Γ.

τρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει[2], καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μετρήσει μείζων τοῦ Δ[3]· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Β, Γ numeros numerus major existens ipso Δ. Metiatur, et sit Ε. Et quoniam Ε ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β igitur metietur, et ipsorum igitur Α, Β maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis mensura est Δ; ipse igitur Ε ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numeros numerus aliquis metietur major ipso Δ; ipse Δ igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Μὴ μετρείτω δὲ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τὶς αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὲ τοὺς Α, Β, Γ με-

Non metiatur autem Δ ipsum Γ; dico primum numeros Δ, Γ non esse primos inter se. Quoniam enim Α, Β, Γ non sunt primi inter se, metietur aliquis eos numerus; qui autem



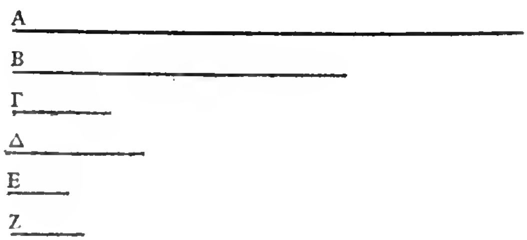
τρῶν, καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρη-

ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β metietur, et ipsorum Α, Β maximam mensuram Δ metietur. Metitur autem et ipsum Γ; ipsos Δ, Γ igitur

Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit E. Puisque E mesure les nombres A, B, Γ, il mesurera les nombres A, B, et par conséquent leur plus grande commune mesure (cor. 2. 7). Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B; donc E mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Δ ne mesurera pas les nombres A, B, Γ; donc Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B, Γ.

Que Δ ne mesure pas Γ; je dis premièrement que les nombres Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Car puisque les nombres A, B, Γ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, et celui qui mesure les nombres A, B, Γ, mesurera les nombres A, B, et mesurera aussi leur plus grande commune mesure Δ (cor. 2. 7). Mais il mesure aussi Γ; donc quelque nombre mesurera σει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. Λέγω δὴ[4] ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον

numerus aliquis metietur; ipsi Δ, Γ igitur non sunt primi inter se. Sumatur igitur eorum maxima communis mensura E. Et quoniam E ipsum Δ metitur, ipse autem Δ ipsos A, B metitur; et E igitur ipsos A, B, metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse E igitur ipsos A, B, Γ metitur; ipse E igitur ipsorum A, B, Γ communis est mensura. Dico autem et maximam.



κοινὸν μέτρον, μετρήσει τὶς τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα[5] μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει[6]. Τὸ δὲ τῶν Γ,

Si enim non est E ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura, metietur aliquis ipsos A, B, Γ numeros numerus major existens ipso E; metiatur, et sit Z. Et quoniam Z ipsos A, B, Γ metitur, et ipsos A, B metitur, et ipsorum A, B igitur maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem A, B maxima communis mensura est Δ; ipse Z igitur ipsum Δ metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse Z igitur ipsos Δ, Γ

les nombres Δ, Γ; donc Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Prenons leur plus grande commune mesure E. Puisque E mesure Δ, et que Δ mesure les nombres A, B, le nombre E mesure A et B. Mais il mesure Γ; donc E mesure les nombres A, B, Γ; donc E est une commune mesure des nombres A, B, Γ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si E n'est pas la plus grande commune mesure des nombres A, B, Γ, un nombre plus grand que E mesurera les nombres A, B, Γ. Qu'il les mesure, et que ce soit Z. Puisque Z mesure les nombres A, B, Γ, il mesure A et B, et il mesurera par conséquent leur plus grande commune mesure. Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B; donc Z mesure Δ. Mais il mesure aussi Γ; donc Z mesure Δ et Γ; donc il mesure la plus grande commune mesure des nombres Δ, Γ. Mais E est la plus grande

Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστιν κοινὸν μέτρον.

metitur; et ipsorum Δ, Γ igitur maximam communem mensuram metitur. Ipsorum autem Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ipse Ζ igitur ipsum Ε metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numerus aliquis metietur major existens ipso Ε; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὕρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.[7]

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, inventa est maxima communis mensura. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρήσομεν[8].

COROLLARIUM.

Ex his utique manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

commune mesure des nombres Γ, Δ; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Ε ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Donc, trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, on a trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là que si un nombre en mesure trois autres, il mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

Plusieurs nombres étant donnés, on trouvera de la même manière leur plus grande commune mesure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α, ΒΓ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ ΒΓ τοῦ Α ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

PROPOSITIO IV.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri A, BΓ, et sit minor BΓ; dico BΓ ipsius A vel partem esse vel partes.

Οἱ Α, ΒΓ[1] γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Εστωσαν πρότερον οἱ Α, ΒΓ[2] πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρεθέντος δὴ τοῦ ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ ΒΓ μέρος τὶ τοῦ Α· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, ΒΓ[3] πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὴ ΒΓ τὸν Α ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Εἰ μὲν οὖν ὁ ΒΓ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Ipsi A, BΓ enim vel primi inter se sunt, vel non; sint primum A, BΓ primi inter se, et diviso BΓ in unitates quæ in ipso, erit quæque unitas earum quæ in BΓ pars aliqua ipsius A; quare partes est BΓ ipsius A.

Non sint autem A, BΓ primi inter se; ipse utique BΓ ipsum A vel metitur, vel non metitur. Si autem BΓ ipsum A metitur, pars est BΓ ipsius A.

PROPOSITION IV.

Tout nombre est ou une partie ou plusieurs parties de tout autre nombre, le plus petit du plus grand.

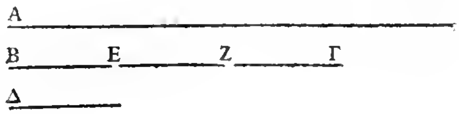
Soient deux nombres A, BΓ, et que BΓ soit le plus petit; je dis que BΓ est ou une partie ou plusieurs parties de A.

Car les nombres A, BΓ sont premiers entr'eux, ou non; qu'ils soient d'abord premiers entr'eux; ayant divisé le nombre BΓ en ses unités, chacune des unités de BΓ sera quelque partie de A (déf. 1 et 2. 7); donc BΓ sera plusieurs parties de A.

Que les nombres A, BΓ ne soient pas premiers entr'eux; le nombre BΓ mesure A ou ne le mesure pas. Si BΓ mesure A, le nombre BΓ est une partie de A.

Εἰ δὲ οὔ. Εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διῃρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α. Ἴσος δὴ ἑκάστῳ

Si autem non. Sumatur ipsorum A, BΓ maxima communis mensura Δ, et dividatur BΓ in numeros ipsi Δ æquales BE, EZ, ZΓ. Et quoniam Δ ipsum A metitur, pars est Δ ipsius A.



τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Æqualis igitur unicuique ipsorum BE, EZ, ZΓ; et unusquisque igitur ipsorum BE, EZ, ZΓ ipsius A pars est; quare partes est BΓ ipsius A. Omnis igitur numerus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ[1] τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω,

PROPOSITIO V.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars; et uterque simul utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Numerus enim A numeri BΓ pars sit, et alter

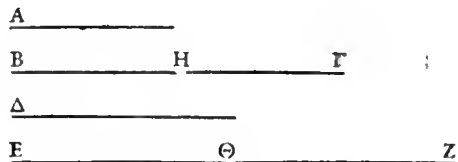
S'il ne le mesure pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres A, BΓ (2. 7), et partageons BΓ en parties BE, EZ, ZΓ égales à Δ. Puisque Δ mesure A, le nombre Δ est une partie de A. Mais Δ est égal à chacune des parties BE, EZ, ZΓ; donc chacune des parties BE, EZ, ZΓ est une partie de A; donc BΓ est plusieurs parties de A. Donc, etc.

PROPOSITION V.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, leur somme sera aussi la même partie de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre A soit une partie du nombre BΓ, et qu'un autre nombre καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ A, Δ συναμφοτέρου τοῦ BΓ, EZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ.

Επεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ BΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ EZ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ BΓ ἀριθμοὶ[2] ἴσοι τῷ A, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διῃρήσθω ὁ μὲν BΓ εἰς τοὺς τῷ A ἴσους τοὺς BH, HΓ· ὁ δὲ EZ



εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς EΘ, ΘZ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH, HΓ τῷ πλήθει τῶν EΘ, ΘZ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A, ὁ δὲ EΘ τῷ Δ· καὶ οἱ BH, EΘ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ HΓ τῷ A ἴσος ἐστὶν, ὁ δὲ ΘZ τῷ Δ· καὶ οἱ HΓ, ΘZ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι εἰσίν[3]· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ BΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς BΓ, EZ ἴσοι τοῖς A, Δ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ[4] A, τοσαυταπλασίων ἐστὶ, καὶ συναμφότερος ὁ BΓ, EZ

Δ alterius EZ eadem pars, quæ ipse A ipsius BΓ; dico et utrumque simul A, Δ utriusque simul BΓ, EZ eamdem partem esse quæ ipse A ipsius BΓ.

Quoniam enim quæ pars est A ipsius BΓ, eadem pars est et Δ ipsius EZ; quot igitur sunt in BΓ numeri æquales ipsi A, tot sunt et in EZ numeri æquales ipsi Δ. Dividatur BΓ quidem in numeros ipsi A æquales BH, HΓ; ipse vero EZ in numeros ipsi Δ æquales EΘ, ΘZ; erit utique æqualis multitudo ipsorum BH, HΓ multitudini ipsorum EΘ, ΘZ. Et quoniam æqualis est BH quidem ipsi A, ipse vero EΘ ipsi Δ; et BH, EΘ igitur ipsis A, Δ æquales. Propter eadem utique et HΓ ipsi A æqualis est, ipse autem ΘZ ipsi Δ; et HΓ, ΘZ igitur ipsis A, Δ æquales sunt; quot igitur sunt in BΓ numeri æquales ipsi A, tot sunt et in ipsis BΓ, EZ æquales ipsis A, Δ; quam multiplex igitur est BΓ ipsius A, tam mul-

Δ soit la même partie d'un autre nombre EZ, que A l'est de BΓ; je dis que la somme de A et de Δ est la même partie de la somme de BΓ et de EZ, que A l'est de BΓ.

Car puisque A est la même partie de BΓ, que Δ l'est de EZ, il y aura dans BΓ autant de nombres égaux à A, qu'il y a dans EZ de nombres égaux à Δ. Partageons BΓ en nombres BH, HΓ égaux à A, et EZ en nombres EΘ, ΘZ égaux à Δ, la quantité des nombres BH, HΓ sera égale à la quantité des nombres EΘ, ΘZ. Mais BH est égal à A, et EΘ égal à Δ; donc la somme de BH et de EΘ est égale à la somme de A et de Δ. Par la même raison, HΓ est égal à A, et ΘZ égal à Δ; donc la somme de HΓ et de ΘZ est égale à la somme de A et de Δ; il y a donc dans BΓ autant de nombres égaux à A, qu'il y a dans BΓ, EZ de συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tiplex est et uterque simul ΒΓ, ΕΖ utriusque simul Α, Δ; quæ igitur pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et uterque simul Α, Δ utriusque simul ΒΓ, ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

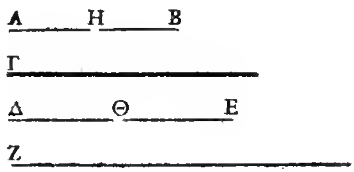
Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ἦ[1], καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἦ· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ·

PROPOSITIO VI.

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eædem partes est; et uterque simul utriusque simul eædem partes erit quæ unus unius.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eædem partes quæ ΑΒ ipsius Γ; dico et utrumque simul ΑΒ, ΔΕ utriusque simul Γ, Ζ easdem partes esse, quæ ΑΒ ipsius Γ.



Επεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ[2] καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν

Quoniam enim quæ partes est ΑΒ ipsius Γ eædem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur

nombres égaux aux nombres Α, Δ; donc ΒΓ est le même multiple de Α, que la somme de ΒΓ et de ΕΖ l'est de la somme de Α et de Δ; donc Α est la même partie de ΒΓ que la somme de Α et de Δ, l'est de la somme de ΒΓ et de ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

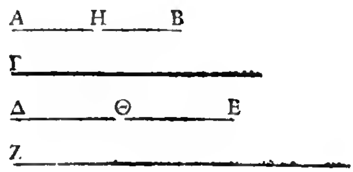
PROPOSITION VI.

Si un nombre est plusieurs parties d'un nombre, et si un autre nombre est les mêmes parties d'un autre nombre, leur somme sera les mêmes parties de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre ΑΒ soit plusieurs parties du nombre Γ, et qu'un autre nombre ΔΕ soit les mêmes parties d'un autre nombre Ζ, que ΑΒ l'est de Γ; je dis que la somme de ΑΒ et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ que ΑΒ l'est de Γ.

τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Z. Διῃρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH, HB, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Z μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔE partes ipsius Z. Dividatur AB quidem in ipsius Γ partes AH, HB, ipse vero ΔE in ipsius Z partes ΔΘ, ΘE.



Ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Z· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ[3] μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ AH, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ HB τοῦ Γ, καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Z· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ HB τοῦ Γ[4] καὶ συναμφότερος ὁ HB, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ AB, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Erit utique æqualis multitudo ipsorum AH, HB multitudini ipsorum ΔΘ, ΘE. Et quoniam quæ pars est AH ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Z; quæ igitur pars est AH ipsius Γ, eadem pars est et uterque simul AH, ΔΘ utriusque simul Γ, Z. Propter eadem utique et quæ pars est HB ipsius Γ, et ipse ΘE ipsius Z; ipse igitur pars est HB ipsius Γ et uterque simul HB, ΘE utriusque simul Γ, Z; quæ igitur partes est AB ipsius Γ, eædem partes est et uterque simul AB, ΔE utriusque simul Γ, Z. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ que ΔE l'est de Z, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔE de parties de Z. Partageons AB en parties de Γ, et que ces parties soient AH, HB; partageons aussi ΔE en parties de Z, et que ces parties soient ΔΘ, ΘE.

Le nombre des parties AH, HB sera égal au nombre des parties ΔΘ, ΘE. Et puisque AH est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Z, AH est la même partie de Γ, que la somme de AH et de ΔΘ l'est de la somme de Γ et de Z (5. 7). Par la même raison, HB est la même partie de Γ, que ΘE l'est de Z; donc HB est la même partie de Γ, que la somme de HB et de ΘE l'est de la somme de Γ et de Z; donc la somme de AB et de ΔE est les mêmes parties de la somme de Γ et de Z, que AB l'est de Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

PROPOSITIO VII.

Si numerus numeri pars est, quæ ablatus ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ pars sit, quæ ablatus AE ablati ΓZ; dico et reliquum EB reliqui ZΔ eamdem partem esse, quæ totus AB totius ΓΔ.

Ο γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ

Quæ enim pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars sit et EB ipsius ΓH. Et quoniam quæ pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars est EB ipsius ΓH; quæ igitur pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars est et AB ipsius HZ; quæ autem pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars ponitur et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est et AB ipsius

PROPOSITION VII.

Si un nombre est la même partie d'un nombre, que le nombre retranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera la même partie du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit la même partie du nombre ΓΔ, que le nombre retranché AE l'est du nombre retranché ΓZ; je dis que le nombre restant EB est la même partie du nombre restant ZΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ.

Que EB soit la même partie de ΓH, que AE l'est de ΓZ. Puisque AE est la même partie de ΓZ, que EB l'est de ΓH; le nombre AE est la même partie de ΓZ, que AB l'est de HZ (5. 7); mais on a supposé que AE est la même partie de ΓZ, que AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de HZ, que ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ[2]· ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. Κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσος[3]. Καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ[4] καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ[5] ΖΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ[6]· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

HZ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; ipse AB igitur utriusque ipsorum HZ, ΓΔ eadem pars est; æqualis igitur est HZ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓZ; reliquus igitur HΓ reliquo ZΔ est æqualis. Et quoniam quæ pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars est et EB ipsius HΓ, æqualis autem HΓ ipsi ZΔ; quæ igitur pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars est et EB ipsius ZΔ. Sed quæ pars est AE ipsius ΓZ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est EB ipsius ZΔ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; et reliquus igitur EB reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus AB totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de HZ et de ΓΔ; donc HZ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓZ; la partie restante HΓ sera égale à la partie restante ZΔ. Mais AE est la même partie de ΓZ, que EB l'est de HΓ, et HΓ est égal a ZΔ; donc AE est la même partie de ΓZ, que EB l'est de ZΔ. Mais AE est la même partie de ΓZ, que AB l'est de ΓΔ; donc EB est la même partie de ZΔ, que AB l'est de ΓΔ; donc le nombre restant EB est la même partie du nombre restant ZΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

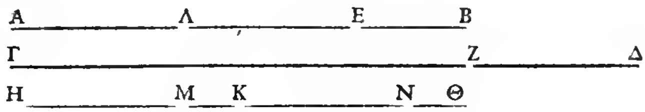
Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς[2] ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes est, quæ ablatus ablati; et reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ partes sit, quæ ablatus AE ablati ΓZ; dico et reliquum EB reliqui ZΔ easdem partes esse, quæ totus AB totius ΓΔ.



Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλήθει τῶν ΑΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ· μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. Κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,

Ponatur enim ipsi AB æqualis HΘ; quæ igitur partes est HΘ ipsius ΓΔ, eædem partes est et AE ipsius ΓZ. Dividatur HΘ quidem in ipsius ΓΔ partes HK, KΘ, ipse vero AE in ipsius ΓZ partes AΛ, ΛE; erit igitur æqualis multitudo HK, KΘ ipsi multitudini AΛ, ΛE. Et quoniam quæ pars est HK ipsius ΓΔ, eadem pars est et AΛ ipsius ΓZ; major autem ΓΔ ipso ΓZ; major igitur et HK ipso AΛ. Po-

PROPOSITION VIII.

Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, que le nombre retranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera aussi les mêmes parties du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre ΓΔ, que le nombre retranché AE l'est du nombre retranché ΓZ; je dis que le nombre restant EB est les mêmes parties du nombre restant ZΔ, que le tout AB l'est du tout ΓΔ.

Faisons HΘ égal à AB; le nombre HΘ sera les mêmes parties de ΓΔ, que AE l'est de ΓZ. Divisons HΘ en parties de ΓΔ, et que ces parties soient HK, KΘ; divisons ΛE en parties de ΓZ, et que ces parties soient AΛ, ΛE; le nombre des parties HK, KΘ sera égal au nombre des parties AΛ, ΛE. Et puisque HK est la même partie de ΓΔ, que AΛ l'est de ΓZ, et que ΓΔ est plus grand que ΓZ, HK est plus grand que AΛ. Faisons HM égal à AΛ; HK sera la même partie τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛΕ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΛΕ. Κείσθω τῷ ΛΕ ἴσος[1] ὁ ΚΝ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ[2] καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ

natur ipsi ΑΛ æqualis ipse ΗΜ; quæ igitur pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΗΜ ipsius ΓΖ; et reliquus igitur ΜΚ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus ΗΚ totius ΓΔ. Rursus, quoniam quæ pars est ΚΘ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΛΕ ipsius ΓΖ, major autem ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΚΘ ipso ΛΕ. Ponatur ipsi ΛΕ æqualis ipse ΚΝ; quæ igitur pars est ΚΘ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΚΝ ipsius ΓΖ; et re-

ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν ὅπερ ὅλος ὁ ΚΗ ὅλου τοῦ ΔΓ· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΔΓ. Ἴσος δὴ συναμφότερος μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

liquus igitur ΝΘ reliqui ΖΔ eadem pars est, quæ totus ΚΘ totius ΓΔ. Ostensum autem est et reliquum ΜΚ reliqui ΖΔ eamdem partem esse quæ totus ΚΗ totius ΔΓ; et uterque simul igitur ΜΚ, ΝΘ ipsius ΔΖ eædem partes est quæ totus ΘΗ totius ΔΓ. Æqualis autem uterque simul ΜΚ, ΝΘ quidem ipsi ΕΒ, ipse vero ΘΗ ipsi ΒΑ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eædem partes est quæ totus ΑΒ totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

de ΓΔ, que ΗΜ l'est de ΓΖ; donc le reste ΜΚ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΗΚ l'est du tout ΓΔ. De plus, puisque ΚΘ est la même partie de ΓΔ, que ΛΕ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que ΓΖ, ΚΘ est plus grand que ΛΕ. Faisons ΚΝ égal à ΛΕ; ΚΘ sera la même partie de ΓΔ, que ΚΝ l'est de ΓΖ; donc le reste ΝΘ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΚΘ l'est du tout ΓΔ. Mais on a démontré que le reste ΜΚ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΚΗ l'est du tout ΔΓ; donc la somme de ΜΚ et de ΝΘ, est les mêmes parties de ΔΖ, que le tout ΘΗ l'est du tout ΔΓ. Mais la somme de ΜΚ et de ΝΘ est égale à ΕΒ, et ΘΗ égal à ΒΑ; donc le reste ΕΒ est les mêmes parties du reste ΖΔ, que le tout ΑΒ l'est du tout ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

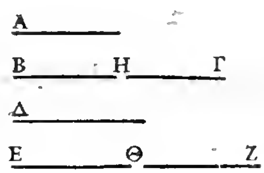
Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ[1]· καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ Α τοῦ Δ[2]· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.

PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars est; et alterne quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem pars erit vel eædem partes et secundus quarti.

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter Δ alterius ΕΖ eadem pars quæ Α ipsius ΒΓ, minor autem sit Α ipso Δ; dico et alterne quæ pars est Α ipsius Δ vel partes, eamdem partem esse et ΒΓ ipsius ΕΖ vel partes.



Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ[3] ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt

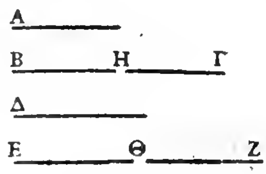
PROPOSITION IX.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, le premier est, par permutation, la même partie ou les mêmes parties du troisième, que le second l'est du quatrième.

Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre Δ soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ, et que Α soit plus petit que Δ; je dis que, par permutation, Α est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ.

Puisque Α est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y a dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἴσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

et in EZ æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in ipsos ipsi A æquales BH, HΓ, ipse vero EZ in ipsos ipsi Δ æquales EΘ, ΘZ; æqualis erit utique multitudo ipsorum BH, HΓ multitudini ipsorum EΘ, ΘZ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴσος δὴ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Et quoniam æquales sunt BH, HΓ numeri inter se, sunt autem et EΘ, ΘZ numeri æquales inter se, et est æqualis multitudo ipsorum BH, HΓ multitudini ipsorum EΘ, ΘZ; quæ igitur pars est BH ipsius EΘ vel partes, eadem pars est et HΓ ipsius ΘZ vel eædem partes; quare et quæ pars est BH ipsius EΘ vel partes, eadem pars est et uterque simul BΓ, utriusque simul EZ vel eædem partes; æqualis utique BH quidem ipsi A, ipse vero EΘ ipsi Δ; quæ igitur pars est et A ipsius Δ vel partes, eadem pars est et BΓ ipsius EZ vel eædem partes. Quod oportebat ostendere.

à Δ. Partageons BΓ en parties égales à A, et que ces parties soient BH, HΓ; partageons aussi EZ en parties égales à Δ, et que ces parties soient EΘ, ΘZ; le nombre des parties BH, HΓ sera égal au nombre des parties EΘ, ΘZ.

Puisque les nombres BH, HΓ sont égaux entr'eux, que les nombres EΘ, ΘZ sont aussi égaux entr'eux, et que la quantité des nombres BH, HΓ est égale à la quantité des nombres EΘ, ΘZ, le nombre BH est la même partie ou les mêmes parties de EΘ, que HΓ l'est de ΘZ; donc BH est la même partie ou les mêmes parties de EΘ, que la somme BΓ l'est de la somme EZ (5 et 6. 7). Mais BH est égal à A, et EΘ égal à Δ; donc A est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que BΓ l'est de EZ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

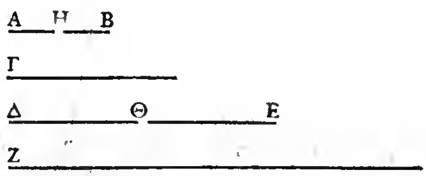
Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλὰξ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ[1] μέρος.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ AB τοῦ ΔΕ ἐλάσσων[2]· λέγω καὶ ἐναλλὰξ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ[3] μέρος.

PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eædem partes; et alterne quæ partes est primus tertii vel pars, eædem partes erit et secundus quarti vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri Γ partes sit, et alter ΔE alterius Z eædem partes, sit autem AB ipso ΔE minor; dico et alterne quæ partes est AB ipsius ΔE vel pars, easdem partes esse et Γ ipsius Z vel eamdem partem.



Επεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διῃρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH, HB, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH,

Quoniam enim quæ partes est AB ipsius Γ, eædem partes est et ΔE ipsius Z; quot igitur sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔE partes ipsius Z. Dividatur AB quidem in partes AH, HB ipsius Γ, ipse vero ΔE in partes ΔΘ, ΘE ipsius Z; erit utique æqualis multi-

PROPOSITION X.

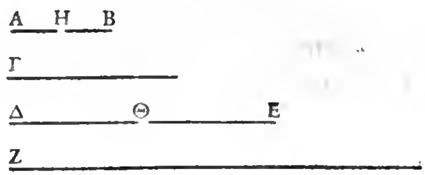
Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, qu'un autre l'est d'un autre, le premier sera aussi, par permutation, les mêmes parties ou la même partie du troisième, que le second l'est du quatrième.

Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre Γ, qu'un autre nombre ΔE l'est d'un autre nombre Z, et que AB soit plus petit que ΔE; je dis que, par permutation, AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔE, que Γ l'est de Z.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ, que ΔE l'est de Z, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔE de parties de Z. Divisons AB en parties de Γ, et que ces parties soient AH, HB; divisons aussi ΔE en parties de Z, et que ces parties soient ΔΘ, ΘE; le nombre des parties AH, HB sera égal

ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ[4] Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ[5] ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη[6]· ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη[7] καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἃ ἄρα[8] μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tudo ipsarum ΑΗ, ΗΒ multitudini ipsarum ΔΘ, ΘΕ. Et quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ, et alterne quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel eædem partes. Propter eadem utique et quæ pars est ΗΒ ipsius ΘΕ vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel eædem partes; quare et quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et ΗΒ ipsius ΘΕ vel eædem partes; et quæ igitur pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et ΑΒ ipsius ΔΕ vel eædem partes; sed quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars ostensa est et Γ ipsius Ζ vel eædem partes, et quæ igitur partes est ΑΒ ipsius ΔΕ vel pars, eædem partes est et Γ ipsius Ζ vel eadem pars. Quod oportebat ostendere.



au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque ΑΗ est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Ζ; par permutation, ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ (9. 7). Par la même raison, ΗΒ est la même partie ou les mêmes parties de ΘΕ, que Γ l'est de Ζ; donc ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que ΗΒ l'est de ΘΕ (5 et 6. 7); donc ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que ΑΒ l'est de ΔΕ; mais on a démontré que ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ; donc ΑΒ est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

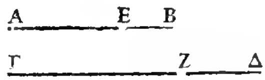
Εὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθένθα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Εστω ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστὶν ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

PROPOSITIO XI.

Si est ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatus AE ad ablatum ΓZ; dico et reliquum EB ad reliquum ZΔ esse ut totus AB ad totum ΓΔ.



Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ; quæ igitur pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars est et AE ipsius ΓZ vel eædem partes; et reliquus igitur EB reliqui ZΔ eadem pars est vel partes, quæ AB ipsius ΓΔ; est igitur ut EB ad ZΔ ita AB ad ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XI.

Si le tout est au tout comme le nombre retranché est au nombre retranché, le nombre restant sera aussi au nombre restant comme le tout est au tout.

Que le tout AB soit au tout ΓΔ comme le nombre retranché AE est au nombre retranché ΓZ; je dis que le nombre restant EB est au nombre restant ZΔ comme le tout AB est au tout ΓΔ.

Car, puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓZ, AB est la même partie ou les mêmes parties de ΓΔ que AE l'est de ΓZ; donc le reste EB est la même partie ou les mêmes parties du reste ZΔ que AB l'est de ΓΔ (7 et 8. 7); donc EB est à ZΔ comme AB est à ΓΔ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον· ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Εστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

PROPOSITIO XII.

Si sunt quotcunque numeri proportionales, erit ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico esse ut Α ad Β ita ipsos Α, Γ ad ipsos Β, Δ.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel partes; et uterque simul igitur Α, Γ utriusque simul Β, Δ eadem pars est vel eædem partes, quæ Α ipsius Β; est igitur ut Α ad Β ita ipsi Α, Γ ad ipsos Β, Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres proportionnels qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que Α est à Β comme la somme desnombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, Α est la même partie ou les mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc Α est est la même partie ou les mêmes parties de Β que Γ l'est de Δ; donc la somme des nombres Α, Γ est la même partie ou les mêmes parties de la somme des nombres Β, Δ, que Α l'est de Β (5 et 6. 7); donc Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Εστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

PROPOSITIO XIII.

Si quatuor numeri proportionales sunt; et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ, ut A ad B ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales fore, ut A ad Γ ita B ad Δ.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλὰξ ἄρα ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ[1] μέρη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; quæ igitur pars est A ipsius B vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel eædem partes; alterne igitur quæ pars est A ipsius Γ vel partes, eadem pars est et B ipsius Δ vel eædem partes; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XIII.

Si quatre nombres sont proportionnels; ils seront encore proportionnels par permutation.

Soient A, B, Γ, Δ quatre nombres proportionnels, et que A soit à B comme Γ est à Δ; je dis qu'ils seront encore proportionnels, par permutation, c'est-à-dire que A est à Γ comme B est à Δ.

Car, puisque A est à B comme Γ est à Δ; A est la même partie ou les mêmes parties de B, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc, par permutation, A est la même ou les mêmes parties de Γ, que B l'est de Δ (9 et 10. 7); donc A est à Γ comme B est à Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

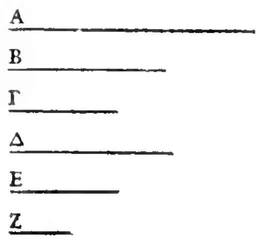
Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Εστωσαν γὰρ[1] ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ[2] ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ διίσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

PROPOSITIO XIV.

Si sunt quotcunque numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri A, B, Γ, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione Δ, E, Z, ut A quidem ad B ita Δ ad E, ut B vero ad Γ ita E ad Z; dico et ex æquo esse ut A ad Γ ita Δ ad Z.



Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τον Ζ· ἐναλλὰξ

Quoniam enim est ut A ad B ita Δ ad E; alterne igitur est ut A ad Δ ita B ad E. Rursus, quoniam est ut B ad Γ ita E ad Z; alterne igitur est ut B ad E ita Γ ad Z. Ut autem B ad

PROPOSITION XIV.

Si l'on a tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres égaux en quantité aux premiers, et si ces nombres étant pris deux à deux sont en même raison, ils seront aussi en même raison par égalité.

Soient A, B, Γ tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres Δ, E, Z égaux en quantité à ceux-ci, que ces nombres soient pris deux à deux et en même raison, c'est-à-dire que A soit à B comme Δ est à E, et que B soit à Γ comme E est à Z; je dis que, par égalité, A est à Γ comme Δ est à Z.

Car, puisque A est à B comme Δ est à E, par permutation, A est à Δ comme B est à E (13. 7). De plus, puisque B est à Γ comme E est à Z; par permuἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

E ita A ad Δ; et ut igitur A ad Δ ita Γ ad Z; alterne igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

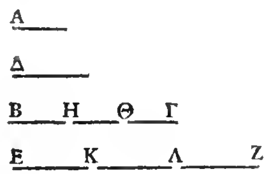
Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ· καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

PROPOSITIO XV.

Si unitas numerum aliquem metitur, æqualiter autem alter numerus alium aliquem numerum metitur; et alterne æqualiter unitas tertium numerum metietur ac secundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem BΓ metiatur, æqualiter autem alter numerus Δ alium aliquem numerum EZ metiatur; dico et alterne æqualiter A unitatem ipsum Δ numerum metiri ac BΓ ipsum EZ.



tation, B est à E comme Γ est à Z. Mais B est à E comme A est à Δ; donc A est à Δ comme Γ est à Z; donc, par permutation, A est à Γ comme Δ est à Z. Ce qu'il fallait démontrer.

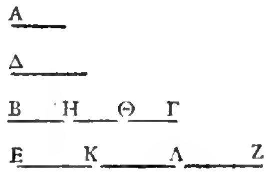
PROPOSITION XV.

Si l'unité mesure un nombre autant de fois qu'un autre nombre mesure un autre nombre; par permutation, l'unité mesurera autant de fois le troisième nombre que le second mesure le quatrième.

Que l'unité A mesure un nombre BΓ autant de fois qu'un autre nombre Δ mesure un autre nombre EZ; je dis que, par permutation, l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que BΓ mesure EZ.

Επεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ[2] καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν· ἔσται[3] ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. Εσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν[4] οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς

Quoniam enim æqualiter Α unitas ipsum ΒΓ numerum metitur ac Δ ipsum ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ unitates tot sunt et in ΕΖ numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in ipsas in eo unitates ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ipse vero ΕΖ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ; erit igitur æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitates inter se, sunt autem et ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ numeri æquales inter se, et est æqualis multitudo ipsarum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitatum multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ numerorum; erit igitur ut ΒΗ unitas ad ΕΚ numerum ita ΗΘ unitas ad ΚΛ numerum, et ΘΓ unitas ad ΛΖ numerum. Erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΒΗ



Puisque l'unité Α mesure le nombre ΒΓ autant de fois que Δ mesure ΕΖ, il y aura dans ΒΓ autant d'unités, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ. Partageons ΒΓ en ses unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, et partageons ΕΖ en nombres égaux à Δ, et que ces nombres soient ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ; la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Puisque les unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sont égales entr'elles, que les nombres ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ sont égaux entr'eux, et que la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ est égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ, l'unité ΒΗ sera au nombre ΕΚ comme l'unité ΗΘ est au nombre ΚΛ, et comme l'unité ΘΓ est au nombre ΛΖ. Donc un antécédent sera à son conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 7); donc l'unité ΒΗ est au nombre ΕΚ comme ΒΓ est τὸν EZ. Ἴση δὲ ἡ BH μονὰς τῇ A μονάδι, ὁ δὲ EK ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ BΓ πρὸς τὸν EZ· ἰσάκις ἄρα ἡ A μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν[5] μετρεῖ καὶ ὁ BΓ τὸν EZ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

unitas ad EK numerum ita BΓ ad EZ. Æqualis autem BH unitas ipsi A unitati, ipse vero EK numerus ipsi Δ numero; est igitur ut A unitas ad Δ numerum ita BΓ ad EZ; æqualiter igitur A unitas ipsum Δ numerum metitur ac BΓ ipsum EZ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

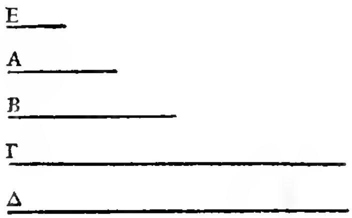
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ B

PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri multiplicantes sese faciunt aliquos; facti ex ipsis æquales inter se erunt.

Sint duo numeri A, B, et A quidem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat, ipse vero B



τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

ipsum A multiplicans ipsum Δ faciat; dico æqualem esse Γ ipsi Δ.

à EZ. Mais l'unité BH est égale à l'unité A, et le nombre EK au nombre Δ; donc l'unité A est au nombre Δ comme BΓ est à EZ; donc l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que BΓ mesure EZ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

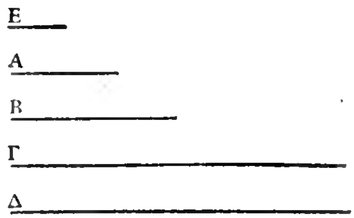
PROPOSITION XVI.

Si deux nombres se multipliant l'un et l'autre en produisent d'autres; les nombres produits seront égaux entr'eux.

Soient les deux nombres A, B; que A multipliant B produise Γ, et que B multipliant A produise Δ; je dis que Γ est égal à Δ.

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν[1] κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ισάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; B igitur ipsum Γ metitur per ipsas in A unitates. Metitur autem et E unitas ipsum A numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur E unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Γ; alterne igitur æqualiter E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Rursus, quoniam B ipsum A multiplicans ipsum Δ fecit; ipse A igitur ipsum Δ metitur per ipsas in B unitates. Metitur autem et E unitas ipsum B per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Δ. Æqualiter autem E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Æqualiter igitur A utrumque ipsorum Γ, Δ metitur; æqualis igitur est Γ ipsi Δ. Quod oportebat ostendere.



Car, puisque A multipliant B a produit Γ; B mesure Γ par les unités qui sont en A (déf. 15. 7). Mais l'unité E mesure le nombre A par les unités qu'il contient; donc l'unité E mesure le nombre A autant de fois que B mesure Γ; donc, par permutation, l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ (15. 7). De plus, puisque B multipliant A a produit Δ, A mesure Δ par les unités qui sont en B. Mais l'unité E mesure le nombre B par les unités qu'il contient; donc l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Δ. Mais l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ; donc A mesure également Γ et Δ; donc Γ est égal à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

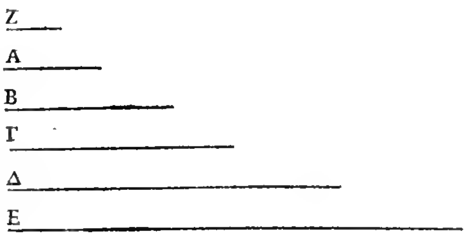
Εὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι [1]λόγον πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans facit aliquos, facti ex ipsis eamdem rationem habebunt quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B, Γ multiplicans ipsos Δ, E faciat; dico esse ut B ad Γ ita Δ ad E.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν[2] οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Δ fecit; B igitur ipsum Δ metitur per ipsas in A unitates. Metitur autem et Z unitas ipsum A numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur Z unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Δ; est igitur ut Z unitas ad A numerum ita B ad Δ. Propter eadem uti-

PROPOSITION XVII.

Si un nombre multipliant deux nombres en produit d'autres; les nombres produits auront la même raison que les nombres multipliés.

Que le nombre A multipliant les nombres B, Γ produise les nombres Δ, E; je dis que B est à Γ comme Δ est à E.

Car, puisque A multipliant B a produit Δ; B mesure Δ par les unités qui sont en A (déf. 15. 7). Mais l'unité Z mesure le nombre A par les unités qu'il contient; donc l'unité Z mesure le nombre A autant de fois que B mesure Δ; donc l'unité Z est au nombre A comme B est à Δ. Par la même raison, Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε[3]· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

que et ut Z unitas ad A numerum ita Γ ad E; et ut igitur B ad Δ ita Γ ad E; alterne igitur est ut B ad Γ ita Δ ad E. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

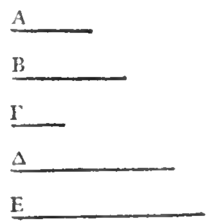
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἕξουσι τὸν[1] λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes faciunt aliquos; facti ex ipsis et eamdem habebunt rationem quam multiplicantes.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem Γ multiplicantes ipsos[1] Δ, E faciant; dico esse ut A ad B ita Δ ad E.



l'unité Z est au nombre A comme Γ est à E; donc B est à Δ comme Γ est à E; donc, par permutation, B est à Γ comme Δ est à E (13. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Si deux nombres multipliant un autre nombre en produisent d'autres; les nombres produits auront la même raison que les multiplicateurs.

Que les deux nombres A, B multipliant un nombre Γ produisent Δ, E; je dis que A est à B comme Δ est à E.

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit ; et Γ igitur ipsum A multiplicans ipsum Δ fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum B multiplicans ipsum E fecit ; numerus utique Γ duos numeros A, B multiplicans ipsos Δ, E fecit ; est igitur ut A ad B ita Δ ad E. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

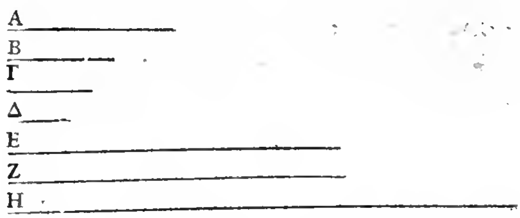
Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου[1] γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Εστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε

PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales sunt, ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis erit ipsi ex secundo et tertio facto numero ; et si ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis est ipsi ex secundo et tertio, quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ, ut A ad B ita Γ ad Δ, et A quidem ipsum Δ multiplicans ipsum E faciat, ipse vero B

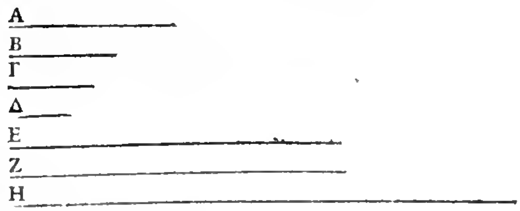


Puisque A mulipliant Γ produit Δ, Γ multipliant A produit Δ (16. 7). Par la même raison Γ multipliant B produit E ; donc Γ multipliant les deux nombres A, B produit les nombres Δ, E ; donc A est à B, comme Δ est à E (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Si quatre nombres sont proportionnels, le nombre produit par le premier et par le quatrième sera égal au nombre produit par le second et par le troisième ; et si le nombre produit par le premier et par le quatrième est égal au nombre produit par le second et par le troisième, les quatre nombres seront proportionnels.

Soient les quatre nombres proportionnels A, B, Γ, Δ ; que A soit à B comme Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.



Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτος ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς[2] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα[3] ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν[4] Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

ipsum Γ multiplicans faciat ipsum Z; dico æqualem esse E ipsi Z.

Ipse enim A ipsum Γ multiplicans ipsum H faciat. Et quoniam A ipsum Γ multiplicans ipsum H fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum E fecit; numerus utique A duos numeros Γ, Δ multiplicans ipsos H, E fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita H ad E. Sed ut Γ ad Δ ita A ad B; et ut igitur A ad B ita H ad E. Rursus, quoniam A ipsum Γ multiplicans ipsum H fecit, sed et B ipsum Γ multiplicans ipsum Z fecit; duo utique numeri A, B numerum aliquem Γ multiplicantes ipsos H, Z fecerunt; est igitur ut A ad B ita H ad Z. Sed et ut A ad B ita H ad E; et ut igitur H ad E ita H ad Z; ipse H igitur ad utrumque ipsorum E, Z eamdem habet rationem; æqualis igitur est E ipsi Z.

est à Δ; que A multipliant Δ produise E, et que B multipliant Γ produise Z; je dis que E est égal à Z.

Que A multipliant Γ produise H. Puisque A multipliant Γ produit H, et que A multipliant Δ produit E, le nombre A multipliant les deux nombres Γ, Δ produit H, E; donc Γ est à Δ comme H est à E (17. 7). Mais Γ est à Δ comme A est à B; donc A est à B comme H est à E. De plus, puisque A multipliant Γ produit H, et que B multipliant Γ produit Z; les deux nombres A, B multipliant un nombre Γ produisent H, Z (18. 7). Donc A est à B comme H est à Z. Mais A est à B comme H est à E; donc H est E comme H est Z; donc H a la même raison avec chacun des nombres E, Z; donc E est égal à Z.

Εστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ισος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Αλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ως δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Sit autem rursus æqualis E ipsi Z; dico esse ut A ad B ita Γ ad Δ.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos H, E fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita H ad E. Æqualis autem E ipsi Z; est igitur ut H ad E ita H ad Z. Sed ut H quidem ad E ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita H ad Z. Ut autem H ad Z ita A ad B; et ut igitur A ad B ita Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'[1].

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου[2]· ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ[3] τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται[4].

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales sunt, ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio; si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales A, B, Γ, ut A ad B ita B ad Γ; dico ipsum ex A, Γ æqualem esse ipsi ex B.

De plus, que E soit égal à Z; je dis que A est à B comme Γ est à Δ.

Faisons la même construction. Puisque A multipliant les nombres Γ, Δ produit H, E, le nombre Γ est à Δ comme H est à E. Mais E est égal à Z; donc H est à E comme H est à Z. Mais H est à E comme Γ est à Δ (18. 7); donc Γ est à Δ comme H est à Z. Mais H est à Z comme A est à B; donc A est à B comme Γ est à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si trois nombres sont proportionnels, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen; et si le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen, les trois nombres seront proportionnels.

Soient A, B, Γ trois nombres proportionnels; que A soit à B comme B est à Γ; je dis que le produit des nombres A, Γ est égal au quarré de B.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Δ. Ο δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, Δ. Ipse autem ex B, Δ æqualis est ipsi ex B; æqualis enim B ipsi Δ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B.

Αλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτος ὁ Β πρὸς τὸν Γ.

Επεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ὑπὸ[5] τῶν Β, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ισος δὲ ὁ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Sed et ipse ex A, Γ æqualis sit ipsi ex B; dico esse ut A ad B ita B ad Γ.

Quoniam enim ipse ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, ipse autem ex B æqualis ipsi ex B, Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Æqualis autem B ipsi Δ; est igitur ut A ad B ita B ad Γ. Quod oportebat ostendere.

Que Δ soit égal à B; A sera à B comme Δ est à Γ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au produit des nombres B, Δ (19. 7). Mais le produit des nombres B, Δ est égal au quarré de B; parce que B est égal à Δ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au quarré de B.

Mais que le produit des nombres A, Γ soit égal au quarré de B; je dis que A est à B comme B est à Γ.

Car puisque le produit des nombres A, Γ est égal au quarré de B, et que le quarré de B est égal au produit des nombres B, Δ; le nombre A est à B comme Δ est à Γ (19. 7). Mais B est égal à Δ; donc A est à B comme B est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

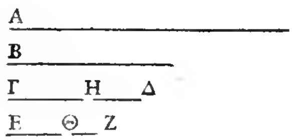
Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας[1] ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Εστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

PROPOSITIO XXI.

Minimi numeri ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter eos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem.

Sint enim minimi numeri ΓΔ, ΕΖ ipsorum eamdem rationem habentium cum Α, Β; dico æqualiter ΓΔ ipsum Α metiri ac ΕΖ ipsum Β.



Ο ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρη. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ

Ipse ΓΔ enim ipsius Α non est partes. Si enim possibile, sit; et ΕΖ igitur ipsius Β eædem partes est quæ ΓΔ ipsius Α; quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius Α, tot sunt et in ΕΖ partes ipsius Β. Dividatur ΓΔ quidem in ipsas ipsius Α partes ΓΗ, ΗΔ, ipse vero ΕΖ in ipsas ipsius Β partes ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ.

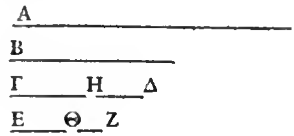
PROPOSITION XXI.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit.

Que ΓΔ, ΕΖ soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Β; je dis que ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β.

Le nombre ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α; car, que cela soit, s'il est possible; ΕΖ sera les mêmes parties de Β que ΓΔ l'est de Α (déf. 20. 7). Il y aura donc dans ΓΔ autant de parties de Α qu'il y dans ΕΖ de parties de Β. Partageons ΓΔ en parties de Α, et que ces parties soient ΓΗ, ΗΔ; et ΕΖ en parties de Β, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ. Le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ sera égal au nombre εἰσὶν ἀλλήλοις[2], εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις[3], καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς

Et quoniam æquales ΓΗ, ΗΔ sunt inter se, sunt autem et ΕΘ, ΘΖ numeri inter se æquales, et est æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΘΖ; erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes



ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ[1] μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΓΔ ad ΕΖ; ipsi ΓΗ, ΕΘ igitur cum ipsis ΓΔ, ΕΖ in eâdem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; non igitur partes est ΓΔ ipsius Α; pars igitur; et ΕΖ ipsius Β eadem pars est quæ ΓΔ ipsius Α; æqualiter igitur ΓΔ ipsum Α metitur ac ΕΖ ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

des parties ΕΘ, ΘΖ; et puisque les parties ΓΗ, ΗΔ sont égales entr'elles, que les parties ΕΘ, ΘΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ est égal au nombre des parties ΕΘ, ΘΖ; la partie ΓΗ est à la partie ΕΘ comme ΗΔ est à ΘΖ; donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents (12. 7); donc ΓΗ est à ΕΘ comme ΓΔ est à ΕΖ; donc les nombres ΓΗ, ΕΘ sont en même raison que les nombres ΓΔ, ΕΖ qui sont plus petits que ces derniers, ce qui est impossible; car on a supposé que ΓΔ, ΕΖ sont les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; donc ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α. Donc il en est une partie; mais ΕΖ est la même partie de Β que ΓΔ l'est de Α; donc ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.[1]

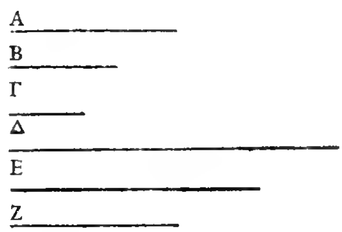
Εὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθως οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ[2], ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτος ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

PROPOSITIO XXII.

Si sunt tres numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione, sit autem perturbata eorum proportio; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres numeri Α, Β, Γ, et alii Δ, Ε, Ζ, ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione, sit autem perturbata eorum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico et ex æquo esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.



Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτος ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; ipse igitur ex Α, Ζ æqualis est ipsi ex Β, Ε. Rursus, quoniam ut Β ad Γ ita Δ ad Ε; ipse igitur ex Γ, Δ æqualis est ipsi ex Β, Ε. Os-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois nombres et autant d'autres nombres, si ces nombres pris deux à deux sont en même raison, et si leur proportion est troublée, ces nombres seront en même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ trois nombres, et autant d'autres nombres Δ, Ε, Ζ; que ces nombres pris deux à deux soient en même raison, et que leur proportion soit troublée; c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que par égalité Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Car puisque Α est à Β comme Ε est à Ζ, le produit des nombres Α, Ζ est égal au produit des nombres Β, Ε (19. 7). De plus, puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε; le produit des nombres Γ, Δ est égal au produit des nombres Β, Ε. Mais ἐστὶ τῷ ἐξ τῶν Β, Ε. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β, Ε· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἄρα ἴσος τῷ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tensus est autem et ipse A, Z æqualis ipsi ex B, E; et ipse ex A, Z igitur æqualis ipsi ex Γ, Δ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

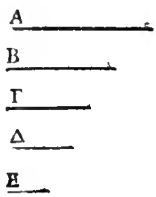
Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλαχιστοὶ εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

PROPOSITIO XXIII.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum camdem rationem habentium cum ipsis.

Sint primi inter se numeri A, B; dico ipsos A, B minimos esse eorum camdem rationem habentium cum ipsis.



Εἰ γὰρ μή[1], ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες[2] ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. Εστωσαν οἱ Γ, Δ.

Si enim non, erunt aliqui ipsis A, B minores numeri in eâdem ratione existentes cum ipsis A, B. Sint Γ, Δ.

on a démontré que le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E; donc le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres Γ, Δ; donc A est à Γ comme Δ est à Z (19. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Que A, B soient des nombres premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Car s'ils ne le sont pas, il y aura des nombres plus petits que A, B qui auront la même raison avec A, B. Que ce soient Γ, Δ.

Επεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. Οσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β· οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Et quoniam minimi numeri eorum eamdem rationem habentium metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Γ ipsum Α metitur ac Δ ipsum Β. Quoties autem Γ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ε; et Δ igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in Ε. Et quoniam Γ ipsum Α metitur per unitates quæ in Ε; et Ε igitur ipsum Α metitur per unitates quæ in Γ. Propter eadem utique et Ε ipsum Β metitur per unitates quæ in Δ; ipse Ε igitur ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Α, Β minores numeri in eâdem ratione existentes cum ipsis Α, Β; ipsi Α, Β igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Puisque les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent ; le nombre Γ mesurera le nombre Α autant de fois que Δ mesurera Β. Qu'il y ait dans Ε autant d'unités que Γ mesure de fois Α ; le nombre Δ mesurera Β par les unités qui sont en Ε. Mais Γ mesure Α par les unités qui sont en Ε ; donc le nombre Ε mesure Α par les unités qui sont en Γ. Par la même raison, Ε mesure Β par les unités qui sont en Δ ; donc Ε mesure les nombres Α, Β qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc il n'y a point de nombres plus petits que Α, Β qui ayent la même raison avec les nombres Α, Β ; donc les nombres Α, Β sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

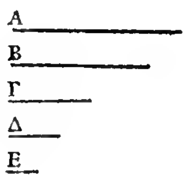
Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

PROPOSITIO XXIV.

Minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis A, B; dico A, B primos inter se esse.

Si enim non sunt primi inter se A, B, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoties Γ quidem ipsum A metitur, tot unitates sint in Δ, quoties vero Γ ipsum B metitur, tot unitates sint in E.



Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς

Et quoniam Γ ipsum A metitur per unitates quæ in Δ; ipse Γ igitur ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum E multiplicans ipsum B fecit; numerus igitur Γ duos numeros Δ, E multiplicans ipsos A, B

PROPOSITION XXIV.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, sont premiers entr'eux.

Que A, B soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que les nombres A, B sont premiers entr'eux.

Car si les nombres A, B ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Γ. Qu'il y ait dans Δ autant d'unités que Γ mesure de fois A, et qu'il y ait dans E autant d'unités que Γ mesure de fois B.

Puisque Γ mesure A par les unités qui sont dans Δ, le nombre Γ multipliant Δ produira A. Par la même raison, Γ multipliant E produit B; donc le nombre Γ multipliant les deux nombres Δ, E produira A, B; donc Δ est à E comme A est

Α, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

fecit; est igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Β; ipsi Δ, Ε igitur cum ipsis Α, Β in eâdem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros numerus aliquis metietur; ipsi Α, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se sunt, numerus unum eorum metiens ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, ipsum autem Α metiatur aliquis numerus Γ; dico et ipsos Β, Γ primos inter se esse.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ

Si enim non sint Β, Γ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ ipsum Γ metitur, ipse autem Γ

à Β (17. 7); donc les nombres Δ, Ε ont la même raison que les nombres Α, Β, qui sont plus petits qu'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres Α, Β; donc Α, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le nombre qui mesure l'un d'eux sera premier avec l'autre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux; et que quelque nombre Γ mesure Α; je dis que Β, Γ sont premiers entr'eux.

Car que Β, Γ ne soient pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera; que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure Γ, et que

Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsum Α metitur; et Δ igitur ipsum Α metitur. Metitur autem et ipsum Β; ipse Δ igitur ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

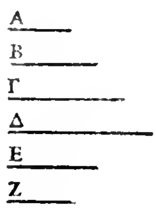
Εαν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν[1], καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi sunt, et ipse ex ipsis factus ad eum primus erit.

Duo enim numeri Α, Β ad aliquem numerum Γ primi sint, et Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ faciat; dico Γ, Δ primos inter se esse.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς Γ, Δ[2] ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρῶτοι

Si enim non sint Γ, Δ primi inter se, metietur aliquis ipsos Γ, Δ numerus. Metiatur, et sit Ε. Et quoniam Γ, Α primi inter se sunt, ipsum

Γ mesure Α, le nombre Δ mesurera Α. Mais il mesure Β; donc Δ mesure Α, Β qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible (déf. 12. 7); donc quelque nombre ne mesurera pas Α, Β; donc Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si deux nombres sont premiers avec quelque nombre, le produit de ces deux nombres sera un nombre premier avec ce nombre.

Que les deux nombres Α, Β soient deux nombres premiers avec quelque nombre Γ, et que Α multipliant Β fasse Δ; je dis que Γ, Δ sont premiers entr'eux.

Car si Γ, Δ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera Γ, Δ. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Ε. Puisque Γ, Α sont premiers entr'eux, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οσάκις δὴ[3] ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. Εὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αυτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζωνα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν, ὅ τεὶ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

autem Γ metitur aliquis numerus Ε; ipsi Ε, Α igitur primi inter se sunt. Quoties autem Ε ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ζ; et Ζ igitur ipsum Δ metitur per unitates quæ in Ε; ipse Ε igitur ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed et Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Ζ ipsi ex Α, Β. Si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex mediis, quatuor numeri proportionales sunt; est igitur ut Ε ad Α ita Β ad Ζ. Ipsi autem Α, Ε primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem numeri ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Ε igitur ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Β, Γ metitur primos existentes inter se, quod est impossibile. Non igitur ipsos Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

et qu'un nombre Ε mesure Γ, les nombres Ε, Α seront premiers entr'eux (25. 7). Qu'il y ait dans Ζ autant d'unités que Ε mesure de fois Δ; le nombre Ζ mesurera Δ par les unités qui sont dans Ε; donc Ε multipliant Ζ produira Δ. Mais Α multipliant Β produit Δ; donc le produit de Ε par Ζ est égal au produit de Α par Β. Mais lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre nombres sont proportionnels (19. 7); donc Ε est à Α comme Β est à Ζ. Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux; et les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (25. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; donc Ε mesure Β; mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Β, Γ qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible. Donc quelque nombre ne mesurera pas Γ, Δ; donc Γ, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί.

PROPOSITIO XXVII.

Si duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A, B, et A se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ, B primos inter se esse.

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. Καὶ[1] ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτος ἐστί· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. Ο δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Ponatur enim ipsi A æqualis Δ. Et quoniam A, B primi inter se sunt, æqualis autem A ipsi Δ; et Δ, B igitur primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Δ, A ad B primus est; et ipse ex Δ, A igitur factus ad ipsum B primus erit. Ipse autem ex A, Δ factus numerus est Γ; ipsi Γ, B igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le quarré de l'un d'eux est premier avec l'autre.

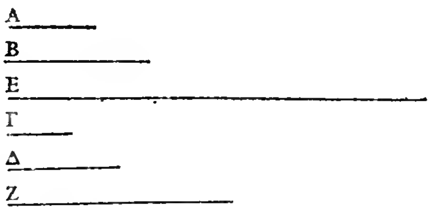
Que les deux nombres A, B soient premiers entr'eux, et que A multiplié par lui-même produise Γ; je dis que Γ, B sont premiers entr'eux.

Que Δ soit égal à A. Puisque A, B sont premiers entr'eux, et que A est égal à Δ, les nombres Δ, B sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres Δ, A est premier avec B; donc le produit de Δ par A sera premier avec B (26. 7). Mais le produit de A par Δ est Γ; donc les nombres Γ, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ὦσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Επεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται[1]. Ο δὲ ἐκ τῶν Α, Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ[2] Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν

PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi suut; et ipsi ex ipsis facti primi inter se erunt.

Duo enim numeri A, B ad duos numeros Γ, Δ, uterque ad utrumque, primi sint, et A quidem ipsum B multiplicans ipsum E faciat, ipse vero Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat; dico E, Z primos inter se esse.

Quoniam enim uterque ipsorum A, B ad Γ primus est, et ipse ex A, B igitur factus ad Γ primus erit. Ipse autem ex A, B factus est E; ipsi E, Γ igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique E, Δ primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Γ, Δ ad E primus est; et ipse ex Γ, Δ igitur factus ad E primus erit.

PROPOSITION XXVIII.

Si deux nombres sont premiers avec deux autres, l'un et l'autre avec l'un et l'autre, leurs produits seront premiers entr'eux.

Que les deux nombres A, B soient premiers avec les deux nombres Γ, Δ, l'un et l'autre avec l'un et l'autre ; que A multipliant B produise E, et que Γ multipliant Δ produise Z ; je dis que les nombres E, Z sont premiers entr'eux.

Puisque chacun des nombres A, B est premier avec Γ, le produit de A par B sera premier avec Γ (26. 7). Mais le produit de A par B est E ; donc les nombres E, Γ sont premiers entr'eux. Par la même raison E, Δ sont premiers entr'eux ; donc chacun des nombres Γ, Δ est premier avec E ; donc le produit de Γ par Δ

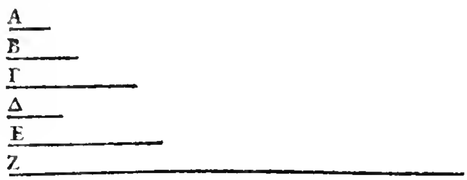
Γ, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γενόμενος ἐστὶν ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ipse autem ex Γ, Δ factus est Z; ipsi E, Z igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινας[1], οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἔστωσαν ἀριθμοὶ δύο[2] πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν



Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν[3] πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἵ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

PROPOSITIO XXIX.

Si duo numeri primi inter se sint, et multiplicans uterque se ipsum faciat aliquos, facti ex ipsis primi inter se erunt; et si ipsi a principio factos multiplicantes faciant aliquos, et illi primi inter se erunt; et semper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri A, B primi inter se, et A se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat, ipsum autem Γ multiplicans ipsum E faciat, ipse autem B quidem se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Z faciat; dico et ipsos Γ, E et ipsos Δ, Z primos inter se esse.

sera premier avec E (26. 7). Mais le produit de Γ par Δ est Z; donc les nombres E, Z sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et si ces nombres étant multipliés par eux-mêmes font des nombres, les produits de ces nombres seront premiers entr'eux; et si les nombres proposés multipliant les produits font d'autres nombres, ces derniers seront aussi premiers entr'eux, et il en sera toujours ainsi pour les derniers nombres qui auront été produits.

Que les deux nombres A, B soient premiers entr'eux, que A étant multiplié par lui-même fasse Γ, que A multipliant Γ fasse E, que B étant multiplié par lui-même fasse Δ, que B multipliant Δ fasse Z; je dis que Γ, E et Δ, Z sont premiers entr'eux.

Επεὶ γὰρ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Επεὶ οὖν οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν Β, Δ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν Α, Γ ὁ Ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt, et A se ipsum multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi Γ, B igitur primi inter se sunt. Et quoniam Γ, B primi inter se sunt, et B se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit, ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Rursus, quoniam A, B primi inter se sunt, et B se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit; ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt; et quoniam duo numeri A, Γ ad duos numeros B, Δ uterque ad utrumque primi sunt; et ipse ex ipsis A, Γ igitur factus ad ipsum ex ipsis B, Δ primus est. Et est ipse quidem ex A, Γ ipse E, ipse vero ex B, Δ ipse Z; ipsi E, Z igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter se sunt, et uterque simul ad utrumque eorum primus erit; et si uterque simul ad unum aliquem eorum primus est, et ipsi a principio numeri primi inter se erunt.

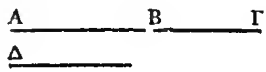
Puisque les nombres A, B sont premiers entr'eux, et que A étant multiplié par lui-même fait Γ, les nombres Γ, B sont premiers entr'eux (27. 7); et puisque Γ, B sont premiers entr'eux, et que B multiplié par lui-même fait Δ, les nombres Γ, Δ sont premiers entr'eux. De plus, puisque A, B sont premiers entr'eux, et que B multiplié par lui-même a fait Δ, les nombres A, Δ sont premiers entr'eux. Mais les deux nombres A, Γ sont premiers avec les deux nombres B, Δ, l'un et l'autre avec l'un et l'autre; donc le produit de A par Γ est premier avec le produit de B par Δ (28. 7.) Mais le produit de A par Γ est E, et le produit de B par Δ est Z. Donc les nombres E, Z sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme sera un nombre premier avec chacun d'eux; et si leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux, les deux nombres proposés seront premiers entr'eux.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν[1] ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Componantur duo numeri primi inter se AB, BΓ; dico et utrumque simul AΓ ad utrumque eorum AB, BΓ primum esse.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΓΑ, ΑΒ[2] ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΓΑ, ΑΒ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν[3]· ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Si enim non sint ΓA, AB primi inter se, metietur aliquis ipsos ΓA, AB numerus. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ ipsos ΓA, AB metitur; et reliquum igitur BΓ metietur. Metitur autem et ipsum BA; ipse Δ igitur ipsos AB, BΓ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ΓA, AB numeros numerus aliquis metietur; ipsi ΓA, AB igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique et AΓ, ΓB primi inter se sunt; ipse ΓA igitur ad utrumque ipsorum AB, BΓ primus est.

Ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους[4]· λέγω ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Sint et ΓA, AB primi inter se; dico et AB, BΓ primos inter se esse.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι οἱ ΑΒ, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους[5], μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΒΓ[6] ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον

Si enim non sint primi AB, BΓ inter se, metietur aliquis ipsos AB, BΓ numerus. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ utrumque eorum AB,

Ajoutons les deux nombres premiers entr'eux AB, BΓ; je dis que leur somme AΓ est un nombre premier avec chacun des nombres AB, BΓ.

Car si les nombres ΓA, AB ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera ΓA, AB. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΓA, AB, il mesurera le reste BΓ; mais il mesure BA; donc Δ mesure AB, BΓ qui sont deux nombres premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres ΓA, AB; donc ΓA, AB sont premiers entr'eux. Par la même raison AΓ, ΓB sont premiers entr'eux; donc le nombre ΓA est premier avec chacun des nombres AB, BΓ.

De plus, que ΓA, AB soient premiers entr'eux; je dis que AB, BΓ sont premiers entr'eux.

Car si AB, BΓ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure chacun τῶν AB, BΓ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν AB· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, AB μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, BΓ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ AB, BΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

BΓ metitur; et totum igitur ΓA metietur. Metitur autem et ipsum AB; ipse Δ igitur ipsos ΓA, AB metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos AB, BΓ numeros numerus aliquis metietur; ipsi AB, BΓ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

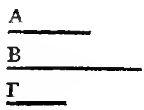
Απας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

Εστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ A, καὶ τὸν B μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οἱ B, A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A, et ipsum B non metiatur; dico B, A primos inter se esse.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ B, A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ[1]. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ A τὸν B οὐ μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῷ A οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς B, A μετρεῖ· καὶ τὸν A ἄρα

Si enim non sint B, A primi inter se, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum B metitur, ipse autem A ipsum B non metitur; ipse Γ igitur cum ipso A non est idem. Et quoniam Γ ipsos B, A metitur;

des nombres AB, BΓ, il mesurera leur somme ΓA. Mais il mesure AB; donc Δ mesure ΓA, AB, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres AB, BΓ; donc AB, BΓ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXI.

Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas.

Soit le nombre premier A, et que A ne mesure pas B; je dis que B, A sont premiers entr'eux.

Car si B, A ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que A ne mesure pas B, le nombre Γ n'est pas le même nombre que A. Et puisque Γ μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et ipsum A igitur metitur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur ipsos B, A metietur aliquis numerus; ipsi A, B igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐʹ.

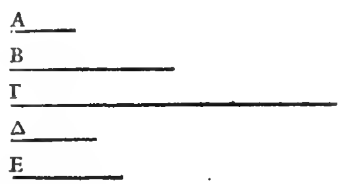
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri sese multiplicantes faciant aliquem, eum vero factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; et unum eorum qui a principio metietur.

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes ipsum Γ faciant, ipsum autem Γ metiatur aliquis primus numerus Δ; dico Δ unum eorum A, B metiri.



Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω, καὶ ἔστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔσ-

Ipsum enim A non metiatur, et est primus Δ; ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt. Et quoties Δ ipsum Γ metitur, tot unitates sint in E. Et

mesure B, A, il mesure A qui est un nombre premier, quoique Γ ne soit pas le même que A, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas B, A; donc A, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera un des nombres proposés.

Car que les deux nombres A, B se multipliant l'un l'autre fassent Γ, et que quelque nombre premier Δ mesure Γ; je dis que Δ mesure un des nombres A, B.

Qu'il ne mesure pas A; puisque Δ est un nombre premier, les nombres A, Δ seront premiers entr'eux (31. 7). Qu'il y ait autant d'unités dans E que Δ mesure τωσαν ἐν τῷ Ε. Επεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

quoniam Δ ipsum Γ metitur per ipsas quæ in E unitates, ipse Δ igitur ipsum E multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; æqualis igitur est ipse ex Δ, E, ipsi ex A, B; est igitur ut Δ ad A ita B ad E. Ipsi autem Δ, A primi, ipsi vero primi et minimi, ipsi autem minimi metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecendentem, et consequens consequentem; ipse Δ igitur ipsum B metitur. Similiter utique ostendemus et si Δ ipsum B non metitur, ipsum A mensurum esse; ipse Δ igitur unum eorum A, B metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Απας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur.

Sit compositus numerus A; dico ipsum A a primo aliquo numero mensurari.

de fois Γ. Puisque Δ mesure Γ par les unités qui sont en E, le nombre Δ multipliant E fera Γ. Mais A multipliant B fait Γ; donc le produit de Δ par E est égal au produit de A par B; donc Δ est à A comme B est à E (19. 7). Mais Δ, A sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont avec eux la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Δ mesure B. Nous démontrerons de la même manière que si Δ ne mesure pas B, il mesurera A; donc Δ mesure un des nombres A, B. Ce qu'il fallait démontrer.

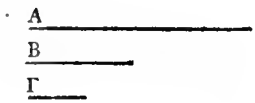
PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que A soit un nombre composé; je dis que A est mesuré par quelque nombre premier.

Επεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν[1]· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ,

Quoniam enim compositus est A, metietur aliquis ipsum numerus. Metiatur, et sit B. Et si quidem primus est B, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum B metitur, ipse autem B ipsum A metitur; et Γ igitur ipsum A metitur. Et si quidem primus



γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν[2]· εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ[3] ἕτερος του ἑτέρου ἐλάσσων ἐστὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς· ληφθήσεταί τις ἄρα πρῶτος ἀριθμὸς[4], ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Απας ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς[5].

est Γ, factum erit propositum; si vero compositus, metietur aliquis ipsum numerus. Tali utique factâ consideratione, relinquetur aliquis primus numerus, qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipsum A numerum infiniti numeri quorum alter altero minor est, quod est impossible in numeris. Relinquetur aliquis igitur primus qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum A metietur. Omnis igitur, etc.

Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le no mbre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Απας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εστω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν[1]. Εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός. Απας ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus vel primus est, vel a primo aliquo numero mensuratur.

Sit numerus A; dico A vel primum esse, vel a primo aliquo mensurari.

Si quidem igitur primus est A, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum primus numerus. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

Αριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν, εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς

PROPOSITIO XXXV.

Numeris datis quotcumque, invenire minimos eorum eamdem rationem habentium cum eis.

Sint dati quotcumque numeri A, B, Γ; oportet igitur invenire minimos eorum eamdem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ.

Ipsi A, B, Γ enim vel primi inter se sunt, vel non. Si quidem igitur A, B, Γ primi inter

PROPOSITION XXXIV.

Tout nombre est premier, ou il est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre A; je dis que A est un nombre premier, ou qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

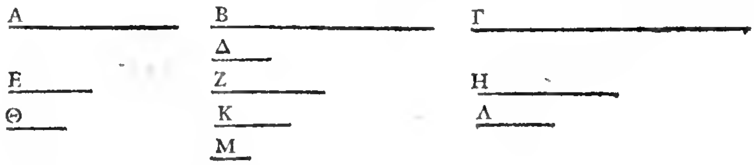
Si A est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; s'il est composé, quelque nombre premier le mesurera (33. 7). Donc, etc.

PROPOSITION XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étant donnés, trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient A, B, Γ tant de nombres donnés qu'on voudra; il faut trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B, Γ.

Les nombres A, B, Γ sont ou premiers entr'eux, ou ne le sont pas. S'il sont ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.



Εἰ δὲ οὔ· εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν[1] ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων[2] τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονταί τινες[3] τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. Ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. Ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ

se sunt, minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis.

Si autem non; sumatur ipsorum Α, Β, Γ maxima communis mensura Δ, et quoties Δ unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque eorum Ε, Ζ, Η; et unusquisque igitur Ε, Ζ, Η unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur per unitates quæ in Δ; ipsi Ε, Ζ, Η igitur ipsos Α, Β, Γ æqualiter metiuntur; ipsi Ε, Ζ, Η igitur cum ipsis Α, Β, Γ in eâdem ratione sunt. Dico utique et minimos. Si enim non sunt Ε, Ζ, Η minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ, erunt aliqui ipsis Ε, Ζ, Η minores numeri in eâdem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ. Sint Θ, Κ, Λ; æqualiter igitur Θ ipsum Α metitur ac uterque eorum Κ, Λ utrumque eorum Β, Γ. Quoties autem Θ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Μ; et uterque igitur eorum Κ, Λ

premiers entr'eux, ils seront les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7).

S'ils ne le sont pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, Β, Γ (3. 7), et qu'il y ait dans chacun des nombres Ε, Ζ, Η autant d'unités que Δ mesure de fois chacun des nombres Α, Β, Γ. Chacun des nombres Ε, Ζ, Η mesurera chacun des nombres Α, Β, Γ par les unités qui sont dans Δ; donc les nombres Ε, Ζ, Η mesurent également les nombres Α, Β, Γ; donc les nombres Ε, Ζ, Η sont en même raison que les nombres Α, Β, Γ (18. 7). Je dis de plus qu'ils sont les plus petits. Car si Ε, Ζ, Η ne sont pas les plus petits de ceux qui ont avec Α, Β, Γ la même raison, il y aura quelques nombres plus petits que Ε, Ζ, Η qui auront la même raison avec Α, Β, Γ; que ce soient Θ, Κ, Λ; le nombre Θ mesurera Α autant de fois que chacun des nombres Κ, Λ mesure chacun des nombres Β, Γ (21. 7). Qu'il y ait dans μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. Μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

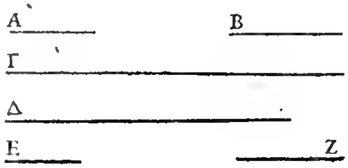
utrumque eorum B, Γ metitur per unitates quæ in M. Et quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ in M; et M igitur ipsum A metitur per unitates quæ in Θ. Propter eadem utique et M utrumque eorum B, Γ metitur per unitates quæ in ipsis K, Λ; ipse M igitur ipsos A, B, Γ metitur; et quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ in M; ipse Θ igitur ipsum M multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et E ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit; æqualis igitur est ipse ex E, Δ ipsi ex Θ, M; est igitur ut E ad Θ ita M ad Δ. Major autem E ipso Θ; major igitur et M ipso Δ, et metitur ipsos A, B, Γ, quod est impossibile; ponitur enim Δ eorum A, B, Γ maxima communis mensura; non igitur erunt aliqui ipsis E, Z, H minores numeri in eâdem ratione in quâ A, B, Γ; ipsi E, Z, H igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ. Quod oportebat ostendere.

M autant d'unités que Θ mesure de fois A; chacun des nombres K, Λ mesurera chacun des nombres B, Γ par les unités qui sont en M. Et puisque Θ mesure A par les unités qui sont en M, le nombre M mesurera A par les unités qui sont en Θ. Par la même raison, M mesurera chacun des nombres B, Γ par les unités qui sont dans chacun des nombres K, Λ; donc M mesure A, B, Γ. Mais Θ mesure A par les unités qui sont en M; donc Θ multipliant M fait A. Par la même raison, E multipliant Δ fait A; donc le produit de E par Δ est égal au produit de Θ par M; donc E est à Θ comme M est à Δ (19. 7). Mais E est plus grand que Θ; donc M est plus grand que Δ, et M mesure A, B, Γ, ce qui est impossible; car on a supposé que Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B, Γ; donc il n'y a pas de nombres plus petits que E, Z, H qui ayent la même raison que A, B, Γ; donc E, Z, H sont les plus petits nombres qui ayent la même raison avec A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.



Οἱ Α, Β γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α[1] τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρείτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὁσάκις ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν

PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri A, B; oportet igitur invenire quem minimum metiantur numerum.

Ipsi A, B enim vel primi inter se sunt, vel non. Sint primum A, B primi inter se, et A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum A multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi A, B igitur ipsum Γ metiuntur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi A, B minorem existentem ipso Γ. Metiantur Δ. Et quoties A ipsum Δ metitur, tot unitates sint in E; quoties autem B ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Z; ipse quidem A igitur ipsum E multiplicans ipsum Δ fecit, ipse

PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient A, B les deux nombres donnés; il faut trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Car les nombres A, B sont premiers entr'eux, ou ne le sont pas. Que les nombres A, B soient d'abord premiers entr'eux, et que A multipliant B produise Γ; le nombre B multipliant A produira Γ (16. 7); donc les nombres A, B mesureront Γ; je dis que Γ est le plus petit. Car si cela n'est pas, les nombres A, B mesureront quelque nombre plus petit que Γ. Qu'ils mesurent Δ. Qu'il y ait dans E autant d'unités que A mesure de fois Δ; et qu'il y ait dans Z autant d'unités que B mesure de fois Δ; donc A multipliant E produira Δ, et B multipliant Z pro-

Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσί[2] τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν[3]· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. Καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·

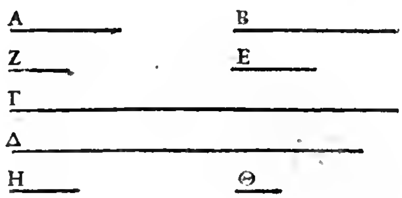
vero B ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex A, E ipsi ex B, Z; est igitur ut A ad B ita Z ad E. Ipsi autem A, B primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse B igitur ipsum E metitur, ut consequens consequentem. Et quoniam A ipsos B, E multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut B ad E ita Γ ad Δ; metitur autem B ipsum E; metitur igitur et Γ ipsum Δ, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem existentem ipso Γ, quoniam A, B primi inter se sunt; ipse Γ igitur minimus existens ab ipsis A, B mensuratur.

Non sint autem A, B primi inter se, et sumantur minimi numeri Z, E eorum camdem rationem habentium quam ipsi A, B; æqualis igitur est ex A, E ipsi ex B, Z. Et A ipsum E multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum Z multiplicans ipsum Γ fecit. Ipsi A, B igitur ipsum Γ metiun-

duira Δ; donc le produit de A par E est égal au produit de B par Z; donc A est à B comme Z est à E (19. 7). Mais les nombres A, B sont premiers entr'eux; les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont une même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc le nombre B mesure E, c'est-à-dire le conséquent le conséquent. Mais A multipliant B, E a fait Γ, Δ; donc B est à E comme Γ est à Δ (18. 7); mais B mesure E; donc Γ mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B ne mesureront pas quelque nombre plus petit que Γ, puisque A, B sont premiers entr'eux; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B.

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux. Prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec A, B (35.7), et que ces nombres soient Z, E; le produit de A par E sera égal au produit de B par Z (19. 7). Que A multipliant E fasse Γ; donc B multipliant Z fera Γ; donc A, B mesurent Γ; je dis que Γ est le οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρείτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ

tur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, minorem existentem ipso Γ. Metiantur ipsum Δ. Et quoties Α quidem ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Η, quoties vero Β ipsum Δ metitur, tot



μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῷ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Ως δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

unitates sint in Θ; ipse quidem Α igitur ipsum Η multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β ipsum Θ multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis est ipse ex Α, Η ipsi ex Β, Θ; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Ut autem Α ad Β ita Ζ ad Ε; sed ut Α ad Β ita Θ ad Η; et ut igitur Ζ ad Ε ita Θ ad Η. Ipsi autem Ζ, Ε minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse Ε igitur ipsum Η metitur. Et quoniam Α ipsos Ε, Η multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Ε ad Η ita Γ ad Δ. Ipse autem Ε ipsum Η metitur; et Γ

plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β mesureront quelque nombre plus petit que Γ. Qu'ils mesurent Δ, et qu'il y ait dans Η autant d'unités, que Α mesure de fois Δ, et dans Θ autant d'unités que Β mesure de fois Δ. Le nombre Α multipliant Η fera Δ, et Β multipliant Θ fera Δ; donc le produit de Α par Η est égal au produit de Β par Θ; donc Α est à Β comme Θ est à Η (19. 7). Mais Α est à Β comme Ζ est à Ε; et Α est à Β comme Θ est à Η; donc Ζ est à Ε comme Θ est à Η. Mais Ζ, Ε sont les plus petits nombres, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc Ε mesure Η. Mais Α multipliant Ε, Η fait Γ, Δ; donc Ε est à Η comme Γ est à Δ (17. 7). Mais Ε mesure Η;

Ο δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B metientur aliquem numerum minorem ipso Γ; ipse Γ igitur minimus existens ab A, B mensuratur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

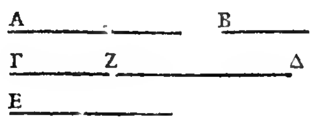
Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri numerum aliquem metiantur, et minimus ab illis mensuratus eumdem mensurabit.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem ΓΔ metiantur, minimum autem ipsum E; dico et E ipsum ΓΔ metiri.



Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετροῦσι[1]. Μετροῦσι δὲ

Si enim non metitur E ipsum ΓΔ, E metiens ZΔ relinquat se ipso minorem ΓZ. Et quoniam A, B ipsum E metiuntur, ipse autem E ipsum ΔZ metitur; et A, B igitur ipsum ΔZ metiun-

donc Γ mesure Δ (déf. 20.7), le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B ne mesurent pas quelque nombre plus petit que Γ; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, le plus petit qu'ils mesurent mesurera ce même nombre.

Que les deux nombres A, B mesurent quelque nombre ΓΔ, et que E soit le plus petit nombre qu'ils mesurent; je dis que E mesure ΓΔ.

Car si E ne mesure pas ΓΔ, que E mesurant ZΔ laisse ΓZ plus petit que lui-même. Puisque les nombres A, B mesurent E, que E mesure ΔZ, les nombres καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, μετρεῖ ἄρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

tur. Metiuntur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur ΓΖ metientur, minorem existentem ipso Ε, quod est impossibile; non igitur non metitur Ε ipsum ΓΔ, metitur igitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετρήσουσιν[1] ἀριθμόν.

PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati numeri Α, Β, Γ; oportet igitur invenire quem minimum metientur numerum.

Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. Ο δὴ[2] Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι[3]. Λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. Μετρείτωσαν τὸν Ε. Επεὶ οὖν[1] οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε

Sumatur enim a duobus Α, Β minimus mensuratus ipse Δ. Ipse utique Γ ipsum Δ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Metiuntur autem et Α, Β ipsum Δ; ipsi Α, Β, Γ igitur ipsum Δ metientur. Dico et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, Γ, minorem existentem ipso Δ. Metiantur ipsum Ε. Et quoniam Α, Β, Γ ipsum Ε metiuntur, et Α, Β

Α, Β mesureront ΔΖ; mais ils mesurent ΓΔ tout entier; donc ils mesureront le reste ΓΖ plus petit que Ε, ce qui est impossible; donc Ε ne peut pas ne point mesurer ΓΔ; donc il le mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVIII.

Trois nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

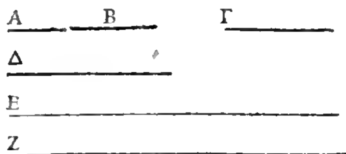
Soient Α, Β, Γ les nombres donnés; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.

Prenons le plus petit nombre Δ mesuré par les deux nombres Α, Β (36. 7). Le nombre Γ mesurera Δ, ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure. Puisque les nombres Α, Β mesurent Δ, les nombres Α, Β, Γ mesureront Δ. Je dis aussi que Δ est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β, Γ mesureront quelque nombre plus petit que Δ. Qu'ils mesurent Ε. Puisque les nombres Α, Β, Γ meμετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος τὸν Ε[5] μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσί[6] τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετρήσουσι[7].

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετρή-

igitur ipsum E metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensuratus ipsum E metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ; ipse Δ igitur ipsum E metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso Δ; ipsi A, B, Γ igitur minimum Δ metiuntur.

Non metiatur autem rursus Γ ipsum Δ, et sumatur a Γ, Δ minimus mensuratus numerus E. Et quoniam A, B ipsum Δ metiuntur, ipse autem Δ ipsum E metitur; et A, B igitur ipsum E me-



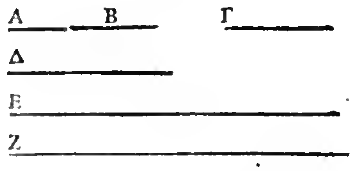
σουσι[8]. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ[9]· καὶ οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετρήσουσι[10]. Λέγω δὴ[11] ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. Μετρείτωσαν τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β με-

tientur. Metitur autem et ipse Γ; et A, B, Γ igitur ipsum E metientur. Dico et minimum. Si enim non, metientur aliquem ipsi A, B, Γ, minorem existentem ipso E. Metiantur Z. Et quoniam A, B, Γ ipsum Z metiuntur; et A, B igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensu-

surent E, les nombres A, B mesureront E, et le plus petit nombre mesuré par A, B mesurera E (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par A, B est Δ; donc Δ mesure E, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B, Γ ne mesurent pas un nombre plus petit que Δ; donc Δ est le plus petit nombre mesuré par les nombres A, B, Γ.

Que Γ ne mesure pas Δ. Prenons le plus petit nombre E mesuré par Γ, Δ (36. 7). Puisque A, B mesurent Δ, et que Δ mesure E, les nombres A, B mesureront E. Mais Γ mesure E; donc les nombres A, B, Γ mesureront E. Je dis que E est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres A, B, Γ mesureront quelque nombre plus petit que E. Qu'ils mesurent Z. Puisque les nombres A, B, Γ mesurent Z, les nombres A, B mesureront Z, et le plus petit nombre mesuré par AB meτρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα[12] ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει[13]. Ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσί[14] τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ μετρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ratus ipsum Z metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ; ipse Δ igitur ipsum Z metitur. Metitur autem et Γ ipsum Z; ipsi Δ, Γ igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur a Δ, Γ mensuratus ipsum Z metietur. Ipse autem minimus a Δ, Γ mensuratus est E; E igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso E; ipse E igitur minimus existens ab A, B, Γ mensuratur. Quod oportebat ostendere.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι.

PROPOSITIO XXXIX.

Si numerus ab aliquo numero mensuratur, mensuratus denominatam partem habebit a metiente.

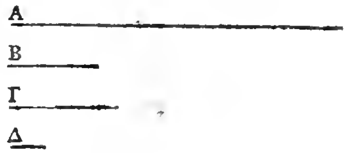
surera Z. Mais le plus petit mesuré par A, B est Δ; donc Δ mesure Z. Mais Γ mesure Z; donc Δ, Γ mesurent Z. Donc le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ mesurera Z (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ est E; donc E mesure Z, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc les nombres A, B, Γ ne mesureront pas quelque nombre plus petit que E; donc E est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIX.

Si un nombre est mesuré par quelque nombre, le nombre mesuré aura une partie dénommée par le nombre qui le mesure.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Numerus enim A ab aliquo numero B mensuretur; dico A denominatam partem habere ab ipso B.



Οσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. Η δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β· ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates sint in Γ; et quoniam B ipsum A metitur per unitates quæ in Γ, metitur autem et Δ unitas ipsum Γ numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius B numeri, eadem pars est et Γ ipsius A. Ipsa autem Δ unitas ipsius B numeri pars est denominata ab eo; et Γ igitur ipsius A pars est denominata ab ipso B; quare A partem habet Γ denominatam ab ipso B. Quod oportebat ostendere.

Que le nombre A soit mesuré par le nombre B; je dis que A a une partie dénommée par B.

Qu'il y ait dans Γ autant d'unités que B mesure de fois A. Puisque B mesure A par les unités qui sont en Γ, et que l'unité Δ mesure Γ par les unités qui sont en lui, l'unité Δ mesurera Γ autant de fois que B mesure A; donc, par permutation, l'unité Δ mesurera B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ est la même partie de A que l'unité Δ l'est de B. Mais l'unité Δ est une partie de B dénommée par lui; donc Γ est une partie de A dénommée par B; donc A a une partie Γ dénommée par B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

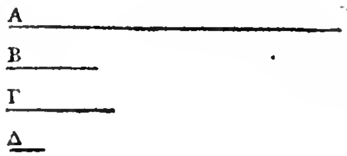
Εάν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω[1] ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

PROPOSITIO XL.

Si numerus partem habeat quamcumque, mensurabitur a denominato a parte numero.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et a B parte denominatus sit Γ; dico Γ ipsum A metiri.



Επεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμώνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ· ὃ μέρος ἄρα[2] ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim B ipsius A pars est et denominata ab ipso Γ, est autem Δ unitas ipsius Γ pars denominata ab eo; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius Γ numeri eadem pars est et B ipsius A; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; ipse Γ igitur ipsum A metitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XL.

Si un nombre a une partie quelconque, ce nombre sera mesuré par le nombre dénommé par cette partie.

Que le nombre A ait une partie quelconque B, et que le nombre Γ soit dénommé par B; je dis que Γ mesure A.

Puisque B est une partie de A dénommée par Γ, et que l'unité Δ est une partie de Γ dénommée par lui, l'unité Δ est la même partie du nombre Γ que B l'est de A; donc l'unité Δ mesure le nombre Γ autant de fois que B mesure A; donc par permutation l'unité Δ mesure le nombre B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ mesure A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

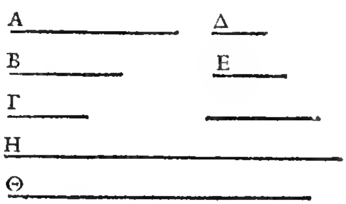
Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ[1].

PROPOSITIO XLI.

Numerum invenire, qui minimus existens, habeat datas partes.

Sint datæ partes A, B, Γ; oportet igitur numerum invenire, qui minimus existens habeat datas partes A, B, Γ.



Ἔστωσαν τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ[2], οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ[3] ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η· ὁ Η ἄρα[4] ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. Τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὤν. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὶς τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ[5]. Ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων

Sint ab ipsis A, B, Γ partibus denominati numeri, Δ, E, Z, et sumatur ab ipsis Δ, E, Z minimus mensuratus numerus H; ipse H igitur denominatas partes habet ab ipsis Δ, E, Z. Ab ipsis autem Δ, E, Z denominatæ partes sunt A, B, Γ. Ipse H igitur habet A, B, Γ partes. Dico et minimum esse. Si enim non, sit aliquis Θ ipso H minor numerus qui habeat A, B, Γ partes. Quoniam Θ habet A, B, Γ partes; ipse Θ igitur a

PROPOSITION XLI.

Trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait des parties données.

Soient A, B, Γ les parties données; il faut trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait les parties données A, B, Γ.

Que les nombres Δ, E, Z soient dénommés par les parties A, B, Γ; prenons le plus petit nombre H qui est mesuré par Δ, E, Z (38. 7); le nombre H aura des parties dénommées par Δ, E, Z (39. 7). Mais les parties dénommées par Δ, E, Z sont A, B, Γ; donc H a les parties A, B, Γ. Je dis que H est le plus petit. Car si cela n'est pas, soit un nombre Θ plus petit que H qui ait les parties A, B, Γ. Puisque Θ a les parties A, B, Γ, le nombre Θ sera mesuré par les nombres dénommés par les parties A, B, Γ (40. 7). Mais les nombres dénommés ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρεσι. Τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ Η, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τὶς τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

denominatis numeris ab A, B, Γ partibus mensurabitur. Ab ipsis autem A, B, Γ partibus denominati numeri sunt Δ, E, Z; ipse Θ igitur ab ipsis Δ, E, Z mensuratur, et est minor ipso H, quod est impossibile; non igitur erit aliquis ipso H minor numerus, qui habeat A, B, Γ partes. Quod oportebat ostendere.

par les parties A, B, Γ sont Δ, E, Z; donc Θ plus petit que H sera mesuré par Δ, E, Z, ce qui est impossible; il n'y a donc pas quelque nombre plus petit que H qui ait les parties A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME LIVRE.

COLLATIO
CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ
IMPERIALIS,
CUM EDITIONE OXONIÆ,
CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI SUNT MOMENTI.

Litterâ *a* antecedente designatur codex 190; litterâ *b*, editio Oxoniæ; litterâ *c*, codex 1038; litterâ *d*, codex 2466; litterâ *e*, codex 2344; litterâ *f*, codex 2345; litterâ *g*, codex 2342; litterâ *h*, codex 2346; litterâ *k*, codex 2481; litterâ *l*, codex 2531; litterâ *m*, codex 2547; litterâ *n*, codex 2343 (*).

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
θ′ (1) εἰρημμένην	*Idem. a*	deest. *b, d, e, f, h, k, l, m, n.*
ι′ (2) ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι·	*Id. a, d, m.* . . .	ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· *b, e, f, h, k, n.*
ιέ (3) πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν	*Id. a, d, e, h, k, l, m.*	desunt. *b, f, n.*
ιή (4) τῆς	*Id. a, d, e, f, h, k, l, n.*	deest. *b.*
(5) αὐτῆς	*Id. a, d, e, h, m.* .	αὐτῆς τῆς *b, h.*
ιθ′ (6) σχῆμα	*Id. a, d, e, f, k, l, m, n.*	deest. *b.*
(7) ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου.	*Id. a, d, e, h, k, l, m, n.*	desunt. *b, f.*
κ′ (8) Σχήματα εὐθύγραμμά . .	*Id. a, d, m.* . . .	Εὐθύγραμμα σχήματά *b, e, f, h, k, l, m, n.*

(*) Initium codicis 1038 deest usque ad propositionem octavam secundi libri elementorum, et initium codicis 2342 usque ad propositionem trigesimam secundam primi libri.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
κδ' (9) τὰς	*Id.* a,d,e,f,h,k,l,m,n.	deest. *b*.
κϛ' (10) ἀνίσους	*Id.* a, d, e, f, h,k,l,m.	ἀνίσας *b*, *n*.
κζ' (11) τε	δὲ. *a*.	τὲ *b*, *d*, *e*, *f*, *k*, *l*.
κθ' (12) τὰς	*Id.* a,d,e,f,h,k,l,m,n.	deest. *b*.
λέ (13) εἰς	*Id.* a,d,e,f,h,k,l,m,n.	ἐπ' *b*.

POSTULATA.

β' (1) ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς	*Id.* *a*, *d*.	κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας *b*, *e*, *f*, *h*, *k*.
δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.	*Id.* *a*, *d*, *e*, *f*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.	deest. *b*.
ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.	*Id.* *a*, *d*, *e*, *f*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*. *Nota.* Verbum τις primæ lineæ, quod adest in codice 190, deest in omnibus aliis codicibus. Ultimum verbum γωνίαι adest in omnibus codicibus; in codice 190, verbum αὐταὶ vicem verbi γωνίαι implet.	deest. *b*.
ϛ'. Καὶ δύο εὐθείας μὴ περιέχειν.	*Id.* *a*, *e*, *h*, *k*. . .	deest. *b*, *d*, *f*, *h*, *l*, *m*, *n*.

Hoc postulatum in codice *e* exaratur eâdem manu in postulatis, et alienâ in not. com.; in codice *f* alienâ in postulatis, et eâdem in not. com.; in codicibus *h*, *k* in post. et in com. not. eâdem manu exaratur.

NOTIONES COMMUNES.

θ'. (1) ἐστι.	εἶναι.	ἐστι.
ι'. deest.	*Id.* a,d,f,h,k,l,m,n.	ι'. καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. *b*.
ιά. deest. *a*.	*Id.* *b*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.	ιά. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
		αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. *b*.
ιβ'. deest.	deest. *a*.	ιϛ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν. *b*, *d*, *f*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO I.

1. Εκθέσις.	*Id. a*, *d*, *e*. . . .	deest. *b*, *f*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.
2. Εὐθεία	*Id.*	deest.
3. Προσδιορισμός.	*Id. a*, *d*, *e*. . . .	deest. *b*, *f*, *h*, *k*, *m*, *n*.
4. πεπερασμένης	*Id.*	deest.
5. Κατασκευή.	*Id. a*, *d*, *e*. . . .	deest. *b*, *f*, *h*, *k*, *m*, *n*.
6. Αποδείξις. Καὶ ἐπεὶ . . .	*Id. a*, *d*, *e*. . . .	Επεὶ οὖν *b*, *f*, *h*, *k*, *m*, *n*.
7. ἴση ἐστίν·	*Id.*	ἐστὶν ἴση·
8. Σύμπερασμα.	*Id. a*, *d*, *e*. . . .	deest. *b*, *f*, *h*, *k*, *m*, *n*.
9. συνίσταται	*Id.*	συνέσταται

PROPOSITIO II.

1. τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ . .	*Id.*	τῇ ΒΓ εὐθείᾳ
2. ὁ	*Id.*	deest.
3. τῷ Δ, καὶ διαστήματι . .	*Id.*	μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ
4. Πάλιν, ...	*Id.*	Καὶ πάλιν,

PROPOSITIO III.

1. γὰρ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO IV.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. σημεῖον	*Id.*	deest.
3. ἐστὶν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ	*Id.*	ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ
2. ΑΒ τῇ ΑΓ, μία	*Id.*	ΑΓ τῇ ΑΒ ἑτέρα
3. ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ . . .	*Id.*	ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ
4. τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι . .	*Id.*	τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον

PROPOSITIO VII.

1. αἱ	deest.	αἱ
2. τὰ Α, Β·	*Id.*	τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις·
3. Καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκϐεϐλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπ' τὰ Ε, Ζ.	Desunt in omnibus codicibus et in omnibus editionibus.	

PROPOSITIO VIII.

1. τὰς	deest.	τάς
2. αἱ	deest.	αἱ

PROPOSITIO IX.

1. γὰρ	*Id.*	deest.
2. ἴση ἐστίν.	*Id.*	ἐστὶν ἴση.

PROPOSITIO X.

1. εὐθεῖαν πεπεραμένην . . .	*Id.*	deest.
2. ἴση ἐστίν.	*Id.*	ἐστὶν ἴση.
3. ἴση ἐστίν	*Id.*	ἐστὶν ἴση

PROPOSITIO XI.

1. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν·	*Id.*	ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν·
2. εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται . . .	*Id.*	γραμμὴ ἦκται εὐθεῖα

PROPOSITIO XII.

1. εὐθεῖα·	*Id.*	deest.
2. εὐθεῖαι·	*Id.*	deest.
3. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν·	*Id.*	ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν·

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. Εὰν	*Id.*	Ὡς ἂν
2. ἤτοι	*Id.*	ἢ
3. εὐθεία	*Id.*	deest.
4. ἴσαι εἰσί.	*Id.*	εἰσὶν ἴσαι.
5. ἄρα	*Id.*	ἄρα γωνίαι αἱ
6. Εὰν	*Id.*	Ὡς ἂν

PROPOSITIO XV.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.	deest. *a*, *h*, *i*, *k*, *n*. In codicibus *d*, *e*, *f* hoc corollarium exaratum est in margine vel inter lineas.	Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι. *b*, *m*.

PROPOSITIO XVI.

1. προσεκβληθείσης, ...	*Id.*	ἐκβληθείσης,
2. γωνιῶν	*Id.*	deest.
3. ἐπ' εὐθείας	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XVIII.

1. γὰρ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XX.

1. desunt.	desunt.	ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶ·
2. ΔΑ τῇ ΑΓ·	*Id.*	ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ·

PROPOSITIO XXI.

1. πλευραὶ	*Id.*	deest.
2. πλευραὶ	deest.	πλευραὶ
3. ταῦτα τοίνυν	*Id.*	τὰ αὐτὰ ἄρα

PROPOSITIO XXII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. εὐθείαις, ...	deest.	εὐθείαις,
2. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.	Id.	desunt.
3. καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ	πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, καὶ διαστήματι	Καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ
4. συνέσταται	Id.	συνέστηκε
5. οὖν	Id.	γὰρ

PROPOSITIO XXIII.

1. δύο	Id.	αἱ δύο

PROPOSITIO XXIV.

1. γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ	ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας	γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ ΕΔΖ
2. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
3. αὐτῇ	αὐτῷ	αὐτῇ
4. ἐστί·	deest.	ἐστί·
5. ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία	Id.	γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ
6. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XXV.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. δὲ βάσιν	Id.	βάσιν δὲ
3. ἤχθη·	deest.	ἤχθη·
4. ΒΑΓ	Id.	ΒΑΓ γωνία
5. ἂν ἦν	Id.	ἦ
6. γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ	Id.	Η ὑπὸ ΒΑΓ γωνία
7. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ,	Id.	ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων,

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. ἂν ἦν	*Id.*	ῇ
9. ΒΑΓ	*Id.*	ΒΑΓ γωνία

PROPOSITIO XXVI.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. ἤτοι	*Id.*	ἤτον
3. Εστω	*Id.*	Εστωσαν
4. ἐστίν.	*Id.*	ἔσται.
5. ἐστὶ, ...	*Id.*	ἔσται,
6. ἔσονται, ...	*Id.*	ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,
7. τῇ	*Id.*	deest.
8. τῇ λοιπῇ γωνίᾳ	*Id.*	λοιπῇ
9. ἡ	*Id.*	deest.
10. Εστω μείζων, εἰ δυνατὸν, ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ,	*Id.*	Εστω εἰ δυνατὸν μείζων ἡ ΒΓ,
11. ἔσονται, ...	*Id.*	ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ
12. ΒΓΑ	*Id.*	ΒΓΑ γωνίᾳ
13. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση·	hæc verba in margine alienâ manu exarata sunt.	concordat cum edit. Paris.
14. ἴσον, καὶ λοιπὴ	*Id.*	ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ
15. ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστίν.

PROPOSITIO XXVII.

1. ΓΔ.	*Id.*	ΓΔ εὐθεία.
2. ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ,	*Id.*	μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ καὶ ἴση,

PROPOSITIO XXVIII.

1. ποιῇ·	deest.	ποιῇ·
2. ἀπεναντίον	*Id.*	ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη

PROPOSITIO XXIX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη	desunt.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
2. τε	deest.	τε
3. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη	desunt.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
4. ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ.	*Id.*	ἡ ὑπὸ ΑΗΘ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ.
5. Ἀλλὰ	*Id.*	Ἀλλὰ καὶ
6. αἱ	*Id.*	καὶ αἱ

PROPOSITIO XXX.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. εὐθείας	δύο εὐθείας	εὐθείας
3. αἱ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς	conclusio deest	conclusio adest.

PROPOSITIO XXXI.

1. σημείου,	σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ αὐτῆς,	σημείου,
2. ἐμπίπτουσα	*Id.*	ἐμπεσοῦσα

PROPOSITIO XXXII.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. ἐκτὸς	deest.	ἐκτὸς

PROPOSITIO XXXIII.

1. τε	*Id.*	deest.
1. γὰρ	deest.	γὰρ
5. ἐστίν·	deest.	ἐστίν·
4. τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ	deest.	τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ

PROPOSITIO XXXIV.

1. χωρίον	*Id.*	deest.
2. πλευρὰν	*Id.*	πλευρὰν τῇ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν	*Id.*	desunt.
4. ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση. .	*Id.*	ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν.
5. δὲ	deest.	δὲ
6. ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί·	ἴση· καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ ἴση.	ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί.

PROPOSITIO XXXV.

1. ὄντα	deest.	ὄντα
2. ΕΒΓΖ.	ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.	ΕΒΓΖ.
3. ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. . . .	*Id.*	τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ.
4. ἐστὶν ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστίν.
5. ἐστὶν ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστί.
6. ἐστὶν ἴση, ...	*Id.*	ἴση ἐστὶν,
7. ἔσται.	*Id.*	ἐστί.
8. ἐστὶν ἴσον.	*Id.*	ἴσον ἐστί.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. ὄντα	deest.	ὄντα
3. ἀλλὰ	*Id.*	ἀλλὰ καὶ
4. τε	deest.	τε
5. ἐστὶν ἴσον.	*Id.*	ἴσον ἐστί.

PROPOSITIO XXXVII.

1. ὄντα	deest.	ὄντα
2. Ε, Ζ, ...	*Id.*	Ε, Ζ σημεῖα,
3. εἴσιν ἴσα·	*Id.*	ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ,
4. εἰσι	*Id.*	ἐστι

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἐστίν.	*Id.*	εἰσίν.
2. τὰ	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ὄντα	deest.	ὄντα
4. ἐπὶ	κατὰ	ἐπὶ
5. αὐτὸ δίχα	Id.	δίχα αὐτὸ
6. αὐτὸ δίχα	Id.	δίχα αὐτὸ

PROPOSITIO XXXIX.

1. καὶ	Id.	deest.
2. ἴσα τρίγωνα	Id.	τρίγωνα ἴσα
3. μέρη·	μέρη τῆς ΒΓ	μέρη·
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἄρα	δὴ	ἄρα
6. ταῖς ΒΓ, ΑΕ.	deest.	ταῖς ΒΓ, ΑΕ.
7. τρίγωνον	Id.	deest.
8. ἐστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO XL.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. καὶ	Id.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη,
3. ἴσα τρίγωνα	Id.	τρίγωνα ἴσα
4. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη·	deest.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη·
5. ἄρα	δὴ	ἄρα
6. τριγώνῳ·	deest.	τριγώνῳ·
7. τρίγωνον	deest.	τρίγωνον
8. ἐστὶν	Id.	deest.
9. ἐστιν	Id.	ἐστιν
10. ἐστὶ παράλληλος.	Id.	παράλληλός ἐστι.

PROPOSITIO XLI.

1. ἐστὶ	Id.	ἔσται
2. τε	deest.	τε
3. παραλλήλοις ἔστω	Id.	ἔστω παραλλήλοις
3. τρίγωνον	Id.	deest.

PROPOSITIO XLII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ·	*Id.*	εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.
2. γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· .	*Id.*	εὐθύγραμμος γωνία Δ·
3. ἴση	deest.	ἴση
4. τρίγωνον	*Id.*	deest.
5. συνέσταται	*Id.*	συνεστάθη
6. ἥ τις	*Id.*	ἥ

PROPOSITIO XLIII.

1. παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ	*Id.*	τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ
2. τριγώνῳ	*Id.*	deest.
3. λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον.	*Id.*	λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.

PROPOSITIO XLIV.

1. ὥστε	*Id.*	ὥσπερ
2. ἐνέπεσεν	*Id.*	ἐμπεπτωκεν
3. ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα . . .	*Id.*	ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ
4. εἰσὶν ἴσαι·	*Id.*	ἴσαι εἰσίν·
5. τὴν	*Id.*	deest.
6. τὰ	*Id.*	deest.
7. Αλλὰ	*Id.*	Αλλὰ καὶ
8. ἄρα	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XLV.

1. γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.	*Id.*	εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.
2. μὲν	*Id.*	deest.
3. τῇ δοθείσῃ	*Id.*	ἴση
4. ἴση ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶν ἴση
5. ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα	*Id.*	ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. ἐστὶν ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστίν.
7. εὐθεῖα	εὐθείας	εὐθεῖα
8. ἐστὶν	ἐστὶ καὶ	ἐστὶν
9. ἐστὶν ἴσον.	*Id.*	ἴσον ἐστί.
10. τῇ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XLVI.

1. Ἀλλὰ	*Id.*	Ἀλλὰ καὶ

PROPOSITIO XLVII.

1. γωνίαν·	*Id.*	deest.
2. εὐθεία	*Id.*	deest.
3. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὴ	*Id.*	καὶ ἐπεὶ δύο.
4. ἴση·	*Id.*	ἴση ἐστίν·
5. ἴση,	*Id.*	ἐστὶν ἴση,
6. ἔστι	deest.	ἔστι
7. εἰσι παραλλήλοις	*Id.*	παραλλήλοις εἰσὶ
8. τετράγωνον	*Id.*	τετράγωνον ΒΕ

PROPOSITIO XLVIII.

1. εὐθεία πρὸς ὀρθὰς	*Id.*	πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα
2. ἴση·	*Id.*	ἐστὶν ἴση·
3. ἴση.	*Id.*	ἐστὶν ἴση.

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
β′ (1) παραλληλογράμμον ἐν .	Id.	ἐν παραλληλογράμμον

PROPOSITIO I.

1. τε ὑπὸ	Id.	ὑπό τε
2. τε ὑπὸ	Id.	ὑπό τε
3. ἔτι	deest.	ἔτι
4. μὲν	Id.	deest.
5. τῶν	Id.	deest.
6. τὸ	τῷ	τὸ
7. τὸ	τῷ	τὸ
8. τὸ	τῷ	τὸ

PROPOSITIO II.

1. τὰ	τὸ	τὰ
2. περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα .	περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον	περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα
3. τῆς	Id.	τῶν
4. τῶν	deest.	τῶν
5. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ

PROPOSITIO III.

1. τμηθῇ ὡς ἔτυχε, ...	Id.	ὡς ἔτυχε τμηθῇ,
2. Γ·	Id.	Γ σημεῖον·
3. τῆς	τοῦ	τῆς
4. διήχθω	Id.	ἤχθω
5. τὸ	Id.	deest.

PROPOSITIO IV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν	deest.	τῶν
3. ἀλλὰ ἡ μὲν	Id.	ἀλλὰ καὶ ἡ
3. καὶ εἰς αὐτὰς ἐπέπεσεν ἡ ΓΒ· .	verba in margine recenti manu exarata.	καὶ εἰς αὐτὰς ἐπέπεσεν ἡ ΓΒ·
4. εἰσὶν ἴσαι.	Id.	ἴσαι εἰσίν.
5. ἀπὸ	deest.	ἀπὸ
6. τῶν	deest.	τῶν
7. τεσσάρα	Id.	deest.
8. τὸ	deest.	τὸ

ALITER.

Hæc altera demonstratio exarata est in chartâ paginæ contiguâ.

1. καὶ ἄλλως.	Id.	Ετέρα δεῖξις.
2. ἐντὸς καὶ	desunt.	ἐντὸς καὶ
3. τῷ	Id.	τὸ
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἐστί.	deest.	ἐστί.
6. ἐστὶν ἴσον	Id.	ἴσον ἐστὶ
7. ἴση ἐστὶ	Id.	ἴση
8. ἄρα	deest.	ἄρα

COROLLARIUM.

9. ἐστιν	deest.	ἐστιν

PROPOSITIO V.

1. ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.	Id.	ἤχθω πάλιν ἡ ΚΛΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.
2. ἐστὶν ἴση·	Id.	ἴση ἐστί
3. ΝΞΟ γνώμονι	Id.	ΔΖ καὶ ΔΛ
4. μὲν	deest.	μὲν

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
5. γὰρ ἡ	ἡ γὰρ	γὰρ ἡ
6. ΔΒ.	*Id.*	ΔΒ· τὸ δὲ ΖΔ, ΔΛ ἐστὶν ὁ ΝΞΟ γνώμων·
7. τῦς	*Id.*	deest.

PROPOSITIO VI.

1. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι	Hæc verba manu recenti inter lineas exarata sunt.	ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι
2. ἐστὶν	*Id.*	deest.
3. Αλλὰ	*Id.*	Αλλὰ καὶ
4. ὀρθογωνίῳ.	deest.	ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO VII.

1. Επεὶ οὖν	*Id.*	καὶ ἐπεὶ
2. ἴσον ἐστίν·	*Id.*	ἐστὶν ἴσον·
3. τῷ	*Id.*	τῷ τε

PROPOSITIO VIII.

1. ἀπὸ τοῦ	*Id.*	deest.
2. ἴση τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ,	*Id.*	τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ,
3. ἄρα	*Id.*	deest.
4. μὲν	deest.	μὲν
5. καὶ	*Id.*	deest.
6. μὲν	deest.	μὲν
7. ἐστὶν ἴσον,	ἴσον ἐστί,	ἐστὶν ἴσον,
8. ἴσον ἐστί·	*Id.*	ἐστὶν ἴσον·
9. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
10. ἐστὶν ἴση·	*Id.*	ἴση ἐστί·
11. ἴση ἐστί.	*Id.*	ἐστὶν ἴση.
12. μὲν	deest.	μὲν
13. τετραπλάσιά ἐστιν.	*Id.*	ἐστὶ τετραπλάσια.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
14. ἐστὶ τοῦ ΑΚ.	*Id.*	τοῦ ΑΚ ἐστί.
15. γὰρ	*Id.*	γὰρ καὶ
16. τῆς	deest.	τῆς
17. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ·	*Id.* . . . . in codice *a* legitur ἀπὸ ΑΓ, ἀπὸ ΑΔ.	desunt.

PROPOSITIO IX.

1. παράλληλος ἤχθω	desunt.	adsunt.
2. καὶ εἰσὶν ἴσαι·	*Id.*	desunt.
3. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
4. πλευρᾷ	deest.	πλευρᾷ
5. ἐστὶ πάλιν	*Id.*	πάλιν ἐστὶ
6. τῆς	deest.	τῆς
7. τῆς	deest.	τῆς
8. τῆς	deest.	τῆς
9. τῆς	deest.	τῆς
10. ἴσον ἐστὶ	ἐστὶν ἴσον	ἴσον ἐστὶ
11. ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ.	*Id.*	ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον.
12. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ·	*Id.*	ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ·
13. ἐστὶν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO X.

1. ἀναγραφέντος τετραγώνου. .	ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.	concordat cum edit. Paris.
2. πάλιν	*Id.*	deest.
3. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
4. ὀρθῆς ἐστιν	*Id.*	ὀρθῆς ἐστιν
5. ΔΗΒ	*Id.*	ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ	ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΕΓ	concordat cum edit. Paris.
7. ΗΖ	*Id.*	ΔΖ τετράγωνον
8. ΖΕ·	*Id.*	ΖΕ τετραγώνῳ·
9. ΕΗ·	*Id.*	ΕΗ τετράγωνον·
10. ΑΗ	*Id.*	ΑΗ τετράγωνα.
11. ΓΔ.	*Id.*	ΓΔ τετραγώνων.

PROPOSITIO XI.

1. ποιεῖν	*Id.*	εἶναι
2. τῆς ΕΒ τετραγώνῳ	ΕΒ	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	deest.	τῆς
4. ὀρθογώνιον	deest.	ὀρθογώνιον
5. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ·	*Id.*	Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ.
6. τῆς	deest.	τῆς
linea decima.		
7. ποιεῖν	*Id.*	εἶναι

PROPOSITIO XII.

1. ἐκβληθεῖσαν	deest.	ἐκβληθεῖσαν
2. γωνίαν,	deest.	γωνίαν,
3. περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.	desunt.	περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.
4. τῷ.	*Id.*	τό.
5. ἴσον	*Id.*	ἴσον ἐστὶ
6. τετραγώνου	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XIII.

1. τοῦ	*Id.*	τῆς
2. τῆς	deest.	τῆς

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
4. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
5. τῶν	deest.	τῶν
6. τὸ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. γὰρ	*Id.*	deest.
2. μὲν	deest.	μὲν
3. τῆς ΗΕ ἴσον	ΗΕ ἴσον	τῆς ΗΕ ἴσα
4. τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ ἐστὶν, .	*Id.*	τὸ ΒΔ ἐστὶν,
5. καὶ	*Id.*	deest.

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
α'. (1) ἴσαι εἰσὶν.	*Id.*	εἰσὶν ἴσαι.
β'. (2) ἐπὶ μηδέτερα μερή. . .	*Id.*	deest.
δ'. (3) ἀπὸ	*Id.*	deest.
ή. (4) τις	deest.	τις
ί. (5) τοῦ κύκλου συσταθῇ . .	*Id.*	αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ

PROPOSITIO I.

1. Ηχθω	*Id.*	Διήχθω.
2. κύκλου.	deest.	κύκλου.
3. linea 12 paginæ 119 δύο δὴ	*Id.*	δύο δὲ
4. ἐστὶν ἴση, ...	*Id.*	ἴση ἐστὶν,
5. τοῦ Η·	deest.	τοῦ Η.
6. ἴση ἐστίν.	*Id.*	ἐστὶν ἴση.
7. ἴσων	deest.	ἴσων
8. ἐλάττων τῇ μείζονι, ...	*Id.*	μείζων τῇ ἐλάττονι.
9. κύκλου.	deest.	κύκλου.
10. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. . . .	desunt.	Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

COROLLARIUM.

11. εὐθεῖα τις	*Id.*	τις εὐθεῖα
12. κύκλου.	κύκλου. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.	κύκλου.

PROPOSITIO II.

1. αὐτὰ	deest.	αὐτὰ
2. δύο τυχόντα	*Id.*	τυχόντα δύο
3. ΔΖΕ.	*Id.*	ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε.
4. linea 10 paginæ 122 πεσεῖται.	*Id.*	deest.

PROPOSITIO III.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
linea 1 paginæ 123 τέμνει·	Id.	τεμεῖ·
linea 2 paginæ 123 τέμνει.	Id.	τεμεῖ.
1. δὴ	deest.	δὴ
2. εἰσὶ,	deest.	εἰσὶ.
3. γωνία ἄρα	Id.	καὶ γωνία
4. ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE.	Id.	ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθή ἐστιν.
5. οὖσα	Id.	deest.
6. αὐτὴν	deest.	αὐτὴν
7. καὶ	deest.	καὶ
8. ἡ EA	Id.	ἡ ἐκ τοῦ κέντρου EA
9. ἄρα	deest.	ἄρα

PROPOSITIO IV.

1. σημεῖον,	Id.	deest.
2. κέντρου	Id.	κέντρου ἠγμένην
3. τέμνει·	Id.	τεμεῖ·
4. ἄρα ἐστὶν	Id.	ἐστὶν ἄρα
5. τέμνει·	Id.	τεμεῖ·
6. ἡ	Id.	deest.
7. ἐστὶν.	Id.	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἡ EΓ καὶ,	Id.	καὶ ἡ EΓ,
2. ἐστὶν ἴση,	Id.	ἴση ἐστὶν,
3. ἐστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO VI.

1. ἐντὸς,	deest.	ἐντὸς,
2. ἐφαπτέσθωσαν	ἁπτέσθωσαν	ἐφαπτέσθωσαν

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ἔσται	*Id.*	’στὶν
4. καὶ	deest.	καὶ
5. ἐστὶν ἴση	*Id.*	ἴση ἐστὶν
6. ἐστὶν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO VII.

1. πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες·	*Id.*	προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸ τὸν κύκλον·
2. μόνον	*Id.*	μόνον εὐθεῖαι
3. EB, EZ ἄρα	*Id.*	ἄρα EB, EZ
4. δὲ	deest.	δὲ
5. ἐστί.	*Id.*	deest.
6. ἴσαι	*Id.*	ἴσαι εὐθεῖαι
7. ἐστὶν ἴση, ...	*Id.*	ἴση ἐστὶν,
8. μὲν καὶ ἡ ZΘ τῇ ZH· . . .	*Id.*	ἡ ZΘ τῇ ZH ἴση ἐστί·
9. ἐστὶν ἴση, ...	*Id.*	ἴση ἐστὶν,
10. τῇ	τῆς	τῇ
11. HEZ	*Id.*	HEZ γωνία
12. ἐστὶν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO VIII.

1. Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν	Ἐὰν κύκλου λυφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου; ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ	Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπ-

EDITIO PARISIENSIS.

προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπ πτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη

CODEX 190.

τοῦ τε σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου προσπίπτουσα· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστί· ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημειοῦ καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἐλαχίστη δὲ ἡ μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς

EDITIO OXONIÆ.

τουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐ-

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.	διαμέτρου ἡ ΑΗ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΑΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.	θειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.
2. Αἱ δὲ	*Id.*	ἀλλ' αἱ
3. προσκείσθω	*Id.*	δὲ
4. αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα	*Id.*	αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ
5. ἴση δὲ	*Id.*	ὧν ἐστιν ἴση
6. ἴσαι	*Id.*	ἴσαι εὐθεῖαι
7. προσπεσοῦνται	*Id.*	συμπεσοῦνται
8. ἴση·	*Id.*	ἴση ἐστί·
9. δὴ	deest.	δὴ
10. ἐστὶν ἴση, ...	*Id.*	ἴση ἐστὶν,
11. Επεὶ	*Id.*	Καὶ ἐπεὶ
12. ἐστὶν ἴση·	*Id.*	ἴση ἐστίν·
13. ἄρα	deest.	ἄρα
14. ἐστὶν	*Id.*	deest.
15. ἴσαι	*Id.*	εὐθεῖαι

PROPOSITIO IX.

1. ἴσαι εὐθεῖαι, ...	*Id.*	εὐθεῖαι ἴσαι,
2. ἴσαι εὐθεῖαι, ...	*Id.*	εὐθεῖαι ἴσαι,
3. ἐστὶν ἴση	*Id.*	ἴση ἐστὶν
4. ἴση·	*Id.*	ἴση ἐστὶ
5. τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. .	*Id.*	δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.
6. ΑΒΓ	deest.	ΑΒΓ
7. κύκλου.	*Id.*	deest.

ALITER.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
8. ἡ ΖΗ ἄρα	*Id.*	ἡ δὲ ΖΗ
9. τὸ Δ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου,	*Id.*	ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ,
10. κύκλου.	κύκλου. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	κύκλου.

PROPOSITIO X.

1. Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει . .	*Id.*	Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον
2. διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε . .	*Id.*	ἐπὶ τὰ ΑΕ διήχθωσαν
3. καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, . .	*Id.*	τέμνει καὶ πρὸς ὀρθάς,
4. ἀλλήλαις	deest.	ἀλλήλαις
5. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο,	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER.

6. εὐθεῖαι ἴσαι, ...	*Id.*	ἴσαι εὐθεῖαι,
7. κέντρον ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶ κέντρον
8. ἀλλήλους	ἀλλήλων	ἀλλήλους

PROPOSITIO XI.

1. Καὶ	*Id.*	deest.
2. ἐφαπτέθωσαν	*Id.*	ἁπτέθωσαν
3. κύκλου	κύκλου τὸ	κύκλου
4. τὸ Α	*Id.*	τὸ Α σημεῖον
5. τῆς ΖΘ, ...	*Id.*	τῆς ΖΘ, ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω
6. ἐστὶν	*Id.*	deest.
7. κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.	*Id.*	ἐπ' αὐτὴν ἄρα.

ALITER.

8. ἐκβεβλήσθω	*Id.*	προσεκβεβλήσθω
9. ἄτοπον.	ἄτοπον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	ἄτοπον.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐφάπτωνται	*Id.*	ἅπτωνται
2. εὐθεῖα	deest.	εὐθεῖα
3. κύκλου	deest.	κύκλου

PROPOSITIO XIII.

1. ἐφαπάπτηται ἐάν τε ἐκτὸς. .	*Id.*	ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.
2. ἐφαπτέσθω	*Id.*	ἁπτέσθω
3. εὐθεῖα	deest.	εὐθεῖα
4. ὅπερ	*Id.*	ὅπερ ἐστὶν
5. τοῦ	*Id.*	ἡ
6. ἄρα	*Id.*	deest.
7. αὐτὰ	deest.	αὐτὰ

PROPOSITIO XIV.

1. αἱ ΑΒ, ΓΔ	*Id.*	deest.
2. ἡ	*Id.*	deest.
3. λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα	τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	*Id.*	ἐστὶ καὶ
5. ἐστὶν ἴσον, ...	*Id.*	ἴσον ἐστὶν,
6. λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν·	ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.*
2. τοῦ Ε κέντρου	τῆς ΑΔ διαμέτρου *a, c, d.*	τοῦ Ε κέντρου
3. Ε	*Id. e, f, g, h, k, l, m.*	deest.
4. ἄρα	deest. *a, f, g, h, k, l, m.*	ἄρα *b, c, d, e, h.*
5. μείζων·	*Id.*	μείζων ἐστί· *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.*
6. μὲν	*Id. a, c, d, e, g, h, k, l, m.*	deest. *b, f.*

PROPOSITIO XVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. παρεμπεσεῖται·	Id.	περεμπεσεῖται·
2. γωνίας ὀξείας	Id.	ὀξείας γωνίας
3. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν.	Id.	ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ.
4. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γονίαι αἱ	Id.	αἱ ἄρα
5. δὴ	Id.	deest.
6. γωνίας ὀξείας	Id.	ὀξείας γωνίας
7. ἡ	Id.	ἡ
8. εὐθεῖα παρεμπεσεῖται,	Id.	παρεμπεσεῖται εὐθεῖαι,
9. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. τούτου	τούτου	τουτῶν
11. ἐδείχθη.	ἐδείχθη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	ἐδείχθη.

PROPOSITIO XVII.

1. τὸ	Id.	deest.
2. τὴν	deest.	τὴν
3. ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ.	Id.	τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ
4. ΒΓΑ	Id.	deest.

PROPOSITIO XVIII.

1. ἐφαπτομένην	Id.	ἁπτομένην
2. ἐφαπτέσθω	Id.	ἁπτέσθω
3. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. ὀρθὰς	Id.	ὀρθὰς γωνίας
2. τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς	Id.	πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΕ
3. οὖν	deest.	οὖν

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ·	*Id.*	καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἴση ἐστίν·
2. ἑτέρα γωνία	*Id.*	γωνία ἑτέρα

PROPOSITIO XXI.

1. αὐτῷ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXII.

1. Ἐπεὶ οὖν	*Id.*	Καὶ ἐπεὶ
2. ἄρα τριγώνου	*Id.*	deest.
3. ἄρα	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. συσταθήσεται	*Id.*	συσταθήσονται

PROPOSITIO XXIV.

1. ἐστιν.	*Id. a, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*	εἰσιν· *b.*
2. τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης,	*Id. a.*	ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*
3. ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ	*Id. a.*	ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ. Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*

PROPOSITIO XXV.

1. δὴ	δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος .	δὴ
2. γωνία ἄρα	*Id.*	ἄρα γωνία
3. ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε	*Id.*	ἐπὶ τὸ Ε ἡ ΔΒ
4. εὐθεῖα	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
5. ἐστὶν ἴση, ...	*Id.*	ἴση ἐστὶν,
6. βάσις	*Id.*	καὶ βάσις
7. ἐστὶν ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστὶν.
8. τῷ	*Id.*	τὸ
9. κύκλος.	*Id.*	deest.
10. ἐκτὸς αὐτοῦ	*Id.*	αὐτοῦ ἐκτὸς
11. καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ	*Id.*	κἂν ᾖ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση
12. πρὸς αὐτῇ σημείῳ τὸ Α, . .	*Id.*	τῷ Α σημείῳ
13. ὡς τὸ Ε, ...	*Id.*	deest.
14. οὗπέρ ἐστι τὸ τμῆμα. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVI.

1. γὰρ	*Id.*	deest.
2. πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν,	*Id.*	ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις
3. εἰσί·	deest.	εἰσί·
4. ἐστί·	deest.	ἐστί·
5. ἐστὶν ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστί.
6. ἐστίν·	deest.	εἰσίν.
7. τμήματι.	deest.	τμήματι
8. λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρειά ἐστιν ἴση τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.	deest.	λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση

PROPOSITIO XXVII.

1. ἐπὶ	*Id. a, c, d, e, f, g, h, l, m.*	καὶ ἐπὶ *b, k.*
2. γωνία	*Id. a.*	deest. *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.*
3. ἐστὶν ἴση.	*Id. a, k.*	deest. *b, c, d, e, f, g, h, l, m.*
4. Εἰ γὰρ ἄνισος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται.	*Id. a.*	Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανέρον ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν· Εἰ δὲ οὐ μία, αὐτῶν μείζων ἐστιν. *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.*

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. αὐτοῖς	τοῖς κύκλοις	αὐτοῖς
2. τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.	τῇ ΔΘΕ.	ἴση τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.
3. ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ περιφερείᾳ.	ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.	περιφέρεια ΑΗΒ τῇ ΔΘΕ περιφερείᾳ.
4. καὶ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXIX.

1. ὑπὸ	deest.	ὑπὸ
2. εὐθεῖα	hoc verbum manu alienâ inter lineas exaratum est.	εὐθεῖα
3. καὶ ἔστω	*Id.*	deest.
4. γωνίας ἴσας ·	*Id.*	ἴσας γωνίας

PROPOSITIO XXX.

1. τεμεῖν.	*Id.*	τέμνειν.
2. τεμεῖν.	*Id.*	τέμνειν.
3. βάσις ἄρα	*Id.*	καὶ βάσις
4. κατὰ τὸ Δ σημεῖον . . .	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. τμήματι	*Id.*	deest.
2. ὀρθῆς.	*Id.*	ἐστὶν ὀρθῆς.
3. ἡ ὑπὸ ΒΑΓ	*Id.*	deest.
4. ἡ ὑπὸ ΑΔΓ	*Id.*	deest.
5. καὶ	deest.	καὶ
6. ΒΑΓ·	*Id.*	ΒΑΓ γωνία·
7. γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΔΓ	*Id.*	μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ ἔστιν ἐν τῷ
8. λέγω	*Id.*	λέγω δὴ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
9. τε	*Id.*	deest.
10. τε	*Id.*	deest.
11. γωνία	deest.	γωνία
12. περιεχομένη	*Id.*	deest.

ALITER.

13. Η	*Id.*	deest.

COROLLARIUM.

14. Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Οταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.	*Id.* . . . . hoc corollarium eâdem manu in margine exaratum est.	Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστι· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Οταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXII.

1. εἰς	*Id.*	ἐπὶ
2. εἰς	*Id.*	ἐπὶ
3. γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.	*Id.*	ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι.
4. ἀπὸ δὲ τῆς	*Id.*	σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β
5. ἄρα	*Id.*	deest.
6. Η ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.	*Id.*	deest.
7. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι·	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXXIII.

1. τῷ Γ.	*Id.*	τῷ Γ γωνία.
2. δὲ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ . . .	*Id.*	γὰρ πρὸς τῷ Γ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ὡς	καὶ ὡς	ὡς
4. καὶ	deest.	καὶ
5. Καὶ	deest.	Καὶ
6. γωνίᾳ	Id.	deest.
7. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ABE .	Id.	Καὶ ἐπεὶ τοῦ ABE κύκλου
8. εἰς	Id.	ἐπὶ
9. τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου . .	ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου .	τῷ ἐναλλαξ
10. ἔστω πάλιν	Id.	πάλιν ἔστω
11. γωνίᾳ	Id.	deest.
12. ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμηματί,	Id.	ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι ἴση,
13. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί.	Id.	ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση.
14. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ	Id.	deest.
15. ἡ	Id.	deest.
16. ἐρχέσθω ὡς ὁ AEB. . . .	Id.	εἰχέσθω ὡς AEB.
20. ἧκται	ἐστὶν	ἧκται
21. ἄρα δοθείσης	Id.	δοθείσης ἄρα

PROPOSITIO XXXIV.

1. δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.	Id.	πρὸς τὸ Δ γωνίᾳ.
2. κύκλου	deest.	κύκλου
3. ἴση ἐστι τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.	Id.	γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ.

PROPOSITIO XXXV.

1. τῶν	deest.	τῶν·
2. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ .	Id.	Ἐστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ
3. κύκλου, ...	Id.	deest.
4. τέμνειν·	Id.	τεμεῖ·
5. προσκείσθω κοινὸν	Id.	κοινὸν προσκείσθω
7. ἐδείχθη δὲ ὅτι	ἐστέ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. περιεχόμενον ὀρθογώνιον . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ ἄρα ΔΓΑ	*Id.*	ἡ ΔΓΑ
3. ΑΔ, ΔΓ	ΑΔΓ	ΑΔ, ΔΓ
4. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ζ ἴσα ἐστὶ τὰ	*Id.*	ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς
5. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ· . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. σημεῖον, ...	*Id.*	deest.
7. ἴσον	*Id.*	ἴσα
8. Αλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ·	*Id.*	Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ·

PROPOSITIO XXXVII.

1. τῆς	*Id.*	deest.
2. ΑΔ, ΔΓ	ΑΔΓ	ΑΔ, ΔΓ
3. τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ,	*Id.*	τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,
4. Ην δὲ καὶ	*Id.*	ὑποκειταὶ δὲ
5. ἐστὶ	*Id.*	deest.
linea 10 paginæ 194.		
6. καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται	*Id.*	deest.

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
β'. (1) δὲ	deest.	δὲ
δ'. (2) τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.	Id.	τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.
ε'. (3) εἰς σχῆμα ὁμοίως . . .	Id.	ὁμοίως εἰς σχῆμα

PROPOSITIO I.

1. δὲ	Id.	δὲ οὖ
2. κείσθω	Id.	καὶ κείσθω
3. μὲν	deest.	μὲν
4. τῇ Δ ἡ ΓΕ	Id.	ἡ Δ τῇ ΓΕ
5. εὐθείᾳ, ...	Id.	εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου

PROPOSITIO II.

1. πρὸς	Id.	πρὸς μὲν
2. πάλιν, πρὸς	Id.	πρὸς δὲ
3. ΖΔΕ	Id.	ΖΔΕ γωνίᾳ
4. ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ·	Id.	ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς διῆκταί τις ἡ ΑΓ·
5. ἰσογώνιον. ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒ κύκλον.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

1. ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη κατὰ	Id.	ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ
2. σημεῖα, καὶ	Id.	ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. καὶ εἴσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΑΚ, ΚΒΜ γωνίαι·	*Id.*	τετράπλευρον ὧν αἱ ὑπὸ ΚΑΜ, ΚΒΜ γωνίαι δύο ὀρθαί εἰσιν·
4. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ

PROPOSITIO IV.

1. ΔΒΓ, ...	*Id.*	ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέμνηται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ,
2. ταῖς	*Id.*	deest.
3. τὴν	*Id.*	deest.
4. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν·	*Id.*	deest.
5. καὶ	*Id.*	μὲν
6. ἐδείχθη·	*Id.*	deest.
7. ὁ	deest.	ὁ
8. εἰς	*Id.*	ἐπὶ
9. Ἐγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ. . . .	*Id.*	deest.
10. ὁ	deest.	ὁ

PROPOSITIO V.

1. εὐθεῖα	*Id.*	deest.
2. οὖν ἐντὸς πρότερον	*Id.*	πρότερον ἐντὸς
3. ἐστὶν ἴση.	*Id.*	ἴση ἐστίν.
4. ἐστὶν	*Id.*	deest.
5. Περιγραφέσθω	*Id.*	Καὶ περιγραφέσθω
6. ἐστὶν	*Id.*	deest.
7. πάλιν	deest.	πάλιν
8. Καὶ γεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ. . .	deest.	concordat cum. edit. Paris.

COROLLARIUM.

9. εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ὅ τε δὲ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει,	*Id. a.*	ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. τοῦ	*Id.*	deest.
11. συμπεσοῦνται	πεσοῦνται	συμπεσοῦνται
12. τῆς ΒΓ	τῆς ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.	τῆς ΒΓ.

PROPOSITIO VI.

1. τὸν	*Id.*	deest.
2. δύο	*Id.*	deest.
3. Διὰ	*Id.*	Κατὰ
4. γωνία.	*Id.*	deest.
5. δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον . . .	ΑΒΓΔ κύκλον	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα δοθέντα	*Id.*	δοθέντα ἄρα

PROPOSITIO VII.

1. δοθεὶς κύκλος ὁ	*Id.*	ὁ δοθεὶς κύκλος
2. δὴ	*Id.*	δὲ
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. ἐστὶ παράλληλος.	*Id.*	παράλληλός ἐστιν.
5. Ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος.	*Id.*	deest.
6. καὶ	*Id.*	deest.
7. ΖΚ·	*Id.*	ΖΚ ἐστὶν ἴση·
8. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση.	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. δὴ	*Id.*	deest.
10. τετράπλευρον.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. εἰσί.	deest.	εἰσί.
2. ἴσαι εἰσὶν, ...	deest.	ἴσαι εἰσὶν,
3. εἰσίν.	deest.	εἰσίν.
4. ἐδείχθη	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
5. μὲν	Id.	deest.
6. ἄρα τὸ δοθέν	Id.	τὸ δοθὲν ἄρα

PROPOSITIO IX.

1. ἴση·	Id.	ἐστὶν ἴση·
2. γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ·	Id.	ἡ ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση·

PROPOSITIO X.

1. καὶ κέντρῳ τῷ Α, καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ	Id.	κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ
2. τῶν	deest.	τῶν
3. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ,	Id.	Επεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΔ,
4. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση . . .	Id.	καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση
5. γωνίᾳ	Id.	deest.
6. εἰσι διπλασίους.	Id.	διπλασίους εἰσίν.
7. καὶ	deest.	καὶ
8. τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ. .	Id.	διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ.

PROPOSITIO XI.

1. Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν .	λοιπῶν	concordat cum edit. Paris.
3. ἑκατέρας	Id.	deest.
4. ΔΕ, ΕΑ	ΓΕ, ΔΕ, ΕΑ	ΔΕ, ΕΑ
5. ἐστὶν ἴση, ...	Id.	ἴση ἐστὶ,
6. ἐστὶν ἴση.	Id.	ἴση ἐστί.
7. ἄρα γωνία	Id.	γωνία ἄρα
8. ἐστὶν ἴση.	Id.	ἴση ἐστί.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐστὶν	*Id.*	deest.
2. ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· .	*Id.*	τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον·
3. Ὥστε τὰ	*Id.*	τὰ ἄρα
4. λοιπῷ	deest.	λοιπῷ
5. ΓΚ τῇ ΒΚ.	*Id.*	ΒΚ τῇ ΓΚ.
6. ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἐστὶν ἴση·	ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν, ἴση ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ·	concordat cum edit. Paris.
7. διπλῆ	deest.	διπλῆ
8. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΔ ἴση.	*Id.*	deest. deest.
9. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
10. ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, . . .	desunt.	concordat cum edit. Paris.
11. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση·	*Id.*	Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ Γ, καὶ ἔστι διπλῆ ἡ μὲν ΛΔ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ·

PROPOSITIO XIII.

1. ἰσόπλευρόν	*Id.*	ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν
2. ὑπὸ	*Id.*	ὑφ'
3. ἐστί·	deest.	ἐστί·
4. ἐστὶν ἴσον, ...	*Id.*	ἴσον ἐστὶ,
5. ἔσονται, ...	*Id.*	εἰσὶν
6. διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ,	*Id.*	ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ διπλῆ,
7. ὀρθῇ	deest.	ὀρθῇ
8. ταῖς	deest.	ταῖς
9. κύκλος	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ὃ	*Id.*	ὅπερ
2. αἱ	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. καὶ διαστήματι	*Id.*	διαστήματι δὲ
4. περιγεγραμμένος	*Id.*	περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.
5. ἄρα τὸ δοθὲν	*Id.*	τὸ δοθὲν ἄρα

PROPOSITIO XV.

1. ἴση ἐστίν·	*Id.*	ἐστὶν ἴση·
2. αἱ	*Id.*	deest.
3. ΖΑΒΓΔ	*Id.*	ΖΑΒΓΔ περιφερεία
4. ΕΔΓΒΑ	*Id.*	ΕΔΓΒΔ περιφερεία
5. περιφερείας	*Id.*	deest.
6. δὴ	*Id.*	δὲ
7. ἐστὶ	*Id.*	deest.

COROLLARIUM.

8. Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων	Ο ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλον διαιρεσέων	concordat cum edit. Paris.
9. τε καὶ περιγράψομεν. . . .	Οπερ ἔδει ποιῆσαι. . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. Εγγεγράφθω	*Id.*	Γεγράφθω
2. ἔσται	*Id.*	ἐστὶ
3. εὐθείας, ...	deest.	εὐθείας,
4. εἰρημένοις, ...	δείξεων	εἰρημένοις
5. ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον,	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. deest.	Οπερ ἔδει ποιῆσαι. . . .	deest.

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
γ΄. (1) πρὸς ἄλληλα	deest.	concordat cum edit. Paris.
δ΄. (2) Ἀναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης.	*Id. a. c.*	hæc definitio, quæ est octava in edit. Oxoniæ, ita se habet : Ἀναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν ὁμοιότης. *b.*
ϛ΄. (3) ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ	*Id.*	ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ
ζ. (4) λόγον μεγέθη,	*Id.*	μεγέθη λόγον,
θ΄. (5) ἐλαχίστη	*Id.*	ἐλαχίστοις
ιά. (6) τὸ	deest.	τὸ
(7) ὁμοίως ὡς	*Id.*	ἐνὶ πλεῖον, ὡς
ιβ΄. (8) λέγεται,	*Id.*	λέγεται εἶναι,
ιϛ΄. (9) δὲ	deest.	δὲ
ιη΄. (10) αὐτοῖς ἴσων	*Id.*	ἴσων αὐτοῖς
ιθ΄. (11) Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.	deest. *a. c.*	concordat cum edit. Paris. *b.*
κ΄. (12) αὐτοῖς ἴσων	*Id.*	ἴσων αὐτοῖς
(13) μετέθεσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO I.

1. μεγέθων	*Id.*	deest.
2. ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη	*Id.*	μεγέθη ἐστὶν ἐν τῷ AB
2. ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ.	*Id.*	ΓΘ, ΘΔ τῷ πλήθει ΑΗ, ΗΒ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ·	ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε,Ζ·	concordat cum edit. Paris. his tantum exceptis : in edit. Paris. legitur ἴσον ἐστὶ, in edit. vero Oxoniæ legitur ἐστὶν ἴσον.

PROPOSITIO II.

1. μεγέθη	deest.	μεγέθη
2. ἄρα	*Id.*	ἄρα τὸ

PROPOSITIO III.

1. ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον. .	ὀσαπλάσιον	concordat cum edit. Paris.
2. τοσαῦτα	*Id.*	τοσαῦτα δὴ
3. μὲν	*Id.*	deest.
4. δὴ	*Id.*	δὲ

PROPOSITIO IV.

1. ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, .	*Id.*	ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η ἐστὶν,
2. ἀλλὰ ἔτυχεν	*Id.*	deest.
3. ἔλλαττων. Καὶ ἐστὶ . . .	ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἐλάττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι	ἐλάττον. Καὶ ἐστὶ

COROLLARIUM.

4. ὅτι	deest.	ὅτι

PROPOSITIO V.

1. καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ,	*Id.*	deest.
2. ἔσται	*Id.*	ἐστὶ

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῷ Ζ ἴσον	ἴσον τῷ Ζ	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	deest.	καὶ
3. τῷ Ζ τὸ ΚΓ	Id.	τὸ ΚΓ τῷ Ζ
4. ἐστίν ἴσον.	Id.	ἴσον ἐστίν.
5. εἰ	Id.	ὅτε

PROPOSITIO VII.

1. τι	Id.	deest.
2. μὲν	Id.	deest.
3. τοῦ Γ πολλαπλάσιον· . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστίν·	Id.	deest.
5. δὴ	deest.	δὴ
6. δὴ	Id.	deest.
7. τὸ Ζ	Id.	deest.
8. deest.	Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναπάλιν ἀνάλογον ἔσται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	deest in omnibus aliis codicibus.

PROPOSITIO VIII.

1. ΑΒ, ...	Id.	ΑΒ τοῦ Γ
2. καὶ ἔστω	Id.	ἕως τοῦ τὸ γινόμενον μεῖζον ἔσται τοῦ Δ. Καὶ ἔσται
3. οὗ	Id.	ἂν
4. τὸ	Id.	deest.
5. ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μεῖζων ἐστίν·	Id.	desunt.
6. τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ	Id.	τοῦ δὲ ΖΘ

PROPOSITIO IX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
7. τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω·	*Id.*	μεῖζων ἔστω τοῦ ΕΒ·
8. μὴ ἔλασσον εἶναι,	*Id.*	οὐκ ἔστιν ἔλασσον,
9. ὡσαύτως	*Id.*	ὁσαύτως
1. ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις	ἐκεῖνα ἴσα.	κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις

PROPOSITIO X.

1. τὸν	deest.	τὸν
2. τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον	ἐλάσσονα εἶχε λόγον	τὸν ἐλάσσονα λόγον εἶχεν
3. ὅτι	deest.	ὅτι

PROPOSITIO XI.

1. λόγοι	λόγῳ	λόγοι
1. μὲν	deest.	μὲν
2. μὲν	*Id.*	deest.
3. ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ·		ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε τὰ Λ, Μ·
4. ἴσον, ἴσον·	ἴσον ἐστὶν, ἴσον·	concordat cum edit. Paris.
5. ἔλαττον, ἔλαττον.	ἐλλείπει, ἐλλείπει.	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XII.

1. τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Λ, Μ, Ν·	τὸ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν·	concordat cum edit. Paris.
2. ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα.	ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον.	concordat cum edit. Paris.
3. ἂν	*Id.*	ἐὰν
4. πολλαπλάσια,	πολλαπλάσιον,	concordat cum edit. Paris.
5. τὰ	τὰ	τὸ

PROPOSITIO XIII.

1. ἤπερ	ἢ	ἤπερ
2. ἤπερ	ἢ	ἤπερ
3. μὲν	*Id.*	deest.
4. ἤπερ	*Id.*	ἤπερ
5. πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.	τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει,	Id.	ὑπερέχει τοῦ Δ πολλαπλασίου,
8. μὴ	Id.	οὐχ

PROPOSITIO XIV.

1. μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, . .	Id.	τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν,
2. μέγεθος	deest.	μέγεθος
3. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XV.

1. μέγεθη	deest.	μέγεθη

PROPOSITIO XVI.

1. ἀνάλογον ἐστὶν, ...	ἐστὶν	ἀνάλογον ἔσται,
2. ληφθ'ιτα κατάλληλα· . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ εἰ	Id.	κἂν
4. καὶ εἰ	Id.	κἂν

PROPOSITIO XVII.

1. ἐστὶ	Id.	deest.
2. τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ.	τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀλλα ἃ ἔτυχεν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὰ	Id.	δὲ τὰ

PROPOSITIO XVIII.

1. τὸ	Id.	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ	Id.	ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ
2. ἄρα	deest.	ἄρα
3. ἐναλλὰξ	Id.	ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι.	concordat cum edit. Oxoniæ.	Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι.

PROPOSITIO XX.

1. καὶ	*Id.*	deest.
2. καὶ ἐὰν	*Id.*	κἂν
3. καὶ ἐὰν	*Id.*	κἂν
4. τι	*Id.*	ὃ ἔτυχε
5. οὕτως	deest.	οὕτως
6. δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β	δὲ Γ πρὸς Β	concordat cum edit Paris.
7. τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον .	τὸ μείζονα λόγον ἔχον .	τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο

PROPOSITIO XXI.

1. μεγέθη	μεγέθη ἀνάλογον . . .	μεγέθη
2. ἐστὶ	*Id.*	deest.
3. ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ·	*Id.*	ἴσοι· δηλονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ·

PROPOSITIO XXII.

1. καὶ	*Id.*	deest.
2. ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.	ἔσται	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ Ζ.	Καὶ ἐνάλλαξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ.	deest.

PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τό Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. Αλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.	*Id. a, c, d.* . . .	καὶ εἴληπται τῶν Β, Δ ἰσάκις πολλαπλασία τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὸ Α, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Α οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. *b.*

PROPOSITIO XXIV.

1. ἔχῃ	ἔχει	ἔχῃ
2. μὲν	*Id.*	deest.
3. πρῶτον	*Id.*	τὸ πρῶτον
4. ἔστιν ἄρα ὡς	*Id.*	ὡς ἄρα

PROPOSITIO XXV.

1. δύο	τὰ δύο	δύο
2. μὲν	*Id.*	deest.
3. οὖν	deest.	οὖν
4. τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ·	*Id.*	τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ·
5. ἄνισα ἐστίν·	*Id.*	ἐστὶν ἄνισα·
6. μὲν	*Id.*	deest.

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
β′. (1) λόγων	*Id.*	ὅροι
γ′. (2) ἡ	deest.	ἡ
ϛ′. (3) deest.	hæc definitio, quæ in Euclide nullum habet usum, in margine tantum exarata est.	Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινάς. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO I.

1. ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην·	τὸ ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
2. ὅσαιδηποτοῦν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον·	ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλλαττον, ἔλαττον·	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ μὲν	μὲν ἡ	ἡ μὲν
5. τρίγωνον,	*Id.*	deest.
6. τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον	*Id.*	πρὸς τὸ ΑΓΔ
7. παραλληλόγραμμον.	*Id.*	deest.

PROPOSITIO II.

1. εὐθεῖα,	*Id.*	εὐθεῖα παράλληλος
2. πλευράν.	*Id.*	πλευρὰν παράλληλος.
3. δὴ	*Id.*	ἄρα
4. τρίγωνον	deest.	τρίγωνον
5. δὴ	δὴ καὶ	δὴ
6. τρίγωνον,	τρίγωνον	deest.
7. τρίγωνον·	*Id.*	deest.
8. τρίγωνον	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
9. τρίγωνον.	*Id.*	deest.
10. τρίγωνον	*Id.*	deest.
11. καὶ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO III.

1. τῆς	*Id.*	deest.
2. ἡ	*Id.*	deest.
3. ἐνέπεσεν	*Id.*	ἐμπέπτωκεν
4. ἄρα γωνία	*Id.*	deest.
5. ὡς ἄρα	*Id.*	ἔστιν ἄρα
6. ὡς	*Id.*	deest.
7. ἐστὶν	*Id.*	deest.
8. ἦκται	*Id.*	ἦται παράλληλος
9. ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση·	*Id.*	ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ·
10. γωνία	*Id.*	deest.

PROPOSITIO IV.

1. πλευραί	deest.	πλευραί
2. Εστω	*Id.*	Εστωσαν
3. μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ·	*Id.*	ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ·
4. πλευραί.	deest.	πλευραί.
5. ὑπὸ	*Id.*	περὶ
6. ὑπὸ	*Id.*	περὶ
7. ἄρα	deest.	ἄρα
8. τῶν πλευρῶν	desunt.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐναλλὰξ ἄρα	καὶ ἐναλλὰξ	concordat cum edit. Paris.
10. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ	Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ μὲν	Επεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ
11. καὶ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO V.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. linea 4 paginæ 302, πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ Η	*Id.*	ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ
2. ΕΗΖ·	*Id.*	ΕΑΖ τριγώνῳ·
3. οὕτως	deest.	οὕτως
4. καὶ	*Id.*	deest.
5. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
6. ἐστὶν ἴση·	deest.	ἐστὶν ἴση,
7. μὲν	*Id.*	deest.
8. Δ·	*Id.*	Δ ἐστὶν ἴση·

PROPOSITIO VI.

1. ἴση	*Id.*	γωνία ἴση
2. γωνία	*Id.*	deest.
3. ἴση·	*Id.*	ἐστὶν ἴση·
4. ἴσονται, ...	*Id.*	ἴσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,
5. ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. . .	*Id.*	πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε.

PROPOSITIO VII.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον,	*Id.*	τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ,
3. γωνία	deest.	γωνία
4. ὑπόκειται οὕτως	*Id.*	οὕτως ὑπόκειται
5. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶν	*Id.*	deest.
7. πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ	*Id.*	ὑπὸ τῷ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΗ
8. τῷ	*Id.*	τὸ
9. ὀρθῆς	*Id.*	ὀρθῆς καὶ
10. ἰσογώνιόν ἐστι	*Id.*	ἐστὶν ἰσογώνιον
11. δὴ	*Id.*	δὲ

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γωνία	deest.	γωνία
2. τῇ πρὸς τῷ Γ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
4. τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον·	Id.	τὸ ΑΔΓ τριγώνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ
5. ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ.	Id.	ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν.
6. γωνίαν, ...	Id.	γωνίαν,
7. ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ·	πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς·	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

8. ἐστιν·	Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. . .	ἐστιν·

PROPOSITIO IX.

1. καὶ	deest.	καὶ
2. αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.	Id.	ἤχθω τῇ ΒΓ ἡ ΔΖ.

PROPOSITIO X.

1. δοθείσῃ	Id.	δοθείσῃ εὐθείᾳ
2. ΑΓ, ...	Id. *a*, *c*, *d*. . . .	δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄτμητον τῇ ΑΓ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν. Εστω τετμημένη ἡ ΑΓ *b*.

PROPOSITIO XI.

1. αἱ	Id.	δύο εὐθεῖαι αἱ
2. προσευρεῖν.	εὑρεῖν.	προσευρεῖν.
3. αὐτῇ	Id.	αὐτῷ

PROPOSITIO XII.

1. Γ	Id.	Γ εὐθειῶν
2. τυχοῦσαν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν πλευρῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἰσογωνίων	*Id.*	μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν
2. ἰσογωνίων παραλληλογράμμων,	*Id.*	παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν,
3. τε καὶ ἰσογώνια	*Id.*	deest.
4. ΔΒ, ΒΓ ἄρα	*Id.*	ἄρα ΑΒ, ΒΓ
5. ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. παραλληλόγραμμον· . . .	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XV.

1. τριγώνων, ...	*Id.*	deest.
2. αἱ	deest.	αἱ
3. τριγώνον.	*Id.*	deest.
4. ΕΑΔ	*Id.*	ΕΑΔ τριγώνον
5. ἄρα τριγώνων	*Id.*	τριγώνων ἄρα

PROPOSITIO XVI.

1. κἂν	*Id.*	καὶ εἰ
2. αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ·	*Id.*	τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἀνάλογον,
3. γὰρ	deest.	γὰρ
4. ἄρα παραλληλογράμμων . .	*Id.*	παραλληλογράμμων ἄρα
5. αἱ	deest.	αἱ
6. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· . . .	ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ· . .	περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε·
7. τῶν	*Id.*	deest.
8. ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ Ζ·	*Id.*	τῇ Ζ ἡ ΑΗ·
9. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. καὶ ἔστιν	*Id.*	εἰσὶν

PROPOSITIO XVII.

1. κἂν	*Id.*	καὶ εἰ
2. ἀπὸ	*Id.*	ἀπὸ τῆς μέσης

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. οὕτως	deest.	οὕτως
4. τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστὶν, . . .	Id.	τῷ ἀπὸ τῆς Β ἐστὶν ἴσον,
5. τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστὶν, . .	Id.	τῷ ἀπὸ τῶν Β, Δ

PROPOSITIO XVIII.

1. ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, ...	Id.	ἡ ὑπὸ ΗΑΒ ἴση,
2. ἴση	Id.	deest.
3. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ
4. τε	Id.	deest.
5. αὐτῷ	αὐτῶν	αὐτῷ

PROPOSITIO XIX.

1. τῷ	Id.	τὸ
2. ἄρα τριγώνων	Id.	τριγώνων ἄρα
3. τριγώνων	Id.	deest.
4. ἔχειν λέγεται	ἔχῃ	concordat cum edit. Paris.
5. τριγώνῳ·	Id.	deest.

COROLLARIUM.

7. ἐὰν	Id.	κἂν
8. τρίγωνον	εἶδος	concordat cum edit. Paris.
9. ΔΕΖ.	ΔΕΖ. Οπερ ἔδει δεῖξαι. .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

1. τὸ	Id.	deest.
2. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ
3. εἰσιν·	Id.	deest.
4. ἔτι τὸ ΕΒΓ τριγώνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ.	Id.	deest.
5. γωνία	Id.	deest.
6. ἐδείχθη	ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
7. ἴση ἐστίν·	Id.	ἐστὶν ἴση·
8. μὲν	Id.	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
9. ἄρα	*Id.*	deest.
10. τὸ	deest.	τὸ
11. τρίγωνον.	*Id.*	deest.
12. τρίγωνον	*Id.*	deest.
13. τρίγωνον	*Id.*	deest.
14. τρίγωνον	*Id.*	deest.

COROLLARIUM I.

15. δὴ	δὲ	δὴ
16. καὶ	*Id.*	deest.
17. πλευρῶν.	πλευρῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM II.

18. καὶ	ἢ	καὶ
19. πλευρὰν, ...	*Id.*	deest.

ALITER.

20. τρίγωνον	*Id.*	deest.
21. deest.	deest.	καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δείξει.

Nota. In demonstratione propositionis XX, codicibus *a*, *c*, articulus τὴν non ponitur ante litteras figuram designantes, ante quas poni solet.

PROPOSITIO XXI.

1. ὅμοιόν ἐστι	*Id.*	ἐστὶν ὅμοιον
2. deest.	deest.	ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει·

PROPOSITIO XXII.

1. μὲν ἡ	*Id.*	ἡ μὲν
2. τὸ	*Id.*	καὶ τὸ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. καὶ	*Id.*	deest.
4. καὶ	*Id.*	deest.
5. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω	*Id.*	Γεγονέτω γὰρ
6. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ·	*Id.*	deest.
7. ΣΡ	*Id.*	καὶ ΣΡ
8. ἡ	*Id.*	ἐστὶν ἡ

ΛΗΜΜΑ.

9. ᾖ καὶ ὅμοια, ...	*Id.*	καὶ ὅμοια ᾖ.

PROPOSITIO XXIII.

1. τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ· λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ·	Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ· λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ·	concordat cum edit. Paris.
3. παραλληλόγραμμον· . . .	*Id.*	concordat cum edit. Paris.
4. παραλληλόγραμμον. . . .	*Id:*	deest.

PROPOSITIO XXIV.

1. αὐτοῦ	*Id.*	αὐτῷ
2. τῶν πλευρῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ	*Id.*	deest.
5. συντεθέντι	*Id.*	συντεθέντι ἄρα
6. τὴν ΑΗ, καὶ	ΑΗ	concordat cum edit. Paris.
7. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ . . .	*Id.*	τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα
8. ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΔ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ,	ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν·	ἄρα deest, et reliquum concordat cum edit. Paris.	ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ·

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. ἢ	*Id.*	deest.
11. καὶ	deest.	καὶ
12. παραλληλογράμμῳ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. δεῖ	*Id.*	deest.
2. τε	*Id.*	deest.
3. ἔστιν	deest.	ἔστιν
4. τρίγωνον.	*Id.*	deest.
5. τῷ Δ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXVI.

1. παραλληλογράμμου γὰρ . .	*Id.*	γὰρ παραλληλογράμμου
2. ἀφηρήσθω	*Id.*	ἀφαιρήσθω
3. αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ,	*Id. a.*	αὐτῶν ἡ διάμετρος ΑΘΓ, *b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*
4. αὐτην	*Id.*	deest. *b.*
5. ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. καὶ	*Id.*	deest.
7. ἄρα	deest.	ἄρα
8. οὐκ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXVII.

1. αὐτὴν	*Id.*	deest.
2. ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, . . .	τῆς ΑΒ ἀναγραφέντι .	concordat cum edit. Paris.
3. παραλληλογράμμοις . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. προσκείσθω τὸ ΚΘ·	δὲ τὸ ΖΒ	concordat cum edit. Paris.
5. ἴση ἐστίν·	*Id.*	ἐστὶν ἴσα·
6. ἐστὶν ἴσον·	*Id.*	ἴσον ἐστί.
7. ὥστε	*Id.*	ὥστε καὶ
8. τῆς	*Id.*	τὴν
9. προσκείσθω	*Id.*	ἔστω

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ὁμοίῳ	*Id.*	ὁμοίῳ ὄντι
2. τῶν ἐλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.	*Id.*	τοῦ τε ἐλλείμματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὁμοίων ἐλλείπειν παραλληλογράμμου.
3. ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων,	AB ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι,	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ δὴ AH ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὁρισμόν.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
5. οὖν	deest.	οὖν
6. μὲν τῇ Λ	τῇ ΛΚ μὲν	μὲν τῇ Λ
7. τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ.	*Id.*	τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ.
9. ἐστὶν ἴσον.	*Id.*	ἴσον ἐστίν.

PROPOSITIO XXIX.

1. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ	*Id.*	τὸ
3. οὖν	deest.	οὖν
4. ἐστὶν ἴσος.	*Id.*	ἴσος ἐστί.
5. τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ. .	*Id.*	τὸ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ.

PROPOSITIO XXX.

1. γὰρ	deest.	γὰρ
2. ΑΓ, τουτέστι τε ΑΒ, . . .	ΑΒ, ...	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ	*Id.*	deest.

ALITER.

4. ΑΒ	*Id.*	ΑΒ εὐθεῖαν

PROPOSITIO XXXI.

1. τε	*Id.*	deest.
2. τε	*Id.*	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. ἄρα	deest.	ἄρα
4. ἡ	*Id.*	deest.

ALITER.

5. ἐστὶ	*Id.*	εἰσὶ
6. ἄρα εἶδος	*Id.*	εἶδος ἄρα
7. εἶδος	*Id.*	deest.
8. τοῖς	deest.	τοῖς
9. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	deest.	deest.

Hæc altera demonstratio in infimâ paginâ codicis 190 exarata est, vocabulis contractis.

PROPOSITIO XXXII.

1. αἱ	*Id.*	deest.
2. τὰ	*Id.*	deest.
3. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί·	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.	hæc verba inter lineas exarata sunt manu alienâ, et secunda pars demonstrationis, quæ ad sectores attinet, necnon corollarium, in margine manu alienâ exarata sunt, vocabulis contractis.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
3. κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν .	*Id.*	ὁσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἑξῆς
4. ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν	*Id.*	ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι
5. Εἰ ἄρα	*Id.*	Καὶ εἰ

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. γωνίας·	deest.	γωνίας
7. διπλασίων	διπλάσια	concordat cum edit. Paris.
8. ὑπὸ	deest.	ὑπὸ
9. ἐστὶ	*Id.*	deest.
10. κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ·	*Id.*	ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ·
11. ΒΞΓ	*Id.*	ΒΞΓ γωνία
12. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν·	desunt.	concordat cum edit. Paris.
13. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ,	*Id.*	καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ,
14. ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.	desunt.	concordat cum edit. Paris.

LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
α'. (1) ἦν	*Id.*	ἦν ὁ
ζ'. (2) ὁ	deest.	ὁ
θ'. (3) ἀριθμός	*Id.*	deest.
ι'. (4) Περισσάκις δὲ ἄρτιός ἐστιν, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.	*Id.* *a*, *c*, *e*, *f*, *g*, *h*, *k*, *l*, *m*, *n*.	deest. *b*, *d*.
ια'. (5) ἀριθμός ἐστιν,	*Id.*	ἐστὶν ἀριθμὸς,
ιγ'. (6) δὲ	*Id.*	deest.
ιϛ'. (7) ὅσαι	ὅσαι	ὅσαι ἴσαι
(8) τοσαυτάκις	*Id.*	τοσάκις
ιη'. (9) καλεῖται·	ἐστί·	καλεῖται·
ιθ'. (10) ὁ	deest.	ὁ
κ'. (11) ἀριθμῶν ἴσων	*Id.*	ἴσων ἀριθμῶν

PROPOSITIO I.

1. Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν	*Id.*	Εὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,
2. ἀνίσων	deest.	ἀνίσων
3. μετρεῖ.	*Id.*	μετρῇ.
4. μετρήσει.	*Id.*	μετρήσει ὁ Ε.
5. μετρήσει.	*Id.*	μετρήσει ὁ Ε.
6. μετρήσει.	μετρεῖ.	μετρήσει.

PROPOSITIO II.

1. καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ·	desunt.	concordat cum. edit. Paris.
2. AB, ΓΔ	*Id.*	ΓΔ, AB
3. linea secunda et tertia paginæ 389 μετρεῖ.	*Id.*	μετρήσει.

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. μετρήσει.	μετρήσει. Οπερ ἔδει δεῖξαι.	μετρήσει.

PROPOSITIO III.

1. μέγιστον κοινὸν μέτρον, . .	Id.	κοινὸν μέγιστον μέτρον,
2. μετρήσει, ...	Id.	μετρήσας
3. μετρήσει μείζων τοῦ Δ· . .	Id.	τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ·
4. δὴ	deest.	δὴ
5. ἄρα	Id.	deest.
6. μετρήσει.	Id.	μετρεῖ
7. ποιῆσαι.	δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium deest in codice *a*.

PROPOSITIO IV.

1. Οἱ Α, ΒΓ	Id.	οἱ Α, ΒΓ πρώτερον
2. πρώτερον οἱ Α, ΒΓ	Id.	desunt.
3. οἱ Α, ΒΓ	Id.	desunt.
4. δὴ ἑκάστῳ τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· .	Id.	δὲ ὁ Δ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΕ, ΕΖ.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ . . .	Id.	ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ
3. καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα Α, Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστὶν, ὁ δὲ ΘΖ τῷ Δ· καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσίν·	Id.	ὁ ΒΗ ἄρα καὶ ΕΘ τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσί. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστὶ, καὶ ὁ ΘΖ τῷ Δ· καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσίν·
4. τοῦ	Id.	τῷ

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἢ	*Id.*	deest.
2. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
3. τὸ αὐτὸ	*Id.*	αὐτὸ τὸ
4. καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ	*Id.*	τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ

PROPOSITIO VII.

1. ὁ	deest.	ὁ
2. ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν·	hæc verba alienâ manu in margine exarata sunt.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν ἴσος.	*Id.*	ἴσος ἐστὶ.
4. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
5. τῷ	*Id.*	τοῦ
6. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. τῷ ΛΕ ἴσος	*Id.*	ἴσος τῷ ΛΕ
2. ἐστὶ	*Id.*	deest.

PROPOSITIO IX.

1. ἢ	*Id.*	deest.
2. ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ Α τοῦ Δ· .	desunt.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	καὶ
4. δὴ	*Id.*	δὲ

PROPOSITIO X.

1. τὸ αὐτὸ	*Id.*	desunt.
2. ἔστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσων·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. τὸ αὐτὸ	*Id.*	deest.
4. τοῦ	*Id.*	τῷ
5. τοῦ	*Id.*	τῷ
6. καὶ ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη·	*Id.*	desunt.
7. ἐδείχθη	*Id.*	ἐστὶ
8. ἄρα	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XIII.

1. τὰ αὐτὰ	*Id.*	desunt.

PROPOSITIO XIV.

1. γὰρ	deest.	γὰρ
2. καὶ	deest.	καὶ

PROPOSITIO XV.

1. ὁ	*Id.*	deest.
2. δὲ	δὴ	δὲ
3. ἔσται	*Id.*	ἔστιν
4. ἀριθμὸν	deest.	ἀριθμὸν
5. ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν .	ὁ Α τὸν Δ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. ἀριθμὸν	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XVII.

1. ἔξουσι λόγον	*Id.*	λόγον ἔχουσι
2. ἀριθμὸν	deest.	ἀριθμὸν
3. καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

	EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1.	τὸν αὐτὸν ἔχουσι	*Id.*	καὶ αὐτὸν ἕξουσι

PROPOSITIO XIX.

1.	πρώτου καὶ τετάρτου	πρώτου καὶ τετάρτου	τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου
2.	ἀλλ' ὡς	*Id.*	ὡς δὲ
3.	ἄρα	ὥσπερ	ἄρα
4.	τῶν	*Id.*	τὸν

PROPOSITIO XX.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 eâdem manu exarata est, vocabulis contractis.

2.	ἐὰν δὲ	καὶ ἐὰν	ἐὰν δὲ
3.	ὑπὸ	*Id.*	ἀπο
4.	ἔσονται.	εἰσίν.	ἔσονται
5.	ὑπὸ	*Id.*	ἀπὸ

PROPOSITIO XXI.

1.	ἔχοντας	*Id.*	ἔχοντας αὐτοῖς
2.	ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ εἰσὶν ἀλλήλοις,	*Id.*	οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν,
3.	ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις,	*Id.*	ἀλλήλοις ἴσοι,
4.	τὸ αὐτὸ	*Id.*	αὐτὸ τὸ

PROPOSITIO XXII.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 alienâ manu exarata est, vocabulis contractis.

2.	πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ,	*Id.*	πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ

PROPOSITIO XXIII.

1.	μὴ	*Id.*	εἰσιν οἱ Β, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς,
2.	ἐλάσσονες	*Id.*	ἐλάχιστοι

PROPOSITIO XXVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. πρῶτοι ἔστωσαν, ...	*Id.*	ἔστωσαν πρῶτοι,
2. τοὺς Γ, Δ	*Id.*	αὐτοὺς
3. δὴ	*Id.*	δὲ
4. τε	*Id.*	deest.

PROPOSITIO XXVII.

1. Καὶ	deest.	Καὶ

PROPOSITIO XXVIII.

1. πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. .	*Id.*	πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ.
2. οἱ	*Id.*	ὁ

PROPOSITIO XXIX.

1. τινας, ...	*Id.*	τινα,
2. ἀριθμοὶ δύο	*Id.*	δύο ἀριθμοὶ
3. μὲν	*Id.*	deest.
4. οὖν	*Id.*	ἄρα

PROPOSITIO XXX.

1. τῶν	τὸν	τῶν
2. τοὺς ΓΑ, ΑΒ	*Id.*	αὐτοὺς
3. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν·	*Id.*	desunt.
4. πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· . .	*Id.*	πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι
5. οἱ ΑΒ, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους, .	*Id.*	πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ,
6. τοὺς ΑΒ, ΒΓ	*Id.*	αὐτοὺς

PROPOSITIO XXXI.

1. καὶ ἔστω ὁ Γ.	*Id.*	καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα οὐκ ἔστι μονάς.

PROPOSITIO XXXII.

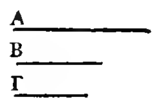
EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἀλλήλους	*Id.*	deest.
2. ὁ Δ	deest.	ὁ Δ

PROPOSITIO XXXIII.

1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν·	*Id.*	δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον
2. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν·	*Id.*	δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.
3. ὁ	deest.	ὁ
4. πρῶτος ἀριθμὸς, ...	*Id.*	desunt.

ALITER.

deest.	deest. *a, c, d, e, f, g, k, n.*	Εστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Επεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ. Καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν.



Εἰ γὰρ μὴ, σύνθετός ἐστι· μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. Μετρείσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ μετρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσσων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Β μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ, ἐλάσσων ὢν τοῦ Β, ἐλαχίστου ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετος ἀριθμός ἐστι· πρῶτος ἄρα. Οπερ ἔδει δεῖξαι. *b, h, l.*

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν.	*Id.*	δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.

PROPOSITIO XXXV.

1. ἐν	deest.	ἐν
2. ἐχόντων	*Id.*	ἐχόντων αὐτοῖς
3. τινες	deest.	τινες

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁ Α	*Id.*	ὁ
2. μετρήσουσί	*Id.*	μετροῦσί
3. ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν·	hæc verba inter lineas alienâ manu exarata sunt.	concordat cum edit. Paris.
4. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η·	*Id.*	desunt.

PROPOSITIO XXXVII.

1. μετροῦσι, ...	*Id.*	μετρήσουσι.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. μετρήσουσιν	*Id.*	μετροῦσιν
2. δὴ	*Id.*	δὲ
3. οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι.	deest.	οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι·
4. οὖν	deest.	οὖν
5. τὸν Ε	deest.	τὸν Ε
6. μετρήσουσί	*Id.*	μετροῦσι
7. μετρήσουσι.	*Id.*	μετροῦσι.
8. μετρήσουσι.	*Id.*	μετροῦσι.
9. ὁ Γ·	*Id.*	ὁ Γ τὸν Ε·
10. μετρήσουσι.	*Id.*	μετροῦσι.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
11. δὴ	*Id.*	deest.
12. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα . . .	*Id.*	ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος
13. τὸν Ζ μετρήσει.	*Id.*	μετρήσει τὸν .
14. μετρήσουσί	*Id.*	μετροῦσι

PROPOSITIO XL.

1. ἔστω	*Id.*	ἔστω ἀριθμὸς
2. μέρος ἄρα	*Id.*	ἄρα μέρος

PROPOSITIO XLI.

1. τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ.	τὰ Α, Β, Γ μέρη . . .	τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ.
2. ἀριθμοὶ	deest.	ἀριθμοὶ
3. ὁ	deest.	ὁ
4. ὁ Η ἄρα	*Id.*	ἐπεὶ οὖν ὁ Η ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, ὁ Η
5. ἔστω τὶς τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ.	*Id.*	ὁ Η ἐλάχιστος ὢν ἕχει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ἔσται τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Ἔστω ὁ Θ.

FINIS TOMI PRIMI.