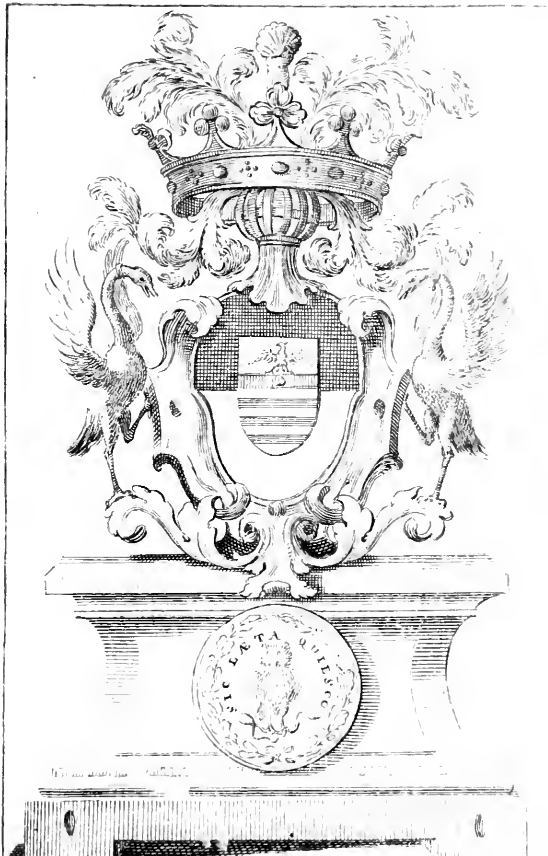

SIC LÆTA QUIESCO

SYMBOLAE
LITTERARIAE
OPVSCVLA VARIA

PHILOLOGICA SCIENTIFICA ANTIQVARIA

SIGNA. LAPIDES. NVMISMATA. GEMMAS

ET

MONVMENTA MEDII AEVI

NVNC PRIMVM EDITA COMPLECTENTES

DECADIS PRIMAE

VOLVMEN DECIMVM

Adiectis Tabulis aere incisis

FLORENTIAE. CIↃ. IↃ. CC. LIII.

EX IMPERIALI TYPOGRAPHIO

PRAESIDVM PERMISSV

DOMINICO VANDELLIO

VIRO CONSPICVO

CLARISSIMO · CELEBERRIMO

PRIMVM

SERENISSIMI PRINCIPIS

RAYNALDI

ESTENSIS

MVTINENSIVM DVCIS

MATHEMATICO

PVBLICO DOCENDI MVNERE EXORNATO

MOX

FRANCISCI III.

MVTINAE DVCIS

FELICITER REGNANTIS

CVM DIPLOMATVM HONORE

DELECTO ANTIQVARIO EGREGIO
CIMELIARCHAE · GEOGRAPHO
ET MATHEMATICO
PRAESTANTISSIMO
OB SVSCEPTA ITINERA EXHAVSTOSQVE
AD RHENVM COERCENDVM TVTANDOSQ · FINES
PERDIFFICILES LABORES
MVLTIS AB EO HONORIBVS
LAVDIBVS AC PRAEMIIS
AVCTO
DE IISDEM OPTIMIS PRINCIPIBVS
DE PATRIA · DE CIVIVM COMMODIS
DE OMNIGENA ERVDITIONE
DE LITTERARVM GLORIA
COMPLVRIBVS EDITIS INGENII
MONIMENTIS PRAECLARE MERITO
SOCIO COLVMBARIO FLOR ·
AMICO OPTIMO
ANTONIVS FRANCISCVS GORIVS
A · L · D · C ·

PRAEFATIO

POstremo mearum SYMBOLARUM Volumini, absoluta hac FLORENTINAE editionis DECADE prima, eximiam coronidem imponunt Opuscula VIII. praestantissimorum aetatis nostrae Mathematicorum, qui praeclara Italiae nostrae ornamenta iure ac merito habentur, & magnis ubique laudibus celebrantur. Singula Opuscula nunc primum in lucem prodeunt, eo excepto, quod principem locum obtinet; cuius exemplaria sex quum Celeberrimo Francisco

Mariae ZANOTTIO *quinque ab hinc annis misissem, ut ex ipsa celeritate, qua impressa fuerant, intelligeret, quanto in pretio haberem summam eius doctrinam, ornatissimamque amicitiam, qua me humanissime complexus est; illud contigit (quo nam modo factum sit nescio) ut statim ab eius amico in Germaniam transmisso exemplari Florentinis typis meis inpensis impresso, prodierit in lucem in Vol. III. cui titulus*, Iournal des Savans d' Italie, anno MDCCXLVIIII. *Gallico tamen idiomate conversum, Articulo V. pag.* 751. *quum tamen Italice idem Clarissimus Auctor scripsisset, quale heic desumtum ex eius autographo exhibetur. Huiusce vero operis iamdudum impressi editionem ad hoc tempus differre coactus sum. Nuper editum quoque honoris caussa est in quodam Volumine Actorum Regiae Academiae Parisiensis. Illud mihi*

valde

valde gloriosum duco, ex eo ipso meo archetypo Florentiae primum excuso, has editiones in lucem manasse. Gratulor & mihi & summo huic Viro, me hisce quibuscumque meis officiis, & sincerae benevolentiae argumentis, ad amplificandam eius nominis & sapientiae gloriam ac dignitatem, id cumulatissimo praemio non solum praestitisse, verum etiam consecutum esse. Illud enim unicum consilium meum est hisce doctrinae opibus augere thesauros Litteratorum Reipublicae, & studiosis omnibus cum Scientiarum, tum omnigenae Eruditionis Cultoribus prodesse, atque uberem eorum gratiam inire. Satis bene video Mathematicorum conatus & lucubrationes laudatissimas oportere in lucem emittere statimac immortalibus scriptis aeternitati ob iisdem commendantur; nec Typographorum moras pati posse: praesertim quum alii

illud

illud ipsum, vel quid omnino simile, quod inventum excogitatumque est, praereptâ primae gloriae palmâ, meditari, atque in lucem proferre possint. His adcedunt non leves quaedam difficultates in Tabulis aeri incidendis, & calculis, numeris ac figuris probe exhibendis: quae omnia sub eorum oculis, & perspicacissimo mentis lumine accuratius in lucem prodire posse minime negandum est. Quoquo modo res se se habeat, his omnibus ea qua potui diligentia praestandis, sedulam dedi operam, ut hoc meo qualicumque sit studio atque officio, eorum amicitia tamdiu fruar, quamdiu eorum nomen & laborum claritudo in litterarum orbe durabit.

Reliquum est, ut nunc SECVNDAE DECADI *absolvendae omnem curam adhibeam; cuius quum Romae per Palearinios, eorum typorum favore, iam Vo-*

lu-

lumina VIII. in lucem prodierint, tota quanto citius fieri potest, absolvatur. Id postulant Amici optimi, qui ad me suas oppido eruditas Dissertationes miserunt: id postulat meum ad iuvandas inlustrandasque optimas litteras perpetuum studium; idque etiam aetas mea postulat; nam ut ait Ovidius Fastor. Lib. VI. vers. 671.

Tempora labuntur, tacitisque senescimus annis;
Et fugiunt, freno non remorante, dies.

COLLEGISSE IVVAT

Ex Horatii Carm. Lib. I. Ode I.

ELENCHVS
OPVSCVLORVM SCIENTIFICORVM QVAE IN HOC POSTREMO VOLVMINE
PRIMAE DECADIS SYMBOLARVM PROFERVNTVR

Let-

SO-

SOPRA LE FIGURE
CIRCOSCRITTE
AL CIRCOLO ED ALLA SFERA
LETTERA
DEL SIGNOR
FRANCESCO MARIA ZANOTTI
A SUA ECCELLENZA REVERENDISSIMA
MONSIGNORE
VITALIANO BORROMEO
VICELEGATO DI BOLOGNA

IO non sò veramente, quanto mi debba esʃere vantaggioʃo il deʃiderio, che Voi, Monsignore, avete così benignamente dimoʃtrato, di vedere in iʃcritto due Teoremetti, che io eʃpoʃi, non ha gran tempo, nell' Accademia; perciocchè ʃono eʃʃi in vero picciola coʃa, e più picciola ancora dovrà parere, venendovi ʃotto gli occhi, per eʃsere conʃiderati dal voʃtro chiariʃʃimo, e grandiʃʃimo, e veramente raro ingegno, dinanzi a cui nulla è, a mio giudicio, che poʃsa parer grande. Il perchè la ʃteʃsa facilità (imperocchè ʃono eʃʃi faciliʃʃimi) la quale ha pur preʃso alcuni guadagnata lor qualche lode, potrebbe preʃso Voi, Monsignore, che ʃiete avvezzo a coʃe più ardue, e più ʃublimi, guadagnar loro, non che lode, anzi diʃprezzo, e non curanza. Che ʃarebbe poi, ʃe, per diʃavventura, nuovi non foʃʃero? di che mi fa temere la ʃteʃsa loro facilità; quantunque uomini verʃatiʃʃimi gli abbiano pur per nuovi ricevuti. E che ʃarebbe mai, ʃe io mi vi fuʃʃi ingannato, e eʃʃi non fuʃser più veri? Perchè, ʃebbene queʃti Signori, che profeʃsano la Geometria, non voglion permettere a se stessi di poter dubitare; a me però lo permetteranno, che non la professo. Comunque siasi, io intendo servire in ogni modo al desiderio vostro, esponendovi brevemente i due Teoremi con alcune poche annotazioncelle, che vengono ancora esse timide, e paurose; ma i Teoremi stessi se le traggon dietro, pensando per mezzo di esse di comparir più estesi, e universali, e far mostra, per così dire, di tutta quella splendidezza, e magnificenza, di cui sono capaci. Voi, che sapete unire a i gloriosi affari della Repubblica gli ozj non men gloriosi delle Lettere, e compatire le cose piccole, fraponendole alle maggiori, accoglierete di buon grado il mio, qualunque siasi, ritrovamento, al quale oramai vengo.

Ognun sa, che Archimede, il più gran Geometra, che sia stato al mondo mai, o certamente un de' più grandi, ritrovò, che il cilindro circoscritto alla sfera sta alla sfera stessa, come la superficie di esso alla superficie della sfera. Egli volle, che questo Teorema onorasse il suo sepolcro, con che fece onore anche al Teorema istesso. Duemila anni appresso, o poco meno, un famoso Gesuita, Andrea Tacquet, dilatò alquanto il ritrovamento di quel grand' Uomo, e riconobbe nel cono equilatero quella stessa proprietà, che quegli avea riconosciuta nel cilindro. Nel che ebbe anche la fortuna di ritrovar razionale la proporzione, che passa tra il cono equilatero, e la sfera, così come l' avea ritrovata Archimede tra la sfera, e il cilindro. Non ebbe il valentissimo Matematico lo stesso piacere in un altro solido, che egli si avvisò di circo-

scri-

ſcrivere alla sfera, e che chiamò rombo quadrato; perchè ſebbene queſto rombo quadrato, e la sfera, cui è circoſcritto, ſono tra loro appunto, come le loro ſuperficie; tuttavia la proporzione loro non è razionale: il che parea da deſiderarſi per la vaghezza del Teorema.

Conſiderando io meco ſteſso, non ha gran tempo, queſte coſe, m' invogliai di vedere, ſe io poteſſi dilatare la propoſizione d' Archimede alquanto più. Mi venne anche in animo di trasferirla in certo modo al circolo; parendo a me, che ſe ad un circolo ſi foſse circoſcritto un poligono, il quale foſse ad eſso circolo, come il perimetro alla circonferenza, dovrebbe queſta proporzionalità parere poco men vaga di quella, che o nel cilindro, e nella sfera Archimede, o nella sfera, e nel cono equilatero aveva Tacquet ritrovata. Queſto ſtudio, traendomi d'una in altra conſiderazione, conduſsemi a due Teoremi, che toſto eſpongo.

TEOREMA PRIMO

QUalunque poligono circoſcritto ad un circolo, ſta al circolo ſteſſo, come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo.

Dimoſtrazione. Sia un circolo, il cui centro T (Fig. 1.), il raggio $TR = r$. Pongaſi la circonferenza $= c$, onde ſia il circolo ſteſſo $= \frac{cr}{2}$.

A queſto circolo ſia circoſcritto un poligono, i cui lati ſieno A B, C D, E F &c. di qualſivoglia lunghezza, e numero. Egli è certo, che ſe dal centro T alle eſtremità di qualſiſia lato A B ſaranno condotte due linee T A , T B , verrà il poligono tutto a riſolverſi in altrettanti triangoli , quanti ſono i lati di eſſo . Ed è altresì certo, che tutti queſti triangoli , avendo la loro ſommità nel centro T , averanno anche tutti la medeſima altezza $= TR = r$, eſſendo le loro baſi i lati ſteſſi A B, C D , E F &c. Onde ne ſegue , che la ſomma di tutti i triangoli, che vale a dire il poligono ſteſſo , verrà ad eſſere

$= \frac{r : AB + CD + EF\ \&c}{2}$; eſſendo il perimetro ſenza dubbio AB+CD+EF &c. ora egli è chiaro, che $\frac{r : AB + CD + EF\ \&c}{} \, . \, \frac{cr}{2} :: AB + CD + EF\ \&c.$, e ne viene dunque per conſeguenza , che così ſtia il poligono al circolo , cui è circoſcritto , come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo . Ciò che era da dimoſtrarſi .

ANNOTAZIONE I.

LA proprietà è dunque comune ad ogni maniera di poligono, non ſolamente regolare, ma irregolare ancora; valendo la dimoſtrazione medeſima egualmente in tutti .

ANNOTAZIONE II.

DI quì ſi vede, che oltre i poligoni circoſcritti , anche infiniti altri ſe ne poſſono facilmente deſcrivere intorno al circolo , i quali abbiano la ſteſſa proprietà . Per eſempio , ſia deſcritto intorno al circolo X R , (Fig. 2.) un poligoligono A B C D E F G H I K, così, che il lato A B, ſia parte d'una tangente A X, il lato B C ſia parte d'una tangente C R, e così gli altri lati di mano in mano, per modo che poſſa queſto poligono riſolverſi in tanti triangoli, così come abbiamo detto de i circoſcritti. Niente è più facile, che deſcrivere un tal poligono; e deſcritto che ſia, niente è più facile, che dimoſtrare, che eſſo ſta al circolo X R, come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo. La ſteſſa dimoſtrazione, che abbiamo addotta di ſopra, ſi adatterà anche a queſto poligono faciliſſimamente, e per così dire, da ſe medeſima.

Di quì ne viene, come ognuno può facilmente vedere, che ſe allo ſteſſo circolo ſaranno circoſcritti più poligoni, come ſe al circolo XR (Fig. 3.) ſaranno circoſcritti due poligoni A E I, C G L, tagliandoſi vicendevolmente i lati dell' uno, e i lati dell' altro in B, D, F &c. e conſiderando ſolamente le parti eſteriori di eſſi lati, come A B, B C, C D &c. ſi prenda il poligono A B C D E F G H &c. ſarà altresì queſto poligono al circolo X R, come il perimetro di eſſo alla circonferenza del circolo. Quanti poligoni adunque, e con quanta facilità poſſono oramai circoſcriverſi al circolo, o deſcriverglisi all' intorno, i quali abbiano tutti una tale proprietà!

ANNOTAZIONE III.

E Già si manifesta quasi da se, che tutti i poligoni circoscritti a un medesimo circolo sono tra loro, come i lor perimetri.

TEOREMA SECONDO

QUalunque solido, chiuso per ogni parte da superficie piane, e circoscritto ad una sfera, sta alla sfera stessa, come la superficie di esso alla superficie della sfera.

Dimostrazione. SIA una sfera, il cui centro T (Fig. 4.) il raggio $TR = r$ Pongasi la circonferenza del circolo massimo $= c$ il che posto sarà la sfera stessa $= \frac{2crr}{3}$, e la superficie della sfera $= 2cr$. A questa sfera sia circoscritto un solido, chiuso dalle superficie piane AB, CD, EF &c. le quali sieno di qualsivoglia grandezza, figura, e numero. Egli è certo, che se per tutti i lati di qualsisia piano AB si condurranno altri piani, che passino tutti per lo centro T; verrà il solido a risolversi in altrettante piramidi, quanti sono i piani, che lo chiudono. Ed è certo altresì, che avendo tutte queste piramidi la loro sommità nel centro T, averanno anche tutte la medesima altezza $= TR = r$; essendo le loro basi i piani stessi AB, CD, EF &c. onde ne segue, che la somma di tutte le piramidi, che vale a dire il solido

lido ſteſſo, verrà ad eſſere $= r : \frac{AB + CD + EF \; \&c.}{3}$ eſſendo la ſuperficie del ſolido ſenza dubbio $AB + CD + EF$ &c. ora egli è chiaro, che

$$r : \frac{\overline{AB + CD + EF} \; \&c.}{3}, \; \frac{2crr}{3} : : AB + CD + EF, \&c. \; 2cr$$

ne viene dunque per conſeguenza, che così ſtia il ſolido alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Ciò che era da dimoſtrarſi.

ANNOTAZIONE I.

NON è più dunque da cercarſi una tale proprietà nè nel cubo, nè nella piramide, nè in alcun altro tal ſolido o regolare, o irregolare, che egli ſiaſi; giacchè l' addotta dimoſtrazione ſi ſtende egualmente a tutti.

ANNOTAZIONE II.

E Quì leggiermente ſi vede, che oltre i ſolidi circoſcritti, anche infiniti altri ſe ne poſſono deſcrivere intorno ad una sfera, i quali abbiano la ſteſſa proprietà; purchè le ſuperficie, da cui ſon chiuſi, ſieno ognuna, parte di un qualche piano, il qual tocchi la sfera; poichè, ciò poſto, ſe potrà il deſcritto ſolido riſolverſi in tante piramidi, così come abbiamo detto de' circoſcritti, potrà la ſteſſa dimoſtrazione applicarviſi faciliſſimamente. Quanti ſolidi adunque, e con quanta facilità, poſſono oramai o circoſcriverſi ad una sfera, o deſcriverleſi all' intorno, i quali abbiano tutti la ſopradetta proprietà!

AN-

ANNOTAZIONE III.

ORamai non credo, che più faccia d'uopo avvertire, che tutti i solidi chiusi per ogni parte da superficie piane, e circoscritti alla medesima sfera, sono tra loro, come le lor superficie.

ANNOTAZIONE IIII.

SE noi considereremo il cilindro (secondo la permissione, che ne da oggidì la Geometria degl' insinitamente piccoli) come un prisma, e il cono, come una piramide, facendo ragione, che le superficie curve, le quali circondano questi due solidi, sieno composte di infiniti piani; egli è certo, che il cilindro non si dirà circoscritto alla sfera, se non allora quando tutti gl'infiniti piani, che lo chiudono, toccheranno la sfera; e lo stesso similmente vuol dirsi del cono. Or chi non vede, che, preso un tale aspetto, tanto il cono, quanto il cilindro vengono a porsi, quasi da se stessi, sotto la specie di que' solidi, che fino ad ora abbiamo considerati; e che per conseguente sì l' uno, come l' altro, essendo circoscritto alla sfera, dee stare alla sfera stessa, come la superficie di esso alla superficie della sfera?

E quì già si scuopre, che il Teorema famoso di Archimede, e quello di Tacquet, oramai più altro non sono, che due casi particolari del Teorema, che io ho proposto, il quale se gli trae dietro, e traendogli dietro, gli estende ancora all' infinito. Ciò che potrà intendersi dalle

se-

ſeguenti Annotazioni, che verſeranno tutte intorno al cilindro, ed al cono.

Intorno al Cilindro.

ANNOTAZIONE V.

SIA un cilindro BH (Fig. 5.) circoſcritto ad una sfera, il cui centro ſia C. Non ha dubbio, che il cilindro ſtarà alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Queſto fu già dimoſtrato dal grande Archimede: e queſto iſteſſo pur ne dimoſtra il Teorema poc' anzi addotto, e dimoſtra anche più. Imperocchè, ſe il cilindro BH ſi prolunghi indefinitamente fino in F, e quindi ſi tagli a traverſo con un piano EF, il quale tocchi la sfera in un punto M, egli verrà a ſegnarſi un pezzo di cilindro BEFDB, circoſcritto alla sfera, che io chiamerò *cilindraceo*. Ed è chiaro, che queſto *cilindraceo* ſta eſſo pure alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera; non eſſendo ciò, che un caſo particolare del Teorema, che ſopra abbiamo dimoſtrato.

Che ſe voleſſimo de' *cilindracei*, che aveſſero alla sfera una proporzione razionale, egli ſarà pur facile il farne infiniti. Ecco per qual modo. Sia AT diametro della sfera, e inſieme aſſe del cilindro. Prendaſi ſu queſto diametro la CP, la quale abbia al raggio della sfera una proporzione razionale; e quindi condotta PM perpendicolare al diametro AT, la qual tagli la ſuperficie della sfera, nel punto M; tagliſi il cilindro con un piano EF, il qual tocchi la

sfe-

sfera in M; e il *cilindraceo*, che ne verrà B E F D B avrà alla sfera una proporzione razionale. Ciò che potrà ſcuoprirſi con un calcolo aſſai ſemplice.

ANNOTAZIONE VI.

NE' a queſto *cilindraceo* ſolamente, ma ad un altro ancora ſi eſtende il propoſto Teorema. Imperocchè, ſe avendo prolungato il cilindro B H (Fig. 5.) indefinitamente fino in F, e tagliatolo con un piano E F, che tocchi la sfera in M, eſſo ſi prolungherà di nuovo dall' altra parte indefinitamente fino in K, e ſi taglierà con un altro piano I K, che tocchi la sfera in V, ne verrà un' altro *cilindraceo* EIKFE circoſcritto alla sfera, e ſarà egli pure alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. La dimoſtrazione è pur ſempre quella ſteſſa.

ANNOTAZIONE VII.

CHE ſe il cilindro B H (Fig. 5.) o l' un *cilindraceo* B E F D B, o l' altro E I K F E, ſi taglierà con altri, ed altri piani in infinito, ognun de' quali tocchi la sfera, così che ne rimanga intorno alla sfera un pezzo informe di cilindro, chiuſo da una ſuperficie cilindrica tagliata in mille guiſe, e da tanti piani, quanti ognuno ne voglia; ſarà queſto pezzo egli pure alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera; perciocchè valerà anche in queſto la dimoſtrazione medeſima.

In-

Intorno al Cono

ANNOTAZIONE VIII.

SIA un cono B V L (Fig. 6.) circoſcritto ad una sfera, il cui centro ſia C. L' ingegnoſiſſimo Tacquet ha dimoſtrato, che, ſe il cono B V L ſarà equilatero; egli avrà alla sfera quella ſteſſa proporzione, che la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Il Teorema da noi propoſto moſtra lo ſteſſo, ſenza però aver biſogno, che il cono ſia equilatero; perciocchè la dimoſtrazione, che ne abbiamo addotta, la fa valere egualmente in ogni cono circoſcritto alla sfera, qualunque e' ſiaſi.

E quand' anche voleſſimo, che la proporzione del cono alla sfera foſse razionale; non per queſto però ſi richiederebbe, che foſse il cono equilatero; perciocchè infiniti altri ſe ne poſsono circoſcrivere alla sfera, che abbiano una proporzione tale. Eccone una maniera faciliſſima. Sia A T diametro della sfera, ed altresì aſse del cono. Prendaſi ſu queſto diametro la C P, la quale abbia al raggio della sfera una proporzione razionale; e quindi condotta P M perpendicolare al diametro A T, la quale tagli la ſuperficie della sfera nel punto M; circoſcrivaſi alla sfera un cono B V L, il cui lato B V tocchi la sfera in M. E queſto cono avrà alla sfera una proporzione razionale, nè ſarà d' uopo di un lungo calcolo a dimoſtrarlo.

ANNOTAZIONE VIIII.

Ma tornando a ciò, che il Teorema noſtro ne inſegna, io dico, che, ſe il cono B V L (Fig. 6.) che fino ad ora abbiamo ſuppoſto aver la baſe B L circolare, ſi prolungherà indefinitamente in K, e ſi taglierà a traverſo con un piano G K, il qual tocchi la sfera in N, formandoſi per ciò un cono G V K, la cui baſe ſarà un' elliſse; queſto cono G V K ſarà egli pure alla sfera, come la ſuperficie di eſso alla ſuperficie della sfera.

ANNOTAZIONE X.

E Se il cono B V L (Fig. 6.) ovvero il G V K ſarà tagliato dalla parte della ſommità V con un piano E F, il qual tocchi la sfera in I; ſicchè del cono B V L reſti il pezzo B E F L B, ovvero del cono G V K il pezzo G E F K G, sì l' uno come l' altro di queſti pezzi ſtarà alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

E ſarà perpetua queſta proporzionalità, per quanto il cono, o l' uno, o l' altro de' ſopraddetti due pezzi ſi tagli con altri, ed altri, ed altri piani in infinito; così veramente, che ognuno di queſti piani tocchi la sfera. Imperocchè quel pezzo informe di cono, che avanzerà intorno alla sfera, chiuſo da una ſuperficie conica, tagliata in mille guiſe, e da tanti piani, quanti ſe ne vorranno, ſtarà pur ſempre alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

Egli

Egli è ſempre quello ſteſſo Teorema, e quella ſteſſa dimoſtrazione, che ci ſegue per tutto.

Intorno ad altri Solidi

ANNOTAZIONE XI.

Vi ſon de' ſolidi, che non ſono nè cilindri, nè coni, ma ſi compongono dell' una, e dell' altra forma. A queſti pure, ove ſieno circoſcritti alla sfera, ſi eſtende il mio Teorema. Io ne proporrò quì alcuni eſempj, più toſto, ſecondo che mi verranno nell' animo, che ſeguendo un certo ordine.

Sia un ſemicircolo A N T (Fig. 7.) centro C, diametro A T. Prendaſi ſu queſto diametro qualſiſia punto Q, e guidiſi la Q R perpendicolare al diametro A T, ed eguale al raggio del ſemicircolo; e quindi guidata la tangente R B, che incontri la A B, perpendicolare al diametro, in B; guidiſi l' altra tangente R V, che incontri il diametro A T prolungato fino in V. Se noi faremo. che intorno alla linea A V ſi rivolgano inſieme il ſemicircolo A N T, e il trapezio ABRV, formeraſſi per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione del trapezio un ſolido circoſcritto alla sfera iſteſſa, compoſto di un cilindro, nato per la rivoluzione del rettangolo B Q, e d' un cono, nato per la rivoluzione del triangolo Q R V. E queſto ſolido cade egli pure ſotto il noſtro Teorema, e ſta alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera.

Che

Che se il punto Q sarà preso per modo, che la proporzione di C Q al raggio del semicircolo sia razionale; razionale altresì sarà la proporzione del solido alla sfera. Un breve calcolo lo dimostrerà.

ANNOTAZIONE XII.

SIA un semicircolo A N T (Fig. 8.) centro C, diametro A T. Prendansi su questo diametro due punti Q, ed S, quali che essi sieno, l' uno di là, l' altro di quà dal centro. Indi si guidino le due Q R, S L perpendicolari al diametro, ed eguali ognuna al raggio del semicircolo. Ciò fatto, e guidata la R L, che toccherà il semicircolo in N, si guidino le due tangenti R V, L H, che incontrino il diametro A T prolungato in V, ed H. Se noi faremo, che intorno alla linea V H rivolgansi insieme il semicircolo A N T, e e il trapezio V R L H, formerassi per la rivoluzione del semicircolo una sfera, e per la rivoluzione del trapezio un solido circoscritto alla sfera istessa, composto di un cilindro, nato per la rivoluzione del rettangolo L Q, e di due coni, nati per la rivoluzione de' due triangoli Q R V, S L H. E questo solido viene egli pure sotto il nostro Teorema, e così sta alla sfera, come la superficie di esso alla superficie della sfera.

E se i due punti Q, S saranno presi per modo, che tanto C Q, quanto C S abbia al raggio del semicircolo una proporzione razionale; anche il solido avrà una proporzione razionale alla sfera.

AN-

ANNOTAZIONE XIII.

SIA un ſemicircolo A N T (Fig. 9.) centro C, diametro A T. Prendaſi ſu queſto diametro qualſiſia punto Q, e guidiſi Q R perpendicolare al diametro, e più lunga, che il raggio del ſemicircolo; indi ſi guidino le due tangenti R V, R H, che incontrino il diametro A T prolungato in V, ed H. Se noi faremo, che intorno alla linea V H rivolganſi inſieme il ſemicircolo A N T, e il triangolo V R H, formeraſſi per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione del triangolo un ſolido circoſcritto alla sfera, compoſto di due coni, nati per la rivoluzione de' due triangoli Q R V, Q R H. Io chiamerò queſto ſolido *biconico*.

Egli è certo, che variando a piacere le due lunghezze C Q, Q R, potranno circoſcriverſi alla medeſima sfera infiniti *biconici* tutti tra loro diverſi. Tacquet ne conſiderò uno, il quale ſi forma con queſte due condizioni; la prima ſi è, che C Q ſi prenda eguale a zero, che vale a dire, che il punto Q ſi prenda in C; l' altra ſi è, che la Q R ſi faccia di quella lunghezza appunto, che ſi ricerca, perchè l' angolo V R H ne venga ad eſſer retto. E queſto *biconico* chiamò egli rombo quadrato, e dimoſtrò ingegnoſiſſimamente, che eſſo ſta alla sfera, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Il Teorema da noi propoſto abbraccia queſto *biconico* ancora, ſenza però abbracciarne le condizioni, eſtendendoſi egualmente a tutti ſenza eccezione niuna. E' dunque ogni *biconico* a quella sfera, cui è circoſcritto, come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Io torno ſempre al mio Teorema; perciocchè egli è tanto univerſale quanto altro mai foſſe; ed oltre a ciò breviſſimo, e faciliſſimo. Quelli, che hanno voglia di calcolare, potran leggiermente dimoſtrare e queſto ſteſſo, che abbiamo ora detto di tutti i *biconici*, ed altre propoſizioni ancora ſopra notate, per via di ſupputazioni proprie, e particolari, nelle quali il mio Teorema non averà parte alcuna.

Il chiariſſimo Tacquet trovò, che quel ſuo *biconico* ſta alla sfera, cui è circoſcritto, come ſta nel quadrato la diagonale al lato. Proporzione vaga; ma ſarebbe più comoda, ſe foſſe razionale? Ora noi, che non un ſolo *biconico*, ma infiniti ce ne abbiamo propoſti, potremo ſcegierne quanti ne piaccia, i quali abbiano alla sfera una proporzione razionale, il che faremo certamente, ſeguendo queſte due condizioni: prima, che le due linee C Q, Q R abbiano ognuna al raggio del ſemicircolo una proporzione razionale; poi, che eſſendo la ſomma de' due quadrati di C Q, e Q R differente dal quadrato del raggio, ſia queſta differenza un numero quadrato; delle quali due condizioni, la prima quaſi ſenza artificio niuno, la ſeconda con pochiſſimo conſeguiremo.

ANNOTAZIONE XIIII.

IO farò quì una annotazione, la quale di tanto ſi allarga, che ne comprende moltiſſime anche di quelle, che abbiamo già fatte; nè è però da tralaſciarſi, eſſendo di una maraviglioſa eſtenſione.

Sia

Sia un circolo, il cui centro T, a cui ſia circoſcritto un qualſivoglia poligono A B C D E (Fig. 10.) ovvero deſcritto all' intorno un poligono A B C D E F G H I K (Fig. 11.) di quella maniera, che l'abbiamo propoſto nell' Annotazione ſeconda del primo Teorema. Se egli ſi condurrà per lo centro T una retta linea X Z, che traverſando il circolo, e il poligono, gli divida in due parti, e faremo, che intorno a queſta linea X Z rivolganſi inſieme il ſemicircolo, e l'una, e l' altra parte, qual più piacerà, del poligono diviſo; egli ſi formerà per la rivoluzione del ſemicircolo una sfera, e per la rivoluzione della parte del poligono, condotta in giro, un ſolido intorno alla sfera. E ſarà queſto ſolido alla sfera così come la ſuperficie di eſſo alla ſuperficie della sfera. Lo ſteſso Teorema, e la ſteſsa dimoſtrazione, che ci hanno ſeguito in tutte le altre Annotazioni, ci tengono dietro anche in queſta.

Io non mi eſtenderò più oltre a cercare altri caſi, e, per così dire, altri aſpetti del mio Teorema; tanto più, che egli ſi volge da ſe medeſimo in tante guiſe, che e' par difficile volerle ridur tutte ſotto certi capi, ſenza che ne sfuggano infinite. E a Voi già, Monsignore, i voſtri graviſſimi affari, e i voſtri ſtudj più ſublimi non permetteranno di impiegare più lungo tempo in queſte mie bagattelle; le quali però non ſaranno già bagattelle per me, ſe potrò luſingarmi, che Voi le abbiate gradite, e riconoſciuto nell' offerta, che ve ne faccio, quell' infinito oſsequio, con cui mi dico.

LETTERA
DI D. FELICE LUIGI BALASSI
C. R. DEL SALVATORE
AL CHIARISSIMO SIGNOR

FRANCESCO MARIA
ZANOTTI

PUBBLICO LETTORE DI FILOSOFIA
NELL' UNIVERSITA' DI BOLOGNA
E SEGRETARIO PERPETUO DELL' ACCADEMIA
DELLE SCIENZE DELLA MEDESIMA CITTA'.

MEntre io con sommo piacere leggeva il bellissimo Opuscolo, che recitaste, non ha gran tempo, nell' Accademia delle Scienze di questa Città, mi venne in mente ciò, che una volta osservai in una Annotazione del Tacquet, che trovai nel libro intitolato *Teoremi scelti di Archimede*, in cui parla di certi Anelli, frà la superficie de' quali, dice, aver ritrovata la medesima ragione, che passa frà

essi.

Tab. I.
p. 20

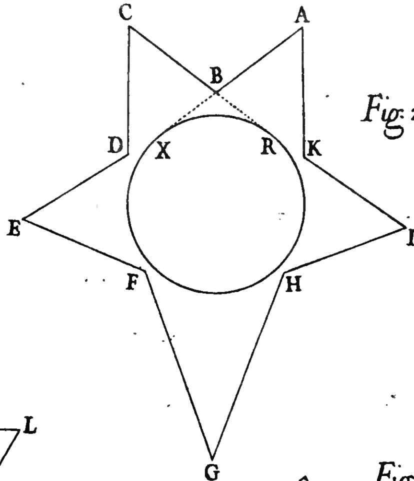
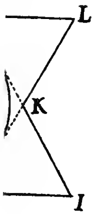


Fig. 2.



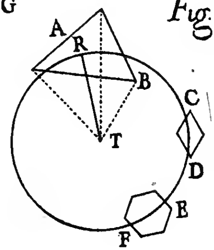


Fig. 4.

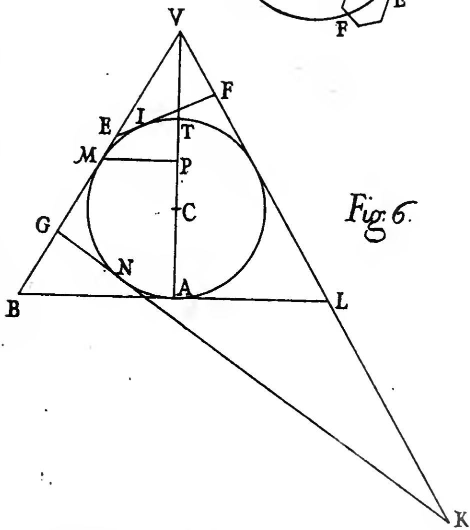


Fig. 6.

Fig. 1.

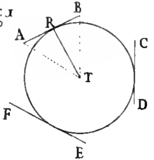


Fig. 2.

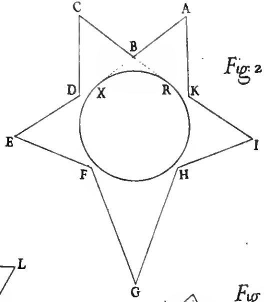


Fig. 3.

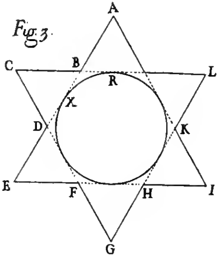


Fig. 4.

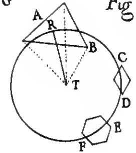


Fig. 5.

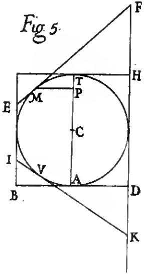


Fig. 6.

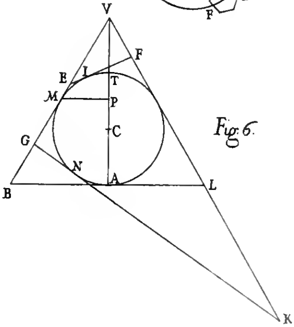


Fig. 8.

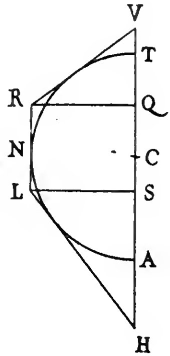
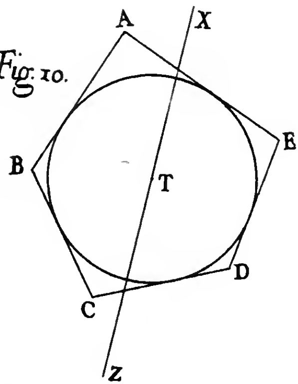


Fig. 10.



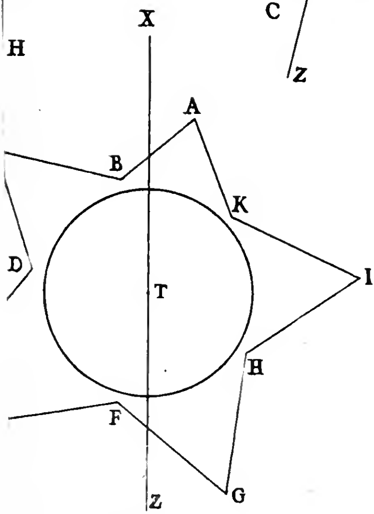


Fig. 7.

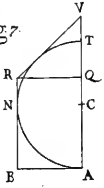
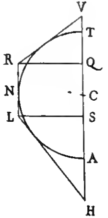


Fig. 8.



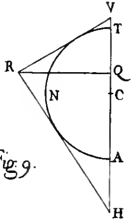


Fig. 9.

Fig. 10.

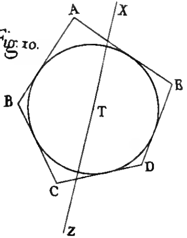
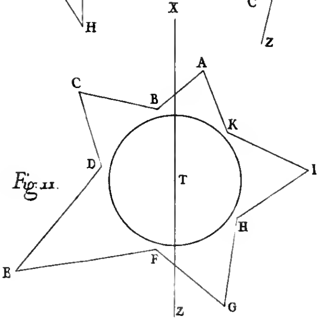


Fig. 11.



essi. Il che mi ha dato occasione di pensare a quello, che potrebbe seguire, se fosse uno di questi circolare, e l' altro poligonare; ma però tale, che il poligono generante detto anello, potesse circoscriversi al circolo, o fosse realmente circoscritto. Chi sà, io frà me stesso diceva, che quello, che da voi è stato dimostrato de' poligoni al circolo, e de' solidi circoscritti alla sfera, non possa ancor dimostrarsi degli anelli poligonari circoscritti a circolari, voglio dire di quegli anelli. che sono generati da un poligono, e da un circolo, che sia inscritto al poligono; mentre e l' uno, e l' altro con certa legge da una linea intorno ad un altra vien trasferito? In fatti ho finalmente scoperto, che la cosa non va altrimenti da quello, che io mi era ideato. Ora essendo a me ben noto, che allora quando intrapprendeste a meditare sopra i poligoni circoscritti al circolo, e sopra i solidi circoscritti alla sfera, vostro intendimento fu di rendere più generale il Teorema di Archimede, in cui dimostra essere similitudine di ragione frà la sfera, ed il cilindro a quella circoscritto da una parte, e fra le superficie di quella, e la superficie di questo dall' altra parte; siccome al medesimo fine sembrami tendere, ciò che io ho ricavato da due Teoremi di Andrea Tacquet: così ho giudicato, che a Voi non sia per essere spiacevole vederne la dimostrazione. Che se poi non solamente fosse per non spiacervi, ma ancora per meritare alcun poco della vostra approvazione, ciò e da me, e da qualunque giusto stimator delle cose ascriverassi all' aver io procurato d' imitarvi ne' vostri ingegnosissimi Teoremi, non già all' avervi io in realtà imitato; poichè, e lo confesso sinceramente, i vostri grandissimi avanzamenti sì nelle scienze filosofiche, e geometriche, come nelle belle arti, sono bensì capaci d'essere lodati, ma non già d'essere imitati. Qual cosa adunque abbia io ottenuto nel procurar di seguirvi nell'ultimo vostro ingegnosissimo ritrovamento, a Voi s'aspetta il giudicarlo, mentre vi degnerete di dare un' occhiata alla dimostrazione, che quì soggiungo.

L E M M A I.

Sia una linea A B (Fig. 1.) che tagli una figura piana qualunque H F, questa linea A B si rivolga per un piano intorno alla A V perpendicolare a questo piano, e in tal rivoluzione porti seco la figura H F sempre perpendicolare al detto piano; da tal rivoluzione nascerà un anello, che sarà eguale alla figura H F moltiplicata per la circonferenza descritta dal centro di gravità di detta figura intorno alla linea A V, come dimostra Tacquet nel Libro V. degli Anelli, e de' Cilindri alla Proposizione V.

L E M M A I I.

Poste le medesime cose, la superficie dell'anello sarà eguale al perimetro della figura H F moltiplicata per la circonferenza, che descrive il centro di gravità del perimetro della detta figura intorno alla A V. Così il medesimo Tacquet nell' istesso libro alla Proposizione XIX.

PRO-

PROPOSIZIONE.

SE intorno ad A V, (Fig. 2.) si rivolgeranno alla maniera suddetta due figure piane H F, X Z, e sia H F ad X Z come il perimetro di H F al perimetro di X Z e siano i centri di gravità sì della figura, come del perimetro egualmente distanti da A V, gli anelli descritti dalla rivoluzione delle due figure H F, X Z staranno come le loro superficie.

La figura X Z pongasi eguale ad mm, il di lei perimetro eguale a p; la circonferenza, che descrive il centro di gravità della medesima chiamisi C; la figura H F chiamisi nn, la circonferenza, che descrive il di lei centro di gravità pongasi eguale ad e, sarà per la supposizione $\frac{pnn}{mm}$, cioè la quarta proporzionale dopo mm, nn, e p il perimetro della figura piana H F. Ora si moltiplichi mm per la circonferenza descritta dal centro di gravità della figura X Z, e nn per la circonferenza, che descrive il centro di gravità di H F: sarà per il primo Lemma l' anello generato dalla figura X Z eguale ad mmc, e l' anello generato dalla figura H F sarà nne. Dipoi si moltiplichi il perimetro della figura X Z, cioè p per c, ed il perimetro della figura H F, cioè $\frac{pnn}{mm}$ per e; e sarà per il Lemma secondo pc la superficie dell' anello generato dalla figura X Z, e $\frac{pnne}{mm}$ la superficie dell' anello generato dalla figura H F; Ma stà mmc ad nne come pc ad $\frac{pnne}{mm}$, come è per se stesso chiaro. Dunque

 l' anell' anello all' anello stà come la superficie alla superficie nelle figure, l' aree delle quali seguono la proporzione de' loro perimetri.

COROLLARIO I.

DI quì raccogliesi la dimostrazione del mio Teorema, che poc' anzi vi ho accennato. Imperciocchè se le due figure saranno una un circolo, l' altra un poligono o circoscritto, oppure capace di essere circoscritto al circolo medesimo, e il centro di gravità della figura sia lo lo stesso, che il centro di gravità del perimetro (il che deve ancor dirsi degli anelli generati da un poligono, di cui i lati prodotti sieno tangenti del circolo come (Figura 3.) E D C B A Q) l' anello circolare, e l' anello poligonare staranno come le lor superficie, essendosi già da voi chiaramente dimostrato, che il circolo, ed il poligono circoscritto sono come i loro perimetri.

COROLLARIO II.

ALla dimostrata proposizione riduconsi ancora come casi particolari le proposizioni del Tacquet, delle quali parla nell' accennata Annotazione frà i Teoremi scelti di Archimede, che sono ristrette a figure simili ed eguali. Le proposizioni, ch' egli nomina in detta Annotazione sono la 13, 14, e 15. del lib. 4. degli Anelli, e de' Cilindri. La prima è, che gli anelli generati da figure simili ed eguali sono tra di loro così di solidità, come di superficie. La seconda è, che l' anello aperto è triplo del suo vicino, purchè sia chiuso, ed ambedue generati sieno da

figure

figure simili ed eguali. La terza, che se vi sarà una serie di anelli contigui generati da figure simili, ed eguali, de' quali il primo sia chiuso, staranno tra di loro, cominciando da questo, come la serie de' numeri dispari, della quale il primo termine sia l'unità, cioè come 1, 3, 5, 7, 9. &c. La ragione della proposizione mIII. è per se stessa evidente presupposta la mia proposizione. Eccovi delle altre due la dimostrazione. Sia (figura IV.) questa serie di figure A B C D simili ed eguali, le quali girino con la linea G A intorno al punto A, che suppongo nel perimetro della figura D, affinchè il primo anello sia chiuso (poichè il sopranominato Tacquet chiama l' anello chiuso allora quando il punto della rivoluzione è nel perimetro della figura generante, ed aperto quando è fuori, come sarebbe il medesimo punto A rispetto alla figura C, oppure B); il centro di gravità della figura A sia G, quello della figura B sia g, quello della figura C sia m, e finalmente quello della figura D sia m. Si chiami A $m = a$ E $m = b$. Poichè gli anelli generati da queste figure sono tra di loro come le periferie descritte da centri di gravità; dunque saranno come i raggi di queste periferie, e per tanto il primo al secondo sarà come $a : 2a + b$, il secondo al terzo, come $2a + b : 3a + 2b$, il terzo al quarto come $3a + 2b : 4a + 3b$ ec. Adunque gli anelli generati da figure simili, ed eguali sono tra di loro, cominciando da quello che è chiuso, come i termini di questa serie aritmetica, di cui il primo termine è a, il secondo $2a + b$, il terzo $3a + 1b$. il quarto $4a + 3b$. Ciò supposto si fa manifesto quello, che dice il Tacquet nelle proposizioni 14, e 15. del suddetto libro, nelle quali parla di quegli anelli i quali o sono descritti da figure, delle quali i centri di gravità, o sono i punti che segano in due parti eguali le linee E A, E H ec. o pure sono in una retta, la qual sega in due parti eguali, e perpendicolarmente le dette E A, E H. Imperciocchè in questo caso la serie a, $2a+b$, $3a+2b$, $4a+3b$ si cangia in questa a, $3a$, $5a$, $7a$, ec. Ora essendo il primo anello chiuso al secondo in questo caso come $a : 3a$, è manifesto che l'anello C contiguo al chiuso D sarà di questo triplo, e denotando a il primo anello chiuso, cioè D; $3a$, il secondo, cioè C, $5a$ il terzo, cioè B ec. è manifesto, che in questo caso saranno gli anelli come la serie de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9. ec. ed in questa ragione ancora saranno le lor superficie.

Eccovi dimostrato il mio Teorema, il quale però si dee piuttosto dir vostro, che mio; poichè l' ho ritrovato seguendo le vostre traccie. A voi perciò lo invio; il qual come gentilissimo, che siete anzi pure la gentilezza medesima, spero, che qualunque egli siasi, lo gradirete, e lo avrete come un contrassegno di quell' altissima stima, che faccio di voi, e colla quale mi dichiaro ec.

SOPRA

SOPRA ALCUNE NUOVE PROPRIETA'
DELLE FIGURE QUADRILATERE

DISSERTAZIONE

DEL CONTE

GREGORIO CASALI

BOLOGNESE

PROFESSOR SOSTITUTO DI ARCHITETTURA MILITARE
ED ACCADEMICO DELL' ISTITUTO
DELLE SCIENZE E DELL' ARTI

DETTA NELL' ACCADEMIA

Alli 10. *di Aprile* 1749.

VI ragionai, ha pochi anni, se ben vi sovviene, o Accademici dottissimi, di certe proprietà nuove per buona parte, e tutte senza dubbio non affatto disutili delle figure quadrilatere; altre appresso, andando dietro ad una certa analogia, ne ho cercate e scoperte, alcune delle quali forse nel venturo anno, ed alcune questa sera medesima, quando non vi sia grave, mi piace di dimostrarvi.

Data una figura quadrilatera qualunque ella fiafi (Fig. 1.) A B C D, fe dal punto E medio del lato A D fi condurranno ad F medio del lato A B la linea E F, & ad H medio del lato D C la linea E H, e dai punti F, ed H le linee F G, H G al punto G medio del lato B C, l' area infcritta E F G H farà un paralellogramo metà della circonfcritta figura, o paralellogramo, od altro che ella fiafi, A B C D. Quefto è ciò che per varie propofizioni e da non pochi corollari feguito nell' antica Differtazione mi vi feci a dichiarare.

Il Robervalle difcoperfe già prima quefto teorema. Ciò ne è riferito, e ne è data la dimoftrazione dai De la Hire negli Atti dell' Accademia Reale, dove egli parla de' trapezj. Io mi condufli a provarlo per una via più facile e piana, che non ferono il Robervalle, e il De la Hire, e varie cofe aggiugnendovi mi parve di penetrare qualche poco più a dentro negli arcani della verità. Ecco perchè, io credetti che non fuffe difconveniente, che ne parlaffi alla noftra Accademia. Non intendo già di offendere in niun modo la gloria di que' valentiffimi Autori abbaftanza chiara e famofa: fenza di che, fe male i più non s'avvifano, non fuol difpiacer punto ai Francefi, per un certo vago, anzi pur lodevole, amor d' invenzione, che gli altri affermino di aver detto un po' più di loro, purchè non fi contenda, che effi abbiano detto qualche cofa prima degli altri.

Da tali confiderazioni pertanto fono ftato tratto ad efaminar, che avverrebbe fe fi voleffe infcrivere bensì (e mi fi lafci ufare quefto termine infcrivere, comecchè io non l' ufi troppo propriamente) infcriver, dico, in qualche quadrila-

tero

tero una nuova figura; ma ne piacesse lo inscriverla di questa maniera: cioè a dire (Fig. 2.) dal punto E medio di A D conducendo alle estremità B, ed C del lato opposto B C le due linee E B, E C, e dal punto G medio del lato B C ad A, & D estremi del lato A D le linee G A, G D. Ho scoperto in questa nuova inscritta E I G L alcune proprietà, ma non quante avrei pur voluto scoprirne. Mi restava qualche cosa da desiderare, e la difficoltà mi ha fatto ostacolo, e mi ha trattenuto; per la qual cosa ho serbata questa materia al futuro anno, se mi giovi lo sperarlo più del presente favorevole, e propizio.

Mi son dato finalmente ad osservare una terza maniera d' inscriver figure ne' quadrilateri. Ho pensato (Fig. 3.) che da un' angolo di un quadrilatero si ponno condurre due linee ai punti medj de' lati, che si congiungono nell' angolo opposto; e da questo secondo angolo due altre linee ai punti medj dei lati, che si congiungono nel primo angolo. Questa nuova inscritta non mi è stata così austera come l' altra, e mi si è discoperta più volentieri. Di questa inscritta dunque, materia, se mal non mi appongo, tutta pur nuova, tutta pur mia, vi parlerò al presente, se voi lo mi permettete; lo che cercherò di fare, e con tanto di chiarezza quanto non ne sia tolta la brevità, e con tutta quella brevità, onde non ne resti la chiarezza disturbata ed ingombra.

Sia data (Fig. 3.) la figura A B C D quadrilatera qualunque ella siasi.

Si notino i punti medj dei lati: cioè i punti E, F, G, H.

Dal punto D apice dell' angolo A D C si conduca ad F la linea D F, ed a G la linea D G.

Pari-

Parimente dal punto B apice dell'angolo A B C si conduca ad E la linea B E, e ad H la linea B H.

Lo che fatto dico io primieramente, che la figura inscritta B L D I è quadrilatera. Ma ciò per mio avviso è troppo chiaro, e non ha bisogno di dimostrazione. Il punto D, onde facendo angolo si partono le linee D F, e D G, il punto B, onde si partono la B E, e la B H pure facendo angolo, e lo intersecarsi di queste quattro linee a due per due, facendo per necessità due altri angoli opposti e salienti, lo dimostrerebbe con molta facilità.

Fra tanto passando oltre, osservate meco, vi prego, che questo quadrilatero inscritto è la terza parte del suo circonscritto. Se tutta l' area A B C D $= a$, l'area B L D I $= \frac{a}{3}$

Dall' uno all' altro dei due punti B e D si conduca la diagonale B D, la quale dovrà dividere senza dubbio tutta l'area quadrilatera A B C D ne' due triangoli A B D, D B C, che ogni figura rettilinea in tal numero di triangoli si divide, quale è il numero della categoria, in che essa si ritrova, o veramente quale è il numero de' suoi angoli, o de' suoi lati men due.

La diagonale B D dividerà ancora per la medesima ragione l' area B L D I ne' due triangoli I B D, D B L.

Mi sia dunque lecito il prendere separatamente una di queste porzioni triangolari della figura A B C D, come sarebbe (Fig. 4.) il triangolo A B D, che tragge pur seco, e quasi a se sovraposto il triangolo I B D porzione della figura inscritta.

Dimo-

Dimoſtrerovvi ora che $IBD = \frac{ABD}{3}$.

$ADF = FDB$ perchè di baſi, e di altezze eguali.

Si tiri la linea AI.

$AIF = FIB$, perchè pure di baſi, e di altezze eguali.

Or ſe levando da quantità eguali quantità parimente eguali, i reſidui ſono eguali; dico che $ADF - AIF = FDB - FIB$, che è lo ſteſſo che dire $ADI = IBD$.

Se in vece di conſiderare $ADF = FDB$, ſi conſideri più toſto $ABE = EBD$ verrà a dimoſtrarſi $ABI = IBD$.

Dunque $ADI = ABI = IBD$: dunque $IBD = \frac{ABD}{3}$.

Ora tornando a' quadrilateri abbiamo (Fig. 3.) nel trapezio $ABCD$ per la condotta diagonale l'oſſervato triangolo ABD, del quale il triangolo IBD è la terza parte.

Per le ſteſſe ragioni ove ſi riguardi il triangolo BCD, nè ſarà eguale alla terza parte il triangolo DBL.

Ma ſe i terzi delle parti preſi tutti inſieme ſono eguali al terzo del tutto, lo che è verità di principio, eccovi dimoſtrato che $BLDI$ è la terza parte di tutto il quadrilatero $ABCD$. Sia dunque $ABCD = a$, e ſarà allora $BLDI = \frac{a}{3}$.

Eccovi dimoſtrata queſta teoria univerſalmente; ora mi ſi permetta l' eſaminarne un caſo particolare.

Sia dato (Fig. 5.) il triangolo BCD, o a meglio dire

dire sia dato per esso un trapezio A B C D, ove il lato A B è infinitamente piccolo.

Inscrivasi per egual modo in questo trapezio la nuova figura.

Dall' angolo A B C formato dal lato infinitamente piccolo A B, e dal lato B C, si conduca una linea al punto medio di A D; ma questa per la infinita adesione si confonde con la stessa A D: poi dall' angolo medesimo A B C si conduca la linea B H.

Dall' angolo A D C opposto all' A B C si conduca una linea al punto medio del laterculo A B; ma questa ancora per la infinita adesione si identifica con la A D: poi dall' angolo medesimo A D C si conduca la linea D G.

Ora dico io, anzi vi ho già sopra fatto vedere e provato che lo spazio D A L, o sia D B L, che adesso è la figura inscritta, è la terza parte della circonscritta A B C D.

Questa è dunque una maniera molto comoda, onde avere la terza parte di qualsivoglia figura quadrilatera, lo che per mio avviso non voleva tacersi; poichè le terze parti non sono poi le aliquote più facili da ritrovarsi.

Ma abbastanza dell' area di questa inscritta.

Sin quì vi ho detto dello spazio di questa figura: rimane ora a parlarvi della figura di questo spazio.

Se la figura, entro cui si vuole inscriver l'altra, sarà paralellogramo, e paralellogramo sarà l'altra; se al contrario l' una, ancor l'altra al contrario.

Sia (Fig. 6.) A B C D paralellogramo, dico che B L D I lo sarà esso pure.

E D, e B G sono egualmente lunghe, ed egualmente inclinate, dunque B E, e D G sono paralelle.

F B, e D H sono egualmente lunghe, ed egualmente inclinate, dunque D F, e B H sono paralelle.

Dunque

Dunque finalmente B L D I sarà paralellogramo.

Se poi la circoscritta non sarà paralellogramo, non potrà esserlo ne meno la inscritta. E ciò, perchè siccome la figura inscritta, la quale sia paralellogramo vuole nella sua circonscritta lati opposti eguali ed egualmente inclinati, così non potrà formarsi, che nelle circonscritte, le quali sieno ancor esse paralellogrami; per la qual cosa ogni trapezio, che vorrà dentro di se qualche altra figura inscritta, bisognerà che si contenti di cercarla fra le irregolari affatto, com' egli è.

Ora perchè i paralellogrami sono vari, ne dirò qualche cosa di ciascheduna specie.

Ponno i paralellogrami essere quadrati, rettangoli, romboidi, rombi, ed in ciascheduno di questi paralellogrami si ponno inscrivere nuove figure, e saranno ancor esse o quadrati, o rettangoli, o romboidi, o rombi.

Se la figura data sarà il quadrato (Fig. 7.) la figura inscritta sarà il rombo.

Se la figura data sarà il rettangolo, la (Fig. 8.) la figura inscritta sarà il romboide.

Se la figura data sarà il romboide, (Fig. 9.) bisognerà distinguerne alcuni casi. Quando la diagonale più piccola sarà eguale ad un terzo della più grande, la figura inscritta sarà il rettangolo; cioè a dire nel romboide si avrà il rettangolo inscritto, quando $BD = \frac{AC}{3}$. Quando poi (Fig. 10.) alla diagonale più piccola bisogni o aggiugnere o levar qualche cosa per farla eguale ad un terzo della diagonale più grande, allora la inscritta sarà ancor essa il romboide; cioè a dire nel romboide si avrà il romboide inscritto quando $BD + y = \frac{AC}{3}$; o veramente quando $HF - y = \frac{EG}{3}$.

Se la figura data sarà il rombo (Fig. 11.) bisognerà rà diſtinguerne alcuni caſi. Quando la diagonale più piccola ſarà qualche coſa di più o di meno della terza parte della diagonale più grande, la figura inſcritta ſarà il rombo; che è lo ſteſſo che dire: nel rombo ſi avrà il rombo inſcritto, quando $BD + y = \frac{AC}{3}$; o pur quando $HF - y = \frac{EG}{3}$.

Quando poi la diagonale più piccola (Fig. 12.) ſia eguale alla terza parte della diagonale più grande, la inſcritta ſarà il quadrato; che è lo ſteſſo che dire nel rombo ſi avrà il quadrato inſcritto, quando $BD = \frac{AC}{3}$.

Non mi è paruto bene il recare minutamente innanzi a voi le dimoſtrazioni di queſti teoremi, perchè, oltre che io ſarei ſtato men breve di quello che mi ſon propoſto, ſono elleno aſſai facili e piane; ed io sò beniſſimo che molte volte gl' ingegni dotti e vivaci ſi annojano e s' inquietano delle troppo facili dimoſtrazioni.

Vi dirò ſolo, che io ho cercate queſte verità ſupponendo prima (Fig. 7. 8. 9. ec.) la figura inſcritta; indi prolungandone i lati così, che poteſſero poi venire a terminare nei punti medj de' lati della circonconſcritta, dove foſſe queſta in appreſſo formata.

La coſa non mi è ſtata molto difficile, dopo che ebbi ſcoperto, che il lato della figura inſcritta (Fig. 3.) ha una ragione coſtante a quel reſto di linea, che è fra eſſo, e il punto medio del lato della circoſcritta, e che la ragione è di 2. ad 1.

La dimoſtrazione ne è breve.

Dalla figura (Fig. 3.) A B C D diviſa dalla diagonale B D ſi levi nuovamente (Fig. 13.) la porzione A B D.

Dico $DI : IF :: 2 : 1$.

Si conduca la linea E F.

B D, ed E F ſono paralelle, dunque $BD : EF :: DA : EA$; e $DA : EA :: 2 : 1$ per la ſuppoſizione, dunque $BD : EF :: 2 : 1$. Gli

Gli angoli E I F, ed B I D sono eguali, perchè oppofti nel vertice, sono poi simili, i triangoli B I D, F I E perchè essendo fra due paralelle, hanno alle basi gli angoli alterni eguali.

Per lo che saranno proporzionali i lati omologhi, ed in ragion delle basi; così D I : I F : : D B : E F; e così pure D I : I F : 2 : 1.

Eccone dunque quella proposizione, che mi ha servito di scorta, ed ecco in che maniera fingendo prima le figure inscritte, mi è riuscito per un metodo inverso di rintracciare facilmente tutto ciò, che ho voluto.

Lasciatemi la libertà di esclamare; bella veramente felicità de' Geometri! a quali è dato scoprire il vero per ogni via. Sono essi avvezzi sempre a trattare con le essenze necessarie, in cui tanto vale la condizione quanto il condizionato, e ciò che era condizionato può diventar condizione. Così è loro il dire, se la somma degli angoli è uguale a due retti la figura è triangolo, come lo sarebbe, se la figura è triangolo la somma degli angoli è ugnale a due retti. E certamente i Matematici anche tra le fatiche de' loro calcoli, e nelle estasi delle loro meditazioni, non ponno a meno di non riguardare ognora nell' idea dell' Ente necessario, per questo vicendevole cambiamento di condizione, e di condizionato; che è lo stesso affermare di lui, se egli esiste è possibile, o veramente se egli è possibile esiste.

Ma io non debbo scostarmi per vaghezza di Metafisica dal mio argomento; o anzi pure dovrei al mio argomento medesimo dar fine. Ho detto abbastanza di queste circoscritte, e della loro quantità, e della qualità loro.

Siami lecito solamente il dedurne due corollari.

Il primo è la maniera, con la quale, dato un quadrato, se ne può comporre un' altro o triplo, o subtriplo; subito, e facilmente. Si

Si avrà triplo, quando (Fig. 12. si voglia considerare un quadrato come figura inscritta.

Si trovi la media proporzionale tra la base, e l' altezza del paralellogramo circonscritto.

Il lato del quadrato inscritto, e questa media proporzionale staranno fra loro come 1 alla $\sqrt{3}$, e i loro quadrati come 1. a 3.

Si avrà poi subtriplo, quando (Fig.7.) si voglia considerare un quadrato come figura circonscritta.

Si trovi la media proporzionale tra la base e l'altezza del paralellogramo inscritto.

Il lato del quadrato circoscritto, e questa media proporzionale staranno fra loro come 1 alla $\sqrt{\frac{1}{3}}$ e i loro quadrati come 1 ad $\frac{1}{3}$

Ma venghiamo all' altro corollario; che è forse più degno di considerazione.

Dico io dunque, che non solamente in un quadrilatero si può inscrivere un' altro quadrilatero, ma in questo secondo (Fig. 14.) se ne può inscrivere un terzo, nel terzo un quarto, nel quarto un quinto, e così in infiito.

Se lo spazio della prima figura fosse eguale ad a, tutta la serie infinita delle figure si esprimerebbe in questo modo $\div a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} :$ &c.

Ma siccome abbiamo dalla teoria delle serie geometriche infinite, che quando i termini decrescono in ragion tripla, il primo è doppio della somma di tutti gli altri, così diremo nel caso nostro $\int \div a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} :$ &c $= \frac{a}{2}$

Ora la metà di qualsivoglia quadrilatero si può avere inscrivendo in esso alla maniera del Robervalle nuovo quadrilatero, (Fig 1.) il quale anzi sarà sempre paralelogralogramo, e perciò anche più agevolmente quadrabile.

Dunque conchiudo, ed ecco la proposizione, che intendo di raccogliere; la serie infinita delle inscritte (Fig. 14.) dagli angoli ai lati è uguale ad una sola inscritta (Fig. 1.) dai lati agli altri lati, onde questa serie medesima è chiaramente nota, e quadrabile facilmente.

Il Robervalle volendo formar le sue inscritte, divise per metà i lati delle circonscritte, ed io pur nelle mie così feci: ora, dico io, non si potrebbe egli essere un po' più ardito, ed in vece di fermarsi solamente nelle metà de' lati, scorrere anzi per tutta la infinita serie delle numeriche frazioni? Chi sà qual bella ed elegante verità ne è promessa in mercede di questa fatica? Ma questa fatica a me è piaciuto di sostenere, ed ecco la verità, che ne ho tratta.

Mi si consenta di chiamare (Fig. 3.) l'angolo D A B, e l'angolo B C D gli angoli sfuggiti, come quelli, da cui sta lontana la inscritta; l'angolo poi A B C, e l'altro C D A dirò gl' angoli della diagonale. Mi è bisognato dar qualche nome a questi angoli per amore di maggior chiarezza.

Si ponno prendere le frazioni dell' angolo sfuggito facendo $AF = \frac{AB}{2}$, $AE = \frac{AD}{2}$, $CH = \frac{CD}{2}$, $CG = \frac{CB}{2}$; ovvero $AF = \frac{AB}{3}$, $AE = \frac{AD}{3}$ ec. od $AF = \frac{AB}{4}$, $AE =$ ec. e così in infinito.

Si ponno prendere ancora le frazioni dall' angolo della diagonale facendo $BF = \frac{BA}{2}$, $BG = \frac{BC}{2}$, $DH = \frac{DC}{2}$, $DE = \frac{DA}{2}$; ovvero $BF = \frac{BA}{3}$, $BG = \frac{BC}{3}$, ec.; od $BF = \frac{BA}{4}$, $BG =$ ec. e così in infinito.

Lo che facendosi per egnal modo in ciascheduno

dei

dei lati, e conducendosi poi le linee FD, GD, EB, HB, si avrà sempre nota la ragione della inscritta qualunque siasi, BLDI a tutta l'area ABCD.

Eccovi esposta questa ragione distesamente.

Sia frazione $=$ F; inscritta $=$ I; area totale $=$ A.

Si prendano le frazioni dall' angolo sfuggito

$F = \frac{1}{2}$; $I = \frac{1\,A}{3}$. $F = \frac{1}{3}$; $I = \frac{2\,A}{4}$. $F = \frac{1}{4}$; $I = \frac{3\,A}{5}$. $F = \frac{1}{5}$, $I = \frac{4\,A}{6}$. $F = \frac{1}{6}$; $I = \frac{5\,A}{7}$. ec.

Lo che fa vedere le inscritte in una serie di rotti comincianti da $\frac{1}{3}$, e crescenti in progressione aritmetica tanto ne' numeratori quanto ne' denominatori.

Si prendano le frazioni dall' angolo della diagonale.

$F = \frac{1}{2}$; $I = \frac{1\,A}{3}$. $F = \frac{1}{3}$; $I = \frac{1\,A}{5}$. $F = \frac{1}{4}$; $I = \frac{1\,A}{7}$. $F = \frac{1}{5}$; $I = \frac{1\,A}{9}$. $F = \frac{1}{6}$; $I = \frac{1\,A}{11}$. ec.

Lo che fa vedere le inscritte in una serie di rotti comincianti da $\frac{1}{3}$, e crescenti ne' soli denominatori secondo i numeri impari della progressione aritmetica.

La dimostrazione di tutto ciò è chiarissima, e non è molto diversa da quella, onde ho provata già sopra la inscrita $= \frac{1}{3}$. Ma per darla più generale, (Fig. 4.) si ABD una porzione di quadrilatero diviso dalla diagonale.

Dico; ADF : FDB : : AIF : FIB : AF : FB.
E così dunque ADF—AIF : FDB—FIB : : AF : FB; che è lo stesso che dire ADI : IDB : : AF : FB.

Ora sia a cagion d' esempio $AF = \frac{1}{5}$.
AF : FB : : 1 : 4, & ADI : IDB : : 1 . 4.
Dunque ADI $=$ 1; ABI $=$ 1 IBD $=$ 4; dunque finalmente $IBD = \frac{4\,ABD}{6}$.

Se si vorrà prendere una frazione, ove il numeratore sia maggior di uno come sarebbe $\frac{5}{7}$, $\frac{20}{22}$, $\frac{346}{489}$, ec.

la medeſima dimoſtrazione ſvolgerà con egual deſtrezza il problema.

Se la frazione foſſe polinomia come ſarebbe $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}$, ciò non importa, che non ſi vuole altro ſtudio di più, che ridurre i termini alla medeſima denominazione, ed ecco l' $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} = \frac{2}{5}$.

Non ho ſegnate io altre ſerie d' inſcritte, ſe non ſe le due, ove il denominatore della frazione, cominciante o preſſo l' angolo sfuggito, o preſſo l' angolo della diagonale, è uguale ad uno; baſta bene che io abbia preſtato altrui modo, onde agevolmente trovarle tutte.

Ciaſcheduna di queſte inſcritte infinite e diverſe, ove ſi formi ne' paralellogrami, è paralellogramo ancor eſſa. Se v' ha cui piaccia indagare in quel paralellogramo ſi inſcriva il quadrato, in quale il romboide; e così degli altri, lo può egli trovare per il metodo inverſo prolungando il lato della figura inſcritta. Ove il numeratore della frazione ſia eguale ad uno, eccogli la ſerie de' prolungamenti.

Sia (Fig. 3.) D I lato della figura inſcritta $=$ L, ed il ſuo prolungamento I F $=$ P.

Si prendano le frazioni dall' angolo sfuggito.

$F = \frac{1}{2}$; $P = \frac{1\,L}{2}$. $F = \frac{1}{3}$; $P = \frac{1\,L}{3}$. $F = \frac{1}{4}$; $P = \frac{1\,L}{4}$. $F = \frac{1}{5}$; $P = \frac{1\,L}{5}$. $F = \frac{1}{6}$; $P = \frac{1\,L}{6}$. ec.

Lo che moſtra, che così le frazioni ſtanno ai loro tutti, come i prolungamenti a que' loro lati, da cui derivano.

Si prendano le frazioni dall' angolo della diagonale.

$F = \frac{1}{2}$; $P = \frac{1\,L}{2}$. $F = \frac{1}{3}$; $P = \frac{2\,L}{3}$. $F = \frac{1}{4}$; $P = \frac{3\,L}{4}$. $F = \frac{1}{5}$; $P = \frac{4\,L}{5}$. $F = \frac{1}{6}$; $P = \frac{5\,L}{6}$. ec.

Lo che da ne' prolungamenti una ſerie di rotti cominciante da $\frac{1}{2}$, e creſcente tanto ne' numeratori quanto ne' denominatori ſecondo la progreſſione aritmetica.

La dimoſtrazione, di che mi ſon ſervito, ove ho moſtrato (Fig. 13.) $IF = \frac{DI}{2}$, vale in ciaſcheduno di queſti caſi, e valerebbe anche ſe il numeratore della frazione, preſa o dall'angolo sfuggito, o dall'angolo della diagonale foſſe maggiore di uno, ed ancora quando la frazione foſſe polinomia.

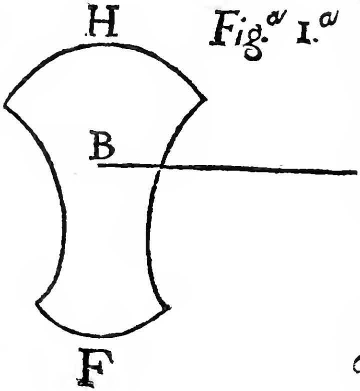
Ora chi non vede queſti teoremi da che prodigioſo numero di propoſizioni ſono accompagnati e ſeguiti? Che infinite maniere di conſtruir quadrati o maggiori, o minori di alcun dato! Che maraviglioſa ed interminabile quantità di ſerie tutte con agevolezza ſommabili, e che recano per così dire nelle noſtre mani quel sì terribile infinito tutto piacevole, e manſuefatto!

Ma io ho detto abbaſtanza, ſe non forſe anche troppo. Veramente ſu 'l principio non mi aſpettava di camminare ſi lunga ſtrada: ed ho quaſi rimorſo di non mi eſſere contentato di dire qualche coſa di meno; ma queſta è una colpa, che facilmente s'impara a commettere per poco, che ne piaccia uſare, e addimeſticarſi con la Geometria; imperciocchè ſiccome non ricuſa ella talora di eſſere alle altrui dimande e premure più aſſai che non ſi vorrebbe incivile, e indiſcreta; così poi in ricompenſa altra volta ne vuole ella ſteſſa eſſer larga e corteſe più che non biſogna.

Ho io finito, corteſiſſimi Accademici, di mettere a riſchio la voſtra pazienza. Mi ſon ſtudiato di eſſere e chiaro e breve, quanto io poteva: piaccia a Dio, che non lo ſia ſtato aſſai meno di quello, che voi avreſte voluto.

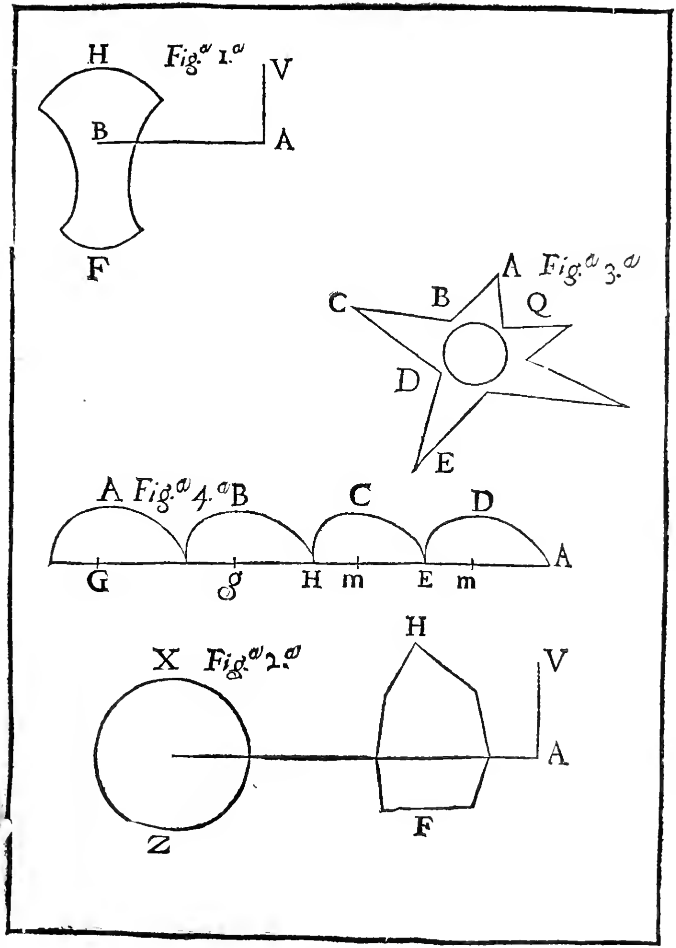
LET-

Fig.ª 1.ª



ª 3.ª

Fig.ª 4.ª


H
Fig.ª 1.ª
V
B
A
F
A
Fig.ª 3.ª
C
B
Q
D
E
A
Fig.ª 4.ª
B
C
D
A
G
g
H
m
E
m
H
X
Fig.ª 2.ª
V
A
Z
F

LETTERA
DI VINCENZIO RICCATI
DELLA COMPAGNIA DI GESU'

AL PADRE

LEONARDO XIMENES
DELLA MEDESIMA COMPAGNIA

Nella quale si dimostra, e s' amplia
un Teorema

DEL SIGNOR

GIOVANNI BERNOULLI
SPETTANTE ALLA RETTIFICAZION
DELLE CURVE

LETTERA I.

Molto Reverendo in Cristo Padre.

NOn vi stupite, riveritissimo Padre, s'io torni a scrivere sovra un antico Teorema pubblicato sin dal 1697. negli atti di Lipsia dal Signor Giovanni Bernoulli Geometra, come sapete, di primo seggio. Perciocchè avendo negli stessi atti del 1739. il Signor Giovanni Teofilo Valzio uomo dottissimo proccurato di manifestarne l'occulta analisi, una ne ha prodotto, la quale quanto è ingegnosa, e d' artificj ripiena; altrettanto riesce molesta per la sua lunghezza, e increscevole. Laonde desiderio mi nacque di far prova, se mi riuscisse di cavare il Teorema Bernoulliano con un'analisi più semplice, e più elegante: e vie più crebbe questo mio desiderio, quando nel Bernoulli lessi, ch' egli non indicava l' analisi, onde avea il suo Teorema trovato, perchè il calcolo sarebbe di troppa prolissità. Toccherà a voi il giudicar del mio metodo, col quale non solamente il Teorema ricavo, ma ancora l' estendo d'assai, e parecchi altri ne discuopro, che non sono del tutto d' eleganza sforniti.

Il Teorema dal suo Autore in cotal guisa s' espone: Se, poste d'una data curva le coordinate x, y, descrivasi un altra curva, le cui coordinate sieno

$$\frac{x\,dy^3}{dx^3}, \text{ e } \frac{3\,x\,dy^2}{dx^2} - \tfrac{1}{2} S \frac{dy^2}{dx}$$

amendue le curve la genitrice, e la generata prese insieme saranno rettificabili. Siami permesso d' espor lo stesso Teorema un poco diversamente, cioè a dire: se l' equazion della curva data sia $dy = p\,dx$, nella quale p sia data per x, e per costanti, e se descrivasi un altra curva, le cui coordinate sieno

$$x\,p^3, \text{ e } \tfrac{3}{2}\,x\,p^2 - \tfrac{1}{2} S\,p^2\,dx,$$

amendue le curve prese insieme riceveranno rettificazione algebraica.

Per venire a capo del mio disegno, fa di mestieri, ch' all' elemento della curva data, il quale è $= dx\sqrt{1+pp}$, si aggiunga una quantità differenziale, la qual sia dotata delle seguenti due condizioni, prima, che il di lei quadrato sia divisibile in duo quadrati, le cui radici non contengano veruna quantità immaginaria; l' altra, ch' aggiunta al predetto elemento della curva data, componga una

for-

formola integrabile. La prima condizione non manca in veruna formola, che sia multiplicata per $\sqrt{M+N}$, nella quale l' uno, e l' altro termino sia affetto del segno $+$. Ma per isfuggire i lunghi calcoli in vece di $\sqrt{M+N}$ userò la $\sqrt{1+pp}$, la qual nell' elemento della curva data ritrovasi. L' altra condizione io l' otterrò col chiamar in soccorso il metodo delle quantità indeterminate.

Sia per tanto l' elemento della curva cercata $=$

$$\overline{Vdx+Zxdp} \cdot \sqrt{1+pp},$$

nel quale V, Z sono quantità da determinarsi per x nel progresso dell' analisi. Adunque la somma dei due elementi sarà $=$

$$dx\sqrt{1+pp}+\overline{Vdx+Zxdp} \cdot \sqrt{1+pp}=$$
$$\overline{1+V} \cdot dx\sqrt{1+pp}+Zxdp\sqrt{1+pp}.$$

Di questa l' integrale supponghiamo essere $=$

$$\overline{1+V} \cdot x\sqrt{1+pp},$$

che differenziato darà

$$\overline{1+V} . dx\sqrt{1+pp}+dV . x\sqrt{1+pp}+\frac{\overline{1+V} . xpdp}{\sqrt{1+pp}}$$

A determinare il valore di Z si paragoni cotal formula coll' antecedente, e si vedrà che nasce la seguente egualità

$$Zxdp\sqrt{1+pp}=dV . x\sqrt{1+pp}+\frac{\overline{1+V} . xpdp.}{\sqrt{1+pp}}$$

 poichè

Poichè la V dovrà tra poco determinarsi per x o per p, si ponga $dV = q\,dp$, e facendo la sostituzione, e dividendo l'equazione per $x\,dp\sqrt{1+pp}$ si troverà

$$Z = q + \frac{\overline{1+V}.p}{\sqrt{1+pp}}$$

Pertanto se nell' assunto elemento della curva cercata in luogo di Z il suo valore si ponga, sarà manifesto, che aggiunto all'elemento della formola data sarà integrabile di modo, che fatta l'integrazione avremo

$$\overline{1+V}.x\sqrt{1+pp}.$$

Vogliousi al presente determinare le coordinate della curva cercata. L'elemento della curva cercata cioè

$$\overline{V\,dx + Z\,x\,dp}.\sqrt{1+pp}$$

s'alzi al quadrato, e si divida ne' due quadrati seguenti

$$\overline{V\,dx + Z\,x\,dp}^2 \quad , \quad p^2.\overline{V\,dx + Z\,x\,dp}^2.$$

Le radici di cotai quadrati, che non involvono quantità immaginarie, daranno le differenze delle due coordinate della curva cercata. cioè

$$V\,dx + Z\,x\,dp \qquad p.\overline{V\,dx + Z\,x\,dp}.$$

In queste si ponga il valor della Z poco anzi trovato, e avrassi

$$V\,dx + q\,x\,dp + \frac{\overline{1+V}.xp\,dp}{\sqrt{1+pp}},$$

$$p.\overline{Vdx \dagger qxdp \dagger \frac{\overline{1 \dagger V}.xpdp}{\sqrt{1 \dagger pp}}}$$

ma $qdp = dV$: dunque le differenze delle coordinate saranno

$$Vdx \dagger xdV \dagger \frac{\overline{1 \dagger V}.xpdp}{\sqrt{1 \dagger pp}},$$

$$p.\overline{Vdx \dagger xdV \dagger \frac{\overline{1 \dagger V}.xpdp}{\sqrt{1 \dagger pp}}}.$$

Prendendo di queste due formule gl' integrali, ritroveremo le due coordinate cercate. Nell' integrare si può omettere la costante, non cangiandosi da questa la curva, nè ai segni si vuole aver riguardo; perchè o positive, o negative si prendano l'ordinate la curva resta la stessa.

Prima che la V per x, e per p si determini, sarà bene considerare, che se la differenza della prima coordinata della curva cercata si moltiplichi per p avremo l' altra; la qual condizione ritrovasi ancor nelle differenze della curva data. Perlochè se pongasi

$$Vdx \dagger xdV \dagger \frac{\overline{1 \dagger V}.xpdp}{\sqrt{1 \dagger pp}} = dz,$$

gli elementi delle coordinate della curva or ora trovata saranno dz, pdz: dunque ſe una nuova curva diſcrivaſi, nella quale ſieno gl'elementi dell'

affiſſa

$$Wdz + zdW + \frac{\overline{1+W}\,zpdp}{1+pp},$$

ordinata

$$p.\overline{Wdz + zdW + \frac{\overline{1+W}.zpdp}{1+pp}}$$

queſta inſieme coll' antecedente ſarà rettificabile, ed eguale a $\overline{1+W}.z\sqrt{1+pp}$. Ognun vede, che la z è data per x. Quant' alla W comunque eſſa a piacere determinare ſi poſſa; pure affinchè la terza curva naſca dalla ſeconda, come la ſeconda dalla prima, debb' eſſer data per Z in quella guiſa, che V vien data per x. Laonde ſe la V è data ſolamente per p, ſarà $W = V$; ma s' eſſa è data ancora per x, non ſarà difficile l' indeterminata W ſimilmente determinare per z. Per cotal maniera dalla terza curva ſi troverà la quarta, dalla quarta la quinta, e così di mano im mano. Con ſi fatto metodo ſi formerà di curve una ſerie, in cui a due a due ſi potranno rettificare.

In oltre ſiccome dalla curva, in cui le differenze delle coordinate ſono dx, pdx, naſce un' altra curva, le cui coordinate

egua-

eguagliano gl' integrali delle ſeguenti quantità

$$V\,dx + x\,dV + \frac{\overline{1+V}\,.\,xp\,dp}{1+pp},$$

$$p.\,V\,dx + x\,dV + \frac{\overline{1+V}\,.\,xp\,dp}{1+pp};$$

così da queſta vicendevolmente quella ſi può far naſcere, e la ſomma delle due curve ſarà $\overline{1+V}.\,x\sqrt{1+pp}$. Ad ottener ciò, e ad iſtabilire un ſecondo generale Teorema ſi faccia

$$V\,dx + x\,dV + \frac{\overline{1+V}.\,xp\,dp}{1+pp} = dz,$$

e per mezzo di queſta equazione la x ſi determini. Dividiamo per xV, e avremo

$$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{\overline{1+V}.\,p\,dp}{V.\,\overline{1+pp}} = \frac{dz}{xV}.$$

Facciamo

$$\frac{\overline{1+V}.\,p\,dp}{V.\,\overline{1+pp}} = \frac{ds}{s}, \text{ onde } c^{\int \frac{\overline{1+V}\,.\,p\,dp}{V\,.\,\overline{1+pp}}} = s$$

nella quale c è il numero, il cui logaritmo è uguale all' unità. Fatta la ſoſtituzione otterremo l' equazione

$$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dz}{Vx}.$$

Di nuovo suppongasi

$$\frac{dx}{x} + \frac{d\mathrm{V}}{\mathrm{V}} + \frac{ds}{s} = \frac{dr}{r},$$

e per conseguenza $x\,\mathrm{V}\,s = r$. Per mezzo della sostituzione nascerà $\frac{dr}{r} = \frac{s\,dz}{r}$, ovvero $r = S\,s\,dz$: dunque $x\,\mathrm{V}\,s = S\,s\,dz$,

$$\text{o sia } x = \frac{S\,s\,dz}{\mathrm{V}\,s} = \frac{S\,dz.\,c^{S\frac{\overline{1+\mathrm{V}.}\,p\,dp}{\mathrm{V}.\,\overline{1+pp}}}}{\mathrm{V}.\,c^{S\frac{\overline{1+\mathrm{V}.}\,p\,dp}{\mathrm{V}\,\overline{1+pp}}}}.$$

Laonde se le coordinate della curva saranno z, $S\,p\,dz$, le coordinate dell' altra, che insieme con lei è rettificabile, verranno ad essere

$$\frac{S\,dz.\,c^{S\frac{\overline{1+\mathrm{V}.}\,p\,dp}{\mathrm{V}.\,\overline{1+pp}}}}{\mathrm{V}.\,c^{S\frac{\overline{1+\mathrm{V}.}\,p\,dp}{\mathrm{V}.\,\overline{1+pp}}}}, \quad S\,p\,.\,D\,\frac{S\,dz.\,c^{S\frac{\overline{1+\mathrm{V}.}\,p\,dp}{\mathrm{V}.\,\overline{1+pp}}}}{\mathrm{V}.\,c^{S\frac{\overline{1+\mathrm{V}.}\,p\,dp}{\overline{1+pp}}}}$$

Per identità di ragione se d'una curva data le coordinate sieno x, $S\,p\,dx$, le coordinate dell' altra curva saranno quelle, che dall' ultime formule nasceranno, se in esse in luogo della z sostituiremo la x. E questo è un altro general Teorema, cui noi in appresso chiameremo il secondo, per mezzo di cui potremo, siccome nel primo fatto abbiamo,

far

far nascere una serie di curve ricavando dalla seconda la terza, dalla terza la quarta, e così via via. Si vuol por mente però, esser cosa facile di far sì, che le due serie nate dal primo, e dal secondo Teorema una sola serie compongano, quando la V sia data unicamente per la p: ma se data sia ancor per la x è di mestieri, che si prenda data per x in quella guisa, in cui prima era data per z; la qual cosa in più casi non riesce così agevole ad ottenersi.

In cotai serie maravigliose proprietà si ravvisano, le quali per noi si faran manifeste più chiaramente, quando ad alcun caso particolare applicheremo i generali Teoremi.

Ripigliando pertanto il primo Teorema, e determinando la quantità V facciamo nascere parecchi men generali Teoremi. Tra questi il più semplice, ed elegante sembrami esser quello, che trae origine dalla determinazione di $V = pp$. In cotal ipotesi essendo gli elementi delle due coordinate della curva data dx, pdx, quelli della curva cercata saranno $p^2 dx + 3xpdp$, $p^3 dx + 3xp^2 dp$; e integrando avremo le

assisse	ordinate
$p^2 x + Sxpdp$	
ovvero	$p^3 x$
$\frac{3}{2}p^2 x - \frac{1}{2} Sp^2 dx$	

Questo è il Teorema del Signor Giovanni

Ber-

Bernoulli, di cui il mio metodo ha somministrata un analisi facile, e speditissima.

Seguendo l'esempio di quest'uomo d'ogni lode maggiore applichiamo alle parabole il suo Teorema, e ponghiamo, che della data curva le coordinate sieno

x, $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}\cdot A^m}$: quindi le differenze loro saranno

dx, $\frac{x^m dx}{A^m}$: dunque $p = \frac{x^m}{A^m}$. Da questa determinazione nascono della cercata curva le seguenti coordinate

$$\frac{3m+1}{2m+1}\cdot\frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}, \quad \frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}.$$

Ho poste le due curve nella quì annessa tavola la prima al num. 1. l'altra al num. 2. Essendo poi la somma delle due curve $= 1 + V . x\sqrt{1+pp}$, sostituendo i valori la troveremo

$= x . s + \overline{\frac{x^{2m}}{A^{2m}}}^{\frac{3}{2}} = x . \frac{\overline{A^{2m}+x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}}$; e chiamando

$\frac{\overline{A^{2m}+x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}} = Z$ sarà la detta somma

$= x Z$, come nella stessa Tavola apparisce.

Non contento della seconda curva, che viene dalla prima prodotta, traggo dalla

seconfeconda la terza, dalla terza la quarta, e fuffeguentemente quanto bifogna, e tutte diftribuendole nella tavola formo quella ferie, che vien indicata dai numeri affermativi. Le lettere B, C, D, ec. difegnano i coefficienti dell' affiffe nella curva fuperiore; onde fia $B = \frac{3m+1}{2m+1}$, $C = B.\frac{5m+1}{4m+1}$, $D = C.\frac{7m+1}{6m+1}$, e così di mano in mano. In quefta ferie ciafcuna infieme colla fua vicina è rettificabile, anzi eguale a quella quantità, che nella Tavola vien fegnata.

Formata, e portata innanzi la ferie per l' una parte, mi ftudio di continuarla ancora dall' altra. Ciò fi può efeguire con due metodi, cioè o per mezzo della natura della ferie, la quale è affai conofciuta per poterla profeguire ancora al di fopra, o per mezzo del fecondo generale Teorema, il quale nel cafo noftro ad una maffima fimplicità fi riduce. Le curve con tai metodi ritrovate le ho pofte nella Tavola fotto ai numeri negativi incominciando dall' *o*. V' ha però qualche divario tra la ferie inferiore, e la fuperiore, perchè in quefta le lettere G, H, K, ec. dinotano i coefficienti dell' ordinate della curva inferiore, onde farà $G = \frac{1}{m+1}$, $H = G.\frac{-2m+1}{-m+1}$, $K = H.\frac{-4m+1}{-3m+1}$ e così

dell'

dell' altre. La ſomma delle due vicine curve, come dianzi, la ritroverai nella Tavola.

Formata cotal ſerie vengon le curve denominate pei numeri, che lor corriſpondono nella Tavola.

Si ha $1 \dagger 2 = xZ$

$$2 \dagger 3 = \frac{Bx^{2m\dagger 1}}{A^{2m}} Z: \text{ dunque ſottraendo}$$

$$1 - 3 = \frac{A^{2m}x - Bx^{2m\dagger 1}}{A^{2m}} . Z. \text{ Di più}$$

$$3 \dagger 4 = \frac{Cx^{4m\dagger 1}}{A^{4m}} Z: \text{ dunque aggiungendo}$$

$$1 \dagger 4 = \frac{A^{4m}x - BA^{2m}x^{2m\dagger 1} \dagger Cx^{4m\dagger 1}}{A^{4m}} . Z:$$

e così ſeguitando, troveremo, ch' alla prima curva aggiungendo qualunque altra, che poſta ſia in ſede pari, proverrà la ſomma rettificabile; e che dalla prima levando qualunque altra, che poſta ſia in ſede diſpari, proverrà la differenza rettificabile. Ciò che della prima curva s' è detto, a tutte l' altre egualmente s' eſtende. Per le quali conſiderazioni il Teorema ſeguente ſi ſtabiliſce. Due curve della noſtra ſerie, delle quali l' una ſia in ſede pari, l' altra in diſpari,

hanno

hanno la ſomma rettificabile: Due curve poſte, o amendue in ſede pari, o amendue in ſede diſpari, hanno rettificabile la differenza. Pertanto non ſolamente è vero ciò, che viene dal Bernoulli notato, che ciaſcuna parabola ne ha un' altra, con cui accoppiata ammette rettificazione, ma è vero eziamdio, che ciaſcuna parabola ne ha infinite, le quali aggiunte, o levate da eſſa ricevono rettificazione algebraica.

Per ciò, che ſin al preſente s'è dimoſtrato, infiniti altri archi determinar ſi poſſono nelle noſtre parabole, la cui ſomma, o differenza rieſce rettificabile. E per indicarlo con brevità, ſia nella figura anneſſa A C G qualunque parabola, nella quale tagliata l' aſſiſſa A B ſi determini l' arco A C. Abbiavi ancora un' altra parabola, la quale accoppiata colla prima, rieſca rettificabile. Si tagli l' analoga aſſiſſa A D, e l' arco A E di maniera, che A C † A E eguagli una quantità algebraica. Prendaſi un' altra aſſiſſa A F maggior della prima, che determini l' arco A G. Due caſi poſſono avvenire; primo, che l' aſſiſſa analoga della ſeconda parabola ſia maggiore; ſecondo, che ſia minore di A D. Suppongaſi in prima maggiore, e ſia A H, a cui corriſponde l' arco A M. Poichè

non meno A G † A M

che A C † A E vien ad eguagliare una

quan-

quantità algebraica, facendo l' opportuna ſottrazione ſarà

$CG + EM$ rettificabile. Sia in ſecondo luogo l' aſſiſsa AK minor di AD, a cui corriſponde l' arco AN. Giacchè gli archi

$AG + AN$

$AC + AE$ ſono rettificabili, fatta la ſottrazione gli archi

$CG - EN$ riuſciranno rettificabili; ſiccome ſi dovea ritrovare.

Se poi non la ſomma de' due archi parabolici, ma la differenza ſia algebraica, nel primo caſo avremo

$AG - AM$

$AC - AE$ rettificabili; dunque ſottraendo

$CG - EM$ ſimilmente rettificabile. Nel ſecondo caſo collo ſteſso metodo ſimilmente ſi proverà eſser rettificabile la ſomma degli archi $CG + EN$.

Il dottiſſimo Sig. Bernoulli acconciamente riflette, che da una parabola primaria cubica naſce una parabola primaria cubica: la qual verità dalla noſtra ſerie agevolmente raccoglieſi. Imperciocchè ſe pongaſi $m = -\frac{2}{3}$, le coordinate della curva adiacente al numero 1 ſaranno x, $3A^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$; e dell' adiacente al numero 2 $\frac{3A^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{A^2}{x}$. L' una e l' altra di coſ-

tai

tal curva facilmente ſi ravviſa per una parabola primaria cubica. V' ha però qualche divario; perchè della prima l'aſſiſse voglionſi prender nell' aſse, della ſeconda nella tangente all' aſse perpendicolare. Per la qual ragione avviene, che la terza curva naſcente dalla ſeconda, non ſia una parabola primaria cubica, ma una parabola d'ordin più alto, cioè la quinta della ſettima podeſtà. Bella, e maraviglioſa ſembra la proprietà della parabola primaria cubica, il cui arco congiunto con un altro arco della ſteſſa curva non rigetta d'eſſer rettificato.

Ma cotal proprietà ad infinite altre parabole pur conviene. Imperciocchè allora le curve della noſtra ſerie ſaranno del medeſimo ordine, quando nella ſuperiore l' indice dell'ordinata diviſo per l'indice dell' aſſiſſa ſia eguale all' indice dell' aſſiſſa diviſo per l' indice dell' ordinata della curva inferiore. Se queſta regola adoperando farete sì, che due curve vicine, quali vogliate, ſieno dello ſteſso ordine, ritroverete ſempremai due parabole primarie cubiche; ma quelle due, che a queſte ſono vicine, vedrete eſſere due parabole quinte della ſettima podeſtà; queile due, che ſeguono al di ſotto, e al di ſopra, due parabole none dell' undecima podeſtà, e così di mano in mano. Laonde tutte le parabole, il cui indice è eſpreſso per la formula $\frac{4n+1}{4n+3}$ poſto n un numero intero, hanno cotal proprietà, che congiunte con un altra parabola dello ſteſſo ordine ſono rettificabili.

Che ſe facciamo in guiſa, che ſieno del medeſimo ordine due, che vengono per una terza diviſe, ritroveremo due parabole terze della quinta podeſtà, quelle che ſeguono due parabole ſettime della nona podeſtà, le vicine due parabole undecime della podeſtà decimaterza, e così di mano in mano. Laonde ſe n ſia un numero intero, o anche zero, tutte le parabole, il cui indice ſia $= \frac{4n+3}{4n+5}$, ſottratte da un arco parabolico dello ſteſſo ordine ricevono algebraica rettificazione. La curva poi, che ſta di mezzo tra queſte ſi ritrova eſſere un' iperbola apolloniana.

Molte altre proprietà potrei ſcuoprire nelle curve della noſtra ſerie: ma ſcrivendo ad un geometra ſtimo coſa ſuperflua lo ſpiegar a lungo ciò, che per ſe medeſimo può vedere.

Abbiam dedotto col noſtro metodo il Bernoulliano Teorema: molti altri dedur ſimilmente ſi poſſono comunque non tanto ſemplici, ed eleganti, ſe l' indeterminata V in altra determinare ſi voglia, come ſe facciaſi

$$1 + V = M . \overline{1+pp},$$

ovvero più univerſalmente

$$1 + V = M . \overline{1+pp}^{n}$$

o ſe pongaſi $V = \frac{M}{x}$. Ma omettere non ſi vuole una determinazione aſſai ſemplice, per mezzo di cui ſi ritrova ſempre una curva algebraica, quando ſia algebraica la curva data.

Supponete $1 + V = \frac{M . \overline{1+pp}}{x}$: dunque

$$x + V x = M . \overline{1+pp};$$

e prendendo le differenze, indi opportunamente trasferendo, avrete

$$V d x + x d V = 2 M p d p - d x.$$

Fatta la ſoſtituzione troverete eſſere le differenze delle coordinate della curva cercata

$$2 M p d p - d x + M p d p,$$

$$2 M p^2 d p - p d x + M p^2 d p$$

ovvero

$$3 M p d p - d x, \qquad 3 M p^2 d p - p d x$$

e fatta l' integrazione

$$\tfrac{3}{2} M p^2 - x \quad , \qquad M p^3 - S p d x.$$

Quando la curva data algebraica ſia, potrà ſempre ottenerſi algebraicamente $S p d x$: dunque ancor la curva ritrovata ſarà ritro-

vata sarà albebraica. Gli archi delle due curve prese insieme saranno $= M . \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$.
Avvertite però, che vuolsi aver riguardo alle costanti, che nell'integrazione si sono omesse.

Sarà cosa inutile il tentare, di formare con questa determinazione una serie di curve: perciocchè la stessa curva ben presto ritornerà. E per farlo toccar con mano pongo $\frac{3}{2} M p^2 - x = z$: dunque le coordinate saranno z, $S p d z$: dunque le nuove coordinate della curva nescente introducendo una nuova costante N verranno ad essere

$$\frac{3}{2} N p^2 - z \quad , \quad N p^3 - S p d z .$$

In luogo di z si sostituisca il suo valore per x, e si troverà

$$\frac{3}{2} \overline{N - M} p^2 + x \quad , \quad \overline{N - M} . p^3 + S p d x$$

La somma degli archi di questa, e dell'antecedente $= \overline{N - M} . \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$.

Se da capo si ponga

$$\frac{3}{2} . \overline{N - M} . p^2 + x = z ,$$

si troverà l'ordinate della quarta curva introducendo una novella costante O.

$$\frac{3}{2} . \overline{O - N + M} . p^2 - x \quad , \quad \overline{O - N + M} . p^3 - S p d x ;$$

le

le quali non ſon diverſe dalle coordinate della ſeconda curva ſe non in ciò, che la quantità coſtante, coefficiente del primo termine in queſta vien eſpreſſa per M, nell'ultima per O — N † M. Laonde cotal determinazione della quantità V non può veruna profittevol ſerie ſomminiſtrare.

Con ciò ſembrami ſenza più d'aver dichiarato il metodo, ch' ho ſeguito, di cui toccherà a voi il giudicare, giacchè io lo ſottometto interamente al voſtro retto giudizio, e alla prudente voſtra cenſura. Voi trattanto ſeguitate a coltivare, ed a perfezionare la geometria, per cui vantaggio procurate di conſervarvi lungo tempo, e ricordatevi, che io ſono tutto a' voſtri comandi ec.

Bologna li 27. Marzo 1751.

LETTERA
DI VINCENZIO RICCATI
DELLA COMPAGNIA DI GESU'
ALLA SIGNORA
D. GAETANA MARIA AGNESI
INTORNO ALLA COSTRUZIONE DI ALCUNE FORMULE SENZA LA SEPARAZIONE DELLE INDETERMINATE.

Illustrissima Sig. Sig. Padrona Colendissima.

IL dottissimo Signor Clairaut geometra d'alto merito essendo in un operetta meccanica stampata nell' Accademia Regia di di Parigi del 1742. pervenuto alla formula $T^2 dt = p^2 dt + dp$, la chiama famosa presso i geometri, che al calcolo integrale si sono applicati, non avendo alcuno potuto in essa separar l'indeterminate, se non in un picciol numero di casi assai particolari. *Il Signor Eulero solo*, soggiunge,

per

per quanto io ſappia, ne ha data una coſtruzion generale: e comunque cotal coſtruzione non abbia i vantaggi di quelle, che ſon fondate ſopra la ſeparazione dell' indeterminate, eſſa è non per tanto degna del dotto ſuo autore. E poichè eſſa è conoſciuta a pochi geometri, io l' eſporrò quì.

Sia deſcritta la curva A B (Fig. I.) *le cui aſſiße* KG *ſieno* $2aST\,dt$, *e l' ordinate* G E *ſieno* $a\,l\frac{s}{T}$, *eßendo* a *una coſtante preſa ad arbitrio. Col filo* $EF = a$ *deſcrivaſi la curva* C D *trattoria della curva* A B. *Dividendo egualmente l' angolo* G E Q *colla retta* E R, *l' ordinata* p *della curva cercata ſarà* $\frac{GR}{GE} \cdot T$. Sin quì il Clairaut

La novità di così fatta coſtruzione m' ha deſtato voglia di cercarne la dimoſtrazione, la quale avendo io agevolmente ſcoperta, ho preſo conſiglio d' inviarla a voi, la quale dopo i due dottiſſimi Tomi d' iſtituzioni Analitiche dati alla luce avere acquiſtato il diritto d' eſſer giudice di così fatte materie.

S' intenda deſcritta la curva A B (Fig. I. II., III., IV.) la cui equazione ſia data tra le coordinate $KG = x$, $GE = y$. In primo luogo rifletto, che di cotal curva quattro trattorie ſi voglion conſiderare. Poichè ponendo il filo da quella parte, ov' è poſto l' aſſe, ſe il moto ſi faccia da A in B, naſce la trattoria della Figura prima, ſe il moto diriggaſi da B in A, naſce quella della Figura II. Similmente collocato il filo dopo l' aſſe, e la curva A B, le Figure III. e IV. mettono ſotto degli occhi le due trattorie deſcritte, la prima quando ſi cammini da A in B, l' altra quando da B in A ſi faccia il movimento. Per abbracciar tutti i caſi, nelle coſe, ove le quattro trattorie non convengono, ſcriverò quattro ſegni, il cui ordine corriſponderà all' ordine delle figure.

Sia F H ordinata della trattoria, e ſi meni F L parallela all' aſſe. Indi preſa G M $= a$, ſi conduca M N parallela al filo F E, o ſia alla tangente della ſteſſa trattoria. Chiamiſi G N $= q$, K H $= z$, la differenza dell' ordinata F H ſarà $=$

$$\begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix}\frac{q\,dz}{a}.$$ Nella prima, e nella quarta figura poneſi il ſegno $+$, perchè creſcendo l' aſſiſſe K H creſcono l' ordinate F H; nell' altre due figure per l' oppoſita ragione poneſi il ſegno $-$. Quindi ſarà l' ordinata F H $= S \begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix}\frac{q\,dz}{a}$

Fiſſate così fatte denominazioni abbiamo le due ſeguenti analogie

$$MG : GN :: FL : LE$$

$$a : q :: \substack{+\\-\\+\\-} x \substack{-\\+\\-\\+} z : \substack{+\\+\\-\\-} y \substack{-\\-\\+\\+} S \substack{+\\-\\-\\+} \frac{q\,dz}{a}$$

$$MG : MN :: FL : FE$$

$$a : \sqrt{aa+qq} :: \substack{+\\-\\+\\-} x \substack{-\\+\\-\\+} z : a.$$

Dalla seconda di queste analogie trarrem l' equazione

$$\frac{aa}{\sqrt{aa+qq}} = \substack{+\\-\\+\\-} x \substack{-\\+\\-\\+} z,$$

$$\text{ovvero } z = x \substack{-\\+\\-\\+} \frac{aa}{\sqrt{aa+qq}},$$

la quale differenziata darà

$$dz = dx \substack{+\\-\\+\\-} \frac{a^2 q\,dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}$$

Così fatti valori si trasportino nella prima analogia, e avremo

$$a : q :: \frac{aa}{\sqrt{aa+qq}} : \substack{+\\+\\-\\-} y \substack{-\\-\\+\\+} \frac{1}{a} \overline{S \substack{+\\-\\-\\+} q\,dx \substack{+\\+\\-\\-} \frac{a^2 q^2 dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}},$$

dalla quale passando all' egualità troveremo

$$\overline{S \substack{+\\-\\+}\, q\,dx \substack{+\\+\\-} \frac{a^2q^2dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}} = ay \substack{-\\+\\+} \frac{a^2q}{\sqrt{aa+qq}}$$

In questa prendendo le differenze sarà

$$\substack{+\\-\\+}\, q\,dx \substack{+\\+\\-} \frac{a^2q^2dq}{\overline{a^2+qq}^{\frac{3}{2}}} =$$

$$a\,dy \substack{-\\+\\+} \frac{a\,dq}{\sqrt{aa+qq}} \substack{+\\+\\-} \frac{a^2q^2dq}{\overline{aa+qq}^{\frac{3}{2}}}$$

e cancellati i termini, che distruggonsi, avremo

$$\substack{+\\-\\+}\, q\,dx = a\,dy \substack{-\\+\\+} \frac{a^2dq}{\sqrt{a^2+q^2}},$$

ovvero $$\frac{a^2dq}{\sqrt{aa+qq}} = \substack{-\\+\\-\\+}\, q\,dx \substack{+\\+\\-} a\,dy.$$

Il metodo per cui quest' equazione s'è ritrovata, fa veder chiaramente, ch' essa può essere costruita, ogni qualvolta la y sia data per la x, comunque non si possano separar l' indeterminate. La costruzione è la seguente. Descritta la curva A B, le cui assisse K G $= x$, le cui coordinate G E $= y$, si delinei la sua trattoria C D, la cui tangente al punto F sia F E $= a$. Si tagli G M $= a$, e si conduca M N parallela alli

F E

FE, la qual concorra con GE in N: al punto N sarà nella curva cercata, e la retta GN sarà l' ordinata $=q$. L'ordine dei segni comparato col numero delle figure fa palese, qual delle quattro trattorie adoperare si voglia. Solo avvertir si deve, che in ciascuno de' quattro casi egli v' ha infinite trattorie, le quali dipendono dalla prima posizione del filo. Ma siccome la particolare natura del problema determina qual costante aggiunger si debba nell' integrazione, così dimostrerà, in qual maniera il filo si debba collocare da prima per descrivere la trattoria.

Costruita l'ultima nostra equazione, cosa manifesta si è, che qualunque formula si potrà ad essa ridurre, riceverà una meccanica costruzione. Ma tra tutte meritano particolar considerazione quelle, le quali sono libere da' segni radicali. Affine di ritrovarle quanto generalmente si può, mi servo della seguente sostituzione

$$p = \frac{a\mathrm{T}}{\sqrt{aa+qq}+q}$$

per mezzo della quale ritroveremo

$$q = \frac{a}{2}\,\frac{\mathrm{T}^2-p^2}{\mathrm{T}p},\ \sqrt{aa+qq} = \frac{a}{2}.\,\frac{\mathrm{T}^2+p^2}{\mathrm{T}p},$$

$$\text{e } dq = \frac{a}{2}.\,\frac{\mathrm{T}^2+p^2}{\mathrm{T}^2p^2}.\,\overline{p\,d\mathrm{T}-\mathrm{T}\,dp}:$$

i quai

i quai valori nella costruita equazione sostituiti daranno l'equazion novella

$$\frac{a^2 . p\,dT - T\,dp}{p\,T} = \substack{-\\+\\-\\+}\ \frac{a}{2} dx . \frac{T^2 - p^2 \substack{+\\-}}{p\,T} \substack{+\\-\\-} a\,dy$$

la qual ridotta sarà

$$\substack{+\\-\\+\\-} \frac{p^2\,dx}{T} - p . \sqrt{\frac{2\,a\,dT}{T} \substack{-\\+\\+} 2\,dy} \substack{-\\+\\-\\+} T\,dx + 2\,a\,dp = o.$$

Qui comincia a mancare una totale universalità, poichè il primo, ed il terzo termino devono esser dotati di segni necessariamente diversi. Se nel primo termino ritrovasi il +, si potra servire della prima, e della terza figura, ma converrà far uso della secouda, o della quarta, s' esso abbia il —. Dal secondo termino poi si vedrà, quale delle due sarà più utile adoperare.

Per la costruzione si divida l' angolo M N G egualmente colla retta N T: chiara cosa è, ch' avremo

$$GT = \frac{a\,q}{\sqrt{aa + qq} + q} :$$

dunque si faccia q : T : : G T alla quarta, la qual trovandosi $= \frac{a}{\sqrt{aa+qq}+q}$, avrem la p ricercata.

Ac-

Acciocchè si vegga l' uso della formula mi studierò di metterlo in chiaro con un solo esempio. S' abbia da costruir la formula

$$\frac{p^2 dz}{b} + p\,dz - z\,dz + b\,dp = o,$$

la quale avendo segni diversi nel primo, e nel terzo termino si potrà costruire; e poichè nel primo termino v' ha il segno $+$, si dovrà adoperare la prima, o la terza figura. Dalla comparazione de' primi, e dei terzi termini avremo le due egualità

$$\frac{dx}{T} = \frac{dz}{b}, \quad T\,dx = z\,dz.$$

Essendo poi nel secondo termino il segno $+$, la prima figura sarà più utile della terza, onde averemo per la comparazione

$$-\frac{2a\,dT}{T} + 2\,dy = dz.$$

Da queste tre egualità risulta

$$x = \frac{2z\sqrt{z}}{3\sqrt{b}}, \quad y = \frac{z}{2} + l\sqrt{bz} \quad T = \sqrt{bz}.$$

I logaritmi si prendano nella logistica, la cui sotto tangente $= a$. Finalmente gli ultimi termini ci daranno $a = \frac{b}{2}$. Adunque si descriva la curva A B, ch' abbia l' abscisse $= \frac{2z\sqrt{z}}{3b}$, e l' ordinate $= \frac{z}{2} + l\sqrt{zb}$;

indi

indi col filo $= \frac{b}{2}$ ſi tracci di queſta curva la trattoria di quel genere, che dalla figura prima dinotaſi. Condotta la tangente della trattoria F E, ſi tagli G M $= \frac{b}{2}$, e ſi meni M N parallela alla F E; in due parti eguali ſi divida l'angolo M N G colla retta N T; indi ſi faccia N G : $\sqrt{bz}$: : G T : p; finalmente deſcrivaſi una nuova curva, che abbia l'aſſiſſe $= z$, l'ordinate $= p$: queſta ſoddisfarà all' equazione poſpoſta.

Ad accoſtarmi alla formula eſpoſta dal Signor Clairaut, fa di meſtieri annullare il ſecondo termino: onde dovrà eſſere

$$\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\, dy = \frac{a\,dT}{T}, \text{ ovvero } dy = \begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\, \frac{a\,dT}{T}:$$

e però integrando ſe della prima, o della ſeconda figura ſi faccia uſo, ſarà $y = l\,T$, ſe adopriſi la figura terza, o quarta, $y = l\,\frac{a^2}{T}$, prendendo i logaritmi nella logiſtica, ch' abbla la ſottotangente $= a$. Ciò fatto rimarrà

$$\begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix}\, \frac{p^2\,dx}{T} \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}\, T\,dx + 2\,a\,dp = 0,$$

nella quale fa di meſtieri, che i primi due

termi-

termini di ſegni diverſi ſieno dotati. Se il primo termino abbia il ſegno †, potrà adoperarſi la prima, e la terza figura, ſe abbia il ſegno — potrà uſarſi la ſeconda, e la quarta.

Sia a cagion d'eſempio

$$\frac{p^2 dz - z^2 dz}{b} + p\,dp = o.$$

La comparazione darà

$$\frac{dx}{T} = \frac{dz}{b},\ T\,dx = \frac{z^2 dz}{b},\ 2a = b:$$

dalle quali equazioni ſi ricaverà

$$T = z,\ x = \frac{z^2}{2b}:$$

dunque adoperando la prima figura $y = lz$, e adoprando la terza $y = l\frac{bb}{4z}$. Stabilite ſi fatte determinazioni ſi operi come ſopra, e ſi compia la coſtruzione.

Non debbo diſſimulare, che tra la mia coſtruzione, e quella indicata dal Signor Clairaut, vi corre qualche differenza; ma queſta naſce dalla diverſa ſoſtituzione: perocchè ſe in luogo della formula

$$p = \frac{aT}{\sqrt{aa + qq} + q}$$

aveſſi uſata l' altra $p = \dfrac{aT}{\sqrt{aa + qq} - q}$

ſarei

sarei stato costretto a dividere egualmente l' angolo esterno GNO colla data NP, siccome domanda la costruzione dal Clairaut indicata.

Mi dispiace assai, che quando i primi due termini nell' ultima formula sono dotati dello stesso segno, il metodo non conduca alla costruziooe. Per ottener ciò sarebbe di mestieri, che costruir si potesse la formula

$$\frac{a^2\,dq}{\sqrt{qq-aa}} = \begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}\, q\,dx \,\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}\, a\,dy;$$

perciocchè colle stesse sostituzioni si perverrebbe a formule, che ne notati termini avrebbero prefisso lo stesso segno. Ma sin ora è ignoto siccome questa formula costruire si voglia. Non bisogna però trascurare il poco, quando il tutto saper non si possa.

Al vostro giudizio sottometto in tutto queste mie riflessioni; ed a miglior giudice ricorrer non posso avendo voi dichiarato al mondo co' vostri scritti, quanto profondamente per voi si penetri cotal genere di dottrine benchè astrusissime. Studiatevi di conservarvi lungo tempo alla geometria, ed all' analisi, che per voi si coltiva indefessamente, e persuadetevi, ch' io sono desideroso di ricever l' onore di qualche pregiato vostro comando ec.

Bologna li 3. Novembre 1750.

OSSER-

Assisse	Somma delle due curve.
$-4.\ L.\frac{x^{-10m+1}}{A^{-10m}}$	
	$L.\frac{x^{-9m+1}}{A^{-9m}}.Z$
$-3.\ I.\frac{x^{-8m+1}}{A^{-3m}}$	
	$I.\frac{x^{-7m+1}}{A^{-7m}}.Z$
$-2.\ K.\frac{x^{6m+1}}{A^{-6m}}$	
	$K.\frac{x^{-5m+1}}{A^{-5m}}.Z$
$-1.\ H.\frac{x^{-4m+1}}{A^{-4m}}$	
	$H.\frac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}.Z$
$0\ G.\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$	x^{-2m+1} . Z
$6m+1$ A^{6m} $8m+1$	$D.\frac{x}{A^{6m}}.Z$
$5.\ D.\frac{9m+1}{8m+1}.\frac{x}{A^{8m}}$	
	$E.\frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}.Z$
$6.\ E.\frac{11m+1}{10m+1}.\frac{x^{10m+1}}{A^{10}}$	

	Assisse	Ordinate	Somma delle due curve.
$-4.$	$L.\dfrac{x^{-10m+1}}{A^{-10m}}$	$L.\dfrac{-10m+1}{-9m+1}.\dfrac{x^{-9m+1}}{A^{-9m}}$	$L.\dfrac{x^{-9m+1}}{A^{-9m}}.Z$
$-3.$	$I.\dfrac{x^{-8m+1}}{A^{-3m}}$	$I.\dfrac{-8m+1}{-7m+1}.\dfrac{x^{-7m+1}}{A^{-7m}}$	$I.\dfrac{x^{-7m+1}}{A^{-7m}}.Z$
$-2.$	$K.\dfrac{x^{6m+1}}{A^{-6m}}$	$K.\dfrac{-6m+1}{-5m+1}.\dfrac{x^{5m+1}}{A^{-5m}}$	$K.\dfrac{x^{-5m+1}}{A^{-5m}}.Z$
$-1.$	$H.\dfrac{x^{-4m+1}}{A^{-4m}}$	$H.\dfrac{-4+m1}{-3m+1}.\dfrac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}$	$H.\dfrac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}.Z$
0	$G.\dfrac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$	$G.\dfrac{-2m+1}{-m+1}.\dfrac{x^{-m+1}}{A^{-m}}$	$G.\dfrac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}.Z$
$1.$	x	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1.A^{m}}$	xZ
$2.$	$\dfrac{3m+1}{2m+1}.\dfrac{x^{2m+1}}{A^{2m}}$	$\dfrac{x^{3m+1}}{A^{3m}}$	$B.\dfrac{x^{2m+1}}{A^{2m}}.Z$
$3.$	$B.\dfrac{5m+1}{4m+1}.\dfrac{x^{4m+1}}{A^{4m}}$	$B.\dfrac{x^{5m+1}}{A^{5m}}$	$C.\dfrac{x^{4m+1}}{A^{4m}}.Z$
$4.$	$C.\dfrac{7m+1}{6m+1}.\dfrac{x^{6m+1}}{A^{6m}}$	$C.\dfrac{x^{7m+1}}{A^{7m}}$	$D.\dfrac{x^{6m+1}}{A^{6m}}.Z$
$5.$	$D.\dfrac{9m+1}{8m+1}.\dfrac{x^{8m+1}}{A^{8m}}$	$D.\dfrac{x^{9m+1}}{A^{9m}}$	$E.\dfrac{x^{8m+1}}{A^{8m}}.Z$
$6.$	$E.\dfrac{11m+1}{10m+1}.\dfrac{x^{10m+1}}{A^{10}}$	$E.\dfrac{x^{11m+1}}{A^{11m}}$	

OSSERVAZIONE
DELL' AURORA BOREALE

DEL DI III. FEBBRAIO MDCCL.

A CUI SI AGGIUGNE

Lo ſcioglimento di un nuovo Problema per calcolarne le diſtanze ſecondo le ipoteſi del Maier

D I

LEONARDO XIMENES

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

GEOGRAFO DI S. M. I.

QUel luminoso Fenomeno, che chiamasi *Aurora Boreale*, il quale ci apparve la sera del dì tre di Febbraio di quest'anno 1750. merita certamente che sia minutamente descritto, e comunicato agli altri, che avranno fatta l'osservazione medesima. Poichè parlando di quelle circostanze, che sono sostanziali a questo Fenomeno, e vagliono a determinare la positura, la distanza, e le cagioni, esse sono quasi tutte in esso intervenute, come gli uomini bene istruiti in questa dottrina potranno dalla descrizione stessa argomentare. Perchè si proceda con buon'ordine, e questa storia serva meglio alla cognizion della verità, io seguirò le tracce di quegli articoli, ne quali il Signor Friderico Cristoforo Mayer racchiuse (*Accad. Petrop. tom.* I *pag.* 334) le principali circostanze di quest' Aurora. Il che servirà, o per confermare quelle circostanze ivi notate, o per dar loro qualche eccezione, e così nell' una, e nell' altra maniera venire in cognizione del vero. Io trovo ancora, che la presente Aurora Boreale, è forse la più somigliante a quella che questo Autor medesimo osservò l' anno 1726. dopo la mezza notte del dì che precedette il 16.° di Settembre, e poi riportò nell' Accademia di Pietroburgo l' anno 1728. (*tom.* 4. *pag.* 105.) Il che mi è stato di un nuovo motivo di seguir le sue orme.

I Fenomeni adunque i quali egli chiama della prima specie furon questi.

I. Alle ore 6. dopo mezzo giorno apparve verso Tramontana l'arco luminoso, il cui convesso riguardava al solito il nostro Zenit, e il concavo l' Orizzonte. Quest' arco non si vide mai ugualmente terminato, ma per lo più maggior terminazione aveva nelle minori altezze dall' Orizzonte, e similmente maggiore nella parte Orientale, che nella Occidentale.

II. La più alta parte dell' arco non riguardava, come più volte accade, la Tramontana, ma considerabilmente declinava verso l' Occaso. Onde patisce qualche eccezione come egli stesso nel IV. Tomo della stessa Accademia ha osservato, il secondo articolo del Mayer. *Altissima arcus pars Boream ad sensum semper exacte tenet.* La declinazione non ci parve costante, ma verso le ore 7. pareva alquanto scemata, cioè il

cer-

cerchio verticale, che passava per la cima dell' arco parve meno declinante da Tramontana.

III. Essendo il nostro Orizzonte dalla parte di Tramontana ingombrato da' monti, io non posso asserire, che l' arco posasse sull' Orizzonte, ma essendo esso più chiaro appunto in quella parte che da' monti restava coperta, si può congetturare che sull' Orizzonte andasse a finire.

IV. La massima altezza dell' orlo esteriore dell' arco alle 7.^{h} 17.$'$ fu osservata di 17.° in circa. Alle ore 7. 25.' alquanto minore, cioè di quasi 15.° Di questa osservazione vanno avvertite tre cose. La prima, che essa fu fatta con un piccol quadrante. La seconda, che colle diottre del quadrante io guardai la maggior altezza nella maggior terminazione, cioè dove la luce cominciava a passare dal più chiaro al più rosseggiante. La terza che essendo il piombino del mio quadrante esposto all' aria aperta, e soffiando un mediocre vento di Sud Est, era malagevol cosa fermare il piombino. La piccolezza del quadrante, la poca terminazione dell' arco, e il moto del piombino rendono incerta quest' altezza dentro due, o tre gradi. Non par vero, che parlando dell' arco osservato nello stesso luogo, coll' altezza maggiore si accordi una maggiore ampiezza Orizzontale.

Poichè alla prima altezza di 17.° corrispose l'ampiezza Orizzontale di 70 ° e alla seconda di 15.° l'ampiezza maggiore di 71.° e forse più.

V. Tanto l' ampiezza che l' altezza sofferirono continuo cangiamento; ma a mio giudizio, nè mai l' altezza oltrepassò i 20.° ne l' ampiezza i 75.° si avverta che questa ampiezza non potè osservarsi nello stesso Orizzonte; ma piuttosto in un piano elevato fino all' elevazione de' nostri monti Boreali, che in qualche luogo oltrepassa i 5.° Io non ebbi agio nel tempo del Fenomeno di osservare quest' elevazione nel luogo dell' arco; ma ne' di seguenti mi parve, che questa elevazione fosse di 4.°

VI. La maggior, o minor terminazione, e regolarità dell' arco non era punto legata alla maggiore, o minor altezza, ma ora colla maggiore altezza si accompagnava, una miglior terminazione, ora colla minore. Vero è, che per lo più alle altezze maggiori corrispondeva una maggior degradazione di color rosseggiante. Considerando l' arco nel tempo stesso, sempre una maggior penombra, o degradazion di colore osservavasi nelle parti più alte dall' Orizzonte, che nelle più basse.

VII La generazion de' nuovi archi in questa Aurora era sensibile, tra' quali due furono

rono in diversi tempi più sensibili, e meglio terminati, le cui altezze, ed ampiezze ho già riportate.

VIII. Senza nuova generazion di archi osservabili l' arco medesimo cioè della stessa chiarezza, luce, e degradazion di colore appariva ora più basso, ora più alto, alcuna volta coll' altezza medesima parve, che congiugnesse una ampiezza ora maggiore ora minore.

IX. L' interior margine dell' arco il più del tempo niente era fosco, o d' altro segno distinto, ma della stessa luce pallida, di cui era tinto tutto lo spazio frapposto tra l' arco, e l' Orizzonte, il quale suol chiamarsi *Chasma*, o *Voragine*. Così appunto nell' Aurora del 1726. *Margo interior niger, aut fuscus non erat, sicut alias; sed aeque, ac reliqua lucidus ..... Interius spatium Chasma dictum, aut vorago nigerrimum non erat, ut alioquin, sed pallida luce diluebatur*. Vero è che qualche volta fissando bene il guardo mi riuscì di vedere l' orlo interiore distinto languidissimamente di color rossiccio. Dentro al Chasma non mai mi venne fatto di vedere alcuna striscia, o verga.

X. Appunto quest' Aurora è un eccezione del frequente caso, in cui l' orlo interiore dell' arco vedesi oscuro.

XI. L' apparizione, e accensione delle tra-vi, o ſtriſce, o verghe ſegue l' ordine dei tempi ſegnati.

6.^{h} 35.$'$ Nell' eſtremità Orientale dell' arco eſteriore nacque una grande, e improvviſa accenſione di luce roſſeggiante, la qual ſi alzava ed andava a finire quaſi nella ſtella dell' Orſa maggiore notata dal Bayero colla lettera α. Le verghe, o ſtriſce erano quaſi inſenſibili Nel tempo ſteſſo la parte Occidentale dell' arco apparve anch' eſſa infiammata ma aſſai meno della prima. La minima accenſione era nel mezzo.

6.^{h} 45.$'$ tutto l' arco apparve più roſſeggiante, e dal ſuo orlo eſteriore come da baſe nacquero 5. o 6. ſtriſce di luce biancheggiante. Più chiare erano queſte ſtriſce nella lor radice, cioè nell' orlo dell' arco. La lor figura era ſimile a quella di un Cipreſſo.

6.^{h} 54.$'$ Nacque nella parte dell' arco Occidentale una infiammazione di luce roſſeggiante diſtinta da quattro ſtriſce, o verghe, le quali erano meno roſſeggianti, o più biancheggianti del fondo.

7.^{h} 18.$'$ Nuova accenſione di quaſi tutto l' arco con aſſaiſſime nuove ſtriſce di luce.

7.^{h} 22.$'$ Apparve un lunghiſſimo raggio, o verga biancheggiante, e nel tempo ſteſſo tutto l' orlo eſteriore dell' arco ſi vedde terminato di una luce più uguale, e di colore ſmorto di roſa. Queſti furono i più

ſen-

ſenſibili Fenomeni delle ſtriſce, o verghe.

XII. Fu così lungi, che la direzione di queſte verghe foſſe rivolta verſo il noſtro Zenith, che anzi eſſe parevano divergenti dall' arco in fuori. Le verghe Occidentali piegavano verſo Occidente, e le Orientali verſo Oriente, dalla qual piegatura eſſe ſi ſcoſtavano tanto, quanto più alte erano le parti dell' arco, ſu cui eſſe poſavano, come ſopra baſe. Se io diceſſi che eſſe erano perpendicolari ſenſibilmente a quelle porzioni di arco, ſu cui poſavano, direi coſa aſſai conforme all'oſſervazione, che di queſto tal fatto ſi potè prendere. Così nell' Aurora ſopraddetta del 1726. *Trabes, quo erant Occidentaliores eo obliquius horizonti inſiſtebant...., interdum figuram formabant ſimillimam nimbis, queis Deorum, & Sanctorum capita ornare ſolent.* (*Tom.* 4. *Acc. Pet. pag.* 106. *in* 107.

XIII. Dalla figura di un Cipreſſo; a cui parevano ſomiglianti que' tratti di luce, ſi può argomentare, che non *eiusdem pene latitudinis eſt unaquaeque virga tam in principio, quam in fine.* Poichè ſi cominciava dal più ſtretto, e da queſto ſi paſſava a larghezza maggiore, dalla quale al più ſtretto ſi faceva ritorno.

XIV. Neppur ſi avverò in queſto Fenomeno, che *aequabilis fere ſplendoris virga*

eſt

est quaelibet. Poichè la luce andava sensibilmente scemando collo scostarsi, che le parti del trave facevano dall' arco, da cui nascevano.

XV. La durata, e permanenza di dette verghe fu alquanto maggiore di quella, che comunemente si osserva. Vi furono di quelle, che fecero più lunga comparsa 2', ovvero di 3'; laddove il Mayer ci attesta, che *Duratio.... decem circiter minutorum secundorum esse solet ordinarie*. I fili di quelle verghe erano sensibilmente rettilinei, e per quanto io ben guardassi, nissun filo mi parve incurvato con sensibile curvatura.

Fin quì i più certi, e sensibili Fenomeni di quest' Aurora da me trascritti secondo gli Articoli del Mayer, perchè essi vagliano o di riprova, o di eccezione. Alcune circostanze restano generali, e osservate o in tempi non segnati, o per tutto lo spazio di questa comparsa; E son queste 1.° Le stelle fisse apparivano da per tutto in mezzo, ed attraverso al Fenomeno. 2.° Le accensioni, o strisce lucide non oltrepassarono mai l'altezza di 45.gradi. 3.° verso le ore 8. cominciò a scemare sensibilmente il Fenomeno. 4.° Alle 9. e $\frac{1}{2}$ appena restava un tale albore, qual vedesi a crepuscolo inoltrato. 5. Il giorno dopo, e i susseguenti sono stati freddi intensi; ma non dei maggiori di quest' anno 6.° La

notte

notte del dì 4. di Febbraio fu da alcuni veduto un piccolo albore verso la stessa parte.

Ora parrebbe, che per soddisfare alla curiosità degli uomini eruditi, si dovesse con qualche metodo rintracciar la distanza, che tanto da questo luogo di Osservazione, quanto dalla superficie terrestre sottoposta aveva quella luminosa materia, che ci presentò sì bello spettacolo. Al che fare con esattezza maggiore, non basta l'osservazione fatta in un luogo solo, ma se ne richiede almeno una seconda fatta in altro paese, che differisca in latitudine quanto si possa il più. Anzi per esattezza maggiore si richiede non un qualunque altro luogo lontano, ma un altro, il qual fosse in un cerchio massimo terrestre, il qual passasse per Firenze, e disteso incontrasse ancora quella stessa cima dell' arco in Firenze osservata.

Pure, come si sà, lo stesso Mayer nell' Accademia Petropolitana (*tom.* 4. *pag.* 111.) ci sominiſtra un altro metodo, nel quale colla sola osservazione dell' altezza, e dell' ampiezza Orizzontale, e sull' Ipotesi, che l' arco sia circolare ed il polo di esso coincida col polo terrestre, si può calcolare la distanza, che si cerca. Non avendo io per ora alle mani altri dati fuori di quelli, che bastano solo a questa soluzione, di essa mi varrò pel computo delle due cercate distanze, aspettando di correggere questo computo,

quan-

quando le osservazioni altrui mi somministreranno un altra altezza, per valermene insieme colla mia a determinare le distanze colla parallassi.

Calcolo della distanza della cima dell' arco dell' Aurora Boreale osservata in Firenze la sera del dì 3. Febbraio 1750.

l' altezza dell' arco alle ore 7. 17.' del tempo vero fu osservata di 16 in 17.° e l'ampiezza di quasi 69.° in 70.°

Formula del Mayer $y = \frac{2amg^2q^2}{r^3b^2 - rg^2q^2}$

Il sen totale $= r$.

Il sen del complemento della latitudine $= q$.

L'altezza osservata dell'arco, o suo seno $= m$.

Il sen del complemento della metà dell' ampiezza $= g$.

Il sen dell' angolo S E N $= b$. (*Vedi la figura di quest' Opuscolo*.)

Il terrestre semidiametro $= a$.

La distanza dell' occhio S dal Fenomeno E $= y$.

Nel nostro caso sarà

$m = 209$. cioè il seno di 17.°

$g = 819$. Essendo la metà dell' ampiezza 35.° e il complemento 55.° Onde $g^2 = 670761$.

$q = 722$. Essendo la latitudine Fiorentina di 43.° 46.' sarà il complemento 46.° 14.' Onde $q^2 = 521284$.

r —

r — 1000. Onde $r^3 = 1000000000$.

$b = 892$. Poichè essendo l' angolo E N S uguale al complemento della latitudine, che è di 46.° 14.' e l' angolo E S N = 17.° sarà l' angolo S E N di 116.° 46.' Onde $b^2 = 795664$.

Sarà $g^2 q^2$ tolte 7. note $= 34965$.

Onde $m g^2 q^2 = 10209780$.

Sarà $r^3 b^2 = 79566400$. $r g^2 q^2 = 34965697$

$r^3 b^2 - r g^2 q^2 = 44600703$.

Onde $\dfrac{m g^2 q^2}{r^3 b^2 - r g^2 q^2} = \dfrac{10209780}{44600703}$

ovvero $= \dfrac{102}{446}$

Ma il terrestre Semidiametro si fa di $1432\frac{1}{2}$ leghe di quelle, di cui 25. fanno un terrestre grado (*Vedi Mairan, Suite des Mem. an.* 1731. *pag.* 123.) Onde il diametro, cioè $2a = 2865$. Onde la y sarà =

$$\frac{102 \times 2865}{446} = \frac{292230}{446} = 655\,\frac{100}{446} \text{ leghe} = \text{S E}$$

che ridotta a miglia Italiane di 60. per ciascun grado terrestre fanno $1572\,\frac{240}{440}$ miglia.

Indi sciolto al solito il triangolo rettilineo, verrà la distanza perpendicolare della materia lucida dalla terrestre superficie di 308. leghe, cioè di $739.\frac{1}{5}$ miglior di cui 60. for-

mano

mano la ſteſa di un grado del terreſtre Meridiano.

Queſta diſtanza perpendicolare così calcolata non è molto lontana dalle diſtanze di altre Aurore Boreali calcolate dal Mairan medeſimo col metodo delle parallaſſi. Quella per eſempio, che dal Godin fu oſſervata a Parigi, e dal Bianchini a Fraſcati la ſera del dì 19 d'Ottobre l'anno 1726. col metodo della Parallaſſi fu trovata diſtante dalla terreſtre ſuperficie 266 $\frac{3}{4}$ leghe (*Suit. des Mem. l'an.* 1731. *pag.* 81.)

Ma che dirò io, che nel calcolo fatto di queſta diſtanza ſecondo le ipoteſi di quel Problema un eceſſo di diſtanza naſce dalla mia Oſſervazione medeſima? Poichè il Problema del Mayer non è generale, ma è legato al ſolo caſo, in cui l'ampiezza dell'arco ſiaſi preſa nel piano Orizzontale. L'equazione che ſerve al ſuo ſcioglimento, naſce giuſto da un triangolo rettangolo, il quale è rettangolo appunto, perchè l'oſſervazione ſi ſuppone fatta nel piano Orizzontale paſſante per l'occhio dell'oſſervatore. Ora il più delle volte accade, che ciò non ſia, per la natura del luogo, in cui ſi oſſerva; e nell'oſſervazion da me fatta, come fedelmente ho eſpoſto, per la vicinanza di alcuni monti, che reſtavano riſpetto a me verſo la tramontana, non mi era poſſibile di mettere in

pra-

pratica quell' Ipotesi. Per corregger questo errore, che non è piccolo, mi è convenuto di pigliare un altra strada, e sciogliere il Problema generalmente in questo modo.

Sia dunque il terrestre semidiametro $= a$.

Il sen totale $= s$.

Il sen dell' altezza osservata della cima dell' arco $= b$.

Il sen di un angolo, che sia la somma del complemento della latitudine, e dell' altezza di que' due punti dell' arco, la cui ampiezza è stata osservata, e i quali siano ugualmente alti $= c$.

Il seno di un angolo, che sia il complemento de' due primi a due retti $= e$.

Il sen del complemento della latitudine $= f$.

Il seno di un angolo, che sia la differenza tra la latitudine, e l'altezza de' due punti $= g$.

Il seno della metà dell' ampiezza $= i$.

Il seno del complemento del medesimo $= h$.

La distanza dell' osservatore della cima dell'arco $= y$.

Sarà $$y = 2a \times \frac{fbch^2}{si^2e^2 + 2bgeh^2 - sb^2h^2}$$

Ora l' altezza delle montagne, a cui corrispondevano le inferiori estremità dell' arco, e di quasi 4.° come posteriormente ho osservato. Vero è, che il punto Occidentale aveva una minore altezza di 4.° ma io

pro-

procurai di collocare il piano del quadrante per modo, che il punto Occidentale dell'arco, la cui ampiezza osservai, venisse ad avere la stessa altezza. Il che bisogna fare per isfuggire una nuova difficoltà, che ridonderebbe nel Problema, se i punti fosser alti inugualmente, e se un piano, che per essi passasse, non potesse esser parallelo all' Orizzonte. Poste le ipotesi del primo calcolo sarà $\frac{fbcb^2}{si^2e^2 + 2bgeb^2 - sb^2b^2} = \frac{835}{3987}$ prossimamente. Onde sarà $y = 600. \frac{75}{3987}$ leghe; e lasciando la piccola frazione, può farsi di 600. leghe appunto la distanza dell' osservatore.

Indi passando alla soluzione del triangolo, si troverà la distanza perpendicolare dalla terrestre superficie di leghe $272\frac{1}{2}$, intendendo sempre di quelle leghe, di cui 25. formano la lunghezza di un grado medio del terrestre Meridiano.

Or questa distanza così corretta, come la mia Osservazion richiedeva, differisce di sole leghe $5\frac{3}{4}$ dalla distanza dell' Aurora Boreale del dì 19. Ottobre 1726. calcolata dal celeberrimo Signor Mairan col più certo metodo delle Parallassi. Che si rifletta, che la distanza del Signor Mairan sia di fatto minor della vera per essersi con molta ragione

tra-

trascurate le rifrazioni, e la mia per contrario maggior della vera per la stessa ragione delle rifrazioni; la quale secondo i diversi metodi, e i diversi casi può ben produrre un effetto contrario, si trovera tra questi due Fenomeni un mirabile consentimento nelle distanze dalla terra.

Se io potessi ritesser tutto il calcolo, valendomi della seconda osservazione dell' arco, il quale accoppiava una maggiore ampiezza ad una altezza minore, io troverei la la seconda distanza minor della prima. Ma l' ampiezza di questo secondo arco non potè ben determinarsi. Essa era certamente maggiore di 70.° e di più di un grado. Nondimeno possiamo argomentare dal crescere, che fece sensibilmente l' ampiezza, e scemar l' altezza, che tutto il Fenomeno a noi sensibilmente si accostasse. Di che un nuovo argomento puote somministrarci il più chiaro risplendore, che fece l' arco secondo sopra del primo, il che io feci scrivere nell' atto dell' osservazione con queste parole = *Questo second' arco all' ampiezza maggiare di* 70.° *unisce un maggior chiaro del primo, ma un altezza minore, cioè di quasi* 15.°

OSSERVAZIONE
DELL' AURORA BOREALE

Comparsa la notte del dì 26. Agosto 1750. fatta dallo stesso Autore,

---

DI questa Aurora Boreale, la quale rispetto a questo luogo fece una breve, e piccola comparsa, io ho potuto notare le cose seguenti.

I. Alle ore 7. $\frac{1}{2}$ di questo giorno guardando io verso l' Occaso mi parve il crepuscolo troppo disteso verso Tramontana, onde sospettando, che quello fosse un principio di Aurora Boreale, cominciai a riguardare più fissamente verso Tramontana. Osservai, che o sotto la Stella Polare in gran vicinanza all' Orizzonte, o anche verso $\frac{1}{4}$ di Nord-est si scorgeva una certa luce bianchiccia assai irregolare, la quale ora si accostava, ora si discostava da Tramontana. Il vedersi una tal luce affatto separata dal Crepuscolo accresceva il mio sospetto, che quella potesse essere un Aurora Boreale. Sino alle 8 $\frac{1}{4}$ questo Fenomeno mi apparve, come ho detto. L' estremo caldo di quella giornata poteva far credere, che quell' accensione fosse una meteora a noi molto vicina.

II. Tra

II. Tra le ore 9. e le 10. come più di uno osservò in Firenze, quella luce crebbe assai sensibilmente, e mantenersi verso l'occaso estivo. Vedevansi de' getti improvvisi di luce bianchiccia, che salivano a qualche altezza sovrà l'Orizzonte, e oltrepassavano in altezza l'estrema stella della coda dell'Orsa Maggiore. Ciò avvenne alle 9. $\frac{1}{2}$ in circa verso le ore 10. pur verso il ponente estivo seguì una grande accessione estiva rossiccia, e irregolare.

III. Alle ore 10. e dieci minuti quest' accensione si estinse, e rimase un arco mal terminato, e di luce così degradata, che non era possibile osservarne l' altezza. La cima di quest' arco da Ponente si accostava sensibilmente verso Tramontana, e alle ore 10 $\frac{3}{4}$ la cima riguardava quasi direttamente la Stella Polare. La luce di quest' arco dove essa affatto finiva, verso le 10 $\frac{3}{4}$ aveva un altezza dall' Orizzonte uguale all' altezza di quella stella dell' Orsa Maggiore chiamata nel Catalogo Britannico. *In ventre in Quadrilatero prima*, e contrassegnata dal Baiero colla lettera B.

IV. La cattiva terminazione dell' arco m' mpedì pure dall' osservarne l' ampiezza. I moti, che rispetto al luogo dell' osservazio-e restavano a Tramontana mi toglievano qualche porzione di quest' ampiezza medesima.

V. I raggi debolissimi, che dal confine dell' arco si spiccavano fuori di esso, avevano sensibilmente una direzione perpendicolare all' istesso arco. Qualche raggio si stese fino alla fissa dell' Orsa Maggiore, che è detta nel Catalogo Britannico *Super costis in quadrilatero secunda*, e che dal Baiero è notata colla lettera α. La prima di questo quadrilatero già dianzi nominata, chiaramente trafpariva per mezzo a quel raggio. Torno a ripetere che quel raggio era debolissimo di luce, ed essendo questa fissa che trasipariva, di seconda grandezza, non è gran cosa, che trasparisse. Se nelle parti di maggior latitudine, dove questo Fenomeno avrà fatta una più bella comparsa, qualcuno alla stess' ora si sarà trovato, che osservasse l'altezza dell' estremità dell' arco, queste due Osservazioni potranno somministrare la distanza della materia di quest' Aurora col metodo delle Parallassi. Il metodo del Mayer per la cattiva terminazione dell' arco non si è potuto adoperare per computarne la distanza.

TEO-

TEOREMI

DEL PADRE

D. FRANCESCO MARIA DE' REGI

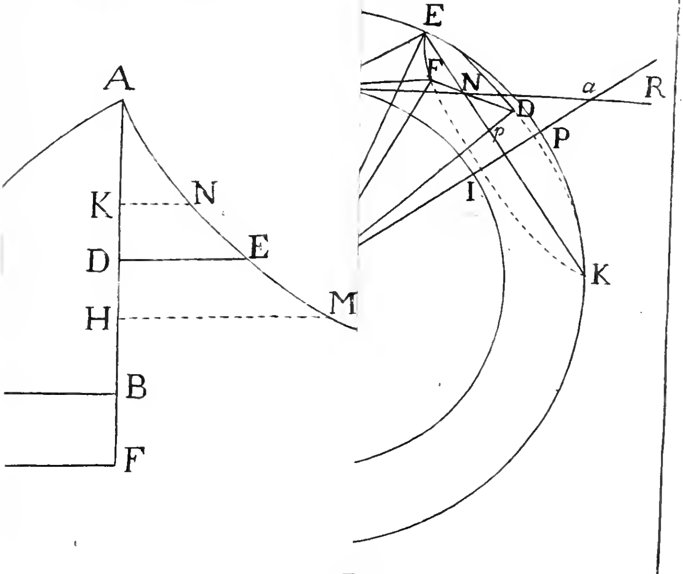
DEI CHERICI REGOLARI DI S. PAOLO

DETTI BERNABITI

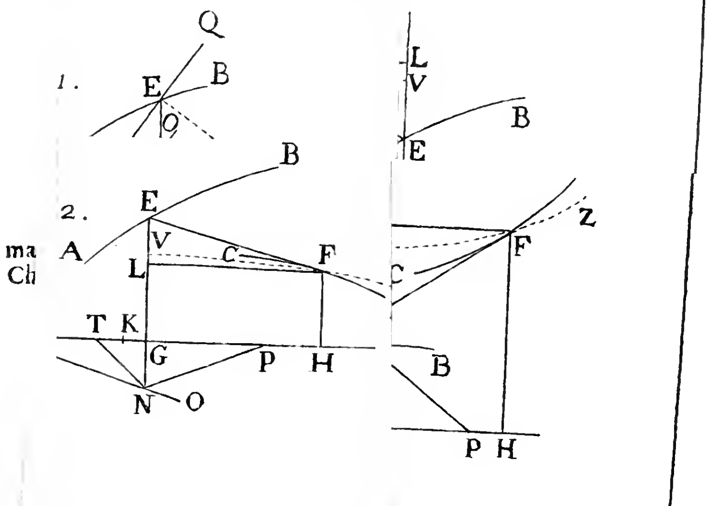
PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA IN MILANO

NELLA UNIVERSITA' ARCIMBOLDICA DI S. ALESSANDRO.

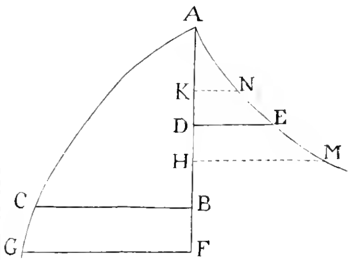
la lettera Prima *rora Boreale*



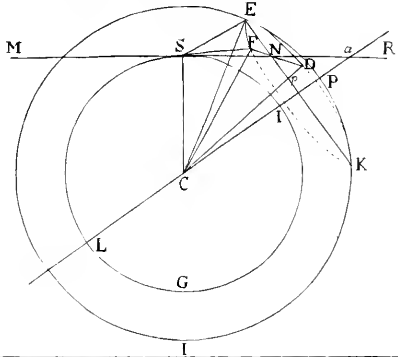
Per la



Per la lettera Prima



Problema per l'Aurora Boreale



Per la lettera Seconda

Fig. 1.

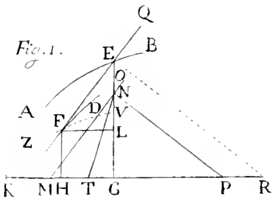


Fig. 3.

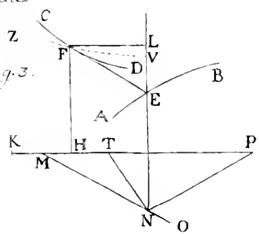


Fig. 2.

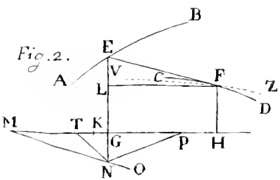
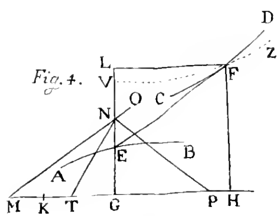


Fig. 4.



TEOREMA I.

IL perimetro di qualunque figura piana rettilinea, a cui può circonscriversi, e inscriversi un cerchio, è alla circonferenza del cerchio circoscritto, come il rettangolo del perimetro nel raggio del cerchio inscritto, o sia come la doppia area della figura rettilinea iscritta al rettangolo della circonferenza minore nel raggio della maggiore.

DIMOSTRAZIONE

Sia la circonferenza del cerchio circoscritto $= C$

——— ——— ——— ——— inscritto $= c$

——— il perimetro della figura rettilinea $= p$

——— ——— il raggio del cerchio maggiore $= R$

——— ——— ——— ——— del minore $= r$

sarà $C : c = R : r$

ma per il Teor. I. del Chiarif. Sig. Zanotti $c : p = \frac{cr}{2} \, \frac{pr}{2}$, e $Cc : cp = \frac{Rcr}{2} : \frac{pr^2}{2}$,

dunque $C : p = Rc : pr$

COROLLARIO I.

Se ad un triangolo equilatero circoſcriveſi, ed iſcriveſi un cerchio, è $r = \frac{R}{2}$, e per conſeguenza $c = \frac{1}{2} C$; eſſendo adunque $C : p = Rc : pr$, ſarà ancora $C : p = \frac{1}{2} CR : pr$; ma $\frac{CR}{2}$ è l'area del cerchio circoſcritto, pr la doppia area del triangolo equilatero, o ſia l' area dell' eſagono nel medeſimo cerchio inſcritto; dunque la circonferenza del cerchio circonſcritto al triangolo equilatero è al perimetro del triangolo inſcritto, come l'area d' eſſo cerchio all' area dell' eſagono.

COROLLARIO II.

Quindi ſarà la ſuperficie del priſma, a cui può circoſcriverſi, ed inſcriverſi un cilindro, alla ſuperficie del cilindro circoſcritto, eſcluſe le baſi, come la doppia baſe del priſma al rettangolo fatto dal raggio della baſe del cilindro circoſcritto nella circonferenza della baſe del cilindro inſcritto.

COROLLARIO III.

Che ſe il priſma nel cilindro inſcritto ha per baſe un triangolo equilatero, ſarà la ſuperficie del cilindro alla ſuperficie del

priſma

priſma, non conſiderate le baſi, come la baſe del cilindro alla baſe del priſma ordinato, formato ſopra l'eſagono nella medeſima baſe del cilindro inſcritto *Cor. I.*

T E O R E M A II.

L'area di qualunque figura piana rettilinea, a cui può circonſcriverſi, e inſcriverſi un cerchio; è all'area del cerchio circoſcritto, come il parallelepipedo, la di cui altezza è il perimetro, e la baſe il quadrato del diametro del cerchio inſcritto, al parallelepipedo, la di cui altezza è la circonferenza minore, e la baſe il quadrato del diametro maggiore:

D I M O S T R A Z I O N E

Sia l'area del cerchio circoſcritto $= A$
—— —— —— —— inſcritto $= a$
—— —— della figura inſcritta $= \mathrm{a}$
la circonferenza del cerchio circoſcr. $= C$
—— —— —— —— inſcritto $= c$
—— —— il perimetro della figura $= p$
il Diametro del cerchio maggiore $= D$
—— —— —— —— minore $= d$

Sarà $A : a = D^2 : d^2$

ma per il Teor. I.
del Sig. Zanotti —— $a : \mathrm{a} = c : p$

ed $Aa : a\mathrm{a} = D^2 c : d^2 p$

dunque $A : \mathrm{a} = D^2 c : d^2 p$

Co-

COROLLARIO I.

Inscritto, e circoscritto un cerchio ad un triangolo equilatero, essendo allora $d = \frac{D}{2}$ sarà ancora $c = \frac{C}{2}$; onde sarà $A : a = \frac{CD^2}{2} : \frac{pD^2}{4} = 2\,C\,D^2 : p\,D^2 = 2\,C : p$; dunque l' area del cerchio circoscritto all' area dell' equilatero inscritto è in doppia ragione di quella, che ha la circonferenza del cerchio circoscritto al perimetro del triangolo; ma la circonferenza sta al perimetro, come l' area del cerchio circoscritto all' area dell' esagono inscritto *Cor. I. Teor. I.* dunque l' area del cerchio circoscritto è all' area del triangolo, come la doppia area del medesimo cerchio circoscritto all' area dell' esagono inscritto.

COROLLARIO II.

Ma se un cerchio inscrivesi, e circonscrivesi ad un quadrato; siccome $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$, e però $c\,D^2 = \frac{CD^2}{\sqrt{2}}$ sarà $A : a = \frac{CD^2}{\sqrt{2}} : \frac{D^2 p}{2}$; ma $p = \frac{4D}{\sqrt{2}}$ dunque $A : a = \frac{CD^2}{\sqrt{2}} : \frac{4D^3}{2\sqrt{2}} = C\,D^2 : 2\,D^3 = \frac{C}{2} : D$.

CO-

COROLLARIO. III.

Oppure ad un esagono, poichè $D^2c = CdD$ sarà $A : a = C\,d\,D : d^2 p$; ma $p = 3\,D$; dunque $A : a = C\,d\,D : 3\,D\,d^2 = C : 3\,d$, dunque sarà l' area del cerchio circoscritto all' area dell' esagono inscritto, come la circonferenze di esso cerchio al perimetro dell' esagono inscritto nel cerchio minore; ma per il *Coroll. I. Teor. I.* l' area del cerchio circoscritto è all' area dell' esagono inscritto, come la circonferenza di detto cerchio al perimetro del triangolo equilatero parimente inscritto; dunque il perimetro del triangolo equilatero inscritto nel cerchio maggiore è eguale al perimetro dell' esagono nel cerchio minore inscritto.

COROLLARIO IV.

Quindi se in un cerchio inscriverassi un esagono, e nell' esagono un altro cerchio, ed in questo un altro esagono, e così in infinito, saranno tanto li perimetri, quanto le aree degli esagoni in questi cerchi inscritti in continua proporzione; imperciocchè inscritto in ciascun cerchio un triangolo equilatero, e denominato E il perimetro dell' esagono maggiore, *E* quello del secondo, e quello del terzo T, il perimetro del triangolo maggiore, *T* quello del secondo, *t*

quel-

quello del terzo, sarà $E : T = \mathit{E} : \mathit{T} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$; ma per il *Coroll. prec.* $T = \mathit{E}$, dunque $E : \mathit{E} = \mathit{E} : \mathit{T}$: parimente sarà $\mathit{E} : \mathit{T} = \mathit{E} : t$; ma per l' istesso Corollario $\mathit{T} = e$, dunque $\mathit{E} : e = e : t = \mathit{E} : \mathit{T}$, e però $E : \mathit{E} = \mathit{E} : e$, dunque li perimetri E, E, e sono in continua proporzione, e siccome le aree sono in duplicata ragione de' perimetri, saranno anch' esse in continua proporzione; ma le circonferenze de' cerchi, e li perimetri de' triangoli sono come li perimetri degli esagoni, siccome le rispettive aree, come le aree degli esagoni, dunque sono in continua proporzione; anzi qualunque siansi le figure simili in questi circoli inscritte, saranno in continua proporzione tanto i loro perimetri, quanto le loro aree. Continueranno adunque li perimetri degli esagoni posto il primo $= 1$. siccome pure di tutte le simili figure sopra notate questa serie $1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{27}}{8}, \frac{9}{16}$ ec. in infinito, e le aree quest' altra $1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$ ec. in infinito.

COROLLARIO V.

Che se intenderemo un diametro, che divida per metà gli angoli tanto degli esa-

goni

goni, quanto de' triangoli equilateri, ed intorno a queſto concepiremo rivolgerſi sì li ſemicircoli, come li ſemi eſagoni, e ſemitriangoli, da primi ſi genereranno delle sfere, da' ſecondi de' corpi compoſti di due coni, ed un cilindro da' terzi de' coni, le ſuperficie de' quali corpi ſaranno come le aree delle figure generanti, dovendo eſſere in ragione duplicata de' lati omologhi, e le ſolidità come li cubi de' perimetri, dovendo eſſere in triplicata ragione de' medeſimi lati omolghi, onde le ſolidità continueranno queſta ſerie $l, \frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{27}{64}, \frac{27\sqrt{27}}{512}, \frac{729}{4096}$ ec. in infinito; il che verificheraſſi ancora di tutti gli altri corpi ſimili. che in queſte sfere poſſono inſcriverſi, come è chiaro,

T E O R E M A III.

La ſuperficie di un corpo, a cui può circoſcriverſi, e inſcriverſi la sfera, è alla ſuperficie della sfera circonſcritta in ragione compoſta di quella, che ha la ſuperficie del corpo alla ſuperficie della sfera inſcritta, e di quella, che ha il quadrato del diametro della sfera minore al quadrato del diametro della maggiore.

DI-

DIMOSTRAZIONE

Sia la ſuperficie della sfera circoſcritta $= A$
—— —— —— —— inſcritta $= a$
—— —— del corpo inſcritto $= \mathrm{a}$
il diametro della sfera circoſcritta $= D$
—— —— —— —— inſcritta $= d$

ſarà $A : a = D^2 : d^2$

ma per il Teor. II. del Sig. Zanotti $a : \mathrm{a} = \frac{da}{6} : \frac{d\mathrm{a}}{6}$

onde $A a : a\mathrm{a} = \frac{daD^2}{6} : \frac{\mathrm{a}d^3}{6}$

dunque $A : \mathrm{a} = aD^2 : \mathrm{a}d^2$

COROLLARIO I.

Se il corpo, a cui è inſcritta, e circoſcritta una sfera, è un cono equilatero, è in tal caſo $d = \frac{D}{2}$ onde ſi ha $A : \mathrm{a}$

$aD^2 : \frac{\mathrm{a}D^2}{4} = a : \frac{\mathrm{a}}{4}$; ma $a : \mathrm{a} = 4 : 9$, e perciò $a = \frac{4\mathrm{a}}{9}$; dunque $A : \mathrm{a} = \frac{4\mathrm{a}}{9} : \frac{\mathrm{a}}{4} = 16 : 9$.

COROLLARIO II.

Ma ſe è un cilindro quadrato, allora eſſendo $D^2 = 2d^2$, ed $a = \frac{2\mathrm{a}}{3}$ ſi avrà $A : \mathrm{a} = \frac{2\mathrm{a}D^2}{3}$ $\mathrm{a}d^2 = \frac{2D^2}{3} : d^2 = \frac{4d^2}{3} : d^2 = 4 : 3$. Che ſe la

ſu-

superficie del cilindro considererassi senza le basi, eguali ad un terzo di essa, sarà $A : = \frac{2a}{3} = \frac{2aD^2}{3} : \frac{2ad^2}{3} = D^2 : d^2 = 2 : 1.$

COROLLARIO III.

Quindi essendo la superficie della sfera circoscritta alla superficie del cilindro quadrato inscritto, come $4 : 3$, e la superficie della sfera circoscritta a quella del cono equilatero inscritto come $16 : 9$ o sia $4 : \frac{9}{4}$ sarà la superficie del cilindro a quella del cono come $3 . \frac{9}{4}$; ma $3 : \frac{9}{4} = 4 : 3$, dunque la superficie del cilindro è mezza proporzionale tra la superficie della sfera circoscritta, e del cono equilatero inscritto.

COROLLARIO IV.

Ed essendo la superficie della sfera circoscritta alla superficie intiera del cilindro quadrato come $4 : 3$, e quella a questa senza le basi come $2 : 1 : o\ 4. : 2$, sono esse in proporzione aritmetica, continova, cioè come 4, 3, 2.

COROLLARIO V.

Inscritta, e circoscritta una sfera ad un quadrato rombo conico si ha $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$, ed $a : a = d : D$; dunque sarà $A : a = dD^2 : Dd^2 = D : d = \sqrt{2} : 1$, cioè la superficie della sfera circo-

scritta

ſcritta è alla ſuperficie del rombo quadrato conico inſcritto, come il di lei diametro al diametro della sfera inſcritta, o come il diametro della sfera circonſcritta al lato del quadrato, che genera il ſuddetto rombo, o finalmente come la radice di due a uno.

COROLLARIO VI.

E poichè $A : a = D : d$, ed $a : a = d : D$. e permutando $a : a = D : d$: dunque $A : a = a : a$, cioè la ſuperficie del rombo ſodo ſarà mezza proporzionale tra la ſuperficie della sfera circoſcritta, ed inſcritta.

COROLALRIO VII

Che ſe una sfera circonſcriveſi, ed inſcriveſi ad un tetraedro; ſiccome $a = \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$ e $d = \frac{D}{3}$, e perciò $a = \frac{A}{9}$ ſi avrà $A : a = \frac{AD^2}{9} : \frac{2D^4}{9\sqrt{3}} = A : \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$; ma poſta la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta $= C$ ſarà $A = C\,D$, dunque $A : a = C\,D : \frac{2D^2}{\sqrt{3}} = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$.

COROLLARIO VIII.

Ma ſe il corpo a cui è inſcritta, e circoſcritta una sfera è un ottaedro, ſi ha

a =

$a = D^2\sqrt{3}$, e $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$, onde $a = \frac{A}{3}$ dunque sarà $A : a = \frac{AD^2}{3} : \frac{aD^2}{3} = A : D^2\sqrt{3}$, e denominata la circonferenza del cerchio massimo della sfera circoscritta $= C$ essendo $A = CD$, sarà $A : a = CD : D^2\sqrt{3} = C : D\sqrt{3}$.

COROLLARIO IX.

E siccome inscritta, e circonscritta una sfera ad un cubo, $a = 2D^2$, $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$ e $aD^2 = \frac{AD^2}{3}$ si avrà $A : a = \frac{AD^2}{3} : \frac{aD^2}{3} = A : 2D^2$; ma supposta la circonferenza del cerchio massimo della sfera circonscritta $= C$, essendo $A = CD$, sarà $A : a = CD : 2D^2 = C : 2D$, e poichè come $C : 2D$, così il cerchio massimo della sfera al quadrato in esso inscritto *Cor. II. Teor. II.*, dunque la superficie della sfera circonscritta è alla superficie del cubo, come il di lei cerchio massimo al quadrato in esso inscritto.

COROLLARIO X.

Essendo una sfera circoscritta, ed inscritta ad un icosaedro; $a = \frac{10D^2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$, ed $= \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{30} + \sqrt{180}}$ onde $aD^2 = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}}$, dunque

$A:a = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} : a \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}}$ $= A : \frac{10D^2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$, ma ſe la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta diceſi C, $A = CD$, dunque $A : a = CD : \frac{10D^2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$.

COROLLARIO XI.

Se finalmente la sfera circoſcriveſi e inſcriveſi ad un Δodecaedro eſſendo $a = \frac{10D^2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ e $d = \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$ ſarà a $D^2 = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}}$ onde $A : a = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} : a \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} = A : \frac{10D^2}{\sqrt{20 + 2\sqrt{5}}}$; che ſe ſi ſuppone la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circonſcritta $= C$, $A = CD$; dunque $A : a = CD : \frac{10D^2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = C : \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

COROLLARIO XII.

Quindi ſarà la ſuperficie del tetraedro alla ſuperficie dell' ottaedro, come 2 : 3, imperciocchè, denominando i corpi, e la sfera circoſcritta per le loro lettere iniziali, li, il che offerveraffi ancor ne' feguenti Corollari, farà

$$T ; S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$
$$S : O = C : D\sqrt{3}$$

dunque $T : O = \frac{2D}{\sqrt{3}} : D\sqrt{3} = 2D : 3D = 2 : 3$

COROLLARIO XIII.

La fuperficie del tetraedro alla fuperficie del cubo o efaedro come $1 : \sqrt{3}$, effendochè

$$T : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$
$$S : E = C : 2D$$

dunque $T : E = \frac{2D}{\sqrt{3}} : 2D = 2D : 2D\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$.

COROLLARIO XIV.

La fuperficie del tetraedro alla fuperficie dell'icofaedro come $5 + \sqrt{5} : 15$, effendochè

$$T : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$
$$S : I = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$$

dunque $T : I = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{5\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} = 5 + \sqrt{5} : 15$

COROLLARIO XV.

Finalmente farà la fuperficie del tetraedro alla ſuperficie del Δodecaedro come $1 : \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

imperocchè

$$T : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

dunque $T : \Delta = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{5}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$= 1 : \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

COROLLARIO XVI.

Paragonata la ſuperficie dell' ottaedro alla ſuperficie del cubo ſarà quella a queſto, come $\sqrt{3} : 2$ mentre

$$O : S = D\sqrt{3} : C$$

$$S : E = C : 2D$$

dunque $O : E = D\sqrt{3} : 2D = \sqrt{3} : 2$.

COROLLARIO XVII.

E la ſuperficie dell' ottaedro a quella dell' icoſaedro come $5+\sqrt{5} : 10$, perchè

$$O : S = D\sqrt{3} : C$$

$$S : I = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$$

dunque $O : I = D\sqrt{3} : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} = 1 : \frac{10}{5+\sqrt{5}} =$

$5\sqrt{5} : 10$.

CO-

COROLLARIO XVIII.

Per ultimo la superficie dell' ottaedro a quella del Δodecaedro, come $\sqrt{3} : \frac{10}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

imperocchè $O : S = D\sqrt{3} : C$

$$S : \Delta = C : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

dunque $O : \Delta = D\sqrt{3} : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{3} : \frac{10}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

COROLLARIO XIX.

La proporzione della superficie del cubo, o esaedro a quella dell' icosaedro sarà come $5 + \sqrt{5} : 5\sqrt{3}$

perchè $E : S = 2D : C$

$$S : I = C : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$$

dunque $E : I = 2D : \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} = 1 : \frac{5\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}$

$= 5 + \sqrt{5} : 5\sqrt{3}$.

COROLLARIO XX.

E quella della superficie del cubo alla superficie del Δodecaedro come $1 : \frac{5}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

imperciocchè $E : S = 2D : C$

$$S : \Delta = C : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

dunque $E : \Delta = 2D : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$= 1 : \frac{5}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

COROLLARIO XXI.

E per fine ſtarà la ſuperficie dell' icoſaedro a quella del Δodecaedro, come $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{5}}}$ o come $\sqrt{30+6\sqrt{5}} : 5 + \sqrt{5}$ imperocchè $I : S = \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : C$

$$S : \Delta = C : \frac{10}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

dunque $I : \Delta = \frac{10D\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : \frac{10D}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$
$\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{30+6\sqrt{5}} : 5 + \sqrt{5}$.

TEOREMA IV.

La ſolidità del corpo, a cui può circoſcriverſi, e inſcriverſi la sfera è alla ſolidità della sfera circoſcritta in ragione compoſta della ragione, che ha la ſuperficie del corpo alla ſuperficie della sfera inſcritta, e di quella, ohe ha il cubo del diametro minore al cubo del diametro maggiore.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Sia la solidità della sfera circoscritta $= S$
—— —— —— —— inscritta $= s$
—— —— —— del corpo $= \int$
il diametro della sfera circoscritta $= D$
—— —— —— —— inscritta $= d$
superficie della sfera circoscritta $= A$
—— —— —— —— inscritta $= a$
—— —— —— —— del corpo $= \mathrm{a}$

Sarà $S : s = D^3 : d^3$

ma per il Teor II.
del Sig. Zanotti —— $s : \int = a : \mathrm{a}$
onde $sS : \int s = aD^3 : \mathrm{a}d^3$
dunque $S : \int = aD^3 : \mathrm{a}d^3$

COROLLARIO I.

Posto, che il corpo a cui è inscritta, e circoscritta una sfera, sia un cono equilatero, essendo $a : \mathrm{a} = 4 : 9$, e $d = \frac{D}{2}$ sarà $a = \frac{4\mathrm{a}}{9}$, e $d^3 = \frac{D^3}{8}$; dunque $S : \int = \frac{4\mathrm{a}D^3}{9} : \frac{\mathrm{a}D^3}{8} = \frac{4}{9} : \frac{1}{8} = 32 : 9$.

COROLLARIO II.

Che se sarà un cilindro quadrato; poichè $a = \frac{2\mathrm{a}}{3}$, $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$, e perciò $d^3 = \frac{D^3}{\sqrt{8}}$ si avrà

 $S : \int$

$S : s = \frac{2aD^3}{3} : \frac{aD^3}{\sqrt{8}}$; dunque $S : s = \frac{2}{3} : \frac{1}{\sqrt{8}}$ $= 2\sqrt{8} : 3 = \sqrt{32} : 3$. Quindi essendo la solidità del cono equilatero a quella della sfera $= 9 : 32 = \frac{9}{8} : 4$ e la solidità di questa a quella del cilindro quadrato $= \sqrt{32} : 3 = 4 : \frac{6}{\sqrt{8}}$ sarà la solidità del primo a quella del secondo $= \frac{9}{8} : \frac{6}{\sqrt{8}}$; ma $\frac{9}{8} : \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{8}} : 4$; dunque le solidità della sfera, cilindro quadrato, e cono equilatero in essa inscritti continovano questa proporzione $\frac{4}{\sqrt{8}}\frac{9}{8}$

COROLLARIO III.

Ma se è un rombo quadrato conico, siccome $a : a = d : D$, e $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$; $S : s = dD^2 :$ $Dd^2 = D^2 : d^2 = D^2 : \frac{D^2}{2} = 2 : 1$; dunque $S : s = 2 : 1$.

COROLLARIO. IV.

Quindi essendo la superficie della sfera circoscritta a quella del rombo, come $\sqrt{2} : 1$, *Cor. V. Teor. III.* e la solidità dell'una alla solidità dell' altro, come $2 : 1$ sono le superficie, come le radici delle solidità.

COROLLARIO V.

Saranno in oltre le solidità della sfera

cir-

circoſcritta, del rombo, e del cono retto inſcritti in continova proporzione, cioè come 4, 2, 1.

COROLLARIO VI.

Inſcritta, e circoſcritta la sfera ad un tetraedro, ſarà $a = \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$ $d = \frac{D}{3}$ e per conſeguenza $a = \frac{A}{9}$ dunque $S : ſ = \frac{AD^3}{9} : \frac{2D^5}{27\sqrt{}}$ $= A : \frac{2D^2}{3\sqrt{3}}$; ma poſta la circonferenza del cerchio maſſimo della sfera circoſcritta $= C$, $A = CD$, dunque $S : ſ = CD : \frac{2D^2}{3\sqrt{3}}$ $= C : \frac{2D}{3\sqrt{3}}$

COROLLARIO VII.

Onde eſſendo la ſuperficie della sfera a quella del tetraedro, come $C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$ *Car. VII. Teor. III.* e la ſolidità di quello alla ſolidità di queſto, come $C : \frac{2D}{3\sqrt{3}}$, è la ragione della ſolidità della sfera circoſcritta alla ſolidità del tetraedro inſcritto tripla della ragione, che ha la ſuperficie dell' iſteſſa sfera alla ſuperficie del tetraedro.

COROLLARIO VIII.

Se è inſcritta e circoſcritta la sfera ad un ottaedro; $a = D^2\sqrt{3}$, $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$, onde $a = \frac{A}{3}$; dunque $S : ſ = \frac{AD^3}{3} : \frac{D^5}{3} = A : D^2$; ma indicata per C la circonferenza del cerchio maſſimo dalla sfera circoſcritta, $A = CD$; dunque $S : ſ = CD : D^2 = C : D$.

COROLLARIO IX.

E' la metà della ſolidità della sfera circoſcritta del rombo *Cor. III.* ſarà la ſolidità di queſto alla ſolidità dell'ottaedro come $\frac{C}{2} : D$, o $C : 2D$.

COROLLARIO X.

Ma eſſendo la ſuperficie della sfera alla ſuperficie del cubo inſcritto, come $C : 2D$, il cerchio maſſimo della sfera al quadrato in eſſo inſcritto, come $C : 2D$, *Coroll. IX. Teor. III.* ſarà la ſolidità del rombo alla ſolidità dell'ottaedro, come la ſuperficie della sfera alla ſuperficie del cubo inſcritto, come il cerchio maſſimo della sfera al quadrato inſcritto.

COROLLARIO XI.

Inſcritta, e circoſcritta la sfera al cubo

a=

$a = 2D^2$, $d = \frac{D}{\sqrt{3}}$, e però $a = \frac{A}{3}$; dunque $S : s = \frac{AD^3}{3} : \frac{2D^3}{3\sqrt{3}} = A : \frac{2D^2}{\sqrt{3}}$, e poichè nominata la circonferenza del cerchio massimo della sfera circoscritta C, $A = CD$, dunque $S : s = CD : \frac{2D^2}{\sqrt{3}} = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$; ma ancora la superficie della sfera è alla superficie del tetraedro come $C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$ *Corol. VII. Teor. III.* dunque la superficie della sfera è alla superficie del tetraedro, come la solidità della sfera alla solidità del cubo.

COROLLARIO XII.

O all' icosaedro; essendo $a = \frac{10D^2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}}$ e $d = \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$, onde $a\,D^2 = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$ si avrà $S : s = AD \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} : \frac{10D^2\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} \times d = A : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} \times d$; ma se la circonferenza del cerchio massimo della sfera circonscritta dicesi C, $A = CD$; dunque $S : s = CD : \frac{10D\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} \times d = C : \frac{10\sqrt{3}}{5 + \sqrt{5}} \times d$ e sostituendo per d il suo valore eguale le $d = \frac{3D + \sqrt{D5}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$, e attualmente moltiplicando, e riducendo i termini alla sua minima denominazione.

$$S : s = C : \frac{6D + 2D\sqrt{5}}{\sqrt{10 + \sqrt{20} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{4}{5}}}}$$

$$= C : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{20}}}$$

COROLLARIO XIII.

O per ultimo al Dodecaedro; poichè $a = \frac{10D^2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, e $d = \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$ sarà $aD^2 = A \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}}$ dunque $S : s = AD \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} : \frac{10D^2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \times \frac{14D^2 + D^2\sqrt{180}}{30 + \sqrt{180}} \times d = A : \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \times d$; ma posta la circonferenza del cerchio massimo della sfera circoscritta $= C$, $A = CD$ dunque $S : s = CD \frac{10D}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \times d = C : \frac{10}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \times d$, e sostituendo in luogo di d il suo valore eguale $d = \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{30 + \sqrt{180}}}$, e attualmente moltiplicando, e riducendo a minori termini il prodotto $S : s = C : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{3 + \sqrt{\frac{3}{5}}}}$ CO-

COROLLARIO XIV.

Sarà adunque la solidità del tetraedro alla solidità dell' ottaedro, come $2 : \sqrt{27}$.

perchè $T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$

$S : O = C : D$

dunque $T : O = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : D = 2 : 3\sqrt{3} = 2 : \sqrt{27}$

COROLLARIO XV.

Ma la superficie del tetraedro sta a quella dell' ottaedro, come $2 : 3$, *Coroll. XII. Teor. III.* dunque la superficie di quello è alla superficie di questo come due alla radice cubica di ventisette, e la solidità del primo alla solidità del secondo, come due alla radice quadrata di ventisette.

COROLLARIO XVI.

E la solidità del tetraedro alla solidità del cubo, come $1 : 3$, imperciocchè

$T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$

$S : E = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$

dunque $T : E = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : \frac{2D}{\sqrt{3}} = 1 : 3$.

COROLLARIO XVII.

Quindi essendo la superficie del tetraedro a quella del cubo come $1 : \sqrt{3}$. *Coroll. XIVI. Teor. III.* le superficie di questi due corpi sono come le radici delle loro solidità.

COROLLARIO XVIII.

La solidità del tetraedro alla solidità dell' icosaedro, come $1 : \dfrac{9\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{\sqrt{10+\sqrt{20}} + \sqrt{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}}$

poichè $T : S = \dfrac{2D}{3\sqrt{3}} : C$

$$S : I = C : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}$$

dunque $T : I = \dfrac{2D}{3\sqrt{3}} : \dfrac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}$

$$= 1 : \frac{9\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{10+\sqrt{20}} + \sqrt{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}}$$

COROLLARIO XIX.

La solidità del tetraedro alla solidità del dodecaedro come $1 : \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$, perchè

$$T : S = \frac{2D}{3\sqrt{3}} : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

dunque $T : \Delta = \dfrac{2D}{3\sqrt{3}} : \dfrac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$

$= 1 : \dfrac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$ co-

COROLLARIO XX.

La ſolidità dell'ottaedro alla ſolidità del cubo come $\sqrt{3} : 2$ mentre

$$O : S = D : C$$

$$S : E = C : \frac{2D}{\sqrt{3}}$$

dunque $O : E = D : \frac{2D}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 2$

COROLLARIO XXI.

Ma la ſuperficie dell' ottaedro è alla ſuperficie del cubo, come $\sqrt{3} : 2$ *Cor. XVI. Teor. III.* dunque le ſuperficie di queſti due corpi ſono come le loro ſolidità.

COROLLARIO XXII.

La ſolidità dell'ottaedro alla ſolidità dell' icoſaedro, come $1 : \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$, poichè

$$O : S = D : C$$

$$S : I = : C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$$

dunque $O : I = D : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$

$$= 1 : \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{20}}}}}$$

COROLLARIO XXIII.

La solidità dell'ottaedro alla solidità del Δodecaedro come $1 : \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{5}}}$, imperciocchè

$$O : S = D : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{5}}}.$$

dunque $O : \Delta = D : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{5}}}$

COROLLARIO XXIV.

La solidità del cubo alla solidità dell'icosaedro, come $1 : \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{\sqrt{10 + \sqrt{20}} + \sqrt{2 + \sqrt{\frac{4}{5}}}}$ essendochè $E : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$

$$S : I = C : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{20}}}}$$

dunque $E : \Delta = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{3D + D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{20}}}}$

$$= 1 : \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{\sqrt{10 + \sqrt{20}} + \sqrt{2 + \sqrt{\frac{4}{5}}}}$$

COROLLARIO XXV.

La solidità del cubo alla solidità del Δodecaedro, come $1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$, poichè

$$E : S = \frac{2D}{\sqrt{3}} : C$$

$$S : \Delta = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

dunque $E : \Delta = \frac{2D}{\sqrt{3}} : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{12}+\sqrt{\frac{12}{5}}}$

$= 1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{\frac{4}{5}}}$

COROLLARIO XXVI.

E per ultimo la solidità dell'icosaedro a quella del Δodecaedro come $1 : \frac{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$

perchè $I : S = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}} : C$

$$S : \Delta = C : \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

dunque $I : \Delta = \frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}$

$\frac{3D+D\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1 : \frac{\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{20}}}}{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$

CO-

TEOREMA V.

Tutta la superficie di qualunque prisma circoscritto ad un cilindro è alla superficie intiera del cilindro, come il perimetro della base del prisma alla circonferenza della base del cilindro.

DIMOSTRAZIONE.

Le superficie del prisma, e del cilindro sono eguali a due rettangoli: le di cui basi sono li perimetri delle rispettive basi, e l' altezza è comune, escluse però le basi; ma questi rettangoli, essendo egualmente alti sono come le basi; dunque la superficie del prisma è alla superficie del cilindro, senza le basi, come il perimetro della base del prisma alla circonferenza della base del cilindro; ma per il *Teor. I.* del Signore Zanotti le basi ancora sono nell istessa proporzione de' perimetri; dunque aggiungendo queste tanto al prisma, quanto al cilindro, sarà l' intiera superficie del prisma all' intiera del cilindro, come il perimetro della base del prisma alla circonferenza della base del cilindro, il che ec.

COROLLARIO I.

Ma la solidità del prisma a quella del cilindro egualmente alto è come la base del pri-

prisma alla base del cilindro; dunque le solidità, le superficie, le basi, ed i perimetri delle basi di questi due corpi sono nella medesima proporzione.

COROLLARIO II.

Se il prisma circoscritto al cilindro avrà per base un triangolo equilatero, e al prisma sarà circoscritto un altro cilindro sarà la superficie del cilindro circoscritto a quella del prisma inscritto, escluse le basi, in doppia ragione di quella, che ha la superficie intiera del cilindro inscritto alla superficie intiera del prisma, per questo *Teor.* e per il *Cor. II. e III. del Teor. I.*

TEOREMA VI.

Tutta la superficie di una piramide circoscritta ad un cono è alla superficie intiera del cono iscritto, come il perimetro della base della piramide alla circonferenza della base del cono.

DIMOSTRAZIONE.

Le superficie della piramide, e del cono senza le basi sono eguali a due triangoli, la di cui altezza è comune, e le basi sono i perimetri delle rispettive basi; ma questi due triangoli egualmente alti sono come le basi; dunque la superficie della piramide

è alla

è alla ſuperficie del cono, eſcluſe le baſi, come il perimetro della baſe di uno alla circonferenza della baſe dell' altro; ed aggiungendo le baſi, che ſono nell' iſteſſa proporzione de' perimetri per il *Teor. I.* del Signore Zanotti, tutta la ſuperficie della piramide è a quella del cono, come il perimetro della baſe della piramide alla circonferenza della baſe del cono, il che ec.

COROLLARIO I.

E ſiccome eſſendo sì la piramide, che il cono egualmente alti, le loro ſolidità ſono come le baſi; dunque le ſolidità ſono come le ſuperficie, e le ſuperficie, ſolidità, baſi, e perimetri delle baſi ſono nell' iſteſſa proporzione.

COROLLARIO II.

E' abbaſt nza chiaro lo ſteſſo che ſi è detto nel *Cor. II. del Teor. preced.* verificarſi ancora della ſuperficie del cono circoſcritto, riſpetto alla piramide di baſe triangolare equilatera.

FINE.

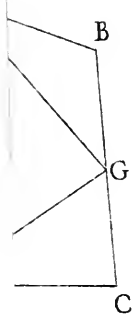
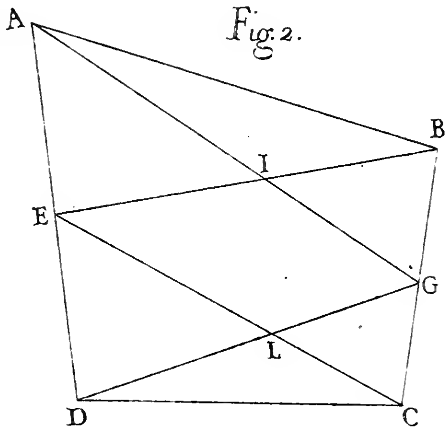


Fig. 2.



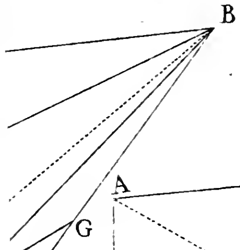


Fig. 4.

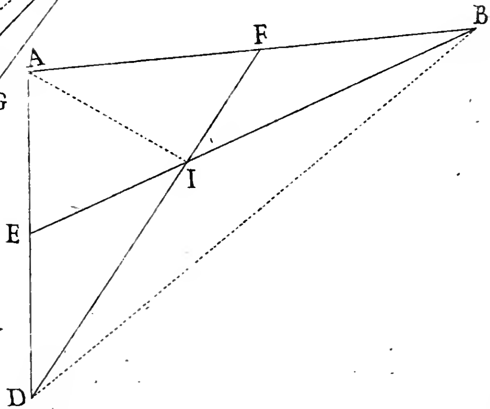


Fig. 1

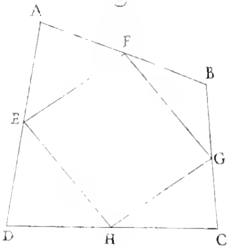


Fig. 2

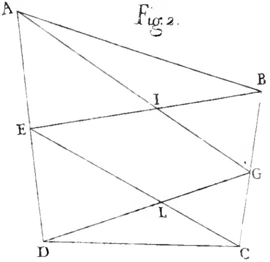


Fig. 3

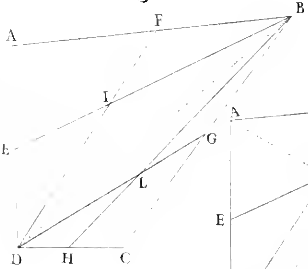
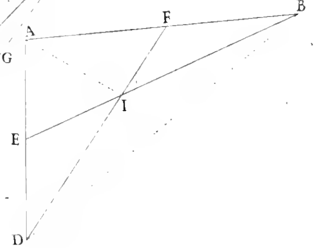


Fig. 4



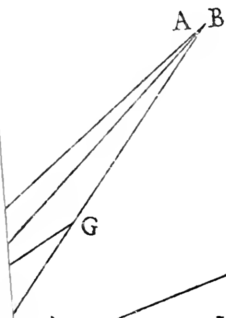


Fig. 6.

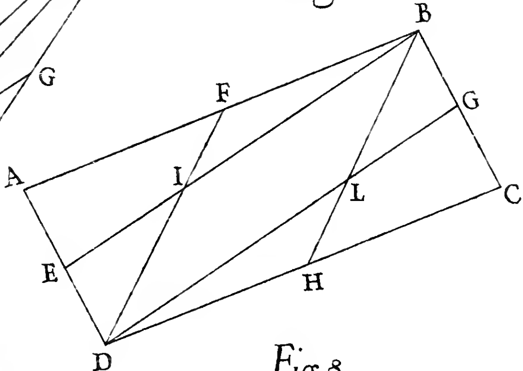


Fig. 8.

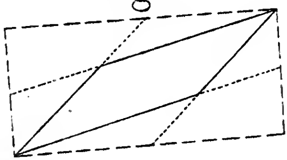
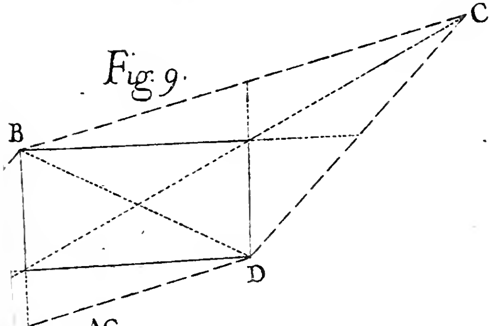


Fig. 9.



$BD = \frac{AC}{3}$

Fig. 5

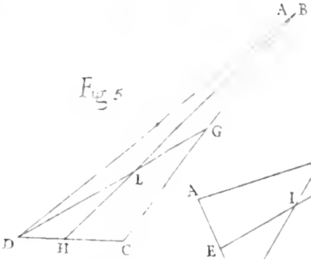


Fig. 6

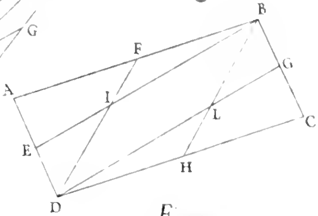


Fig. 7

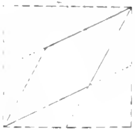


Fig. 8

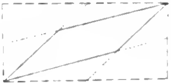


Fig. 9

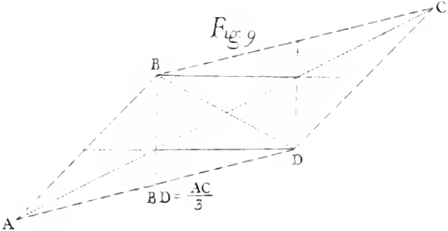


Fig. 10.

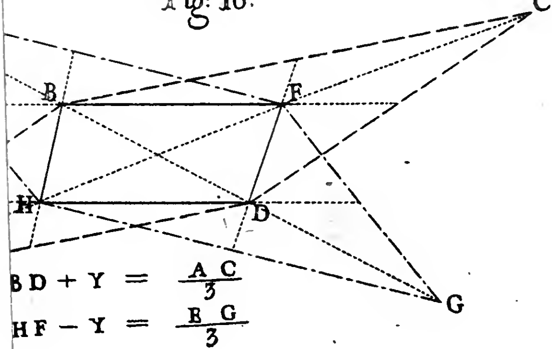
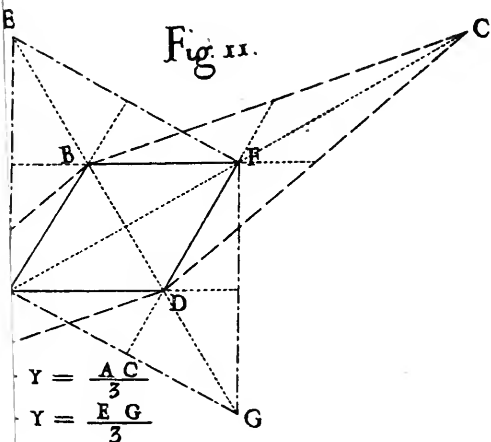


Fig. 11.



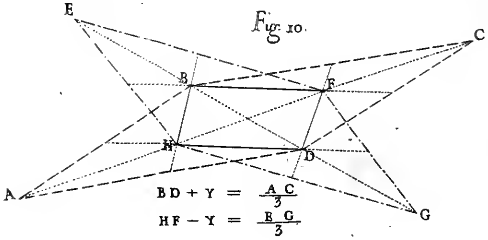


Fig. 10.

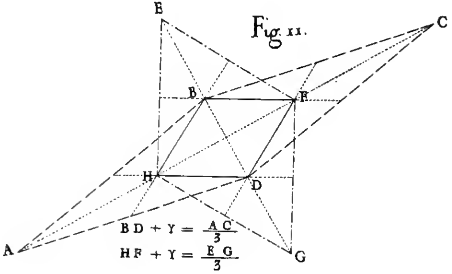
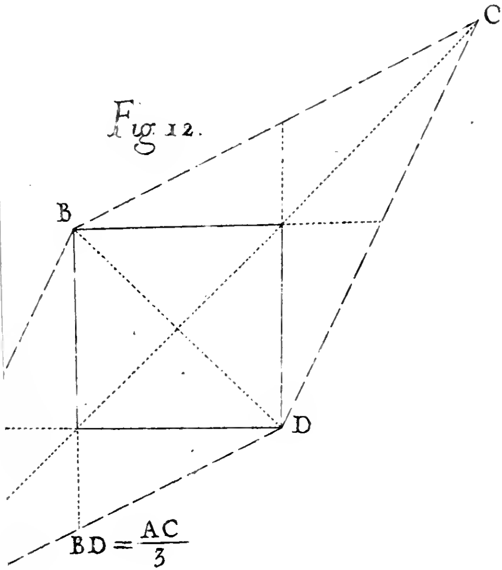
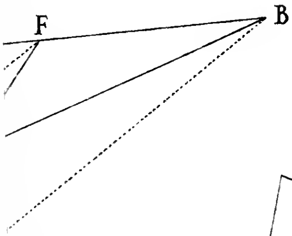


Fig. 11.

Fig. 12.

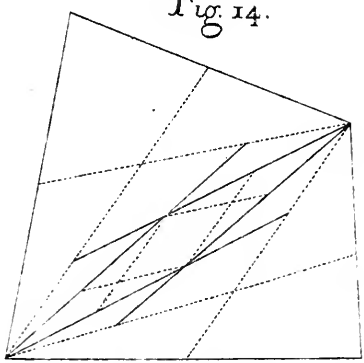


$BD = \frac{AC}{3}$



ig. 13.

Fig. 14.



$: \frac{a}{27} : \frac{a}{81} :$ & o $\quad S \div \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} :$ & o $= \frac{a}{2}$

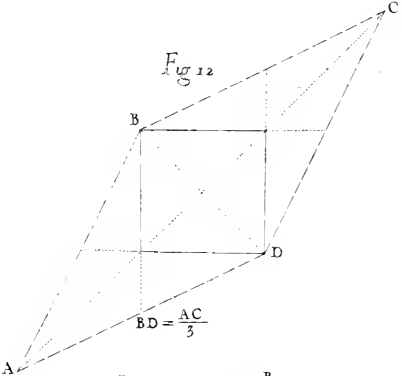


Fig 12

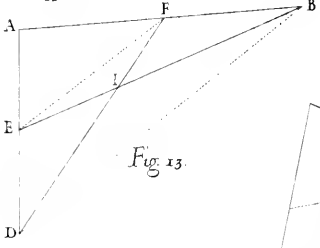


Fig. 13.

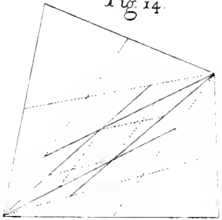


Fig. 14.

$\div\, a\ \ \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} : \&\ o \qquad S \div \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} : \frac{a}{81} : \&\ o = \frac{a}{2}$