285

86

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

ZWEITER BAND.

ABHANDLUNGEN II.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1895.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Seite

1. Über eine Gattung reell periodischer Functionen . . . . 1—18.
(Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, S. 97—115, 185.)

2. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen . . . . . . 19—44.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868, S. 310—338.)

3. Über die allgemeinsten eindeutigen und $2n$-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen . . . . 45—48.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1869, S. 853—857.)

4. Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip . . . . 49—54.

5. Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen . . . . 55—69.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, S. 680—693; Abhandlungen aus der Functionenlehre (Berlin 1886), S. 165—182.)
Anmerkungen . . . . 70.

6. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen 71—74.

7. Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten . . . . 75—76.

8. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen . . . . . . 77—124.
(Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, S. 11—60; Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 1—52.)

9. Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen . . . . 125—133.
(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 89 (1880), S. 1—8.)
Anmerkung . . . . 134.

10. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze . . . . 135—188.
(Autographirt, Berlin o. J. (1879); Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 105—164.)

Seite

11. Über einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler 189—199.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, S. 707—717; Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 53—66.)

12. Zur Functionenlehre . . . . 201—223.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, S. 719—743; Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 67—101.)

Anmerkungen . . . . 224—230.

Nachtrag . . . . 231—233.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1881, S. 228—230; Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 102—104.)

13. Aus einem bisher noch nicht veröffentlichten Briefe an Herrn Professor Schwarz, vom 3. October 1875 . . . . 235—244.

14. Zur Theorie der elliptischen Functionen . . . . 245—255.
(Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, S. 443—451.)

15. Zur Theorie der elliptischen Functionen . . . . 257—309.
(Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883, S. 193—203, 265—275, 1271—1297.)

16. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen . 311—332.
(Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrg. 1884, S. 395—414.)

Zusätzliche Bemerkungen von Herrn H. A. Schwarz . . . . 332—339.
(A. a. O. S. 414—419, 516—519.)

17. Zu Lindemann's Abhandlung: »Über die Ludolph'sche Zahl« . . . . 341—362.
(Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, S. 1067—1085.)

Anmerkung . . . . 363.

ÜBER EINE GATTUNG REELL PERIODISCHER FUNCTIONEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 22. Februar 1866.)

1.

Geometrische und mechanische Probleme führen nicht selten auf eine Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x),$$

in der die von einander abhängigen Veränderlichen t, x reelle Grössen bedeuten und F eine gegebene eindeutige Function von x ist.

Ein besonderes Interesse hat der Fall, wo x eine periodische und stets endlich bleibende Function von t ist. Dies tritt ein, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Es verschwindet $F(x)$ für zwei reelle Werthe a, b von x;

2) der Quotient $\frac{(x-a)(b-x)}{F(x)}$, welcher mit $\frac{1}{F_1(x)}$ bezeichnet werde, ändert sein Zeichen nicht und wird nicht unendlich, so lange x in dem Intervall $a \ldots b$ bleibt;

3) für irgend einen bestimmten Werth von t ist der zugehörige von x in diesem Intervall enthalten.

Man setze nämlich, $b > a$ annehmend und unter v eine neue reelle Veränderliche verstehend,

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos v,$$

so ist

$$x-a = \frac{b-a}{2}(1-\cos v), \qquad b-x = \frac{b-a}{2}(1+\cos v),$$

$$(x-a)(b-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \sin^2 v,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a-b}{2}\sin v\,\frac{dv}{dt};$$

und es wird also die gegebene Differentialgleichung befriedigt, wenn man v so bestimmt, dass

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{F_1\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos v\right)}$$

ist, wobei der Quadratwurzel ihr positiver Werth beigelegt werde.

Nun werde ferner

$$F_1\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos v\right) \text{ mit } f(\cos v)$$

und das Integral

$$\int_0 \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} \text{ mit } \psi(v)$$

bezeichnet, so ist $\psi(v)$ eine Function, welche, wenn v beständig wachsend alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, ebenfalls stetig wachsend von $-\infty$ in $+\infty$ übergeht. Daraus folgt, wenn man

$$\psi(v) = w$$

setzt, dass zu jedem reellen Werthe von w ein Werth von v gehört, der sich stetig mit jenem ändert; oder mit anderen Worten, dass es eine ganz bestimmte continuirliche Function $\varphi(w)$ giebt, die für v gesetzt die vorstehende Gleichung befriedigt. Nimmt man also, unter τ eine beliebige Constante verstehend,

$$v = \varphi(t+\tau)$$

an, so hat man

$$t+\tau = \psi(v), \qquad dt = \psi'(v)\,dv, \qquad \frac{dv}{dt} = \sqrt{f(\cos v)},$$

und es wird die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$$

befriedigt, wenn man

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos[\varphi(t+\tau)]$$

setzt.

Es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass dieser Ausdruck jede Function darstellt, die unter den gemachten Voraussetzungen der Differentialgleichung genügt. Denn es ist stets möglich, τ so zu bestimmen, dass für einen gegebenen Werth t_0 von t nicht nur x einen in dem Intervall $a \dots b$ willkürlich angenommenen Werth x_0, sondern auch $\frac{dx}{dt}$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhält. Es folgt nämlich aus dem vorstehenden Ausdrucke von x

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2} \sin[\varphi(t+\tau)]\,\varphi'(t+\tau),$$

und es hat daher, da $\varphi'(t+\tau) = \frac{dv}{dt}$ positiv ist, $\sin[\varphi(t+\tau)]$ stets dasselbe Zeichen wie $\frac{dx}{dt}$. Man braucht daher, um den angegebenen Bedingungen Genüge zu leisten, nur einen Bogen v_0 so zu bestimmen, dass

$$x_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v_0$$

wird und zugleich $\sin v_0$ das Zeichen von $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}$ erhält, und dann

$$\tau = \psi(v_0) - t_0$$

zu nehmen, so dass $v_0 = \varphi(t_0+\tau)$ wird.

Aus der Formel

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \frac{1}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

ergiebt sich

$$\frac{d\psi(v+2\pi)}{dv} = \frac{d\psi(v)}{dv},$$

und hieraus

$$\psi(v+2\pi) = \psi(v) + 2\omega,$$

wo ω eine positive Constante bedeutet. Da nun

$$t+\tau = \psi(v),$$

so folgt

$$t+2\omega+\tau = \psi(v+2\pi),$$
$$\varphi(t+2\omega+\tau) = \varphi(t+\tau) + 2\pi;$$

und es ist daher

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos[\varphi(t+\tau)]$$

eine Function, die ihren Werth nicht ändert, wenn t um ein beliebiges Vielfaches von 2ω vermehrt oder vermindert wird.

Ferner wird

$$\begin{aligned} &\text{für } t = -\tau: && v = 0, && x = a; \\ &\text{für } t = -\tau + \omega: && v = \pi, && x = b; \\ &\text{für } t = -\tau + 2\omega: && v = 2\pi, && x = a; \end{aligned}$$

woraus sich weiter ergiebt, dass x die Grenzwerthe a, b unzählige Mal erhält, den ersteren für $t = -\tau + 2\nu\omega$, wo (wie überall im Folgenden) ν eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll, und den anderen für $t = -\tau + (2\nu + 1)\omega$. Auch folgt aus dem in Betreff des Zeichens von $\frac{dx}{dt}$ Bemerkten, dass x bei einem solchen Übergange von einer Grenze zur anderen beständig wächst oder beständig abnimmt.

Aus der Gleichung

$$\psi(v + 2\pi) = \psi(v) + 2\omega$$

erhält man, wenn man $v = -\pi$ setzt und bemerkt, dass

$$\psi(-v) = -\psi(v)$$

ist,

$$\omega = \psi(\pi) = \int_0^\pi \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

wo $\sqrt{F(x)}$ positiv zu nehmen ist.

Führt man jetzt eine neue Veränderliche $u = \frac{\pi}{\omega}(t+\tau)$ ein, so wird $\cos v$ eine gerade Function von u mit der Periode 2π und kann daher in der Form

$$\cos v = A_0 + 2A_1 \cos u + 2A_2 \cos 2u + \cdots + 2A_n \cos nu + \cdots$$

dargestellt werden, wo A_0, A_1, ... Constanten sind, die sich als bestimmte Integrale folgendermassen ausdrücken lassen.

Zunächst hat man

$$\pi A_n = \int_0^\pi \cos v \cos nu \, du.$$

Es geht aber, der Gleichung

$$u = \frac{\pi}{\omega}(t+\tau) = \frac{\pi}{\omega}\psi(v)$$

zufolge, u stetig wachsend von 0 in π über, wenn v das Intervall $0 \ldots \pi$ durchläuft, und es ergiebt sich daher, da

$$du = \frac{\pi}{\omega}\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

ist,

$$A_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\pi \cos v \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}.$$

Ganz ebenso erhält man, wenn $G(x)$ eine beliebige, für alle in dem Intervalle $a \ldots b$ liegenden Werthe von x eindeutig bestimmte und stetige Function ist,

$$G(x) = B_0 + 2B_1 \cos u + \cdots + 2B_n \cos nu + \cdots,$$
$$B_n = \frac{1}{\omega}\int_0^\pi G(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}},$$

wo für x der Ausdruck

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos v$$

zu setzen ist.

Durch partielle Integration erhält man ferner, wenn $n > 0$ ist,

$$A_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin v \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)dv$$
$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v) - v\right)dv - \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v) + v\right)dv.$$

$G(x)$ aber kann man stets auf die Form

$$G_0 + G_1 \cos v + G_2 \cos 2v + \cdots$$

bringen und deshalb, da

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\pi \cos \nu v \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)\frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} = \frac{\nu}{n\pi}\int_0^\pi \sin \nu v \sin\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)\right)dv$$

ist, B_n aus den in der Formel

$$\frac{\nu}{2n\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\psi(v)-\nu v\right)dv$$

enthaltenen bestimmten Integralen zusammensetzen.

Als ein einfaches Beispiel für die Anwendung dieser Formeln erinnere ich an die Aufgabe, den Radiusvector eines Planeten und dessen Potenzen durch die Zeit auszudrücken, welche von Bessel und Hansen in der hier dargestellten Weise behandelt worden ist.

In den meisten Fällen aber, selbst wenn die Function $F(x)$ eine einfache Form hat, sind die Coefficienten A_n, B_n sehr complicirt zusammengesetzte Grössen, deren direkte Entwicklung aus den aufgestellten Ausdrücken schwierig erscheint. Man kann sie jedoch fast immer durch ein Verfahren bestimmen, welches das Eigenthümliche hat, ohne jede Integration zum Ziele zu führen, und zugleich sehr geeignet ist, eine Einsicht in die Zusammensetzungsweise der zu entwickelnden Grössen zu gewähren und so auch bei der Ermittelung angenäherter Ausdrücke für dieselben, mit denen man sich oft begnügen kann, wesentliche Dienste zu leisten.

2.

Ich nehme an, es sei die Function $F(x)$ nicht bloss für reelle Werthe von x, sondern auch für alle complexen innerhalb eines die Strecke $a \ldots b$ in sich enthaltenden Bereiches eindeutig definirt, und so beschaffen, dass $F_1(x)$ weder Null noch unendlich gross wird. Es wird kaum ein der analytischen Behandlung überhaupt zugänglicher Fall vorkommen, wo dies nicht zutrifft.

Setzt man dann, unter α, β, ξ, η reelle Grössen verstehend,

$$v = \alpha+\beta i, \qquad x = \xi+\eta i,$$

so hat man

$$\xi = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos\beta i\cos\alpha,$$

$$\eta = \qquad -\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\beta i}{i}\sin\alpha.$$

Hiernach ist, wenn man β einen bestimmten Werth beilegt, α aber veränderlich lässt, der Ort des die complexe Grösse x repräsentirenden Punktes, dessen Coordinaten ξ, η sind, eine Ellipse mit den Brennpunkten a, b und den Halbaxen $\frac{b-a}{2}\cos\beta i$, $\frac{b-a}{2}\frac{\sin\beta i}{i}$. Setzt man daher fest, es solle β stets in dem Intervalle $-\beta_0 \cdots + \beta_0$ bleiben, α aber alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, so liegt der Punkt x stets im Innern oder auf dem Umfange derjenigen Ellipse, die zu dem Werthe β_0 gehört. Diese kann man nun, wenn man nur die positive Grösse β_0 hinlänglich klein annimmt, der die Punkte a, b verbindenden Geraden so nahe sich anschliessen lassen, dass die Function $F_1(x)$ für alle so limitirten Werthe von x die angegebene Eigenschaft besitzt. Wird dann bestimmt, dass $\sqrt{F_1(x)}$ für $x = a$ positiv sein soll, so sind dadurch und durch die im Folgenden stets festzuhaltende Bedingung, dass x beim Übergange von einem Werthe zum anderen nicht aus dem angegebenen Bereich heraustreten darf, $\sqrt{F_1(x)}$ und $\frac{1}{\sqrt{F_1(x)}}$ als eindeutige und continuirliche Functionen von x, und somit auch von v, vollständig definirt. Und da dieselben ihren Werth nicht ändern, wenn $\pm v + 2\nu\pi$ für v gesetzt wird, so kann man $\frac{1}{\sqrt{F_1(x)}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{f(\cos v)}}$ durch eine für alle jetzt in Betracht kommenden Werthe von v convergirende Reihe

$$a_0 + 2a_1 \cos v + 2a_2 \cos 2v + \cdots$$

darstellen. Setzt man dann

$$a_0 v + 2a_1 \sin v + 2a_2 \frac{\sin 2v}{2} + \cdots = \psi(v),$$

so ist $\psi(v)$ für reelle Werthe von v dieselbe Function wie die im Vorhergehenden so bezeichnete, und somit

$$\omega = a_0 \pi.$$

Jetzt werde eine Function z von v durch die Formel

$$z = e^{\frac{\pi i}{\omega}\psi(v)}$$

definirt, so lässt sich zeigen, dass wenn α stetig wachsend von einem bestimmten Werthe α_0 in $\alpha_0 + 2\pi$ übergeht, während β unverändert bleibt, der Punkt z eine einfache geschlossene Linie beschreibt, welche ganz innerhalb oder ganz ausserhalb eines mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegt, je nachdem β positiv oder negativ ist, während sie, wenn $\beta = 0$, mit diesem Kreise zusammenfällt, vorausgesetzt, dass der Grenzwerth β_0

hinlänglich klein angenommen werde. Setzt man nämlich

$$\psi(\alpha+\beta i) = p+qi, \qquad z = e^{-\frac{\pi}{\omega}q} . e^{\frac{\pi i}{\omega}p},$$

so ist

$$p = a_0\alpha + 2a_1 \cos\beta i \sin\alpha + 2a_2 \cos 2\beta i \frac{\sin 2\alpha}{2} + \cdots,$$

$$q = a_0\beta + 2a_1 \frac{\sin\beta i}{i} \cos\alpha + 2a_2 \frac{\sin 2\beta i}{i} \frac{\cos 2\alpha}{2} + \cdots,$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} = a_0 + 2a_1 \cos\beta i \cos\alpha + 2a_2 \cos 2\beta i \cos 2\alpha + \cdots.$$

Für $\beta = 0$ wird

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{f(\cos\alpha)}}, \qquad \frac{q}{\beta} = a_0 = \frac{\omega}{\pi},$$

und es sind also beide Grössen positiv, woraus erhellt, dass bei hinlänglicher Kleinheit von β_0

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha} \text{ stets positiv}$$

sein und

$$q \text{ das Zeichen von } \beta$$

haben wird. Dann geht, wenn p_0 der Werth von p für $\alpha = \alpha_0$ ist, $\frac{\pi p}{\omega}$ beständig wachsend von $\frac{\pi p_0}{\omega}$ in $\frac{\pi p_0}{\omega} + 2\pi$ über, während α das Intervall $\alpha_0 \ldots \alpha_0 + 2\pi$ durchläuft, und es dreht sich die den Nullpunkt mit dem Punkte z verbindende Gerade beständig im positiven Sinne. Ferner ist

$$e^{-\frac{\pi}{\omega}q} \gtreqless 1, \text{ je nachdem } \beta \lesseqgtr 0;$$

womit das Behauptete bewiesen ist.

Man stelle sich nun vor, es durchlaufe v den Umfang des durch die vier Punkte

$$-\beta_0 i, \quad 2\pi - \beta_0 i, \quad 2\pi + \beta_0 i, \quad \beta_0 i$$

bestimmten Rechtecks in dem durch diese Aufeinanderfolge festgesetzten Sinne, so beschreibt der Punkt z zuerst von einer bestimmten Stelle z_0 aus im positiven Sinne eine einfache geschlossene Linie (l_0), die ganz im Äusseren des eben genannten Kreises liegt, geht dann dem Nullpunkt sich nähernd zu einer innerhalb des Kreises liegenden Stelle z_1 über, beschreibt von da aus, stets innerhalb des Kreises bleibend, im negativen Sinne eine zweite einfache geschlossene Linie (l_1), und kehrt darauf von z_1 nach z_0 zurück, denselben Weg, den er beim Übergange von z_0 zu z_1 genommen, im entgegengesetzten Sinne durchlaufend. Nach einem bekannten Satze entspricht also jedem Punkte z in dem von den Linien l_0, l_1 begrenzten Ringe ein Punkt v des Rechtecks, der mit ihm durch die Gleichung

$$z = e^{\frac{\pi i}{\omega}\psi(v)}$$

verbunden ist; wobei jedoch von den beiden Seiten des Rechtecks, die durch die Punkte 0, 2π gehen, eine ausgeschlossen werden muss. Und da z unverändert bleibt, wenn $v+2\nu\pi$ für v gesetzt wird, so erhält man aus diesem einen Werthe von v alle übrigen, die für denselben Werth von z die vorstehende Gleichung befriedigen, wenn man zu ihm alle Vielfachen von 2π addirt. Hieraus folgt nun, dass e^{vi} eine eindeutige und continuirliche Function von z ist.

Nun sei ϱ der grösste Werth, den $e^{-\frac{\pi}{\omega}q}$, nachdem man $\beta = \beta_0$ gesetzt hat, annehmen kann, so ist nach dem Vorhergehenden $\varrho < 1$ und zugleich $\frac{1}{\varrho}$ der kleinste Werth von $e^{-\frac{\pi}{\omega}q}$, wenn $\beta = -\beta_0$ genommen wird. Legt man also der Veränderlichen z nur solche Werthe bei, die dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als ϱ und nicht grösser als $\frac{1}{\varrho}$ sind, so gehören diese alle dem von den Linien l_0, l_1 begrenzten Bereiche an, und zugleich lässt sich alsdann e^{vi} in eine Reihe

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \\ &\quad + c_1' z^{-1} + c_2' z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

entwickeln. Daraus folgt, wenn man $-v$ für v, mithin $\frac{1}{z}$ für z setzt,

$$\begin{aligned} e^{-vi} = {} & c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots \\ & + c_1' z + c_2' z^2 + \cdots, \end{aligned}$$

und man hat daher die Gleichung

$$\cos v = A_0 + A_1(z+z^{-1}) + A_2(z^2+z^{-2}) + \cdots,$$

wo

$$A_0 = c_0, \qquad A_n = \frac{1}{2}(c_n + c_n')$$

ist, für jeden Werth von v, bei dem der absolute Betrag von

$$e^{\frac{\pi i}{\omega}\psi(v)}$$

nicht ausserhalb der angegebenen Grenzen liegt.

Setzt man nun

$$v = \varphi(t+\tau),$$

wo $\varphi(t+\tau)$ wieder die oben definirte reelle Function von t bedeutet, so ist

$$t+\tau = \psi(v),$$

$$\cos v = A_0 + 2A_1 \cos\frac{\pi}{\omega}(t+\tau) + 2A_2 \cos\frac{2\pi}{\omega}(t+\tau) + \cdots,$$

und daher sind $A_0, A_1, A_2, \ldots$ dieselben Grössen wie vorhin. Es geht aber aus der vorstehenden Deduction hervor, dass die durch die Gleichung

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\left(A_0 + 2A_1 \cos\frac{\pi}{\omega}(t+\tau) + \cdots\right)$$

definirte Function von t nicht nur für reelle Werthe dieser Grösse der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$$

genügt, sondern auch für jeden complexen Werth, dessen zweite Coordinate — d. h. der reelle Theil von $\frac{t}{i}$ — ihrem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Diese kann nicht grösser als $\frac{\omega}{\pi}\, lg\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ sein; doch ist dies nicht nothwendig ihr wahrer Werth, indem durch das Vorhergehende nur nachgewiesen wird, dass es überhaupt eine solche Grenze giebt. Je grösser aber dieselbe ist, um so stärker convergirt die Reihe für x bei reellen Werthen von t.

Aus der Gleichung

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\left(A_0 + A_1(z+z^{-1}) + A_2(z^2+z^{-2}) + \cdots\right),$$

oder

$$x = C_0 + C_1(z+z^{-1}) + C_2(z^2+z^{-2}) + \cdots,$$

wo

$$C_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}A_0, \qquad C_n = \frac{a-b}{2}A_n,$$

ergiebt sich jetzt, wenn wir wieder x und z als Functionen von $v = \alpha + \beta i$ ansehen, folgende Bestimmung der Coefficienten C_n. Man gebe β irgend einen bestimmten Werth, bei dem der absolute Betrag von z für jeden Werth von α zwischen den Grenzen ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ bleibt, so ist

$$\int_0^{2\pi} z^{-1} \frac{dz}{dv} d\alpha = 2\pi i, \qquad \int_0^{2\pi} z^{\pm n - 1} \frac{dz}{dv} d\alpha = 0, \text{ wenn } n > 0.$$

Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} x z^{-n} \frac{1}{z} \frac{dz}{dv} d\alpha = 2\pi i C_n,$$

$$\int_0^{2\pi} x z^{+n} \frac{1}{z} \frac{dz}{dv} d\alpha = 2\pi i C_n,$$

und daher auch

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} x (z^n + z^{-n}) \frac{1}{z} \frac{dz}{dv} d\alpha.$$

Nun ist aber $\frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$ als Function von x betrachtet eindeutig. Denn hat man für einen bestimmten Werth von x einen der Gleichung

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v$$

genügenden Werth v, so sind die übrigen in der Formel $\pm v + 2\nu\pi$ enthalten; für alle diese aber hat, da

$$\psi(\pm v + 2\nu\pi) = \pm \psi(v) + 2\nu\omega$$

ist, $\frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$ denselben Werth. Ferner ist

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dv} = \frac{\pi i}{\omega} \frac{1}{\sqrt{f(\cos v)}} = \frac{\pi i}{\omega} \frac{1}{\sqrt{F_1(x)}},$$

$$dx = \frac{b-a}{2} \sin v \, d\alpha = \pm \sqrt{(x-a)(b-x)} \, d\alpha,$$

wobei der Werth der Wurzelgrösse folgendermassen fixirt werden möge.

Für einen Punkt x ausserhalb der Strecke $a \ldots b$ wird $\frac{x-a}{x-b}$ niemals eine reelle negative Grösse, und es ist daher für einen solchen $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ völlig bestimmt, wenn festgesetzt wird, es solle

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = i(x-a)\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$$

und der reelle Theil von $\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$ positiv sein. Dasselbe gilt von $\sqrt{F(x)}$, wenn man

$$\sqrt{F(x)} = \sqrt{(x-a)(b-x)} \cdot \sqrt{F_1(x)}$$

nimmt und $\sqrt{F_1(x)}$ so fixirt, wie oben angegeben worden. Nun ist für den Punkt, in welchem die betrachtete Ellipse die über b hinaus verlängerte Strecke $a \dots b$ schneidet, $\alpha = \pi$, also $\sin v = -\sin \beta i$, und daher stets

$$\frac{b-a}{2} \sin(\alpha + \beta i) = \begin{cases} +\sqrt{(x-a)(b-x)}, \text{ wenn } \beta \text{ negativ,} \\ -\sqrt{(x-a)(b-x)}, \text{ wenn } \beta \text{ positiv,} \end{cases}$$

indem es, weil $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ und $\sin(\alpha+\beta i)$ sich stetig mit α ändern, ohne jemals zu verschwinden, hinreicht, dass diese Zeichenbestimmung für **einen** Werth von α als richtig nachgewiesen wird.

Dieses vorausgesetzt, gebe man β irgend einen negativen Werth, so dass die zugehörige Ellipse, wie aus den obigen Ausdrücken von ξ, η zu ersehen ist, von einem Punkte in ihrem Inneren aus betrachtet im positiven Sinne beschrieben wird, wenn α von 0 bis 2π wächst. Dann erhält man, wenn man $\frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$, als Function von x aufgefasst, mit $P(x, n)$ bezeichnet,

$$C_n = \frac{1}{2\omega} \int \frac{xP(x, n)\,dx}{\sqrt{F(x)}},$$

wo sich die Integration im positiven Sinne über alle Punkte der Ellipse zu erstrecken hat, an deren Stelle jedoch, was wohl zu beachten ist, jetzt **jede andere einfache in sich zurücklaufende und die Punkte a, b in demselben Sinne umschliessende Linie treten kann, wenn sie nur ganz in dem Bereiche liegt, für dessen Punkte $F(x)$ die oben angegebene Beschaffenheit hat.**

Dieser Ausdruck von C_n erweist sich nun in vielen Fällen zur Berechnung dieser Grösse sehr brauchbar. Angenommen z. B. es gelinge, $\frac{P(x, n)}{\sqrt{F_1(x)}}$ für alle einem einfach begrenzten, die Strecke $a \dots b$ in sich enthaltenden Bereiche angehörigen Werthe von x durch eine Reihe

$$\overset{0}{G}(x, n) + \overset{1}{G}(x, n) + \overset{2}{G}(x, n) + \cdots,$$

deren Glieder sämmtlich ganze Functionen von x sind, darzustellen; so ergiebt sich zunächst

$$C_n = \frac{1}{2\omega} \sum_\lambda \int \frac{\overset{\lambda}{G}(x, n)\, x\, dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

unter der Bedingung, dass jede einzelne Integration auf die eben angegebene Weise ausgeführt werde. Da aber $\overset{\lambda}{G}(x, n)$ eine ganze Function von x ist, so kann man zur Bestimmung von

$$\int \frac{\overset{\lambda}{G}(x, n)\, x\, dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

den ursprünglichen Integrationsweg durch irgend einen Kreis ersetzen, der die Punkte a, b umschliesst, wobei es gar nicht nothwendig ist, dass die Reihe

$$\overset{0}{G}(x, n) + \overset{1}{G}(x, n) + \cdots$$

für alle Punkte desselben convergirt. Ist nun c der Mittelpunkt des Kreises, so kann man ferner seinen Radius so gross wählen, dass für alle Punkte des Umfangs

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

sich nach ganzen und positiven Potenzen von $\frac{1}{x-c}$ entwickeln lässt, wobei das Anfangsglied $\frac{1}{i(x-c)}$ sein muss, weil

$$\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{i}$$

für alle reellen Werthe von x, die $> b$ sind, positiv ist. Dann ist aber der Werth des Integrals gleich

$$2\pi i \left(\frac{x\, \overset{\lambda}{G}(x, n)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right)_{(x-c)^{-1}}$$

und somit

$$C_n = \frac{\pi}{\omega} \sum_\lambda \left(\frac{x\, \overset{\lambda}{G}(x, n)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right)_{(x-c)^{-1}},$$

wenn hier für $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ die Entwicklung dieser Function nach Potenzen von $\frac{1}{x-c}$, in der das Anfangsglied $\frac{1}{x-c}$ ist, gesetzt wird.

Ganz ebenso ergeben sich die oben mit $B_0, B_1, \ldots$ bezeichneten Coefficienten, wenn nur die Function $G(x)$ ebenfalls für alle complexen Werthe von x innerhalb eines die Strecke $a \ldots b$ enthaltenden Bereiches eindeutig definirt und stetig ist. Man hat dann

$$B_n = \frac{1}{2\omega}\int \frac{G(x)\,P(x,n)\,dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{\pi}{\omega}\sum_{\lambda}\left(\frac{\overset{\lambda}{G}(x,n)\,G(x)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\right)_{(x-c)^{-1}}.$$

Nimmt man in dieser Formel $G(x) = 1$ und $n = 0$, so erhält man noch

$$\frac{\omega}{\pi} = \sum_{\lambda}\left(\frac{\overset{\lambda}{G}(x,0)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\right)_{(x-c)^{-1}},$$

wobei zu bemerken, dass

$$\frac{1}{\sqrt{F_1(x)}} = \sum_{\lambda}\overset{\lambda}{G}(x,0)$$

ist.

Entwicklungen der Function $\frac{P(x,n)}{\sqrt{F_1(x)}}$ von der angegebenen Form existiren aber stets. Dies geht schon daraus hervor, dass ja

$$\frac{1}{2}\,\frac{z^n + z^{-n}}{\sqrt{F_1(x)}}$$

als Function von v betrachtet für alle complexen Werthe dieser Grösse, bei denen β zwischen $-\beta_0$ und β_0 liegt, durch eine Reihe

$$b_0 + 2b_1\cos v + 2b_2\cos 2v + \cdots$$

darstellbar, $\cos nv$ aber eine ganze rationale Function von x ist. Ebenso ist eine Entwicklung nach Kugel-Functionen mit dem Argument $\frac{2x-a-b}{b-a}$ möglich, die für alle Werthe von x innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten a, b convergirt. Wenn ferner $F_1(x)$ für alle Punkte im Inneren eines die Strecke $a \ldots b$ umschliessenden Kreises die vorausgesetzte Beschaffenheit hat, so lässt sich die in Rede stehende Function auch nach ganzen Potenzen von $x-c$ entwickeln, wo c den Mittelpunkt des Kreises bezeichnet, und dann erhält man vermittelst der vorstehenden Formeln die einfachste Bestimmung der Grösse C_n. Alle diese Reihen werden sich aber am einfachsten aus einer linearen Differentialgleichung, der

$$\frac{P(x,n)}{\sqrt{F_1(x)}}$$

genügt, herleiten lassen, zumal wenn, wie das oft vorkommt, $F(x)$ eine rationale Function von x ist.

Aus der Gleichung

$$z^n + z^{-n} = 2P(x, n)$$

erhält man nämlich, da

$$\frac{dz}{z} = \frac{\pi i}{\omega} d\psi(v) = \frac{\pi i}{\omega} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}$$

ist,

$$z^n - z^{-n} = \frac{2\omega}{n\pi i} \frac{dP(x, n)}{dx} \sqrt{F(x)},$$

$$z^n = P(x, n) + \frac{\omega}{n\pi i} \frac{dP(x, n)}{dx} \sqrt{F(x)},$$

$$z^{-n} = P(x, n) - \frac{\omega}{n\pi i} \frac{dP(x, n)}{dx} \sqrt{F(x)}.$$

Der Wurzelgrösse $\sqrt{F(x)}$ müssen hier ihre beiden Werthe beigelegt werden, indem z als Function von x zweiwerthig ist. Daraus folgt weiter, wenn man jetzt P_n, F, F', F'' statt $P(x, n)$, $F(x)$, $F'(x)$ $F''(x)$ schreibt,

$$F\left(\frac{dP_n}{dx}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 P_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2,$$

$$F\frac{d^2P_n}{dx^2} + \frac{1}{2}F'\frac{dP_n}{dx} + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 P_n = 0,$$

oder auch

$$\sqrt{F}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{F}\frac{dP_n}{dx}\right) + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 P_n = 0.$$

Da $\psi(v) = 0$ ist für $v = 0$, und $\psi(v) = \omega$ für $v = \pi$, so hat man

$$P(a, n) = 1, \qquad P(b, n) = (-1)^n,$$

so dass die beiden Constanten, welche die allgemeine Lösung der vorstehenden Differentialgleichung enthält, bestimmt werden können.

Man kann aber, statt die Functionen $P(x, n)$ und $\frac{1}{\sqrt{F(x)}}$ einzeln zu entwickeln, das Produkt derselben vermittelst einer ähnlichen Differentialgleichung direct bestimmen. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{P(x, n)}{\sqrt{F(x)}} \text{ mit } R(x, n) \text{ oder } R_n,$$

so hat man

$$\sqrt{F}\,\frac{dP_n}{dx} = F\frac{dR_n}{dx} + \frac{1}{2}F' R_n,$$

$$\frac{d}{dx}\left(F\frac{dR_n}{dx} + \frac{1}{2}F' R_n\right) + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 R_n = 0,$$

$$F\frac{d^2 R_n}{dx^2} + \frac{3}{2}F'\frac{dR_n}{dx} + \left(\frac{1}{2}F'' + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2\right)R_n = 0.$$

Wird ferner, $n > 0$ angenommen,

$$Q(x,n) = Q_n = -\left(\frac{\omega}{n\pi}\right)^2 \sqrt{F(x)}\,\frac{dP(x,n)}{dx}$$
$$= -\left(\frac{\omega}{n\pi}\right)^2 \left(F\frac{dR_n}{dx} + \frac{1}{2}F' R_n\right)$$

gesetzt, so erhält man aus der zweiten Gleichung für P_n

$$\sqrt{F}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{F}\,\frac{dQ_n}{dx}\right) + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 Q_n = 0,$$

oder

$$F\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + \frac{1}{2}F'\frac{dQ_n}{dx} + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 Q_n = 0,$$

also dieselbe Gleichung wie für P_n selbst. Da nun

$$\frac{dQ_n}{dx} = -\left(\frac{\omega}{n\pi}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\sqrt{F}\,\frac{dP_n}{dx}\right) = R_n$$

ist, so ergeben sich aus den Formeln

$$C_n = \frac{1}{2\omega}\int xR(x,n)\,dx, \qquad B_n = \frac{1}{2\omega}\int G(x)R(x,n)\,dx$$

durch partielle Integration noch die folgenden:

$$C_n = -\frac{1}{2\omega}\int Q(x,n)\,dx, \qquad B_n = -\frac{1}{2\omega}\int G'(x)Q(x,n)\,dx.$$

Nun hat man

$$R(x,n) = \frac{G(x,n)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

$$Q(x,n) = H(x,n)\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

zu setzen und für $G(x, n)$, $H(x, n)$ Entwicklungen von der Form

$$\overset{0}{G}(x, n) + \overset{1}{G}(x, n) + \overset{2}{G}(x, n) + \cdots,$$
$$\overset{0}{H}(x, n) + \overset{1}{H}(x, n) + \overset{2}{H}(x, n) + \cdots,$$

wo $\overset{0}{H}, \overset{1}{H}, \ldots$ ebenso wie $\overset{0}{G}, \overset{1}{G}, \ldots$ ganze Functionen von x bedeuten sollen, aus den vorstehenden Differentialgleichungen abzuleiten; worauf man dann ausser den schon vorhin angegebenen Ausdrücken von B_n, C_n, wenn $n > 0$ ist,

$$C_n = \frac{\pi}{\omega} \sum_\lambda \left(\overset{\lambda}{H}(x, n) \sqrt{(x-a)(x-b)}\right)_{(x-c)^{-1}},$$
$$B_n = \frac{\pi}{\omega} \sum_\lambda \left(G'(x) \overset{\lambda}{H}(x, n) \sqrt{(x-a)(x-b)}\right)_{(x-c)^{-1}}$$

erhält, in welchen Formeln für $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ die mit $x-c$ anfangende Entwicklung dieser Function nach fallenden Potenzen von $x-c$ zu setzen ist.

Hierbei ist noch zu bemerken, dass man zur Entwicklung der Functionen $G(x, n)$, $H(x, n)$, welche zur Abkürzung mit G_n, H_n bezeichnet werden sollen, auch die Gleichungen

$$(x-a)(x-b) \frac{dH_n}{dx} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) H_n + G_n = 0,$$
$$F_1(x) \frac{dG_n}{dx} + \frac{1}{2} F_1'(x) G_n + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 H_n = 0$$

anwenden kann, welche aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{dQ_n}{dx} - R_n = 0,$$
$$F \frac{dR_n}{dx} + \frac{1}{2} F' R_n + \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^2 Q_n = 0$$

sich ergeben; oder auch die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich aus ihnen für jede einzelne Function ableiten lassen. Zur Constanten-Bestimmung hat man dann

$$G(a, n) = \frac{1}{\sqrt{F_1(a)}}, \qquad G(b, n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{F_1(b)}}$$

und, wie aus der ersten Differentialgleichung selbst folgt,

$$H(a, n) = \frac{2}{(b-a)\sqrt{F_1(a)}}, \qquad H(b, n) = \frac{(-1)^n . 2}{(a-b)\sqrt{F_1(b)}}.$$

Alle diese Differentialgleichungen sind besonders brauchbar in dem schon erwähnten Falle, dass sich P_n, G_n, H_n nach ganzen positiven Potenzen von $x-c$ entwickeln lassen. Namentlich erhält man, wenn F eine rationale Function ist, und daher für die zu entwickelnde Reihe, z. B. für H_n, sich eine Differentialgleichung

$$L\frac{d^2H_n}{dx^2}+M\frac{dH_n}{dx}+NH_n = 0,$$

in der L, M, N ganze Functionen von x sind, finden lässt, zur Bestimmung ihrer Coefficienten Recursions-Formeln von möglichst einfacher Beschaffenheit. Es kann jedoch alsdann vortheilhaft sein, zunächst für $P(x, n)$ eine Entwicklung

$$\overset{0}{P}(x,n)+\overset{1}{P}(x,n)+\cdots,$$

in der $\overset{0}{P}$, $\overset{1}{P}$, ... ganze Functionen sind, herzustellen, so dass

$$\int\frac{G(x)\overset{\lambda}{P}(x,n)}{\sqrt{F(x)}}dx,$$

wenn auch $G(x)$ eine rationale Function ist, ein vollständiges Abel'sches Integral wird, zu dessen Bestimmung es besondere Methoden giebt.

Aus den obigen Formeln für z^n, z^{-n} geht noch hervor, dass

$$P(x,n)\pm\frac{\omega}{n\pi i}\,\frac{dP(x,n)}{dx}\sqrt{F(x)} = \left(P(x,1)\pm\frac{\omega}{\pi i}\,\frac{dP(x,1)}{dx}\sqrt{F(x)}\right)^n$$

ist. Man kann daher $P(x, n)$ aus $P(x, 1)$, $\frac{dP(x,1)}{dx}$, $F(x)$ zusammensetzen. In den meisten Fällen wird es aber einfacher sein, $P(x, n)$ vermittelst der obigen Differentialgleichung direct zu bestimmen, da man ja nur für die in der Entwicklung von $P(x, 1)$ vorkommende Grösse $\frac{\pi}{\omega}$ überall $\frac{n\pi}{\omega}$ zu setzen hat.

ZUR THEORIE DER BILINEAREN UND QUADRATISCHEN FORMEN.

(Aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften vom 18. Mai 1868 mit einigen Veränderungen abgedruckt.)

1.

Es seien zwei bilineare Formen derselben $2n$ Veränderlichen ($x_1, \ldots x_n$ und $y_1, \ldots y_n$) gegeben:

$$(1.) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \\ Q &= \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \end{aligned} \right.$$

wo α, β — wie überhaupt in dieser Abhandlung die ersten Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets — Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ bezeichnen.

Die Determinante der Form

$$pP + qQ,$$

wo p, q unbestimmte Grössen bedeuten, d. h. die Determinante des Systems

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} pA_{11} + qB_{11}, \; \ldots \; pA_{1n} + qB_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ pA_{n1} + qB_{n1}, \; \ldots \; pA_{nn} + qB_{nn}, \end{array} \right.$$

welche ich, um auf ihren Ursprung aus den Formen P, Q hinzuweisen, mit

$$[P, Q]$$

bezeichnen will, ist dann eine homogene ganze Function n^{ten} Grades von p, q, und kann — wenn man von dem singulären Falle, wo ihre Coefficienten sämmtlich gleich Null sind, absieht*) — als ein Product von n Factoren, die

---

*) Dieser Fall ist von mir nicht behandelt worden, weil ich wusste, dass derselbe zur Zeit, als ich die vorliegende Abhandlung schrieb, von Herrn Kronecker einer eingehenden Untersuchung unterworfen wurde. (Vergl. die betreffenden Abhandlungen des Herrn K. in den Monatsberichten der Akademie.)

3*

homogene lineare Functionen von p, q sind, und einer von diesen Veränderlichen unabhängigen Grösse dargestellt werden. Dabei möge, um diesen Ausdruck von $[P, Q]$ zu einem völlig bestimmten zu machen, ein Paar besonderer Werthe (g, h) von (p, q), für welche $[P, Q]$ nicht verschwindet, nach Willkür angenommen und festgesetzt werden, dass jeder einzelne der genannten n Factoren für $p = g$, $q = h$ den Werth Eins erhalten soll.

Dies vorausgesetzt, sei $ap+bq$ irgend einer dieser Factoren, und l der Exponent der höchsten in $[P, Q]$ aufgehenden Potenz desselben. Ferner bedeute $l^{(\varkappa)}$ den Exponenten der höchsten Potenz von $ap+bq$, durch welche alle aus den Elementen von $[P, Q]$ gebildeten partiellen Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung — homogene ganze Functionen $(n-\varkappa)^{\text{ten}}$ Grades vom p, q, die kurz Unter-Determinanten von $[P, Q]$ genannt werden mögen — theilbar sind.*)

Jede Determinante $(n-\varkappa+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems (2.) kann dargestellt werden als eine Summe, in welcher jedes einzelne Glied das Product aus einer Determinante $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung und einem Elemente von $[P, Q]$ ist. Ein gemeinschaftlicher Theiler aller Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung muss daher auch ein Theiler aller Determinanten der $(n-\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und somit überhaupt aller Determinanten von höherer als der $(n-\varkappa)^{\text{ten}}$ Ordnung sein. Daraus folgt, dass wenn von den Zahlen $l, l', \dots$ irgend eine gleich Null ist, alle folgenden es ebenfalls sind. Da ferner die Ableitungen einer Determinante $(n-\varkappa+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nach p und q sich darstellen lassen als Summen, in denen jedes Glied das Product aus einer Determinante $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung und einem Coefficienten von P und Q ist, so muss $l^{(\varkappa-1)} > l^{(\varkappa)}$ sein, wofern nicht $l^{(\varkappa)} = 0$ ist. Hiernach bestehen, wenn in der Reihe der Zahlen $l, l', \dots$ die letzte der von Null verschiedenen den Index $(r-1)$ hat, die Ungleichheiten

$$(3.) \qquad l > l' > \cdots > l^{(r-1)} > 0.$$

Setzt man daher

$$(4.) \qquad e = l - l', \quad e' = l' - l'', \quad \dots \quad e^{(r-1)} = l^{(r-1)},$$

*) Die Bezeichnung $l^{(\varkappa)}$ ist in dem Sinne zu verstehen, dass $l^{(0)} = l$, $l^{(1)} = l'$, $l^{(2)} = l''$, ...

so sind $e, e', \dots e^{(r-1)}$ positive Zahlen, und man hat

$$(5.)\qquad (ap+bq)^l = (ap+bq)^e (ap+bq)^{e'} \dots (ap+bq)^{e^{(r-1)}}.$$

Jeder einzelne der so definirten r Factoren von

$$(ap+bq)^l,$$

(also $(ap+bq)^l$ selbst, wenn $l'=0$ ist) möge ein Elementar-Theiler der Determinante von $pP+qQ$ heissen — ein Name, dessen Einführung die folgenden Untersuchungen rechtfertigen werden.

Hiernach ist, wenn

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \dots \quad (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho}$$

sämmtliche Elementar-Theiler von $[P, Q]$ sind,

$$(6.)\qquad [P, Q] = C(a_1 p + b_1 q)^{e_1} (a_2 p + b_2 q)^{e_2} \dots (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho},$$

wo C den Werth von $[P, Q]$ für $p = g$, $q = h$ bezeichnet. Die wesentliche Bedeutung aber, welche gerade diese Zerfällung von $[P, Q]$ in Factoren für das Formenpaar (P, Q) hat, erhellt aus folgendem Satze:

Es werde durch die Substitutionen

$$(7.)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, \quad \dots \quad x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma \\ y_1 = \sum_\gamma k_{1\gamma} v_\gamma, \quad \dots \quad y_n = \sum_\gamma k_{n\gamma} v_\gamma, \end{array} \right.$$

wo $u_1, \dots u_n$ und $v_1, \dots v_n$ neue Veränderliche bedeuten, $h_{11}, \dots h_{nn}$, $k_{11}, \dots k_{nn}$ aber Constanten, welche keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass die Determinanten

$$(8.)\qquad H = \begin{vmatrix} h_{11}, & \dots & h_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ h_{n1}, & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}, \qquad K = \begin{vmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ k_{n1}, & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sein dürfen, die Form

$P(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n)$ in eine andere $P'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n)$,

und zugleich

$Q(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n)$ in $Q'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n)$

verwandelt; so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$$pP+qQ, \qquad pP'+qQ'$$

in ihren Elementar-Theilern überein.

Und umgekehrt, wenn zwei Formen-Paare

$$P(x_1, \dots x_n \mid y_1, \dots y_n), \qquad Q(x_1, \dots x_n \mid y_1, \dots y_n)$$

und

$$P'(u_1, \dots u_n \mid v_1, \dots v_n), \qquad Q'(u_1, \dots u_n \mid v_1, \dots v_n)$$

gegeben sind, und es stimmen die beiden Determinanten

$$[P, Q], \qquad [P', Q']$$

in ihren Elementar-Theilern überein; so können auch stets die Coefficienten $(h_{11}, \dots h_{nn})$ und $(k_{11}, \dots k_{nn})$ so bestimmt werden, dass durch die unter (7.) angegebenen Substitutionen P in P' und zugleich Q in Q' übergeht.

2.

Der erste Theil des vorstehenden Satzes lässt sich sehr einfach beweisen. Es sei

$$\text{(9.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} P' &= \sum_{\alpha\beta} A'_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta \\ Q' &= \sum_{\alpha\beta} B'_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta, \end{aligned} \right.$$

so entsteht das System der Elemente von $[P', Q']$

$$\begin{matrix} pA'_{11}+qB'_{11}, & \dots & pA'_{1n}+qB'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ pA'_{n1}+qB'_{n1}, & \dots & pA'_{nn}+qB'_{nn} \end{matrix}$$

durch Zusammensetzung der drei folgenden:

$$\text{(10.)} \qquad \left\{ \begin{matrix} h_{11}, & \dots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1}, & \dots & h_{nn}, \end{matrix} \right.$$

$$\text{(11.)} \qquad \left\{ \begin{matrix} pA_{11}+qB_{11}, & \dots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ pA_{n1}+qB_{n1}, & \dots & pA_{nn}+qB_{nn}, \end{matrix} \right.$$

$$\text{(12.)} \qquad \left\{ \begin{matrix} k_{11}, & \dots & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1}, & \dots & k_{nn}. \end{matrix} \right.$$

Demzufolge ist

$$(13.)\qquad [P', Q'] = HK[P, Q],$$

jeder Theiler der einen Determinante also auch ein Theiler der anderen. Ferner lässt sich jede Unter-Determinante $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[P', Q']$ als ein Aggregat von Producten dreier Factoren, die Unter-Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von H, K und $[P, Q]$ sind, darstellen. Jeder gemeinsame Theiler aller Unter-Determinanten einer bestimmten Ordnung von $[P, Q]$ ist also auch ein Theiler aller Unter-Determinanten derselben Ordnung von $[P', Q']$. Nun geht aber auch P' in P, und zugleich Q' in Q über, wenn man für $u_1, \dots u_n$ und $v_1, \dots v_n$ die aus den Gleichungen (7.) sich ergebenden linearen Functionen von $x_1, \dots x_n$ und $y_1, \dots y_n$ setzt; es muss daher jeder gemeinsame Theiler aller Unter-Determinanten einer bestimmten Ordnung von $[P', Q']$ auch ein Theiler aller Unter-Determinanten derselben Ordnung von $[P, Q]$ sein.

Hiernach ist, wenn die vorhin gebrauchten Bezeichnungen beibehalten werden,

$$(ap+bq)^{l}$$

auch die höchste in $[P', Q']$ enthaltene Potenz von $ap+bq$, und

$$(ap+bq)^{l^{(\varkappa)}}$$

die höchste in allen Unter-Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[P', Q']$ enthaltene. Die als Elementar-Theiler von $[P, Q]$ definirten r Factoren von $(ap+bq)^{l}$:

$$(14.)\qquad (ap+bq)^{l-l'},\quad (ap+bq)^{l'-l''},\quad \dots\quad (ap+bq)^{l^{(r-1)}}$$

sind also auch die zu demselben Theiler $(ap+bq)^{l}$ gehörigen Elementar-Theiler von $[P', Q']$; w. z. b. w.

Der Beweis für den zweiten Theil des aufgestellten Satzes beruht darauf, dass ein Formenpaar P, Q durch eine bestimmte lineare Transformation in ein anderes verwandelt werden kann, dessen Coefficienten gegeben sind, wenn man die einzelnen Elementar-Theiler der Determinante $[P, Q]$ kennt.

3.

Man setze, unter s eine unbeschränkt veränderliche Grösse verstehend und unter g', h' Constanten, die mit g, h durch die Relation

$$gh'-hg' = 1 \tag{15.}$$

verbunden sind,

$$p = gs-g', \qquad q = hs-h', \tag{16.}$$

$$\Phi = gP+hQ, \qquad \Psi = g'P+h'Q, \tag{17.}$$

$$a_{\alpha\beta} = gA_{\alpha\beta}+hB_{\alpha\beta}, \qquad b_{\alpha\beta} = g'A_{\alpha\beta}+h'B_{\alpha\beta}, \tag{18.}$$

$$S = [P, Q] = \begin{vmatrix} sa_{11}-b_{11}, & \dots & sa_{1n}-b_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ sa_{n1}-b_{n1}, & \dots & sa_{nn}-b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{19.}$$

Dann folgt aus den Gleichungen

$$p\frac{\partial P}{\partial x_\alpha}+q\frac{\partial Q}{\partial x_\alpha} = s\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta (sa_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})\,y_\beta \tag{20.}$$

$$p\frac{\partial P}{\partial y_\beta}+q\frac{\partial Q}{\partial y_\beta} = s\frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}-\frac{\partial \Psi}{\partial y_\beta} = \sum_\alpha (sa_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})\,x_\alpha, \tag{21.}$$

wenn man mit

$$(-1)^{\alpha+\beta} S_{\alpha\beta}$$

diejenige Unter-Determinante bezeichnet, deren Elementen-System aus dem von S durch Weglassung der α^{ten} Horizontal- und der β^{ten} Verticalreihe entsteht,

$$\left\{\begin{aligned}
y_\beta &= \sum_\alpha \frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}\right)\\
x_\alpha &= \sum_\beta \frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s\frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}-\frac{\partial \Psi}{\partial y_\beta}\right)\\
\Phi &= \sum_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}y_\beta = \sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}-\frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}\right)\\
\Psi &= \sum_\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}x_\alpha = \sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s\frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial y_\beta}\right)\\
s\Phi+\Psi &= \sum_{\alpha\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{S}\left(s^2\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta}-\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial y_\beta}\right).
\end{aligned}\right. \tag{22.}$$

Nun ist S eine ganze Function n^{ten} Grades von s (indem in ihr der Coefficient von s^n gleich der Determinante von $gP+hQ$ ist), $S_{\alpha\beta}$ aber eine von nicht höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Setzt man daher, unter

$$\xi_1, \ldots \xi_n, \qquad \eta_1, \ldots \eta_n$$

$2n$ neue Veränderliche verstehend,

$$F(\xi_1, \ldots \xi_n \,|\, \eta_1, \ldots \eta_n) = \sum_{\alpha\beta} \frac{S_{\alpha\beta}}{S} \eta_\alpha \xi_\beta, \tag{23.}$$

so kann man für alle Werthe von s, die dem absoluten Betrage nach grösser sind als jede Wurzel der Gleichung $S = 0$, F nach fallenden Potenzen von s entwickeln, in der Form

$$F = s^{-1} F_1(\xi_1, \ldots \xi_n \,|\, \eta_1, \ldots \eta_n) + s^{-2} F_2(\xi_1, \ldots \xi_n \,|\, \eta_1, \ldots \eta_n) + \cdots, \tag{24.}$$

und erhält dann aus der letzten der unter (22.) aufgestellten Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= gP + hQ = F_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial y_n} \,\middle|\, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right) \\ \Psi &= g'P + h'Q = F_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial y_n} \,\middle|\, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right). \end{aligned}\right. \tag{25.}$$

Jetzt werde mit

$$S^{(\varkappa)}$$

diejenige Determinante $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet, deren Elementen-System aus dem von S durch gleichzeitige Weglassung der $\varkappa$ ersten Horizontal- und Vertical-Reihen erhalten wird. Ferner bedeute

$$(-1)^{\alpha+\beta} S_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}$$

unter der Voraussetzung, dass α, β beide grösser als $\varkappa$ sind, die Determinante $(n-\varkappa-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Elementen-System aus dem von $S^{(\varkappa)}$ durch Weglassung der $(\alpha-\varkappa)^{\text{ten}}$ Horizontal- und der $(\beta-\varkappa)^{\text{ten}}$ Vertical-Reihe hervorgeht — werde aber gleich Null angenommen, wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta \leqq \varkappa$ ist. Dann ist

$$S_{\varkappa\varkappa}^{(\varkappa-1)} = S^{(\varkappa)}, \tag{26.}$$

und es bestehen die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} S_{11} S_{\alpha\beta} - S_{\alpha 1} S_{1\beta} &= S S'_{\alpha\beta} \\ S'_{22} S'_{\alpha\beta} - S'_{\alpha 2} S'_{2\beta} &= S' S''_{\alpha\beta} \\ S''_{33} S''_{\alpha\beta} - S''_{\alpha 3} S''_{3\beta} &= S'' S'''_{\alpha\beta} \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right. \tag{27.}$$

Aus denselben erhält man

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{S_{\alpha\beta}}{S} = \dfrac{S_{\alpha 1} S_{1\beta}}{SS'} + \dfrac{S'_{\alpha\beta}}{S'} \\ \dfrac{S'_{\alpha\beta}}{S'} = \dfrac{S'_{\alpha 2} S'_{2\beta}}{S'S''} + \dfrac{S''_{\alpha\beta}}{S''} \\ \dfrac{S''_{\alpha\beta}}{S''} = \dfrac{S''_{\alpha 3} S''_{3\beta}}{S''S'''} + \dfrac{S'''_{\alpha\beta}}{S'''} \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

und es ist daher

$$(29.)\quad \frac{S_{\alpha\beta}}{S} = \frac{S_{\alpha 1} S_{1\beta}}{SS'} + \frac{S'_{\alpha 2} S'_{2\beta}}{S'S''} + \frac{S''_{\alpha 3} S''_{3\beta}}{S''S'''} + \cdots.$$

Der Ausdruck auf der Rechten besteht aus n Gliedern, deren Gesetz deutlich ist. Multiplicirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $\eta_\alpha \xi_\beta$ und summirt dann in Beziehung auf α, β, so ergiebt sich

$$(30.)\quad F(\xi_1, \ldots \xi_n \,|\, \eta_1, \ldots \eta_n) = \frac{XY}{SS'} + \frac{X'Y'}{S'S''} + \frac{X''Y''}{S''S'''} + \cdots,$$

wo

$$(31.)\quad \begin{cases} X \;= S_{11}\xi_1 + S_{12}\xi_2 + S_{13}\xi_3 + \cdots + S_{1n}\xi_n \\ X' = \qquad\qquad S'_{22}\xi_2 + S'_{23}\xi_3 + \cdots + S'_{2n}\xi_n \\ X'' = \qquad\qquad\qquad\qquad S''_{33}\xi_3 + \cdots + S''_{3n}\xi_n \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ Y \;= S_{11}\eta_1 + S_{21}\eta_2 + S_{31}\eta_3 + \cdots + S_{n1}\eta_n \\ Y' = \qquad\qquad S'_{22}\eta_2 + S'_{32}\eta_3 + \cdots + S'_{n2}\eta_n \\ Y'' = \qquad\qquad\qquad\qquad S''_{33}\eta_3 + \cdots + S''_{n3}\eta_n \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.}. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck von F ist nun, als Function von s betrachtet, in Partial-Brüche zu zerlegen.

Es sei wieder $ap+bq$ irgend ein linearer Theiler von $[P, Q]$, und c der Werth von s, für welchen er verschwindet. Da S aus $[P, Q]$, und ebenso jede Unter-Determinante von S aus der entsprechenden von $[P, Q]$, durch die Substitutionen $p = gs-g'$, $q = hs-h'$ hervorgeht, so sind die Functionen

$$S,\ S',\ S'',\ \ldots$$

beziehlich durch

$$(s-c)^{l},\quad (s-c)^{l'},\quad (s-c)^{l''},\quad \ldots$$

theilbar, wenn $l, l', l'', \ldots$ die oben festgesetzte Bedeutung haben. Ich will nun zunächst annehmen, dass in keiner dieser Functionen eine höhere Potenz von $s-c$ als die angegebene als Factor enthalten sei.

Dies vorausgesetzt, seien

$$(s-c_1)^{e_1},\quad (s-c_2)^{e_2},\quad \ldots\quad (s-c_\varrho)^{e_\varrho}$$

die Functionen von s, in welche sich die Elementar-Theiler von $[P, Q]$

$$(a_1p+b_1q)^{e_1},\quad (a_2p+b_2q)^{e_2},\quad \ldots\quad (a_\varrho p+b_\varrho q)^{e_\varrho}$$

durch die angegebenen Substitutionen verwandeln. Man entwickle, unter λ irgend eine der Zahlen $1, \ldots \varrho$ verstehend, wenn e_λ in der Reihe der zu dem Theiler $a_\lambda p+b_\lambda q$ gehörigen Zahlen e die $\varkappa^{\text{te}}$ ist,

$$S^{(\varkappa-1)},\quad S^{(\varkappa)},\quad X^{(\varkappa-1)},\quad Y^{(\varkappa-1)}$$

nach steigenden Potenzen von $s-c_\lambda$. Dann ist der Grad des Anfangsgliedes in der ersten dieser Entwicklungen um e_λ Einheiten grösser als in jeder der drei anderen. Man erhält also für hinlänglich kleine Werthe von $s-c_\lambda$

$$(32.)\quad \begin{cases} \dfrac{X^{(\varkappa-1)}}{\sqrt{S^{(\varkappa-1)}S^{(\varkappa)}}} = (s-c_\lambda)^{-\frac{1}{2}e_\lambda}\sum X_{\lambda\mu}(s-c_\lambda)^\mu \\ \qquad\qquad (\mu = 0, 1, \ldots \infty) \\ \dfrac{Y^{(\varkappa-1)}}{\sqrt{S^{(\varkappa-1)}S^{(\varkappa)}}} = (s-c_\lambda)^{-\frac{1}{2}e_\lambda}\sum Y_{\lambda\nu}(s-c_\lambda)^\nu \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 1, \ldots \infty) \end{cases}$$

$$(33.)\quad \frac{X^{(\varkappa-1)}Y^{(\varkappa-1)}}{S^{(\varkappa-1)}S^{(\varkappa)}} = \sum_{\mu\nu} X_{\lambda\mu}Y_{\lambda\nu}(s-c_\lambda)^{\mu+\nu-e_\lambda}$$

$$(34.)\quad \begin{cases} X_{\lambda\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{C_\lambda}}(C_{\varkappa\lambda\mu}\xi_\varkappa+\cdots+C_{n\lambda\mu}\xi_n) \\ Y_{\lambda\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{C_\lambda}}(C'_{\varkappa\lambda\nu}\eta_\varkappa+\cdots+C'_{n\lambda\nu}\eta_n), \end{cases}$$

wo C_λ und sämmtliche Coefficienten der Grössen ξ, η ganze Functionen von c_λ, den Coefficienten der Formen P, Q und den Grössen g, h, g', h' sind.

Ist nun c irgend eine der Grössen $c_1, \ldots c_\varrho$, und kommt dieselbe in dieser Reihe $r$mal vor, so werden in dem Ausdrucke (30.) von F nur die r ersten Glieder unendlich gross für $s = c$; es stimmt daher die Reihe

$$\sum_\lambda \sum_{\mu\nu} X_{\lambda\mu}Y_{\lambda\nu}(s-c_\lambda)^{\mu+\nu-e_\lambda},$$

wenn man die Summation nur auf diejenigen Werthe von λ ausdehnt, für welche $c_\lambda = c$ ist, mit der Entwicklung von F nach Potenzen von $s-c$ in allen Gliedern, die für $s = c$ unendlich gross werden, überein. Daraus folgt sofort, wenn man zugleich beachtet, dass $F = 0$ für $s = \infty$ wird,

$$(35.)\qquad F(\xi_1, \dots \xi_n \,|\, \eta_1, \dots \eta_n) = \sum_\lambda \sum_{(\mu+\nu<e_\lambda)} [X_{\lambda\mu} Y_{\lambda\nu} (s-c_\lambda)^{\mu+\nu-e_\lambda}].$$

Zur Abkürzung werde, wenn e eine beliebige ganze Zahl ist,

$$(36.)\qquad \sum_{(\mu+\nu=e-1)} X_{\lambda\mu} Y_{\lambda\nu} \quad \text{mit} \quad (X_\lambda Y_\lambda)_e$$

bezeichnet. Dann ist

$$(37.)\qquad F(\xi_1, \dots \xi_n \,|\, \eta_1, \dots \eta_n) = \sum_\lambda \left[\frac{(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda}}{s-c_\lambda} + \frac{(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda-1}}{(s-c_\lambda)^2} + \cdots\right].$$

Den Formeln (25.) zufolge ergiebt sich hieraus

$$(38.)\qquad \begin{cases} \Phi = gP + hQ = \sum_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} \\ \Psi = g'P + h'Q = \sum_\lambda c_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} + \sum_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda-1}, \end{cases}$$

wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken der Grössen $X_{\lambda\mu}$, $Y_{\lambda\nu}$

$$(39.)\qquad \begin{cases} \xi_\beta = g\dfrac{\partial P}{\partial y_\beta} + h\dfrac{\partial Q}{\partial y_\beta} = \sum_\alpha (gA_{\alpha\beta} + hB_{\alpha\beta})\, x_\alpha \\ \eta_\alpha = g\dfrac{\partial P}{\partial x_\alpha} + h\dfrac{\partial Q}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta (gA_{\alpha\beta} + hB_{\alpha\beta})\, y_\beta \end{cases}$$

setzt, so dass

$$(40.)\qquad \begin{cases} X_{\lambda\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{C_\lambda}} \sum_\beta \left(C_{\beta\lambda\mu}\left(g\dfrac{\partial P}{\partial y_\beta} + h\dfrac{\partial Q}{\partial y_\beta}\right)\right) \\ Y_{\lambda\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{C_\lambda}} \sum_\alpha \left(C'_{\alpha\lambda\nu}\left(g\dfrac{\partial P}{\partial x_\alpha} + h\dfrac{\partial Q}{\partial x_\alpha}\right)\right) \end{cases}$$

wird.

Da man nun

$$c_\lambda = g'a_\lambda + h'b_\lambda, \qquad 1 = ga_\lambda + hb_\lambda,$$

also

$$(41.)\qquad a_\lambda = h' - hc_\lambda, \qquad b_\lambda = -g' + gc_\lambda$$

hat, so ergeben sich aus den Gleichungen (38.) die folgenden Darstellungen von P, Q:

$$(42.)\qquad \begin{cases} P = \sum_\lambda [a_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} - h (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda-1}] \\ Q = \sum_\lambda [b_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} + g (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda-1}]. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist

$$(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda - 1} = 0$$

zu setzen, wenn $e_\lambda = 1$.

Den Grössen g, h, g', h' giebt man am einfachsten ganzzahlige Werthe. Wenn z. B. die Determinante von P nicht gleich Null ist, so kann man

$$g = 1, \quad h = 0, \qquad g' = 0, \quad h' = 1$$

nehmen, sowie, wenn die Determinante von Q nicht verschwindet,

$$g = 0, \quad h = -1, \quad g' = 1, \quad h' = 0.$$

Aus Gleichung (38.) ergiebt sich, wenn (für jeden bestimmten Werth von λ) unter μ, ν Zahlen aus der Reihe $0, \dots e_\lambda - 1$, deren Summe gleich $e_\lambda - 1$ ist, verstanden werden,

$$\frac{\partial (gP + hQ)}{\partial Y_{\lambda\nu}} = X_{\lambda\mu}, \tag{43.}$$

$$\frac{\partial (gP + hQ)}{\partial X_{\lambda\mu}} = Y_{\lambda\nu}. \tag{44.}$$

Hiernach hat $gP + hQ$, als bilineare Form der Grössen $X_{\lambda\mu}, Y_{\lambda\nu}$ betrachtet, die Determinante ± 1, und somit ist $\pm [P, Q]$ gleich dem Producte aus der Determinante der n Functionen $X_{\lambda\mu}$ in Beziehung auf die Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ und der Determinante der n Functionen $Y_{\lambda\nu}$ in Beziehung auf $y_1, \dots y_n$; keine dieser beiden Determinanten ist also gleich Null. Man kann also die Grössen $x_1, \dots x_n$ durch die $X_{\lambda\mu}$, und die Grössen $y_1, \dots y_n$ durch die $Y_{\lambda\nu}$ ausdrücken in der Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} x_\alpha &= \sum_\lambda \sum_{(\mu = 0, \dots e_\lambda - 1)} (\alpha, \lambda, \mu) X_{\lambda\mu} \\ y_\beta &= \sum_\lambda \sum_{(\nu = 0, \dots e_\lambda - 1)} (\beta, \lambda, \nu)' Y_{\lambda\nu}. \end{aligned}\right. \tag{45.}$$

Es ist aber

$$X_{\lambda\mu} = \frac{\partial (gP + hQ)}{\partial Y_{\lambda\nu}} = \sum_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial Y_{\lambda\nu}} \frac{\partial (gP + hQ)}{\partial y_\beta}, \tag{46.}$$

$$Y_{\lambda\nu} = \frac{\partial (gP + hQ)}{\partial X_{\lambda\mu}} = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_{\lambda\mu}} \frac{\partial (gP + hQ)}{\partial x_\alpha}, \tag{47.}$$

also

$$\left\{\begin{aligned} X_{\lambda\mu} &= \sum_\beta (\beta, \lambda, \nu)' \frac{\partial (gP + hQ)}{\partial y_\beta} \\ Y_{\lambda\nu} &= \sum_\alpha (\alpha, \lambda, \mu) \frac{\partial (gP + hQ)}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{48.}$$

Die in den Formeln (45.) vorkommenden Constanten sind also durch die Gleichungen (34.) bestimmt.

Wenn die bei den vorstehenden Entwicklungen gemachte Voraussetzung, es seien P, Q so beschaffen, dass die höchste Potenz eines jeden linearen Factors der Determinante S, durch welche diese und alle ihre Unter-Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung theilbar sind, zugleich die höchste in $S^{(\varkappa)}$ enthaltene ist, nicht zutrifft, so kann man, wie ich sogleich zeigen werde, die Formen P, Q durch eine simultane lineare Transformation stets in andere

$$\overline{P}(x'_1, \dots x'_n \mid y'_1, \dots y'_n), \qquad \overline{Q}(x'_1, \dots x'_n \mid y'_1, \dots y'_n)$$

verwandeln, welche die angegebene Beschaffenheit besitzen, und zwar so, dass die Grössen x'_α lineare Functionen der x_α mit ganzzahligen Coefficienten, und die y'_β ebensolche Functionen der y_β sind. Da nun die Determinanten $[P, Q]$, $[\overline{P}, \overline{Q}]$ in ihren Elementar-Theilern übereinstimmen, so kann man $\overline{P}$, $\overline{Q}$ so darstellen, wie unter (42.) angegeben ist. Drückt man darauf die x'_α, y'_β durch die x_α, y_β aus, so gehen $\overline{P}$, $\overline{Q}$ in P, Q über, die $X_{\lambda\mu}$, $Y_{\lambda\nu}$ werden homogene lineare Functionen der Grössen

$$\frac{\partial(gP+hQ)}{\partial y_\beta}, \qquad \frac{\partial(gP+hQ)}{\partial x_\alpha},$$

und es bleibt auch bestehen, was über die algebraische Zusammensetzung der Coefficienten dieser Ausdrücke gesagt worden ist. Die Umgestaltung von P, Q in die unter (42.) angegebenen Formen ist also stets ausführbar. Da ferner die Gleichungen (43.), (44.) aus der Gleichung (38.) sich ergeben, so gilt auch allgemein, dass von den beiden Gleichungs-Systemen (45.), (48.) jedes eine Folge des anderen ist.

In dem besonderen Falle, wo unter den Coefficienten von P, Q, P', Q' die Relationen

$$(48^{a}.) \qquad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \qquad A'_{\alpha\beta} = A'_{\beta\alpha}, \qquad B'_{\alpha\beta} = B'_{\beta\alpha}$$

bestehen, kann jene simultane lineare Transformation stets so gewählt werden, dass die Grössen x'_α mit den x_α durch dieselbe Substitution zusammenhängen, wie die y'_β mit den y_β.

4.

Der von mir bei der ersten Veröffentlichung dieser Abhandlung gegebene Beweis des am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Hülfssatzes kann, abgesehen davon, dass er in Folge eines Versehens beim Abdruck unvollständig ausgefallen ist, erheblich vereinfacht werden, wie dies namentlich Herr Frobenius gezeigt hat. Um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, halte ich es unter diesen Umständen für hinreichend, zur Rechtfertigung der ausgesprochenen Behauptung auf die im Sitzungsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften vom 18. Januar 1894 mitgetheilte Arbeit des Herrn Frobenius zu verweisen.

5.

Angenommen nun, es sei ausser dem Formenpaare

$$P(x_1, \dots x_n \,|\, y_1, \dots y_n), \qquad Q(x_1, \dots x_n \,|\, y_1, \dots y_n)$$

noch ein zweites

$$P'(u_1, \dots u_n \,|\, v_1, \dots v_n), \qquad Q'(u_1, \dots u_n \,|\, v_1, \dots v_n)$$

gegeben, und es habe die Determinante von

$$pP' + qQ'$$

dieselben Elementar-Theiler wie die Determinante von

$$pP + qQ;$$

dann lassen sich n homogene lineare Functionen

$$\begin{matrix} U_{10}, & \dots & U_{1(e_1-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{\varrho 0}, & \dots & U_{\varrho(e_\varrho-1)} \end{matrix}$$

der Grössen $u_1, \dots u_n$ und n andere

$$\begin{matrix} V_{10}, & \dots & V_{1(e_1-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{\varrho 0}, & \dots & V_{\varrho(e_\varrho-1)} \end{matrix}$$

der Grössen $v_1, \dots v_n$ dergestalt bestimmen, dass

$$P' = \sum_\lambda [a_\lambda (U_\lambda V_\lambda)_{e_\lambda} - h(U_\lambda V_\lambda)_{e_\lambda - 1}],$$
$$Q' = \sum_\lambda [b_\lambda (U_\lambda V_\lambda)_{e_\lambda} + g(U_\lambda V_\lambda)_{e_\lambda - 1}]$$

wird. Wenn man daher in den obigen Ausdrücken (45.) der Grössen x, y durch die X, Y folgende Substitutionen macht:

$$(49.)\quad \begin{cases} X_{1\mu} = U_{1\mu}, & Y_{1\mu} = V_{1\mu}, & (\mu = 0, \dots e_1 - 1) \\ X_{2\mu} = U_{2\mu}, & Y_{2\mu} = V_{2\mu}, & (\mu = 0, \dots e_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{\varrho\mu} = U_{\varrho\mu}, & Y_{\varrho\mu} = V_{\varrho\mu}, & (\mu = 0, \dots e_\varrho - 1), \end{cases}$$

so verwandeln sich $x_1, \dots x_n$ in homogene lineare Functionen von $u_1, \dots u_n$, $y_1, \dots y_n$ in ebensolche Functionen von $v_1, \dots v_n$, und zugleich

$$P(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n) \text{ in } P'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n),$$
$$Q(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n) \text{ in } Q'(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n).$$

Hiermit ist der in § 1 aufgestellte Satz vollständig bewiesen: damit es möglich sei, durch Substitutionen von der Gestalt

$$(50.)\quad \begin{cases} x_1 = \sum_\beta h_{1\beta} u_\beta, & \dots & x_n = \sum_\beta h_{n\beta} u_\beta \\ y_1 = \sum_\beta k_{1\beta} v_\beta, & \dots & y_n = \sum_\beta k_{n\beta} v_\beta \end{cases}$$

zwei gegebene bilineare Formen P, Q der Veränderlichen $(x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n)$ gleichzeitig in zwei andere P', Q' der Veränderlichen $(u_1, \dots u_n | v_1, \dots v_n)$ zu verwandeln, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten der Formen

$$pP + qQ, \qquad pP' + qQ'$$

in ihren Elementar-Theilern übereinstimmen.

In dem besonderen Falle, wo unter den Coefficienten von P, Q, P', Q' die unter (48ª.) angegebenen Relationen bestehen, ist $Y_{\lambda\mu}$ dieselbe Function von $y_1, \dots y_n$ wie $X_{\lambda\mu}$ von $x_1, \dots x_n$; und ebenso $V_{\lambda\mu}$ dieselbe Function von $v_1, \dots v_n$ wie $U_{\lambda\mu}$ von $u_1, \dots u_n$. Dies erhellt aus den Formeln (31.) bis (39.) und aus den am Schlusse von § 3 in Betreff der etwa erforderlichen vorläufigen Umgestaltung von P, Q gemachten Bemerkungen. Die Substitutionen, durch welche P, Q in P', Q' übergehen, erhalten demnach in diesem Falle die Gestalt

$$x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, \quad \dots \quad x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma$$
$$y_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} v_\gamma, \quad \dots \quad y_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} v_\gamma.$$

Um das vorstehende Theorem, durch welches eine der Hauptfragen in der Theorie der bilinearen Formen erledigt wird, anwenden zu können, braucht man jedoch die Zerlegung der beiden Determinanten in ihre Elementar-Theiler nicht wirklich auszuführen. Es genügt vielmehr, für die Form $pP+qQ = s\Phi-\Psi$ die im vorhergehenden § definirten Functionen

$$R(s),\quad R'(s)\quad \text{u. s. w.}$$

und für die Form $pP'+qQ' = s\Phi'-\Psi'$ die entsprechenden

$$\overline{R}(s),\quad \overline{R}'(s)\quad \text{u. s. w.}$$

zu bestimmen. Jedem linearen Theiler $(ap+bq)$ von $[P, Q]$ entspricht dann ein Theiler $(s-c)$ von $R(s)$, und wenn für den ersteren $l, l', l'', \dots$ die oben definirten Zahlen sind, so ist $l^{(\nu)}$ auch der Exponent der höchsten in $R^{(\nu)}(s)$ enthaltenen Potenz von $(s-c)$. Da nun, wie bereits früher bemerkt, jeder Theiler von $R^{(\nu)}(s)$ auch einer von $R(s)$, und der Coefficient von $R^{(\nu)}(s)$ gleich Eins ist, so ist es nothwendig und hinreichend, dass — für jeden Werth von s — die Gleichungen

$$(51.)\qquad R(s) = \overline{R}(s),\quad R'(s) = \overline{R}'(s),\quad \text{u. s. w.}$$

bestehen, wenn die Determinanten $[P, Q]$, $[P', Q']$ in ihren Elementar-Theilern übereinstimmen sollen.

6.

Die in § 3 (Gleichung (42.)) erhaltenen Ausdrücke

$$(52.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{\lambda}[a_\lambda(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} - h(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda-1}], \\ \sum\limits_{\lambda}[b_\lambda(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} + g(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda-1}], \end{array}\right.$$

welche sich in P, Q verwandeln, wenn man für

$$\begin{array}{llll} X_{10}, \dots X_{1(e_1-1)}, & \dots & X_{\varrho 0}, \dots X_{\varrho(e_\varrho-1)} \\ Y_{10}, \dots Y_{1(e_1-1)}, & \dots & Y_{\varrho 0}, \dots Y_{\varrho(e_\varrho-1)} \end{array}$$

die a. a. O. (Gleichung (48.)) angegebenen Functionen von $x_1, \dots x_n$ und $y_1, \dots y_n$ substituirt, haben das Eigenthümliche, dass sie als bilineare Formen der Grössen X, Y betrachtet, völlig bestimmt sind, sobald man die Elementar-

Theiler von $[P, Q]$ kennt und die Constanten g, h passend gewählt hat. Es entsteht nun die Frage, ob auch umgekehrt aus diesen Formen, wenn man in ihnen die Zahlen $e_1, \dots e_\varrho$ und die Constanten $a_1, b_1, \dots a_\varrho, b_\varrho, g, h$ den Bedingungen

$$(53.)\quad \begin{cases} e_1 + \cdots + e_\varrho = n \\ ga_1 + hb_1 = 1, \quad \dots \quad ga_\varrho + hb_\varrho = 1 \end{cases}$$

gemäss, im Übrigen aber nach Willkür annimmt und dann für die X beliebige, jedoch von einander unabhängige homogene lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ und für die Y ebensolche Functionen von $y_1, \dots y_n$ substituirt, stets ein Formenpaar P, Q hervorgeht, für welches die Determinante $[P, Q]$ die Elementar-Theiler

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \dots \quad (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho}$$

hat.

Es mögen die in Rede stehenden Ausdrücke, als Functionen der Grössen X, Y angesehen, mit $\overline{P}, \overline{Q}$ bezeichnet werden; dann braucht nur untersucht zu werden, ob die Determinante

$$[\overline{P}, \overline{Q}]$$

die angegebenen Elementar-Theiler besitzt.

Man setze

$$(54.)\quad \begin{cases} P_\lambda = a_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} - h(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda - 1} \\ Q_\lambda = b_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} + g(X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda - 1}, \end{cases}$$

so ist, wenn

$$a_\lambda p + b_\lambda q = u, \qquad gq - hp = v$$

gesetzt wird,

$$(55.)\qquad [P_\lambda, Q_\lambda] = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dots & 0, & v, & u \\ 0, & 0, & \dots & v, & u, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v, & u, & \dots & 0, & 0, & 0 \\ u, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = \pm u^{e_\lambda}.$$

Ferner ist diejenige Unter-Determinante von $[P_\lambda, Q_\lambda]$, deren Elementen-System man aus dem vorstehenden durch Weglassung der letzten Horizontal- und der letzten Verticalreihe erhält, gleich $\pm v^{e_\lambda - 1}$, also nicht durch $a_\lambda p + b_\lambda q$ theilbar. Folglich hat die Determinante $[P_\lambda, Q_\lambda]$ nur den einen Elementar-Theiler

$$(a_\lambda p + b_\lambda q)^{e_\lambda}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst:

$$(56.)\qquad [\overline{P}, \overline{Q}] = \prod_\lambda [P_\lambda, Q_\lambda] = \prod_\lambda (a_\lambda p + b_\lambda q)^{e_\lambda}.$$

Ferner verschwinden von den Unter-Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[\overline{P}, \overline{Q}]$ nur diejenigen nicht für beliebige Werthe von p, q, welche sich, wenn man mit

$$[P_\lambda, Q_\lambda]^{(m)}$$

irgend eine Unter-Determinante $(e_\lambda - m)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[P_\lambda, Q_\lambda]$ oder, wenn $m=0$, diese Determinante selbst bezeichnet, in der Gestalt

$$(57.)\qquad \prod_\lambda [P_\lambda, Q_\lambda]^{(m_\lambda)}$$

dastellen lassen, wo

$$(58.)\qquad \sum_\lambda m_\lambda = \varkappa$$

sein muss. Man hat also für jeden linearen Theiler von $[\overline{P}, \overline{Q}]$ zu ermitteln, wie oft er in allen diesen Producten als Factor enthalten ist.

Es seien, wenn $ap+bq$ irgend einer dieser Theiler ist, $\lambda_1, \dots \lambda_r$ diejenigen Werthe von λ, für welche $a_\lambda = a$, $b_\lambda = b$; und

$$e, \dots e^{(r-1)}$$

die zugehörigen Exponenten e_λ, jedoch so geordnet, dass keiner von ihnen grösser ist als der vorhergehende.

Wenn nun $\varkappa \geqq r$ ist, so giebt es unter den betrachteten Unter-Determinanten wenigstens eine, in der m_λ für $\lambda = \lambda_1, \dots \lambda_r$ den Werth Eins hat, und diese enthält den Factor $ap+bq$ nicht. Ist aber $\varkappa < r$, so müssen von den Zahlen $m_1, \dots m_\varrho$ mindestens $\varrho - \varkappa = \varrho - r + (r-\varkappa)$ den Werth Null haben, also auch unter den mit den Indices $\lambda_1, \dots \lambda_r$ versehenen wenigstens $(r-\varkappa)$ solche sich finden. Es ist also jede Unter-Determinante $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine Potenz von $ap+bq$ theilbar, deren Exponent die Summe von $(r-\varkappa)$ der Zahlen

$$e, \dots e^{(r-1)},$$

also sicher nicht kleiner als

$$\sum_{(k=\varkappa, \dots r-1)} e^{(k)}$$

ist. Setzt man also

$$(59.)\qquad l = e + \cdots + e^{(r-1)}, \quad l' = l - e, \quad l'' = l' - e', \quad \text{u. s. w.},$$

so hat jede Unter-Determinante $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[\overline{P}, \overline{Q}]$ den Theiler

$$(ap+bq)^{l^{(\varkappa)}},$$

wofern $\varkappa < r$ ist. Unter ihnen giebt es aber stets eine, welche nicht durch eine höhere Potenz von $ap+bq$ theilbar ist, und welche erhalten wird, wenn man denjenigen $\varkappa$ Zahlen m_λ, zu deren Indices die Exponenten

$$e, \ldots e^{(\varkappa-1)}$$

gehören, den Werth Eins, allen übrigen aber den Werth Null giebt. Hiernach ist also

$$(ap+bq)^{l}$$

die höchste Potenz von $ap+bq$, die in $[\overline{P}, \overline{Q}]$, und

$$(ap+bq)^{l^{(\varkappa)}}$$

die höchste, welchen in allen Unter-Determinanten $(n-\varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[\overline{P}, \overline{Q}]$ enthalten ist.*) Hieraus folgt unmittelbar, dass die in dem vorstehenden Ausdrucke von $[\overline{P}, \overline{Q}]$ enthaltenen Factoren

$$(a_\lambda p + b_\lambda q)^{e_\lambda}$$

in der That sämmtlich Elementar-Theiler dieser Determinante sind. Die aufgeworfene Frage ist also zu bejahen.

Um eine Anwendung von dem bewiesenen Satze zu geben, betrachte ich den Fall, wo die Determinante $[P, Q]$ n Elementar-Theiler hat — unter denen jedoch auch gleiche vorkommen können — die Exponenten $e_1, \ldots e_n$

---

*) Wenn man, von den ursprünglichen Formen P, Q ausgehend, für einen linearen Theiler $ap+bq$ von $[P, Q]$ die zugehörigen Exponenten $e, \ldots e^{(r-1)}$ in der im Anfange angegebenen Weise bestimmt, so erhält man

$$e = l-l', \quad e' = l'-l'', \quad \ldots \quad e^{(r-1)} = l^{(r-1)}.$$

Dieselben Werthe von $e, \ldots e^{(r-1)}$ ergeben sich aber, da die Reihe der Zahlen $l, l', \ldots$ sich nicht ändert, wenn man $ap+bq$ als einen Theiler von $[\overline{P}, \overline{Q}]$ ansieht, auch aus den Gleichungen (59.) unter der Voraussetzung, dass

$$e \geqq e' \ldots \geqq e^{(r-1)}$$

sei. Man kann daraus schliessen, dass in dem Falle, wo $r > 1$ ist,

$$l^{(\varkappa-1)} - l^{(\varkappa)} \geqq l^{(\varkappa)} - l^{(\varkappa+1)}$$

oder

$$2l^{\varkappa} \leqq l^{(\varkappa-1)} + l^{(\varkappa+1)} \qquad (\varkappa = 1, \ldots r-1)$$

sein muss. Dies lässt sich mittels der obigen Relationen (27.) auch leicht direct nachweisen.

also sämmtlich gleich Eins sind. Dann erhält man den Formeln (42.) bis (48.) zufolge:

$$(60.)\quad \begin{cases} P = a_1 X_1 Y_1 + a_2 X_2 Y_2 + \cdots + a_n X_n Y_n, \\ Q = b_1 X_1 Y_1 + b_2 X_2 Y_2 + \cdots + b_n X_n Y_n, \\ X_\lambda = \sum\limits_\beta (\beta, \lambda)' \dfrac{\partial (gP + hQ)}{\partial y_\beta}, \qquad x_\alpha = \sum\limits_\lambda (\alpha, \lambda) X_\lambda, \\ Y_\lambda = \sum\limits_\alpha (\alpha, \lambda) \dfrac{\partial (gP + hQ)}{\partial x_\alpha}, \qquad y_\beta = \sum\limits_\lambda (\beta, \lambda)' Y_\lambda, \end{cases}$$

wo X_λ, Y_λ, (α, λ), $(\beta, \lambda)'$ für $X_{\lambda 0}$, $Y_{\lambda 0}$, $(\alpha, \lambda, 0)$, $(\beta, \lambda, 0)'$ geschrieben ist. Nach dem Vorherstehenden hat aber die Determinante der Form

$$p\overline{P} + q\overline{Q} = \sum_\lambda (a_\lambda p + b_\lambda q) X_\lambda Y_\lambda$$

die Elementar-Theiler

$$a_1 p + b_1 q, \quad \ldots \quad a_n p + b_n q;$$

es ist daher, wenn P, Q sich in der angegebenen Gestalt sollen darstellen lassen, nothwendig, dass die Determinante $[P, Q]$ n Elementar-Theiler besitze. Es ist aber, wenn $[P, Q]$ einen ihrer linearen Theiler in der l^{ten} Potenz enthält, und die zugehörigen Exponenten e, e', ... alle gleich Eins sind, $l' = l-1$, $l'' = l-2$, ... u. s. w., $r = l$, und daher jener Theiler auch ein allen Unter-Determinanten $(n-l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gemeinschaftlicher. Und da auch umgekehrt ein gemeinschaftlicher linearer Theiler aller dieser Determinanten in $[P, Q]$ mindestens $l$mal als Factor enthalten ist, so ergiebt sich der Satz:

Damit es möglich sei, die Formen P, Q durch n lineare Functionen $X_1, \ldots X_n$ von $x_1, \ldots x_n$, und n andere $Y_1, \ldots Y_n$ von $y_1, \ldots y_n$ in der Gestalt

$$(61.)\quad \begin{cases} P = a_1 X_1 Y_1 + a_2 X_2 Y_2 + \cdots + a_n X_n Y_n \\ Q = b_1 X_1 Y_1 + b_2 X_2 Y_2 + \cdots + b_n X_n Y_n \end{cases}$$

auszudrücken, ist nothwendig und hinreichend, dass jeder lineare Theiler der Determinante $[P, Q]$, wenn er in derselben $l$mal als Factor enthalten und $l > 1$ ist, auch ein gemeinschaftlicher Theiler aller Unter-Determinanten $(n-l+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[P, Q]$ sei.

7.

Aus den im Vorstehenden entwickelten Sätzen über bilineare Formen ergiebt sich nun unmittelbar eine Reihe analoger Theoreme für quadratische Formen.

Es seien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei quadratische Formen von n Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ und

$$P = \sum_\beta \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_\beta} y_\beta, \qquad Q = \sum_\beta \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x_\beta} y_\beta.$$

Dann sind P, Q bilineare (und zwar symmetrische) Formen der $2n$ Veränderlichen $x_1, \dots x_n | y_1, \dots y_n$, und es wird die Determinante von $pP+qQ$ die Determinante der Form $p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}$ genannt und ist im Folgenden mit $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ bezeichnet.

Unter der Voraussetzung, dass $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ nicht für jedes Werthepaar p, q verschwinde, sind dann ferner unter den Elementar-Theilern von $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ die Elementar-Theiler von $[P, Q]$ zu verstehen, die nach Annahme zweier Grössen g, h, für welche die Determinante von $gP+hQ$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so zu bestimmen sind, wie im Anfange des § 1 festgesetzt worden ist.

Dies vorausgesetzt, gelten nun die folgenden Sätze:

A. Wenn zwei quadratische Formen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ von n Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ durch Substitutionen von der Gestalt

$$(62.) \qquad x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, \quad \dots \quad x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma$$

gleichzeitig in zwei andere $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ von $u_1, \dots u_n$ verwandelt werden, und die Substitutions-Determinante

$$\begin{vmatrix} h_{11}, & \dots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n1}, & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

ist nicht gleich Null, so stimmen die Determinanten der beiden Formen

$$p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}, \qquad p\mathfrak{P}'+q\mathfrak{Q}'$$

in ihren Elementar-Theilern überein.

Bildet man nämlich die bilinearen Formen

$$(63.)\quad \begin{cases} P = \sum\limits_\beta \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_\beta} y_\beta, & Q = \sum\limits_\beta \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x_\beta} y_\beta, \\ P' = \sum\limits_\beta \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial u_\beta} v_\beta, & Q' = \sum\limits_\beta \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{Q}'}{\partial u_\beta} v_\beta, \end{cases}$$

so sind die Determinanten von $p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}$, $p\mathfrak{P}'+q\mathfrak{Q}'$ ihrer Definition nach identisch mit denen von $pP+qQ$, $pP'+qQ'$; die beiden letzteren aber haben dieselben Elementar-Theiler, weil P, Q in P', Q' übergehen, wenn man für $x_1, \dots x_n$ die angegebenen Functionen von $u_1, \dots u_n$, und für $y_1, \dots y_n$ dieselben Functionen von $v_1, \dots v_n$ setzt.

B. Es seien für zwei gegebene quadratische Formen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ von n Veränderlichen $x_1, \dots x_n$

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \dots \quad (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho}$$

sämmtliche (den angegebenen Festsetzungen gemäss bestimmte) Elementar-Theiler der Determinante von $p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}$; dann lassen sich n homogene lineare Functionen der Grössen $x_1, \dots x_n$

$$X_{10}, \dots X_{1(e_1-1)}, \quad \dots \quad X_{\varrho 0}, \dots X_{\varrho(e_\varrho-1)}$$

bestimmen, durch welche ausgedrückt $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sich in der Form

$$(64.)\qquad \mathfrak{P} = \sum_\lambda [a_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} - h(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}]$$

$$(65.)\qquad \mathfrak{Q} = \sum_\lambda [b_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + g(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}]$$

darstellen, wo

$$(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1} = 0$$

zu setzen ist, wenn $e_\lambda = 1$.

Da nämlich in P sowohl als in Q die Coefficienten von $x_\alpha y_\beta$ und $x_\beta y_\alpha$ einander gleich sind, so wird, wie schon im § 5 bemerkt worden, wenn man P, Q in der unter (42.) angegebenen Gestalt darstellt, $Y_{\lambda\mu}$ dieselbe Function von $y_1, \dots y_n$ wie $X_{\lambda\mu}$ von $x_1, \dots x_n$, und daher $Y_{\lambda\mu} = X_{\lambda\mu}$, wenn man $y_1 = x_1, \dots y_n = x_n$ setzt, wodurch sich zugleich P, Q in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ verwandeln.

Setzt man

$$X_{\lambda\mu} = \sum_{\beta}(\beta, \lambda, \mu)\left(\frac{1}{2}g\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}h\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x_\beta}\right), \tag{66.}$$

so hat man nach Gleichung (34.)

$$(\beta, \lambda, \mu) = \frac{C_{\beta\lambda\mu}}{\sqrt{C_\lambda}}, \tag{67.}$$

wo C_λ und $C_{\beta\lambda\mu}$ ganze Functionen von $a_\lambda, b_\lambda, g, h, g', h'$ und den Coefficienten der Formen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ sind. Zugleich ist

$$x_\alpha = \sum_{\lambda,\mu}(\alpha, \lambda, \mu)\, X_{\lambda\mu} \qquad (\lambda = 1, \ldots \varrho;\ \mu < e_\lambda). \tag{68.}$$

C. Der Satz (A.) ist auch umgekehrt richtig; d. h. wenn die Formen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ so beschaffen sind, dass die Determinanten von

$$p\mathfrak{P} + q\mathfrak{Q}, \qquad p\mathfrak{P}' + q\mathfrak{Q}'$$

dieselben Elementar-Theiler

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \ldots \quad (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho}$$

haben, so können auch stets die Constanten $h_{11}, \ldots h_{nn}$ so bestimmt werden, dass durch die Substitutionen

$$x_1 = \sum_\gamma h_{1\gamma} u_\gamma, \quad \ldots \quad x_n = \sum_\gamma h_{n\gamma} u_\gamma$$

$\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ und zugleich $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}'$ übergeht.

Man hat zu dem Ende die n Functionen

$$U_{10}, \ldots U_{1(e_1-1)}, \quad \ldots \quad U_{\varrho 0}, \ldots U_{\varrho(e_\varrho-1)}$$

der Grössen $u_1, \ldots u_\varrho$ zu bestimmen, durch welche sich $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ in der Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \sum_\lambda [a_\lambda (U_\lambda U_\lambda)_{e_\lambda} - h(U_\lambda U_\lambda)_{e_\lambda - 1}] \\ \mathfrak{Q}' &= \sum_\lambda [b_\lambda (U_\lambda U_\lambda)_{e_\lambda} + g(U_\lambda U_\lambda)_{e_\lambda - 1}] \end{aligned}\right. \tag{69.}$$

ausdrücken lassen. Dann wird nach dem vorhergehenden Satze

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}', \qquad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}', \tag{70.}$$

wenn man

$$(71.)\qquad x_\alpha = \sum_{\lambda,\mu}(\alpha,\lambda,\mu)U_{\lambda\mu}$$

setzt.

D. Auch der Satz (B.) lässt sich umkehren. Nimmt man die Zahlen $e_1, \dots e_\varrho$ und die Constanten $g, h, a_1, b_1, \dots a_\varrho, b_\varrho$ den Bedingungen

$$\sum e_\lambda = n, \quad ga_1 + hb_1 = 1, \quad \dots \quad ga_\varrho + hb_\varrho = 1$$

gemäss, im Übrigen aber nach Willkür an, und setzt

$$\mathfrak{P}_\lambda = a_\lambda(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} - h(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1},$$
$$\mathfrak{Q}_\lambda = b_\lambda(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + g(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1},$$
$$\overline{\mathfrak{P}} = \sum \mathfrak{P}_\lambda, \qquad \overline{\mathfrak{Q}} = \sum \mathfrak{Q}_\lambda;$$

so hat die Determinante $[\mathfrak{P}_\lambda, \mathfrak{Q}_\lambda]$, wenn man die Form $p\mathfrak{P}_\lambda + q\mathfrak{Q}_\lambda$ als Function der e_λ in ihr vorkommenden Grössen

$$X_{\lambda 0}, \dots X_{\lambda(e_\lambda - 1)}$$

betrachtet, nur den einen Elementar-Theiler

$$(a_\lambda p + b_\lambda q)^{e_\lambda},$$

und dieser ist zugleich ein Elementar-Theiler der Determinante $[\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathfrak{Q}}]$.

Wenn man daher in $\overline{\mathfrak{P}}, \overline{\mathfrak{Q}}$ für die n Grössen X beliebige, jedoch von einander unabhängige homogene lineare Functionen der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ substituirt, so erhält man stets quadratische Formen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ von der Beschaffenheit, dass die Determinante $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ die Elementar-Theiler

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \dots \quad (a_\varrho p + b_\varrho q)^{e_\varrho}$$

besitzt.

E. Wenn die Anzahl der Elementar-Theiler von $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ gleich n, jede der Zahlen e_λ also gleich Eins ist, so erhalten die Gleichungen (64.) bis (68.) die Gestalt:

$$(72.)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + \cdots + a_n X_n^2 \\ \mathfrak{Q} &= b_1 X_1^2 + b_2 X_2^2 + \cdots + b_n X_n^2 \\ X_\alpha &= \sum_\beta (\beta, \alpha)\left(\frac{1}{2} g \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} h \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x_\beta}\right) \\ (\beta, \alpha) &= \frac{C_{\beta\alpha}}{\sqrt{C_\alpha}} \\ x_\alpha &= \sum_\beta (\beta, \alpha) X_\beta, \end{aligned}\right.$$

wo α für λ und $C_{\beta\alpha}$ für $C_{\beta\alpha 0}$ geschrieben ist.

Umgekehrt müssen, wenn sich $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ aus den Quadraten linearer Functionen der Grössen $x_1, \ldots x_n$ sollen zusammensetzen lassen, die Zahlen e_λ sämmtlich gleich Eins sein. Dazu ist aber erforderlich und hinreichend, dass jeder lineare Theiler der Determinante $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$, welcher in derselben $l$mal als Factor vorkommt, auch ein gemeinschaftlicher Theiler aller Unter-Determinanten $(l-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ sei.

F. Diese Bedingung ist, wie ich in der oben angeführten Abhandlung (Monatsberichte der Akademie v. J. 1858, S. 207*)) gezeigt habe, stets erfüllt, wenn die Coefficienten von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ reell sind und unter den Formen

$$p\mathfrak{P} + q\mathfrak{Q}$$

irgend eine sich findet, welche bei reellen Werthen von $x_1, \ldots x_n$ nur gleich Null werden kann, wenn diese Grössen selbst sämmtlich verschwinden.

Der Beweis dieses Satzes kann jetzt nach vollständiger Entwicklung der Ausdrücke von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ durch die Grössen X unmittelbar aus der Gleichung

$$g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q} = \sum_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda}$$

abgeleitet werden, wobei es jedoch erforderlich ist, den Grössen g, h, g', h' reelle Werthe zu geben. Wenn dann für einen bestimmten Werth von λ der Quotient $\frac{b_\lambda}{a_\lambda}$, und somit der Gleichung $ga_\lambda + hb_\lambda = 1$ wegen auch jede der Grössen a_λ, b_λ selbst reell ist, und ε_λ die positive oder die negative Einheit bedeutet, jenachdem C_λ positiv oder negativ ist, so wird, wenn man

$$(73.)\qquad X_{\lambda\mu} = \sqrt{\varepsilon_\lambda}\,.\,\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$$

*) [Bd. I, S. 233 dieser Ausgabe.]

setzt, $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$ eine lineare Function von $x_1, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, und man hat

$$(74.) \qquad (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} = \varepsilon_\lambda (\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}.$$

Ist dagegen $\frac{b_\lambda}{a_\lambda}$ eine complexe Grösse, so gesellt sich zu dem Elementar-Theiler

$$(a_\lambda p + b_\lambda q)^{e_\lambda}$$

von $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ ein zweiter

$$(\bar{a}_\lambda p + \bar{b}_\lambda q)^{e_\lambda},$$

in welchem $\bar{a}_\lambda, \bar{b}_\lambda$ die mit a_λ, b_λ conjugirten complexen Grössen sind. Giebt man dann den Wurzelgrössen $\sqrt{C_\lambda}, \sqrt{\bar{C}_\lambda}$ ebenfalls conjugirte Werthe, und setzt

$$(75.) \qquad \begin{cases} X_{\lambda\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} + i\mathfrak{X}'_{\lambda\mu} \\ \bar{X}_{\lambda\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} - i\mathfrak{X}'_{\lambda\mu}, \end{cases}$$

so werden auch $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$ und $\mathfrak{X}'_{\lambda\mu}$ lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, und man hat

$$(76.) \qquad (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + (\bar{X}_\lambda \bar{X}_\lambda)_{e_\lambda} = 2(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda} - 2(\mathfrak{X}'_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda)_{e_\lambda}.$$

Hiernach kann man, wenn unter den Quotienten $\frac{b_\lambda}{a_\lambda}$ sich σ reelle finden, $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ in der Gestalt

$$(77.) \qquad g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q} = \sum_{(\lambda = 1, \dots \sigma)} \varepsilon_\lambda (\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda} + 2 \sum_{\left(\lambda = \sigma+1, \dots \sigma + \frac{\varrho - \sigma}{2}\right)} [(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda} - (\mathfrak{X}'_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda)_{e_\lambda}]$$

so darstellen, dass zu reellen Werthen der ursprünglichen Veränderlichen x auch stets reelle Werthe der neu eingeführten $\mathfrak{X}$ gehören. Ist nun für irgend einen Werth von λ der Exponent $e_\lambda > 1$, so wird $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q} = 0$, wenn man sämmtliche Grössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ ausser $\mathfrak{X}_{\lambda 0}$ gleich Null setzt. Ferner verschwindet, wenn λ eine der Zahlen $\sigma + 1, \dots \sigma + \frac{\varrho + \sigma}{2}$ ist, auch in dem Falle, dass $e_\lambda = 1$, $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ dadurch, dass man $\mathfrak{X}_{\lambda 0} = \mathfrak{X}'_{\lambda 0}$, die übrigen $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ aber gleich Null setzt. Daraus folgt, dass wenn unter den Formen $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ sich eine findet, die bei reellen Werthen der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ nur gleich Null wird, wenn diese sämmtlich verschwinden, die Determinante von $p\mathfrak{P} + q\mathfrak{Q}$ nothwendig n Elementar-Theiler besitzt und zugleich die Quotienten $\frac{b_\lambda}{a_\lambda}$ alle reell sind. Dann aber erhält die vorstehende Gleichung die Gestalt

$$g\mathfrak{P}+h\mathfrak{Q} = \sum_{(\lambda=1,\dots n)} \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_\lambda^2 \tag{78.}$$

(wo $\mathfrak{X}_\lambda$ statt $\mathfrak{X}_{\lambda 0}$ geschrieben ist), und es müssen daher die Zahlen ε_λ alle denselben Werth (ε) haben. Ferner ist nach Gleichung (38.)

$$g'\mathfrak{P}+h'\mathfrak{Q} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_\lambda^2, \tag{79.}$$

und daher

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \varepsilon\sum_\lambda a_\lambda \mathfrak{X}_\lambda^2, \\ \mathfrak{Q} &= \varepsilon\sum_\lambda b_\lambda \mathfrak{X}_\lambda^2, \end{aligned}\right. \tag{80.}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, $\mathfrak{X}_1, \dots \mathfrak{X}_n$ homogene lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten und die Constanten a_λ, b_λ ebenfalls sämmtlich reelle Grössen sind.

ÜBER DIE ALLGEMEINSTEN EINDEUTIGEN UND $2n$-FACH PERIODISCHEN FUNCTIONEN VON n VERÄNDERLICHEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 2. Dec. 1869.)

Nimmt man zwischen $2n$ veränderlichen Grössen

$$u_1, u_2, \dots u_n \quad \text{und} \quad x_1, x_2, \dots x_n$$

die nachstehenden Gleichungen an, in denen

$$\psi_1(x_\nu), \quad \psi_2(x_\nu), \quad \dots \quad \psi_n(x_\nu)$$

Functionen bedeuten, deren erste Ableitungen algebraische Functionen von x_ν sind:

$$\text{(a)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_1^n {}_\nu \psi_1(x_\nu), \\ u_2 = \sum_1^n {}_\nu \psi_2(x_\nu), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \sum_1^n {}_\nu \psi_n(x_\nu); \end{array} \right.$$

so werden im Allgemeinen zu jedem Systeme der Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ unendlich viele Systeme der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ gehören. Es lassen sich aber, wie die Theorie der Abel'schen Transcendenten lehrt, die Functionen ψ so bestimmen, dass jeder rational und symmetrisch aus $x_1, x_2, \dots x_n$ zusammengesetzte Ausdruck eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \dots u_n$ wird, welche dann die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, $2n$-fach periodisch zu sein, und durch Θ-Functionen von n Argumenten ausgedrückt werden kann.

Indessen sind die Θ-Functionen, die man auf diesem Wege erhält, nur specielle; zwischen den $\frac{n(n+1)}{2}$ wesentlichen Constanten (Moduln), die in ihnen vorkommen und bei allen dieselben sind, besteht eine Anzahl von Relationen, so dass nur $3n-3$ derselben willkürlich anzunehmende Werthe erhalten können. In Folge davon sind auch die durch diese Θ-Functionen ausdrückbaren $2n$-fach periodischen Functionen von n Argumenten nicht die allgemeinsten ihrer Art.

Ich habe deshalb, um möglicherweise zu den letzteren zu gelangen, mir die Aufgabe gestellt, die Functionen ψ so zu bestimmen, dass zu einem Systeme der Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ eine endliche Anzahl von Systemen der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ gehöre. Denn es lässt sich zeigen, dass alsdann $x_1, \dots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades werden, deren Coefficienten algebraisch durch die partiellen Ableitungen einer eindeutigen und $2n$-fach periodischen Function von $u_1, u_2, \dots u_n$ sich ausdrücken lassen.*) Nun habe ich zwar die algebraischen Schwierigkeiten, welche sich der allgemeinen Lösung der angegebenen Aufgabe entgegenstellen, bis jetzt nicht überwinden können; ich habe mich jedoch überzeugt, dass man auf dem bezeichneten Wege wirklich zu den allgemeinsten eindeutigen und $2n$-fach periodischen Functionen von n Argumenten gelangen muss. Ist nämlich $\varphi(u_1, \dots u_n)$ irgend eine derartige Function, und

$$\varphi_\nu(u_1, \dots u_n) = \frac{\partial \varphi(u_1, \dots u_n)}{\partial u_\nu},$$

so gelten folgende Sätze:

1) Zwischen φ und $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ besteht eine algebraische Gleichung, deren Coefficienten von den Grössen $u_1, u_2, \dots u_n$ unabhängig sind.

2) Jede eindeutige Function von $u_1, u_2, \dots u_n$, welche dieselben Periodensysteme wie φ besitzt, lässt sich rational durch $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ ausdrücken.

Namentlich ist also $\varphi(u_1+v_1, \dots u_n+v_n)$ rational durch

$$\begin{array}{llll} \varphi(u_1, \dots u_n), & \varphi_1(u_1, \dots u_n), & \dots & \varphi_n(u_1, \dots u_n) \\ \varphi(v_1, \dots v_n), & \varphi_1(v_1, \dots v_n), & \dots & \varphi_n(v_1, \dots v_n) \end{array}$$

darstellbar.

*) In besonderen Fällen kann diese Function in eine, die weniger als $2n$ Periodensysteme besitzt, entarten.

3) Da hiernach die höheren Ableitungen von φ rational durch $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ ausdrückbar sind, so werden, wenn man $du_1, du_2, \ldots du_n$ auf die Form

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} du_1 = \sum_1^n {}_\nu F_{1\nu} d\varphi_\nu, \\ du_2 = \sum_1^n {}_\nu F_{2\nu} d\varphi_\nu, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ du_n = \sum_1^n {}_\nu F_{n\nu} d\varphi_\nu \end{cases}$$

bringt, die Coefficienten $F_{\mu\nu}$ ebenfalls sämmtlich rationale Functionen von $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$. Nimmt man nun zwischen $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ noch irgend $(n-1)$ andere algebraische Relationen an, so kann man sämmtliche alsdann noch möglichen Werthsysteme dieser Grössen darstellen in der Form

$$\text{(c)} \qquad \varphi = F(x, \chi x), \quad \varphi_1 = F_1(x, \chi x), \quad \ldots \quad \varphi_n = F_n(x, \chi x),$$

wo x eine unbeschränkt veränderliche Grösse, χx eine algebraische Function derselben und $F, F_1, \ldots F_n$ rational aus x und χx zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten; und es erhält dann der Ausdruck von du_μ die Gestalt

$$R_\mu(x, \chi x)\, dx,$$

wo R_μ ebenfalls eine rationale Function von x und χx ist. Setzt man dann

$$\text{(d)} \qquad R_\nu(x)\, dx = d\psi_\nu(x),$$

so werden bei gehöriger Constanten-Bestimmung die Gleichungen

$$\text{(e)} \qquad \begin{cases} F(x) = \varphi(u_1, u_2, \ldots u_n), \\ F_1(x) = \varphi_1(u_1, u_2, \ldots u_n), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_n(x) = \varphi_n(u_1, u_2, \ldots u_n) \end{cases}$$

befriedigt, wenn man

$$\text{(f)} \qquad u_1 = \psi_1(x), \quad u_2 = \psi_2(x), \quad \ldots \quad u_n = \psi_n(x)$$

setzt.

4) Jedes System zusammengehöriger Perioden der Integrale $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \psi_n(x)$ ist auch ein Periodensystem der Function $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_n)$.

5) Man kann die Functionen $\chi(x)$, F_1, F_2, ... F_n stets so bestimmen, dass die Functionen $\varphi_1, \dots \varphi_n$, wenn man

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} u_1 = \sum_1^n {}_\nu \psi_1(x_\nu), \\ u_2 = \sum_1^n {}_\nu \psi_2(x_\nu), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_n = \sum_1^n {}_\nu \psi_n(x_\nu) \end{cases}$$

setzt, sich in rationale Functionen von

$$x_1, x_2, \dots x_n \quad \text{und} \quad \chi x_1, \chi x_2, \dots \chi x_n$$

verwandeln, unter denen keine Abhängigkeit von einander besteht. Daraus folgt, dass den vorstehenden Gleichungen bei gegebenen Werthen von $u_1, u_2, \dots u_n$ — wenn unter diesen nicht eine bestimmte Relation stattfindet — nur durch eine endliche Anzahl von Systemen der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ Genüge geschehen kann, und dass die zu einem solchen Systeme gehörigen Werthe dieser Grössen als Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten algebraische Functionen von

$$\varphi_1(u_1, u_2, \dots u_n), \quad \dots \quad \varphi_n(u_1, u_2, \dots u_n)$$

sind, erhalten werden können.

Aus jeder Θ-Function von n Argumenten ergeben sich unzählig viele $2n$-fach periodische Functionen, unter deren $2n.n$ Perioden nicht mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen stattfinden. Durch das Vorstehende ist also bewiesen, dass es Gleichungssysteme von der Form (a), die allgemeiner sind als die bisher in der Theorie der Abel'schen Transcendenten betrachteten, und gleichwohl einer ganz analogen Behandlung fähig sind, wirklich giebt. Ob $2n$-fach periodische Functionen von n Argumenten existiren, die nicht durch Θ-Functionen ausgedrückt werden können, ist eine Frage, deren Erörterung ich mir vorbehalte.

ÜBER DAS SOGENANNTE DIRICHLET'SCHE PRINCIP.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14. Juli 1870.)

In seinen Vorlesungen über die Kräfte, welche nach dem Newton'schen Gesetz wirken, hat sich Lejeune Dirichlet zur Begründung eines Hauptsatzes der Potentialtheorie einer eigenthümlichen Schlussweise bedient, welche später auch von anderen Mathematikern, namentlich von Riemann, vielfach angewandt worden ist und den Namen »Dirichlet'sches Princip« erhalten hat.

Über die Zulässigkeit dieses »Princips« haben sich seitdem manche Zweifel geltend gemacht, welche, wie ich im Folgenden zeigen werde, durchaus begründet sind. Ehe ich aber darauf eingehe, will ich, da Dirichlet über den in Rede stehenden Gegenstand nichts veröffentlicht hat, aus einer von Dirichlet im Sommer-Semester 1856 gehaltenen Vorlesung, welche mir in einer von Herrn Dedekind angefertigten sorgfältigen Nachschrift vorliegt, die folgende Stelle mittheilen, aus welcher mit voller Bestimmtheit hervorgeht, was Dirichlet gemeint und wie er sein Beweisverfahren zu rechtfertigen versucht hat:

»Ist irgend eine endliche Fläche gegeben, so kann man dieselbe stets, aber nur auf eine Weise, so mit Masse belegen, dass das Potential in jedem Punkte der Fläche einen beliebig vorgeschriebenen (nach der Stetigkeit sich ändernden) Werth hat.«

»Zum Beweise schicken wir den folgenden Satz voraus:

»Ist irgend ein endlicher zusammenhängender Raum t gegeben, so giebt es stets eine, aber nur eine einzige Function w, welche sich nebst ihren ersten Derivirten überall in t stetig ändert, auf der Begrenzung von t überall beliebig vorgeschriebene (stetig veränderliche) Werthe annimmt und innerhalb t überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet. — Dieser Satz ist eigentlich identisch mit einem anderen aus der Wärmelehre, der dort Jedem unmittelbar evident erscheint, dass nämlich, wenn die Begrenzung von t auf einer überall beliebig vorgeschriebenen Temperatur constant erhalten wird, es stets eine, aber auch nur eine Temperaturvertheilung im Inneren giebt, bei welcher Gleichgewicht stattfindet; oder dass, wie man auch sagen kann, wenn die ursprüngliche Temperatur im Inneren eine beliebige war, diese sich einem Finalzustande nähert, bei welchem Gleichgewicht stattfinden würde.«

»Wir beweisen den Satz, indem wir von einer rein mathematischen Evidenz ausgehen. Es ist in der That einleuchtend, dass unter allen Functionen u, welche überall nebst ihren ersten Derivirten sich stetig in t ändern und auf der Begrenzung von t die vorgeschriebenen Werthe annehmen, es eine (oder mehrere) geben muss, für welche das durch den ganzen Raum t ausgedehnte Integral

$$U = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dt$$

seinen kleinsten Werth erhält. Wir wollen eine solche Function gerade mit u und das Minimum des Integrals mit U bezeichnen. Sei nun u' irgend eine andere Function, welche dieselben Grenz- und Stetigkeitsbedingungen wie u erfüllt, und U' der entsprechende Werth des Integrals, so kann $U'-U$ nie negativ sein. Setzen wir nun

$$u + hw = u',$$

wo h einen unbestimmten constanten Factor bezeichnet, so ist w eine Function, welche dieselben Stetigkeitsbedingungen wie u und u' erfüllt und auf der Begrenzung von t überall gleich Null wird, sonst aber ganz willkürlich ist. Dann findet man leicht

$$U' - U = 2hM + h^2 N,$$

wo

$$M = \int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \right\} dt,$$

$$N = \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} dt$$

ist. Durch theilweise Integration mit Rücksicht auf die Grenz- und Stetigkeitsbedingungen für w und die Stetigkeitsbedingungen für die ersten Derivirten von u findet man leicht

$$M = -\int w \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} dt.$$

Da nun $U'-U$ für jedes auch noch so kleine h niemals negativ sein kann, und N eine endliche positive Grösse ist, so folgt, dass M nothwendig gleich Null ist; und da dies der Fall sein muss, wie auch w beschaffen sein mag, so müssen wir schliessen, dass überall innerhalb t (höchstens mit Ausnahme einzelner Flächen, Linien, Punkte)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

sein muss; denn wäre dies Trinom in einem körperlichen Raume von Null verschieden, so brauchte man nur w überall dasselbe Zeichen wie jenem Trinom zu geben, um einen von Null verschiedenen Werth für M zu erhalten.«

»Es giebt also jedenfalls eine solche Function u, welche die angegebenen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erfüllt und der partiellen Differentialgleichung genügt. Aber es giebt auch nur eine einzige solche Function u. Denn ist $u' = u + w$ irgend eine andere Function, welche dieselben Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erfüllt, so ist das entsprechende Integral

$$U' = U + \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} dt,$$

und folglich ist U wirklich ein absolutes Minimum; und sollte etwa $U' = U$ sein, so müsste, wie leicht zu sehen, im ganzen Raume t

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = 0$$

sein. Daraus würde folgen, dass w constant ist; und da es stetig und auf der Begrenzung von t Null ist, so muss es überall Null sein, d. h. u' muss mit u identisch sein.«

»Es wird später gezeigt werden, dass dieses u, welches die Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erfüllt, und von welchem wir wissen, dass es der partiellen Differentialgleichung höchstens in einzelnen Punkten, Linien oder Flächen innerhalb t widerspricht, überall, d. h. in jedem Punkte ihr genügen muss, dass also solche Ausnahmestellen unmöglich sind.«

Unter der Voraussetzung, dass es für den Raum t überhaupt eine den festgesetzten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügende Function gebe, soll hiernach das im Vorstehenden auseinandergesetzte Dirichlet'sche Verfahren dazu dienen, die Existenz einer Function von x, y, z nachzuweisen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

und zugleich den angegebenen Nebenbedingungen genügt. Das letztere ist in jedem bestimmten Falle leicht zu beweisen; das andere aber gilt nur in dem Falle, wo sich zeigen lässt, dass es eine Function u giebt, für welche der Werth des Ausdrucks

$$\int\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}dt,$$

ein (absolutes) Minimum ist. Dieses lässt sich aber aus den von Dirichlet gemachten Voraussetzungen keineswegs folgern, sondern es kann nur behauptet werden, dass es für den in Rede stehenden Ausdruck eine bestimmte untere Grenze giebt, welcher er beliebig nahe kommen kann, ohne sie wirklich erreichen zu müssen. Hiernach erweist sich Dirichlet's Schlussweise als hinfällig.

Ich will schliesslich das Vorstehende noch an einem einfachen Beispiel erläutern, durch welches die Unzulässigkeit der Dirichlet'schen Schlussweise evident dargethan wird.

Es bezeichne nämlich $\varphi(x)$ eine reelle eindeutige Function der reellen Veränderlichen x von der Beschaffenheit, dass erstens $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ im Intervall $(-1 \cdots +1)$ stetige Functionen von x sind, und dass zweitens $\varphi(x)$ an der Grenze -1 des Intervalls den vorgeschriebenen Werth a, an der

Grenze $+1$ den vorgeschriebenen Werth b hat. Dabei sollen die beiden Constanten a und b zwei von einander verschiedene Grössen sein. Wenn nun die Dirichlet'sche Schlussweise zulässig wäre, so müsste sich unter den betrachteten Functionen $\varphi(x)$ eine solche specielle Function befinden, für welche der Werth des Integrals

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(x \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

gleich der unteren Grenze aller derjenigen Werthe ist, die dieses Integral für die verschiedenen der betrachteten Gesammtheit angehörenden Functionen $\varphi(x)$ annehmen kann.

Die erwähnte untere Grenze ist aber in dem vorliegenden Falle nothwendig gleich Null. Denn setzt man z. B.

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}},$$

wo ε eine willkürlich anzunehmende positive Grösse bezeichnet, so erfüllt diese Function die beiden ersten Bedingungen; und da

$$J < \int_{-1}^{+1} (x^2 + \varepsilon^2) \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

und

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

so ist für diese specielle Function

$$J < \varepsilon \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon\, dx}{x^2 + \varepsilon^2}$$

und somit

$$J < \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Daraus erhellt, da man ε beliebig klein annehmen kann, dass die untere Grenze des Werthes von J gleich Null ist, denn negative Werthe kann J überhaupt nicht annehmen.

Diese Grenze kann aber der Werth von J nicht erreichen, wie man auch den obigen beiden Bedingungen gemäss die Function $\varphi(x)$ wählen möge. Denn da $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ stetige Functionen von x sein sollen, so wäre hierzu erforderlich, dass

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

für jeden dem Intervall $(-1 \cdots +1)$ angehörenden Werth von x verschwinde, dass also $\varphi(x)$ eine Constante sei. Dies ist aber mit der Annahme, dass a und b von einander verschieden sind, unverträglich.

Die Dirichlet'sche Schlussweise führt also in dem betrachteten Falle offenbar zu einem falschen Resultat.

NEUER BEWEIS EINES HAUPTSATZES DER THEORIE DER PERIODISCHEN FUNCTIONEN VON MEHREREN VERÄNDERLICHEN.*)

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 9. Nov. 1876 mit einigen Veränderungen abgedruckt.)

1.

Eine Function f von n Veränderlichen $(u_1, u_2, \dots u_n)$ kann so beschaffen sein, dass für bestimmte Systeme constanter Grössen $(P_1, P_2, \dots P_n)$ bei beliebigen Werthen von $u_1, u_2, \dots u_n$ die Gleichung

$$f(u_1+P_1, u_2+P_2, \dots u_n+P_n) = f(u_1, u_2, \dots u_n)$$

besteht. Die Function heisst alsdann periodisch, und jedes einzelne Grössensystem $(P_1, P_2, \dots P_n)$ ein Periodensystem derselben.**)

Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Sätze:

1) Ist

$$(P'_1, P'_2, \dots P'_n)$$

ein Periodensystem einer Function von n Veränderlichen, so ist auch

$$(-P'_1, -P'_2, \cdots -P'_n)$$

ein solches.

---

*) Vgl. Hermite, Extrait de lettres à C. G. J. Jacobi (Crelle's Journal Bd. 40, S. 310); und Riemann, Auszug aus einem Schreiben an Weierstrass, (ebd. Bd. 71, S. 197; Riemann's Gesammelte Werke S. 276).

**) Dies gilt, mag die Function f eine analytische Function sein oder nicht. Ist sie mehrdeutig, so besagt die aufgestellte Gleichung, dass die Gesammtheit der zu einem bestimmten Werthsystem $(u_1, u_2, \dots u_n)$ gehörigen Werthe von f identisch ist mit der Gesammtheit der zu $(u_1+P_1, u_2+P_2, \dots u_n+P_n)$ gehörigen.

2) Sind

$$(P'_1, P'_2, \dots P'_n), \qquad (P''_1, P''_2, \dots P''_n)$$

irgend zwei Periodensysteme der Function, so ist auch

$$(P'_1 + P''_1, P'_2 + P''_2, \dots P'_n + P''_n)$$

ein solches System.

Aus diesen beiden Sätzen folgt dann der allgemeinere:

3) Sind irgend r Periodensysteme

$$(P'_1, P'_2, \dots P'_n), \quad (P''_1, P''_2, \dots P''_n), \quad \dots \quad (P^{(r)}_1, P^{(r)}_2, \dots P^{(r)}_n)$$

der Function gegeben, so kann man aus ihnen beliebig viele andere $(P_1, P_2, \dots P_n)$ ableiten, indem man r ganze Zahlen $(m_1, m_2, \dots m_r)$ willkürlich annimmt und (für $\alpha = 1, \dots n$)

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_\alpha^{(\beta)}$$

setzt.

4) Werden aus der Gesammtheit der Periodensysteme der betrachteten Function irgend $(\varrho+1)$ Systeme

$$(P'_1, P'_2, \dots P'_n), \quad \dots \quad (P_1^{(\varrho+1)}, P_2^{(\varrho+1)}, \dots P_n^{(\varrho+1)})$$

willkürlich herausgehoben, und ist

$$P_\alpha^{(\beta)} = p_{\alpha\beta} + i p'_{\alpha\beta},$$

wo $p_{\alpha\beta}$ und $p'_{\alpha\beta}$ reelle Grössen bedeuten; so lassen sich im Falle, dass $\varrho \geqq 2n$ ist, stets $(\varrho+1)$ reelle Grössen $(\mu_1, \dots \mu_{\varrho+1})$ bestimmen, welche die $2n$ Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{\varrho+1} \mu_\beta p_{\alpha\beta} = 0, \qquad \sum_{\beta=1}^{\varrho+1} \mu_\beta p'_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

befriedigen und nicht sämmtlich gleich Null sind. Möglicherweise ist dies auch noch der Fall für $\varrho = 2n-1$, $\varrho = 2n-2$ u. s. w., jedenfalls aber nicht für $\varrho = 0$. Es muss also einen kleinsten, zwischen 0 und $2n-1$ liegenden Werth von ϱ geben, bei dem es noch möglich ist, die vorstehenden Gleichungen für beliebige $(\varrho+1)$ Periodensysteme in der angegebenen Weise zu befriedigen. Dieser Werth von ϱ werde fortan mit r bezeichnet. Dann existiren nothwendig Complexe von r Periodensystemen, für welche den in Rede stehenden Gleichungen, wenn man $\varrho = r-1$ nimmt, nur dadurch, dass man jeder der Grössen $\mu_1, \ldots \mu_r$ den Werth Null giebt, genügt werden kann.

Angenommen nun, es seien

$$(P'_1, P'_2, \ldots P'_n), \quad (P''_1, P''_2, \ldots P''_n), \quad \ldots \quad (P^{(r)}_1, P^{(r)}_2, \ldots P^{(r)}_n)$$

irgend r Systeme, welche einen solchen Complex bilden, und

$$(P_1, P_2, \ldots P_n)$$

ein beliebiges Periodensystem, so lassen sich $(r+1)$ reelle Grössen $\mu, \mu_1, \ldots \mu_r$, die nicht sämmtlich den Werth Null haben, so bestimmen, dass die Gleichungen

$$\mu P_\alpha + \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta P^{(\beta)}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

bestehen.

In diesen Gleichungen hat dann μ nothwendig einen von Null verschiedenen Werth; man erhält also, wenn man

$$m_\beta = -\frac{\mu_\beta}{\mu} \qquad (\beta = 1, \ldots r)$$

setzt,

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = \sum\limits_{\beta=1}^{r} m_\beta P^{(\beta)}_1, \\ P_2 = \sum\limits_{\beta=1}^{r} m_\beta P^{(\beta)}_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_n = \sum\limits_{\beta=1}^{r} m_\beta P^{(\beta)}_n. \end{array} \right.$$

Zugleich folgt aus der angenommenen Beschaffenheit der Systeme

$$(P^{(\beta)}_1, P^{(\beta)}_2, \ldots P^{(\beta)}_n),$$

dass zu einem bestimmten Periodensysteme $(P_1, P_2, \ldots P_n)$ nur **ein** System reeller Grössen $m_1, m_2, \ldots m_r$, für welches die vorstehenden Gleichungen gelten, gehört.

5) Obgleich die Function unendlich viele Periodensysteme besitzt, so kann sie doch so beschaffen sein, dass die Anzahl derjenigen Periodensysteme, in denen jede einzelne Periode ihrem absoluten Betrage nach

eine willkürlich anzunehmende Grenze nicht überschreitet, endlich ist. In diesem Falle sind die in den vorstehenden Gleichungen (A) vorkommenden Grössen $m_1, m_2, \dots m_r$ immer rationale Zahlen.

Es lassen sich alsdann die Periodensysteme

$$(P_1', P_2', \dots P_n'), \quad (P_1'', P_2'', \dots P_n''), \quad \dots\dots \quad (P_1^{(r)}, P_2^{(r)}, \dots P_n^{(r)})$$

stets auch so auswählen, dass die Grössen $m_1, m_2, \dots m_r$ für jedes Periodensystem $(P_1, P_2, \dots P_r)$ sämmtlich ganze Zahlen werden.

Der Beweis dieses fundamentalen Satzes kann folgendermassen geführt werden.

Es bedeute λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots r$, so fasse man, unter der Voraussetzung, dass die Periodensysteme

$$(P_1^{(\beta)}, P_2^{(\beta)}, \dots P_n^{(\beta)}) \qquad (\beta = 1, \dots r)$$

den unter 4) angegebenen Bedingungen gemäss angenommen seien, diejenigen Periodensysteme $(P_1, P_2, \dots P_n)$ in's Auge, für welche die in den Gleichungen (A) vorkommenden Grössen $m_1, m_2, \dots m_r$ folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &0 < m_\lambda \leqq 1, \\ &0 \leqq m_\beta \leqq 1, \quad \text{wenn } \beta < \lambda, \\ &0 = m_\beta \quad\;\;\;\;\, , \quad \text{wenn } \beta > \lambda. \end{aligned}$$

Solche Systeme giebt es — namentlich ist $(P_1^{(\lambda)}, P_2^{(\lambda)}, \dots P_n^{(\lambda)})$ eines von ihnen —; sie sind aber, weil durch die angegebene Beschränkung der Grössen m_β für den absoluten Betrag jeder einzelnen Periode eine Grenze, die er nicht überschreiten kann, festgestellt wird, nur in endlicher Anzahl vorhanden, und es muss sich unter ihnen eines finden, für welches m_λ den kleinsten Werth hat. Die zu diesem System gehörigen Grössen $m_1, \dots m_\lambda$ mögen mit $m_1^{(\lambda)}, \dots m_\lambda^{(\lambda)}$ bezeichnet werden.

Nach diesen Festsetzungen ist, wenn $m_1', m_2', \dots m_r'$ reelle Grössen sind, welche die Bedingungen

$$0 \leqq m_1' < m_1^{(1)}, \quad 0 \leqq m_2' < m_2^{(2)}, \quad \dots\dots \quad 0 \leqq m_r' < m_r^{(r)}$$

erfüllen, das System

$$\left(\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta' P_1^{(\beta)}, \quad \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta' P_2^{(\beta)}, \quad \dots\dots \quad \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta' P_n^{(\beta)}\right)$$

ein Periodensystem nur in dem Falle, wo $m'_1, m'_2, \ldots m'_r$ sämmtlich gleich Null sind.

Nun werde gesetzt

$$\text{(B)} \qquad P_{\alpha\lambda} = \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta^{(\lambda)} P_\alpha^{(\beta)}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots n \\ \lambda = 1, \ldots r \end{pmatrix}$$

so lässt sich, wenn $m_1, m_2, \ldots m_r$ beliebige reelle Grössen sind, der Ausdruck

$$\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_\alpha^{(\beta)}$$

stets auf die Form

$$\sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=1}^{r} m'_\beta P_\alpha^{(\beta)}$$

in der Art bringen, dass $m'_1, m'_2, \ldots m'_r$ die eben angegebenen Bedingungen erfüllen und zugleich $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$ ganze Zahlen werden; was aus den zu befriedigenden Gleichungen

$$\begin{aligned} m_r &= \nu_r m_r^{(r)} + m'_r, \\ m_{r-1} &= \nu_{r-1} m_{r-1}^{(r-1)} + \nu_r m_{r-1}^{(r)} + m'_{r-1}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_1 &= \nu_1 m_1^{(1)} + \nu_2 m_1^{(2)} + \cdots + \nu_r m_1^{(r)} + m'_1 \end{aligned}$$

unmittelbar ersichtlich ist. Wenn aber

$$\left(\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_1^{(\beta)}, \quad \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_2^{(\beta)}, \quad \ldots\ldots \quad \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_n^{(\beta)} \right)$$

ein Periodensystem ist, so ist auch

$$\left(\sum_{\beta=1}^{r} m'_\beta P_1^{(\beta)}, \quad \sum_{\beta=1}^{r} m'_\beta P_2^{(\beta)}, \quad \ldots\ldots \quad \sum_{\beta=1}^{r} m'_\beta P_n^{(\beta)} \right)$$

ein solches, und es müssen daher $m'_1, m'_2, \ldots m'_r$ sämmtlich gleich Null sein. Man hat also

$$\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_\alpha^{(\beta)} = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{\alpha\beta},$$

und die Gleichungen (A) wandeln sich um in die folgenden:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} P_1 = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{1\beta}, \\ P_2 = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{2\beta}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_n = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{n\beta}. \end{cases}$$

Die durch die Gleichungen (B) definirten Periodensysteme

$$(P_{11}, P_{21}, \ldots P_{n1}), \quad (P_{12}, P_{22}, \ldots P_{n2}), \quad \ldots \quad (P_{1r}, P_{2r}, \ldots P_{nr})$$

sind demnach so beschaffen, dass sich aus ihnen alle übrigen auf die oben — unter 3) — angegebene Weise ableiten lassen.

In den Gleichungen (C) nehme man nun, unter γ eine der Zahlen $1, 2, \ldots r$ verstehend,

$$P_1 = P_1^{(\gamma)}, \quad P_2 = P_2^{(\gamma)}, \quad \ldots \quad P_n = P_n^{(\gamma)},$$

und bezeichne die Werthe, die dann $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$ haben, mit

$$\nu_{\gamma 1}, \ \nu_{\gamma 2}, \ \ldots \ \nu_{\gamma r},$$

so dass man

$$P_\alpha^{(\gamma)} = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_{\gamma\beta} P_{\alpha\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots n \\ \gamma = 1, \ldots r \end{pmatrix}$$

hat. Dann ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \nu_{11}, & \ldots & \nu_{1r} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \nu_{r1}, & \ldots & \nu_{rr} \end{vmatrix}$$

nothwendig von Null verschieden, weil sich sonst die $2n$ Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta p_{\alpha\beta} = 0, \qquad \sum_{\beta=1}^{r} \mu_\beta p'_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

durch reelle Werthe der Grössen μ_β, ohne dass diese sämmtlich gleich Null zu sein brauchten, würden befriedigen lassen. Man kann daher, wenn $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$ beliebige ganze Zahlen sind, r rationale Zahlen $m_1, \ldots m_r$ so bestimmen, dass die r Gleichungen

$$\sum_{\gamma=1}^{r} m_\gamma \nu_{\gamma\beta} = \nu_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots r)$$

bestehen. Dann ist gemäss den Gleichungen (C)

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{r} m_\gamma P_\alpha^{(\gamma)} = \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta P_\alpha^{(\beta)} \qquad (\alpha = 1, \ldots n).$$

Da es nun, wie vorhin bemerkt worden, für jedes Periodensystem $(P_1, P_2, \ldots P_n)$ nur ein System reeller Grössen $m_1, m_2, \ldots m_r$ giebt, für das die Gleichungen (A) gelten, so ist bewiesen, dass diese Grössen, wie man auch die r Periodensysteme

$$(P_1^{(\beta)}, P_2^{(\beta)}, \dots P_n^{(\beta)}) \qquad (\beta = 1, \dots n)$$

den unter 4) angegebenen Bestimmungen entsprechend annehmen möge, stets rationale Zahlen sind.

6) Zu dem vorstehenden Satze ist noch Folgendes zu bemerken.

Angenommen, es seien für eine periodische Function von n Veränderlichen die Zahl r und die Grössen $P_\alpha^{(\beta)}$ so bestimmt, wie unter 4) angegeben wurde. Setzt man dann, unter $m_1, m_2, \dots m_r$ reelle Grössen verstehend, wie oben

$$P_\alpha^{(\beta)} = p_{\alpha\beta} + ip'_{\alpha\beta}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \dots n\\ \beta = 1, \dots r\end{pmatrix}$$

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} m_\beta p_{\alpha\beta} + i\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta p'_{\alpha\beta},$$

so hat der Ausdruck

$$P = \sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\left(\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta p_{\alpha\beta}\right)^2 + \left(\sum_{\beta=1}^{r} m_\beta p'_{\alpha\beta}\right)^2\right\} = \sum_{\alpha=1}^{n} |P_\alpha|^2$$

stets einen positiven Werth, wenn die Grössen m nicht sämmtlich gleich Null sind. Es ist deshalb, wenn g eine willkürlich angenommene positive Grösse bezeichnet, $P > g$, sobald der Werth von $\sum\limits_{\beta=1}^{r} m_\beta^2$ eine bestimmte Grenze überschreitet, und es giebt daher unter denjenigen Werthsystemen $(m_1, m_2, \dots m_r)$, in denen jede einzelne Grösse eine ganze Zahl ist, nur eine endliche Anzahl solcher, für welche die absoluten Beträge von $P_1, P_2, \dots P_n$ sämmtlich kleiner als g sind. Daraus folgt, dass die Gleichungen (A), wenn in denselben den Grössen $m_1, m_2, \dots m_r$ bloss ganzzahlige Werthe gegeben werden, sämmtliche Periodensysteme der Function nur in dem Falle liefern können, wo die oben (im Anfange dieser No.) in Betreff der Beschaffenheit der Function gemachte Voraussetzung zutrifft.

Diese Voraussetzung ist aber gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Function kein System unendlich kleiner Perioden besitze.

Man setze

$$P_\alpha = p_\alpha + ip_{n+\alpha}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

wo p_α und $p_{n+\alpha}$ reelle Grössen bedeuten, und nehme an, es lasse sich eine positive Grösse k so bestimmen, dass in jedem Periodensystem wenigstens eine der Grössen $p_1, p_2, \dots p_{2n}$ dem absoluten Betrage nach grösser als k ist.

Wenn man dann $2n$ ganze Zahlen

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_{2n}$$

willkürlich annimmt, so kann es höchstens ein Periodensystem geben, in welchem die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_{2n}$ den Bedingungen

$$\nu_\lambda k \leqq p_\lambda < \nu_\lambda k + k \qquad (\lambda = 1, \ldots 2n)$$

genügen. Denn angenommen, es sei

$$(p'_1 + ip'_{n+1},\ p'_2 + ip'_{n+2},\ \ldots\ p'_n + ip'_{2n})$$

ein solches, und $(q_1, q_2, \ldots q_{2n})$ ein beliebiges System von $2n$ Grössen, welche ebenfalls die Bedingungen

$$\nu_\lambda k \leqq q_\lambda < \nu_\lambda k + k \qquad (\lambda = 1, \ldots 2n)$$

erfüllen, so ist, wenn man

$$q_\lambda = p'_\lambda + k_\lambda$$

setzt, k_λ dem absoluten Betrage nach kleiner als k, und deshalb

$$(k_1 + ik_{n+1},\ k_2 + ik_{n+2},\ \ldots\ k_n + ik_{2n})$$

kein Periodensystem; woraus folgt, dass auch

$$(q_1 + iq_{n+1},\ q_2 + iq_{n+2},\ \ldots\ q_n + iq_{2n})$$

kein solches ist.

Nun sei g eine willkürlich angenommene positive Grösse, so giebt es nur eine endliche Anzahl solcher Zahlensysteme $(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{2n})$, für welche

$$\nu_1 k,\ \nu_2 k,\ \ldots\ \nu_{2n} k$$

sämmtlich zwischen den Grenzen $g, -g$ liegen; es existirt also auch nur eine endliche Anzahl von Periodensystemen, für welche jede der Grössen p_λ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g ist.

2.

Ich will jetzt annehmen, die betrachtete periodische Function $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ sei eine eindeutige analytische Function, und zunächst nachweisen, dass dieselbe ein System unendlich kleiner Perioden nur in dem Falle besitzt, wo sie sich als Function von weniger als n Argumenten, die ganze lineare Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ sind, darstellen lässt.

Es seien $v_1, v_2, \ldots v_m$ ganze lineare Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$, und $m < n$, so können n Grössen $P_1, P_2, \ldots P_n$ so bestimmt werden, dass $v_1, v_2, \ldots v_m$ sich nicht ändern, wenn man $u_1 + P_1, u_2 + P_2, \ldots u_n + P_n$ für $u_1, u_2, \ldots u_n$ setzt. Im Falle, dass sich f als Function von $v_1, v_2, \ldots v_m$ ausdrücken lässt, ist also

$$f(u_1 + P_1, u_2 + P_2, \ldots u_n + P_n) = f(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Man kann aber $(n-m)$ der Grössen P beliebig annehmen, und giebt man diesen unendlich kleine Werthe, so werden die übrigen ebenfalls unendlich klein. Es besitzt also $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ Systeme unendlich kleiner Perioden.

Bezeichnet man f, als Function von $v_1, v_2, \ldots v_m$ betrachtet, mit $\bar{f}$, so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial u_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial u_\alpha}; \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

es bestehen also zwischen den ersten partiellen Ableitungen von f, von denen jetzt die nach u_α genommene mit $f(u_1, u_2, \ldots u_n)_\alpha$ bezeichnet werden möge, $(n-m)$ Gleichungen von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha f(u_1, \ldots u_n)_\alpha = 0,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_n$ Constanten bezeichnen, welche nicht sämmtlich gleich Null sind.

Dagegen findet bekanntlich, wenn die Function f nicht die besondere Eigenschaft besitzt, sich auf die angegebene Weise in eine Function von weniger als n Argumenten verwandeln zu lassen, unter ihren Ableitungen keine solche Relation statt, und es ist daher möglich, n nicht singuläre*) Werthsysteme der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$

$$(u_1', u_2', \ldots u_n'), \quad (u_1'', u_2'', \ldots u_n''), \quad \ldots\ldots \quad (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots u_n^{(n)})$$

so anzunehmen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(u_1', u_2', \ldots u_n')_1, & \ldots & f(u_1', u_2', \ldots u_n')_n \\ f(u_1'', u_2'', \ldots u_n'')_1, & \ldots & f(u_1'', u_2'', \ldots u_n'')_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots u_n^{(n)})_1, & \ldots & f(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots u_n^{(n)})_n \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth hat.

---

*) Es ist $(u_1', u_2', \ldots u_n')$ ein nicht singuläres Argumentensystem, wenn sich $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ unter der Bedingung, dass die absoluten Beträge von $u_1 - u_1', u_2 - u_2', \ldots u_n - u_n'$ gewisse Grenzen nicht übersteigen, nach ganzen positiven Potenzen dieser Differenzen in eine convergirende Reihe entwickeln lässt.

Man kann dann ferner, unter $h_1, h_2, \dots h_n$ veränderliche Grössen verstehend, deren absolute Beträge eine Grenze h nicht übersteigen sollen, die letztere so klein annehmen, dass (für $\alpha = 1, \dots n$)

$$f(u_1^{(\alpha)}+h_1, u_2^{(\alpha)}+h_2, \dots u_n^{(\alpha)}+h_n) - f(u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, \dots u_n^{(\alpha)})$$
$$= \sum_{\beta=1}^{n} h_\beta \int_0^1 f(u_1^{(\alpha)}+th_1, u_2^{(\alpha)}+th_2, \dots u_n^{(\alpha)}+th_n)_\beta \, dt,$$

und zugleich die Determinante der als lineare Functionen von $h_1, h_2, \dots h_n$ betrachteten Ausdrücke auf der rechten Seite dieser n Gleichungen, welche für unendlich kleine Werthe von $h_1, h_2, \dots h_n$ unendlich wenig von der vorstehenden verschieden ist, ebenfalls nicht gleich Null ist. Dann sind die Differenzen auf der linken Seite der Gleichungen nur in dem Falle sämmtlich gleich Null, wenn sämmtliche Grössen $h_1, h_2, \dots h_n$ es sind. Hiernach ist es unmöglich, dass in einem Periodensystem der Function f jede einzelne Periode ihrem absoluten Betrage nach kleiner als h sei; mit anderen Worten, die Function besitzt kein System unendlich kleiner Perioden.

Es gilt also der Satz:

»Eine eindeutige analytische Function von n Veränderlichen sei periodisch, ohne als Function einer geringeren Anzahl von Argumenten, die ganze lineare Functionen der ursprünglichen sind, darstellbar zu sein, und r sei für sie die oben für eine beliebige periodische Function definirte Zahl, welche also einen der Werthe $1, 2, \dots 2n$ hat. Dann lassen sich stets r Periodensysteme

$$(P_{11}, P_{21}, \dots P_{n1}), \quad \dots \quad (P_{1r}, P_{2r}, \dots P_{nr})$$

der Function so auswählen, dass durch die Gleichungen

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

in denen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ beliebig anzunehmende ganze Zahlen bezeichnen, sämmtliche Periodensysteme der Function geliefert werden.«

Hierzu ist noch zu bemerken, dass es unmöglich ist, aus irgend welchen $(r-1)$ Periodensystemen alle übrigen abzuleiten; was aus der gegebenen Definition der Zahl r unmittelbar hervorgeht.

Dagegen lassen sich die r Systeme

$$(P_{1\beta}, P_{2\beta}, \dots P_{n\beta})$$

durch unendlich viele Complexe von r anderen ersetzen.

Nimmt man nämlich an

$$\overline{P}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{r} \nu_{\beta\gamma} P_{\alpha\gamma}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \dots n\\ \beta = 1, \dots r\end{pmatrix}$$

wo die $\nu_{\beta\gamma}$ ganze Zahlen bezeichnen, und es sollen sich aus den r Periodensystemen

$$(\overline{P}_{1\beta}, \overline{P}_{2\beta}, \dots \overline{P}_{n\beta}) \qquad (\beta = 1, \dots r)$$

alle übrigen ableiten lassen, so muss man haben

$$P_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{r} \nu'_{\alpha\gamma} \overline{P}_{\alpha\beta}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \dots n\\ \gamma = 1, \dots r\end{pmatrix}$$

wo die $\nu'_{\beta\gamma}$ ebenfalls ganze Zahlen bedeuten, und somit

$$P_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{r} \nu'_{\beta\gamma} \nu_{\beta\delta} P_{\alpha\delta}.$$

Es sind aber die Grössen $P_{\alpha\gamma}$, wie aus der gegebenen Definition derselben hervorgeht, so beschaffen, dass es unmöglich ist, die n Gleichungen

$$\sum_{\gamma=1}^{r} \mu_\gamma P_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

durch reelle Werthe von $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_r$, wenn diese nicht sämmtlich gleich Null sind, zu befriedigen. Folglich muss

$$\sum_{\beta=1}^{r} \nu'_{\beta\gamma} \nu_{\beta\delta} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \gamma = \delta, \\ 0, & \text{wenn } \gamma \gtrless \delta, \end{cases}$$

sein. Daraus ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} \nu_{11}, & \dots & \nu_{1r} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \nu_{r1}, & \dots & \nu_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \nu'_{11}, & \dots & \nu'_{1r} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \nu'_{r1}, & \dots & \nu'_{rr} \end{vmatrix} = 1,$$

und es müssen daher die Zahlen $\nu_{\beta\gamma}$ so gewählt werden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \nu_{11}, & \dots & \nu_{1r} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \nu_{r1}, & \dots & \nu_{rr} \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist. Umgekehrt erhält man, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Grössen $P_{\alpha\gamma}$ durch die $\overline{P}_{\alpha\beta}$ so ausgedrückt, dass die $\nu'_{\beta\gamma}$ ganze Zahlen sind, und kann daher sämmtliche Periodensysteme $(P_1, P_2, \dots P_n)$ auch aus den r Systemen

$$(\overline{P}_{11}, \overline{P}_{21}, \dots \overline{P}_{n1}), \quad \dots\dots \quad (\overline{P}_{1r}, \overline{P}_{2r}, \dots \overline{P}_{nr})$$

ableiten.

3.

Der im Vorstehenden bewiesene Satz gilt, wie ich jetzt zeigen will, auch in dem Falle, wo $f(u_1, u_2, \dots u_n)$ eine m-deutige analytische Function ist.

Bezeichnet man die m Werthe der Function, welche zu demselben Werthsystem $(u_1, u_2, \dots u_n)$ gehören, mit $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots\dots f^{(m)}$, und versteht unter x eine unbestimmte Grösse, so ist das Product

$$(x-f^{(1)})(x-f^{(2)})\dots\dots(x-f^{(m)})$$

eine eindeutige analytische Function von $u_1, u_2, \dots u_n$, und eine ganze rationale Function von x; es können also $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots\dots f^{(m)}$ definirt werden als die Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades

$$x^m + f_1(u_1, u_2, \dots u_n)\, x^{m-1} + \dots\dots + f_m(u_1, u_2, \dots u_n) = 0,$$

deren Coefficienten eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots u_n$ sind.

Diese Functionen von n Veränderlichen können nun so beschaffen sein, dass sie sich alle als Functionen einer geringeren Anzahl von Argumenten $(v_1, v_2, \dots v_l)$, welche ganze lineare Functionen von $u_1, u_2, \dots u_n$ sind, darstellen lassen. In diesem Falle kann man n Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, so bestimmen, dass die Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \frac{\partial v_\beta}{\partial u_\alpha} = 0 \qquad (\beta = 1, \dots l)$$

befriedigt werden, und daher $v_1, v_2, \dots v_l$ sich nicht ändern, wenn man, unter t eine unbestimmte Grösse verstehend,

$$u_1 + c_1 t,\ u_2 + c_2 t,\ \dots\ u_n + c_n t \quad \text{für} \quad u_1,\ u_2,\ \dots\ u_n$$

setzt. Es bestehen also die m Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad f_\mu(u_1 + c_1 t, u_2 + c_2 t, \dots u_n + c_n t) = f_\mu(u_1, u_2, \dots u_n), \quad (\mu = 1, \dots m)$$

und es sind demzufolge die m Werthe von $f(u_1+c_1t, u_2+c_2t, \ldots u_n+c_nt)$ identisch mit den m Werthen von $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$.

Die Function f besitzt also, wenn $f_1, \ldots\ldots f_m$ die angegebene Beschaffenheit haben, ein Periodensystem $(c_1t, c_2t, \ldots\ldots c_nt)$, in welchem, wenn man t unendlich klein annimmt, jede einzelne Periode einen unendlich kleinen Werth hat.

Aus den Gleichungen (A) ergeben sich die nachstehenden:

$$\text{(B)} \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \frac{\partial f_\mu(u_1, u_2, \ldots u_n)}{\partial u_\alpha} = 0, \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

welche also eine nothwendige Folge der in Betreff der Functionen $f_1, \ldots\ldots f_m$ gemachten Annahme sind.

Umgekehrt haben diese Functionen die in Rede stehende Beschaffenheit, wenn für irgend ein System constanter Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, die Gleichungen (B) bestehen. Denn dann ist

$$\frac{\partial f_\mu(u_1+c_1t, u_2+c_2t, \ldots u_n+c_nt)}{\partial t} = 0,$$

also $f_\mu(u_1+c_1t, u_2+c_2t, \ldots u_n+c_nt)$ von t unabhängig, und es gelten somit die Gleichungen (A). Setzt man aber in den letzteren

$$t = -\frac{u_\lambda}{c_\lambda},$$

wo λ so zu wählen ist, dass c_λ nicht den Werth Null hat, so ergiebt sich

$$f_\mu(u_1, u_2, \ldots u_n) = f_\mu(v_1, v_2, \ldots v_n), \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

wo

$$v_\alpha = u_\alpha - \frac{c_\alpha}{c_\lambda} u_\lambda, \quad v_\lambda = 0.$$

Nun ist aber, damit $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ als Function von $(n-1)$ linear durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ ausdrückbaren Argumenten betrachtet werden könne, nothwendig und hinreichend, dass sich $f_1(u_1, u_2, \ldots u_n), \ldots f_m(u_1, u_2, \ldots u_n)$ sämmtlich als Functionen derselben $(n-1)$ Grössen darstellen lassen. Wenn also, wie in dem zu beweisenden Satze angenommen wird, $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ die angegebene besondere Beschaffenheit **nicht** besitzt, so ist es unmöglich, dass für irgend ein System constanter Grössen $(c_1, c_2, \ldots c_n)$, wofern nicht jede von ihnen den

Werth Null hat, die m Functionen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha f_\mu(u_1, u_2, \ldots u_n)_\alpha,$$

wo $f_\mu(u_1, \ldots u_n)_\alpha$ die erste Ableitung von $f_\mu(u_1, u_2, \ldots u_n)$ nach u_α bedeutet, alle identisch gleich Null sind. Daraus lässt sich folgern, dass man n nicht singuläre Werthsysteme

$$(u'_1, \ldots u'_n), \quad (u''_1, \ldots u''_n), \quad \ldots \quad (u_1^{(n)}, \ldots u_n^{(n)})$$

und n ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, von denen jede einen der Werthe $1, 2, \ldots m$ hat, so auswählen kann, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_{\mu_1}(u'_1, \ldots u'_n)_1, & \ldots & f_{\mu_1}(u'_1, \ldots u'_n)_n \\ f_{\mu_2}(u''_1, \ldots u''_n)_1, & \ldots & f_{\mu_2}(u''_1, \ldots u''_n)_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\mu_n}(u_1^{(n)}, \ldots u_n^{(n)})_1, & \ldots & f_{\mu_n}(u_n^{(n)}, \ldots u_n^{(n)})_n \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth erhält.

Man bezeichne, unter s eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ verstehend, mit D_s die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{\mu_1}(u'_1, \ldots u'_n)_1, & \ldots & f_{\mu_1}(u'_1, \ldots u'_n)_s \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\mu_s}(u_1^{(s)}, \ldots u_n^{(s)})_1, & \ldots & f_{\mu_s}(u_1^{(s)}, \ldots u_n^{(s)})_s \end{vmatrix},$$

so dass

$$D_1 = f_{\mu_1}(u'_1, \ldots u'_n)_1$$

und $D_n = D$ ist. Dann hat man, wenn $s > 1$,

$$D_s = D_{s-1} f_{\mu_s}(u_1^{(s)}, \ldots u_n^{(s)})_1 + D'_{s-1} f_{\mu_s}(u_1^{(s)}, \ldots u_n^{(s)})_2 + \cdots,$$

wo $D_{s-1}, D'_{s-1}, \ldots$ nur von den $(s-1)$ ersten Werthsystemen $(u_1^{(\alpha)}, \ldots u_n^{(\alpha)})$ abhängen. Sind nun diese und die Zahlen $\mu_1, \ldots \mu_{s-1}$ so gewählt, dass D_{s-1} nicht gleich Null ist, so ist

$$D_{s-1} f_\mu(u_1, \ldots u_n)_1 + D'_{s-1} f_\mu(u_1, \ldots u_n)_2 + \cdots$$

nicht für jeden Werth von μ identisch gleich Null; man kann also μ_s und

$$(u_1^{(s)}, \ldots u_n^{(s)})$$

so annehmen, dass auch D_s nicht gleich Null ist. Da nun nicht alle Functionen

$$f_\mu(u_1, \ldots u_n)_1$$

gleich Null sind, so kann man zunächst

$$\mu_1 \text{ und } u'_1,\ u'_2,\ \dots u'_n,$$

sodann

$$\mu_2 \text{ und } u''_1,\ u''_2,\ \dots u''_n,$$

u. s. w. bis zuletzt

$$\mu_n \text{ und } u^{(n)}_1,\ u^{(n)}_2,\ \dots u^{(n)}_n$$

so wählen, dass $D_1, D_2, \dots D_n$ sämmtlich von Null verschiedene Werthe erhalten.

Man kann dann ferner eine Grenze h so fixiren, dass für alle Werthsysteme

$$(h_1, h_2, \dots h_n),$$

in denen jede einzelne Grösse dem absoluten Betrage nach kleiner als h ist,

$$\begin{aligned} & f_{\mu_s}(u^{(s)}_1 + h_1, \dots u^{(s)}_n + h_n) - f_{\mu_s}(u^{(s)}_1, \dots u^{(s)}_n) \\ & = \sum_{\beta=1}^{n} h_\beta \int_0^1 f_{\mu_s}(u^{(s)}_1 + th_1, \dots u^{(s)}_n + th_n)_\beta\, dt, \qquad (s = 1, \dots n) \end{aligned}$$

und zugleich die Determinante der als lineare Functionen von $h_1, \dots h_n$ betrachteten Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichungen, welche bei einem unendlich kleinen Werthe von h sich unendlich wenig von D unterscheidet, ebenfalls nicht gleich Null ist. Dann sind die Differenzen auf der linken Seite der Gleichungen nur in dem Falle sämmtlich gleich Null, wenn sämmtliche Grössen $h_1, \dots h_n$ es sind. Es ist also unmöglich, dass in einem gemeinschaftlichen Periodensysteme der Functionen

$$f_1(u_1, u_2, \dots u_n), \quad \dots \quad f_m(u_1, u_2, \dots u_n)$$

jede einzelne Periode dem absoluten Betrage nach kleiner als h sei. Da nun die m Werthe von $f(u_1+h_1, u_2+h_2, \dots u_n+h_n)$ nur in dem Falle, wo $(h_1, h_2, \dots h_n)$ ein gemeinschaftliches Periodensystem der Functionen $f_1, \dots f_m$ ist, mit den m Werthen von $f(u_1, u_2, \dots u_n)$ identisch sind, so folgt, dass die Function $f(u_1, \dots u_n)$, wofern sie nicht die besprochene besondere Beschaffenheit hat, kein System unendlich kleiner Perioden besitzt, und demnach der in (2.) für eine eindeutige Function aufgestellte Satz bestehen bleibt, wenn das Wort »eindeutig« in »m-deutig« umgeändert wird.

ANMERKUNGEN.

(Vom Jahre 1886.)

1) Unter welchen Bedingungen der vorstehende Satz für eine analytische Function $f(u_1, u_2, \dots u_n)$ auch in dem Falle gültig bleibe, wo sie so beschaffen ist, dass zu jedem Werthsysteme der Veränderlichen $u_1, u_2, \dots u_n$ unendlich viele Werthe von $f(u_1, u_2, \dots u_n)$ gehören, ist noch nicht ermittelt worden. Dass es aber Functionen dieser Art giebt, für welche der Satz nicht gilt, ist bekannt. Herr Casorati hat bereits vor Jahren gezeigt, wie sich analytische Functionen eines Arguments, deren Perioden sich nicht aus zwei derselben ableiten lassen, in sehr einfacher Weise definiren lassen. (Comptes rendus, 21 déc. 1863 et 25 janv. 1864.)

2) Das in § 1 begründete Theorem gilt, wie schon oben bemerkt worden ist, für eine beliebige (analytische oder nicht analytische) Function $f(u_1, u_2, \dots u_n)$. Es findet also auch Anwendung, wenn diese Function nur für reelle Werthe der Veränderlichen $u_1, u_2, \dots u_n$ definirt ist und somit auch nur Systeme reeller Perioden in Betracht kommen, in welchem Falle dann die Zahl r der gegebenen Definition nach nicht grösser als n sein kann. Dagegen ist der Satz, dass eine Function von n Variabeln nur dann Systeme unendlich kleiner Perioden haben kann, wenn sie sich als Function von weniger als n Argumenten, die ganze lineare Functionen der ursprünglichen sind, darstellen lässt, von mir nur für ein- oder m-deutige analytische Functionen bewiesen worden. Auf eine nicht analytische eindeutige und stetige Function reeller Argumente findet jedoch der gegebene Beweis auch noch Anwendung, wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Function existiren und ebenfalls stetige Functionen sind. Dass der in Rede stehende Satz aber richtig ist und sich beweisen lässt, wenn für eine Function reeller Veränderlichen nur feststeht, dass sie eindeutig und stetig sei, hat neuerdings Herr Kronecker nachgewiesen. (Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 20. November 1884.)

ÜBER CONTINUIRLICHE FUNCTIONEN EINES REELLEN ARGUMENTS, DIE FÜR KEINEN WERTH DES LETZTEREN EINEN BESTIMMTEN DIFFERENTIALQUOTIENTEN BESITZEN.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872.)

Bis auf die neueste Zeit hat man allgemein angenommen, dass eine eindeutige und continuirliche Function einer reellen Veränderlichen auch stets eine erste Ableitung habe, deren Werth nur an einzelnen Stellen unbestimmt oder unendlich gross werden könne. Selbst in den Schriften von Gauss, Cauchy, Dirichlet findet sich meines Wissens keine Äusserung, aus der unzweifelhaft hervorginge, dass diese Mathematiker, welche in ihrer Wissenschaft die strengste Kritik überall zu üben gewohnt waren, anderer Ansicht gewesen seien. Erst Riemann hat, wie ich von einigen seiner Zuhörer erfahren, mit Bestimmtheit ausgesprochen (i. J. 1861, oder vielleicht auch schon früher), dass jene Annahme unzulässig sei und z. B. bei der durch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

dargestellten Function sich nicht bewahrheite. Leider ist der Beweis hierfür von Riemann nicht veröffentlicht worden und scheint sich auch nicht in seinen Papieren oder durch mündliche Überlieferung erhalten zu haben. Dieses ist um so mehr zu bedauern, als ich nicht einmal mit Sicherheit habe erfahren können, wie Riemann seinen Zuhörern gegenüber sich ausgedrückt hat. Die Mathematiker, welche sich, nachdem die Riemann'sche Behauptung in weiteren Kreisen bekannt geworden war, mit dem Gegenstande beschäftigt haben, scheinen (wenigstens in ihrer Mehrzahl) der Ansicht gewesen zu sein, es genüge, die Existenz von Functionen nachzuweisen, welche in jedem noch so kleinen Intervalle ihres Arguments Stellen darbieten, wo sie nicht differentiirbar sind. Dass es Functionen dieser Art giebt, lässt sich ausserordentlich leicht nachweisen, und ich glaube daher, dass Riemann nur solche Functionen im Auge gehabt hat, die für keinen Werth ihres Arguments einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Der Beweis dafür, dass die angegebene trigonometrische Reihe eine Function dieser Art darstelle, scheint mir indessen einigermassen schwierig zu sein; man kann aber leicht continuirliche Functionen eines reellen Arguments x bilden, für welche sich mit den einfachsten Mitteln nachweisen lässt, dass sie für keinen Werth von x einen bestimmten Differentialquotienten besitzen.

Dies kann z. B. folgendermassen geschehen.

Es sei x eine reelle Veränderliche, a eine ungrade ganze Zahl, b eine positive Constante, kleiner als 1, und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi);$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich zeigen lässt, dass sie, sobald der Werth des Products ab eine gewisse Grenze übersteigt, an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt.

Es sei x_0 irgend ein bestimmter Werth von x, und m eine beliebig angenommene ganze positive Zahl; so giebt es eine bestimmte ganze Zahl α_m, für welche die Differenz

$$a^m x_0 - \alpha_m,$$

die mit x_{m+1} bezeichnet werde, $> -\frac{1}{2}$, aber $\leqq \frac{1}{2}$ ist.

Setzt man dann

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \qquad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

so hat man

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \qquad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

es ist also

$$x' < x_0 < x''.$$

Man kann aber m so gross annehmen, dass x', x'' beide der Grösse x_0 so nahe kommen, wie man will.

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^n\cdot\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{x'-x_0}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\cdot\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)}\right)\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\left(b^{m+n}\cdot\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right).\end{aligned}$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist, da

$$\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)} = -\pi\sin\left(a^n\frac{x'+x_0}{2}\pi\right)\cdot\frac{\sin\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

und der Werth von

$$\frac{\sin\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

stets zwischen -1 und $+1$ liegt, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n,$$

also auch kleiner als

$$\frac{\pi}{ab-1}(ab)^m.$$

Ferner hat man, weil a eine ungrade Zahl ist:

$$\begin{aligned}\cos(a^{m+n}x'\pi) &= \cos(a^n(\alpha_m-1)\pi) = -(-1)^{\alpha_m},\\ \cos(a^{m+n}x_0\pi) &= \cos(a^n\alpha_m\pi+a^n x_{m+1}\pi) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^n x_{m+1}\pi),\end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty}b^{m+n}\cdot\left(\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right) = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n.$$

Alle Glieder der Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n$$

sind positiv, und das erste, da $\cos(x_{m+1}\pi)$ nicht negativ ist, $1+x_{m+1}$ aber zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ liegt, nicht kleiner als $\frac{2}{3}$.

Hiernach hat man

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \cdot \eta\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo η eine positive Grösse, die >1, bezeichnet, während ε zwischen -1 und $+1$ enthalten ist.

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \cdot \eta_1\left(\frac{2}{3}+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo η_1 ebenso wie η positiv und >1 ist, ε_1 aber zwischen -1 und $+1$ liegt.

Nimmt man nun a, b so an, dass $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$, also

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$$

ist, so haben

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}, \qquad \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$$

stets entgegengesetzte Zeichen, werden aber beide, wenn m ohne Ende wächst, unendlich gross.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass $f(x)$ an der Stelle $(x = x_0)$ weder einen bestimmten endlichen, noch auch einen bestimmten unendlich grossen Differentialquotienten besitzt.

BEMERKUNGEN ZUR INTEGRATION EINES SYSTEMS LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT CONSTANTEN COEFFICIENTEN.

(Der Königl. Akademie der Wissenschaften mitgetheilt am 28. Oct. 1875.)

Die Resultate, zu denen ich in meiner Arbeit »Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen« gelangt bin, finden eine Anwendung bei der Aufgabe der Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten

$$(1.)\qquad \sum a_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum b_{\alpha\beta}x_\alpha, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$$

wo $x_1, x_2, \dots x_n$ die zu bestimmenden Functionen der unabhängigen Variabeln t sind. Auf diese Form kann man jedes derartige System bringen. Denn sollten höhere Ableitungen, z. B. $\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}$ auftreten, so braucht man nur $\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha$, $\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} = \frac{dx'_\alpha}{dt}$ zu setzen. Multiplicirt man die Gleichungen (1.) mit n unbestimmten Constanten y_β und addirt sie, so erhält man

$$(2.)\qquad \frac{d\varphi(x_1, \dots x_n \,|\, y_1, \dots y_n)}{dt} = \psi(x_1, \dots x_n \,|\, y_1, \dots y_n),$$

wo

$$(3.)\qquad \varphi = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta, \qquad \psi = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$$

zwei bilineare Formen sind. Man kann annehmen, dass die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist. Denn sonst kann man den Grössen y_β solche Werthe B_β geben, dass identisch $\varphi(x_1, \dots x_n \,|\, B_1, \dots B_n) = 0$, also nach (2.) auch $\psi(x_1, \dots x_n \,|\, B_1, \dots B_n) = 0$ ist. Ist nun keine der Gleichungen (1.) eine Folge der übrigen, so ist diese lineare Gleichung nicht identisch erfüllt. Man kann daher eine der Functionen x_α durch die übrigen ausdrücken und erhält dann aus dem gegebenen Gleichungssystem ein anderes mit nur $n-1$ unbekannten Functionen. Ich bediene mich nun derselben Bezeichnungen wie in der oben citirten Arbeit. Da $|a_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, so kann man dort $g = 1$ und $h = 0$ setzen und durch Einführung neuer Variabeln die beiden bilinearen Formen auf die Gestalt bringen

$$(4.)\qquad \varphi = \sum (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda}, \qquad \psi = \sum c_\lambda (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda} + \sum (X_\lambda Y_\lambda)_{e_\lambda - 1},$$

wo $(s-c_\lambda)^{e_\lambda}$ die Elementartheiler der Determinante der Form $s\varphi-\psi$ durchläuft und

$$(X_\lambda Y_\lambda)_e = \sum_{\mu+\nu=e} X_{\lambda\mu} Y_{\lambda\nu}$$

ist. Daher geht die Differentialgleichung (2.) über in

$$(5.)\qquad \sum_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda)} \frac{dX_{\lambda\mu}}{dt} Y_{\lambda\nu} = \sum_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda)} c_\lambda X_{\lambda\mu} Y_{\lambda\nu} + \sum_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu} Y_{\lambda\nu}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $Y_{\lambda\nu}$ ergeben sich daraus die Differentialgleichungen

$$(6.)\qquad \frac{dX_{\lambda 0}}{dt} = c_\lambda X_{\lambda 0}, \qquad \frac{dX_{\lambda\mu}}{dt} = c_\lambda X_{\lambda\mu} + X_{\lambda,\mu-1}.$$

Dies System zerfällt also in mehrere Systeme von der Form

$$(7.)\qquad \frac{dX}{dt} = cX, \quad \frac{dX_1}{dt} = cX_1 + X, \quad \cdots \quad \frac{dX_r}{dt} = cX_r + X_{r-1},$$

deren jedes einem Elementartheiler $(s-c)^r$ der Determinante von $s\varphi-\psi$ entspricht. Multiplicirt man diese Gleichungen mit e^{-ct}, so erhält man

$$\frac{d}{dt}(Xe^{-ct}) = 0, \quad \frac{d}{dt}(X_1 e^{-ct}) = Xe^{-ct}, \quad \cdots \quad \frac{d}{dt}(X_r e^{-ct}) = X_{r-1} e^{-ct}$$

und durch Integration

$$X = Ae^{ct}, \quad \frac{d}{dt}(X_1 e^{-ct}) = A, \quad X_1 = (At + A_1)e^{ct},$$

$$\frac{d}{dt}(X_2 e^{-ct}) = At + A_1, \quad X_2 = (\tfrac{1}{2}At^2 + A_1 t + A_2)e^{ct},$$

schliesslich

$$(8.)\qquad X_r = \left(\frac{A}{r!} t^r + \frac{A_1}{(r-1)!} t^{r-1} + \cdots + A_r\right) e^{ct}.$$

Die Constanten $A, A_1, \ldots A_r$ sind die Anfangswerthe der Functionen $X, X_1, \ldots X_r$ für $t = 0$. Sie bestimmen sich mittelst der bekannten linearen Transformationsformeln aus den Anfangswerthen von $x_1, x_2, \ldots x_n$.

ZUR THEORIE DER EINDEUTIGEN ANALYTISCHEN FUNCTIONEN.

(Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1876.)

---

1. Einleitung.

Unter den eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen zeichnen sich die rationalen durch eine charakteristische Eigenthümlichkeit aus, die zunächst festgestellt werden soll.

Ich will von einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ der complexen Veränderlichen x sagen, sie verhalte sich regulär in der Umgebung einer bestimmten Stelle $(x = a)$, wenn sie innerhalb eines gewissen Bezirks, dessen Mittelpunkt a ist, überall einen endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth hat. Nach einem bekannten Satze existirt dann eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$, welche innerhalb des genannten Bezirks die Function darstellt. Dies gilt auch, wenn $a = \infty$ ist, indem unter $\mathfrak{P}(x\,|\,\infty)$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ zu verstehen ist.*)

Die Gesammtheit der Stellen, an denen $f(x)$ diese beiden Eigenschaften besitzt, nenne ich den Stetigkeitsbereich der Function.

---

*) Ich bediene mich zur Bezeichnung einer Reihe von der Form

$$\sum_{\nu} A_\nu x^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

in Fällen, wo es auf die Werthe der von x unabhängigen Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ nicht ankommt, des Zeichens $\mathfrak{P}(x)$, auszusprechen »Potenzreihe von x«. Ist ferner a ein bestimmter Werth von x, so schreibe ich $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ für $\mathfrak{P}(x-a)$, um hervorzuheben, dass a der Mittelpunkt des Convergenzbezirks der Reihe ist. Diese Bezeichnungsweise behalte ich auch bei, wenn $a = \infty$ ist, indem ich in diesem Falle der Formel

$$x - \infty$$

die Bedeutung $\frac{1}{x}$ gebe.

Dieser Bereich ist — wenn man von dem Fall absieht, wo $f(x)$ sich auf eine Constante reducirt — stets ein begrenzter, wie sich folgendermassen beweisen lässt.

Es sei a irgend eine im Endlichen liegende Stelle und r der Radius des Convergenzbezirkes der Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$, welche die Function $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von a darstellt.

Hat r einen endlichen Werth, so giebt es unter denjenigen Werthen von x, für welche $|x-a| \overline{\gtrless} r$ ist,*) mindestens einen (x'), der dem in Rede stehenden Bereich nicht angehört. Dann ist entweder x' selbst eine Grenzstelle des Bereichs, oder es findet sich eine solche in der Strecke $(x' \ldots a)$ zwischen x' und a.

Ist dagegen $r = \infty$, so giebt es unendlich grosse Werthe von x, denen auch unendlich grosse Werthe von $f(x)$ entsprechen; in diesem Falle ist also die Stelle $(x = \infty)$ — und zwar diese allein — vom Stetigkeitsbereich der betrachteten Function ausgeschlossen und bildet die Begrenzung desselben.

Hiermit ist festgestellt, dass für jede Function $f(x)$ im Gebiete der Veränderlichen x nothwendig singuläre Stellen, wie ich sie nennen will, existiren, welche Grenzstellen des Stetigkeitsbereichs der Function sind, ohne diesem selbst anzugehören. (Das Letztere ergiebt sich unmittelbar aus der Definition des Stetigkeitsbereichs.)

Ist a' irgend eine solche singuläre Stelle, so giebt es innerhalb eines beliebigen Bezirks, dessen Mittelpunkt a' ist, unendlich viele Stellen, die dem Stetigkeitsbereich von $f(x)$ angehören. Möglicherweise gilt dies, wenn der Radius des Bezirks hinlänglich klein angenommen wird, von allen Stellen des letzteren, und dann kann es vorkommen, dass sich $f(x)$ durch Multiplication mit einer ganzen Potenz von $(x-a')$ in eine in der Umgebung von a' regulär sich verhaltende Function verwandeln lässt. Jenachdem dies der Fall ist oder nicht, nenne ich a' in Beziehung auf die Function $f(x)$ eine ausserwesentliche oder eine wesentliche singuläre Stelle.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken. Eine Function $f(x)$ kann so beschaffen sein, dass es im Gebiete von x Stellen giebt, die weder dem Stetigkeitsbereiche der Function (A) angehören, noch Grenzstellen desselben

*) Ich bezeichne den absoluten Betrag einer complexen Grösse x mit $|x|$.

sind. An diesen Stellen, deren Gesammtheit mit A'' bezeichnet werden möge, ist dann die Function nicht definirt. Es ist aber A'' ein Bereich von derselben Beschaffenheit wie A; nimmt man in demselben eine Stelle a'' beliebig an, so liegen auch alle einer gewissen Umgebung von a'' angehörigen Stellen in A''. Daraus folgt, dass der Bereich A'' ein begrenzter ist, seine Grenzstellen aber nicht zu ihm gehören, also, da sie auch nicht in A liegen, nothwendig mit Grenzstellen des letzteren Bereichs zusammenfallen, und zwar mit solchen, die wesentliche singuläre Stellen für die betrachtete Function sind. Nun liegt aber in jeder Strecke, die einen Punkt von A'' mit einem Punkte von A verbindet, mindestens eine Grenzstelle des Bereichs A''; es hat also die Function $f(x)$ in dem angenommenen Falle unendlich viele wesentliche singuläre Stellen.

Nach diesen Auseinandersetzungen lässt sich nun die Klasse der rationalen Functionen einer Veränderlichen (x) definiren als die Gesammtheit derjenigen eindeutigen Functionen von x, für die es im Gebiete dieser Grösse nur ausserwesentliche singuläre Stellen giebt.

Ist nämlich erstens $f(x)$ eine rationale Function — im gewöhnlichen Sinne — und a irgend ein bestimmter Werth von x, so kann man $f(x)$ zunächst als Quotienten zweier ganzen Functionen von $(x-a)$, die für $x=a$ nicht beide gleich Null sind, darstellen und sodann, wenn von den nicht verschwindenden Gliedern des Divisors das niedrigste von der m^{ten} Ordnung ist, bei hinlänglich kleinen Werthen von $(x-a)$

$$(x-a)^m f(x)$$

in eine Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$ entwickeln; d. h. es existiren für die Function $f(x)$ nur ausserwesentliche singuläre Stellen.

Angenommen zweitens, es sei $f(x)$ eine irgendwie definirte eindeutige Function, von der sich feststellen lässt, dass für sie wesentliche singuläre Stellen im ganzen Gebiete von x nicht existiren, so dass in der Umgebung jeder beliebig angenommen Stelle a die Function in der Form

$$(x-a)^{-m}\mathfrak{P}(x|a)$$

darstellbar ist, wo m eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet. Nimmt man zunächst $a=\infty$, so giebt es nach dem Obigen im Innern des Convergenzbezirkes der Reihe $\mathfrak{P}(x|a)$, jenachdem $m \gtreqless 0$ ist, entweder gar keine singuläre Stelle, oder nur die eine ∞. Sämmtliche singuläre Stellen — ausser ∞ — sind also in einem ganz im Endlichen liegenden Bereiche zu suchen. In demselben kann es aber nur eine endliche Anzahl solcher Stellen geben. Existiren nämlich für irgend eine eindeutige Function im Innern eines begrenzten Bereichs unendlich viele ausserwesentliche singuläre Stellen, so giebt es im Innern oder an der Grenze des Bereichs wenigstens eine Stelle, welche sich dadurch auszeichnet, dass in jeder Umgebung derselben von ihr verschiedene singuläre Stellen vorhanden sind, und die deshalb nothwendig eine wesentliche singuläre Stelle für die Function ist. Es ergiebt sich also aus der angenommenen Beschaffenheit der betrachteten Function $f(x)$ mit Nothwendigkeit, dass es für sie nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen geben kann.

Es ist nun zunächst der Fall möglich, dass $f(x)$ in der Umgebung jeder im Endlichen liegenden Stelle sich regulär verhält, also durch eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

dargestellt werden kann. Dann hat die Function nur die eine singuläre ∞, und da diese der Voraussetzung nach eine ausserwesentliche ist, so muss sich eine ganze, nicht negative Zahl m so bestimmen lassen, dass

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} f(x)$$

für jeden unendlich grossen Werth von x unendlich klein ist. Dies aber ist nach einem bekannten Satze nur möglich, wenn in der vorstehenden Reihe jeder Coefficient, dessen Index grösser als m ist, verschwindet. Es ist also in dem betrachteten Falle $f(x)$ eine ganze rationale Function.

In dem Falle ferner, dass $f(x)$ im Endlichen singuläre Stellen besitzt, mögen dieselben mit

$$a_1, \ldots a_r$$

bezeichnet werden, und es sei m_k die kleinste ganze Zahl, durch welche bewirkt werden kann, dass die Function

$$(x - a_k)^{m_k} f(x)$$

in der Umgebung der Stelle a_k sich regulär verhält. Dann ist

$$(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_r)^{m_r}f(x)$$

eine Function, welche in der Umgebung jeder im Endlichen liegenden Stelle sich regulär verhält, woraus nach dem Bewiesenen folgt, dass $f(x)$ in der Form

$$\frac{G(x)}{(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_r)^{m_r}}$$

dargestellt werden kann, wo $G(x)$ eine ganze rationale Function von x bedeutet.

Hiermit ist bewiesen, dass durch die gegebene Definition wirklich die charakteristische Eigenthümlichkeit der rationalen Functionen einer Veränderlichen ausgesprochen wird.

Durch die vorstehenden Erörterungen ist aber auch für die Untersuchung und Classification der transcendenten eindeutigen Functionen eines Arguments ein Fingerzeig gegeben.

Werden dem Stetigkeitsbereich einer Function diejenigen von seinen Grenzstellen, welche ausserwesentliche singuläre Stellen für die Function sind, hinzugefügt, so entsteht ein Bereich A', von welchem man, dem soeben Festgestellten gemäss, sagen kann, dass in ihm $f(x)$ überall wie eine rationale Function sich verhalte. Dieser Bereich ist ein unbegrenzter oder ein begrenzter, je nachdem $f(x)$ eine rationale oder eine transcendente Function ist, und im letzteren Falle wird seine Begrenzung von den wesentlichen singulären Stellen der Function gebildet, deren Anzahl endlich oder auch unendlich gross sein kann.

Betrachtet man nun als einer Klasse angehörend alle Functionen $f(x)$, für welche der definirte Bereich A' ein und derselbe ist, so bildet nach dem Vorhergehenden die Gesammtheit der rationalen Functionen von x eine solche Klasse. Dagegen existiren unzählige Klassen von transcendenten Functionen $f(x)$; um für die Eintheilung derselben in Gattungen ein sachgemässes Princip zu gewinnen, wird man zu untersuchen haben, welche wesentlichen Verschiedenheiten in der Begrenzungsweise eines Bereichs A', der für eine Klasse eindeutiger Functionen von x die angegebene Bedeutung hat, möglich sind. Aber auch ohne auf diese Untersuchung näher einzugehen, wird man in den eindeutigen Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen die den rationalen Functionen am nächsten stehenden erkennen, und als einer Gattung angehörend alle diejenigen betrachten, für welche die Zahl solcher Stellen dieselbe ist.

Man überzeugt sich leicht, dass es Functionen dieser Art mit beliebig vielen, und zwar vorgeschriebenen wesentlichen singulären Stellen wirklich giebt.

Wie oben bemerkt worden, wird durch jede unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,$$

deren Coefficienten gegebene Constanten und so beschaffen sind, dass die Reihe für alle endlichen Werthe der Veränderlichen x convergirt, eine Function mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞ dargestellt. Dasselbe gilt, wie in ganz ähnlicher Weise gezeigt werden kann, wenn $G_1(x)$, $G_2(x)$ zwei solche Functionen sind — wobei jedoch eine von ihnen auch eine ganze rationale sein darf — für den Quotienten

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$$

in jedem Falle, wo derselbe nicht auf eine rationale Function reducirt werden kann.

Dies vorausgesetzt, seien nun

$$G_1(x_1), \quad G_2(x_1), \quad \ldots \quad G_{2n-1}(x_n), \quad G_{2n}(x_n)$$

irgend n Paare solcher Functionen, $x_1, \ldots x_n$ aber lineare Functionen von x, welche an n verschiedenen, im Übrigen willkürlich anzunehmenden Stellen

$$c_1, \ldots c_n$$

unendlich gross werden; dann ist

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{G_{2\nu-1}(x_\nu)}{G_{2\nu}(x_\nu)}$$

eine eindeutige Function von x, für welche

$$c_1, \ldots c_n$$

wesentliche singuläre Stellen sind, während sie in der Umgebung jeder andern Stelle sich wie eine rationale Function verhält.

Zusammengesetztere Ausdrücke solcher Functionen kann man bilden, indem man in einer beständig convergirenden unendlichen Reihe von der Form

$$\sum \left\{ A_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n} \right\}$$
$$(\nu_1 = 0, \ldots \infty, \ \nu_2 = 0, \ldots \infty, \ \ldots \ \nu_n = 0, \ldots \infty)$$

oder auch in dem Quotienten zweier solcher Reihen für $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebige rationale Functionen der Veränderlichen x substituirt: die so gebildete Function von x hat dann keine anderen wesentlichen singulären Stellen als diejenigen, an denen eine der Grössen $x_1, \ldots x_n$ unendlich wird.

Nun ist im Vorhergehenden gezeigt worden, dass man von einer Function $f(x)$ nur zu wissen braucht, sie sei eine eindeutige Function ohne eine wesentliche singuläre Stelle, um sicher zu sein, dass sie als Quotient zweier ganzen rationalen Functionen von x (von denen sich eine auch auf eine Constante reduciren kann) darstellbar ist; mit anderen Worten, es ist nachgewiesen worden, dass durch die beiden angenommenen Eigenschaften der Function auch die Art der arithmetischen Abhängigkeit ihres Werthes von dem Werthe der unabhängigen Veränderlichen bedingt und bestimmt ist. Dadurch ist die Frage nahe gelegt, ob für die eindeutigen Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen etwas Ähnliches gelte — ob es möglich sei, arithmetische, aus der Veränderlichen x und aus unbestimmten Constanten zusammengesetzte Ausdrücke zu bilden, welche sämmtliche Functionen einer bestimmten Klasse — und nur diese — darstellen.

In der vorliegenden Arbeit findet diese Frage, in der ein den Elementen der Functionenlehre angehöriges, allgemeines und zugleich wohlbegrenztes Problem ausgesprochen ist, ihre vollständige Erledigung. Das Resultat ist einfacher als die Mannigfaltigkeit der Formen, in denen, wie die gegebenen Beispiele lehren, Functionen der in Rede stehenden Art auftreten können, es erwarten liess.

Unter den Functionen, um welche es sich handelt — die rationalen jetzt eingeschlossen — sind die einfachsten diejenigen, für welche es im ganzen Gebiete der unabhängigen Veränderlichen nur eine (wesentliche oder ausserwesentliche) singuläre Stelle giebt. Liegt diese Stelle im Unendlichen, so kann, wie oben bemerkt, eine solche Function stets dargestellt werden durch eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,$$

in der x das Argument der Function, die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ aber von x unabhängige, bestimmte Grössen bedeuten; so wie anderseits jede Reihe von dieser Form, wenn sie für jeden endlichen Werth von x convergirt, der Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit der einen singulären Stelle ∞ ist. Eine solche Function will ich eine ganze eindeutige Function von x nennen — oder auch bloss, wo keine Zweideutigkeit dadurch entsteht, eine ganze Function —; man hat also zu unterscheiden zwischen rationalen ganzen Functionen, für welche die Stelle ∞ eine ausserwesentliche singuläre ist und die angegebene Reihe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, und transcendenten ganzen Functionen, für welche ∞ eine wesentliche singuläre Stelle ist und die Reihe unendlich viele Glieder hat. Als Functionszeichen für eine unbestimmte, in der in Rede stehenden Form ausgedrückt gedachte Function verwende ich auch im Folgenden den Buchstaben G und unterscheide, wenn mehrere solche Functionen zu bezeichnen sind, die einzelnen durch hinzugefügte Indices.

Dies vorausgesetzt, ist nun die Beantwortung der gestellten Frage in folgenden Sätzen enthalten.

A. Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit nur einer (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle (c) ist

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

wo der obigen Festsetzung gemäss, wenn $c = \infty$, $\frac{1}{x-c}$ durch x zu ersetzen ist. Die singuläre Stelle ist eine wesentliche oder ausserwesentliche, jenachdem G eine transcendente oder eine rationale ganze Function von $\frac{1}{x-c}$ ist.

B. Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit n (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stellen $(c_1, \ldots c_n)$ kann in mannigfaltiger Weise aus n Functionen mit je einer singulären Stelle zusammengesetzt, am einfachsten aber in den nachstehenden Formen aufgestellt werden:

$$1)\quad \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right); \qquad 2)\quad \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \cdot R^*(x),$$

wo $R^*(x)$ eine rationale Function bedeutet, welche nur an den wesentlichen singulären Stellen der darzustellenden Function Null oder unendlich gross wird.

C. Jede eindeutige Function von x, welche n wesentliche singuläre Stellen ($c_1, \ldots c_n$) und ausser diesen noch beliebig viele (auch unendlich viele) ausserwesentliche hat, kann in jeder der beiden nachstehenden Formen:

$$1) \quad \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\dfrac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\dfrac{1}{x-c_\nu}\right)},$$

$$2) \quad \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\dfrac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\dfrac{1}{x-c_\nu}\right)} \cdot R^*(x)$$

ausgedrückt werden, und zwar dergestalt, dass Zähler und Nenner für keinen Werth von x beide verschwinden.

Umgekehrt stellt jeder dieser Ausdrücke, wenn die Functionen $G_1, \ldots G_{2n}$ willkürlich angenommen werden, eine eindeutige Function von x dar, welche im Allgemeinen n, in speciellen Fällen auch weniger als n wesentliche singuläre Stellen hat, während die Anzahl der ausserwesentlichen singulären Stellen, an denen die Function unendlich wird, unbeschränkt ist.

Von diesen Sätzen war bisher nur der unter (A) angeführte bekannt, und der unter (B, 1) aufgestellte aus bekannten Sätzen leicht abzuleiten. Die übrigen aufzufinden war nicht schwer, nachdem einmal die Aufgabe, um die es sich handelt, gehörig präcisirt war. Um sie allgemein beweisen zu können, hatte ich jedoch, wie sich alsbald ergab, zuvor eine in der Theorie der transcendenten ganzen Functionen bestehende, sogleich anzugebende Lücke auszufüllen, was mir erst nach manchen vergeblichen Versuchen vor nicht langer Zeit in befriedigender Weise gelungen ist.

Für jede eindeutige Function $f(x)$ gilt, dass in einem Theile des Gebiets von x, der weder im Innern noch an der Grenze eine wesentliche singuläre Stelle enthält, Werthe, für die $f(x) = \infty$, und ebenso Werthe, für die $f(x) = 0$ ist, stets nur in endlicher Anzahl vorhanden sind. Das Erstere ergiebt sich unmittelbar aus dem oben (S. 80) Bemerkten, und das Letztere ebenfalls, wenn man beachtet, dass die Function

$$\frac{1}{f(x)}$$

dieselben wesentlichen singulären Stellen hat wie $f(x)$ selbst.

Ist insbesondere $f(x)$ eine ganze eindeutige Function, so giebt es also unter den Werthen von x, deren absoluter Betrag eine willkürlich angenommene Grenze nicht übersteigt, stets nur eine endliche Anzahl solcher, für die $f(x)$ gleich Null ist. Dies gilt auch noch, wenn in Übereinstimmung mit dem bei ganzen rationalen Functionen Gebräuchlichen festgesetzt wird, dass bei Bestimmung der in Rede stehenden Zahl jeder Werth, für welchen ausser der Function $f(x)$ selbst auch die $(\mu-1)$ ersten Ableitungen derselben verschwinden, die μ^{te} aber nicht, als ein μ-mal zu zählender betrachtet werden soll.

Hieraus folgt, dass es stets möglich ist, aus denjenigen Werthen von x, für die eine bestimmte eindeutige ganze Function dieser Grösse verschwindet, eine Reihe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

zu bilden, welche jeden Werth so oft enthält, als er nach der gemachten Festsetzung zu zählen ist, und zugleich, falls die Anzahl ihrer Glieder unendlich gross ist, der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty$$

genügt. Die so gebildete Reihe $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ möge die Reihe der »Null-Stellen« der betreffenden Function heissen.

Dies festgestellt, ergeben sich nun zwei Fragen:

1) In wie weit ist eine Function $G(x)$ durch die Reihe ihrer Null-Stellen bestimmt?

2) Existirt, wenn eine unendliche Reihe bestimmter Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, die der Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} |a_n| = \infty$ genügt, gegeben ist, stets eine Function $G(x)$, für welche diese Reihe in dem festgestellten Sinne die Reihe der Null-Stellen bildet?

Die erste Frage beantwortet sich leicht. Es giebt unendlich viele ganze Functionen, welche dieselben Null-Stellen haben wie eine gegebene $G(x)$; sie sind sämmtlich enthalten in dem Ausdruck

$$G(x)\,e^{\overline{G}(x)},$$

wo unter $\overline{G}(x)$ eine willkürlich anzunehmende ganze Function zu verstehen ist.

Was dagegen die zweite, bis jetzt unerledigt gebliebene Frage angeht, so werde ich im folgenden Paragraphen nachweisen, dass dieselbe unbedingt zu bejahen ist.

Mit Hülfe des so gewonnenen fundamentalen Satzes lassen sich dann von den im Vorstehenden unter (C) aufgestellten Theoremen zunächst diejenigen leicht beweisen, welche auf Functionen mit einer wesentlichen singulären Stelle sich beziehen.

Sodann wird der nachstehende Hülfssatz eingeschaltet:

Es sei

$$\varphi(x) = k_0 + \frac{k_1}{x-c_1} + \cdots + \frac{k_n}{x-c_n},$$

wo die c und k Constanten bedeuten, welche nur der Beschränkung unterworfen sind, dass von den Grössen $k_1, \ldots k_n$ keine gleich Null, und von den Grössen $c_1, \ldots c_n$ nicht zwei einander gleich sein sollen. Ferner seien $F_0(y)$, $F_1(y)$, … $F_{n-1}(y)$ eindeutige Functionen der Veränderlichen y mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞. Alsdann stellt nicht nur der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(y)\cdot\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu,$$

wo c eine beliebige der Grössen $c_1, \ldots c_n$ bedeutet, wenn man in demselben

$$y = \varphi(x)$$

setzt, stets eine eindeutige Function mit den wesentlichen singulären Stellen $c_1, \ldots c_n$ dar, sondern es lassen sich auch für jede gegebene Function $f(x)$ dieser Art die Functionen $F_0(y), \ldots F_{n-1}(y)$ so bestimmen, dass

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(x))\cdot\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu$$

ist. Dabei werden $F_0(y), \ldots F_{n-1}(y)$ sämmtlich ganze Functionen von y, wenn die Function $f(x)$ keine ausserwesentliche singuläre Stelle hat.

Dieser Satz dient zur Begründung des unter (B, 1) gegebenen Ausdrucks einer Function mit n (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stellen.

Eine solche Function kann so beschaffen sein, dass sie an keiner Stelle, welche von den Stellen $c_1, \ldots c_n$ verschieden ist, verschwindet; in diesem Falle ergiebt sich für sie der Ausdruck

$$R^*(x) \prod_{\nu=1}^{n} e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}.$$

Ist nun $f(x)$ eine beliebige eindeutige Function mit den n wesentlichen singulären Stellen $c_1, \ldots c_n$, so hat man das Gebiet der Veränderlichen x in n Theile dergestalt zu zerlegen, dass im Innern eines jeden Theiles eine der genannten Stellen liegt, und dass zugleich die Function $f(x)$ an der Grenze zwischen je zwei Theilen überall einen endlichen und von Null verschiedenen Werth hat; dies kann auf unendlich viele Arten geschehen. Dann giebt es, wenn mit c irgend eine der Stellen $c_1, \ldots c_n$ und mit C der zugehörige Theil bezeichnet wird, unter den zu C gehörenden Werthen von x, für welche

$$|x-c| > \varrho$$

ist, wo ϱ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse bedeutet, nur eine endliche Anzahl solcher, für die $f(x)$ verschwindet; dasselbe gilt auch noch, wenn auch jetzt festgesetzt wird, dass bei der Zählung dieser Werthe so verfahren werde, wie vorhin für eine ganze Function angegeben worden ist. Es kann demnach, wenn es überhaupt in C Werthe giebt, für die $f(x) = 0$ ist, aus der Gesammtheit derselben eine Reihe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

in der Art gebildet werden, dass in derselben jeder einzelne Werth so oft vorkommt, als er der Festsetzung gemäss zu zählen ist, und zugleich, falls die Reihe nicht abbricht,

$$\lim_{n=\infty} |a_n - c| = 0$$

ist. Dann ist die Reihe

$$\frac{1}{a_1-c},\quad \frac{1}{a_2-c},\quad \ldots\quad \frac{1}{a_n-c},\quad \ldots$$

so beschaffen, dass eine Function $G(x')$ existirt, für welche sie die Reihe der

Null-Stellen bildet; und wenn man in dieser $x' = \frac{1}{x-c}$ setzt, so ist

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

eine Function von x, welche nur die eine wesentliche singuläre Stelle c hat und zu der Function $f(x)$ in der Beziehung steht, dass die vollständige Reihe ihrer Null-Stellen identisch ist mit der Reihe der dem betrachteten Theile C angehörenden Null-Stellen von $f(x)$. (Sind Werthe von x, für die $f(x)$ verschwindet, in C nicht vorhanden, so ist die definirte Function G in den folgenden Formeln durch die Zahl 1 zu ersetzen.) Ebenso giebt es, da die Function $\frac{1}{f(x)}$ dieselben wesentlichen singulären Stellen wie $f(x)$ hat, eine Function $G'\left(\frac{1}{x-c}\right)$, welche zu $\frac{1}{f(x)}$ in derselben Beziehung steht wie $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ zu $f(x)$.

Bezeichnet man nun diese beiden Functionen für die Stelle c_ν mit

$$G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right), \qquad G^{(n+\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

und setzt

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{G^{(n+\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} \right\} \cdot f_1(x),$$

so ist $f_1(x)$ eine Function, welche an allen Stellen des Gebiets von x, mit Ausnahme der Stellen $c_1, \ldots c_n$, einen endlichen und von Null verschiedenen Werth hat.

Drückt man sodann diese Function $f_1(x)$ in der vorhin angegebenen Weise aus, so ergeben sich die unter (B, 2) und (C, 2) aufgestellten Formen von $f(x)$. Aus der letzteren erhält man dann schliesslich mit Hülfe des Theorems (B, 1) den unter (C, 1) gegebenen Ausdruck derselben Function.

Die im Vorstehenden zusammengestellten Ausdrücke einer eindeutigen Function mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen können nun noch weiter entwickelt werden, so dass die arithmetische Abhängigkeit des Werthes der Function von dem Werthe ihres Arguments unmittelbar in Evidenz tritt. In den Formeln (B, 1) und (C, 1) ist es für diesen Zweck am angemessensten, jede Function $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ in der Form einer Potenzreihe von

$\frac{1}{x-c}$ darzustellen. Es lässt sich aber, wie in § 2 nachgewiesen wird, jede Function $G(x)$ auch darstellen als Product unendlich vieler Factoren, welche ebenso wie die Potenzen von x bestimmt charakterisirte Functionen sind; diese Ausdrucksform der Functionen $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ wird man am zweckmässigsten zur weiteren Entwicklung der Formeln (B, 2) und (C, 2) verwenden.

Ist

$$a_1, a_2, \dots a_r$$

die Reihe der Null-Stellen einer ganzen rationalen Function $G(x)$, und x_0 irgend ein in dieser Reihe nicht enthaltener Werth, so hat man

$$\frac{G(x)}{G(x_0)} = \prod_{n=1}^{r} \left(\frac{x-a_n}{x_0-a_n}\right).$$

Man hat schon früh versucht, diesen Satz auf transcendente ganze Functionen auszudehnen, wobei sich jedoch erhebliche Schwierigkeiten darboten. Man erkannte, dass es im Allgemeinen nöthig sei, dem Ausdruck rechts noch einen Factor von der Form

$$e^{\overline{G}(x)}$$

hinzuzufügen (Cauchy, Exercices de Mathématiques, IV.); aber dies reicht, abgesehen von dem Falle, wo Null-Stellen der Function nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, nur aus, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - x_0},$$

und mit ihr das Product

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-a_n}{x_0-a_n}\right)$$

convergirt, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Bei manchen Functionen gelingt es zwar, durch Festsetzung einer bestimmten Aufeinanderfolge der Factoren, oder überhaupt durch Vorschrift einer bestimmten Ausführungsweise der unendlich vielen Multiplicationen, das Product zu einem bedingt convergenten zu machen; im Allgemeinen indess ist auch dies nicht möglich, wie unter anderen das Beispiel der Function

$$\frac{1}{\Pi(x)}$$

zeigt, bei welcher das in Rede stehende, aus den Factoren

$$1+x, \quad 1+\frac{x}{2}, \quad 1+\frac{x}{3}, \quad \cdots$$

zu bildende Product unter allen Umständen divergirt.

Aber eben diese Function weist auf den Weg hin, der zum Ziele führt. Nach der von Gauss gegebenen Definition ist der Ausdruck derselben das beständig convergirende unendliche Product

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x}\right\}$$

oder

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right\};$$

d. h. die Function ist darstellbar als Product unendlich vieler Factoren, welche zwar nicht ganze lineare Functionen von x, aber doch gleich diesen eindeutige Functionen mit nur Einer singulären Stelle (∞) und auch nur Einer Null-Stelle sind.

Von dieser Bemerkung ausgehend legte ich mir die Frage vor, ob sich nicht jede Function $G(x)$ aus Factoren von der Form

$$(kx+l)\,e^{\overline{G}(x)}$$

möge zusammensetzen lassen, und gelangte, indem ich diesen Gedanken verfolgte, schliesslich zu einem Ergebnisse, durch welches die Theorie der eindeutigen Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen einen befriedigenden Abschluss erhält.

Ich nenne »Primfunction« von x jede eindeutige Function dieser Grösse, welche nur eine (wesentliche oder ausserwesentliche) singuläre Stelle und entweder nur eine oder gar keine Null-Stelle hat. Der allgemeinste Ausdruck einer solchen Function ist, wenn die singuläre Stelle mit c bezeichnet wird,

$$\left(\frac{k}{x-c}+l\right)e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

wo k, l Constanten bedeuten, und zu beachten ist, dass k auch gleich Null und $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ eine Constante sein kann. Es erweist sich aber für den in's

Auge gefassten Zweck als ausreichend und zweckmässig, ausschliesslich solche Primfunctionen einzuführen, bei denen $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ eine rationale ganze Function von $\frac{1}{x-c}$ ist; dies soll also im Folgenden überall, wo von Primfunctionen die Rede ist, stillschweigend angenommen werden.

Dies festgestellt, ergiebt sich zunächst, dass jede eindeutige Function $f(x)$ mit einer (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle entweder selbst eine Primfunction ist oder ein Product von Primfunctionen mit derselben singulären Stelle; die unter (B, 2) und (C, 2) angegebenen Ausdrücke lassen dann unmittelbar erkennen, dass und wie eine beliebige Function der dort betrachteten Arten aus Primfunctionen durch Multiplication und Division zusammengesetzt werden kann.

Ich lasse dieser Analyse des wesentlichen Inhalts meiner Arbeit und der Darlegung der leitenden Gesichtspunkte nunmehr die erforderlichen Entwicklungen in mehr synthetischer Form folgen, wobei ich bemerke, dass ich bei denselben mit Vorbedacht nur einige elementare Sätze der Reihen-Theorie und die Eigenschaften der Exponentialfunction als bekannt voraussetze.

2. Zur Theorie der ganzen eindeutigen Functionen Einer Veränderlichen.

Ist eine unendliche Reihe gegebener Grössen

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots,$$

von denen keine den Werth Null hat, so beschaffen, dass

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

so kann man derselben auf mannigfaltige Weise eine Reihe ganzer Zahlen

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \; \ldots,$$

von denen jede $\geqq 0$ ist, so zuordnen, dass die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu} \right|$$

für jeden Werth der Veränderlichen x einen endlichen Werth hat.

Man braucht zu dem Ende nur irgend eine unendliche Reihe positiver Grössen

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots$$

so anzunehmen, dass $\varepsilon < 1$ ist und dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$$

einen endlichen Werth hat, und dann die Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ so zu bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty$)

$$\varepsilon^{m_\nu+1} \leqq \varepsilon_\nu$$

wird.

Setzt man hierauf

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu},$$

so ist $F(x)$ eine für jeden endlichen Werth von x definirte eindeutige Function von der Beschaffenheit, dass sich $F(a+k)$, wenn a irgend ein bestimmter Werth von x ist, bei hinlänglich kleinem Werthe der Veränderlichen k in der Form

$$\frac{m}{k} + \mathfrak{P}(k)$$

darstellen lässt, wo m eine ganze (nicht negative) Zahl ist, welche angiebt, wie oft der Werth a in der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vorkommt. Nach einem früher (Crelle's Journal, Bd. 52, S. 333*)) von mir bewiesenen Satze existirt also eine Function $G(x)$, welche der Gleichung

$$\frac{dG(x)}{dx} = F(x).G(x)$$

genügt und die Eigenschaft besitzt, dass für sie die Reihe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

in dem oben angegebenen Sinne die Reihe der Null-Stellen bildet.

Dies lässt sich aber noch einfacher als a. a. O. folgendermassen beweisen.

Für diejenigen Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist, hat man

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r+1}}{r+1},$$

*) [Bd. I, S. 349 dieser Ausgabe.]

woraus

$$1-x = e^{-\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)}$$

folgt. Man setze nun

$$\begin{aligned}
E(x, 0) &= 1-x,\\
E(x, 1) &= (1-x)e^{x},\\
E(x, 2) &= (1-x)e^{x+\frac{1}{2}x^2},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
E(x, m) &= (1-x)e^{\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{x^r}{r}\right)},
\end{aligned}$$

so ist, unter der Bedingung, dass $|x| < 1$,

$$E(x, m) = e^{-\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{x^{m+r}}{m+r}\right)}.$$

Fasst man nun die Gesammtheit der Grössen in's Auge, welche aus der Formel

$$\frac{1}{r+m_\nu}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu}$$

dadurch hervorgehen, dass man $r = 1, 2, \dots \infty$; $\nu = n, n+1, \dots \infty$ setzt, so ist ersichtlich, dass die Summe dieser Grössen einen endlichen Werth hat, wenn der Veränderlichen x nur solche Werthe gegeben werden, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als jede der Grössen

$$a_n,\ a_{n+1},\ \dots;$$

denn dann ist sie kleiner als

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu} = \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}\cdot\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1},$$

also, wenn man mit k den kleinsten der Werthe

$$1-\left|\frac{x}{a_n}\right|,\quad 1-\left|\frac{x}{a_{n+1}}\right|,\quad \dots$$

bezeichnet, kleiner als das Product aus $\left|\frac{x}{k}\right|$ und der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|,$$

welche der Voraussetzung nach einen endlichen Werth hat. Daraus folgt, dass die Doppelsumme

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}$$

für die angegebenen Werthe von x nicht nur unbedingt convergirt, sondern auch dadurch, dass man alle Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in ein Glied zusammenzieht, in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x, n)$$

verwandelt werden kann.

Nimmt man nun zunächst x dem absoluten Betrage nach kleiner als jede der Grössen $a_1, a_2, \ldots$ an, so convergiren sämmtliche Reihen

$$\mathfrak{P}(x, 1),\ \mathfrak{P}(x, 2),\ \ldots,$$

und man hat

$$\mathfrak{P}(x, 1)-\mathfrak{P}(x, n+1) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu},$$

woraus sich

$$e^{-\mathfrak{P}(x,1)} = \prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right).e^{-\mathfrak{P}(x,n+1)}$$

ergiebt.

Es lässt sich aber jede der Functionen

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

in eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$1+A_1^{(\nu)}x+A_2^{(\nu)}x^2+\cdots$$

entwickeln, und

$$e^{-\mathfrak{P}(x,n+1)}$$

in eine Reihe von derselben Form

$$1+B_1^{(n)}x+B_2^{(n)}x^2+\cdots,$$

welche jedenfalls convergirt, wenn x dem absoluten Betrage nach kleiner als jede der Grössen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ ist. Nimmt man daher eine positive Grösse g beliebig, n aber so an, dass

$$|a_\nu| > g \text{ ist, wenn } \nu > n,$$

so geht aus der Entwicklung des Products

$$(1+B_1^{(n)}x+B_2^{(n)}x^2+\cdots)\prod_{\nu=1}^{n}(1+A_1^{(\nu)}x+A_2^{(\nu)}x^2+\cdots)$$

eine Reihe

$$1+A_1x+A_2x^2+\cdots$$

hervor, welche sicher für diejenigen Werthe von x, deren absoluter Betrag nicht grösser als g ist, convergirt. Die Coefficienten dieser Reihe sind aber, da der vorstehenden Gleichung gemäss für hinlänglich kleine Werthe von x

$$1+A_1x+A_2x^2+\cdots = e^{-\mathfrak{P}(x,1)}$$

ist, unabhängig von der willkürlich anzunehmenden Grösse g; es folgt also aus dem Bewiesenen, dass die Reihe für jeden endlichen Werth von x convergirt und somit eine ganze eindeutige Function $G(x)$ darstellt.

Diese Function verschwindet nun für einen bestimmten Werth a von x nur in dem Falle, wo a in der Reihe $a_1, a_2, \ldots$ enthalten ist, wie aus der Gleichung

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-\mathfrak{P}(x,n+1)}$$

ohne Weiteres erhellt, wenn man n so gross annimmt, dass a innerhalb des Convergenzbezirks der Reihe

$$\mathfrak{P}(x, n+1)$$

liegt, und beachtet, dass die Exponentialfunction für keinen endlichen Werth ihres Arguments verschwindet. Man sieht aber auch, dass, wenn a in der Reihe $a_1, a_2, \ldots$ μ-mal vorkommt,

$$G(x) \text{ auf die Form } (x-a)^\mu f(x)$$

in der Art gebracht werden kann, dass $f(x)$ für $x=a$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth hat. Die gegebene Reihe

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

ist also die Reihe der Null-Stellen für die Function $G(x)$, welche nach dem Vorstehenden dadurch hergestellt werden kann, dass zunächst die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu},$$

in welcher die Zahlen m_ν die oben angegebene Bedeutung haben, auf die Form $\mathfrak{P}(x, 1)$ gebracht, und dann

$$e^{-\mathfrak{P}(x, 1)}$$

nach Potenzen von x entwickelt wird.

Multiplicirt man $G(x)$ noch mit x^λ, wo λ eine ganze positive Zahl bedeutet, so erhält man eine Function, für welche die Reihe der Null-Stellen ausser den Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ noch λ Glieder, die gleich Null sind, enthält.

Es ist also stets möglich, eine ganze eindeutige Function $G(x)$ mit vorgeschriebenen Null-Stellen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

zu bilden, wofern nur die nothwendige Bedingung

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} |a_n| = \infty$$

erfüllt ist.

Es giebt aber nicht bloss e i n e solche Function, sondern u n e n d l i c h v i e l e.

Setzt man nämlich

$$G_1(x) = G(x)\, e^{\overline{G}(x)},$$

so hat offenbar die Function $G_1(x)$ dieselben Null-Stellen wie $G(x)$, wie auch die Function $\overline{G}(x)$ angenommen werden möge. Umgekehrt ist, wenn zwei Functionen $G(x)$, $G_1(x)$ dieselben Null-Stellen haben, der Quotient

$$\frac{G_1(x)}{G(x)},$$

der mit $G_2(x)$ bezeichnet werde, eine Function, die für jeden endlichen Werth von x einen von Null verschiedenen endlichen Werth hat. Es lässt sich deshalb

$$\frac{1}{G_2(x)}\,\frac{dG_2(x)}{dx}$$

in eine beständig convergirende Reihe

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots$$

entwickeln, und man erhält, wenn man

$$\overline{G}(x) = C_0 + C_1 x + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + \tfrac{1}{3} C_3 x^3 + \cdots$$

setzt, und die Constante C_0 so annimmt, dass

$$G_2(0) = e^{C_0}$$

ist,

$$\frac{1}{G_2(x)} \frac{dG_2(x)}{dx} = \frac{d\overline{G(x)}}{dx},$$

$$G_2(x) = e^{\overline{G}(x)}.$$

Die Formel

$$G(x)\, e^{\overline{G}(x)}$$

giebt also alle ganzen eindeutigen Functionen von x, welche dieselben Null-Stellen wie $G(x)$ haben.

Jetzt bedeute $G(x)$ irgend eine gegebene ganze Function von x, so können drei Fälle eintreten:

1) sie hat keine Null-Stellen — dann ist sie eine Function wie die eben mit $G_2(x)$ bezeichnete, und kann in der Form

$$e^{\overline{G}(x)}$$

ausgedrückt werden;

2) sie hat Null-Stellen in endlicher Anzahl — dann ist sie in der Form

$$G_0(x)\, e^{\overline{G}(x)}$$

darstellbar, wo $G_0(x)$ eine rationale ganze Function bedeutet;

3) sie hat unendlich viele Null-Stellen — in diesem Falle kann sie auf die Form

$$x^\lambda\, G_0(x)\, e^{\overline{G}(x)}$$

gebracht werden, wo λ Null oder eine ganze positive Zahl, $G_0(x)$ aber in der beschriebenen Weise aus den von Null verschiedenen Null-Stellen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ der Function, einer Reihe ganzer Zahlen $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ und der Veränderlichen x zusammenzusetzen ist.

Dieser Function $G_0(x)$ kann man nun nach dem Vorstehenden für einen bestimmten Werth von x die Gestalt

$$\prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-\mathfrak{P}(x,\, n+1)}$$

geben, wenn man n so gross annimmt, dass x dem absoluten Betrage nach kleiner ist als jede der Grössen $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$. Aus dem oben bestimmten Ausdruck der Grenze, unterhalb welcher der absolute Betrag von

$$\mathfrak{P}(x, n)$$

stets liegt, ergiebt sich aber

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \mathfrak{P}(x, n+1) = 0,$$

indem

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu} \right| = 0$$

ist, wenn die Zahlen m_ν, wie angenommen worden, so bestimmt sind, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu} \right|$$

einen endlichen Werth hat. Folglich ist — für jeden Werth von x —

$$G_0(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right).$$

Der Function $\overline{G}(x)$ kann man ferner in mannigfaltiger Weise die Gestalt

$$\overline{G}(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{g}_\nu(x)$$

geben, in der Art, dass die $\overline{g}_\nu(x)$ sämmtlich rationale, für $x = 0$ verschwindende ganze Functionen werden. Setzt man dann

$$g_\nu(x) = \overline{g}_\nu(x) + \sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^r,$$

so ergiebt sich

$$G(x) = C \cdot x^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{g_\nu(x)} \right\},$$

wo C eine Constante bedeutet. Da man nun auch im Falle (1)

$$G(x) = C \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{\overline{g}_\nu(x)},$$

und im Falle (2), wenn $a_1, a_2, \ldots a_m$ die von Null verschiedenen Null-Stellen der Function $G_0(x)$ sind,

$$G(x) = Cx^\lambda \prod_{\nu=1}^{m} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\overline{g}_\nu(x)} \right\} \cdot \prod_{\nu=m+1}^{\infty} e^{\overline{g}_\nu(x)}$$

hat, so ist hiermit der Satz begründet:

Jede ganze eindeutige Function von x kann dargestellt werden in der Gestalt eines Products, dessen Factoren sämmtlich Primfunctionen von der Form

$$(kx+l)e^{g(x)}$$

sind, wo $g(x)$ eine rationale, für $x=0$ verschwindende ganze Function ist und k, l Constanten bedeuten. (Dabei ist zu beachten, dass $g(x)$ und ebenso eine der Grössen k, l auch den Werth Null haben kann, also auch eine Constante als Primfunction zu betrachten ist.)

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken.

Das Product, durch welches $G(x)$ dargestellt wird, convergirt — wenn es aus unendlich vielen Factoren besteht — unbedingt und zugleich für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag eine willkürlich anzunehmende Grenze nicht übersteigt, gleichmässig, vorausgesetzt, dass bei der angegebenen Zerlegung der Function $\overline{G}(x)$ so verfahren wird, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{g}_{\nu}(x)$$

unbedingt und für die in Rede stehenden Werthe von x gleichmässig convergirt; was unter allen Umständen möglich ist. Denn unter dieser Voraussetzung braucht man nur nachzuweisen, dass das Product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_{\nu}}, m_{\nu}\right)$$

die angegebene Beschaffenheit besitzt, was der Fall ist, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Nach Annahme zweier positiven Grössen ξ, δ, von denen die erste beliebig gross, die andere beliebig klein sein kann, muss es möglich sein, eine Zahl n so zu bestimmen, dass das Product aus beliebig vielen derjenigen Functionen

$$E\left(\frac{x}{a_{\nu}}, m_{\nu}\right),$$

in denen $\nu > n$, für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag kleiner als ξ ist, von der Einheit um eine Grösse abweicht, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist. Dies ist aber in der That möglich. Nimmt man nämlich n so gross an, dass $|a_{\nu}| > \xi$ ist, sobald $\nu > n$, so hat man für jeden

Werth von ν, der grösser als n, und jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag nicht grösser als ξ ist,

$$E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}},$$

und es ist daher, wenn man von diesen Functionen $E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ beliebig viele auswählt und das Product derselben gleich

$$e^{-f(x)}$$

setzt, $|f(x)|$ stets kleiner als

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu} \left|\frac{\xi}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu},$$

von welcher Grösse gezeigt worden ist, dass sie für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird; woraus sich das Behauptete sofort ergiebt.

Es ist ferner zu beachten, dass die in den Primfactoren der Function $G(x)$ vorkommenden Exponentialgrössen nicht vollständig bestimmt sind. Nimmt man nämlich eine Reihe rationaler ganzer Functionen $g'_\nu(x)$ so an, dass für jeden Werth von x

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g'_\nu(x) = 0$$

ist — was auf unendlich viele Arten geschehen kann — so ändert der Ausdruck von $G(x)$ seinen Werth nicht, wenn man in jedem seiner Factoren

$$g_\nu(x) + g'_\nu(x) \quad \text{für} \quad g_\nu(x)$$

setzt. Umgekehrt erhellt, dass man auf diese Weise alle möglichen Darstellungen von $G(x)$ in der Form eines aus Primfunctionen gebildeten Products erhält.

Endlich möge noch bemerkt werden, dass in dem häufig vorkommenden Falle, wo für eine bestimmte ganze und positive Zahl μ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\mu}$$

einen endlichen Werth hat, die in den Functionen $E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ vorkommenden Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ alle gleich $(\mu - 1)$ gesetzt werden können.*)

*) Die in diesem und dem folgenden § enthaltenen Sätze habe ich bereits im Herbst 1874 in meinen Universitäts-Vorlesungen ausführlich vorgetragen.

3. Eindeutige Functionen von x mit Einer wesentlichen singulären Stelle.

Ist $f(x)$ eine eindeutige Function von x mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞, so lässt sich in dem Falle, wo sie ausserdem beliebig viele (auch unendlich viele) ausserwesentliche singuläre Stellen hat, eine Function $G_2(x)$ herstellen, für welche die Reihe der Null-Stellen identisch ist mit der Reihe der Null-Stellen der Function

$$\frac{1}{f(x)}.$$

Dann ist $G_2(x).f(x)$ ebenfalls eine ganze Function von x, und man hat, wenn diese mit $G_1(x)$ bezeichnet wird,

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)}.$$

Zugleich sind diese Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$ so beschaffen, dass sie für denselben Werth von x nicht beide verschwinden. Und umgekehrt, wenn man zwei ganze Functionen von dieser Beschaffenheit willkürlich annimmt, und wenigstens eine von ihnen transcendent ist, so stellt der Quotient

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$$

eine eindeutige Function von x dar, welche höchstens die eine wesentliche singuläre Stelle ∞ hat.

Ist ferner $f(x)$ eine eindeutige Function mit einer (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle c, so verwandelt sich, wenn man

$$x' = \frac{1}{x-c}$$

setzt, $f(x)$ in eine Function von x' mit der einen singulären Stelle ∞, woraus sich

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

ergiebt. Dabei ist G eine transcendente oder rationale Function, jenachdem die singuläre Stelle c eine wesentliche oder ausserwesentliche ist.

Ebenso ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck einer eindeutigen Function von x, welche ausser einer wesentlichen singulären Stelle c beliebig viele ausserwesentliche hat, der Quotient

$$\frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

wo die Functionen G_1, G_2 nicht beide für einen und denselben Werth von x verschwinden, und wenigstens eine von ihnen transcendent ist.

4. Ein Hülfssatz.

Ist $F(y)$ eine eindeutige Function, welche nur die eine wesentliche singuläre Stelle ∞ hat, und $\varphi(x)$ eine rationale Function n^{ten} Grades, welche an n verschiedenen Stellen $(c_1, \dots c_n)$ gleich ∞ wird, so verwandelt sich $F(y)$, wenn man $y = \varphi(x)$ setzt, in eine eindeutige Function von x mit den n wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \dots c_n)$. Man überzeugt sich indessen leicht, dass man auf diese Weise nur besondere Functionen dieser Art erhält. Wohl aber ist es möglich, wie bereits in § 1 angegeben worden und jetzt bewiesen werden soll, jede eindeutige Function $f(x)$, deren wesentliche singuläre Stellen $(c_1, \dots c_n)$ sind, in der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(x)) \cdot \left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu$$

darzustellen, wo c irgend eine der Grössen $c_1, \dots c_n$ bedeutet.

Ich will zuerst annehmen, dass eine der wesentlichen singulären Stellen von $f(x)$, z. B. c_1, den Werth ∞ habe, so dass

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \frac{k_2}{x-c_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-c_n}$$

ist, wo von den Constanten $k_1, \dots k_n$ keine den Werth Null hat. Nimmt man dann zwischen x und einer andern Veränderlichen y die Gleichung

$$\varphi(x) = y$$

an, so gehören zu jedem endlichen Werthe von y im Allgemeinen n ebenfalls endliche und zugleich von den $c_1, \dots c_n$ verschiedene Werthe von x, welche mit $x_1, \dots x_n$ bezeichnet werden mögen; und man kann, wenn von denjenigen speciellen, nur in endlicher Anzahl vorhandenen Werthen von y, für die unter den Grössen $x_1, \dots x_n$ sich gleiche finden, vorläufig abgesehen wird, n von y abhängige Grössen $F_0, F_1, \dots F_{n-1}$ dergestalt bestimmen, dass

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu x^\nu = f(x) \text{ ist für } x = x_1, \dots x_n.$$

Setzt man

$$\Pi(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n), \qquad \Pi'(x) = \frac{d\Pi(x)}{dx},$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \frac{\Pi(x)}{x-x_\nu};$$

woraus sich — wenn

$$\Pi(x) = x^n + X_1 x^{n-1} + X_2 x^{n-2} + \dots + X_n$$

gesetzt wird, so dass also

$$\frac{\Pi(x)}{x-x_\nu} = x^{n-1} + (x_\nu + X_1) x^{n-2} + (x_\nu^2 + X_1 x_\nu + X_2) x^{n-3} + \dots + (x_\nu^{n-1} + X_1 x_\nu^{n-2} + \dots + X_{n-1})$$

ist — die folgenden Formeln ergeben:

$$\begin{aligned}
F_{n-1} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \\
F_{n-2} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \cdot X_1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \\
F_{n-3} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \cdot X_2 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \cdot X_1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2 f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_0 &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \cdot X_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \cdot X_{n-2} + \dots + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{n-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}.
\end{aligned}$$

Von diesen Ausdrücken $F_0, F_1, \dots F_{n-1}$ ist nun zu zeigen, dass sie eindeutige Functionen von y sind, welche höchstens die eine wesentliche singuläre Stelle ∞ haben.

Setzt man

$$(x-c_2)\dots(x-c_n) = \psi(x),$$

so ist

$$\psi(x)(\varphi(x)-y) = k_1 \Pi(x),$$

und es sind demnach $X_1, \dots X_{n-1}$ sämmtlich ganze lineare Functionen von y.

Die Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \quad \ldots \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{n-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}$$

ferner, in denen die Grössen $x_1, \ldots x_n$ ebenso wie in $X_1, \ldots X_n$ symmetrisch vorkommen, haben gleichfalls eindeutig bestimmte Werthe für jeden Werth von y, der nicht zu den vorläufig ausgeschlossenen gehört; es reicht dies aber nicht aus zu dem Nachweise, dass sie — und mit ihnen $F_0, \ldots F_{n-1}$ — Functionen der angegebenen Art von y sind, sondern es muss auch gezeigt werden, dass sich dieselben, wenn y in der Umgebung irgend eines bestimmten endlichen Werthes b angenommen wird, entweder unmittelbar oder doch, nachdem sie mit einer gewissen ganzen positiven Potenz von $(y-b)$ multiplicirt worden, in der Form

$$\mathfrak{P}(y-b)$$

darstellen lassen.

Wird zunächst b so angenommen, dass unter den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = b$, welche mit $a_1, \ldots a_n$ bezeichnet werden mögen, keine zwei gleiche sich finden, so ist

$$\varphi'(a_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

nicht gleich Null, und es hat also die Gleichung

$$\varphi(x) = y,$$

welche, wenn x in der Umgebung von a_ν angenommen wird, auf die Form

$$\varphi'(a_\nu).(x-a_\nu) + \tfrac{1}{2}\varphi''(a_\nu).(x-a_\nu)^2 + \cdots = y-b$$

gebracht werden kann, für hinlänglich kleine Werthe von $(y-b)$ eine in der Form

$$a_\nu + (y-b)\,\mathfrak{P}_\nu(y-b)$$

darstellbare Wurzel. Wird diese mit x_ν bezeichnet, so hat man, da $\Pi'(a_\nu)$ nicht gleich Null, und a_ν nicht eine der wesentlichen singulären Stellen der Function $f(x)$ ist, für $\lambda = 1, \ldots n$

$$\frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = (x_\nu - a_\nu)^{-m_\nu}\,\overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_\nu - a_\nu),$$

wo m_ν Null oder eine ganze positive Zahl ist, jenachdem $f(x)$ in der Umgebung von a_ν sich regulär verhält oder nicht. Bedeutet also m die grösste der Zahlen $m_1, \dots m_n$, so ist

$$(y-b)^m \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \mathfrak{P}^{(\lambda)}(y-b).$$

Hat aber b einen solchen Werth, dass die Gleichung

$$\varphi(x) = b$$

weniger als n von einander verschiedene Wurzeln besitzt, so sei a eine derselben, und μ die Ordnungszahl der niedrigsten Ableitung von $\varphi(x)$, welche für $x = a$ nicht verschwindet. Dann lässt sich die Gleichung

$$\varphi(x) = y,$$

wenn x in der Umgebung von a angenommen wird, auf die Form

$$\frac{1}{\mu!}\varphi^{(\mu)}(a).(x-a)^\mu + \frac{1}{(\mu+1)!}\varphi^{(\mu+1)}(a).(x-a)^{\mu+1} + \cdots = y-b$$

bringen, und es giebt, wenn man

$$\left[\frac{\mu!(y-b)}{\varphi^{(\mu)}(a)}\right]^{\frac{1}{\mu}} = \eta$$

setzt, eine Reihe von der Form

$$a + \eta\mathfrak{P}(\eta),$$

welche, für x gesetzt, bei hinlänglich kleinen Werthen von $(y-b)$ die Gleichung

$$\varphi(x) = y$$

befriedigt; wobei zu beachten ist, dass $\mathfrak{P}(\eta)$ für $\eta = 0$ nicht verschwindet. Fixirt man also einen der μ Werthe von η und setzt

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}},$$

$$x_1 = a + \eta\mathfrak{P}(\eta), \quad x_2 = a + \varepsilon\eta\mathfrak{P}(\varepsilon\eta), \quad \dots \quad x_\mu = a + \varepsilon^{\mu-1}\eta\mathfrak{P}(\varepsilon^{\mu-1}\eta),$$

so sind $x_1, x_2, \dots x_\mu$ diejenigen μ Wurzeln der Gleichung, welche für $y = b$ den Werth a annehmen. Man hat dann, da die niedrigste Ableitung von $\Pi(x)$, welche für $y = b$, $x = a$ nicht verschwindet, die μ^{te} ist, für $\nu = 1, \dots \mu$

$$\Pi'(x_\nu) = nx_\nu^{n-1} + (n-1)X_1 x_\nu^{n-2} + \cdots + X_{n-1} = (\varepsilon^{\nu-1}\eta)^{\mu-1}\overline{\mathfrak{P}}(\varepsilon^{\nu-1}\eta),$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}(\varepsilon^{\nu-1}\eta)$ für $\eta = 0$ nicht verschwindet, und, wenn für Werthe von x in der Umgebung der Stelle a

$$f(x) = (x-a)^{-m}[A_0 + A_1(x-a) + \cdots],$$

so ist

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \eta^{-m\mu-\mu} . \sum_{\nu=1}^{\mu} \varepsilon^{\nu-1}\eta \mathfrak{P}^{(\lambda)}(\varepsilon^{\nu-1}\eta).$$

Aus der Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung müssen nun, da

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \varepsilon^{(\nu-1)\varrho}$$

nur für solche ganzzahligen Werthe von ϱ, die durch μ theilbar sind, einen von Null verschiedenen Werth hat, alle Potenzen von η, deren Exponent nicht ein Vielfaches von μ ist, fortfallen; und es ist daher

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = (y-b)^{-m} \mathfrak{P}^{(\lambda)}(y-b).$$

Hat also die Gleichung

$$\varphi(x) = b$$

r von einander verschiedene Wurzeln $a_1, \ldots a_r$, und haben $\mu_\varkappa, m_\varkappa$ für $a_\varkappa$ dieselbe Bedeutung wie im Vorstehenden μ, m für a, so ergiebt sich für hinlänglich kleine Werthe von $(y-b)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{r} (y-b)^{-m_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa^{(\lambda)}(y-b),$$

und somit, wenn jetzt m die grösste der Zahlen $m_\varkappa$ bedeutet, ganz so wie in dem Falle, wo unter den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = b$ sich keine zwei gleiche finden,

$$(y-b)^m \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \mathfrak{P}^{(\lambda)}(y-b).$$

Hiermit ist bewiesen, dass die Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \qquad (\lambda = 1, \ldots n)$$

und daher auch die Grössen $F_0, \ldots F_{n-1}$, welche jetzt mit

$$F_0(y), \ldots F_{n-1}(y)$$

bezeichnet werden mögen, eindeutige Functionen der Veränderlichen y sind, welche höchstens die eine wesentliche singuläre Stelle ∞ haben. Zugleich folgt aus dem Vorstehenden, dass $F_0(y), \ldots F_{n-1}(y)$ in dem Falle, wo es für die Function $f(x)$ ausserwesentliche singuläre Stellen nicht giebt — die Zahl m also stets gleich Null ist — sämmtlich ganze Functionen von y sind.

Der Definition dieser Functionen $F_\nu(y)$ gemäss besteht nun die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(y) x^\nu = f(x),$$

wenn für irgend einen endlichen Werth von y die Grösse x der Gleichung $\varphi(x) = y$ genügt. Versteht man also unter x' irgend einen endlichen, von den $c_2, \ldots c_n$ verschiedenen Werth und setzt $y = \varphi(x')$, so kann man $x = x'$ nehmen, und erhält dann

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(x')) x'^\nu = f(x');$$

d. h. es gilt für jeden Werth von x, der nicht in der Reihe $(\infty, c_2, \ldots c_n)$ enthalten ist, die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(x)) x^\nu = f(x).$$

Es ist angenommen worden, dass c_1 gleich ∞ sei, weil dann einem endlichen Werthe von y stets endliche Werthe der Grössen $x_1, \ldots x_n$ entsprechen, und somit bei dem Beweise des vorstehenden Satzes das Verhalten der Functionen $F_\nu(y)$ in der Umgebung der Stelle ∞ nicht besonders untersucht zu werden braucht. Sind aber $c_1, \ldots c_n$ sämmtlich endliche Grössen, so setze man

$$x = c_1 + \frac{1}{z},$$

und bezeichne mit $\overline{\varphi}(z), \overline{f}(z)$ die Functionen, in welche sich $\varphi(x), f(x)$ dadurch verwandeln. Dann hat man

$$\overline{\varphi}(z) = k'_0 + k'_1 z + \frac{k'_2}{z - c'_2} + \cdots + \frac{k'_n}{z - c'_n},$$

— wo die k', c' wieder Constanten bedeuten — und es sind $(\infty, c'_2, \ldots c'_n)$ die wesentlichen singulären Stellen für die Function $\overline{f}(z)$. Man hat also, wenn man jetzt die Functionen $F_0(y), \ldots F_{n-1}(y)$ für die Function $\overline{f}(z)$ ebenso bestimmt wie im Vorhergehenden für $f(x)$,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\overline{\varphi}(z))z^\nu = \overline{f}(z),$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} F_\nu(\varphi(x)) \cdot \left(\frac{1}{x-c_1}\right)^\nu = f(x).$$

In dieser Form, welche in die vorher aufgestellte übergeht, wenn man $c_1 = \infty$ setzt, kann also die Function $f(x)$ stets dargestellt werden, wenn $\varphi(x)$ eine beliebige rationale Function n^{ten} Grades ist, welche an jeder der n wesentlichen singulären Stellen der ersteren unendlich gross wird.*)

5. Eindeutige Functionen von x mit einer endlichen Anzahl (wesentlicher oder ausserwesentlicher) singulärer Stellen.

Eine rationale Function $f(x)$ mit den singulären (ausserwesentlichen) Stellen $c_1, \ldots c_n$ lässt sich bekanntlich in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

darstellen, wo $G_1, \ldots G_n$ rationale ganze Functionen bedeuten.

Es soll nun gezeigt werden, dass jede eindeutige Function $f(x)$ mit einer endlichen Anzahl (wesentlicher oder ausserwesentlicher) singulärer Stellen $(c_1, \ldots c_n)$ in derselben Form ausgedrückt werden kann, und zwar dergestalt, dass unter den Functionen

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

so viel transcendente vorkommen, als $f(x)$ wesentliche singuläre Stellen hat.

Es möge zunächst $f(x)$ nur wesentliche singuläre Stellen haben. Dann sind, wenn man $f(x)$ auf die im vorhergehenden § auseinandergesetzte Weise in der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(\varphi(x)) \cdot \left(\frac{1}{x-c_1}\right)^\nu$$

darstellt, die Functionen $F_\nu(y)$, wie nachgewiesen worden ist, sämmtlich ganze

*) Es lassen sich leicht auch ähnliche Ausdrücke von $f(x)$, in denen die Grössen $c_1, \ldots c_n$ symmetrisch vorkommen, aufstellen; es genügt aber der vorstehende für den zunächst ins Auge gefassten Zweck.

Functionen von y, so dass man

$$F_\nu(\varphi(x)) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{\nu,\lambda}.(\varphi(x))^\lambda$$

hat, wo die $F_{\nu,\lambda}$ von x unabhängige Grössen sind.

Für alle Werthe von x, bei denen der absolute Betrag von $(x-c_1)$ unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt, ist nun

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-c_1}\mathfrak{P}(x-c_1),$$

$$F_\nu(\varphi(x)) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{\nu,\lambda}.(x-c_1)^{-\lambda}.(\mathfrak{P}(x-c_1))^\lambda;$$

und somit, wenn man

$$(\mathfrak{P}(x-c_1))^\lambda = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^\mu$$

setzt,

$$F_\nu(\varphi(x)) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty} F_{\nu,\lambda}.A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^{-\lambda+\mu}\right\}.$$

Die Doppelsumme auf der Rechten dieser Gleichung hat aber die Eigenschaft, dass sie convergent bleibt, wenn man jedes ihrer Glieder durch dessen absoluten Betrag ersetzt. Convergirt nämlich die Reihe $\mathfrak{P}(x-c_1)$, wenn der absolute Betrag von $(x-c_1)$ kleiner als ϱ ist, so lässt sich eine positive Grösse g so bestimmen, dass jeder Coefficient von $\mathfrak{P}(x-c_1)$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als der entsprechende Coefficient in der Entwickelung der Function

$$\frac{g}{1-\dfrac{x-c_1}{\varrho}};$$

und dann ist, wenn $|x-c_1| = \xi$ gesetzt und $\xi < \varrho$ angenommen wird,

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^{-\lambda+\mu}\right| < g^\lambda\xi^{-\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\lambda},$$

also

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|(F_{\nu,\lambda}.A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^{-\lambda+\mu})\right| < \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(|F_{\nu,\lambda}|.g^\lambda\xi^{-\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\lambda}\right),$$

woraus sich das Behauptete sofort ergiebt, indem die Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(|F_{\nu,\lambda}|.y^\lambda)$$

für jeden endlichen Werth von y einen ebenfalls endlichen Werth hat.

Die Doppelsumme, durch welche $F_\nu(\varphi(x))$ ausgedrückt worden, convergirt also unbedingt, und es ist daher gestattet, in ihr alle Glieder, welche dieselbe Potenz von $(x-c_1)$ enthalten, in eines zusammenzuziehen. Geschieht dies in den Ausdrücken sämmtlicher Functionen

$$F_\nu(\varphi(x)),$$

so ergiebt sich

$$f(x) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} C_\varkappa^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_1}\right)^\varkappa + \mathfrak{P}^{(1)}(x-c_1)$$

für alle Werthe von x, bei denen der absolute Betrag von $(x-c_1)$ kleiner als ϱ ist.

Die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} C_\varkappa^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_1}\right)^\varkappa$$

convergirt hiernach für beliebig grosse Werthe von $\frac{1}{x-c_1}$, und ist also eine *ganze* Function dieser Grösse, welche mit $G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$ bezeichnet werden möge.

Man hat dann

$$f(x) - G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right) = \mathfrak{P}^{(1)}(x-c_1);$$

d. h. *die Differenz*

$$f(x) - G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$$

verhält sich in der Umgebung der Stelle c_1 regulär.

Versteht man nun unter $G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ die Function, welche in Beziehung auf die singuläre Stelle c_ν dieselbe Bedeutung hat wie $G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$ in Beziehung auf die Stelle c_1, so ist

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

eine eindeutige Function von x, welche sich in der Umgebung jeder beliebig angenommenen Stelle regulär verhält. Denn die Function $G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ verhält sich regulär in der Umgebung jeder von c_ν verschiedenen Stelle; es könnte also jene nur die singulären Stellen $c_1, \ldots c_n$ haben, was nach dem eben Bewiesenen nicht der Fall ist — und hieraus folgt, wie schon in § 1 gezeigt worden, dass sie einen constanten Werth hat, der mit C bezeichnet werden möge.

Es ist also

$$f(x) = C+\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

oder auch, wenn man zu den Functionen $G_1, \ldots G_n$ constante Glieder, deren Summe gleich C ist, hinzufügt,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right).$$

Wenn nun ferner $f(x)$ die m wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \ldots c_m)$, und die $(n-m)$ ausserwesentlichen $(c_{m+1}, \ldots c_n)$ hat, so lässt sich, wenn ν eine der Zahlen $(m+1), \ldots n$ ist, und x in der Umgebung von c_ν angenommen wird,

$$f(x) \text{ in der Form } (x-c_\nu)^{-m_\nu}.\{C_0^{(\nu)}+C_1^{(\nu)}(x-c_\nu)+\cdots\}$$

darstellen. Setzt man also

$$\sum_{\varkappa=0}^{m_\nu-1} C_\varkappa^{(\nu)}(x-c_\nu)^{-m_\nu+\varkappa} = G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

$$f(x)-\sum_{\nu=m+1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) = f_1(x),$$

so ist $f_1(x)$ eine eindeutige Function, welche m wesentliche singuläre Stellen $(c_1, \ldots c_m)$, aber keine ausserwesentliche hat, und deshalb nach dem Vorhergehenden in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{m} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

dargestellt werden kann.

Man hat also auch in diesem Falle

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

mit dem Unterschiede, dass jetzt unter den Functionen G_ν nur m transcendente sich finden.

Hiermit ist der in § 1 unter (B, 1) angegebene Satz vollständig bewiesen.*)

---

*) Es bedarf kaum der Erinnerung, dass unter Voraussetzung einiger Sätze, die nicht den ersten Elementen der Functionenlehre angehören, der im Vorstehenden entwickelte Ausdruck von $f(x)$ auf kürzerem Wege ohne den im vorhergehenden § bewiesenen Hülfssatz hätte hergeleitet werden können. Indess giebt dieser Hülfssatz, auch abgesehen von dem Gebrauch, der von ihm gemacht worden ist, einen an sich bemerkenswerthen allgemeinen Ausdruck der untersuchten Functionen, den ich nicht übergehen mochte.

6. Eindeutige Functionen von x, welche n wesentliche singuläre Stellen besitzen, an jeder anderen Stelle aber einen endlichen und von Null verschiedenen Werth haben.

Ist $f(x)$ eine Function dieser Art, so hat man, wenn x in der Umgebung irgend einer nicht singulären Stelle a angenommen wird,

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots,$$

wo A_0 nicht gleich Null ist. Daraus folgt, wenn a nicht ∞ ist,

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \mathfrak{P}(x-a);$$

dagegen, wenn in dem Falle, wo die singulären Stellen $(c_1, \ldots c_n)$ von $f(x)$ alle im Endlichen liegen, $a = \infty$ genommen wird, also $x-a = \frac{1}{x}$ zu setzen ist,

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Function

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$$

hat also nur die n singulären Stellen $c_1, \ldots c_n$, und kann daher, wie im vorhergehenden § gezeigt worden, in der Form

$$C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

dargestellt werden, so dass in den Functionen G_ν kein constantes Glied vorkommt.

Ist c_ν nicht ∞, und k_ν der Coefficient von $\frac{1}{x-c_\nu}$ in G_ν, so lässt sich

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \text{ auf die Form } \frac{k_\nu}{x-c_\nu} + \frac{d}{dx}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

bringen, wo auch $\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ eine ganze Function von $\frac{1}{x-c_\nu}$ ohne constantes Glied ist. In dem Falle, wo die c_ν sämmtlich endliche Werthe haben, ist ferner, wenn x dem absoluten Betrage nach grösser als jeder dieser Werthe ist,

$$C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) = C + \frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu + \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right);$$

es muss also

$$C = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = 0$$

sein, und man hat

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{k_\nu}{x-c_\nu}.$$

Wenn dagegen eine der Grössen c_ν den Werth ∞ hat, so möge c_n diese sein; dann ist

$$C + G_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right) = C + G_n(x) = \frac{d}{dx}\overline{G}_n(x),$$

wobei man $\overline{G}_n(0) = 0$ annehmen kann; man hat also in diesem Falle

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{k_\nu}{x-c_\nu}.$$

Es ist nun zunächst zu zeigen, dass in beiden Fällen die k_ν sämmtlich ganze Zahlen sind.

Man setze, unter ϱ eine constante, und unter τ eine veränderliche reelle Grösse verstehend,

$$x_\tau = c_\lambda + \varrho e^{\tau i},$$

wo λ im ersten Falle eine der Zahlen $1, \ldots n$ und im zweiten eine der Zahlen $1, \ldots (n-1)$ bedeutet. Dann lässt sich, wenn man ϱ hinreichend klein annimmt, in beiden Fällen die Summe der Grössen

$$\frac{k_\nu dx_\tau}{x_\tau - c_\nu}$$

auf die Form

$$k_\lambda i d\tau + d\mathfrak{P}(x_\tau - c_\lambda)$$

bringen; und es ist

$$\frac{1}{f(x_\tau)}\frac{df(x_\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\sum_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x_\tau-c_\nu}\right) + \frac{d}{d\tau}\mathfrak{P}(x_\tau - c_\lambda) + k_\lambda i.$$

Daraus folgt, wenn man

$$F(x) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-c_\lambda)}$$

setzt:

$$f(x_\tau) = \overline{C}F(x_\tau) . e^{k_\lambda \tau i},$$

wo $\overline{C}$ eine von τ unabhängige Grösse bedeutet.

Vermehrt man in dieser Gleichung τ um 2π, so bleibt x_τ ungeändert; es muss also

$$e^{2k_\lambda \pi i} = 1$$

und somit k_λ eine ganze Zahl sein.

Setzt man jetzt, unter C_0 eine Constante verstehend,

$$R^*(x) = C_0 \prod_{\nu=1}^{n-\varepsilon} (x-c_\nu)^{k_\nu},$$

wo $\varepsilon = 0$ oder 1 zu nehmen ist, jenachdem c_n einen endlichen Werth hat oder nicht, so ist

$$\frac{1}{R^*(x)} \frac{dR^*(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n-\varepsilon} \frac{k_\nu}{x-c_\nu},$$

und es ergiebt sich bei gehöriger Bestimmung der Constante C_0

$$f(x) = R^*(x) . \prod_{\nu=1}^{n} e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}.$$

Da nun in dem Falle, wo die Grössen c_ν sämmtlich endliche Werthe haben,

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = 0$$

ist, so ist für $x = \infty$ die Function $R^*(x)$ weder Null noch unendlich gross; sie ist also eine rationale Function von x, welche an jeder Stelle, die nicht zu den singulären Stellen von $f(x)$ gehört, einen endlichen und von Null verschiedenen Werth hat. Für $n = 1$ reducirt sich dieselbe auf eine Constante.

Es lässt sich also jede Function $f(x)$ von der oben angegebenen Beschaffenheit in der bereits in § 1 aufgestellten Form ausdrücken.

Umgekehrt stellt die vorstehende Formel stets eine Function dieser Beschaffenheit dar, wenn man die Grössen $c_1, \dots c_n$ und die Functionen $\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ willkürlich, die Function $R^*(x)$ aber so annimmt, dass sie die angegebene Eigenschaft besitzt.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken. Wenn von einer eindeutigen Function $f(x)$ feststeht, dass nicht nur sie selbst, sondern auch $\frac{1}{f(x)}$ in der Umgebung jeder Stelle, welche nicht zu einer Reihe gegebener Stellen $(c_1, \dots c_n)$ gehört, sich regulär verhält, während über ihr Verhalten in der Umgebung einer der letzteren Stellen nichts bekannt ist, so ergiebt sich ebenso wie im Vorstehenden

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \overline{C} + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n-\varepsilon}\frac{k_\nu}{x-c_\nu} + \frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

$$f(x) = R^*(x)\prod_{\nu=1}^{n} e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}, \quad \text{wo} \quad R^*(x) = C\prod_{\nu=1}^{n-\varepsilon}(x-c_\nu)^{k_\nu},$$

mit dem Unterschiede, dass jetzt die Functionen $\overline{G}_\nu$ zum Theil oder auch alle gleich Null sein können.

7. Eindeutige Functionen von x mit n wesentlichen und beliebig vielen ausserwesentlichen singulären Stellen.

Das Verfahren, durch welches man mit Hülfe der in den §§ 2 bis 6 entwickelten Sätze zu den in der Einleitung unter (B, 2) und (C, 1 u. 2) aufgestellten Ausdrücken einer eindeutigen Function $f(x)$ mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen gelangt, ist der Hauptsache nach bereits in § 1 so vollständig auseinander gesetzt worden, dass nur Weniges hinzuzufügen bleibt.

Hat die darzustellende Function keine Null-Stellen, so sind die a. a. O. mit $G^{(\nu)}$ bezeichneten Functionen sämmtlich durch die Zahl 1 zu ersetzen.

Hat sie Null-Stellen in endlicher Anzahl, so kann man dieselben in beliebiger Weise den wesentlichen singulären Stellen zuordnen; es werden dann die $G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ rationale Functionen, welche zusammengenommen dieselben Null-Stellen wie $f(x)$ haben. Am einfachsten ist es in diesem Falle, eine der Functionen $G^{(\nu)}$ so zu bestimmen, dass die Reihe ihrer Null-Stellen mit der von $f(x)$ übereinstimmt, und die übrigen dann durch die Zahl 1 zu ersetzen.

In dem Falle endlich, wo $f(x)$ unendlich viele Null-Stellen hat, giebt es unter den wesentlichen singulären Stellen mindestens eine — sie möge mit c_1 bezeichnet werden — die so liegt, dass in jeder Umgebung derselben unendlich viele Null-Stellen von $f(x)$ vorhanden sind. Ist dann c_λ irgend eine der übrigen wesentlichen singulären Stellen, und versteht man unter C_λ diejenige Umgebung derselben, in welcher

$$|x-c_\lambda| \leqq \varrho$$

ist, so kann man ϱ so klein annehmen, dass C_λ nur die eine wesentliche singuläre Stelle c_λ, und Null-Stellen nur in dem Falle enthält, wo in jeder Umgebung von c_λ sich solche finden. Wenn man dabei ϱ auch so annimmt, dass an der Grenze von C_λ keine Null-Stellen liegen, und dann unter C_1 denjenigen Theil des Gebietes von x versteht, der nach Ausscheidung von $C_2, C_3, \ldots$ übrig bleibt, so ist das ganze Gebiet dergestalt in Theile $C_1, C_2, \ldots$ zerlegt, dass sich in der a. a. O. beschriebenen Weise Functionen

$$G^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad G^{(2)}\left(\frac{1}{x-c_2}\right), \quad \ldots$$

bilden lassen, deren Null-Stellen beziehlich die in $C_1, C_2, \ldots$ enthaltenen Null-Stellen von $f(x)$ sind. Dabei ist, wenn es in einem dieser Theile keine Null-Stellen von $f(x)$ giebt, die entsprechende Function $G^{(\nu)}$ durch 1 zu ersetzen; woraus erhellt, dass man auf die angegebene Weise verfahrend die geringste Zahl von Functionen $G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ erhält, für welche die Gesammtheit ihrer Null-Stellen identisch ist mit der Reihe der Null-Stellen der Function $f(x)$.

Wenn nun ferner $f(x)$ — wie in § 5 angenommen worden — n (wesentliche oder ausserwesentliche) singuläre Stellen $(c_1, \ldots c_n)$ hat, so sind wieder drei Fälle zu unterscheiden.

Die singulären Stellen können sämmtlich wesentliche sein — dann ist, wenn man

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \cdot f_1(x)$$

setzt, $f_1(x)$ eine Function von der im vorhergehenden § vorausgesetzten Beschaffenheit, so dass sie sich, da jede ihrer wesentlichen singulären Stellen in der Reihe $c_1, \ldots c_n$ enthalten ist, in der Form

$$R^*(x) \prod_{\nu=1}^{n} e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}$$

darstellen lässt — wobei zu beachten ist, dass nach dem am Schluss d. a. § Bemerkten die Functionen $\overline{G}_\nu$ zum Theil oder auch alle gleich Null sein können. Setzt man also

$$G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} = G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

so ergiebt sich

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \cdot R^*(x).$$

Hat ferner $f(x)$ m wesentliche singuläre Stellen $(c_1, \dots c_m)$ und $(n-m)$ ausserwesentliche $(c_{m+1}, \dots c_n)$, so möge, wenn ν eine der Zahlen $m+1, \dots n$ ist, m_ν die kleinste positive ganze Zahl sein, durch welche bewirkt wird, dass

$$(x-c_\nu)^{m_\nu} f(x)$$

für $x = c_\nu$ einen endlichen Werth erhält. Setzt man dann

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) = \left(\frac{1}{x-c_\nu} - \frac{1}{c_1-c_\nu}\right)^{m_\nu}, \qquad (\nu = m+1, \dots n)$$

wobei unter dem Zeichen $\frac{1}{c_1-c_\nu}$, falls $c_1 = \infty$ ist, der Werth 0, falls $c_\nu = \infty$ ist, der Werth c_1 zu verstehen ist, und

$$f(x) = \bar{f}(x) . \prod_{\nu=m+1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

so ist $\bar{f}(x)$ eine Function, welche die m wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \dots c_m)$, aber keine ausserwesentliche hat, mithin in der Form

$$\prod_{\nu=1}^{m} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) \cdot R^*(x)$$

ausgedrückt werden kann.

Sind endlich $c_1, \dots c_n$ sämmtlich ausserwesentliche singuläre Stellen für die Function, und hat m_ν dieselbe Bedeutung wie oben, so ist, wenn von den Grössen $c_1, \dots c_n$ keine den Werth ∞ hat,

$$f(x) = \frac{G(x)}{(x-c_1)^{m_1} \dots (x-c_n)^{m_n}},$$

wo $G(x)$ eine ganze rationale Function von nicht höherem als dem $(m_1 + \dots + m_n)^{\text{ten}}$ Grade bezeichnet — dagegen, wenn $c_n = \infty$,

$$f(x) = \frac{G(x)}{(x-c_1)^{m_1} \dots (x-c_{n-1})^{m_{n-1}}},$$

wo der Grad von $G(x)$ den des Nenners um m_n Einheiten übertrifft. Man kann daher in beiden Fällen $f(x)$ auf die Form

$$\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

bringen, in der Art, dass $G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ eine ganze rationale Function m_ν^{ten} Grades von $\frac{1}{x-c_\nu}$ ist.

Hiernach kann also jede eindeutige Function von x mit n singulären Stellen in der in § 1 unter (B, 2) aufgestellten Form

$$\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)\cdot R^*(x)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist zu beachten, dass $R^*(x)$ — wie a. a. O. angegeben worden — nur an solchen Stellen, welche sich unter den wesentlichen singulären Stellen der darzustellenden Function finden, Null oder unendlich gross wird; so wie auch, dass keine der Functionen $G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$, wenn dieselben in der beschriebenen Weise gebildet werden, sich auf eine Constante reducirt. Zugleich erhellt, dass, wenn die Functionen G_ν, R^* diesen Bedingungen gemäss, im Übrigen aber willkürlich angenommen werden, die vorstehende Formel auch stets eine eindeutige Function von x mit höchstens n singulären Stellen darstellt.

Jetzt sei $f(x)$ eine beliebige eindeutige Function mit den n wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \ldots c_n)$. Dann ist wieder, wenn man unter

$$G_{n+1}\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad \ldots \quad G_{2n}\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$$

die Functionen versteht, welche zur Function $\frac{1}{f(x)}$ in derselben Beziehung stehen wie

$$G^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad \ldots \quad G^{(n)}\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$$

zu $f(x)$*) — so dass die Gesammtheit ihrer Null-Stellen identisch ist mit der Reihe der Null-Stellen von $\frac{1}{f(x)}$ — und

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}\right\}\cdot f_1(x)$$

*) Es ist zu beachten, dass die zur Definition der Functionen $G_{n+\nu}$ erforderliche Zerlegung des Gebietes von x in n Theile den in Beziehung auf die Function $f(x)$ gegebenen Bestimmungen gemäss auszuführen ist, so dass diese Theile nicht nothwendig dieselben werden wie die vorhin mit $C_1, C_2, \ldots$ bezeichneten.

setzt, $f_1(x)$ eine Function von derselben Beschaffenheit wie die im Vorstehenden so bezeichnete. Man erhält also, wenn man für dieselbe den angegebenen Ausdruck setzt und

$$G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)\cdot e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} \quad \text{mit} \quad G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

bezeichnet,

$$f(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}\cdot R^*(x).$$

Dies ist der in § 1 unter (C, 2) gegebene Ausdruck von $f(x)$.

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Functionen $G_1, \dots G_{2n}$ sind so beschaffen, dass nicht zwei derselben eine gemeinschaftliche Null-Stelle haben, und auch keine von ihnen an einer der Stellen $c_1, \dots c_n$ verschwindet. Ferner ist von den Factoren des Nenners jeder, welcher nicht unendlich viele Null-Stellen hat, eine rationale Function, und der entsprechende des Zählers dann nothwendig eine transcendente. Dabei darf angenommen werden, dass die Anzahl derjenigen Factoren des Nenners, welche nicht gleich 1 sind, ein Minimum sei; dann ist in dem Falle, wo $f(x)$ unendlich viele ausserwesentliche singuläre Stellen hat, jeder dieser Factoren eine Function mit unendlich vielen Null-Stellen, während im entgegengesetzten Falle der Nenner sich auf eine rationale Function von x mit einer — in der Reihe $c_1, \dots c_n$ enthaltenen — singulären Stelle, oder auch auf eine Constante reducirt. $R^*(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie im vorher betrachteten Falle.

Zugleich ist klar, dass der vorstehende Ausdruck stets eine eindeutige Function von x mit den n wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \dots c_n)$ darstellt, wenn die Functionen

$$G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad \dots \quad G_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right), \quad G_{n+1}\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad \dots \quad G_{2n}\left(\frac{1}{x-c_n}\right), \quad R^*(x)$$

so angenommen werden, dass sie die angegebene Beschaffenheit haben, im Übrigen aber willkürlich gewählt sind.

Die Function $R^*(x)$ kann in der Form

$$\frac{G_1^*\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{G_2^*\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)},$$

wo c_λ eine beliebige der Grössen $c_1, \dots c_n$ bedeutet, dergestalt ausgedrückt werden, dass G_1^*, G_2^* rationale ganze Functionen von $\frac{1}{x-c_\lambda}$ ohne gemeinschaftlichen Theiler sind.

Es lässt sich also der allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit den n wesentlichen singulären Stellen $c_1, \dots c_n$ auch in der Form

$$\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}$$

darstellen, wo die Functionen $G_1, \dots G_{2n}$ dieselbe Beschaffenheit wie in dem vorhergehenden Ausdruck haben, mit der Modification, dass jetzt auch ein Factor des Zählers und der entsprechende des Nenners an einigen der Stellen $c_1, \dots c_n$ verschwinden können.

Übrigens erhellt, dass beide Ausdrücke, wie auch die Functionen $G_1, \dots G_{2n}$ angenommen werden mögen, stets eine eindeutige Function von x darstellen, deren wesentliche singuläre Stellen sich sämmtlich in der Reihe $c_1, \dots c_n$ finden; so wie auch, dass c_λ wirklich eine wesentliche singuläre Stelle dieser Function ist, wenn unter den übrigen Grössen c_ν keine ihr gleiche sich findet und der Quotient

$$\frac{G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}$$

sich nicht auf eine rationale Function reducirt.

Der zweite Ausdruck von $f(x)$ kann nun auf doppelte Weise noch weiter entwickelt werden.

Setzt man

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$
$$f_1(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$
$$f_2(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

so sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ Functionen von x, welche sich in der Umgebung jeder von

$c_1, \dots c_n$ verschiedenen Stelle regulär verhalten, und deshalb nach § 5 in der Form

$$f_1(x) = A + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu,\nu}(x-c_\nu)^{-\mu},$$

$$f_2(x) = B + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu,\nu}(x-c_\nu)^{-\mu}$$

dargestellt werden können, wo die Coefficienten

$$A,\ B,\ A_{\mu,\nu},\ B_{\mu,\nu}$$

Constanten und so beschaffen sind, dass die Reihen für jeden von $c_1, \dots c_n$ verschiedenen Werth der Veränderlichen x unbedingt convergiren. So ergiebt sich der in § 1 unter (C, 1) aufgestellte Ausdruck von $f(x)$.

Wenn man ferner das in § 2 auseinandergesetzte Verfahren zur Zerlegung einer ganzen eindeutigen Function in Primfactoren auf die Functionen $G_1, \dots G_{2n}$ anwendet, so erhält man jede der Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, wofern sie nicht selbst eine Primfunction ist, als Product von (rationalen oder transcendenten) Primfactoren dargestellt, und zwar so, dass die singuläre Stelle jedes einzelnen eine der wesentlichen singulären Stellen von $f(x)$ ist, und das Product, falls es aus unendlich vielen Factoren besteht, in jedem Theile des Gebiets von x, der weder im Innern noch an der Grenze eine der Stellen $c_1, \dots c_n$ enthält, unbedingt und gleichmässig convergirt.

Hiermit ist vollständig nachgewiesen, wie sich jede eindeutige Function $f(x)$ mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen aus den einfachsten Functionen mit einer (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle durch arithmetische Operationen zusammensetzen lässt.

Es bleibt aber noch übrig zu ermitteln, wie eine solche Function sich in der Umgebung einer ihrer wesentlichen singulären Stellen verhält.

8. Verhalten der untersuchten Functionen in der Umgebung einer ihrer wesentlichen singulären Stellen.

Ist $f(x)$ eine ganze eindeutige Function, so weiss man, dass es unendlich grosse Werthe von x giebt, für welche der Werth von $f(x)$ ebenfalls unendlich gross ist — mit andern Worten, dass sich, wenn a, b zwei willkürlich angenommene positive Grössen sind, unter den Werthen von x, die ihrem absoluten Betrage nach grösser als a sind, stets solche finden, für die der absolute Betrag von $f(x)$ grösser als b ist.

Dasselbe gilt für jede eindeutige Function von x mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞. Man denke sich nämlich eine solche Function so, wie in § 3 angegeben worden, in der Form

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$$

ausgedrückt, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Ist der Nenner eine transcendente Function, so verschwindet derselbe für unendlich viele Werthe von x; unter diesen giebt es also nothwendig unendlich grosse, und in einer unendlich kleinen Umgebung eines solchen Werthes ist der Werth von $f(x)$ unendlich gross. Ist aber $G_2(x)$ eine rationale Function, so kann

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)} \text{ auf die Form } \frac{G_3(x)}{G_2(x)} + G_4(x)$$

in der Art gebracht werden, dass $G_3(x)$ eine rationale ganze Function von niedrigerem Grade als $G_2(x)$, und $G_4(x)$ eine transcendente ganze Function ist; woraus sich, da der Quotient

$$\frac{G_3(x)}{G_2(x)}$$

für jeden unendlich grossen Werth unendlich klein ist, die Richtigkeit des Behaupteten auch in diesem Falle ergiebt.

Dies vorausgeschickt, bedeute jetzt $f(x)$ wieder eine beliebige eindeutige Function mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen, so kann dieselbe, wenn c irgend eine dieser Stellen ist, nach dem vorhergehenden § in der Form

$$\frac{G_1\left(\dfrac{1}{x-c}\right)}{G_{n+1}\left(\dfrac{1}{x-c}\right)} \cdot F(x)$$

dergestalt ausgedrückt werden, dass $F(x)$ in der Umgebung der Stelle c sich regulär verhält, aber für $x = c$ nicht verschwindet. Es giebt also, wenn ϱ, R positive Grössen sind, von denen die erste beliebig klein und die andere beliebig gross angenommen werden kann, Werthe von x, für die

$$|x-c|<\varrho, \qquad |f(x)|>R$$

ist.

Nun hat aber, wenn C eine willkürlich anzunehmende Grösse bedeutet, die Function

$$\frac{1}{f(x)-C}$$

dieselben wesentlichen singulären Stellen wie $f(x)$; es existiren also auch Werthe von x, für die

$$|x-c|<\varrho, \qquad \left|\frac{1}{f(x)-C}\right|>R, \qquad |f(x)-C|<\frac{1}{R}$$

ist.

Hiernach ändert sich die Function $f(x)$ in einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle c in der Art discontinuirlich, dass sie jedem willkürlich angenommenen Werthe beliebig nahe kommen kann, für $x=c$ also einen bestimmten Werth nicht besitzt; was sich in den entwickelten Ausdrücken der Function dadurch zu erkennen giebt, dass dieselben für $x=c$ aufhören, eine Bedeutung zu haben.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE $2r$-FACH PERIODISCHEN FUNCTIONEN VON r VERÄNDERLICHEN.

(Briefliche Mittheilungen an C. W. Borchardt. Crelle's Journal, Bd. 89.)

1.

Im Monatsbericht unserer Akademie v. J. 1869 (S. 855)*) habe ich das folgende Theorem mitgetheilt:

»Es sei $f_1(u_1, \dots u_r)$ eine eindeutige Function, die bei endlichen Werthen der r Veränderlichen $u_1, \dots u_r$ den Charakter einer rationalen Function hat und $2r$-fach periodisch ist; so lässt sich jede andere Function $f(u_1, \dots u_r)$ dieser Art, welche dieselben Periodensysteme wie $f_1(u_1, \dots u_r)$ besitzt, rational durch die $(r+1)$ Functionen

$$f_1(u_1, \dots u_r), \quad \frac{\partial f_1(u_1, \dots u_r)}{\partial u_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial f_1(u_1, \dots u_r)}{\partial u_r}$$

ausdrücken, unter diesen aber besteht eine algebraische Gleichung.«

Du siehst, lieber Freund, dieses Theorem entspricht vollkommen dem Liouville'schen Satze, nach welchem, wenn $f_1(u)$ eine eindeutige doppelt periodische Function ist, die innerhalb eines Perioden-Parallelogramms nur an zwei Stellen unendlich gross wird, jede andere eindeutige Function $f(u)$, welche dieselben Perioden wie $f_1(u)$ besitzt und innerhalb eines Perioden-Parallelogramms an beliebig vielen Stellen unendlich gross wird, in der Form

$$f(u) = \frac{M + N f_1'(u)}{L}$$

dargestellt werden kann, wo L, M, N ganze rationale Functionen von $f_1(u)$

---

*) [S. 46 dieses Bandes.]

bezeichnen. Der Unterschied ist nur, dass nach meinem Satze $f(u)$ rational durch $f_1(u)$ und $f_1'(u)$ ausgedrückt werden kann, wenn $f_1(u)$ eine beliebige Function der betrachteten Art ist, welche dieselben Perioden wie $f(u)$ hat; was sich übrigens aus dem Liouville'schen Satze leicht folgern lässt.

Ich habe die Aussage meines Theorems im Wesentlichen so wiedergegeben, wie sie im Monatsbericht der Akademie steht. Dieselbe bedarf aber einer Modification.

Man betrachte als zu einer Klasse gehörend alle $2r$-fach periodischen Functionen $f(u_1, \dots u_r)$ der angegebenen Art, welche dieselben Periodensysteme besitzen; so ist das Theorem folgendermassen auszudrücken:

»Alle einer bestimmten Klasse angehörigen Functionen $f(u_1, \dots u_r)$ lassen sich rational aus einer von ihnen — $f_1(u_1, \dots u_r)$ — und den ersten Ableitungen derselben zusammensetzen, wobei diese Function f_1 im Allgemeinen beliebig ausgewählt werden kann, mit der Beschränkung, dass es möglicherweise particuläre Functionen der Klasse giebt, die auszuschliessen sind. Zugleich besteht zwischen jeder Function f und deren ersten Ableitungen eine algebraische Gleichung.«

Es ist aber dieser Satz nur ein besonderer Fall eines allgemeineren Theorems, das ich Dir bei dieser Gelegenheit mittheilen möchte. Es wird jedoch nöthig sein, dass ich einige Bemerkungen vorausschicke, durch welche der Charakter der Functionen, auf die das Theorem sich bezieht, genau festgestellt werden soll.

Liouville bezeichnet in den von Dir ausgearbeiteten »Leçons« die von ihm untersuchten Functionen als »fonctions bien déterminées«, ohne dieselben genauer zu definiren; es erhellt aber aus den Voraussetzungen, die er bei der Begründung seiner Sätze macht, und aus den Endresultaten seiner Untersuchung, dass er ausschliesslich solche eindeutige Functionen einer Veränderlichen im Auge hat, für die — nach der von mir in der Abhandlung: »Zur Theorie der eindeutigen Functionen«*) gebrauchten Terminologie — im Endlichen eine wesentliche singuläre Stelle nicht existirt. In der That haben für andere eindeutige Functionen seine Sätze keine Gültigkeit. (So z. B. ist

$$F(u) = e^{\sin \operatorname{am} u}$$

*) Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1876 [S. 77 dieses Bandes].

eine eindeutige und doppelt periodische Function, jedoch nicht rational durch $\sin\operatorname{am} u$ und $\frac{d\sin\operatorname{am} u}{du}$ ausdrückbar. Für dieselbe ist aber jeder Werth von u, für den $\sin\operatorname{am} u = \infty$ wird, eine wesentliche singuläre Stelle. Denn es lässt sich $F(u)$, wenn a irgend ein solcher Werth ist, für hinlänglich kleine Werthe von $(u-a)$ zwar nach ganzen Potenzen dieser Grösse in eine convergirende Reihe entwickeln, in derselben kommen aber Glieder mit negativen Exponenten in unendlicher Anzahl vor.) Wenn es sich also darum handelt, die Liouville'sche Theorie der doppelt periodischen Functionen einer Veränderlichen auf $2r$-fach periodische Functionen von r Veränderlichen auszudehnen, so ist von vorn herein klar, dass dies nur für Functionen von besonderer Beschaffenheit möglich sein wird.

Um mich im Folgenden kurz ausdrücken zu können, will ich, wenn $u_1, \dots u_r$ gleichzeitig betrachtete veränderliche Grössen sind, ein einzelnes Werthsystem derselben eine »Stelle im Gebiete der Grössen $u_1, \dots u_r$« nennen. Ferner soll, wenn $(a_1, \dots a_r)$ eine bestimmte Stelle des Gebietes ist, die Gesammtheit der Stellen $(u_1, \dots u_r)$, für die jede der Differenzen $(u_1-a_1), \dots (u_r-a_r)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine gegebene Grösse δ ist, die »Umgebung (δ) der Stelle $(a_1, \dots a_r)$« heissen. (Dabei setze ich fest, dass der Formel $(u-a)$ in dem Falle, wo $a = \infty$ ist, die Bedeutung $\frac{1}{u}$ gegeben werde.) Dies festgestellt, gebe ich nun folgende Definitionen:

Ich sage von einer eindeutigen Function $f(u_1, \dots u_r)$, sie verhalte sich an einer bestimmten Stelle $(a_1, \dots a_r)$ **regulär**, wenn sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine Reihe von der Form

$$\sum A_{\nu_1, \dots \nu_r}(u_1-a_1)^{\nu_1} \dots (u_r-a_r)^{\nu_r}, \qquad (\nu_1, \dots \nu_r = 0, \dots \infty)$$

dargestellt werden kann, wo $\nu_1, \dots \nu_r$ ganze Zahlen bezeichnen und unter den Coefficienten $A_{\nu_1, \dots \nu_r}$ von $u_1, \dots u_r$ unabhängige Grössen zu verstehen sind. (Ich gebrauche für eine solche Reihe die Bezeichnung

$$\mathfrak{P}(u_1-a_1, \dots u_r-a_r) \quad \text{oder auch} \quad \mathfrak{P}(u_1, \dots u_r \,|\, a_1, \dots a_r)$$

in Fällen, wo nur die Form der Reihe hervorgehoben werden soll und es auf die Werthe ihrer Coefficienten nicht ankommt.)

Die Stellen, an denen eine Function $f(u_1, \dots u_r)$ sich regulär verhält, bilden ein $2r$-fach ausgedehntes Continuum, das nothwendig begrenzt ist;

jede an der Grenze desselben liegende Stelle nenne ich eine **singuläre** Stelle für die betrachtete Function.

Ist $(a'_1, \dots a'_r)$ eine solche singuläre Stelle, so kann möglicherweise $f(u_1, \dots u_r)$ durch Multiplication mit einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_0(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r),$$

die für $u_1 = a'_1, \dots u_r = a'_r$ den Werth Null hat, in eine an der Stelle $(a'_1, \dots a'_r)$ regulär sich verhaltende Function verwandelt werden, so dass sich $f(u_1, \dots u_r)$ für alle einer gewissen Umgebung der in Rede stehenden Stelle angehörigen Werthsysteme $(u_1, \dots u_r)$ in der Form

$$\frac{\mathfrak{P}_1(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r)}{\mathfrak{P}_0(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r)}$$

darstellen lässt. In diesem Falle nenne ich $(a'_1, \dots a'_r)$ eine **ausserwesentliche**, in jedem anderen Falle eine **wesentliche** singuläre Stelle.

Es giebt aber, wenn $r > 1$, zwei wohl von einander zu unterscheidende Arten ausserwesentlicher singulärer Stellen.

Man kann, wenn $(a'_1, \dots a'_r)$ irgend eine solche Stelle ist, $f(u_1, \dots u_r)$ in der angegebenen Form stets so darstellen, dass $\mathfrak{P}_0(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r)$ und $\mathfrak{P}_1(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r)$ nicht beide durch eine dritte, für $u_1 = a'_1, \dots u_r = a'_r$ verschwindende Function $\mathfrak{P}(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r)$ theilbar sind. Wenn dann $\mathfrak{P}_1(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r)$ für $u_1 = a'_1, \dots u_r = a'_r$ nicht verschwindet, so ist für alle einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_r)$ angehörigen Werthsysteme $(u_1, \dots u_r)$ der Werth von $f(u_1, \dots u_r)$ unendlich gross, und daher

$$f(u_1, \dots u_r) = \infty \quad \text{für} \quad u_1 = a'_1, \dots u_r = a'_r.$$

Ist dagegen $\mathfrak{P}_1(u_1 - a'_1, \dots u_r - a'_r) = 0$ für $u_1 = a'_1, \dots u_r = a'_r$, so lässt sich zeigen, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_r)$ Werthsysteme $(u_1, \dots u_r)$ giebt, für die $f(u_1, \dots u_r)$ einen **beliebig vorgeschriebenen** Werth erhält, so dass an der Stelle $(a'_1, \dots a'_r)$ selbst die Function keinen bestimmten Werth hat.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken. Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich $f(u_1, \dots u_r)$ wie eine rationale Function verhält — d. h. die Gesammtheit der nicht singulären und der ausserwesentlichen singulären

Stellen — ist ein $2r$-fach ausgedehntes Continuum, dessen Begrenzung die wesentlichen singulären Stellen bilden.

Ist $(a_1, \dots a_r)$ irgend eine bestimmte Stelle im Innern dieses Continuums, und hat $f(a_1, \dots a_r)$ einen bestimmten endlichen Werth, so verhält sich $f(u_1, \dots u_r)$ in einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_r)$ überall regulär.

Ist $f(a_1, \dots a_r) = \infty$, so giebt es in jeder Umgebung von $(a_1, \dots a_r)$, die keine singuläre Stelle der Function

$$\frac{1}{f(u_1, \dots u_r)}$$

enthält, wenn $r > 1$ ist, unendlich viele, eine $(2r-2)$-fache Mannigfaltigkeit bildende Stellen, an denen die Function $f(u_1, \dots u_r)$ den Werth ∞ hat, während sie sich an allen übrigen Stellen des genannten Bereichs regulär verhält.

Hat endlich $f(u_1, \dots u_r)$ für $u_1 = a_1, \dots u_r = a_r$ keinen bestimmten Werth, so giebt es in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_r)$ nicht nur unendlich viele andere ausserwesentliche singuläre Stellen, an denen die Function $f(u_1, \dots u_r)$ den Werth ∞ hat, sondern auch, wenn $r > 2$ ist, unendlich viele Stellen, an denen sie unbestimmt ist; die ersteren bilden eine $(2r-2)$-fache, die letzteren eine $(2r-4)$-fache Mannigfaltigkeit.

Ich knüpfe hieran sogleich die Aussage eines fundamentalen Satzes, von dem ich später Gebrauch machen werde.

»Eine eindeutige Function $f(u_1, \dots u_r)$, für die im ganzen Gebiete der Veränderlichen $u_1, \dots u_r$ keine wesentliche singuläre Stelle existirt, ist nothwendig eine rationale Function.«

Für Functionen einer Veränderlichen habe ich diesen Satz in der vorhin genannten Abhandlung bewiesen; für Functionen von beliebig vielen Veränderlichen ist derselbe aber keineswegs so einfach zu begründen, wie es auf den ersten Blick scheint.

Endlich will ich noch Eins erwähnen. Wird aus dem Gebiete von r complexen Veränderlichen $u_1, \dots u_r$ auf irgend eine Weise ein $2r$-fach ausgedehntes Continuum ausgeschieden, so lassen sich stets eindeutige Functionen von $u_1, \dots u_r$ bestimmen, welche sich an allen Stellen im Innern dieses Continuums, aber an keiner Stelle seiner Begrenzung wie rationale Functionen verhalten. Es treten also die wesentlichen singulären Stellen einer eindeutigen

Function von r Veränderlichen nicht nothwendig vereinzelt auf, sondern es kann vielmehr jedes im Gebiete von r complexen Grössen mögliche Gebilde der Ort solcher Stellen sein.

Nach diesen Vorbemerkungen, auf die ich mich mehrfach werde beziehen müssen, setze ich nun fest, dass überall, wo im Folgenden von einer $2r$-fach periodischen Function von r Veränderlichen die Rede sein wird, darunter nicht nur eine eindeutige Function verstanden, sondern auch angenommen werden soll, dass für dieselbe im Endlichen eine wesentliche singuläre Stelle nicht existire.

Dies vorausgesetzt, kann man zunächst beweisen, dass einer beliebigen $2r$-fach periodischen Function $f_1(u_1, \dots u_r)$ auf mannigfaltige Weise $(r-1)$ andere:

$$f_2(u_1, \dots u_r), \quad \dots \quad f_r(u_1, \dots u_r),$$

welche — nach der oben gegebenen Definition — derselben Klasse wie $f_1(u_1, \dots u_r)$ angehören, sich so adjungiren lassen, dass die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

nicht für beliebige Werthe von $u_1, \dots u_r$ verschwindet, die Functionen f_1, $f_2, \dots f_r$ also von einander unabhängig sind. Bei den in Betreff der Function f_1 gemachten Annahmen ist, wie ich in der Abhandlung: »Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen mehrerer Veränderlichen« (Monatsbericht vom Jahre 1876, S. 687)*) gezeigt habe, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(u_1, \dots u_r)}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial f_1(u_1, \dots u_r)}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_1(u'_1, \dots u'_r)}{\partial u'_1}, & \dots & \frac{\partial f_1(u'_1, \dots u'_r)}{\partial u'_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1(u_1^{(r-1)}, \dots u_r^{(r-1)})}{\partial u_1^{(r-1)}}, & \dots & \frac{\partial f_1(u_1^{(r-1)}, \dots u_r^{(r-1)})}{\partial u_r^{(r-1)}} \end{vmatrix}$$

*) [S. 55 dieses Bandes.]

nicht für beliebige Werthe der Grössen $u_1, \dots u_r, u'_1, \dots u'_r, \dots u_1^{(r-1)}, \dots u_r^{(r-1)}$ gleich Null. Setzt man also, unter $c'_1, \dots c'_r, \dots c_1^{(r-1)}, \dots c_r^{(r-1)}$ von $u_1, \dots u_r$ unabhängige Grössen verstehend,

$$u'_\alpha = u_\alpha + c'_\alpha, \quad \dots \quad u_\alpha^{(r-1)} = u_\alpha + c_\alpha^{(r-1)}, \qquad (\alpha = 1, \dots r)$$

so kann man den Grössen $c'_\alpha, \dots c_\alpha^{(r-1)}$ solche Werthe geben, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(u_1, \dots u_r)}{\partial u_1}, & \dots & \dfrac{\partial f_1(u_1, \dots u_r)}{\partial u_r} \\ \dfrac{\partial f_1(u_1 + c'_1, \dots u_r + c'_r)}{\partial u_1}, & \dots & \dfrac{\partial f_1(u_1 + c'_1, \dots u_r + c'_r)}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \dots u_r + c_r^{(r-1)})}{\partial u_1}, & \dots & \dfrac{\partial f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \dots u_r + c_r^{(r-1)})}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

nicht bei beliebigen Werthen von $u_1, \dots u_r$ verschwindet. Nimmt man dann

$$f_2(u_1, \dots u_r) = f_1(u_1 + c'_1, \dots u_r + c'_r), \quad \dots \quad f_r(u_1, \dots u_r) = f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \dots u_r + c_r^{(r-1)}),$$

so haben die Functionen $f_1, f_2, \dots f_r$ alle dieselben Periodensysteme, und ihre Functionaldeterminante ist nicht für beliebige Werthsysteme $(u_1, \dots u_r)$ gleich Null.

Es sei nun

$$f_1(u_1, \dots u_r), \quad f_2(u_1, \dots u_r), \quad \dots \quad f_r(u_1, \dots u_r)$$

irgend ein System von r derselben Klasse angehörigen und von einander unabhängigen $2r$-fach periodischen Functionen, so gilt für dasselbe zunächst der folgende Satz: Nimmt man zwischen den Grössen $u_1, \dots u_r$ und r anderen Veränderlichen $s_1, \dots s_r$ die r Gleichungen an:

$$f_1(u_1, \dots u_r) = s_1, \quad f_2(u_1, \dots u_r) = s_2, \quad \dots \quad f_r(u_1, \dots u_r) = s_r,$$

so entsprechen jedem Werthsysteme der Grössen $s_1, s_2, \dots s_r$ im Allgemeinen, d. h. wenn von gewissen particulären Werthsystemen $(s_1, s_2, \dots s_r)$, die nur eine $(2r-2)$-fache Mannigfaltigkeit bilden, abgesehen wird — unendlich viele Stellen $(u_1, \dots u_r)$, die weder zu den singulären Stellen der Functionen f_1, $f_2, \dots f_r$ gehören, noch zu denen, für welche die Functionaldeterminante von $f_1, f_2, \dots f_r$ verschwindet. Denkt man sich aber die zu einem Werthsysteme $(s_1, s_2, \dots s_r)$ gehörigen Stellen $(u_1, \dots u_r)$ in der Art in Gruppen vertheilt, dass je zwei Stellen $(u'_1, \dots u'_r)$, $(u''_1, \dots u''_r)$ in derselben oder in verschiedenen Gruppen sich finden, jenachdem die Differenzen $u''_1 - u'_1, \dots u''_r - u'_r$ ein Periodensystem der Functionen f bilden oder nicht; so ist die Zahl dieser Gruppen endlich und hat für jedes Werthsystem $(s_1, s_2, \dots s_r)$ denselben Werth, der mit m bezeichnet werden möge. Die so definirte Zahl nenne ich den Grad des Functionensystems $f_1, f_2, \dots f_r$.

Aus diesem Satze ergeben sich sodann die nachstehenden Theoreme.

»Ist $f(u_1, \dots u_r)$ irgend eine $2r$-fach periodische Function, unter deren Periodensystemen sich auch alle Periodensysteme der Functionen $f_1, f_2, \dots f_r$ finden, so besteht zwischen f und $f_1, f_2, \dots f_r$ eine irreductible Gleichung, deren Grad in Beziehung auf f gleich m oder ein Theiler von m ist.«

»Unter den $2r$-fach periodischen Functionen der Klasse, zu welcher $f_1, f_2, \dots f_r$ gehören, giebt es unzählige, die mit $f_1, f_2, \dots f_r$ durch eine irreductible Gleichung m^{ten} Grades zusammenhangen; ist f_{r+1} irgend eine derselben, so lässt sich jede Function $f(u_1, \dots u_r)$ von der im vorstehenden Satze angegebenen Beschaffenheit rational durch die $(r+1)$ Functionen $f_1, f_2, \dots f_r, f_{r+1}$ ausdrücken.«

Zu der Klasse der Functionen $f_1, f_2, \dots f_{r+1}$ gehören auch alle Ableitungen derselben. Setzt man also

$$f = R(f_1, f_2, \dots f_{r+1}),$$

so hat man auch

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = R_1(f_1, f_2, \dots f_{r+1}), \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial u_r} = R_r(f_1, f_2, \dots f_{r+1}),$$

wo $R, R_1, \dots R_r$ rationale Functionen von $f_1, f_2, \dots f_{r+1}$ bezeichnen. Aus diesen $(r+1)$ Gleichungen und der zwischen f_{r+1} und $f_1, f_2, \dots f_r$ bestehenden Gleichung kann man $f_1, f_2, \dots f_{r+1}$ eliminiren, und erhält dabei im Allgemeinen zugleich diese Grössen rational durch die Functionen $f, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial u_r}$ ausgedrückt. So ergiebt sich das im Anfange meines Briefes angeführte Theorem. Ich habe aber nicht untersucht, welcher Beschränkung der Ausdruck $R(f_1, f_2, \dots f_{r+1})$ unterworfen werden muss, damit sich $f_1, f_2, \dots f_{r+1}$ wirklich rational durch f und $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial u_r}$ ausdrücken lassen. Ich habe deswegen die ursprüngliche Fassung des in Rede stehenden Theorems etwas modificiren müssen.

Von den vorstehenden Sätzen ist der erste, wodurch der Begriff des Grades eines Systems von r derselben Klasse angehörigen und von einander unabhängigen $2r$-fach periodischen Functionen festgestellt wird, am schwierigsten zu beweisen. Dies hat seinen Grund hauptsächlich in dem Umstande, dass immer, sobald $r > 1$ ist, im Gebiet der Grössen $u_1, \dots u_r$ singuläre Stellen existiren, an denen die Functionen $f_1, f_2, \dots f_{r+1}$ zum Theil oder alle unbestimmt sind. Wenn Du mir gestattest, in meinen Mittheilungen fortzufahren, so werde ich Dir in einem folgenden Briefe den — allerdings nicht gar kurzen — Weg beschreiben, auf dem ich zu einem, wie ich glaube, völlig strengen Beweise der aufgestellten Sätze gelangt bin, und der mich dann schliesslich auch zu dem Ziele geführt hat, das ich bei meinen Untersuchungen über die hier betrachteten $2r$-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen von Anfang an im Auge hatte — dem Nachweise nämlich, dass jede solche Function sich durch eine Θ-Function von r Argumenten ausdrücken lässt.

Berlin, den 5. November 1879.

ANMERKUNG.

Die beabsichtigte Fortsetzung der vorstehenden Mittheilungen ist unterblieben, weil ich im Winter 1879–80 schwer erkrankte und noch nicht völlig wieder hergestellt war, als Borchardt (27. Juni 1880) starb.

EINIGE AUF DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNCTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHEN SICH BEZIEHENDE SÄTZE.

---

1. Vorbereitungssatz.*)

Ist $F(x, x_1, \dots x_n)$ eine gegebene, in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellte Function von $x, x_1, \dots x_n$, welche, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, ebenfalls gleich Null wird, so giebt es stets unendlich viele, dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsysteme der Grössen $x, x_1, \dots x_n$, welche die Gleichung

$$F(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

befriedigen.

Bei vielen Untersuchungen handelt es sich nun darum, von diesen Werthsystemen alle diejenigen zu bestimmen, für welche der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse eine — beliebig klein anzunehmende — Grenze δ nicht überschreitet.

Diese Aufgabe lässt sich folgendermassen lösen.

Es werde

$$F(x, 0, \dots 0) \text{ mit } F_0(x)$$

bezeichnet und

$$F(x, x_1, \dots x_n) = F_0(x) - F_1(x, x_1, \dots x_n)$$

gesetzt, so dass F_1 für jeden Werth von x gleich Null wird, wenn $x_1, \dots x_n$

---

*) Diesen Satz habe ich seit dem Jahre 1860 wiederholt in meinen Universitäts-Vorlesungen vorgetragen.

sämmtlich verschwinden. Ich nehme nun zunächst an, dass $F_0(x)$ nicht für jeden Werth von x verschwinde. Dann kann man eine positive Grösse ϱ so annehmen, dass $F_0(x)$ für keinen Werth von x, dessen absoluter Betrag > 0, aber $\leqq \varrho$ ist, verschwindet, und dass es zugleich Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die sämmtlich von Null verschieden sind, giebt, für welche die Reihe $F_1(\varrho, x_1, \ldots x_n)$ convergirt. Wenn ferner eine zweite positive Grösse ϱ_0 so angenommen wird, dass sie > 0, aber $< \varrho$ ist, und festgesetzt wird, dass der absolute Betrag von x zwischen ϱ_0 und ϱ liege, die absoluten Beträge von $x_1, \ldots x_n$ aber alle unter einer Grenze ϱ_1 bleiben sollen, so kann man ϱ_1 so klein annehmen, dass für alle Werthsysteme von $x, x_1, \ldots x_n$, welche diese Bedingungen erfüllen, F_0 dem absoluten Betrage nach grösser als F_1 ist. Man hat dann

$$\frac{1}{F(x, x_1, \ldots x_n)} = \frac{1}{F_0} + \frac{F_1}{F_0^2} + \frac{F_1^2}{F_0^3} + \cdots = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{F_1^\lambda}{F_0^{\lambda+1}}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{dF_0}{dx}}{F_0} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{F_1^\lambda \frac{dF_0}{dx}}{F_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{F_1^{\lambda-1} \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_0^\lambda}$$

$$= \frac{\frac{dF_0}{dx}}{F_0} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}\right).$$

Es ist aber, da der grösste Werth, welchen der absolute Betrag von $\frac{F_1}{F_0}$ für alle jetzt betrachteten Werthe von $x, x_1, \ldots x_n$ besitzt, kleiner als 1 ist, die Reihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}\right)$$

gleichmässig convergent, und daher

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{dF_0}{dx}}{F_0} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}.$$

Es kann ferner, wenn das Anfangsglied in der Entwickelung von $F_0(x)$ den Exponenten m hat, $\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$ in eine Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} G(x_1, \ldots x_n)_{\lambda,\mu}\, x^{-m\lambda+\mu}$$

entwickelt werden, wo $G(x_1, \dots x_n)_{\lambda,\mu}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ bedeutet; und bei der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$$

kann man alle Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in eines zusammenziehen und erhält so:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} G(x_1, \dots x_n)_\nu x^\nu,$$

wo auch $G(x_1, \dots x_n)_\nu$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{\dfrac{dF_0}{dx}}{F_0} = mx^{-1} + G(x),$$

wo $G(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x bedeutet. Also:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{F} = mx^{-1} + G(x) - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} G(x_1, \dots x_n)_\nu x^\nu.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich zunächst ersehen, dass, wenn man den Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ bestimmte Werthe, die dem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als ϱ_1 sind, beilegt, die Gleichung

$$F(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

stets durch m Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind, befriedigt wird, vorausgesetzt, dass jeder so oft gezählt wird als die zugehörige Ordnungszahl anzeigt. (Vgl. S. 86.)

Dass es überhaupt innerhalb des angegebenen Bereiches Werthe von x giebt, welche $F = 0$ machen, lässt sich so zeigen: Angenommen, es würde $F(x, x_1, \dots x_n)$ bei gegebenen Werthen von $x_1, \dots x_n$ für keinen der in Rede stehenden Werthe von x gleich Null, so liesse sich $\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$ für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind, in eine nur ganze positive Potenzen von x enthaltende Reihe entwickeln, und diese müsste für die ihrem absoluten Betrage nach zwischen ϱ_0 und ϱ liegenden Werthe von x mit der vorstehenden übereinstimmen. Dies ist aber nicht möglich, da in der letzteren Reihe das Glied mx^{-1} vorkommt. (Da die erste Ableitung einer Potenzreihe von x niemals ein Glied mit dem Exponenten -1 enthält, so kann sich das angegebene Glied nicht gegen ein anderes heben.) — Angenommen nun, es seien

$$x', x'', \dots x^{(r)}$$

die in dem angegebenen Bereiche liegenden Werthe von x, welche die Gleichung $F(x, x_1, \dots x_n) = 0$ befriedigen, wobei ein jeder in diese Reihe so oft aufzunehmen ist, als seine Ordnungszahl anzeigt, so wird die Differenz

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{x-x'} - \dots - \frac{1}{x-x^{(r)}}$$

für keinen Werth von x, dessen absoluter Betrag kleiner als ϱ ist, unendlich gross, und kann daher in eine nur ganze positive Potenzen von x enthaltende Reihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickelt werden. Für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ, aber grösser als jede der Grössen $x', x'', \dots x^{(r)}$ und ϱ_0 sind, hat man also:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \mathfrak{P}(x) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} s_\nu x^{-\nu-1},$$

wo

$$s_\nu = (x')^\nu + \dots + (x^{(r)})^\nu,$$

und

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = mx^{-1} + G(x) - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} G(x_1, \dots x_n)_\nu . \nu x^{\nu-1}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke von $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$ giebt

$$s_0 = m \text{ oder } r = m,$$

d. h. die Anzahl der in Rede stehenden, die Gleichung $F(x, x_1, \dots x_n) = 0$ befriedigenden Werthe von x ist gleich dem Grade des Anfangsgliedes von $F(x, 0, \dots 0)$.

Ferner ergiebt sich, wenn man

$$\nu = -l \text{ und } l > 0 \text{ annimmt,}$$
$$s_l = lG(x_1, \dots x_n)_{-l}.$$

Setzt man daher:

$$f(x, x_1, \dots x_n) = (x-x')\dots(x-x^{(m)}) = x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m,$$

so dass

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-x'} + \dots + \frac{1}{x-x^{(m)}}$$

ist, so erhält man für Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach grösser sind als $x', \dots x^{(m)}$,

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1) f_1 x^{m-2} + \dots + f_{m-1}}{x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m} = mx^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \dots,$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} f_1 &= -s_1 \\ 2f_2 &= -s_2 - s_1 f_1 \\ 3f_3 &= -s_3 - s_2 f_1 - s_1 f_2 \\ &\dots\dots\dots \\ mf_m &= -s_m - s_{m-1} f_1 - s_{m-2} f_2 - \dots - s_1 f_{m-1}. \end{aligned}$$

Hiernach sind $f_1, \dots f_m$ sämmtlich Potenzreihen von $x_1, \dots x_n$, welche sicher convergiren, wenn alle diese Grössen dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ_1 sind. Die gesuchten m Werthe von x werden dann gefunden durch Auflösung der Gleichung

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m = 0.$$

Man erhält ferner durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$

$$\mathfrak{P}(x) = G(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, G(x_1, \dots x_n)_{\nu+1} . x^\nu$$

für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind.

Setzt man daher

$$\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n) = \int_0 G(x)\, dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} G(x_1, \dots x_n)_{\nu+1} x^{\nu+1},$$

$$\mathfrak{F}(x, x_1, \dots x_n) = e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)},$$

so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x, x_1, \dots x_n$, welche sicher convergiren, wenn $|x| < \varrho, |x_1| < \varrho_1, \dots |x_n| < \varrho_1$. Dabei wird $\mathfrak{F} = 1$, wenn $x, x_1, \dots x_n$ sämmtlich verschwinden.

Aus der Gleichung

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} + \frac{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}}{\mathfrak{F}}$$

folgt nun

$$F(x, x_1, \ldots x_n) = f(x, x_1, \ldots x_n) . C\mathfrak{F}(x, x_1, \ldots x_n),$$

wo C den Coefficienten von x^m in $F(x, 0, \ldots 0)$ bedeutet.

Die Coefficienten von $f, \mathfrak{F}$ sind nun unabhängig von den gewählten Grössen ϱ, ϱ_1; die vorstehende Gleichung muss also gelten für alle Werthe von $x, x_1, \ldots x_n$, bei denen die Reihen $F, f, \mathfrak{F}$ alle drei convergiren.

Nehmen wir also eine Grösse δ so an, dass erstens alle Werthsysteme von $x, x_1, \ldots x_n$, in denen jede dieser Grössen dem absoluten Betrage nach die Grenze δ nicht überschreitet, dem Convergenzbezirk der genannten drei Reihen angehören, und dass zweitens $\mathfrak{F}(x, x_1, \ldots x_n)$ für keines derselben verschwindet, so werden diejenigen unter diesen Werthsystemen, welche die Gleichung $F(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ befriedigen, durch Auflösung der Gleichung m^{ten} Grades $f(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ bestimmt.

Es ist hierbei, wie bemerkt, angenommen worden, dass

$$F(x, 0, \ldots 0)$$

nicht identisch gleich Null ist. Ist dies der Fall, so hat man zur Lösung der gestellten Aufgabe folgendermassen zu verfahren.

Man bezeichne mit $(x, x_1, \ldots x_n)_\lambda$ die Summe derjenigen Glieder von $F(x, x_1, \ldots x_n)$, welche von der λ^{ten} Dimension sind, und mit μ den kleinsten Werth von λ, für welchen die Coefficienten von $(x, x_1, \ldots x_n)_\lambda$ nicht sämmtlich verschwinden, so dass man

$$F(x, x_1, \ldots x_n) = (x, x_1, \ldots x_n)_\mu + (x, x_1, \ldots x_n)_{\mu+1} + \cdots$$

hat. Sodann führe man an Stelle von $x, x_1, \ldots x_n$ ebenso viele andere Veränderliche $y, y_1, \ldots y_n$ ein mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= c_{00} y + c_{01} y_1 + \cdots + c_{0n} y_n \\ x_1 &= c_{10} y + c_{11} y_1 + \cdots + c_{1n} y_n \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= c_{n0} y + c_{n1} y_1 + \cdots + c_{nn} y_n, \end{aligned}$$

wo die Grössen $c_{00}, \dots c_{nn}$ Constanten bezeichnen, die keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass

$$\begin{vmatrix} c_{00}, & \dots & c_{0n} \\ c_{10}, & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ c_{n0}, & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$(c_{00}, c_{10}, \dots c_{n0})_\mu$$

von Null verschieden sein müssen. Durch diese Substitution verwandelt sich $F(x, x_1, \dots x_n)$ in eine ähnliche Function von $y, y_1, \dots y_n$, welche mit $\overline{F}(y, y_1, \dots y_n)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man:

$$\overline{F}(y, 0, \dots 0) = (c_{00}, c_{10}, \dots c_{n0})_\mu y^\mu + (c_{00}, c_{10}, \dots c_{n0})_{\mu+1} y^{\mu+1} + \cdots.$$

Es ist also die Function $\overline{F}(y, 0, \dots 0)$ nicht identisch gleich Null und ihr Anfangsglied von der μ^{ten} Ordnung.

Man kann daher nach dem Bewiesenen $\overline{F}(y, y_1, \dots y_n)$ darstellen in der Form

$$\overline{F}(y, y_1, \dots y_n) = (y^\mu + y^{\mu-1}\mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n) + \cdots + \mathfrak{G}_\mu(y_1, \dots y_n))\overline{\mathfrak{G}}(y, y_1, \dots y_n),$$

wo $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_\mu$ Potenzreihen von $y_1, \dots y_n$ bezeichnen, die sämmtlich gleich Null werden, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, während $\overline{\mathfrak{G}}(y, y_1, \dots y_n)$ eine Potenzreihe von $y, y_1, \dots y_n$ ist, welche einen von Null verschiedenen Werth erhält, wenn $y, y_1, \dots y_n$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden. Die letztere Reihe kann nun in eine ebenso beschaffene Potenzreihe von $x, x_1, \dots x_n$ verwandelt werden, die mit $\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man

$$F(x, x_1, \dots x_n) = (y^\mu + y^{\mu-1}\mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n) + \cdots + \mathfrak{G}_\mu(y_1, \dots y_n))\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n).$$

Nun kann man δ so klein annehmen, dass für jedes Werthsystem der Grössen $x, x_1, \dots x_n$, in welchem jede einzelne dem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, erstens $\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$ einen von Null verschiedenen Werth erhält und zweitens das entsprechende Werthsystem der Grössen $y_1, \dots y_n$ dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirke der Reihen $\mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n), \dots \mathfrak{G}_\mu(y_1, \dots y_n)$ angehört. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Wenn man zu jedem dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirke der Reihen $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Werthsysteme $y_1, \dots y_n$ die μ der Gleichung

$$y^\mu + y^{\mu-1}\mathfrak{G}_1(y_1, \dots y_n) + \dots + \mathfrak{G}_\mu(y_1, \dots y_n) = 0$$

genügenden Werthe von y bestimmt, und dann aus den so sich ergebenden Werthsystemen $y, y_1, \dots y_n$ die entsprechenden Werthsysteme $x, x_1, \dots x_n$ berechnet, so finden sich unter den letzteren alle diejenigen, welche die Gleichung $F(x, x_1, \dots x_n) = 0$ befriedigen und die Bedingung erfüllen, dass jede einzelne Grösse dem absoluten Betrage nach kleiner als die angegebene Grösse δ ist.

2.

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ ist durch eine andere $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar, wenn sich eine dritte Reihe $\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$ so bestimmen lässt, dass

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$$

ist.

Hat $\mathfrak{P}_0$ an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ einen von Null verschiedenen Werth, so existirt stets eine die vorstehende Gleichung befriedigende Reihe $\mathfrak{P}_2$; dagegen ist dies nicht der Fall, wenn $\mathfrak{P}_0(0, \dots 0) = 0$ ist, während $\mathfrak{P}_1(0, \dots 0)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es bleibt daher nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_0$ theilbar ist in dem Falle, wo

$$\mathfrak{P}_0(0, \dots 0), \quad \mathfrak{P}_1(0, \dots 0)$$

beide gleich Null sind.

Man führe (wie in Art. 1) an Stelle von $x_1, \dots x_n$ n andere Veränderliche $t_1, \dots t_n$ ein, indem man

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}t_1 + \dots + g_{1n}t_n \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= g_{n1}t_1 + \dots + g_{nn}t_n \end{aligned}$$

setzt und die Constanten $g_{11}, g_{12}, \dots g_{nn}$ so wählt, dass erstens $x_1, \dots x_n$ von einander unabhängige Functionen der Grössen $t_1, \dots t_n$ sind, und zweitens weder $\mathfrak{P}_0(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$ noch $\mathfrak{P}_1(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$ für jeden Werth von t_1 verschwindet. Wenn dann die höchsten Potenzen von t_1, durch welche diese beiden Functionen von t_1 theilbar sind, beziehlich die Exponenten μ, ν haben, so kann man, wie in Art. 1 gezeigt worden,

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{P}_0(x_1,\dots x_n) & \text{auf die Form} & G_0(t_1,t_2,\dots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1,\dots t_n) \\ \mathfrak{P}_1(x_1,\dots x_n) & \text{» \quad »} \quad » & G_1(t_1,t_2,\dots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1,\dots t_n) \end{array}$$

bringen, wo

$$\begin{aligned} G_0(t_1,t_2,\dots t_n) &= t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2,\dots t_n)t_1^{\mu-1} + \dots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2,\dots t_n) \\ G_1(t_1,t_2,\dots t_n) &= t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2,\dots t_n)t_1^{\nu-1} + \dots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2,\dots t_n) \end{aligned}$$

ist. Dabei verschwinden $\overset{0}{\mathfrak{P}}_1,\dots \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu,\ \overset{1}{\mathfrak{P}}_1,\dots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu$ sämmtlich an der Stelle $(t_2 = 0,\dots t_n = 0)$, während $\overline{\mathfrak{P}}_0(0,\dots 0)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(0,\dots 0)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben.

Man nehme nun eine positive Grösse δ so an, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_1|\leqq\delta,\ \dots\ |t_n|\leqq\delta$$

genügende Werthsystem $(t_1,\dots t_n)$ die angegebenen Umformungen von $\mathfrak{P}_0(x_1,\dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1,\dots x_n)$ gelten. Dann kann man ferner eine positive Grösse δ_1, die kleiner als δ ist, so annehmen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2|\leqq\delta_1,\ \dots\ |t_n|\leqq\delta_1$$

genügende Werthsystem $(t_2,\dots t_n)$ jede der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} G_0(t_1,t_2,\dots t_n) &= 0, \\ G_1(t_1,t_2,\dots t_n) &= 0 \end{aligned}$$

nur durch solche Werthe von t_1, die dem absoluten Betrage nach kleiner als δ sind, befriedigt wird. Sind für irgend ein System bestimmter Werthe von $t_2,\dots t_n$

$$t_1',\ t_1'',\ \dots\ t_1^{(m)}$$

die von einander verschiedenen Werthe von t_1, welche der einen oder der anderen dieser Gleichungen, oder auch beiden genügen, so hat man

$$\frac{G_1(t_1,t_2,\dots t_n)}{G_0(t_1,t_2,\dots t_n)} = (t_1-t_1')^{\lambda_1}\dots(t_1-t_1^{(m)})^{\lambda_m},$$

wo $\lambda_1,\dots \lambda_m$ ganze Zahlen bezeichnen, deren Summe gleich $\nu-\mu$ ist. Hat eine dieser Zahlen einen negativen Werth, so kann man der Grösse t_1 einen solchen Werth geben, dass

$$\left|\frac{G_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)}\right| > g$$

ist, wo g eine beliebig angenommene positive Grösse bedeutet, ohne dass $G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$ ist. Infolge der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)} = \frac{G_1^{\pi}(t_1, t_2, \dots t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)}$$

existiren also in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $(0, 0, \dots 0)$ Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$, für die der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)}$$

dem absoluten Betrage nach jede beliebig angenommene Grösse übertrifft. Daraus folgt sofort, dass, wenn $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sein soll, jede der Zahlen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ positiv oder gleich Null, und somit (zunächst unter der Voraussetzung, dass $t_2, \dots t_n$ bestimmte, den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \;\dots\; |t_n| \leqq \delta_1$$

genügende Werthe haben, und der absolute Betrag der Veränderlichen t nicht grösser als δ sei) $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$ durch $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ theilbar sein muss. Dazu ist zuerst erforderlich, dass $\nu \geqq \mu$ sei.

Nun kann man aber, wenn diese Bedingung erfüllt ist, und

$$A_0 t_1^{\mu} + A_1 t_1^{\mu-1} + \cdots + A_\mu, \qquad B_0 t_1^{\nu} + B_1 t_1^{\nu-1} + \cdots + B_\nu$$

zwei ganze Functionen von t_1 mit unbestimmten Coefficienten sind, zwei andere Functionen

$$C_0 t_1^{\nu-\mu} + \cdots + C_{\nu-\mu}, \qquad D_1 t_1^{\mu-1} + \cdots + D_\mu$$

dergestalt bestimmen, dass die Gleichung

$$A_0^{\nu-\mu+1}(B_0 t_1^{\nu} + \cdots + B_\nu) = (A_0 t_1^{\mu} + \cdots + A_\mu)(C_0 t_1^{\nu-\mu} + \cdots + C_{\nu-\mu}) + D_1 t_1^{\mu-1} + \cdots + D_\mu$$

besteht; und es sind dann

$$C_0, \dots C_{\nu-\mu}, \qquad D_1, \dots D_\mu$$

ganze Functionen von $A_0, \dots A_\mu, B_0, \dots B_\nu$. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $A_0, \dots A_\mu$, $B_0, \dots B_\nu$ und unter der Voraussetzung, dass A_0 nicht den Werth Null habe,

$$B_0 t_1^\nu + \cdots + B_\nu \quad \text{durch} \quad A_0 t_1^\mu + \cdots + A_\mu$$

theilbar sei, werden dann durch die μ Gleichungen

$$D_1 = 0, \quad \dots \quad D_\mu = 0$$

ausgedrückt.

Setzt man nun

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_1 = \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \quad \dots \quad A_\mu = \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n), \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \quad \dots \quad B_\nu = \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n), \end{aligned}$$

so wird $C_0 = 1$, und $C_1, \dots C_{\nu-\mu}$, $D_1, \dots D_\mu$ werden Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$, die sämmtlich an der Stelle $(t_2 = 0, \dots t_n = 0)$ verschwinden und mit

$$\overset{3}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \; \dots \; \overset{3}{\mathfrak{P}}_{\nu-\mu}(t_2, \dots t_n); \quad \overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \; \dots \; \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

bezeichnet werden mögen. Damit $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sei, müssen nun

$$\overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \; \dots \; \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

sämmtlich verschwinden, wenn

$$|t_2| \leqq \delta_1, \; \dots \; |t_n| \leqq \delta_1.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn in jeder Reihe sämmtliche Coefficienten gleich Null sind.

Angenommen nun, diese Bedingung sei erfüllt, so hat man

$$\begin{aligned} G_1(t_1, t_2, \dots t_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) . (t_1^{\nu-\mu} + \cdots + \overset{3}{\mathfrak{P}}_{\nu-\mu}(t_2, \dots t_n)) \\ &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) . G_3(t_1, t_2, \dots t_n), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) . \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \dots t_n) \\ \mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) &= G_0(t_1, t_2, \dots t_n) . G_3(t_1, t_2, \dots t_n) . \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, t_2, \dots t_n) \\ &= \mathfrak{P}_0(x_1, x_2, \dots x_n) . G_3(t_1, t_2, \dots t_n) \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \dots t_n)} \\ &= \mathfrak{P}_0(x_1, x_2, \dots x_n) . \overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, t_2, \dots t_n). \end{aligned}$$

Verwandelt man nunmehr $\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)$ in eine Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$, so ergiebt sich

$$\mathfrak{P}_1(x_1, x_2, \dots x_n) = \mathfrak{P}_0(x_1, x_2, \dots x_n)\,\mathfrak{P}_2(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Wir haben also folgenden Satz:

Es seien $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ zwei Potenzreihen von $x_1, \dots x_n$, welche beide an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwinden. Man bilde auf die angegebene Weise die beiden Ausdrücke

$$t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)\,t_1^{\mu-1} + \cdots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$
$$t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)\,t_1^{\nu-1} + \cdots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n),$$

und setze aus $\overset{0}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu$, $\overset{1}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu$ die Potenzreihen

$$\overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \; \dots \; \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

zusammen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sei, besteht dann darin, dass in jeder der Reihen $\overset{4}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu$ sämmtliche Coefficienten gleich Null sein müssen.

Es geht aber auch aus dem Vorstehenden hervor, dass nur in dem Falle, wo eine der mit $\lambda_1, \dots \lambda_m$ bezeichneten Zahlen negativ ist, $\mathfrak{P}_1$ nicht durch $\mathfrak{P}_0$ theilbar ist. Daraus lässt sich schliessen:

Kann man zeigen, dass der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)},$$

wenn $(x_1, \dots x_n)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ und so, dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ nicht gleich Null ist, angenommen wird, stets kleiner als eine angebbare Grösse ist, so reicht dies aus, um festzustellen, dass $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar ist.

Denn wäre das Letztere nicht der Fall, so müsste wenigstens eine der Zahlen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ negativ sein, und es existirte, wie gezeigt worden, innerhalb jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ ein Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$, für welches der absolute Betrag des in Rede stehenden Quotienten jede angebbare Grösse überträfe, ohne dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ gleich Null wäre; was der Voraussetzung widerspricht.

In jedem Falle, wo entschieden werden kann, ob der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_0}$ die angegebene Beschaffenheit hat oder nicht, ist man demnach der Bildung der Reihen $\overset{4}{\mathfrak{P}}_1, \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu$ überhoben.

Es soll nun ferner untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$, die beide an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwinden, einen gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form, der ebenfalls an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindet, besitzen.

Angenommen, man habe

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \,.\, \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n),$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \,.\, \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n),$$

und es sei $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0) = 0$. Man verwandle wieder $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ auf die angegebene Weise in Functionen von $t_1, \dots t_n$. Zufolge der in Betreff der Functionen $\mathfrak{P}_0(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$, $\mathfrak{P}_1(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$ gemachten Voraussetzung kann auch $\mathfrak{P}_2(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1)$ nicht für jeden Werth von t_1 verschwinden; die höchste Potenz von t_1, durch welche diese Function theilbar ist, habe den Exponenten λ, so kann man

$$\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \text{ auf die Form } G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)$$

bringen, wo

$$G_2(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^\lambda + \overset{2}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)t_1^{\lambda-1} + \dots + \overset{2}{\mathfrak{P}}_\lambda(t_2, \dots t_n),$$

und $\overline{\mathfrak{P}}_2(0, \dots 0)$ nicht gleich Null ist.

Dann hat man

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\frac{\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)}\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\mathfrak{P}_5(t_1, \dots t_n),$$

$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\frac{\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)}\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\mathfrak{P}_6(t_1, \dots t_n).$$

Es sind also

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$$

beide durch $G_2(t_1, t_2, \dots t_n)$ theilbar.

Nun kann man bekanntlich, wenn

$$A_0, A_1, \dots A_\mu, \quad B_0, B_1, \dots B_\nu$$

unbestimmte Grössen bedeuten, aus denselben eine Reihe von ganzen Functionen

$$C,\ C_1,\ C_2,\ \ldots$$

zusammensetzen, vermittelst welcher die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $A_0, \ldots A_\mu$, $B_0, \ldots B_\nu$ und unter der Voraussetzung, dass weder A_0 noch B_0 gleich Null sei, die Functionen

$$A_0 t_1^\mu + \cdots + A_\mu, \quad B_0 t_1^\nu + \cdots + B_\nu$$

einen grössten gemeinschaftlichen Theiler λ^{ten} Grades besitzen, sich folgendermassen ausdrücken lassen: Es muss C_λ in der Reihe der Grössen $C, C_1, C_2, \ldots$ die erste sein, welche nicht gleich Null ist.

Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, stellt sich dann der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Functionen in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{C_\lambda'}{C_\lambda} t_1^{\lambda-1} + \cdots + \frac{C_\lambda^{(\lambda)}}{C_\lambda}$$

dar, wo $C_\lambda', \ldots C_\lambda^{(\lambda)}$ ebenfalls ganze Functionen von $A_0, \ldots A_\mu$, $B_0, \ldots B_\nu$ sind. Nimmt man

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_1 = \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n), \quad \ldots \quad A_\mu = \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \ldots t_n), \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n), \quad \ldots \quad B_\nu = \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \ldots t_n), \end{aligned}$$

so werden $C, C_1, C_2, \ldots; C_\lambda', C_\lambda'', \ldots$ Potenzreihen von $t_2, \ldots t_n$, die mit

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n),\ \mathfrak{P}^{(1)}(t_2, \ldots t_n),\ \mathfrak{P}^{(2)}(t_2, \ldots t_n),\ \ldots;\ \mathfrak{P}^{(\lambda,1)}(t_2, \ldots t_n),\ \mathfrak{P}^{(\lambda,2)}(t_2, \ldots t_n),\ \ldots$$

bezeichnet werden mögen. Dann muss, damit für ein bestimmtes Werthsystem $(t_2, \ldots t_n)$

$$G_0(t_1, t_2, \ldots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \ldots t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen gemeinschaftlichen Theiler haben,

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n) = 0$$

sein. Diese Gleichung besteht also bei der in Betreff der Functionen $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$ gemachten Annahme, wenn man den Grössen $t_2, \ldots t_n$ solche Werthe giebt, für welche die angegebenen Umformungen von $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ gelten; woraus folgt, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n)$ sämmtlich gleich Null sein müssen.

Damit ist die nothwendige Bedingung dafür, dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, festgestellt.

Angenommen nun, es seien für zwei gegebene Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ die im Vorstehenden definirten Functionen

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n),$$
$$\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n), \ \mathfrak{P}^{(1)}(t_2, \dots t_n), \ \mathfrak{P}^{(2)}(t_2, \dots t_n), \ \dots$$

gebildet, und es ergebe sich, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n)$ sämmtlich gleich Null sind, so wie ferner, dass $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ in der Reihe der Functionen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{(1)}, \dots$ die erste sei, die nicht identisch gleich Null ist. Nimmt man dann im Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Reihen

$$\overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \ \dots \ \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n), \ \ \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \ \dots \ \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n)$$

irgend ein bestimmtes Werthsystem $(\tau_2, \dots \tau_n)$ der Grössen $t_2, \dots t_n$ an und unterwirft diese der Bedingung, dass

$$|t_2| \leqq |\tau_2|, \ \dots \ |t_n| \leqq |\tau_n|$$

und $\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)$ nicht gleich Null sein soll, so haben

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n), \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen grössten gemeinschaftlichen Theiler vom Grade λ, der zunächst in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda,1)}(t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)} t_1^{\lambda-1} + \dots + \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda,\lambda)}(t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)}$$

erhalten wird. Die Werthe von t_1, für welche diese Function verschwindet, sind sämmtlich unter denen, für die $G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$ wird, enthalten. Jeder der letzteren aber hat, wie man auch $t_2, \dots t_n$ den angegebenen Bedingungen entsprechend annehmen möge, einen endlichen Werth, dessen absoluter Betrag unterhalb einer angebbaren, von $t_2, \dots t_n$ unabhängigen Grenze liegt. Dasselbe gilt also auch von dem Bruch

$$\frac{\mathfrak{P}^{(\lambda,\lambda')}(t_2, \dots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)}, \qquad (\lambda' = 1, \dots \lambda)$$

woraus sich nach dem Obigen ergiebt, dass der Zähler durch den Nenner theilbar ist. Damit ist bewiesen, dass der vorstehende gemeinschaftliche

Theiler von $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ und $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$ in der Form

$$G_2(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^\lambda + \overset{2}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\lambda-1} + \cdots + \overset{2}{\mathfrak{P}}_\lambda(t_2, \dots t_n)$$

dargestellt werden kann.

Betrachtet man nun wieder $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$, $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$, $G_2(t_1, t_2, \dots t_n)$ als Functionen von t_1 und dividirt die beiden ersten durch die dritte, so ergiebt sich:

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\, G_3(t_1, t_2, \dots t_n),$$
$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)\, G_4(t_1, t_2, \dots t_n),$$

wo G_3, G_4 ganze Functionen von t_1, deren Coefficienten Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$ sind, bezeichnen.

Multiplicirt man sodann die erste dieser Gleichungen mit $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$, die zweite mit $\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$ und drückt darauf $t_1, \dots t_n$ durch $x_1, \dots x_n$ aus, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\, \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n),$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\, \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n),$$

wo

$$\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) = G_2(t_1, t_2, \dots t_n)$$

ist.

Es lässt sich nun ferner beweisen, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar sind.

Es ist:

$$\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n) = G_3(t_1, t_2, \dots t_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \dots t_n),$$
$$\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n) = G_4(t_1, t_2, \dots t_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, t_2, \dots t_n).$$

Wären nun $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar, so müssten sich, wie oben gezeigt worden ist, zwei Grössen δ, δ_1 so annehmen lassen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \dots |t_n| \leqq \delta_1$$

genügende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$ die Gleichungen

$$G_3(t_1, t_2, \dots t_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n) = 0,$$
$$G_4(t_1, t_2, \dots t_n)\, \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n) = 0$$

durch einen und denselben Werth von t_1, dessen absoluter Betrag kleiner als δ wäre, befriedigt würden. Bei hinlänglich kleinen Werthen von δ, δ_1 müsste dieser Werth von t_1 also den beiden Gleichungen

$$G_3(t_1, t_2, \dots t_n) = 0,$$
$$G_4(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$$

genügen, und es hätten somit für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$

$$G_3(t_1, t_2, \dots t_n) \text{ und } G_4(t_1, t_2, \dots t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen gemeinschaftlichen Theiler, und daher

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \text{ und } G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$$

einen gemeinschaftlichen Theiler von höherem als dem λ^{ten} Grade. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man $t_2, \dots t_n$ so annimmt, dass $\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, \dots t_n)$ nicht verschwindet; und es ist somit die Annahme, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$ und $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar seien, unstatthaft.

Wir haben also den Satz:

> Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei gegebene, an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine dritte Reihe von derselben Beschaffenheit theilbar seien, besteht darin, dass die Coefficienten einer bestimmten, nach der gegebenen Vorschrift zu bildenden Potenzreihe von $n-1$ Veränderlichen $t_2, \dots t_n$ sämmtlich gleich Null sein müssen. Ferner ist es, wenn diese Bedingung erfüllt ist, stets möglich, $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ in der Form
>
> $$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\,\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$$
> $$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\,\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$$
>
> so auszudrücken, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben.*)

*) Es lässt sich aus dem Vorhergehenden noch leicht ableiten, dass jede Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$, durch welche die gegebenen Reihen beide theilbar sind, nothwendig ein Theiler von $\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$ ist.

Hieran knüpfen sich nun noch einige andere Sätze.

Ich nehme jetzt an, es seien $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar, aber $\mathfrak{P}_0(0, \dots 0)$ und $\mathfrak{P}_1(0, \dots 0)$ gleich Null. Dann giebt es, wenn $n > 2$ ist, in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ unendlich viele Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$, für die sowohl $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ als $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ verschwindet. Denn man drücke wieder $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ auf die angegebene Weise durch die Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_n$ aus, bestimme die Function $\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n)$ und nehme auch die Grössen δ, δ_1 so an, wie oben festgesetzt worden ist. Dann giebt es unendlich viele, den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \ \dots \ |t_n| \leqq \delta_1$$

entsprechende Werthsysteme $(t_2, \dots t_n)$, für die

$$\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n) = 0$$

ist, und zu jedem dieser Werthsysteme giebt es wenigstens einen Werth von t_1, dessen absoluter Betrag kleiner als δ ist, und der die beiden Gleichungen

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0,$$
$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$$

befriedigt; woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

Man nehme jetzt im Gebiete der Grössen $x_1, \dots x_n$ irgend einen die Stelle $(0, \dots 0)$ umgebenden Bezirk so an, dass für jedes demselben angehörige Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$ nicht nur die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = G_0(t_1, t_2, \dots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n),$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = G_1(t_1, t_2, \dots t_n)\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$$

gelten, sondern auch $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben; und setze, unter $(c_1, \dots c_n)$ irgend ein bestimmtes Werthsystem der Grössen $x_1, \dots x_n$ in dem genannten Bezirke und unter $(b_1, \dots b_n)$ das entsprechende Werthsystem der Grössen $t_1, \dots t_n$ verstehend,

$$x_1 = c_1 + u_1, \quad \dots \quad x_n = c_n + u_n,$$
$$t_1 = b_1 + s_1, \quad \dots \quad t_n = b_n + s_n,$$

so dass man

$$u_1 = g_{11}s_1 + \cdots + g_{1n}s_n, \quad \ldots \quad u_n = g_{n1}s_1 + \cdots + g_{nn}s_n,$$

$$\mathfrak{P}_0(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n) = G_0(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_0(b_1+s_1, \ldots b_n+s_n),$$

$$\mathfrak{P}_1(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n) = G_1(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_1(b_1+s_1, \ldots b_n+s_n)$$

hat.

Es können nun $\mathfrak{P}_0(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n)$, als Potenzreihen von $u_1, \ldots u_n$ betrachtet, einen an der Stelle $(u_1 = 0, \ldots u_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler nur in dem Falle besitzen, wo $\mathfrak{P}_0(c_1, \ldots c_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1, \ldots c_n)$ beide gleich Null sind. Dann ist auch

$$G_0(b_1, b_2, \ldots b_n) = 0,$$
$$G_1(b_1, b_2, \ldots b_n) = 0;$$

es geht aber aus den Ausdrücken von G_0, G_1 hervor, dass weder $G_0(b_1+s_1, b_2, \ldots b_n)$ noch $G_1(b_1+s_1, b_2, \ldots b_n)$ für jeden Werth von s_1 verschwindet; man kann also

$G_0(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n)$ auf die Form $(s_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}(s_2, \ldots s_n)_1 s_1^{\mu-1} + \cdots + \overset{0}{\mathfrak{P}}(s_2, \ldots s_n)_\mu)\,\overline{\mathfrak{P}}(s_1, \ldots s_n)_0$,
$G_1(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n)$ » » » $(s_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}(s_2, \ldots s_n)_1 s_1^{\nu-1} + \cdots + \overset{1}{\mathfrak{P}}(s_2, \ldots s_n)_\nu)\,\overline{\mathfrak{P}}(s_1, \ldots s_n)_1$

in der Art bringen, dass

$$\overset{0}{\mathfrak{P}}(0, \ldots 0)_1, \ \ldots \ \overset{0}{\mathfrak{P}}(0, \ldots 0)_\mu,$$
$$\overset{1}{\mathfrak{P}}(0, \ldots 0)_1, \ \ldots \ \overset{1}{\mathfrak{P}}(0, \ldots 0)_\nu$$

sämmtlich gleich Null sind, während $\overline{\mathfrak{P}}(0, \ldots 0)_0$, $\overline{\mathfrak{P}}(0, \ldots 0)_1$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben.

Angenommen nun, $\mathfrak{P}_0(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n)$ wären beide durch eine dritte an der Stelle $(u_1 = 0, \ldots u_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $u_1, \ldots u_n$ theilbar, so würde sich nach dem Vorhergehenden zu jedem System unendlich kleiner Werthe von $s_2, \ldots s_n$ ein ebenfalls unendlich kleiner Werth von s_1 finden lassen, für den

$$G_0(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n), \quad G_1(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n)$$

beide gleich Null wären. Dann aber müsste

$$\mathfrak{P}(b_2+s_2, \ldots b_n+s_n) = 0$$

für jedes System unendlich kleiner Werthe von $s_2, \ldots s_n$ sein, was nach einem bekannten Satze nur der Fall ist, wenn

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n)$$

für jedes dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsystem $t_2, \ldots t_n$ verschwindet, also die Coefficienten der Reihe sämmtlich gleich Null sind. Bei der in Betreff der Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$ gemachten Annahme ist aber $\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n)$ nicht identisch gleich Null; und es ist somit erwiesen:

Wenn die Reihen

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n), \quad \mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$$

keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \ldots x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so haben auch

$$\mathfrak{P}_0(c_1 + u_1, \ldots c_n + u_n), \quad \mathfrak{P}_1(c_1 + u_1, \ldots c_n + u_n),$$

als Potenzreihen von $u_1, \ldots u_n$ betrachtet, keinen an der Stelle $(u_1 = 0, \ldots u_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler, vorausgesetzt, dass die Stelle $(x_1 = c_1, \ldots x_n = c_n)$ innerhalb einer gewissen — oben definirten — Umgebung der Stelle $(x_1 = 0, \ldots x_n = 0)$ angenommen werde.

3. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen beliebig vieler Veränderlichen.

Ich sage von einer eindeutigen analytischen Function $f(x_1, \ldots x_n)$, sie verhalte sich an einer bestimmten Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ regulär, wenn sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine Reihe von der Form

$$\sum_{(\nu_1, \ldots \nu_n = 0, \ldots \infty)} \left\{ A_{\nu_1, \ldots \nu_n} (x_1 - a_1)^{\nu_1} \ldots (x_n - a_n)^{\nu_n} \right\}$$

dargestellt werden kann, wo $\nu_1, \ldots \nu_n$ ganze, nicht negative Zahlen bezeichnen und unter den Coefficienten $A_{\nu_1, \ldots \nu_n}$ von $x_1, \ldots x_n$ unabhängige Grössen zu verstehen sind. Diese Reihe nenne ich dann ein reguläres Element der Function. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen $a_1, \ldots a_n$ zum Theil oder auch alle den Werth ∞ haben können, wenn festgesetzt wird, dass das Zeichen $(x - \infty)$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{x}$ sein soll.

Aus der vorstehenden Definition ergiebt sich nun sofort:

Verhält sich eine eindeutige analytische Function $f(x_1, \dots x_n)$ regulär an einer bestimmten Stelle $(a_1, \dots a_n)$, so gilt dasselbe auch von jeder Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$, die in einer gewissen Umgebung der ersteren liegt.

Denn es sei $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ die Reihe, welche die betrachtete Function in der Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ darstellt, so lässt sich aus derselben, wenn man im Innern ihres Convergenzbezirkes eine Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ willkürlich annimmt, eine andere Reihe $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$ dergestalt ableiten, dass für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) = \mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$$

besteht. Es ist also $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$ ebenfalls ein Element der Function $f(x_1, \dots x_n)$, und es verhält sich diese demnach auch an der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ regulär.

Die Gesammtheit der Stellen, an denen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ sich regulär verhält, bildet hiernach ein $2n$-fach ausgedehntes Continuum im Gebiet der Grössen $x_1, \dots x_n$.

Dieses Continuum ist nun nothwendig begrenzt.

Angenommen nämlich, es sei $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ irgend ein Element der Function f, wobei vorausgesetzt werde, dass die Stelle $(a_1, \dots a_n)$ im Endlichen liege; so können zwei Fälle eintreten:

1. Convergirt die Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ für jedes System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \dots x_n$, so besteht, wenn $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$ irgend ein reguläres Element der Function f ist, für jedes dem Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}_1$ angehörige System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) = \mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n).$$

Dies ist aber unmöglich, wenn die Grössen $a'_1, \dots a'_n$ nicht sämmtlich endliche Werthe haben, woraus folgt, dass in dem angenommenen Falle eine Stelle $(x_1, \dots x_n)$ im Innern oder an der Grenze des in Rede stehenden Continuums liegt, je nachdem die Grössen $x_1, \dots x_n$ sämmtlich endliche Werthe haben oder nicht.

2. Liegen die den Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ begrenzenden Stellen alle oder zum Theil im Endlichen, so giebt es, wie in

der Functionentheorie gezeigt wird, unter ihnen mindestens eine Stelle, an der sich $f(x_1, \dots x_n)$ nicht regulär verhält; eine solche Stelle liegt dann auch an der Grenze des in Rede stehenden Continuums.

Dies festgestellt, nenne ich jede an der Grenze dieses Continuums liegende Stelle eine singuläre Stelle für die betrachtete Function.

Ist $(a'_1, \dots a'_n)$ eine solche singuläre Stelle, so kann es möglicherweise eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$$

geben, die für $x_1 = a'_1, \dots x_n = a'_n$ verschwindet und so beschaffen ist, dass das Product

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) f(x_1, \dots x_n)$$

für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)$$

dargestellt werden kann. In diesem Falle nenne ich $(a'_1, \dots a'_n)$ eine ausserwesentliche, in jedem andern Falle eine wesentliche singuläre Stelle.

Es giebt aber, wenn $n > 1$ ist, zwei wohl von einander zu unterscheidende Arten von ausserwesentlichen singulären Stellen.

Ist $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine solche Stelle, so lässt sich die Function $f(x_1, \dots x_n)$ für hinlänglich kleine Werthe der Differenzen $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ stets dergestalt in der Form

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)}$$

darstellen, dass $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ nicht beide durch eine dritte, an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ verschwindende Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ theilbar sind.

Wenn dann $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist für alle einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ der Werth von $f(x_1, \dots x_n)$ unendlich gross, und daher

$$f(x_1, \dots x_n) = \infty \text{ für } (x_1 = a_1, \dots x_n = a_n).$$

Verschwinden dagegen $\mathfrak{P}_0(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$ beide an der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$, so kann man (nach Art. 1), indem man homogene lineare Functionen $t_1, t_2, \ldots t_n$ von $x_1-a_1, \ldots x_n-a_n$ einführt, in mannigfaltiger Weise

$\mathfrak{P}_0(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$ auf die Form $(t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n) t_1^{\mu-1} + \cdots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \ldots t_n))\overline{\mathfrak{P}}_0(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$

$\mathfrak{P}_1(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$ » » » $(t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n) t_1^{\nu-1} + \cdots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \ldots t_n))\overline{\mathfrak{P}}_1(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$

bringen, dergestalt dass

$$\overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n), \ \ldots \ \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \ldots t_n), \ \ \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n), \ \ldots \ \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \ldots t_n)$$

für $t_2 = 0, \ldots t_n = 0$ verschwinden, $\overline{\mathfrak{P}}_0(0, \ldots 0)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(0, \ldots 0)$ beide von Null verschieden sind und die Functionen

$$t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n) t_1^{\mu-1} + \cdots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \ldots t_n),$$
$$t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_2(t_2, \ldots t_n) t_1^{\nu-1} + \cdots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \ldots t_n)$$

keinen an der Stelle $(t_1 = 0, \ldots t_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Dann existiren unzählige Systeme unendlich kleiner Werthe $t_1, t_2, \ldots t_n$, für welche die erste der vorstehenden Functionen, nicht aber zugleich die zweite verschwindet; woraus folgt, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung von $(a_1, \ldots a_n)$ andere Stellen $(x_1, \ldots x_n)$ giebt, an denen $\mathfrak{P}_0(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$ verschwindet, $\mathfrak{P}_1(x_1-a_1, \ldots x_n-a_n)$ aber nicht, so dass an jeder solchen Stelle $f(x_1, \ldots x_n) = \infty$ ist. Es hat aber, wenn b eine beliebig angenommene endliche Grösse ist, die Function

$$\frac{1}{f(x_1, \ldots x_n) - b}$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ dieselbe Form wie $f(x_1, \ldots x_n)$; es existiren also in jeder Umgebung von $(a_1, \ldots a_n)$ auch Stellen, an denen

$$\frac{1}{f(x_1, \ldots x_n) - b} = \infty,$$

d. h.

$$f(x_1, \ldots x_n) = b$$

ist. Es kann also $f(x_1, \ldots x_n)$ in dem jetzt betrachteten Falle *in einer unendlich kleinen Umgebung der singulären Stelle* $(a_1, \ldots a_n)$ *jeden* beliebigen Werth annehmen und besitzt deshalb an dieser Stelle selbst keinen bestimmten Werth.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich $f(x_1, \dots x_n)$ wie eine rationale Function verhält — d. h. die Gesammtheit der nicht singulären und der ausserwesentlichen singulären Stellen — ist ein $2n$-fach ausgedehntes Continuum, dessen Begrenzung die wesentlichen singulären Stellen bilden.

Ist $(a_1, \dots a_n)$ irgend eine bestimmte Stelle im Innern dieses Continuums, und hat $f(a_1, \dots a_n)$ einen bestimmten endlichen Werth, so verhält sich, wie schon oben angegeben worden ist, $f(x_1, \dots x_n)$ in einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ überall regulär.

Ist $f(a_1, \dots a_n) = \infty$, so giebt es in jeder Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$, die keine singuläre Stelle der Function

$$\frac{1}{f(x_1, \dots x_n)}$$

enthält, unendlich viele, eine $(2n-2)$-fache Mannigfaltigkeit bildende Stellen, an denen die Function $f(x_1, \dots x_n)$ den Werth ∞ hat, während sie sich an allen übrigen Stellen des genannten Bereiches regulär verhält.

Hat endlich $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ keinen bestimmten Werth, so giebt es in jeder Umgebung dieser Stelle nicht nur unendlich viele andere singuläre Stellen, an denen $f(x_1, \dots x_n)$ den Werth ∞ hat — was schon vorhin nachgewiesen ist — sondern auch, wenn $n > 2$ ist, unendlich viele Stellen, an denen $f(x_1, \dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat. Das Letztere lässt sich folgendermassen zeigen:

Es gelte für alle Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ in der Umgebung von $(a_1, \dots a_n)$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) f(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n),$$

unter der gestatteten Annahme, dass die Potenzreihen $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ keinen an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der beiden Reihen nehme man eine Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ zunächst beliebig an, und setze

$$x_1 - a_1 = \xi_1, \quad \dots \quad x_n - a_n = \xi_n,$$
$$x_1 - a'_1 = \xi'_1, \quad \dots \quad x_n - a'_n = \xi'_n.$$

Ferner sei $c_\varkappa$ der Werth von $\xi_\varkappa$ für $x_\varkappa = a'_\varkappa$, und $\eta_\varkappa = \xi_\varkappa - c_\varkappa$, so sind $\xi'_\varkappa$, $\eta_\varkappa$ lineare Functionen von $x_\varkappa$, die beide für $x_\varkappa = a'_\varkappa$ verschwinden; man hat daher

$$\eta_\varkappa = \frac{h_\varkappa \xi'_\varkappa}{1 + l_\varkappa \xi'_\varkappa}, \qquad \xi'_\varkappa = \frac{\eta_\varkappa}{h_\varkappa - l_\varkappa \eta_\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, \dots n)$$

wo $h_\varkappa$, $l_\varkappa$ Constanten bezeichnen. (Wenn $a_\varkappa$ nicht gleich ∞ ist, so ist $h_\varkappa = 1$, $l_\varkappa = 0$.) Entwickelt man nun

$$\mathfrak{P}_0(c_1 + \eta_1, \dots c_n + \eta_n), \quad \mathfrak{P}_1(c_1 + \eta_1, \dots c_n + \eta_n)$$

nach Potenzen von $\eta_1, \dots \eta_n$ und verwandelt die so sich ergebenden Reihen in Potenzreihen von $\xi'_1, \dots \xi'_n$, die mit

$$\mathfrak{P}_2(\xi'_1, \dots \xi'_n), \quad \mathfrak{P}_3(\xi'_1, \dots \xi'_n)$$

bezeichnet werden mögen, so gelten für alle einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) &= \mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n), \\
\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) &= \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n), \\
\mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) f(x_1, \dots x_n) &= \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n).
\end{aligned}$$

Nun nehme man — was dem am Schlusse von Art. 2 Bewiesenen zufolge stets angeht — n positive Grössen $C_1, \dots C_n$ so an, dass erstens die Stelle $(\xi_1 = C_1, \dots \xi_n = C_n)$ im gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_0(\xi_1, \dots \xi_n)$, $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \dots \xi_n)$ liegt, und dass zweitens, wenn man $c_1, \dots c_n$ den Bedingungen

$$|c_1| \leqq C_1, \dots |c_n| \leqq C_n$$

unterwirft, $\mathfrak{P}_0(c_1 + \eta_1, \dots c_n + \eta_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1 + \eta_1, \dots c_n + \eta_n)$, als Potenzreihen von $\eta_1, \dots \eta_n$ betrachtet, keinen an der Stelle $(\eta_1 = 0, \dots \eta_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Dann besitzen auch die Reihen

$$\mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n),$$

wie sofort erhellt, keinen an der Stelle $(x_1 = a'_1, \dots x_n = a'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler, und es hat daher nach dem vorhin Bewiesenen $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$ keinen bestimmten Werth, wenn $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)$, $\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)$ beide gleich Null sind. Es giebt aber, wenn $n > 2$ ist, wie am Schlusse von No. 2 gezeigt worden ist, unendlich viele, den vorstehenden

Bedingungen genügende Werthsysteme $(c_1, \dots c_n)$, für welche die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(c_1, \dots c_n) = 0, \qquad \mathfrak{P}_1(c_1, \dots c_n) = 0$$

bestehen; jedem dieser Werthsysteme, deren Gesammtheit eine $(2n-4)$-fache Mannigfaltigkeit bildet, entspricht also im Gebiete der Grössen $x_1, \dots x_n$ innerhalb des durch die Bedingungen

$$|x_1 - a_1| \leqq C_1, \; \dots \; |x_n - a_n| \leqq C_n$$

definirten Bezirkes eine Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$, an der $f(x_1, \dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat.

Hieran knüpft sich noch eine wichtige Bemerkung.

Es seien zwei beliebige Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n), \quad \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$$

gegeben, so lässt sich für die dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der beiden Reihen angehörigen Stellen $(x_1, \dots x_n)$, deren Gesammtheit mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werde, eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ in folgender Weise definiren:

Ist $x'_1, \dots x'_n$ eine Stelle von $\mathfrak{G}$, an der $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ nicht beide verschwinden, so soll

$$f(x'_1, \dots x'_n) = \frac{\mathfrak{P}_1(x'_1 - a_1, \dots x'_n - a_n)}{\mathfrak{P}_0(x'_1 - a_1, \dots x'_n - a_n)}$$

sein.

Hat aber an einer Stelle $(x'_1, \dots x'_n)$ sowohl $\mathfrak{P}_1$ als $\mathfrak{P}_0$ den Werth Null, so bringe man auf die im Vorhergehenden angegebene Weise

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) & \text{auf die Form} & \mathfrak{P}_2(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n)\,\mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n), \\ \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \mathfrak{P}_3(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n)\,\mathfrak{P}_4(x_1 - x'_1, \dots x_n - x'_n), \end{array}$$

in der Art, dass die Reihen $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x'_1, \dots x_n = x'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Wenn dann

$$\mathfrak{P}_2(0, \dots 0), \quad \mathfrak{P}_3(0, \dots 0)$$

nicht beide gleich Null sind, so soll

$$f(x'_1, \dots x'_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)}{\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)}$$

sein. Dagegen soll, wenn sowohl

$$\mathfrak{P}_3(0,\dots 0) = 0 \text{ als } \mathfrak{P}_2(0,\dots 0) = 0$$

ist, $f(x_1,\dots x_n)$ an der Stelle $(x'_1,\dots x'_n)$ keinen bestimmten Werth haben.

Dies lässt sich auch so ausdrücken. Ist $(x'_1,\dots x'_n)$ irgend eine bestimmte Stelle von $\mathfrak{G}$, so kann man stets zwei Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_2(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n),\quad \mathfrak{P}_3(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n)$$

ohne einen an der Stelle $(x_1 = x'_1,\dots x_n = x'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler so bestimmen, dass an allen einer bestimmten Umgebung der Stelle $(x'_1,\dots x'_n)$ angehörigen Stellen die Gleichung

$$\mathfrak{P}_3(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n)\,\mathfrak{P}_0(x_1-a_1,\dots x_n-a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n)\,\mathfrak{P}_1(x_1-a_1,\dots x_n-a_n)$$

besteht. Dann ist

$$f(x'_1,\dots x'_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(0,\dots 0)}{\mathfrak{P}_2(0,\dots 0)}$$

zu setzen, mit der Massgabe, dass, wenn so dargestellt $f(x'_1,\dots x'_n)$ in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, der Function f an der Stelle $(x'_1,\dots x'_n)$ kein bestimmter Werth beizulegen ist.

Es ist nun zu zeigen, dass die so definirte Function $f(x_1,\dots x_n)$ innerhalb des Bereiches $\mathfrak{G}$ eine eindeutige analytische Function ist, für welche diejenigen Stellen, an denen sie der gegebenen Definition gemäss den Werth ∞ hat oder unbestimmt ist, ausserwesentliche singuläre Stellen in dem oben festgestellten Sinne sind, während sie an allen übrigen Stellen sich regulär verhält.

Es sei $(x'_1,\dots x'_n)$ irgend eine bestimmte Stelle von $\mathfrak{G}$, und

$$\mathfrak{P}_0(x_1-a_1,\dots x_n-a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n).\mathfrak{P}_4(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n),$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1-a_1,\dots x_n-a_n) = \mathfrak{P}_3(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n).\mathfrak{P}_4(x_1-x'_1,\dots x_n-x'_n),$$

wo $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ dieselbe Bedeutung wie im Vorstehenden haben, und $\mathfrak{P}_4$ sich auf eine Constante reduciren kann. Nach dem oben Bewiesenen kann man nun eine Umgebung der Stelle $(x'_1,\dots x'_n)$ so bestimmen, dass, wenn $(x''_1,\dots x''_n)$ eine bestimmte Stelle dieser Umgebung ist, und man aus $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ die drei Potenzreihen $\overline{\mathfrak{P}}_2, \overline{\mathfrak{P}}_3, \overline{\mathfrak{P}}_4$ von $x_1-x''_1,\dots x_n-x''_n$ ableitet, für welche bei hinlänglich kleinen Werthen dieser Differenzen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_2(x_1-x_1', \ldots x_n-x_n') &= \overline{\mathfrak{P}}_2(x_1-x_1'', \ldots x_n-x_n''),\\
\mathfrak{P}_3(x_1-x_1', \ldots x_n-x_n') &= \overline{\mathfrak{P}}_3(x_1-x_1'', \ldots x_n-x_n''),\\
\mathfrak{P}_4(x_1-x_1', \ldots x_n-x_n') &= \overline{\mathfrak{P}}_4(x_1-x_1'', \ldots x_n-x_n'')
\end{aligned}$$

bestehen, die beiden Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_2$, $\overline{\mathfrak{P}}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x_1'', \ldots x_n = x_n'')$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Wenn dann $f(x_1'', \ldots x_n'')$ einen bestimmten endlichen Werth hat, so ist

$$\begin{aligned}
f(x_1'', \ldots x_n'') &= \frac{\overline{\mathfrak{P}}_3(0, \ldots 0)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(0, \ldots 0)}\\
&= \frac{\mathfrak{P}_3(x_1''-x_1', \ldots x_n''-x_n')}{\mathfrak{P}_2(x_1''-x_1', \ldots x_n''-x_n')},
\end{aligned}$$

d. h. es gilt die Gleichung

$$f(x_1, \ldots x_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(x_1-x_1', \ldots x_n-x_n')}{\mathfrak{P}_2(x_1-x_1', \ldots x_n-x_n')}$$

innerhalb einer gewissen Umgebung der Stelle $(x_1', \ldots x_n')$ für alle Stellen $(x_1, \ldots x_n)$, an denen $f(x_1, \ldots x_n)$ einen bestimmten endlichen Werth hat. Wenn daher $\mathfrak{P}_2(0, \ldots 0)$ nicht gleich Null ist, so verhält sich $f(x_1, \ldots x_n)$ an der Stelle $(x_1', \ldots x_n')$ regulär.

Ist $\mathfrak{P}_2(0, \ldots 0) = 0$, nicht aber $\mathfrak{P}_3(0, \ldots 0)$, so kann man die in Rede stehende Umgebung von $(x_1', \ldots x_n')$ so klein annehmen, dass an allen Stellen derselben der absolute Betrag von $f(x_1, \ldots x_n)$ grösser ist als jede beliebig angenommene endliche Grösse, so dass $f(x_1', \ldots x_n') = \infty$ zu setzen ist, wie der Ausdruck von $f(x_1, \ldots x_n)$ angiebt.

Sind endlich $\mathfrak{P}_2(0, \ldots 0)$, $\mathfrak{P}_3(0, \ldots 0)$ beide gleich Null, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, in jeder noch so kleinen Umgebung von $(x_1', \ldots x_n')$ Stellen, an denen die Function $f(x_1, \ldots x_n)$ einen beliebig vorgeschriebenen Werth hat; sie hat also an der Stelle $(x_1', \ldots x_n')$ selbst keinen bestimmten Werth.

Damit ist bewiesen, dass die in der angegebenen Weise definirte Function $f(x_1, \ldots x_n)$ innerhalb des Bezirkes $\mathfrak{S}$ sich überall wie eine rationale Function verhält.

4. Zur Theorie der ganzen eindeutigen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen.

Dem Vorstehenden zufolge stellt eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, \dots x_n)$, die für jedes System endlicher Werthe der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ convergirt, eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ dar, die sich an jeder im Endlichen des Grössengebiets $(x_1, \dots x_n)$ liegenden Stelle regulär verhält.

Umgekehrt weiss man, dass jede eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$, die sich an allen im Endlichen liegenden Stellen des Gebietes $(x_1, \dots x_n)$ regulär verhält, durch eine für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergirende Reihe $\mathfrak{P}(x_1, \dots x_n)$ ausgedrückt werden kann.

Ich nenne eine solche Function $f(x_1, \dots x_n)$ eine *ganze* Function. Hat die Reihe, durch welche sie dargestellt wird, unendlich viele Glieder, deren Coefficienten nicht gleich Null sind, so ist die Function eine transcendente.

Sind ferner zwei Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ gegeben, welche beide für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergiren, so wird durch den Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)}$$

den in Art. 3 festgesetzten Bestimmungen gemäss eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ definirt, die dadurch charakterisirt ist, dass sie sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Grössengebiets $(x_1, \dots x_n)$ wie eine rationale Function verhält.

Ob aber umgekehrt jede eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$, welche sich im Endlichen überall wie eine rationale Function verhält — also, wenn $(a_1, \dots a_n)$ irgend ein System endlicher Werthe ist, in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ ausgedrückt werden kann —, auch als Quotient zweier für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergirenden Potenzreihen sich darstellen lasse, das ist eine für Functionen von mehreren Veränderlichen bis jetzt unerledigte Frage, welche sehr erhebliche Schwierigkeiten darzubieten scheint.

Mit dieser Frage ist aber noch eine andere verknüpft.

Für jede rationale Function von $x_1, \dots x_n$ gilt, dass sie als Quotient zweier ganzen Functionen dieser Veränderlichen dargestellt werden kann und zwar so, dass der Dividend und der Divisor keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Dann verschwinden Dividend und Divisor gleichzeitig nur an solchen Stellen, an denen die Function keinen bestimmten Werth hat. Es entsteht also die Frage, ob in dem Falle, wo eine Function als Quotient zweier ganzen Functionen von $x_1, \dots x_n$, von denen wenigstens eine transcendent ist, dargestellt werden kann, dies auch in der Art geschehen könne, dass der Quotient nur bei solchen Werthsystemen der Veränderlichen, für welche die Function unbestimmt ist, in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint — mit andern Worten, dass aus den Werthen, welche Dividend und Divisor an einer bestimmten Stelle haben, sich unmittelbar entnehmen lässt, ob an dieser Stelle die Function einen bestimmten Werth hat oder nicht, und wie sie sich in der Umgebung dieser Stelle verhält. Auch diese Frage ist bis jetzt nur für Functionen von einer Veränderlichen — und zwar für diese im bejahenden Sinne — entschieden.

In manchen Fällen, wo eine eindeutige Function mehrerer Veränderlichen durch analytische Bestimmungen definirt ist, ist es aber möglich, die angeregten Fragen mittelst eines Theorems, das ich im Folgenden ausführlich entwickeln will, zu erledigen.

Es bedeute jetzt $f(x_1, \dots x_n)$ eine (transcendente oder rationale) ganze Function der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$. Man setze für diese Grössen ganze lineare Functionen einer Veränderlichen τ:

$$x_1 = a_1 + c_1\tau, \quad \dots \quad x_n = a_n + c_n\tau,$$

so geht $f(x_1, \dots x_n)$ in eine ganze Function von τ über, welche im Allgemeinen — d. h. wenn die Grössen $c_1, \dots c_n$ einer sogleich anzugebenden Beschränkung unterworfen werden — nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Denn es erhält $f(x_1, \dots x_n)$, nach Potenzen von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ entwickelt, die Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)^\nu,$$

wo $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)^\nu$ eine homogene ganze Function ν^{ten} Grades von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$ bezeichnet; es brauchen also die Grössen $c_1, \dots c_n$ nur die Bedingung zu erfüllen, dass die Ausdrücke

$$(c_1, \dots c_n)^\nu$$

nicht alle gleich Null sind. Dies vorausgesetzt, sei in der Entwickelung von $f(a_1+c_1\tau, \ldots a_n+c_n\tau)$ nach Potenzen von τ das erste Glied, dessen Coefficient nicht verschwindet, von der Ordnung μ, so hat man

$$f(a_1+c_1\tau, \ldots a_n+c_n\tau) = C_\mu \tau^\mu + C_{\mu+1}\tau^{\mu+1} + \cdots,$$

wo C_μ nicht gleich Null ist. Daraus ergiebt sich für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\frac{d \log f(a_1+c_1\tau, \ldots a_n+c_n\tau)}{d\tau} = \mu\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Setzt man also

$$d \log f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha,$$

wo $f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, \ldots x_n)$ eindeutige Functionen sind, welche sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Gebietes $(x_1, \ldots x_n)$ wie rationale Functionen verhalten und den Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots n\\ \beta = 1, \ldots n\end{pmatrix}$$

genügen, so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha = (\mu\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau))\, d\tau,$$

wenn

$$x_1 = a_1 + c_1\tau, \quad \ldots \quad x_n = a_n + c_n\tau$$

gesetzt wird, und es ist dann μ stets entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl.

Dieser Satz lässt sich nun in folgender Weise umkehren:

Es seien n Functionen

$$f_1(x_1, \ldots x_n), \ \ldots \ f_n(x_1, \ldots x_n)$$

gegeben, welche den folgenden Bedingungen genügen:

1) Sie sollen eindeutige Functionen sein, für die wesentliche singuläre Stellen im Endlichen des Grössengebiets $(x_1, \ldots x_n)$ nicht existiren.

2) Der Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha$$

soll die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, \dots x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, \dots x_n)}{\partial x_\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \dots n\\ \beta = 1, \dots n\end{pmatrix}.$$

ausgedrückten Integrabilitätsbedingungen erfüllen.

3) Es soll, wenn man für $x_1, \dots x_n$ irgend welche ganze lineare Functionen einer Veränderlichen τ substituirt:

$$x_1 = a_1 + c_1\tau, \quad \dots \quad x_n = a_n + c_n\tau,$$

für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha \quad \text{die Form} \quad (\mu\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau))\, d\tau$$

annehmen, und dann μ entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl sein, vorausgesetzt, dass von den beiden Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots x_n - a_n$, als deren Quotient

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha f_\alpha(x_1, \dots x_n)$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ dargestellt werden kann, der Divisor durch die angegebenen Substitutionen nicht identisch gleich Null werde.

Alsdann existirt eine ganze Function $f(x_1, \dots x_n)$, welche der Differentialgleichung

$$d \log f(x_1, \dots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha$$

genügt und völlig bestimmt ist, wenn der Werth irgend eines ihrer Coefficienten, der in Folge der vorstehenden Gleichung nicht nothwendig gleich Null ist, fixirt wird, was in beliebiger Weise geschehen kann.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme ich zuerst an, es sei innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ jede Function f_α in der Form

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_1, \dots x_n) &= \mathfrak{P}_\alpha(x_1, \dots x_n) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1, \dots x_n)_\alpha^\nu \end{aligned}$$

darstellbar. Dann ist zufolge der Bedingung 2)

$$\frac{\partial (x_1, \dots x_n)_\alpha^\nu}{\partial x_\beta} = \frac{\partial (x_1, \dots x_n)_\beta^\nu}{\partial x_\alpha}.$$

Setzt man

$$(x_1, \dots x_n)^{\nu+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\nu+1} (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha} x_{\alpha},$$

so ist

$$d(x_1, \dots x_n)^{\nu+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\nu+1} (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha} dx_{\alpha} \right\} + \frac{1}{\nu+1} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} x_{\alpha} dx_{\beta}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} x_{\alpha} dx_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} x_{\alpha} dx_{\beta} \\ &= \sum_{\beta=1}^{n} \nu (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\beta} dx_{\beta} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \nu (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha} dx_{\alpha}, \end{aligned}$$

und daher

$$d(x_1, \dots x_n)^{\nu+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha} dx_{\alpha},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1, \dots x_n)^{\nu}_{\alpha} dx_{\alpha} = d \sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1, \dots x_n)^{\nu+1}.$$

Entwickelt man also, unter C eine willkürlich anzunehmende Constante verstehend, den Ausdruck

$$Ce^{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (x_1, \dots x_n)^{\nu+1}}$$

nach Potenzen von $x_1, \dots x_n$, so genügt die so sich ergebende Potenzreihe, für $f(x_1, \dots x_n)$ gesetzt, der in Rede stehenden Differentialgleichung und ist sicher convergent in dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Entwickelungen von $f_1(x_1, \dots x_n), \dots f_n(x_1, \dots x_n)$.

Zweitens nehme ich an, man habe für alle einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$

$$f_{\alpha}(x_1, \dots x_n) = \frac{\mathfrak{P}^{(1)}_{\alpha}(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}^{(0)}_{\alpha}(x_1, \dots x_n)},$$

wobei ich bemerke, dass es nicht eine nothwendige Bedingung ist, dass $\mathfrak{P}^{(0)}_{\alpha}(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}^{(1)}_{\alpha}(x_1, \dots x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Man substituire nun für $x_1, \dots x_n$ homogene lineare Functionen von n andern Veränderlichen $t_1, \dots t_n$:

$$x_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} t_{\beta}, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

wodurch sich das Differential

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha$$

in ein anderes von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha(t_1, \dots t_n)\, dt_\alpha$$

verwandelt, für welches die Integrabilitätsbedingungen ebenfalls erfüllt sind. Die Constanten $g_{\alpha\beta}$ hat man so anzunehmen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und bei keiner der Functionen

$$\mathfrak{P}_1^{(0)}(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1), \; \dots \; \mathfrak{P}_n^{(0)}(g_{11}t_1, \dots g_{n1}t_1),$$

wenn man sie nach Potenzen von t_1 entwickelt, sämmtliche Coefficienten verschwinden.

Dann lässt sich

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots t_n) \text{ in der Form } \frac{\mathfrak{P}_\alpha(t_1, \dots t_n)}{\mathfrak{P}_0(t_1, \dots t_n)}$$

darstellen, und es ist $\mathfrak{P}_0(t_1, 0, \dots 0)$ eine Potenzreihe von t_1, deren Coefficienten nicht sämmtlich gleich Null sind. Ist das Anfangsglied dieser Reihe von der Ordnung l, so nehme man eine positive Grösse δ_1 so an, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1, t_2 = 0, \dots t_n = 0)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_0(t_1, \dots t_n), \; \mathfrak{P}_1(t_1, \dots t_n), \; \dots \; \mathfrak{P}_n(t_1, \dots t_n)$$

liegt, und die Function

$$t_1^{-l}\, \mathfrak{P}_0(t_1, 0, \dots 0)$$

für jeden Werth von t_1, dessen absoluter Betrag nicht grösser als δ_1 ist, einen von Null verschiedenen Werth hat. Wird darauf eine zweite positive Grösse δ', die kleiner als δ_1 ist, beliebig angenommen, so lassen sich $n-1$ andere $\delta_2, \dots \delta_n$ so bestimmen, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1, t_2 = \delta_2, \dots t_n = \delta_n)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Reihen $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots \mathfrak{P}_n$ liegt, und für jedes den Bedingungen

$$\text{A)}\qquad \delta' \leqq |t_1| \leqq \delta_1,\ |t_2| \leqq \delta_2,\ \ldots\ |t_n| \leqq \delta_n$$

genügende Werthsystem $(t_1, t_2, \ldots t_n)$

$$|\mathfrak{P}_0(t_1, 0, \ldots 0)| > |\mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \ldots t_n) - \mathfrak{P}_0(t_1, 0, \ldots 0)|$$

ist. Dann giebt es, wie in Art. 1 gezeigt worden ist, für jedes den Bedingungen

$$\text{B)}\qquad |t_2| \leqq \delta_2,\ \ldots\ |t_n| \leqq \delta_n$$

entsprechende Werthsystem $(t_2, \ldots t_n)$ unter denjenigen Werthen von t_1, für welche $|t_1| \leqq \delta_1$ ist, nicht mehr als l, welche der Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \ldots t_n) = 0$$

genügen, und diese sind ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als δ'. Nun sei $(t_2', \ldots t_n')$ irgend ein System bestimmter, den Bedingungen B) genügender Werthe von $t_2, \ldots t_n$, und es habe die Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(t_1, t_2', \ldots t_n') = 0$$

r von einander verschiedene Wurzeln

$$t_1',\ t_1'',\ \ldots\ t_1^{(r)},$$

welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ' sind. Setzt man dann

$$t_1 = t_1' + \tau,\quad t_2 = t_2',\quad \ldots\quad t_n = t_n',$$

so werden $x_1, \ldots x_n$ ganze lineare Function von τ, welche der oben unter 3) angegebenen Bedingung genügen, indem

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\mathfrak{P}_\alpha(t_1, \ldots t_n)}{\mathfrak{P}_0(t_1, \ldots t_n)}\, dt_\alpha$$

ist, und $\mathfrak{P}_0(t_1' + \tau, t_2', \ldots t_n')$ nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Man erhält also für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\varphi_1(t_1' + \tau, t_2', \ldots t_n') = \frac{m'}{\tau} + \mathfrak{P}'(\tau),$$

wo m' eine ganze Zahl und $\geqq 0$ ist; und ebenso

$$\varphi_1(t_1'' + \tau, t_2', \ldots t_n') = \frac{m''}{\tau} + \mathfrak{P}''(\tau),\quad \ldots\quad \varphi_1(t_1^{(r)} + \tau, t_2', \ldots t_n') = \frac{m^{(r)}}{\tau} + \mathfrak{P}^{(r)}(\tau),$$

wo $m'', \dots m^{(r)}$ gleichfalls ganze, nicht negative Zahlen sind. Daraus folgt, dass die Differenz

$$\varphi_1(t_1, t_2', \dots t_n') - \left(\frac{m'}{t_1 - t_1'} + \frac{m''}{t_1 - t_1''} + \cdots + \frac{m^{(r)}}{t_1 - t_1^{(r)}}\right)$$

für keinen Werth von t_1, dessen absoluter Betrag kleiner als δ_1 ist, unendlich gross wird und demgemäss in der Form

$$\mathfrak{P}(t_1)$$

dargestellt werden kann. Setzt man also

$$\varphi(t) = (t - t_1')^{m'} (t - t_1'')^{m''} \dots (t - t_1^{(r)})^{m^{(r)}},$$

so ergiebt sich für jeden der Bedingung $|t_1| < \delta_1$ genügenden Werth von t_1

$$\varphi_1(t_1, t_2', \dots t_n') = \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} + \mathfrak{P}(t_1).$$

Die Function $\varphi(t)$ lässt sich aber ermitteln, ohne dass es nöthig wäre, die Grössen $t_1', t_1'', \dots t_1^{(r)}$ und die zugehörigen Zahlen $m', m'', \dots m^{(r)}$ zu bestimmen.

Man kann, wenn man die Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ den Bedingungen

$$\text{C)} \qquad |t_1| \leqq \delta_1, \ |t_2| \leqq \delta_2, \ \dots \ |t_n| \leqq \delta_n$$

unterwirft, $\mathfrak{P}_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ in der oben (in Art. 1) angegebenen Weise auf die Form

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$$

bringen, in der Art, dass $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$ für kein den vorstehenden Bedingungen entsprechendes Werthsystem $(t_1, t_2, \dots t_n)$ verschwindet. Die Function $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ kann dann nicht unendlich klein werden, wenn man die Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ den Bedingungen A) unterwirft. Für alle diesen Bedingungen genügenden Werthsysteme $(t_1, t_2, \dots t_n)$ lässt sich deshalb

$$\frac{1}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)}$$

in eine gleichmässig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu t_1^{-l-\nu}$$

entwickeln, in der die Coefficienten T_ν gewöhnliche Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$ sind. Diese Reihe convergirt dann auch, als Potenzreihe von $t_1, t_2, \dots t_n$ betrachtet, bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt für die gewöhnliche Potenzreihe von $t_1, t_2, \dots t_n$, in welche der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1(t_1, \dots t_n)}{\mathfrak{P}_0(t_1, \dots t_n)}$$

verwandelt werden kann; man erhält daher für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(t_1, \dots t_n)$ die Function $\varphi_1(t_1, \dots t_n)$ dargestellt durch eine bei jeder Anordnung ihrer Glieder convergirende Potenzreihe der Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$, welche negative Potenzen von t_1 im Allgemeinen in unendlicher Anzahl, aber keine negativen Potenzen von $t_2, \dots t_n$ enthält und somit auf die Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2, \dots t_n)\, t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\nu}$$

gebracht werden kann.*)

Es lässt sich aber auch

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \frac{m'}{t_1 - t_1'} + \frac{m''}{t_1 - t_1''} + \dots + \frac{m^{(r)}}{t_1 - t_1^{(r)}},$$

wenn $|t_1| \geqq \delta'$ ist, in eine Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} T'_{\mu+1} t_1^{-\mu-1}$$

entwickeln, und es ist dann namentlich $T_1' = m' + m'' + \dots + m^{(r)}$. Man hat also

$$\varphi_1(t_1, t_2', \dots t_n') - \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2', \dots t_n') - T'_{\mu+1} \right\} t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2', \dots t_n')\, t_1^{\nu}.$$

Aus dieser Reihe müssen nun dem vorhin Bemerkten zufolge alle Glieder mit einer negativen Potenz von t_1 verschwinden; man hat also

$$T'_{\mu+1} = \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2', \dots t_n') \qquad (\mu = 0, \dots \infty).$$

*) Diese Reihe erhält man auch dadurch, dass man (unter der Annahme $\delta' \leqq |t_1| \leqq \delta_1$) die Function $\varphi_1(t_1, t_2, \dots t_n)$ als Potenzreihe von $t_2, \dots t_n$ darstellt und darauf die Coefficienten derselben, welche sämmtlich die Form

$$\frac{\mathfrak{P}(t_1)}{\mathfrak{P}_0^{\nu}(t_1, 0, \dots 0)}$$

haben, nach steigenden Potenzen von t_1 entwickelt.

Es ist daher $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots t_n)$ für jedes der betrachteten Werthsysteme $(t_2, \dots t_n)$ eine ganze Zahl. Daraus folgt, dass sich $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots t_n)$ auf ein von $t_2, \dots t_n$ unabhängiges Glied reducirt. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots t_n)$ eine continuirliche Function von $t_2, \dots t_n$ sein, die auch andere als ganzzahlige Werthe haben könnte. Es ist also die Summe $(m' + m'' + \dots + m^{(r)})$ von dem gewählten Werthsystem $(t'_2, \dots t'_n)$ unabhängig und kann gefunden werden, wenn man gleichzeitig $t'_2 = 0, \dots t'_n = 0$ setzt.

Da nun, wenn $t'_2, \dots t'_n$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden,

$$\varphi_1(t_1, 0, \dots 0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(0, \dots 0)\, t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(0, \dots 0)\, t_1^{\nu},$$

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = (m' + m'' + \dots + m^{(r)})\, t_1^{-1}$$

ist, und aus der Differenz der Ausdrücke auf der Rechten dieser Gleichungen alle Glieder mit negativen Potenzen von t_1 wegfallen müssen, so sieht man, dass die Entwickelung von

$$\varphi_1(t_1, 0, \dots 0)$$

für jeden Werth von t_1, dessen absoluter Betrag $\leqq \delta_1$ ist, die Gestalt

$$m t_1^{-1} + \mathfrak{P}(t_1)$$

hat, wo m eine ganze Zahl bedeutet, die $\geqq 0$ ist, und dass man

$$m' + m'' + \dots + m^{(r)} = m$$

hat. Dabei ist noch zu bemerken, dass m immer > 0 ist, wenn nicht etwa jede Function $\mathfrak{P}_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n)$ theilbar ist, welcher Fall schon behandelt worden und hier auszuschliessen ist.

Nachdem so der Grad der Function $\varphi(t_1)$ ermittelt ist, setze man

$$\varphi(t_1) = t_1^m + F'_1 t_1^{m-1} + \dots + F'_m,$$

so hat man, zunächst für die der Bedingung

$$\delta' \leqq |t_1| \leqq \delta_1$$

genügenden Werthe von t_1,

$$\frac{1}{\varphi(t_1)}\frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} T'_{\mu+1} t_1^{-\mu-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t'_2,\dots t'_n)\, t_1^{-\mu-1},$$

$$mt_1^{m-1} + (m-1)F'_1 t_1^{m-2} + \cdots + F'_{m-1} = (t_1^m + F'_1 t_1^{m-1} + \cdots + F'_m)\left\{mt_1^{-1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t'_2,\dots t'_n)\, t_1^{-\mu-1}\right\}.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&F'_1 + \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2,\dots t'_n) = 0,\\
&2F'_2 + F'_1 \,.\, \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2,\dots t'_n) + \mathfrak{P}^{(-3)}(t'_2,\dots t'_n) = 0,\\
&3F'_3 + F'_2 \,.\, \mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2,\dots t'_n) + F'_1 \,.\, \mathfrak{P}^{(-3)}(t'_2,\dots t'_n) + \mathfrak{P}^{(-4)}(t'_2,\dots t'_n) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&mF'_m + F'_{m-1}\mathfrak{P}^{(-2)}(t'_2,\dots t'_n) + F'_{m-2}\mathfrak{P}^{(-3)}(t'_2,\dots t'_n) + \cdots + \mathfrak{P}^{(-m-1)}(t'_2,\dots t'_n) = 0.
\end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen lassen sich die Grössen $F'_1, \dots F'_m$ bestimmen. Substituirt man in den Ausdrücken derselben für $t'_2, \dots t'_n$ die unbestimmten Grössen $t_2, \dots t_n$, bezeichnet die Potenzreihe von $t_2, \dots t_n$, in welche F'_μ dadurch übergeht, mit

$$F_\mu(t_2,\dots t_n)$$

und setzt

$$\varphi(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^m + F_1(t_2,\dots t_n)\, t_1^{m-1} + \cdots + F_m(t_2,\dots t_n),$$

so ist durch das Vorstehende bewiesen, dass für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots t_n)$

$$\varphi_1(t_1, t_2, \dots t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, t_2, \dots t_n)}{\partial t_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2,\dots t_n)\, t_1^\nu$$

ist. Da aber die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung keine negativen Potenzen von t_1 enthält, so convergirt sie für jedes den Bedingungen C) genügende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots t_n)$, und zwar, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt von den Reihen

$$F_1(t_2,\dots t_n),\ \dots\ F_m(t_2,\dots t_n);$$

es besteht somit die vorstehende Gleichung für jedes den zuletzt angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_1, \dots t_n)$.

Nun hat man, wenn $\alpha > 1$ ist,

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(t_1, \dots t_n)}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi_1(t_1, \dots t_n)}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial^2 \log \varphi(t_1, \dots t_n)}{\partial t_1 \partial t_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots t_n) t_1^\nu,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\varphi_\alpha(t_1, \dots t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots t_n)}{\partial t_\alpha}\right\} = \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{t_1^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\partial \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots t_n)}{\partial t_\alpha}\right\}.$$

Es lassen sich aber, wenn man $t_1, t_2, \dots t_n$ wieder den Bedingungen A) unterwirft,

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots t_n) \text{ und } \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots t_n)}{\partial t_\alpha}$$

in Reihen von derselben Form, wie die im Vorhergehenden für $\varphi_1(t_1, \dots t_n)$ angegebene, entwickeln. Die vorstehende Gleichung lehrt nun, dass in der Differenz dieser beiden Reihen Glieder mit einer negativen Potenz von t_1 nicht vorkommen, und dass man

$$\varphi_\alpha(t_1, \dots t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots t_n)}{\partial t_\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(t_2, \dots t_n) - \varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots t_n) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t_1^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\partial \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, \dots t_n)}{\partial t_\alpha}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(t_2, \dots t_n)$ die Summe der von t_1 unabhängigen Glieder der eben erwähnten Entwickelung von $\varphi_\alpha(t_1, \dots t_n)$ bezeichnet, und $\varphi_\alpha^{(0)}(t_2, \dots t_n)$ dieselbe Bedeutung für die Function $\frac{\partial \log \varphi(t_1, \dots t_n)}{\partial t_\alpha}$ hat. Aus der Form der Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung ergiebt sich dann wieder, dass die Gleichung für jedes den Bedingungen C) entsprechende Werthsystem $(t_1, t_2, \dots t_n)$ gilt.

Damit ist bewiesen, dass sich

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha(t_1, \dots t_n) dt_\alpha$$

auf die Form

$$d \log \varphi(t_1, \dots t_n) + \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{P}(t_1, \dots t_n)_\alpha dt_\alpha$$

bringen lässt. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen genügt dann wieder den Integrabilitätsbedingungen und kann nach dem im zuerst betrachteten Falle Bewiesenen in der Form

$$d \log \mathfrak{P}(t_1, \dots t_n)$$

dargestellt werden, wobei man $\mathfrak{P}(0, \dots 0) = 1$ annehmen kann. Folglich ist, wenn man, unter C eine von Null verschiedene, im Übrigen willkürlich anzunehmende Constante verstehend,

$$\psi(t_1, \dots t_n) = C\varphi(t_1, \dots t_n)\mathfrak{P}(t_1, \dots t_n)$$

setzt,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha(t_1, \dots t_n)\, dt_\alpha = d \log \psi(t_1, \dots t_n).$$

Drückt man nunmehr $t_1, \dots t_n$ durch $x_1, \dots x_n$ aus und setzt

$$\psi(t_1, \dots t_n) = f(x_1, \dots x_n),$$

so ergiebt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha = d \log f(x_1, \dots x_n).$$

Diese Gleichung gilt nun ihrer Herleitung zufolge für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$. Etwas Bestimmteres über den Convergenzbezirk der Reihe für $f(x_1, \dots x_n)$ lässt sich durch die gegebene Deduction nicht ermitteln, weil bei derselben nur vorausgesetzt ist, dass die Functionen $f_\alpha(x_1, \dots x_n)$ innerhalb einer begrenzten Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ überall eindeutig definirt seien und sich wie rationale Functionen verhalten. Gleichwohl reicht der in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Satz aus, um für den Fall, wo die Functionen $f_\alpha(x_1, \dots x_n)$ sich an allen im Endlichen des Grössengebietes $(x_1, \dots x_n)$ liegenden Stellen wie rationale Functionen verhalten, das oben ausgesprochene Theorem zu beweisen.

Es sei $(a_1, \dots a_n)$ ein System bestimmter, endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$, und man nehme an, es convergire die auf die beschriebene Weise hergeleitete Reihe $f(x_1, \dots x_n)$ (in der wir uns jetzt für die Constante C einen bestimmten Werth gesetzt denken) für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1|, \ \dots \ |x_n| < |a_n|$$

genügende Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$. — Ferner sei $(a'_1, \dots a'_n)$ irgend ein bestimmtes Werthsystem, das den Bedingungen

$$|a'_1| = |a_1|, \ \dots \ |a'_n| = |a_n|$$

gemäss, im Übrigen aber beliebig angenommen ist. Dann kann man innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a'_1, \dots a'_n)$

$$f_\alpha(x_1, \dots x_n) \text{ in der Form } \frac{\mathfrak{P}_\alpha^{(1)}(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)}{\mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n)}$$

darstellen und nach dem Vorhergehenden eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)$$

herleiten, welche der Gleichung

$$d\log\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n) = \sum_\alpha \frac{\mathfrak{P}^{(1)}_\alpha(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)}{\mathfrak{P}^{(0)}_\alpha(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)}\, dx_\alpha$$

genügt. Diese Reihe möge convergiren an allen Stellen, für die

$$|x_1-a'_1| < \delta, \ \ldots \ |x_n-a'_n| < \delta$$

ist, wo δ eine positive Grösse bedeutet. Unter diesen Stellen giebt es nun auch solche — und zwar bilden dieselben ein $2n$-fach ausgedehntes Continuum —, welche zugleich den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1|, \ \ldots \ |x_n| < |a_n|$$

genügen. Innerhalb des Bereiches dieser Stellen hat man also

$$d\log\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha,$$

$$d\log f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha,$$

$$\frac{d\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)}{\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)} = \frac{df(x_1, \ldots x_n)}{f(x_1, \ldots x_n)},$$

woraus sich, da die Functionen $f(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)$ innerhalb des in Rede stehenden Bereichs an allen Stellen sich regulär verhalten,

$$f(x_1, \ldots x_n) = C'\mathfrak{P}(x_1-a'_1, \ldots x_n-a'_n)$$

ergiebt, wo C' eine von $x_1, \ldots x_n$ unabhängige Grösse bedeutet. Da dies für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(a'_1, \ldots a'_n)$ gilt, so folgt daraus (nach einem der Sätze, welche in der Functionentheorie in Betreff der Convergenzbedingungen für Potenzreihen entwickelt werden) die Existenz einer positiven Grösse δ', so beschaffen, dass die Reihe auch noch convergirt für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1| + \delta', \ \ldots \ |x_n| < |a_n| + \delta'$$

genügende Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$. Daraus ergiebt sich sofort, dass die Reihe $f(x_1, \ldots x_n)$ für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \ldots x_n$ convergirt und die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha = d \log f(x_1, \dots x_n)$$

befriedigt.

Man sieht zugleich, wie sich die in $f(x_1, \dots x_n)$ vorkommende Constante C so bestimmen lässt, dass einer der Coefficienten der Reihe, welcher nicht nothwendig bei jedem Werth von C gleich Null ist, einen vorgeschriebenen Werth erhält.

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass in einem gegebenen Falle die Entwickelung der Reihe $f(x_1, \dots x_n)$ nicht nothwendig auf dem beschriebenen Wege bewerkstelligt zu werden braucht. Vielmehr kann man, nachdem einmal durch das Vorstehende die Form und der Convergenzbezirk der Reihe festgestellt worden sind, jedes zur Bestimmung ihrer Coefficienten führende Verfahren ohne Verstoss gegen die Strenge der Herleitung anwenden.

5.

An das im Vorstehenden entwickelte Theorem schliesst sich nun ein anderes an, durch welches in manchen Fällen für eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$, welche an allen im Endlichen des Grössengebietes $(x_1, \dots x_n)$ liegenden Stellen sich wie eine rationale Function verhält, der Nachweis geführt werden kann, dass sie als Quotient zweier — transcendenten oder rationalen — ganzen Functionen von $x_1, \dots x_n$ darstellbar ist, und zwar in der Art, dass nur an denjenigen Stellen, wo $f(x_1, \dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat, der Dividend sowohl als der Divisor verschwindet.

Angenommen, es sei eine bestimmte Function $f(x_1, \dots x_n)$ in der angegebenen Weise als Quotient zweier ganzen Functionen $g_1(x_1, \dots x_n)$, $g_0(x_1, \dots x_n)$ ausgedrückt, so hat man, wenn

$$\frac{\partial \log g_0(x_1, \dots x_n)}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n),$$

$$\frac{\partial \log g_1(x_1, \dots x_n)}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)$$

gesetzt wird,

$$d \log f(x_1, \dots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha,$$

und es besitzen die Functionen $f_\alpha^{(0)}, f_\alpha^{(1)}$ folgende Eigenschaften:

1) Sie sind alle eindeutige Functionen von $x_1, \ldots x_n$, welche sich im Endlichen wie rationale Functionen verhalten.

2) Die Differentialausdrücke

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha$$

genügen beide den Integrabilitätsbedingungen.

3) Jede im Endlichen gelegene singuläre Stelle einer der Functionen $f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)$ ist zugleich eine singuläre Stelle der Function $f(x_1, \ldots x_n)$; jede im Endlichen gelegene singuläre Stelle einer der Functionen $f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)$ ist entweder eine Null-Stelle von $f(x_1, \ldots x_n)$ oder eine derjenigen singulären Stellen dieser Function, an denen sie keinen bestimmten Werth hat.

Dies Theorem — dessen Beweis auf der Hand liegt — lässt sich folgendermassen umkehren.

Angenommen, man wisse von einer irgendwie definirten Function $f(x_1, \ldots x_n)$, dass sie eine eindeutige Function der hier betrachteten Art sei, und es gelinge, das Differential

$$d \log f(x_1, \ldots x_n)$$

in der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha$$

dergestalt auszudrücken, dass die Functionen $f_\alpha^{(0)}, f_\alpha^{(1)}$ die im Vorstehenden unter 1), 2), 3) angegebenen Eigenschaften besitzen; so sind diese Functionen auch so beschaffen, dass sich auf die in Art. 4 gelehrte Weise zwei ganze Functionen $g_0(x_1, \ldots x_n)$, $g_1(x_1, \ldots x_n)$ bestimmen lassen, welche die Gleichungen

$$\text{A)} \quad \begin{cases} d \log g_0(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha \\ d \log g_1(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha \end{cases}$$

befriedigen. Dann ist

$$\text{B)} \qquad f(x_1, \ldots x_n) = C \frac{g_1(x_1, \ldots x_n)}{g_0(x_1, \ldots x_n)},$$

wo C eine von $x_1, \ldots x_n$ unabhängige Grösse bezeichnet, und es verschwinden

g_0, g_1 gleichzeitig nur an solchen Stellen $(x_1, \ldots x_n)$, wo $f(x_1, \ldots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat.

Es sei $(a_1, \ldots a_n)$ irgend ein System endlicher Werthe der Grössen $x_1, \ldots x_n$, so giebt es — nach Art. 2 — eine gewisse Umgebung $(\mathfrak{C})$ der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$, innerhalb welcher jede der Functionen $f, f_1^{(0)}, \ldots f_n^{(0)}, f_1^{(1)}, \ldots f_n^{(1)}$ sich als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n$ in der Art darstellen lässt, dass der Dividend und der Divisor nur an solchen Stellen $(x_1, \ldots x_n)$, wo die betreffende Function keinen bestimmten Werth hat, gleichzeitig verschwinden. Bezeichnet man für $f, f_\alpha^{(1)}, f_\alpha^{(0)}$ die Dividenden bez. mit p, p'_α, q'_α und die Divisoren bez. mit q, p_α, q_α, so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha}\right)dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha}\right)dx_\alpha,$$

woraus sich, da die Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ unabhängig von einander sind,

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

ergiebt.

Der Voraussetzung 3) nach kann q_α innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{C})$ nur an solchen Stellen $(x_1, \ldots x_n)$ verschwinden, die zugleich singuläre Stellen der Function $\frac{p}{q}$ sind, für welche also $q = 0$ ist. Ebenso kann p_α nur an solchen Stellen verschwinden, an denen $p = 0$ ist. Daraus kann man schliessen, dass die Function

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha}$$

sich innerhalb $(\mathfrak{C})$ regulär verhält. Denn wäre dies nicht der Fall, so hätte sie (nach Art. 3) innerhalb $(\mathfrak{C})$ unendlich viele singuläre Stellen, und unter diesen gäbe es nothwendig solche, an denen $q = 0$ wäre, p aber, und somit auch p_α, einen von Null verschiedenen Werth besässe, was der Gleichung

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha}$$

widerspricht. Man kann also für die dem Bereiche $(\mathfrak{C})$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \ldots x_n)$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$$

setzen und hat dann

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha = d\log q - \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{P}_\alpha(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)\, dx_\alpha,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha = d\log p - \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{P}_\alpha(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)\, dx_\alpha.$$

Der Differentialausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichungen genügt nun den Integrabilitätsbedingungen; man kann ihn daher in der Form

$$d\mathfrak{P}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)$$

darstellen und erhält dann

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha = d\log\left\{q \, . \, e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)}\right\} = d\log \mathfrak{P}^{(0)}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha = d\log\left\{p \, . \, e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)}\right\} = d\log \mathfrak{P}^{(1)}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n).$$

Es sind also die Functionen $f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n)$, $f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)$ in der That so beschaffen, dass man (nach Art. 4) zwei ganze Functionen $g_0(x_1, \dots x_n)$, $g_1(x_1, \dots x_n)$ bestimmen kann, für welche — bei gehöriger Bestimmung der Constante C — die vorstehenden Gleichungen A), B) gelten. In der Umgebung jeder bestimmten Stelle $(a_1, \dots a_n)$ ist dann

$$g_0(x_1, \dots x_n) = C_1 q e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)},$$

$$g_1(x_1, \dots x_n) = C_2 p e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)},$$

wo C_1, C_2 Constanten bezeichnen; es verschwinden daher g_0, g_1 gleichzeitig an der Stelle $(a_1, \dots a_n)$ nur dann, wenn auch p, q an derselben beide verschwinden, $f(x_1, \dots x_n)$ also für das Werthsystem $(x_1 = a_1, \dots x_n = a_n)$ keinen bestimmten Werth besitzt; w. z. b. w.

Anmerkungen.

1. Es ist vorausgesetzt worden, man wisse von der Function $f(x_1, \dots x_n)$, dass sie eine eindeutige Function sei und im Endlichen sich überall wie eine rationale Function verhalte. Ist dies nicht bekannt, vielmehr die Aufgabe gestellt, die Function so zu bestimmen, dass sie der Differentialgleichung

$$d\log f(x_1, \dots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha$$

genüge, so hat man zur Lösung dieser Aufgabe kein anderes Mittel als zu untersuchen, ob jeder der beiden Differentialausdrücke auf der Rechten der Gleichung die in Art. 4 von dem dort betrachteten Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \dots x_n)\, dx_\alpha$$

vorausgesetzte Beschaffenheit habe, und im Falle, dass sich dies bestätigt und somit feststeht, dass $f(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$\frac{g_1(x_1, \dots x_n)}{g_0(x_1, \dots x_n)}$$

dargestellt werden kann, sich zu vergewissern, ob die Functionen $f_\alpha^{(0)}, f_\alpha^{(1)}$ auch der oben (unter 3) angegebenen Bedingung entsprechen.

2. Das im Vorstehenden entwickelte Theorem kann ohne Schwierigkeit folgendermassen verallgemeinert werden:

Es sei von einer irgendwie definirten Function $f(x_1, \dots x_n)$ bekannt, dass sie sich im Endlichen überall wie eine rationale Function verhalte, und es lasse sich $d^m \log f(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$d^m \log f(x_1, \dots x_n) = \sum f^{(1)}_{\alpha_1, \dots \alpha_m}(x_1, \dots x_n)\, dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m} - \sum f^{(0)}_{\alpha_1, \dots \alpha_m}(x_1, \dots x_n)\, dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m}$$
$$(\alpha_1, \dots \alpha_m = 1, 2, \dots n)$$

dergestalt ausdrücken, dass jeder der beiden Differentialausdrücke auf der Rechten der Gleichung den Integrabilitätsbedingungen genüge, und die Functionen $f^{(0)}_{\alpha_1, \dots \alpha_m}, f^{(1)}_{\alpha_1, \dots \alpha_m}$ die im Vorstehenden unter 1), 3) angegebene Beschaffenheit besitzen, so ist $f(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$\frac{g_1(x_1, \dots x_n)}{g_0(x_1, \dots x_n)}$$

darstellbar, wo g_0, g_1 ganze Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind, welche nur an solchen Stellen $(x_1, \dots x_n)$, wo $f(x_1, \dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat, gleichzeitig verschwinden.

Der Beweis dieses Satzes ist dem für den Fall, wo $m = 1$ ist, durchgeführten ganz analog, und es braucht dabei nur folgender, leicht abzuleitende Hülfssatz vorausgesetzt zu werden:

Genügt ein Differentialausdruck

$$\sum \mathfrak{P}_{\alpha_1, \dots \alpha_m}(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)\, dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_m}$$

den Integrabilitätsbedingungen, so kann er auf die Form

$$d^m \mathfrak{P}(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$$

gebracht werden.

3. Auch das in Art. 4 bewiesene Theorem kann folgendermassen verallgemeinert werden:

Ist ein den Integrabilitätsbedingungen genügender Differentialausdruck

$$\sum f_{\alpha_1, \ldots \alpha_m}(x_1, \ldots x_n)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_m}$$
$$(\alpha_1, \ldots \alpha_m = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben, in welchem die Functionen $f_{\alpha_1, \ldots \alpha_m}(x_1, \ldots x_n)$ eindeutige Functionen der hier betrachteten Art sind, und lässt sich zeigen, dass derselbe, wenn für $x_1, \ldots x_n$ lineare Functionen einer Veränderlichen τ gesetzt werden — welche nur der in Art. 4 für den Fall, wo $m = 1$ ist, angegebenen Bedingung unterworfen sind — für hinlänglich kleine Werthe von τ stets die Gestalt

$$\mu d^m \log \tau + \mathfrak{P}(\tau)\, d\tau^m$$

erhält, wo μ entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl ist, so ist jede der Differentialgleichung

$$d^m \log f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{(\alpha)} f_{\alpha_1, \ldots \alpha_m}(x_1, \ldots x_n)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_m}$$

genügende Function $f(x_1, \ldots x_n)$ eine ganze Function von $x_1, \ldots x_n$; und ist eine solche Function $f_0(x_1, \ldots x_n)$ bestimmt, so erhält man den allgemeinen Ausdruck von $f(x_1, \ldots x_n)$, wenn man

$$f(x_1, \ldots x_n) = f_0(x_1, \ldots x_n)\, e^{G(x_1, \ldots x_n)}$$

setzt und für $G(x_1, \ldots x_n)$ eine ganze rationale Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1, \ldots x_n$ mit willkürlichen Coefficienten nimmt.

Um diesen Satz beweisen zu können, hat man zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha,$$

in welchem die Functionen $f_\alpha(x_1, \ldots x_n)$ eindeutige Functionen der hier betrachteten Art sind, das Differential einer ebenfalls eindeutigen Function ist — eine Frage, welche sich mit Hülfe der Ergebnisse der vorhergehenden

Untersuchungen ohne Schwierigkeit erledigen lässt, auf die ich aber hier, wo es sich hauptsächlich um eine Zusammenstellung solcher Sätze handelt, die in meiner Vorlesung über die Abel'schen Functionen als Hülfssätze gebraucht werden, nicht eingehe.

6. Über die Entwickelung n-fach periodischer ganzer Functionen von n Veränderlichen.

Eine ganze Function $f(u_1, \ldots u_n)$ der n Veränderlichen $u_1, \ldots u_n$ sei n-fach periodisch; d. h. es soll n Systeme von je n Constanten

$$\begin{array}{llll} 2\omega_{11}, & 2\omega_{12}, & \ldots & 2\omega_{1n} \\ 2\omega_{21}, & 2\omega_{22}, & \ldots & 2\omega_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2\omega_{n1}, & 2\omega_{n2}, & \ldots & 2\omega_{nn} \end{array}$$

geben, für welche bei beliebigen Werthen von $u_1, \ldots u_n$ die n Gleichungen

$$f(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \ldots u_n + 2\omega_{n\beta}) = f(u_1, \ldots u_n) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

gelten, wobei vorausgesetzt werde, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}, & \ldots & \omega_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{n1}, & \ldots & \omega_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sei.

Führt man statt $u_1, \ldots u_n$ andere Veränderliche $v_1, \ldots v_n$ ein mittelst der Gleichungen

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} 2\omega_{\alpha\beta} v_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

und bezeichnet mit $\varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$ die Function, in welche $f(u_1, \ldots u_n)$ durch diese Substitution übergeht, so hat man

$$\begin{aligned} \varphi(v_1 + 1, v_2, \ldots v_n) &= \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n), \\ \varphi(v_1, v_2 + 1, \ldots v_n) &= \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n), \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n + 1) &= \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n), \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen sich die allgemeinere

$$\varphi(v_1 + m_1, v_2 + m_2, \ldots v_n + m_n) = \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$$

ergiebt, wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Es soll nun bewiesen werden, dass sich $\varphi(v_1, v_2, \dots v_n)$ durch eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\sum C_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n} e^{2(\nu_1 v_1 + \nu_2 v_2 + \cdots + \nu_n v_n)\pi i}$$
$$(\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n = -\infty, \cdots +\infty)$$

darstellen lässt, wo die $C_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$ von $v_1, v_2, \dots v_n$ unabhängige Grössen sind.

Es ist leicht, diesen Satz aus dem auf Functionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnten Fourier'schen Theoreme abzuleiten. Man setzt zu dem Ende, unter $s_1, \dots s_n$, $t_1, \dots t_n$ reelle Grössen verstehend,

$$v_\alpha = t_\alpha + s_\alpha i,$$

so lässt sich $\varphi(t_1 + s_1 i, \dots t_n + s_n i)$, als Function von $t_1, \dots t_n$ betrachtet, in der Form

$$\sum C'_{\nu_1, \dots \nu_n} e^{2(\nu_1 t_1 + \cdots + \nu_n t_n)\pi i} \qquad (\nu_1, \dots \nu_n = -\infty, \cdots +\infty)$$

ausdrücken, wenn man

$$C'_{\nu_1, \dots \nu_n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(t_1 + s_1 i, \dots t_n + s_n i)\, e^{-2(\nu_1 t_1 + \cdots + \nu_n t_n)\pi i} dt_1 \dots dt_n$$

nimmt. Man beweist dann leicht, dass die partiellen Ableitungen der als Function von $s_1, \dots s_n$ betrachteten Grösse

$$C'_{\nu_1, \dots \nu_n} e^{2(\nu_1 s_1 + \cdots + \nu_n s_n)\pi}$$

bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Function φ sämmtlich gleich Null sind, diese Grösse also einen von $s_1, \dots s_n$ unabhängigen Werth hat, woraus sich der angegebene Ausdruck von $\varphi(v_1, \dots v_n)$ und die Bestimmung von $C_{\nu_1, \dots \nu_n}$, nämlich

$$C_{\nu_1, \dots \nu_n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(t_1, \dots t_n)\, e^{-2(\nu_1 t_1 + \cdots + \nu_n t_n)\pi i} dt_1 \dots dt_n$$

ergiebt.

Die mit einer strengen Begründung des Fourier'schen Theorems für reelle Veränderliche verknüpften Schwierigkeiten fallen bei der Function $\varphi(t_1 + s_1 i, \dots t_n + s_n i)$ fort, indem deren Ableitungen stetige Functionen von $t_1, \dots t_n$ sind.

Es lässt sich indess der in Rede stehende Ausdruck von $\varphi(v_1, \dots v_n)$ auch aus den Fundamentalsätzen der Theorie der gewöhnlichen Potenzreihen ableiten. Dies soll hier ausgeführt werden.

Es sei

$$g(v, x_1, \dots x_r)$$

eine ganze Function der $r+1$ von einander unabhängigen Veränderlichen $v, x_1, \dots x_r$, welche in Beziehung auf die Veränderliche v die Periode 1 besitzt, so dass, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist, die Gleichung

$$g(v+m, x_1, \dots x_r) = g(v, x_1, \dots x_r)$$

besteht. Setzt man dann

$$g_0(v, x_1, \dots x_r) = \tfrac{1}{2} g(v, x_1, \dots x_r) + \tfrac{1}{2} g(-v, x_1, \dots x_r),$$

$$g_1(v, x_1, \dots x_r) = \frac{\tfrac{1}{2} g(v, x_1, \dots x_r) - \tfrac{1}{2} g(-v, x_1, \dots x_r)}{\sin 2v\pi},$$

so ist nicht nur g_0, sondern auch g_1 eine ganze Function von $v, x_1, \dots x_r$. Denn der Nenner von g_1 verschwindet nur, wenn $v = \frac{m}{2}$ und m eine ganze Zahl ist; setzt man aber $v = \frac{m}{2} + h$, so ist

$$\sin 2\left(\frac{m}{2} + h\right)\pi = \pm \sin 2h\pi,$$

$$g\left(-\frac{m}{2} - h, x_1, \dots x_r\right) = g\left(\frac{m}{2} - h, x_1, \dots x_r\right),$$

also

$$g\left(\frac{m}{2} + h, x_1, \dots x_r\right) - g\left(-\frac{m}{2} - h, x_1, \dots x_r\right) = h\mathfrak{P}(h, x_1, \dots x_r),$$

und es hat somit $g_1(v, x_1, \dots x_r)$ auch für $v = \frac{m}{2}$ einen bestimmten endlichen Werth.

Jetzt sei s eine neue unbeschränkt veränderliche Grösse, und es werde eine Function $G_0(s, x_1, \dots x_r)$ folgendermassen definirt: Jedem endlichen Werthe von s ordne man einen die Gleichung

$$s = \cos 2v\pi$$

befriedigenden Werth von v zu und nehme dann

$$G_0(s, x_1, \dots x_r) = g_0(v, x_1, \dots x_r),$$

so hat $G_0(s, x_1, \dots x_r)$ für jedes System endlicher Werthe von $s, x_1, \dots x_r$ einen bestimmten und ebenfalls endlichen Werth. Denn es sei v' irgend einer derjenigen Werthe von v, welche für einen gegebenen Werth s' von s der Gleichung $s' = \cos 2v\pi$ genügen, so werden alle übrigen durch die Formel

$$\pm v' + m$$

geliefert, wo m eine ganze Zahl bedeutet; für alle diese Werthe von v hat aber $g_0(v, x_1, \dots x_r)$ denselben Werth. Nimmt man ferner s hinlänglich nahe bei s' an und setzt $h = 2\pi(v - v')$, so erhält man aus der Gleichung

$$s - s' = -\sin 2v'\pi . \left(h - \frac{h^3}{3!} + \cdots\right) - \cos 2v'\pi . \left(\frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!} + \cdots\right),$$

falls $\sin 2v'\pi$ nicht gleich Null ist, einen dieselbe befriedigenden Werth von $v - v'$, und in dem Falle, wo $\sin 2v'\pi = 0$ ist, einen Werth von $(v-v')^2$ in der Form einer Potenzreihe von $s - s'$ ausgedrückt. Da nun im letzteren Falle $v' = \frac{m}{2}$ und daher

$$\begin{aligned} g_0(v, x_1, \dots x_r) &= \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} + (v-v'), x_1, \dots x_r\right) + \frac{1}{2} g\left(-\frac{m}{2} - (v-v'), x_1, \dots x_r\right) \\ &= \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} + (v-v'), x_1, \dots x_r\right) + \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} - (v-v'), x_1, \dots x_r\right) \end{aligned}$$

ist, also in der Entwickelung von $g_0(v, x_1, \dots x_r)$ nach Potenzen von $v - v'$ nur gerade Potenzen dieser Grösse vorkommen, so lässt sich in beiden Fällen $G_0(s, x_1, \dots x_r)$ als Potenzreihe von $s - s', x_1, \dots x_r$ darstellen. Damit ist bewiesen, dass $G_0(s, x_1, \dots x_r)$ eine ganze Function von $s, x_1, \dots x_r$ ist, welche, wenn $s = \cos 2v\pi$ gesetzt wird, in $g_0(v, x_1, \dots x_r)$ übergeht.

Ebenso wird gezeigt, dass eine ganze Function $G_1(s, x_1, \dots x_r)$ existirt, welche, wenn $s = \cos 2v\pi$ gesetzt wird, in $g_1(v, x_1, \dots x_r)$ übergeht.

Hiernach hat man

$$g(v, x_1, \dots x_r) = G_0(\cos 2v\pi, x_1, \dots x_r) + G_1(\cos 2v\pi, x_1, \dots x_r) \sin 2v\pi.$$

Wendet man nun diesen Satz auf die Function $\varphi(v_1, v_2, \dots v_n)$ an, so kann man dieselbe zunächst auf die Form

$$G_0(\cos 2v_1\pi, v_2, \dots v_n) + G_1(\cos 2v_1\pi, v_2, \dots v_n) \sin 2v_1\pi$$

bringen. Die Functionen G_0, G_1 haben dann in Beziehung auf jedes Argument

$v_2, \ldots v_n$ die Periode 1, und man erhält also (für $\varepsilon = 0, 1$):

$$G_\varepsilon(\cos 2v_1\pi, v_2, \ldots v_n) = G_{\varepsilon,0}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3, \ldots v_n) \\ + G_{\varepsilon,1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3, \ldots v_n)\sin 2v_2\pi.$$

Dann haben die Functionen $G_{\varepsilon,0}$, $G_{\varepsilon,1}$, in Beziehung auf jedes der Argumente $v_3, \ldots v_n$ die Periode 1; man erhält also (für $\varepsilon = 0, 1$; $\varepsilon_1 = 0, 1$)

$$G_{\varepsilon,\varepsilon_1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3, \ldots v_n) = G_{\varepsilon,\varepsilon_1,0}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \cos 2v_3\pi, v_4, \ldots v_n) \\ + G_{\varepsilon,\varepsilon_1,1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \cos 2v_3\pi, v_4, \ldots v_n)\sin 2v_3\pi.$$

So fortfahrend kommt man zu dem Ergebniss, dass sich $\varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$ in der Form

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\varepsilon_1=0}^{\varepsilon_1=1}\cdots\sum_{\varepsilon_{n-1}=0}^{\varepsilon_{n-1}=1} G_{\varepsilon,\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_{n-1}}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \ldots \cos 2v_n\pi)\sin^{\varepsilon} 2v_1\pi.\sin^{\varepsilon_1} 2v_2\pi \ldots \sin^{\varepsilon_{n-1}} 2v_n\pi$$

darstellen lässt, wo die Functionen $G_{\varepsilon,\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_{n-1}}$ sämmtlich ganze Functionen der Grössen $\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \ldots \cos 2v_n\pi$ sind.

Setzt man sodann

$$\cos 2v_\alpha\pi = \frac{1}{2}e^{2v_\alpha\pi i} + \frac{1}{2}e^{-2v_\alpha\pi i}, \qquad \sin 2v_\alpha\pi = \frac{1}{2i}e^{2v_\alpha\pi i} - \frac{1}{2i}e^{-2v_\alpha\pi i}, \\ (\alpha = 1, \ldots n)$$

so kann der vorstehende Ausdruck in eine beständig convergirende Potenzreihe der $2n$ Grössen

$$e^{2v_1\pi i}, e^{-2v_1\pi i}, \ldots e^{2v_n\pi i}, e^{-2v_n\pi i}$$

verwandelt werden, so dass man

$$\varphi(v_1, v_2, \ldots v_n) = \sum A_{\lambda_1,\mu_1,\ldots\lambda_n,\mu_n} e^{2[(\lambda_1-\mu_1)v_1+(\lambda_2-\mu_2)v_2+\cdots+(\lambda_n-\mu_n)v_n]\pi i} \\ (\lambda_1, \mu_1, \ldots \lambda_n, \mu_n = 0, \ldots \infty)$$

erhält. Da diese Reihe unbedingt convergirt, so kann man, wenn $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ irgend n bestimmte ganze Zahlen sind, diejenigen Glieder der Reihe, in denen die Differenzen

$$\lambda_1 - \mu_1,\ \lambda_2 - \mu_2,\ \ldots\ \lambda_n - \mu_n$$

bezüglich die Werthe

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_n$$

haben, in ein Glied zusammenziehen, wodurch sich die oben angegebene, ebenfalls unbedingt convergirende Reihe für $\varphi(v_1, v_2, \dots v_n)$ ergiebt.

Drückt man sodann $v_1, v_2, \dots v_n$ durch die ursprünglichen Veränderlichen $u_1, u_2, \dots u_n$ aus, so gelangt man zu einer Entwickelung von $f(u_1, u_2, \dots u_n)$, in welcher jedes einzelne Glied dieselbe Periodicität wie die Function $f(u_1, \dots u_n)$ selbst besitzt.

Der gleichmässigen Convergenz der für $\varphi(v_1, v_2, \dots v_n)$ gefundenen Reihe wegen ist, wenn $\mu_1, \dots \mu_n$ beliebige ganze Zahlen sind,

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(v_1, \dots v_n)\, e^{-2(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)\pi i}\, dv_1 \dots dv_n$$

$$= \sum C_{\nu_1, \dots \nu_n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2[(\nu_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\nu_n - \mu_n) v_n]\pi i}\, dv_1 \dots dv_n,$$

$$(\nu_1, \dots \nu_n = -\infty, \cdots +\infty)$$

woraus in Übereinstimmung mit dem oben Angegebenen

$$C_{\mu_1, \dots \mu_n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(v_1, \dots v_n)\, e^{-2(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)\pi i}\, dv_1 \dots dv_n$$

folgt.

ÜBER EINEN FUNCTIONENTHEORETISCHEN SATZ DES HERRN G. MITTAG-LEFFLER.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 5. August 1880.)

1.

In den Berichten der Akademie der Wissenschaften zu Stockholm*) a. d. J. 1877 hat Herr Mittag-Leffler im Anschluss an meine in den Abhandlungen unserer Akademie a. d. J. 1876**) veröffentlichten Untersuchungen über die eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen einige sehr beachtenswerthe Theoreme entwickelt. Unter denselben ist von besonderer Wichtigkeit das nachstehende, auf welches näher einzugehen ich aus dem Grunde Veranlassung habe, weil es mir dazu gedient hat, die Ergebnisse meiner Arbeit in mehreren wesentlichen Punkten zu vervollständigen:

»Es seien gegeben

1) eine unendliche Reihe bestimmter endlicher Grössen:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

unter denen keine zwei gleiche sich finden, und die der Bedingung

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$$

genügen; und

2) eine unendliche Reihe rationaler Functionen einer Veränderlichen x:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,$$

von denen $f_\nu(x)$ nur an der Stelle $(x = a_\nu)$ unendlich gross wird und für $x = \infty$ verschwindet.

---

*) Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1877.

**) [S. 77 dieses Bandes.]

Dann lässt sich stets eine eindeutige analytische Function $F(x)$ mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞ bilden, welche nur an den Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unendlich gross wird, und zwar so, dass — für jeden bestimmten Werth von ν — die Differenz

$$F(x)-f_\nu(x)$$

an der Stelle $(x=a_\nu)$ einen endlichen Werth hat, und daher innerhalb einer gewissen Umgebung dieser Stelle

$$F(x) \text{ in der Form } f_\nu(x)+\mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

dargestellt werden kann.«

Herr Mittag-Leffler beweist diesen Satz, indem er zeigt, dass sich aus den gegebenen Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

eine Reihe anderer rationaler Functionen:

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x);\ \ldots$$

dergestalt ableiten lässt, dass jede der Differenzen

$$F_1(x)-f_1(x),\ F_2(x)-f_2(x),\ F_3(x)-f_3(x),\ \ldots$$

eine ganze Function von x oder eine Constante ist, und zugleich die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

innerhalb jedes Bereichs, der keine der Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ enthält, gleichmässig convergirt, woraus sich folgern lässt, dass dieselbe eine Function $F(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit darstellt.

Man kann indess für die Functionen $F_\nu(x)$ eine einfachere Bildungsweise als die von Herrn Mittag-Leffler auseinandergesetzte angeben und dadurch den Beweis des Satzes erheblich vereinfachen.

Man nehme eine unendliche Reihe positiver Grössen:

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,$$

deren Summe einen endlichen Werth hat, und ausserdem eine ebenfalls positive Grösse ε, die <1 ist, willkürlich an.

Ist nun, für einen bestimmten Werth von ν, $a_\nu = 0$, so nehme man

$$F_\nu(x) = f_\nu(x).$$

Wenn aber a_ν einen von Null verschiedenen Werth hat, so entwickele man $f_\nu(x)$ in eine Potenzreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu,$$

welche für jeden der Bedingung

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$$

genügenden Werth von x convergirt. Dann kann man eine ganze Zahl m so bestimmen, dass für jeden der Bedingung

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon$$

entsprechenden Werth von x der absolute Betrag von

$$\sum_{\mu=m_\nu}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu$$

kleiner als ε_ν ist.*) Nach Ermittelung dieser Zahl m_ν nehme man

$$F_\nu(x) = f_\nu(x) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} A_\mu^{(\nu)} x^\mu,$$

---

*) Nach Annahme einer positiven Grösse ε_0, die kleiner als 1, aber grösser als ε ist, bestimme man eine Grösse g so, dass für jeden Werth von x, der den absoluten Betrag $\varepsilon_0 |a_\nu|$ hat,

$$|A_\mu^{(\nu)} x^\mu| \leqq g$$

ist. Dann hat man

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq g \cdot |\varepsilon_0 a_\nu|^{-\mu},$$

und es ist somit, wenn $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon$,

$$\left|\sum_{\mu=m}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} x^\mu\right| \leqq g \sum_{\mu=m}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\mu = \frac{g}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m.$$

Man kann also für m_ν jede ganze, nicht negative Zahl m wählen, die der Bedingung

$$\frac{g}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m < \varepsilon_\nu$$

genügt.

wobei zu bemerken, dass $F_\nu(x) = f_\nu(x)$ zu setzen ist, wenn $m_\nu = 0$, und dass man

$$F_\nu(x) = x^{m_\nu}\varphi_\nu(x)$$

hat, wo $\varphi_\nu(x)$ eine rationale Function ist, die ebenso wie $f_\nu(x)$ nur für $x = a_\nu$ unendlich gross wird und für $x = \infty$ verschwindet.

Nun sei x_0 irgend ein bestimmter endlicher Werth von x, der nicht in der Reihe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

enthalten ist, und ϱ eine positive Grösse, die man so klein anzunehmen hat, dass auch unter denjenigen Werthen von x, für die

$$|x - x_0| \leqq \varrho,$$

keine der Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sich findet. Dann kann, wenn δ irgend eine gegebene, beliebig kleine positive Grösse ist, eine ganze Zahl r so angenommen werden, dass

$$\sum_{\nu=r}^{\infty} \varepsilon_\nu < \delta,$$

und dass für jeden der eben angegebenen Werthe von x, sobald $\nu \geqq r$,

$$\left|\frac{x}{a_\nu}\right| \leqq \varepsilon$$

und somit

$$|F_\nu(x)| < \varepsilon_\nu,$$

$$\left|\sum_{\nu=r}^{\infty} F_\nu(x)\right| < \delta$$

ist. Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

convergirt also, und zwar gleichmässig, für alle der Bedingung

$$|x - x_0| \leqq \varrho$$

entsprechenden Werthe von x, und kann daher, nach einem bekannten Satz, für diese auch in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe von $(x - x_0)$ dargestellt werden.

Ist ferner a_λ irgend eine der Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, und nimmt man ϱ so klein an, dass sich unter denjenigen Werthen von x, für die

$$|x - a_\lambda| \leqq \varrho,$$

ausser a_λ keine der genannten Grössen findet, so ist nach dem Vorstehenden die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x)$$

für die in Rede stehenden Werthe von x gleichmässig convergent und in der Form

$$\mathfrak{P}(x-a_\lambda)$$

darstellbar, so dass man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = F_\lambda(x) + \mathfrak{P}(x-a_\lambda) = f_\lambda(x) + \mathfrak{P}_1(x-a_\lambda)$$

hat. Damit ist bewiesen, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

eine Function $F(x)$ von der in dem angeführten Satze angegebenen Beschaffenheit darstellt.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken. Ist $G(x)$ eine beliebige (rationale oder transcendente) ganze Function von x, und setzt man

$$\overline{F}(x) = F(x) + G(x),$$

so ist auch $\overline{F}(x)$ eine Function von der in Rede stehenden Beschaffenheit. Und umgekehrt, wenn $F(x)$, $\overline{F}(x)$ irgend zwei solche Functionen sind, so ist die Differenz

$$\overline{F}(x) - F(x)$$

nothwendig eine ganze Function von x.

2.

Nunmehr sei $f(x)$ irgend eine gegebene eindeutige analytische Function von x, welche nur die eine wesentliche singuläre Stelle ∞ besitzt, und an beliebig vielen anderen Stellen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

gleich ∞ wird. Dann ist in dem Falle, wo die Anzahl dieser Stellen unendlich gross ist,

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_\nu = \infty,$$

da jeder endliche Bereich nur eine endliche Anzahl dieser Stellen enthalten kann.

Ferner lässt sich, wenn a_ν eine $l_\nu$mal zu zählende Unendlichkeits-Stelle der Function $f(x)$ ist, für die einer bestimmten Umgebung dieser Stelle angehörigen Werthe von x

$$(x-a_\nu)^{l_\nu} f(x) \text{ in der Form } \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^{(\nu)}(x-a_\nu)^\mu$$

darstellen; man hat also, wenn

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{l_\nu-1} C_\mu^{(\nu)}(x-a_\nu)^{-l_\nu+\mu}$$

gesetzt wird,

$$f(x) = f_\nu(x) + \mathfrak{P}(x-a_\nu),$$

und es ist $f_\nu(x)$ eine rationale Function von x, die nur für $x = a_\nu$ unendlich gross wird und für $x = \infty$ verschwindet.

Leitet man aus den Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

auf die in (1.) beschriebene Weise die Functionen

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots$$

ab — wobei man, wenn die Anzahl der Unendlichkeits-Stellen von $f(x)$ endlich ist, $F_\nu(x) = f_\nu(x)$ setzen kann —, so wird die Differenz

$$f(x) - \sum_\nu F_\nu(x)$$

für keinen endlichen Werth von x unendlich gross, und es ist also

$$f(x) = \sum_\nu F_\nu(x) + G(x),$$

wo $G(x)$ wieder eine ganze Function von x bedeutet.

Die Function $G(x)$ kann aber auf mannigfaltige Weise als eine Summe von ganzen rationalen Functionen der Veränderlichen x dargestellt werden.

Es lässt sich also jede eindeutige analytische Function $f(x)$, für die im Endlichen keine wesentliche singuläre Stelle existirt, als eine Summe von rationalen Functionen der Veränderlichen x

dergestalt ausdrücken, dass jede dieser Functionen im Endlichen höchstens eine Unendlichkeits-Stelle hat.

Dies war bisher nur für die rationalen und für einige bestimmte transcendente Functionen einer Veränderlichen bekannt.

3.

Aus den beiden in (1, 2) entwickelten Sätzen leitet man leicht die folgenden ab.

A. Es seien gegeben

1) eine bestimmte Grösse c und eine unendliche Reihe von c verschiedener Grössen:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

unter denen keine zwei gleiche sich befinden, und die der Bedingung

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_\nu = c$$

genügen; und

2) eine unendliche Reihe rationaler Functionen:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots,$$

von denen $f_\nu(x)$ nur an der Stelle $(x = a_\nu)$ unendlich gross wird und für $x = c$ verschwindet.

Dann lässt sich stets eine eindeutige analytische Function $F(x)$ mit der einen wesentlichen singulären Stelle c bilden, welche nur an den Stellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gleich ∞ wird, und zwar so, dass

$$F(x) - f_\nu(x)$$

an der Stelle $(x = a_\nu)$ einen endlichen Werth hat.

Diese Function $F(x)$ kann dargestellt werden in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

wo $F_\nu(x)$ eine in der Form

$$f_\nu(x) + G_\nu\left(\frac{1}{x-c}\right)$$

ausdrückbare rationale Function bezeichnet.

B. Jede eindeutige analytische Function $f(x)$ mit nur einer wesentlichen singulären Stelle c lässt sich als eine Summe von rationalen Functionen der Veränderlichen x dergestalt ausdrücken, dass jede dieser Functionen nicht mehr als eine von c verschiedene Unendlichkeits-Stelle hat.

Diese Sätze ergeben sich aus den in (1, 2) bewiesenen, wenn man

$$\frac{1}{x-c} = x'$$

setzt und dann $f(x)$ als Function von x' betrachtet.

Der Satz B reiht sich den in §§ 2, 3 meiner oben angeführten Abhandlung entwickelten Sätzen an.

4.

In der genannten Abhandlung habe ich (§ 7) für eine eindeutige analytische Function einer Veränderlichen x mit n wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \ldots c_n)$ zwei allgemeine Ausdrücke aufgestellt, nämlich

$$1) \quad \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)},$$

$$2) \quad \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n} G_{n+\lambda}\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)} \cdot R^*(x),$$

wo $R^*(x)$ eine rationale Function von x, die nur an den Stellen $c_1, \ldots c_n$ Null oder unendlich gross werden kann, bedeutet.

Bezeichnet man mit $F(x; c)$ eine eindeutige analytische Function von x mit einer wesentlichen singulären Stelle c, so lässt sich der Ausdruck 2) auf die Form

$$2a) \quad \prod_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda)$$

bringen.

Nun stellt aber auch der Ausdruck

$$3) \quad \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(x; c_\lambda)$$

eine eindeutige Function mit n wesentlichen singulären Stellen $(c_1, \dots c_n)$ dar; es konnte aber mit den in der genannten Abhandlung angewandten Hülfsmitteln nicht bewiesen werden, dass jede solche Function, wie ich jetzt mit Hülfe des Satzes (3, A) zeigen will, in der vorstehenden Form 3) ausgedrückt werden kann.

Es sei $f(x)$ irgend eine Function von der in Rede stehenden Beschaffenheit, so zerlege man das Gebiet der Veränderlichen x dergestalt in n Theile, dass im Innern eines jeden eine der Stellen $c_1, \dots c_n$ liegt, und zugleich an der Grenze zwischen zwei Theilen $f(x)$ überall einen endlichen Werth hat. Derjenige Theil, in welchem c_λ liegt, werde mit C_λ bezeichnet. Angenommen nun, es enthalte, für einen bestimmten Werth von λ, C_λ unendlich viele ausserwesentliche singuläre Stellen der betrachteten Function:

$$a_1^{(\lambda)},\ a_2^{(\lambda)},\ a_3^{(\lambda)},\ \dots,$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} a_\nu^{(\lambda)} = c_\lambda.$$

Bestimmt man dann eine Reihe rationaler Functionen:

$$f_1^{(\lambda)}(x),\ f_2^{(\lambda)}(x),\ f_3^{(\lambda)}(x),\ \dots$$

dergestalt, dass $f_\nu^{(\lambda)}(x)$ nur an der Stelle $(x = a_\nu^{(\lambda)})$ unendlich gross wird, die Differenz

$$f(x) - f_\nu^{(\lambda)}(x)$$

aber an derselben Stelle einen endlichen Werth hat, und überdies $f_\nu^{(\lambda)}(x)$ für $x = c_\lambda$ verschwindet; so lässt sich nach (3, A) eine eindeutige Function $F^{(\lambda)}(x)$ mit der einen wesentlichen singulären Stelle c_λ herstellen, welche nur an den Stellen $a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, a_3^{(\lambda)}, \dots$ unendlich gross wird, und zwar so, dass die Differenz

$$F^{(\lambda)}(x) - f_\nu^{(\lambda)}(x)$$

an der Stelle $(x = a_\nu^{(\lambda)})$ einen endlichen Werth hat. Daraus folgt dann, dass die Function

$$f(x) - F^{(\lambda)}(x)$$

im Innern und an der Grenze von C_λ ausser c_λ keine singuläre Stelle besitzt.

Enthält ferner C_λ nur eine endliche Anzahl ausserwesentlicher singulärer Stellen der Function $f(x)$:

$$a_1^{(\lambda)},\ a_2^{(\lambda)},\ \ldots,$$

so setze man

$$F^{(\lambda)}(x) = f_1^{(\lambda)}(x) + f_2^{(\lambda)}(x) + \cdots,$$

wo die Functionen $f_1^{(\lambda)}(x)$, $f_2^{(\lambda)}(x)$, ... dieselbe Bedeutung haben wie vorhin; dann wird $F^{(\lambda)}(x)$ nur an den Stellen $a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots$ unendlich gross, und es besitzt auch in diesem Falle die Function

$$f(x) - F^{(\lambda)}(x)$$

im Innern und an der Grenze von C_λ ausser c_λ keine singuläre Stelle.

In dem Falle endlich, wo C_λ keine ausserwesentliche Stelle der Function $f(x)$ enthält, setze man

$$F^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Sind auf diese Weise die Functionen $F^{(1)}(x), \ldots F^{(n)}(x)$ bestimmt, so ist der Ausdruck

$$f(x) - \sum_{\lambda=1}^{n} F^{(\lambda)}(x)$$

eine eindeutige Function von x, die keine anderen (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stellen als $c_1, \ldots c_n$ besitzt, und somit (nach § 5 der g. Abhdlg.) in der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)$$

dargestellt werden kann, wo $G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)$ eine ganze Function von $\frac{1}{x-c_\lambda}$ bezeichnet.

Setzt man nun

$$f_\lambda(x; c_\lambda) = F^{(\lambda)}(x) + G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right),$$

so ist

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} f_\lambda(x; c_\lambda).$$

Da die Functionen $F^{(\lambda)}(x)$, $G_\lambda\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)$ im Gebiete der Veränderlichen x keine von c_λ verschiedene wesentliche singuläre Stelle besitzen, so gilt dies auch von der Function $f_\lambda(x; c_\lambda)$; für diese aber ist in Folge der Voraussetzung, dass $f(x)$ n wesentliche singuläre Stellen besitze, c_λ nothwendig eine solche Stelle.

Zu bemerken ist, dass nicht zwei der Functionen

$$f_1(x; c_1), \ldots f_n(x; c_n)$$

eine gemeinschaftliche Unendlichkeits-Stelle haben.

Der im Vorstehenden mit Hülfe des in (1.) mitgetheilten Mittag-Leffler'-schen Theorems begründete Satz ist in meiner Abhandlung bloss für den Fall bewiesen worden, wo die Function $f(x)$ ausserwesentliche singuläre Stellen entweder gar nicht oder nur in endlicher Anzahl besitzt. (S. § 5 d. g. Abhdlg.)

Stellt man jede der Functionen $f_\lambda(x; c_\lambda)$ in der oben (3, B) angegebenen Gestalt dar, so ergiebt sich ein neuer allgemeiner Ausdruck einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder sämmtlich rationale Functionen der Veränderlichen x sind. Diese Reihe convergirt gleichmässig für alle Werthe von x, welche einem Bereiche angehören, der weder im Innern noch an der Grenze eine der singulären Stellen der Function $f(x)$ enthält.

ZUR FUNCTIONENLEHRE.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 12. August 1880.)

Im Nachstehenden theile ich einige auf unendliche Reihen, deren Glieder rationale Functionen einer Veränderlichen sind, sich beziehende Untersuchungen mit, welche hauptsächlich den Zweck haben, gewisse, bisher — so viel ich weiss — nicht beachtete Eigenthümlichkeiten, die solche Reihen darbieten können und deren Kenntniss für die Functionenlehre von Wichtigkeit ist, klar zu stellen.

1.

Es seien unendlich viele rationale Functionen einer Veränderlichen x in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben:

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots .$$

Die Gesammtheit derjenigen Werthe von x, für welche die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

einen endlichen Werth hat, nenne ich den Convergenzbereich dieser Reihe. Lässt sich ferner für eine bestimmte Stelle a dieses Bereichs eine positive Grösse ϱ so annehmen, dass die Reihe für die der Bedingung

$$|x-a| \leqq \varrho$$

entsprechenden Werthe von x gleichmässig*) convergirt, so will ich sagen, die Reihe convergire gleichmässig in der Nähe der Stelle a. Die Grösse ϱ hat dann eine obere Grenze; ist diese R, so möge — in Beziehung auf die betrachtete Reihe — die Gesammtheit derjenigen Werthe von x, für welche

$$|x-a| < R$$

ist, die Umgebung von a, und R deren Halbmesser genannt werden. Nimmt man in dieser Umgebung eine Stelle beliebig an, so ist klar, dass auch in der Nähe der letzteren die Reihe gleichmässig convergirt. Daraus ergiebt sich, dass, falls überhaupt Stellen vorhanden sind, in deren Nähe die Reihe gleichmässig convergirt, die Gesammtheit dieser Stellen in der Ebene der Veränderlichen x durch eine zweifach ausgedehnte Fläche repräsentirt wird, welche aber aus mehreren, von einander getrennten Stücken bestehen kann.

---

*) Eine unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu,$$

deren Glieder Functionen beliebig vieler Veränderlichen sind, convergirt in einem gegebenen Theile (B) ihres Convergenzbereichs gleichmässig, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ stets eine ganze positive Zahl m so bestimmen lässt, dass der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu,$$

für jeden Werth von n, der $\geqq m$, und für jedes dem Bereiche B angehörige Werthsystem der Veränderlichen kleiner als δ ist. Soll die Reihe in demselben Bereiche zugleich unbedingt convergent sein, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder denselben Werth haben, so muss es, wie man auch δ annehmen möge, stets möglich sein, aus der Reihe eine endliche Anzahl von Gliedern so auszusondern, dass die Summe von beliebig vielen der übrigbleibenden für jedes der betrachteten Werthsysteme der Veränderlichen kleiner als δ ist. Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn es eine Reihe bestimmter positiver Grössen

$$g_0,\ g_1,\ g_2,\ \dots$$

giebt, für die sich feststellen lässt, dass an jeder Stelle des Bereichs B

$$|f_\nu| \leqq g_\nu, \qquad (\nu = 0, \dots \infty)$$

und die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$$

einen endlichen Werth hat. — Aus der gegebenen Definition der gleichmässigen Convergenz folgt u. A. unmittelbar, dass, wenn die betrachtete Reihe in mehreren Theilen ihres Convergenzbereichs gleichmässig convergirt, dasselbe auch für den aus diesen Theilen zusammengesetzten Bereich gilt.

Angenommen nämlich, es gebe überhaupt Stellen der in Rede stehenden Art, deren Gesammtheit mit A bezeichnet werde, so denke man sich eine von ihnen willkürlich angenommen, in der Umgebung derselben eine beliebige zweite, in der Umgebung dieser eine dritte, u. s. w. Die Gesammtheit der Stellen von A, zu denen man auf diese Weise gelangen kann, ist dann ein in der Ebene der Grösse x durch ein zusammenhangendes Stück derselben repräsentirtes Continuum (A_1), dessen Begrenzung aus einzelnen Punkten, aus einer oder aus mehreren Linien, und auch aus einzelnen Punkten und Linien zugleich bestehen kann. Möglicherweise existiren nun ausserhalb A_1 noch Stellen von A, dann giebt es mindestens noch ein zweites Continuum (A_2) von derselben Beschaffenheit wie A_1, das ebenfalls ein Bestandtheil von A ist und mit A_1 keine Stelle gemeinschaftlich hat — was jedoch nicht ausschliesst, dass die Begrenzungen von A_1 und A_2 theilweise oder ganz zusammenfallen. Existiren ferner noch Stellen von A, die weder in A_1 noch in A_2 liegen, so giebt es mindestens noch ein drittes Continuum (A_3) von derselben Beschaffenheit wie A_1, A_2, das gleichfalls ein Bestandtheil von A ist und mit den beiden ersten keine Stelle gemein hat. U. s. w.

Nachdem so festgestellt ist, wie der Bereich A möglicherweise gestaltet ist, kann leicht an Beispielen gezeigt werden, dass die angegebenen verschiedenen Fälle auch wirklich vorkommen. Es genügt hier die beiden Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x^{\nu}+x^{-\nu}}\right)$$

anzuführen. Für die erstere bilden den Bereich A alle diejenigen Werthe von x, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind, für die andere ausser denselben Werthen auch alle diejenigen, die ihrem absoluten Betrage nach grösser als 1 sind; es besteht also A in dem ersten Falle aus einem zusammenhangenden Stücke, in dem anderen aus zwei solchen Stücken, die keine Stelle gemein haben. Beispiele von Reihen der hier betrachteten Art, für welche der Bereich A aus mehr als zwei Stücken besteht, werden später vorkommen.

Es ist ferner noch Folgendes nachzuweisen.

Angenommen, es convergire die betrachtete Reihe gleichmässig in der Nähe jeder Stelle, die im Innern oder an der Grenze eines gegebenen zusammenhangenden Bereichs (B) liegt, so convergirt sie auch in dem ganzen Bereiche gleichmässig.

Sind a, a' irgend zwei Stellen des Bereichs A, von denen a' in der Umgebung von a liegt, und ist R der Halbmesser der letzteren, $D = |a'-a|$ der Abstand der beiden Stellen, so folgt aus den gegebenen Definitionen unmittelbar, dass der Halbmesser (R') der Umgebung von a' nicht kleiner als $R-D$ sein kann. Ist $D < \frac{1}{2}R$, so ist also $R' > \frac{1}{2}R$, und es liegt a in der Umgebung von a'; mithin muss $R \geqq R'-D$ sein, R' also zwischen

$$R-D \text{ und } R+D$$

liegen. Wenn daher die Stelle a in A ihre Lage stetig ändert, so ändert sich auch der zugehörige Werth von R stetig. Daraus folgt weiter, dass die untere Grenze R_0 derjenigen Werthe von R, die diese Grösse im Bereiche B annehmen kann, mindestens an einer im Innern oder an der Grenze dieses Bereiches liegenden Stelle wirklich erreicht wird, und dass daher R_0 nicht gleich Null ist. Deshalb kann B in eine endliche Anzahl von Theilen dergestalt zerlegt werden, dass in jedem einzelnen Theile der grösste Abstand zweier Stellen kleiner als R_0 ist. Jeder solcher Theil liegt dann ganz in der Umgebung einer in ihm willkürlich angenommenen Stelle; für die demselben angehörigen Werthe von x convergirt also die betrachtete Reihe gleichmässig, woraus nach dem oben Bemerkten die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes sich unmittelbar ergiebt.

Eine Reihe der in Rede stehenden Art kann so beschaffen sein, dass sie in der Nähe jeder im Innern ihres Convergenzbereichs liegenden Stelle gleichmässig convergirt. Im Folgenden werde ich ausschliesslich Reihen von dieser Beschaffenheit untersuchen. Wenn man nämlich von der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

nur weiss, dass es im Gebiete der Veränderlichen x einen zusammenhangenden Bereich giebt, in welchem die Reihe convergirt, so lässt sich daraus allein nicht einmal folgern, dass ihr Werth in demselben Bereiche eine stetige Function von x sei. Macht man aber die angegebene Voraussetzung, so lässt sich zeigen, dass die Reihe in jedem der im Vorstehenden definirten Stücke ($A_1, \ldots$) ihres Convergenzbereiches im Allgemeinen einen eindeutigen Zweig einer monogenen analytischen Function von x, und in besondern Fällen eine solche Function vollständig darstellt.

Hierzu ist ein Hülfssatz erforderlich, den ich zunächst anführen und beweisen will.

2.

»Es seien unendlich viele Potenzreihen einer Veränderlichen x, welche Potenzen dieser Grösse mit ganzen, positiven und negativen Exponenten in beliebiger Anzahl enthalten, in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben:

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots;$$

und es sei möglich, zwei reelle Grössen R, R', von denen $R' > R$, $R \geqq 0$ ist, so anzunehmen, dass für die der Bedingung

$$R < |x| < R'$$

entsprechenden Werthe von x nicht nur jede einzelne der gegebenen Reihen, sondern auch die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)$$

convergirt, und zwar die letztere für alle diejenigen Werthe der Veränderlichen, die denselben absoluten Betrag haben, gleichmässig. Dann hat, wenn

$$A_\mu^{(\nu)}$$

der Coefficient von x^μ in $P_\nu(x)$ ist, die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$$

für jeden Werth von μ einen bestimmten endlichen Werth, der mit A_μ bezeichnet werde, und es lässt sich zeigen, dass für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag grösser als R und kleiner als R' ist, die Reihe

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu$$

convergirt und die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) = \sum_\mu A_\mu x^\mu$$

besteht.«

Es sei r irgend eine bestimmte, zwischen R und R' enthaltene positive Grösse, und k eine beliebige andere, so kann in Folge der hinsichtlich der Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)$$

gemachten Voraussetzung eine ganze positive Zahl m so angenommen werden, dass für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag gleich r ist, und für jede ganze Zahl n, die $\geqq m$, der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x)$$

kleiner als $\frac{1}{2}k$, und deshalb für jede Zahl n', die $\geqq n$,

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x)\right| < k$$

ist. Man hat aber

$$\sum_{\nu=n}^{n'} P_\nu(x) = \sum_\mu \left\{ \sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)} . x^\mu \right\},$$

und es ist deshalb nach einem bekannten Satze*) für jeden ganzzahligen Werth von μ

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} A_\mu^{(\nu)}\right| < kr^{-\mu}.$$

Demgemäss hat die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$$

einen bestimmten endlichen Werth, der mit A_μ bezeichnet werde.

Nun nehme man zwei positive Grössen r_1, r_2 so an, dass

$$R < r_1 < r < r_2 < R',$$

so kann man der Zahl n einen solchen Werth geben, dass

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n'} A_u^{(\nu)}\right|$$

auch kleiner als jede der beiden Grössen

$$kr_1^{-\mu},\ kr_2^{-\mu}$$

---

*) [S. Anmerkung 1, S. 224 dieses Bandes.]

ist; woraus folgt:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\right| \leqq k r_1^{-\mu},$$

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\right| \leqq k r_2^{-\mu}.$$

Hiernach hat man, wenn

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\mu^{(\nu)} = A'_\mu, \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} = A''_\mu$$

gesetzt, und der Veränderlichen x ein Werth, dessen absoluter Betrag gleich r ist, beigelegt wird,

$$\sum_{\mu=-1}^{-\infty} \left|A''_\mu x^\mu\right| \leqq k \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^\mu,$$

$$\sum_{\mu=0}^{+\infty} \left|A''_\mu x^\mu\right| \leqq k \sum_{\mu=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_2}\right)^\mu,$$

und somit

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left|A''_\mu x^\mu\right| \leqq k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right).$$

Die Reihe

$$\sum_\mu A''_\mu x^\mu$$

ist also unbedingt convergent, und da

$$\sum_\mu A'_\mu x^\mu = \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(x),$$

so gilt dasselbe auch von der Reihe

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu.$$

Man hat ferner

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_\mu A_\mu x^\mu = \sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_\mu A''_\mu x^\mu,$$

und somit

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x) - \sum_\mu A_\mu x^\mu\right| \leqq k + k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right).$$

Da man nun für jeden bestimmten Werth von x, dessen absoluter Betrag (r) zwischen R und R' enthalten ist, zunächst r_1, r_2 der angegebenen Bedingung gemäss, und dann k so annehmen kann, dass

$$k + k\left(\frac{r_1}{r-r_1} + \frac{r_2}{r_2-r}\right)$$

kleiner ist als eine beliebige gegebene Grösse, so folgt, dass für jeden der Bedingung

$$R < |x| < R'$$

entsprechenden Werth von x nicht nur die Reihe

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu$$

convergirt, sondern auch die Gleichung

$$\sum_\mu A_\mu x^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)$$

besteht; w. z. b. w.

3.

Es sei jetzt

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

irgend eine Reihe von der am Schlusse des § 1 angegebenen Beschaffenheit, und es werde mit A' eines der Stücke bezeichnet, aus denen nach der vorangegangenen Auseinandersetzung der Convergenzbereich der Reihe besteht.

Nimmt man dann in A' eine Stelle a_0 willkürlich an, und beschränkt die Veränderliche x auf die Umgebung von a_0, so lässt sich nicht nur jede der Functionen $f_\nu(x)$, sondern nach dem vorhergehenden Satze auch die Summe derselben durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x-a_0$, die mit

$$\mathfrak{P}_0(x-a_0)$$

bezeichnet werde, und die ich ein »Element« der Function $F(x)$ nenne, ausdrücken.*)

Nimmt man ferner in der Umgebung von a_0 eine zweite Stelle (a_1) an, und ist $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ das zu dieser gehörige Element von $F(x)$, so hat man für

*) Hierzu bemerke ich, dass nach dem Satze des § 2 der Coefficient von $(x-a_0)^\mu$ gleich

$$\frac{1}{\mu!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{d^\mu f_\nu(x)}{dx^\mu}\right]_{(x=a_0)}$$

ist. Die Function $F(x)$ hat also in A' Ableitungen jeder Ordnung, und es ist

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d^\mu f_\nu(x)}{dx^\mu}.$$

Es ist ferner leicht zu zeigen, dass auch die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung in der Nähe jeder Stelle von A' gleichmässig convergirt, und somit dieselbe Beschaffenheit wie die gegebene hat.

diejenigen Werthe von x, die in der Umgebung von a_0 sowohl als von a_1 liegen,

$$\mathfrak{P}_1(x-a_1) = \mathfrak{P}_0(x-a_0), \quad \mathfrak{P}_0(x-a_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_0^{(\mu)}(a_1-a_0)\frac{(x-a_1)^\mu}{\mu!},$$

wo

$$\mathfrak{P}_0^{(\mu)}(x-a_0) = \frac{d^\mu \mathfrak{P}_0(x-a_0)}{dx^\mu}.$$

Daraus folgt, dass der Coefficient von $(x-a_1)^\mu$ in $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ mit dem entsprechenden Coefficienten der Entwicklung von $\mathfrak{P}_0(x-a_0)$ nach Potenzen von $(x-a_1)$ übereinstimmen muss.

Nun kann man, wenn a eine beliebige Stelle in A' ist, zwischen a_0 und a eine Reihe von Stellen

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$$

so einschalten, dass a_1 in der Umgebung von a_0, a_2 in der Umgebung von a_1, u. s. w., und schliesslich a in der Umgebung von a_n liegt.

Dann hat man, wenn

$$\mathfrak{P}_1(x-a_1),\ \mathfrak{P}_2(x-a_2),\ \ldots\ \mathfrak{P}_n(x-a_n),\ \mathfrak{P}(x-a)$$

die zu den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_n, a$ gehörigen Elemente der Function $F(x)$ sind,

$$\mathfrak{P}_1(x-a_1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_0^{(\mu)}(a_1-a_0)\frac{(x-a_1)^\mu}{\mu!},$$

$$\mathfrak{P}_2(x-a_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_1^{(\mu)}(a_2-a_1)\frac{(x-a_2)^\mu}{\mu!},$$

u. s. w.,

$$\mathfrak{P}\,(x-a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n^{(\mu)}(a-a_n)\frac{(x-a)^\mu}{\mu!}.$$

Es besteht also in dem Bereich A' zwischen den Elementen der betrachteten Function ein solcher Zusammenhang, dass aus einem beliebig angenommenen Elemente jedes andere durch ein bestimmtes Rechnungsverfahren abgeleitet werden kann. Für die dem genannten Bereich angehörigen Werthe von x ist also die Function völlig bestimmt, sobald irgend eines ihrer Elemente gegeben ist.

Möglicherweise erstreckt sich, wenn die Stelle a der Begrenzung von A' hinlänglich nahe angenommen wird, der Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ über A' hinaus. In diesem Falle (der sogar der gewöhnliche ist) existiren unendlich viele, aus $\mathfrak{P}_0(x-a_0)$ durch das beschriebene Verfahren ableitbare Potenzreihen $\mathfrak{P}'(x-a')$, deren Convergenzbezirke ganz oder theilweise ausserhalb A' liegen, und aus diesen können dann möglicherweise durch dasselbe Verfahren wieder andere sich ergeben, welche in ihrem Convergenzbezirk auch Stellen von A' enthalten, aber an diesen andere Werthe als $F(x)$ haben. Alle diese Reihen stellen Fortsetzungen der durch die gegebene Reihe $F(x)$ zunächst für die dem Bezirk A' angehörigen Werthe von x definirten Function dar; sie sind, nach der in meinen Vorlesungen über die Anfangsgründe der allgemeinen Functionenlehre eingeführten Terminologie, sämmtlich Elemente einer monogenen analytischen Function, die eindeutig oder mehrdeutig sein kann, aber als vollständig definirt zu betrachten ist, sobald irgend eines ihrer Elemente gegeben ist.

Wenn der Convergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$, wie man auch a annehmen möge, stets ganz in A' enthalten ist, so kann die durch den Ausdruck $F(x)$ für den Bereich A' definirte Function über die Grenzen dieses Bereichs nicht fortgesetzt werden. Es stellt also in diesem Falle — der wirklich vorkommt, wie weiter unten wird gezeigt werden — die Reihe, wenn die Veränderliche x auf den Bereich A' beschränkt wird, eine eindeutige monogene Function von x vollständig dar.

Hiernach lässt sich das im Vorstehenden Auseinandergesetzte kurz so, wie am Schlusse von § 1 geschehen ist, zusammenfassen.

Hieran knüpft sich nun eine für die Functionenlehre wichtige Frage.

Angenommen, der Convergenzbereich der betrachteten Reihe bestehe aus mehreren Stücken $(A_1, A_2, \ldots)$, so ist es möglich, dass sie in denselben Zweige einer und derselben monogenen Function darstellt. Es fragt sich nun, ob sich dies in allen Fällen so verhält. Muss diese Frage verneint werden, wie dies wirklich der Fall ist, so ist damit bewiesen, dass der Begriff einer monogenen Function einer complexen Veränderlichen mit dem Begriff einer durch (arithmetische) Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit sich nicht vollständig deckt.*) Daraus aber folgt dann, dass mehrere der wichtigsten Sätze der

*) Das Gegentheil ist von Riemann ausgesprochen worden (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, § 20, am Schluss), wobei ich bemerke, dass eine Function eines complexen Arguments, wie sie Riemann definirt, stets eine monogene Function ist.

neueren Functionenlehre nicht ohne Weiteres auf Ausdrücke, welche im Sinne der älteren Analysten (Euler, Lagrange u. A.) Functionen einer complexen Veränderlichen sind, dürfen angewandt werden.*)

Ich habe bereits vor Jahren gefunden — und in meinen Vorlesungen mitgetheilt —, dass die oben angeführte Reihe

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x^\nu + x^{-\nu}}\right),$$

deren Convergenzbereich aus zwei Stücken besteht, zwei verschiedene monogene Functionen, und zwar eine jede vollständig darstellt.

Ist nämlich x_0 irgend ein Werth von x, der den absoluten Betrag 1 hat, so lässt sich — mit Hülfe von Sätzen, welche die Theorie der linearen Transformation der elliptischen ϑ-Functionen liefert — zeigen, dass sich sowohl unter denjenigen Werthen von x, für die $|x| < 1$, als auch unter denen, für die $|x| > 1$, in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 solche finden, für die der absolute Betrag von $F(x)$ jede beliebig angenommene Grösse übertrifft.**) Daraus folgt sofort, dass die Reihe in jedem der beiden Stücke ihres Convergenzbereichs eine Function darstellt, die über die Begrenzung des Stückes hinaus nicht fortgesetzt werden kann.

Es blieb indessen, obwohl dies eine Beispiel zur Erledigung der in Rede stehenden Frage ausreichte, noch ein Bedenken übrig.

Die beiden durch die angeführte Reihe ausgedrückten Functionen stehen in einer sehr einfachen Beziehung zu einander, indem

$$F(x^{-1}) = F(x)$$

*) Wenn z. B. zwei Ausdrücke

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{f}_\nu(x)$$

der hier betrachteten Art gegeben sind, und sich zeigen lässt, dass es in der Nähe einer bestimmten, im Innern des Convergenzbereichs sowohl des einen als des andern liegenden Stelle unendlich viele Werthe von x giebt, für welche die Ausdrücke gleiche Werthe haben, so ist damit festgestellt, dass innerhalb eines bestimmten zusammenhängenden Bereichs der Veränderlichen x die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{f}_\nu(x)$$

besteht; es lässt sich aber nicht behaupten, dass dieselbe an allen Stellen des gemeinschaftlichen Convergenzbereichs der beiden Reihen gelte, wofern nicht der Nachweis geführt werden kann, dass beide Ausdrücke in dem genannten Bereich monogene Functionen sind.

**) [S. Anmerkung 2, S. 226 dieses Bandes.]

ist. Es war daher der Gedanke nicht abzuweisen, ob nicht überhaupt in dem Falle, wo ein arithmetischer Ausdruck $F(x)$ in verschiedenen Theilen seines Geltungsbereichs verschiedene monogene Functionen der complexen Veränderlichen x darstellt, unter diesen ein nothwendiger Zusammenhang bestehe, der bewirke, dass durch die Eigenschaften der einen auch die Eigenschaften der andern bestimmt seien. Wäre dies der Fall, so würde daraus folgen, dass der Begriff der monogenen Function erweitert werden müsste.

Um jeden Zweifel über diesen Punkt zu beseitigen, habe ich mir die Aufgabe gestellt, einen Ausdruck

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

von der hier angenommenen Beschaffenheit, der den folgenden Bedingungen genüge, zu bilden: Der Convergenzbereich der Reihe soll aus n Stücken $(A_1, A_2, \ldots A_n)$, wie sie oben definirt worden sind, bestehen, und es soll $F(x)$ in A_1 gleich $F_1(x)$, in A_2 gleich $F_2(x)$, ... in A_n gleich $F_n(x)$ sein, wo $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_n(x)$ willkürlich anzunehmende, für das ganze Gebiet der Veränderlichen x, mit Ausnahme von einzelnen Stellen, definirte eindeutige und monogene Functionen bedeuten.

Zur Lösung dieser Aufgabe stelle ich zunächst einen Ausdruck von der angegebenen Form her, welcher in der Nähe jeder Stelle, wo der reelle Theil von x nicht gleich Null ist, gleichmässig convergirt und den Werth

$$+1 \quad \text{oder} \quad -1$$

hat, jenachdem der reelle Theil von x positiv oder negativ ist. Formeln, die in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommen, führen zu einem solchen Ausdruck. Bei der nachstehenden Herleitung desselben habe ich jedoch absichtlich aus der genannten Theorie nichts vorausgesetzt.

4.

Nimmt man zwei endliche und von Null verschiedene complexe Grössen (ω, ω') so an, dass der reelle Theil des Quotienten

$$\frac{\omega'}{\omega i}$$

nicht gleich Null ist, und versteht unter ν, ν' unbeschränkt veränderliche ganze Zahlen, so hat bekanntlich die Summe

$$\sum_{\nu,\nu'}' |2\nu\omega + 2\nu'\omega'|^{-3}$$

einen endlichen Werth, wenn bei der Summation dasjenige Glied, in welchem ν, ν' beide gleich Null sind, fortgelassen wird.*) Es stellt deshalb — wie in § 2 meiner Abhandlung »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen«**) gezeigt worden ist — die Reihe

$$\frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}' \left\{ \frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} \left(\frac{u}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} \right)^2 \right\},$$

die bei jeder Anordnung ihrer Glieder denselben Werth hat, eine eindeutige analytische Function der Veränderlichen u — mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞ — dar, welche Function hier mit

$$\psi(u, \omega, \omega')$$

bezeichnet werden möge.

Mit Hülfe der bekannten Gleichungen

$$\pi \operatorname{ctg} u\pi = \frac{1}{u} + \sum_{\nu}' \left(\frac{1}{u-\nu} + \frac{1}{\nu} \right),$$

$$\pi(\operatorname{ctg} u\pi - \operatorname{ctg} a\pi) = \sum_{\nu} \left(\frac{1}{u-\nu} - \frac{1}{a-\nu} \right), \text{ wenn } a \text{ keine ganze Zahl,}$$

$$\left(\frac{\pi}{\sin u\pi} \right)^2 = \sum_{\nu} \frac{1}{(u-\nu)^2},$$

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{\nu}' \frac{1}{\nu^2}$$

lässt sich der vorstehende Ausdruck von $\psi(u, \omega, \omega')$ folgendermassen umgestalten.

Es ist

$$\psi(u, \omega, \omega') = \frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}' \left(\frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} + \frac{1}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} + \frac{u}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^2} \right).$$

---

*) Durch das dem $\sum$ beigefügte Zeichen ($'$) soll hier und im Folgenden darauf hingewiesen werden, dass unter den Werthen, die der Ausdruck unter dem Summenzeichen annehmen kann, sich einer findet, der $= \infty$ ist und bei der Summation fortgelassen werden muss.

**) [S. 92 dieses Bandes.]

Die Summe aller Glieder dieser Reihe, in denen ν' den Werth Null hat, ist

$$\frac{1}{2\omega}\left\{\frac{2\omega}{u}+\sum_{\nu}{}'\left(\frac{1}{\frac{u}{2\omega}-\nu}+\frac{1}{\nu}\right)\right\}+\frac{u}{4\omega^2}\sum_{\nu}{}'\frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega}+\frac{\pi^2}{12\omega^2}u.$$

Ferner die Summe aller Glieder, in denen ν' einen bestimmten, von Null verschiedenen Werth hat,

$$\frac{1}{2\omega}\sum_{\nu}\left(\frac{1}{\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}-\nu}-\frac{1}{-\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\nu}\right)+\frac{u}{4\omega^2}\sum_{\nu}\left(\frac{1}{\frac{\nu'\omega'}{\omega}+\nu}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{2\omega}\left(\operatorname{ctg}\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\operatorname{ctg}\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)+\frac{\pi^2 u}{4\omega^2\sin^2\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)}.$$

Man hat also

$$\psi(u,\omega,\omega') = \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'}{}'\left(\operatorname{ctg}\frac{u-2\nu'\omega'}{2\omega}\pi+\operatorname{ctg}\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3}+\sum_{\nu'}{}'\sin^{-2}\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}\pi\right)\right)\cdot\frac{u\pi^2}{4\omega^2},$$

oder auch, wenn man, unter n eine ganze positive Zahl verstehend,

$$\eta = \frac{\pi^2}{\omega}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{-2}\left(\frac{n\omega'}{\omega}\pi\right)\right)$$

setzt,

$$\psi(u,\omega,\omega') = \frac{\eta u}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{u-2n\omega'}{2\omega}\pi+\operatorname{ctg}\frac{u+2n\omega'}{2\omega}\pi\right).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\psi(u+2\omega,\omega,\omega') = \psi(u,\omega,\omega')+2\eta,$$

und hieraus, wenn man $u=-\omega$ setzt und bemerkt, dass $\psi(u,\omega,\omega')$ eine ungrade Function von u ist,

$$\eta = \psi(\omega,\omega,\omega').$$

Man erhält also aus dem vorhergehenden Ausdruck von $\psi(u,\omega,\omega')$, wenn man in demselben

$$u = \omega'$$

nimmt,

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega,\omega')$$
$$= -\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\omega'\pi}{2\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi-\operatorname{ctg}\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\right).$$

Man hat aber, wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist,

$$-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\omega'\pi}{2\omega}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\omega'}{2\omega}\pi-\operatorname{ctg}\frac{(2n+1)\omega'}{2\omega}\pi\right) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega}\pi;$$

es ist also der Ausdruck auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung gleich der Grenze, der sich

$$-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega}\pi = \frac{e^{\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega i}\pi}+e^{-\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega i}\pi}}{e^{\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega i}\pi}-e^{-\frac{(2m+1)\omega'}{2\omega i}\pi}}\cdot\frac{\pi i}{2}$$

nähert, wenn m unendlich gross wird. Diese Grenze aber hat den Werth

$$\frac{\pi i}{2} \text{ oder } -\frac{\pi i}{2},$$

jenachdem der reelle Theil von $\frac{\omega'}{\omega i}$ positiv oder negativ ist.

Es geht ferner aus dem ursprünglichen Ausdruck von $\psi(u,\omega,\omega')$, da derselbe sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig

$$\nu' \text{ für } \nu, \text{ und } -\nu \text{ für } \nu'$$

setzt, die Gleichung

$$\psi(u,\omega,\omega') = \psi(u,\omega',-\omega)$$

hervor. Man hat also

$$\omega'\psi(\omega,\omega,\omega')-\omega\psi(\omega',\omega',-\omega) = \pm\frac{\pi i}{2},$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, jenachdem der reelle Theil von $\frac{\omega'}{\omega i}$ positiv oder negativ ist.

Es gilt ferner, wenn c eine beliebige Grösse ist, die Gleichung

$$\psi(u,\omega,\omega') = c\psi(cu,c\omega,c\omega'),$$

woraus sich, wenn $c=\frac{1}{\omega}$ gesetzt wird,

$$\psi(\omega,\omega,\omega') = \frac{1}{\omega}\psi\left(1,1,\frac{\omega'}{\omega}\right)$$

ergiebt. Ebenso ist

$$\psi(\omega',\omega',-\omega) = \frac{1}{\omega'}\psi\left(1,1,-\frac{\omega}{\omega'}\right),$$

und man hat also

$$\frac{\omega'}{\omega i}\,\psi\left(1,1,\frac{\omega'}{\omega}\right)+\frac{\omega i}{\omega'}\,\psi\left(1,1,-\frac{\omega}{\omega'}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man nun

$$\frac{\omega'}{\omega i} = x,$$

so dass x eine complexe Grösse ist, welche jeden Werth, dessen reeller Theil nicht gleich Null ist, annehmen kann, und

$$\chi(x) = \frac{2x}{\pi}\,\psi(1,1,xi)+\frac{2}{\pi x}\,\psi\left(1,1,\frac{i}{x}\right),$$

so ist

$$\chi(x) = \frac{2}{\pi}(x+x^{-1})+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'}{}'\left(\frac{x}{(1-2\nu-2\nu' xi)(2\nu+2\nu' xi)^2}\right)$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu,\nu'}{}'\left(\frac{x^{-1}}{(1-2\nu-2\nu' x^{-1}i)(2\nu+2\nu' x^{-1}i)^2}\right)$$

ein in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder sämmtlich rationale Functionen von x sind, dargestellter Ausdruck und hat den Werth

$$+1 \text{ oder } -1,$$

jenachdem der reelle Theil von x positiv oder negativ ist.

Man nehme nun im Gebiet der Grösse x einen ganz im Endlichen liegenden Bereich (X) so an, dass weder im Innern noch an der Grenze desselben der reelle Theil von x gleich Null wird; so lässt sich leicht zeigen, dass die vorstehende Reihe innerhalb dieses Bereiches unbedingt und gleichmässig convergirt.

Man setze

$$w = 2\nu+2\nu' xi,$$

so dass

$$\psi(1,1,xi) = 1+\sum_{\nu,\nu'}{}'\frac{1}{(1-w)w^2}$$

ist. Versteht man nun unter k den kleinsten Werth, den der absolute Betrag der Grösse

$$\varepsilon+\varepsilon'(\xi+\xi' i)i$$

für reelle Werthe der Veränderlichen $\varepsilon, \varepsilon', \xi, \xi'$ unter der Bedingung, dass

$$\varepsilon\varepsilon+\varepsilon'\varepsilon' = 1$$

sein und $\xi + \xi' i$ im Innern oder an der Grenze von X liegen soll, annehmen kann; so ist k nicht gleich Null, und man hat

$$|w| \geqq 2k\sqrt{\nu\nu + \nu'\nu'}$$
$$|1-w| \geqq k\sqrt{(2\nu-1)^2 + 4\nu'\nu'}$$

für jeden nicht ausserhalb des Bereichs X liegenden Werth von x. Es ist aber für jede ganze Zahl ν

$$(2\nu-1)^2 \geqq \nu^2,$$

also

$$(2\nu-1)^2 + 4\nu'\nu' \geqq \nu\nu + \nu'\nu',$$

und somit

$$\left|\frac{1}{(1-w)\,w^2}\right| \leqq \frac{(\nu\nu+\nu'\nu')^{-\frac{3}{2}}}{4k^3}.$$

Hiernach ist jedes Glied der Reihe, durch welche $\psi(1, 1, xi)$ dargestellt wird, seinem absoluten Betrage nach kleiner oder höchstens eben so gross als das entsprechende Glied der Reihe

$$1 + \sum_{\nu,\nu'}{}' \frac{(\nu\nu+\nu'\nu')^{-\frac{3}{2}}}{4k^3},$$

welche bekanntlich eine endliche Summe hat. Damit ist bewiesen, dass die erstgenannte Reihe für die dem Bereiche X angehörigen Werthe von x unbedingt und gleichmässig convergirt.

Es ist aber, wenn x in X angenommen wird, der Bereich der Grösse $\frac{1}{x}$ ebenfalls so beschaffen, dass weder im Innern noch an der Grenze desselben der reelle Theil von $\frac{1}{x}$ gleich Null wird. Daher convergirt auch der Ausdruck von $\psi\left(1, 1, \frac{i}{x}\right)$ für die dem betrachteten Bereiche angehörigen Werthe von x unbedingt und gleichmässig. Dasselbe gilt also auch für die Reihe, durch welche $\chi(x)$ dargestellt ist.

Es möge noch bemerkt werden, dass man in der Reihe $\psi(1, 1, xi)$, weil dieselbe unbedingt convergent ist, je zwei Glieder, in denen ν denselben, ν' aber entgegengesetzte Werthe hat, in eines zusammenziehen kann, wodurch man, wenn unter n eine ganze positive Zahl verstanden wird,

$$\psi(1, 1, xi) = 1 + \sum_{\nu}{}' \frac{1}{4\nu^2(1-2\nu)} + \frac{1}{2}\sum_{n,\nu}\left\{\frac{(6\nu-1)\,n^2x^2 - (2\nu-1)\,\nu^2}{(4n^2x^2 + (2\nu-1)^2)\,(n^2x^2+\nu^2)^2}\right\}$$

erhält. Die Glieder der so umgeformten Reihe sind rationale Functionen von x, welche rationale Coefficienten haben und nur für solche Werthe von x, deren reeller Theil gleich Null ist, unendlich gross werden. Als Summe von ebenso beschaffenen Gliedern lässt sich also auch $\chi(x)$ ausdrücken.

5.

Nun sei x' eine beliebige rationale Function von x, und es werde

$$\chi_1(x) = \chi(x')$$

gesetzt, so dass $\chi_1(x)$ ebenfalls eine Summe von unendlich vielen rationalen Functionen der Veränderlichen x ist. In der Ebene der letzteren Grösse werden dann diejenigen Werthe derselben, für welche der reelle Theil von x' verschwindet, durch eine reelle algebraische Curve repräsentirt, welche die Ebene dergestalt in mehrere Stücke zerlegt, dass der reelle Theil von x' in einigen Stücken überall positiv, in den andern überall negativ ist. In den ersteren hat also $\chi_1(x)$ überall den Werth $+1$, in den andern überall den Werth -1.

Nimmt man beispielsweise

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

an, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten bedeuten, deren Wahl keiner andern Beschränkung unterliegt, als dass $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht gleich Null sein darf, so ist die genannte Curve bekanntlich ein Kreis,*) und es können $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmt werden, dass dieser Kreis ein gegebener wird und der reelle Theil von x' für einen gegebenen Punkt ein vorgeschriebenes Zeichen hat.

Nun seien $F_1(x)$, $F_2(x)$ irgend zwei eindeutige Functionen von x mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen. Dann lässt sich, wenn

$$\chi_1(x) = \chi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right),$$

$$\mathfrak{F}_0(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2}, \qquad \mathfrak{F}_1(x) = \frac{F_1(x) - F_2(x)}{2}$$

gesetzt wird, der Ausdruck

$$\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x)$$

*) Dies gilt allgemein, wenn man eine unbegrenzte Gerade als einen Kreis mit unendlich grossem Radius betrachtet.

in eine unendliche Reihe, deren Glieder rationale Functionen von x sind, umformen, und diese stellt in dem einen der beiden Theile, in welche das Gebiet der Veränderlichen x durch den genannten Kreis zerlegt wird, die Function $F_1(x)$, in dem andern Theile dagegen die Function $F_2(x)$ dar.

Nimmt man ferner in der Ebene der Grösse x beliebig viele Kreise (oder unbegrenzte Geraden)

$$K', K'', \ldots K^{(r)}$$

willkürlich an, und bestimmt r lineare Functionen von x

$$x', x'', \ldots x^{(r)}$$

so, dass der reelle Theil von $x^{(\lambda)}$ in der Linie $K^{(\lambda)}$ verschwindet, so wird die Ebene durch die genannten Linien in eine gewisse Anzahl von Stücken dergestalt zerlegt, dass der reelle Theil einer jeden Function $x^{(\lambda)}$ innerhalb eines solchen Stückes überall dasselbe Zeichen hat. Sind dann

$$\mathfrak{F}_0(x),\ \mathfrak{F}_1(x),\ \ldots\ \mathfrak{F}_r(x)$$

eindeutige Functionen von x mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen, und setzt man

$$\chi_\lambda(x) = \chi(x^{(\lambda)}), \qquad (\lambda = 1, \ldots r)$$

so kann der Ausdruck

$$\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x) + \mathfrak{F}_2(x)\chi_2(x) + \cdots + \mathfrak{F}_r(x)\chi_r(x)$$

ebenfalls in eine unendliche Reihe, deren Glieder rationale Functionen von x sind, umgeformt werden, und diese Reihe hat dann die Eigenthümlichkeit dass sie zwar innerhalb eines jeden der Stücke, in welche die Ebene zerlegt ist, einen Zweig einer bestimmten monogenen Function darstellt, in verschiedenen Stücken aber Zweige verschiedener Functionen.

Sind z. B. $K', K'', \ldots K^{(r)}$ Kreise, von denen keiner einen andern umschliesst, so wird durch dieselbe die Ebene in $(r+1)$ Stücke zerlegt; und wenn man die Function $x^{(\lambda)}$ so bestimmt,*) dass ihr reeller Theil im Mittel-

*) Ist r_λ der Radius des Kreises $K^{(\lambda)}$, und a_λ der Werth von x im Mittelpunkt desselben, so kann man

$$x^{(\lambda)} = \frac{r_\lambda - a_\lambda + x}{r_\lambda + a_\lambda - x}$$

setzen.

punkt von $K^{(\lambda)}$ positiv ist, so liefert der Ausdruck

$$F_{r+1}(x)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}(1+\chi_\lambda(x))(F_\lambda(x)-F_{r+1}(x)),$$

der mit dem vorstehenden übereinstimmt, wenn unter $F_1(x), F_2(x), \ldots F_{r+1}(x)$ ebenfalls eindeutige Functionen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen verstanden werden, eine Reihe von der in Rede stehenden Eigenthümlichkeit, indem dieselbe, wenn x innerhalb der von $K^{(\lambda)}$ begrenzten Kreisfläche angenommen wird, gleich $F_\lambda(x)$, und wenn x ausserhalb aller dieser Flächen liegt, gleich $F_{r+1}(x)$ ist, also innerhalb eines jeden der $(r+1)$ Stücke, worin die Ebene zerlegt ist, einen Zweig einer willkürlich anzunehmenden Function von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit darstellt.

Ein anderes Beispiel erhält man, wenn die Kreise $K', K'', \ldots K^{(r)}$ so angenommen werden, dass jeder der $(r-1)$ ersten von dem folgenden umschlossen, und somit die Ebene durch sie gleichfalls in $(r+1)$ Stücke zerlegt wird. Dann hat nämlich der Ausdruck

$$\frac{1}{2}(F_1(x)+F_{r+1}(x))+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}(F_\lambda(x)-F_{\lambda+1}(x))\chi_\lambda(x)$$

die Eigenschaft, dass er innerhalb eines jeden der genannten Stücke gleich einer der Functionen $F_1(x), F_2(x), \ldots F_{r+1}(x)$ ist. (Ein besonderer Fall ist der, wo an die Stelle der r Kreise r einander parallele gerade Linien treten.) Scheidet man ferner aus dem Gebiete der Veränderlichen x alle negativen Werthe (mit Einschluss von 0) aus, so existiren bekanntlich*) unendliche, aus rationalen Functionen von x zusammengesetzte Reihen, welche einwerthige Zweige gewisser mehrdeutiger Functionen, wie z. B. $\log x$, x^m (wo m eine beliebige Constante bedeutet) darstellen und in der Nähe jeder Stelle, die nicht zu den ausgeschlossenen gehört, gleichmässig convergiren. Es können nun in dem Ausdruck

$$\mathfrak{F}_0(x)+\mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x)+\mathfrak{F}_2(x)\chi_2(x)+\cdots+\mathfrak{F}_r(x)\chi_r(x)$$

$\mathfrak{F}_0(x), \mathfrak{F}_1(x), \mathfrak{F}_2(x), \ldots \mathfrak{F}_r(x)$ auch solche Reihen sein, und man erhält dann aus ihm eine gleichfalls aus rationalen Functionen gebildete Reihe, welche in

*) S. die auf die Gauss'schen Kettenbrüche und die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen sich beziehenden Abhandlungen von Thomé im 66. und 67. Bande des Borchardt'schen Journals.

jedem der Stücke, in die das Gebiet von x durch die Linien $K^{(\lambda)}$ und die Strecke der negativen Werthe zerlegt wird, einen einwerthigen Zweig einer mehrdeutigen monogenen Function darstellt, in verschiedenen Stücken aber im Allgemeinen Zweige verschiedener Functionen.

Aus diesen Beispielen erhellt zur Genüge, dass die am Schlusse des § 3 aufgeworfene Frage folgendermassen zu beantworten ist:

> Wenn der Convergenzbereich einer Reihe, deren Glieder rationale Functionen einer Veränderlichen x sind, in der Art in mehrere Stücke zerlegt werden kann, dass in der Nähe jeder im Innern eines solchen Stückes gelegenen Stelle die Reihe gleichmässig convergirt; so stellt dieselbe in jedem einzelnen Stücke einen einwerthigen Zweig einer monogenen Function von x dar, in verschiedenen Stücken aber nicht nothwendig Zweige einer und derselben Function.

6.

Ich habe in meinen Vorlesungen über die Elemente der Functionenlehre von Anfang an zwei mit den gewöhnlichen Ansichten nicht übereinstimmende Sätze hervorgehoben, nämlich:

1) dass man bei einer Function eines reellen Arguments aus der Stetigkeit derselben nicht folgern könne, dass sie auch nur an einer einzigen Stelle einen bestimmten Differentialquotienten, geschweige denn eine — wenigstens in Intervallen — ebenfalls stetige Ableitung besitze;

2) dass eine Function eines complexen Arguments, welche für einen beschränkten Bereich des letzteren definirt ist, sich nicht immer über die Grenzen dieses Bereichs hinaus fortsetzen lasse; und dass die Stellen, für welche die Function nicht definirbar ist, nicht bloss einzelne Punkte, sondern auch Linien und Flächen bilden können.

Da im Vorhergehenden von Functionen einer complexen Veränderlichen, denen die unter 2) genannte Eigenthümlichkeit zukommt, die Rede gewesen ist, so will ich bei dieser Gelegenheit ein leicht zu behandelndes Beispiel einer solchen Function beibringen.

Angenommen, der Halbmesser des Convergenzbezirks einer gewöhnlichen Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

sei gleich 1, die Reihe convergire aber auch unbedingt und gleichmässig für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, so dass, wenn unter t eine reelle Veränderliche verstanden wird,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i}$$

eine stetige Function von t ist.

Im Innern des Convergenzbezirks der Reihe nehme man eine Stelle x_0 beliebig an und forme die gegebene Reihe in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ um. Ist r_0 der absolute Betrag von x_0, so kann der Halbmesser des Convergenzbezirks der Reihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$ nicht kleiner als $1-r_0$, wohl aber grösser sein. Ist das Letztere der Fall, so liegt ein Theil der Begrenzung des Convergenzbezirks der gegebenen Reihe ganz im Convergenzbezirke von $\mathfrak{P}(x-x_0)$, und es besteht, wenn

$$\frac{x_0}{r_0} = e^{t_0 i} \text{ ist und } x_t = e^{ti}$$

gesetzt wird, für alle Werthe von t zwischen zwei bestimmten Grenzen $(t_0-\tau,\ t_0+\tau)$ die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i} = \mathfrak{P}(x_t-x_0).$$

Nun hat aber $\mathfrak{P}(x-x_0)$, als Function von x betrachtet, Ableitungen jeder Ordnung, dasselbe gilt also auch von $\mathfrak{P}(x_t-x_0)$, als Function von t betrachtet, für die zwischen $t_0-\tau$ und $t_0+\tau$ liegenden Werthe dieser Grösse. Hieraus folgt nun: Wenn sich in einem bestimmten Falle beweisen lässt, dass die Function

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{\nu t i}$$

in keinem Intervalle der Veränderlichen t Ableitungen jeder Ordnung besitzt, so ist daraus zu schliessen, dass der Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}(x-x_0)$, wie man auch x_0 annehmen möge, ganz in dem Convergenzbezirk der gegebenen Reihe enthalten ist, die Function also, welche durch diese letztere dargestellt wird, über deren Convergenzbezirk hinaus nicht fortgesetzt werden kann.

Nun sei a eine ungrade positive ganze Zahl, b eine positive Grösse, die < 1, und $a_\nu = a^\nu$. Dann erfüllt die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a_\nu}$$

die oben für die betrachtete Reihe gestellten Bedingungen. Es ist aber von mir der Beweis*) geführt worden, dass die Function

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a_\nu t,$$

sobald $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ist, für keinen Werth von t einen bestimmten Differentialquotienten besitzt. Durch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu x^{a_\nu}$$

wird also, wenn $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, eine Function definirt, die nicht über den Convergenzbereich der Reihe hinaus fortgesetzt werden kann, und also ausschliesslich für solche Werthe von x, deren absoluter Betrag die Einheit nicht überschreitet, existirt.

Es ist leicht, unzählige andere Potenzreihen von derselben Beschaffenheit wie die vorstehende anzugeben, und selbst für einen beliebig begrenzten Bereich der Veränderlichen x die Existenz von Functionen derselben, die über diesen Bereich hinaus nicht fortgesetzt werden können, nachzuweisen; worauf ich jedoch hier nicht eingehe.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass sich auch in Beziehung auf zusammengesetztere arithmetische Formen, welche eindeutige monogene Functionen einer und mehrerer Veränderlichen oder einwerthige Zweige solcher Functionen auszudrücken geeignet sind, Untersuchungen anstellen lassen, welche der hier für eine der einfachsten Formen durchgeführten analog sind und zu ähnlichen Resultaten führen.

---

*) Dieser Beweis ist von Herrn P. du Bois-Reymond, dem ich ihn brieflich mitgetheilt hatte, im 79. Bande von Borchardt's Journal (S. 30) veröffentlicht. (Ich berichtige bei dieser Gelegenheit zwei a. a. O. sich findende Druckfehler. Z. 10 v. o. muss es »x_0« statt »a_0«, und Z. 4 v. u. »auch« statt »nicht« heissen.) [S. Anmerkung 3, S. 228 dieses Bandes.]

ANMERKUNGEN.

1. Zu S. 206, Z. 13.*)

Den hier angeführten wichtigen Satz beweise ich in meinen Vorlesungen in sehr einfacher Weise.

Ich betrachte zunächst eine Potenzreihe $P(x)$, welche nur eine **endliche** Anzahl von Gliedern enthält, also die Form

$$P(x) = \sum_{\nu=-m}^{\nu=+m} A_\nu x^\nu$$

hat, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet.

Es sei ξ eine bestimmte Grösse, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, und deren Wahl nur der Beschränkung unterliegt, dass ξ^ν, wenn ν eine der Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm m$ ist, nicht gleich 1 sein darf. Ferner bedeute r eine beliebig anzunehmende positive Grösse, so existirt für den absoluten Betrag von $P(x)$, wenn man der Veränderlichen x nur solche Werthe beilegt, deren absoluter Betrag gleich r ist, eine endliche obere Grenze, die mit G bezeichnet werden möge. Dann ist, wenn unter l eine beliebige ganze Zahl verstanden wird,

$$\left| \frac{1}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} P(r\xi^\lambda) \right| \leq G.$$

Man hat aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} P(r\xi^\lambda) &= \sum_{\nu=-m}^{\nu=+m} \sum_{\lambda=0}^{l-1} \left(\frac{1}{l} A_\nu r^\nu \xi^{\lambda\nu} \right) \\ &= A_0 + \frac{1}{l} \sum_\nu{}' A_\nu \frac{1-\xi^{l\nu}}{1-\xi^\nu} r^\nu, \end{aligned}$$

*) [Vgl. auch die Abhandlung „Zur Theorie der Potenzreihen", Bd. I, S. 67 dieser Ausgabe.]

wo bei der durch das Zeichen $\sum'$ angedeuteten Summation der Zahl ν alle Werthe von $-m$ bis $+m$, mit Ausschluss der Null, zu geben sind. Nun kann man aber, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, der Zahl l einen so grossen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1}{l}\sum_{\nu}' A_\nu \frac{1-\xi^{l\nu}}{1-\xi^\nu} r^\nu$$

kleiner als δ wird; dann hat man

$$|A_0| < G + \delta,$$

also

$$|A_0| \leqq G.$$

Jetzt sei

$$P(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

eine beliebige Potenzreihe, welche convergent ist für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag zwischen zwei bestimmten Grenzen R, R' liegt. Ist dann r eine zwischen R und R' enthaltene, im Übrigen willkürlich anzunehmende positive Grösse, so giebt es wieder für den absoluten Betrag von $P(x)$, wenn man der Veränderlichen x nur solche Werthe beilegt, deren absoluter Betrag gleich r ist, eine endliche obere Grenze, die mit g bezeichnet werden möge. Man kann ferner, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, eine ganze positive Zahl m so bestimmen, dass für jeden Werth von x, für den $|x| = r$,

$$\left|\sum_{\nu=-m-1}^{\nu=-\infty} A_\nu x^\nu\right| < \frac{1}{2}\delta, \qquad \left|\sum_{\nu=m+1}^{\nu=\infty} A_\nu x^\nu\right| < \frac{1}{2}\delta$$

ist; dann hat man

$$\left|\sum_{\nu=-m}^{\nu=+m} A_\nu x^\nu\right| < g + \delta,$$

also nach dem Bewiesenen

$$|A_0| < g + \delta$$

und somit

$$|A_0| \leqq g.$$

Lässt man ferner die Reihe $x^{-\mu}P(x)$, wo μ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, an die Stelle von $P(x)$ treten, so ist $gr^{-\mu}$ die obere Grenze für den absoluten Betrag von $x^{-\mu}P(x)$, wenn man der Grösse x nur solche Werthe giebt, deren absoluter Betrag gleich r ist; man hat also

$$|A_\mu| \leqq g r^{-\mu},$$

was zu beweisen war.

Für Potenzreihen von mehreren Veränderlichen gilt ein analoger Satz, der sich ebenso elementar wie der vorstehende beweisen lässt.

2. Zu S. 211, Z. 15.

Sind ω, ω' zwei complexe Grössen, für welche der reelle Bestandtheil von $\frac{\omega'}{\omega i}$ positiv ist, und bezeichnet man die Werthe, welche die Function $\wp(u \,|\, \omega, \omega')$ für $u = \omega, \omega + \omega', \omega'$ annimmt, beziehlich mit e_1, e_2, e_3, so hat man*)

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 \cdot (e_1 - e_3) = (1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots)^4,$$

wo

$$h = e^{-\frac{\omega'\pi}{\omega i}}$$

ist. Nimmt man ferner vier ganze, von Null verschiedene Zahlen p, q, p', q' so an, dass unter ihnen die Relation

$$pq' - p'q = 1$$

besteht, und setzt

$$\bar{\omega} = p\omega + q\omega', \qquad \bar{\omega}' = p'\omega + q'\omega', \qquad h_1 = e^{-\frac{\bar{\omega}'\pi}{\bar{\omega} i}},$$

so ist, wenn p', q beide grade, p, q' also beide ungrade Zahlen sind, auch

$$\wp(\bar{\omega} \,|\, \omega, \omega') = e_1, \qquad \wp(\bar{\omega} + \bar{\omega}' \,|\, \omega, \omega') = e_2, \qquad \wp(\bar{\omega}' \,|\, \omega, \omega') = e_3,$$

und es gilt die Gleichung

$$\left(\frac{2\bar{\omega}}{\pi}\right)^2 \cdot (e_1 - e_3) = (1 + 2h_1 + 2h_1^4 + 2h_1^9 + \cdots)^4;$$

man hat also

$$\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} h_1^{\nu\nu}\right)^4 = \left(p + q\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \cdot \left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} h^{\nu\nu}\right)^4.$$

Nun sei t eine positive Grösse, und

$$\omega = \frac{1}{2}, \qquad \omega' = \frac{1}{2} t i,$$

*) S. die »Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgegeben von H. A. Schwarz«, S. 43.

so ist

$$\lim_{t=\infty} h = \lim_{t=\infty} e^{-t\pi} = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} h_1 = \lim_{t=\infty} e^{\frac{p'+q'ti}{p+qti}\pi i} = e^{\frac{q'}{q}\pi i};$$

es ergiebt sich also, wenn unter x eine Veränderliche, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, verstanden wird, aus der vorstehenden Gleichung, dass der absolute Betrag der Summe

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu\nu}$$

unendlich gross wird, wenn sich x auf einem bestimmten Wege dem Grenzwerthe

$$e^{\frac{q'}{q}\pi i}$$

nähert. Nun kann man aber, wenn x_0 irgend eine bestimmte Grösse vom absoluten Betrage 1 ist, die Zahlen p, q, p', q' so annehmen, dass dieselben den angegebenen Bedingungen genügen und überdies der absolute Betrag der Differenz

$$e^{\frac{q'}{q}\pi i} - x_0$$

so klein wird, wie man will; es giebt also in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 Werthe der Veränderlichen x, für welche der absolute Betrag von

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu\nu}$$

grösser ist als jede beliebig angenommene positive Grösse.

Hieraus ergiebt sich nun ohne Weiteres das, was im Texte bereits von dem Ausdrucke

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^{\nu} + x^{-\nu}}\right)$$

gesagt worden ist, indem für diejenigen Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, die Gleichung

$$1 + 4F(x) = \left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu\nu}\right)^2$$

gilt.*)

*) C. G. J. Jacobi, Fund. nova § 40, Gl. (4.) und § 65, Gl. (6.).

Dazu bemerke ich noch Folgendes:

Setzt man, unter τ eine Grösse verstehend, deren zweite Coordinate nicht gleich Null sein soll,

$$x = e^{\tau\pi i}, \qquad 1+4F(x) = \varphi(\tau),$$

so hat man, wenn die zweite Coordinate von τ positiv ist,

$$\varphi(\tau) = \vartheta_3^2(0\,|\,\tau),$$

woraus sich die Relation

$$\varphi(\tau) = \frac{i}{\tau}\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

ergiebt. Ist dagegen die zweite Coordinate von τ negativ, so hat man

$$\varphi(\tau) = \varphi(-\tau) = \frac{i}{-\tau}\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

also

$$\varphi(\tau) = -\frac{i}{\tau}\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Hiernach ist also der Ausdruck

$$\frac{i\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(\tau)}$$

in dem einen Theile seines Geltungsbereichs gleich τ, in dem andern aber gleich $-\tau$; er ist also nicht eine monogene Function von τ, und demzufolge auch $F(x)$ nicht eine monogene Function von x.

3. Zu S. 223, Z. 5.

(Der Beweis befindet sich auf S. 71—74 dieses Bandes.)

Im 13. Bande des »Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik« finde ich auf S. 335 in einem Referate über Herrn Wiener's im 90. Bande des Borchardt'schen Journals erschienene, auf die im Vorstehenden betrachtete Function $f(x)$ sich beziehende Abhandlung die Bemerkung, es sei Herr Wiener durch eine gründliche geometrische und analytische Untersuchung der in Rede stehenden Function zu dem Resultate gelangt, dass die Behauptung, es besitze diese Function an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten, nicht durchweg aufrecht erhalten werden könne. Ich entnehme daraus, dass ich im Glauben, Jedermann wisse, was erforderlich ist, wenn eine stetige Function an einer bestimmten Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzen soll, am Schlusse des obigen Beweises mich doch zu kurz gefasst haben muss, weswegen ich die folgenden Erläuterungen hinzufüge, welche freilich für die meisten Leser überflüssig sein werden.

Wenn eine stetige Function $F(x)$ der reellen Veränderlichen x an einer bestimmten Stelle $(x = x_0)$ einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzen soll, so ist dazu nothwendig — selbstverständlich aber nicht hinreichend — dass alle Werthe, welche der Quotient

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

nach Festsetzung einer oberen Grenze für den absoluten Betrag der Differenz $x-x_0$ annehmen kann, zwischen endlichen Grenzen enthalten seien. Diese Bedingung ist für die von mir angegebene Function $f(x)$ niemals erfüllt, wie man auch x_0 annehmen möge.

Soll ferner $F(x)$ für $x = x_0$ einen bestimmten unendlich grossen Differentialquotienten $(+\infty$ oder $-\infty)$ haben, so muss nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse g für den absoluten Betrag von $x-x_0$ eine obere Grenze sich so festsetzen lassen, dass jeder Werth, den der Quotient

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

alsdann erhalten kann, im ersten Falle zwischen g und $+\infty$, im zweiten dagegen zwischen $-g$ und $-\infty$ liegt. Eine nothwendige Bedingung für die Existenz eines bestimmten unendlich grossen Differentialquotienten der Function an der Stelle $(x = x_0)$ ist also, dass der Quotient

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

für alle einer hinlänglich klein angenommenen Umgebung der Stelle x_0 angehörigen Werthe von x dasselbe Zeichen habe. Auch diese Bedingung ist für die in Rede stehende Function $f(x)$, wie gezeigt worden, niemals erfüllt. Ich muss also den Satz, dass die von mir aufgestellte Function an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitze, als unbedingt gültig aufrecht erhalten. Die dagegen erhobenen Einwendungen beruhen übrigens auf einem leicht aufzuklärenden Missverständnisse. Es ist mit dem Satze gar wohl vereinbar, dass für gewisse Werthe x_0 sich eine unendliche Reihe von Werthen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ so bestimmen lässt, dass $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} x_n = x_0$ ist und zugleich

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

einen bestimmten Werth erhält. Daraus aber zu schliessen, dass in einem solchen Falle $f(x)$ an der Stelle $(x = x_0)$ einen bestimmten Differentialquotienten besitze, ist ebenso unzulässig, wie es sein würde, wenn man z. B. von der Function

$$F(x) = x \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

behaupten wollte, sie besitze an der Stelle $(x = 0)$ den Differentialquotienten Null, weil sich, wenn man $x_n = \frac{1}{n\pi}$ setzt,

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} x_n = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{F(x_n)}{x_n} = 0$$

ergiebt.

ZUR FUNCTIONENLEHRE.

Nachtrag.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 21. Februar 1881.)

In der am 12. August 1880 der Akademie vorgelegten Abhandlung »Zur Functionenlehre« habe ich (in § 4) eine aus rationalen Functionen einer Veränderlichen x gebildete unendliche Reihe aufgestellt, welche die Eigenthümlichkeit besitzt, dass sie den Werth

$$+1 \text{ oder } -1$$

hat, jenachdem der reelle Theil von x positiv oder negativ ist.

Obwohl diese Reihe an sich einfach genug ist und für den Gebrauch, den ich von ihr zum Beweise des in § 5 d. g. Abhdlg. gegebenen Hauptsatzes gemacht habe, durchaus geeignet sich erweist, so ist doch ihre Herleitung einigermassen umständlich und setzt mehrere Sätze aus der Theorie der trigonometrischen Functionen voraus. Um so interessanter war es mir, kürzlich durch eine briefliche Mittheilung von Herrn J. Tannery, Professor an der Faculté des sciences zu Paris, der meine Abhandlung in's Französische übersetzt hat, zu erfahren, dass es höchst einfache Reihen ähnlicher Art giebt, welche nicht nur für den angegebenen Zweck dasselbe leisten wie die meinige, sondern vor dieser zugleich den wesentlichen Vorzug haben, dass zu ihrer Aufstellung und zum Nachweis ihrer charakteristischen Eigenschaft nur die elementarsten Sätze der Functionenlehre erforderlich sind.

Ich erlaube mir, aus Herrn Tannery's Briefe das Nachstehende mitzutheilen.

»Man nehme eine unendliche Reihe positiver ganzer Zahlen

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

so an, dass

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} m_n = \infty,$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } |x| < 1, \\ -1, & \text{wenn } |x| > 1. \end{cases}$$

Man hat aber

$$\frac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}} = \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{1+x^{m_\nu}}{1-x^{m_\nu}} - \frac{1+x^{m_{\nu-1}}}{1-x^{m_{\nu-1}}} \right\}$$

$$= \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2x^{m_{\nu-1}}(x^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(x^{m_\nu}-1)(x^{m_{\nu-1}}-1)};$$

setzt man also

$$\psi(x) = \frac{1+x^{m_0}}{1-x^{m_0}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2x^{m_{\nu-1}}(x^{m_\nu - m_{\nu-1}} - 1)}{(x^{m_\nu}-1)(x^{m_{\nu-1}}-1)},$$

so convergirt die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag von 1 verschieden ist, und hat den Werth

$$+1 \text{ oder } -1,$$

jenachdem der absolute Betrag von x kleiner oder grösser als 1 ist.

Nimmt man in dem vorstehenden Ausdrucke von $\psi(x)$

$$m_\nu = 2^\nu,$$

so erhält derselbe eine besonders einfache Gestalt; es ist dann

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \cdots \text{«*)}$$

*) Ich bin vor nicht langer Zeit darauf aufmerksam gemacht worden, dass sich in einer Abhandlung des Herrn E. Schröder a. d. J. 1876 (Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., 22. Jahrg. S. 184) die Formel

$$\frac{1}{x-x^{-1}} + \frac{1}{x^2-x^{-2}} + \frac{1}{x^4-x^{-4}} + \frac{1}{x^8-x^{-8}} + \cdots = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & \text{wenn } |x| < 1, \\[2mm] \dfrac{1}{x-1}, & \text{wenn } |x| > 1, \end{cases}$$

findet, woraus sich die im Texte nachgewiesene Eigenschaft der Function $\psi(x)$ in dem Falle, wo $m_\nu = 2^\nu$ ist, unmittelbar ergiebt.

Dazu bemerke ich noch Folgendes.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die von Herrn Tannery gegebene Reihe in der Nähe jedes Werthes von x, dessen absoluter Betrag nicht gleich 1 ist, gleichförmig convergirt.

Ist ferner x' eine beliebige rationale Function von x, so werden in der Ebene der letzteren Grösse diejenigen Werthe derselben, für die der absolute Betrag von x' gleich 1 ist, durch eine algebraische Curve repräsentirt, welche die Ebene dergestalt in mehrere Stücke zerlegt, dass der absolute Betrag von x' in einigen Stücken kleiner als 1, in den andern grösser als 1 ist. Setzt man also

$$\psi(x') = \chi_1(x),$$

so ist $\chi_1(x)$ ein Ausdruck von derselben Beschaffenheit wie der von mir im Anfang des § 5 d. g. Abhdlg. ebenso bezeichnete. Nimmt man insbesondere

$$x' = \frac{1-x}{1+x},$$

so erhält man einen Ausdruck, der gleich dem von mir mit $\chi(x)$ bezeichneten den Werth

$$+1 \text{ oder } -1$$

hat, jenachdem der reelle Theil von x positiv oder negativ ist.

AUS EINEM BISHER NOCH NICHT VERÖFFENTLICHTEN BRIEFE AN HERRN PROFESSOR SCHWARZ, VOM 3. OCTOBER 1875.

... Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke — und ich thue dies unablässig —, um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das »Transcendente«, um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird — so bestechend auch auf den ersten Anblick z. B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Functionen entdeckt hat. (Dass dem Forscher, so lange er sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht sich von selbst; es handelt sich nur um die systematische Begründung.)

Nachdem ich dies mein Glaubensbekenntniss, in welchem ich besonders durch eingehendes Studium der Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen bekräftigt worden bin, vorausgeschickt, gestatten Sie mir, in möglichster Kürze Ihnen aus meiner letzten Vorlesung über Abelsche Functionen diejenigen algebraischen Sätze vorzuführen, deren Kenntniss hinreicht, um in dem Resultat Ihrer Untersuchung (betr. den Satz, dass eine algebraische Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, wenn sie unendlich viele Transformationen in sich selbst zulässt, nothwendig den Rang 1 hat) eine so zu sagen selbstverständliche Wahrheit zu erblicken.

Ist zwischen zwei veränderlichen Grössen x, y irgend eine irreductible algebraische Gleichung gegeben, so nenne ich die Gesammtheit der diese

Gleichung befriedigenden Werthepaare (x, y) das durch die Gleichung definirte Gebilde, jedes einzelne Paar aber eine Stelle (Punkt) dieses Gebildes. Das Nächste ist dann, den Ihnen bekannten Begriff des Elementes eines solchen Gebildes gehörig festzustellen.

Es sei (a, b) eine bestimmte Stelle des betrachteten Gebildes, so giebt es eindeutige und in der Form gewöhnlicher Potenzreihen darstellbare Functionen $f_1(t)$, $f_2(t)$ einer Veränderlichen t von der Beschaffenheit, dass erstens die gegebene Gleichung befriedigt wird, wenn man

$$x-a = f_1(t), \qquad y-b = f_2(t)$$

setzt, wobei $(x-a)$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen ist, falls $a = \infty$ — ein Ähnliches gilt von $(y-b)$ —; zweitens $x = a$ und $y = b$ wird für $t = 0$, und drittens zu verschiedenen Werthen von t — wenigstens wenn dieselben dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze nicht übersteigen — auch verschiedene Stellen des Gebildes gehören. Die Gesammtheit der durch ein solches Functionenpaar gegebenen Werthepaare (x, y) nenne ich nun ein Element des betrachteten Gebildes, und beweise, dass das ganze Gebilde in eine endliche Anzahl solcher Elemente zerlegt werden kann. (Zur Entwickelung von $f_1(t)$, $f_2(t)$ habe ich jetzt eine Methode, die viel einfacher ist, als das bekannte Verfahren zur Entwickelung von $y-b$ nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x-a$.) Ferner wird gezeigt, dass aus einem Elemente alle übrigen abgeleitet werden können, weshalb das durch eine irreductible algebraische Gleichung definirte Gebilde ein monogenes ist. Dann ist noch zu bemerken, dass im Allgemeinen alle Stellen (x, y), die einer gegebenen (a, b) unendlich nahe liegen, einem Elemente angehören; es giebt aber einzelne singuläre Stellen, für welche dies nicht der Fall ist. Wenn daher von einer bestimmten Stelle des Gebildes die Rede ist, so wird, falls es sich um eine dieser singulären Stellen handelt, vorausgesetzt, dass das Element, dem sie angehören soll, bezeichnet werde. Hierauf wird festgestellt, was es heisst, es werde eine gegebene rationale Function von (x, y) an einer bestimmten Stelle unendlich gross von einer gewissen Ordnung; woran sich dann eine Reihe von Erklärungen und Sätzen schliesst, die ich nicht zu wiederholen brauche. Ich will nur anführen, wie ich den Begriff »zwei algebraische Gebilde sind rational in einander transformirbar« fasse.

Es sei $f(x,y)=0$ die gegebene Gleichung und $R_1(x,y)$ eine beliebige rationale Function von (x,y), so gehört, wenn man $\xi = R_1(x,y)$ setzt, zu jedem Werthe von ξ — eine beschränkte Anzahl specieller ausgenommen — eine bestimmte Anzahl verschiedener Werthepaare (x,y), welche ich den Grad von $R_1(x,y)$ nenne. Setzt man diese in eine zweite rationale Function $R_2(x,y)$ ein, und findet sich, dass für einen beliebigen Werth von ξ die entsprechenden Werthe von $R_2(x,y)$ alle von einander verschieden sind, so erhält man, wenn man $\eta = R_2(x,y)$ setzt, aus den Gleichungen

$$f(x,y) = 0, \qquad \xi = R_1(x,y), \qquad \eta = R_2(x,y)$$

stets eine irreductible Gleichung

$$\varphi(\xi,\eta) = 0,$$

welche, wenn μ, ν die Grade von $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ bezeichnen, in Beziehung auf η vom μ^{ten}, in Beziehung auf ξ vom ν^{ten} Grade ist. Dann entspricht aber auch immer nicht nur einem Werthepaare (x,y) ein Paar (ξ,η), sondern dies gilt auch umgekehrt, und man erhält

$$x = R_3(\xi,\eta), \qquad y = R_4(\xi,\eta),$$

wo R_3, R_4 ebenfalls rationale Functionen bezeichnen. Die Gleichungen

$$x = R_3(\xi,\eta), \qquad y = R_4(\xi,\eta), \qquad \varphi(\xi,\eta) = 0$$

führen sodann durch Elimination von ξ, η zu der ursprünglichen zurück. Man sagt daher, die Gleichungen $f(x,y)=0$, $\varphi(\xi,\eta)=0$ seien rational in einander transformirbar, und wendet diesen Ausdruck auch auf die beiden durch sie definirten Gebilde an.

Dies hätte ich Ihnen allerdings nicht so weitläufig darzulegen brauchen, ich wollte Ihnen aber eine ungefähre Anschauung von meinem Gange geben. Wesentlicher und Ihnen wohl noch nicht vollständig bekannt ist das nunmehr Folgende.

Es werde irgend eine bestimmte Stelle (a,b) des betrachteten Gebildes ausgewählt, so lässt sich zeigen, dass es unendlich viele rationale Functionen von (x,y) giebt, die nur an dieser Stelle unendlich gross werden. Unter diesen giebt es nothwendig eine vom niedrigsten Grade — ich will eine solche z nennen —, und es ist klar, dass dann jede andere von der Form $\alpha z_1+\beta$ ist, wo α, β Constanten bezeichnen. Unter den übrigen, d. h. denen, die von höherem Grade als z_1 sind, wähle man eine (z_2) von niedrigstem Grade aus, ebenso eine (z_3) von denen, deren Grad höher als der von z_2 ist u. s. w. So erhält man eine unendliche Reihe von Functionen

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots,$$

deren Grade

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \ldots$$

eine steigende Reihe bilden, und die der doppelten Bedingung genügen, dass sie alle nur an der Stelle (a, b) unendlich gross werden, und zugleich jede andere Function z von derselben Beschaffenheit sich in der Form

$$\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_m z_m$$

darstellen lässt, wo $\alpha_0, \ldots \alpha_m$ Constanten bedeuten. Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass in der Reihe der Zahlen

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$$

von einer bestimmten an jede um eine Einheit grösser ist als die unmittelbar vorhergehende.

Ist $\nu_1 = 1$, so ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ von der Beschaffenheit, dass sich alle Werthepaare (x, y) in der Form

$$x = R_1(t), \qquad y = R_2(t)$$

ausdrücken lassen. In jedem andern Falle müssen daher in der Reihe

$$\nu_1, \nu_2, \ldots$$

einige ganze Zahlen fehlen, die mit

$$k_1, k_2, \ldots$$

bezeichnet werden mögen.

Durch sehr einfache Betrachtungen zeige ich nun, dass

erstens zwar nicht diese Zahlen k selbst, wohl aber ihre Anzahl für alle Stellen (a, b) dieselbe ist — ich nenne sie ϱ — und

zweitens für alle Stellen mit Ausnahme einer beschränkten Menge singulärer (und zwar algebraisch bestimmbarer) die in Rede stehenden fehlenden Zahlen die folgenden sind:

$$1, 2, \ldots \varrho.$$

(Hieraus werden Sie erkennen, dass ϱ die Bedeutung hat, die ich sonst diesem Buchstaben gebe.)

Ist ν_α die erste der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots$, welche kein ganzzahliges Vielfaches von ν_1 ist, so besteht zwischen z_1 und z_α eine algebraische Gleichung von der Form

$$z_\alpha^{\nu_1} + G_1(z_1) . z_\alpha^{\nu_1 - 1} + \cdots + G_{(\nu_1 - 1)}(z_1) . z_\alpha + G_{\nu_1}(z_1) = 0,$$

wo $G_1, G_2, \ldots G_{\nu_1}$ ganze Functionen von z_1 bedeuten. Die Grade von $G_1, G_2, \ldots G_{(\nu_1 - 1)}$ sind nicht grösser als beziehlich

$$\frac{\nu_\alpha}{\nu_1}, \quad \frac{2\nu_\alpha}{\nu_1}, \quad \ldots \quad (\nu_1 - 1)\frac{\nu_\alpha}{\nu_1},$$

der von G_{ν_1} aber ist ν_α. Da man nun aber, wenn λ die grösste in dem Bruche $\frac{\nu_\alpha}{\nu_1}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, $a_0 z_\alpha + a_1 z_1^\lambda + a_2 z_1^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda z_1 + a_{\lambda+1}$ für z_α setzen darf, so kann man durch geeignete Wahl der Function z_α erreichen, dass in der vorstehenden Gleichung $G_1(z_1) = 0$ wird. Da man ferner $b_0 z_1 + b_1$ für z_1 setzen darf, so kann man ausserdem durch geeignete Wahl von z_1 erreichen, dass in $G_{\nu_1}(z_1)$ der Coefficient von $z_1^{\nu_\alpha}$ gleich (-1), der von $z_1^{\nu_\alpha - 1}$ aber gleich Null wird. Dadurch ist das Functionenpaar (z_1, z_α) soweit völlig bestimmt, dass man statt desselben nur noch das folgende

$$(c^{\nu_1} z_1, c^{\nu_\alpha} z_\alpha),$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet, setzen darf.

Betrachtet man nun z_2, z_3 u. s. w. als Functionen von z_1, so entsprechen jedem Werthe dieser Grösse ν_1 Werthe jeder der übrigen, und man erhält für hinlänglich grosse Werthe von z_1, wenn man

$$s = z_1^{\frac{1}{\nu_1}}$$

setzt, alle Werthe von z_m dargestellt durch eine Reihe von der Form

$$c_0 s^{\nu_m} + c_1 s^{\nu_m - 1} + c_2 s^{\nu_m - 2} + \cdots.$$

Man kann aber die Function z_m durch

$$\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_m z_m$$

ersetzen und die Constanten α so bestimmen, dass $c_0 = 1$, und von den übrigen Gliedern mit nicht negativen Potenzen von s nur diejenigen bleiben, in denen der Exponent von s eine der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\varrho$ (und zugleich $< \nu_m$) ist. (Dies gilt auch für die Entwickelung von z_α nach Potenzen von s.)

Auf diese Weise ergiebt sich eine Reihe von Functionen

$$z_1, z_2, z_3, \ldots,$$

welche soweit bestimmt sind, dass man sie nur durch die folgenden

$$c^{\nu_1} z_1, c^{\nu_2} z_2, c^{\nu_3} z_3, \ldots$$

ersetzen kann.

Alles dies gilt, wie gesagt, für jede Stelle (a, b). Nun möge aber (a, b) so gewählt werden, dass für diese Stelle die Zahl ν_1, die im Allgemeinen gleich $\varrho + 1$ ist, so klein als überhaupt möglich wird. Hier tritt nun ein wesentlicher Unterschied ein. Wenn $\varrho = 0$ oder 1, so kann ν_1 nicht kleiner als $\varrho + 1$ werden. Wenn aber $\varrho > 1$, so giebt es stets Stellen, für welche $\nu_1 \leqq \varrho$, und also auch mindestens eine, für die diese Zahl ein Minimum ist. Für diese Stelle seien nun die Functionen $z_1, z_2, z_3, \ldots$ gebildet. Im Allgemeinen ist dann die Gleichung zwischen z_1 und z_2 irreductibel. In besonderen Fällen kann aber das Gegentheil stattfinden, immer aber giebt es unter den Zahlen $\nu_2, \nu_3, \ldots$ solche, die relativ prim zu ν_1 sind. Ist ν_r die erste derselben, so besteht zwischen z_1 und z_r stets eine irreductible Gleichung von der Beschaffenheit, dass für hinlänglich grosse Werthe von z_1 die zugehörigen ν_1 Werthe von z_r durch eine Reihe von der Form

$$\left(z_1^{\frac{1}{\nu_1}}\right)^{\nu_r} + C_1\left(z_1^{\frac{1}{\nu_1}}\right)^{k_1} + C_2\left(z_1^{\frac{1}{\nu_1}}\right)^{k_2} + \cdots + \text{Glieder mit negativen Potenzen von } z_1^{\frac{1}{\nu_1}}$$

(in der $C_\mu = 0$ ist, wenn $k_\mu > \nu_r$) gegeben werden.

Diese Gleichung zwischen z_1 und z_r ist nun durch eine rationale Transformation aus der gegebenen $f(x, y) = 0$ ableitbar, und jede Function z_m rational durch z_1 und z_r ausdrückbar.

Umgekehrt ist aus der Form der Gleichung unmittelbar ersichtlich, dass, wenn sie durch eine rationale Transformation aus der gegebenen zwischen x, y entspringt, z_1, z_r nothwendig rationale Functionen von x, y sind, welche beide nur an einer Stelle des Gebildes (x, y) und zwar derselben, unendlich gross werden, und lediglich die Grade ν_1, ν_r haben.

Angenommen nun, die Gleichung $f(x, y) = 0$ lasse eine rationale Transformation in sich selbst zu, so ist ein Gleiches der Fall mit der zwischen z_1

und z_r bestehenden Gleichung, so dass es zwei rationale Functionen (ζ_1, ζ_r) von (z_1, z_r) giebt, zwischen denen dieselbe Gleichung besteht, wie zwischen z_1 und z_r, so dass für hinlänglich grosse Werthe von ζ_1 die Entwickelung von ζ_r nach Potenzen von $\zeta_1^{\frac{1}{\nu_1}}$ aus der oben für z_r angegebenen durch die Substitution von $\zeta_1^{\frac{1}{\nu_1}}$ für $z_1^{\frac{1}{\nu_1}}$ hervorgeht. Dann sind ζ_1, ζ_r rationale Functionen von (x, y), welche nach dem oben Bemerkten nur an einer Stelle des Gebildes (x, y) unendlich gross werden und beziehlich die Grade ν_1, ν_r haben. Ist ferner ζ_m dieselbe rationale Function von (ζ_1, ζ_r) wie z_m von (z_1, z_r), so hat auch ζ_m für hinlänglich grosse Werthe von ζ_1 dieselbe Entwickelung wie z_m für grosse Werthe von z_1. Da nun z_m nur für $z_1 = \infty$, also auch ζ_m nur für $\zeta_1 = \infty$ unendlich gross wird, so folgt, dass auch ζ_m als Function von x, y nur an derjenigen Stelle (a', b') des Gebildes unendlich wird, an der dies mit ζ_1 der Fall ist. Hieraus ergiebt sich, dass für die Stelle (a', b') die Reihe der Functionen

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$$

genau dieselbe Bedeutung hat, wie für die Stelle (a, b) die obige Reihe

$$z_1, z_2, z_3, \ldots,$$

in der Art, dass nicht nur die Reihe der Zahlen ν und somit auch die der k für beide dieselbe ist, sondern auch die für grosse Werthe von ζ_1 geltende Entwickelung von ζ_m nach Potenzen von $\zeta_1^{\frac{1}{\nu_1}}$ für jeden Werth von m aus der entsprechenden Entwickelung von z_m durch Substitution von $\zeta_1^{\frac{1}{\nu_1}}$ für $z_1^{\frac{1}{\nu_1}}$ hervorgeht.

Nun sind zwei Fälle möglich.

Erstens kann die Stelle (a', b') mit (a, b) identisch sein. Dann muss nach dem oben Bemerkten

$$\zeta_1 = c^{\nu_1} z_1, \quad \zeta_2 = c^{\nu_2} z_2, \quad \ldots \quad \zeta_m = c^{\nu_m} z_m$$

sein. Die Bedingung, dass die Gleichung zwischen ζ_1 und ζ_r dieselbe sei wie zwischen z_1 und z_r, hat aber zur Folge, dass c nothwendig eine bestimmte Einheitswurzel (im Allgemeinen 1 selbst) ist.

Zweitens kann die Stelle (a', b') von (a, b) verschieden sein. Dann wird auf dieselbe Weise gezeigt, dass es nur eine geschlossene Anzahl von Functionenpaaren (ζ_1, ζ_r) geben kann, welche nur an dieser Stelle unendlich gross werden und durch dieselbe Gleichung wie z_1 und z_r mit einander verbunden sind. Es giebt aber, wenn $\varrho > 1$ ist, überhaupt nur eine beschränkte Anzahl von Stellen, für die eine Function ζ_1 vom Grade ν_1 existirt.

Damit steht fest: »Wenn eine Gleichung $f(x, y) = 0$ überhaupt rationale Transformationen in sich selbst zulässt, so ist die Anzahl derselben, sobald der Rang (ϱ) der Gleichung grösser als 1 ist, in jedem Falle eine endliche«.

Sie sehen also, lieber College, dieser von Ihnen bewiesene Satz ist ungemein leicht abzuleiten, wenn die erforderlichen algebraischen Hülfsmittel vorhanden sind. Ich weiss mich nicht zu erinnern, ob ich denselben in meiner Vorlesung erwähnt habe — näher auf den Beweis eingegangen bin ich nicht —, muss es aber vermuthen, da ich ihn in der Dissertation von Schottky, worüber ich Ihnen schon schrieb — gedruckt ist dieselbe noch nicht —, als einen »bekannten« angeführt gefunden, welchen Ausdruck ich bei der Revision gestrichen habe. (In der Theorie der Abbildung mehrfach zusammenhangender ebener Flächen auf einander ist derselbe von wesentlicher Bedeutung.)

Nun ist es aber meine Meinung durchaus nicht, dass Sie Ihren Beweis unterdrücken sollen, aber ich wünsche, dass Sie bei der Publication bemerken möchten, ich habe Ihnen eine rein algebraische Ableitung des fraglichen Satzes mitgetheilt, und zwar wünsche ich dies einfach aus dem Grunde, weil einige meiner Zuhörer mit den Principien, worauf meine Deduction beruht, so vertraut sind, dass leicht Jemand sich finden möchte, der nach Veröffentlichung Ihrer Abhandlung in vielleicht nicht angemessener Weise mit der Bemerkung, es lasse sich das Resultat viel einfacher begründen, hervorträte; was für uns beide nicht grade angenehm sein würde.

Gestatten Sie mir noch einige Bemerkungen in Betreff der Bedeutung, welche die Functionen z für die Theorie der Abelschen Integrale haben.

Wenn man die Stelle (a, b) so auswählt, dass die Zahl ν_1 ein Minimum ist, so hat die zwischen z_1 und z_r bestehende Gleichung ein Minimum von Constanten.

(Durch die Substitution von $c^{\nu_1}z_1$, $c^{\nu_r}z_r$ kann man bewirken, dass noch ein Coefficient der Gleichung den Werth 1 erhält.) Im Allgemeinen kann ν_1 nicht kleiner als ϱ werden, und dann ist der Riemann'sche Satz von den $(3\varrho-3)$ Constanten gültig.

Es kann aber ν_1 bis auf 2 herabsinken (den Fall $\varrho=0$ ausgeschlossen), und dann beträgt die Anzahl der Constanten nur $2\varrho-1$. (Fall der ellipt. und hyperellipt. Integrale.) Dazwischen liegt eine Reihe besonders zu behandelnder Fälle. Besonders bemerkenswerth ist, dass in eine solche Gleichung zwischen z_1, z_r (man muss für einen bestimmten Werth von ϱ die zugehörigen Gleichungen (Gebilde) zunächst in Gruppen theilen, so dass kein Gebilde, das einer Gruppe angehört, aus einem Gebilde einer andern Gruppe durch rationale Transformation hervorgehn kann) die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten unmittelbar eingeht, d. h. dass alle Coefficienten rationale Functionen dieser Constanten sind. Ferner giebt es ein bestimmtes Verfahren, wodurch sich für jeden Werth von ϱ die in Rede stehenden Gleichungen bilden lassen, während natürlich die Umformung einer gegebenen Gleichung in eine solche »kanonische« nicht ohne — practisch meist nicht durchführbare — algebraische Operationen geschehen kann.

Für $\varrho = 1, 2, 3, 4, 5$ hat mir Frau von Kovalevsky die Gleichungen wirklich hergestellt.

Bildet man für eine beliebige Stelle (a, b) die Reihe der Functionen $z_1, z_2, \ldots$, so ist

$$\alpha_0+\alpha_1 z_1+\cdots+\alpha_m z_m$$

der allgemeinste Ausdruck einer Function, die rational durch x, y ausdrückbar und an der Stelle (a, b) unendlich gross (von der Ordnung ν_m) wird. Dieselbe wird dann nothwendig an ν_m Stellen Null. Man kann aber unendliche Reihen

$$\alpha_0+\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots,$$

welche beständig convergiren, so bilden, dass sie nur an der Stelle (a, b), die für sie eine eigentliche Grenzstelle ist, unstetig werden, und zugleich nur an einer Stelle oder an gar keiner verschwinden. Diese Functionen von (x, y) nenne ich Primfunctionen. In Betreff der nirgends verschwindenden zeige ich, dass es 2ϱ solche,

$$E(x, y)_1, \; \ldots \; E(x, y)_{2\varrho}$$

giebt, aus denen sich alle übrigen in der Form

$$E^{g_1}(x, y)_1, \; \ldots \; E^{g_{2\varrho}}(x, y)_{2\varrho},$$

wo die g ganze Zahlen bedeuten, zusammensetzen lassen. Eine Function der andern Art, die an der Stelle (x_1, y_1) verschwindet (und zwar mit der Ordnungszahl 1), bezeichne ich mit $E(x, y; x_1, y_1)$, und beweise dann zwei Fundamentalsätze.

1) Jede rationale Function $R(x, y)$ r^{ten} Grades lässt sich in der Form

$$R(x, y) = C\frac{E(x, y; x_1', y_1') \ldots E(x, y; x_r', y_r')}{E(x, y; x_1, y_1) \ldots E(x, y; x_r, y_r)}$$

darstellen.

2) Wenn $(x_1, y_1), \ldots (x_m, y_m)$ die verschiedenen Stellen sind, an denen $\int R(x, y)\,dx = \infty$ wird, so hat man

$$\begin{aligned}\int R(x, y)\,dx = {} & C_1 \log E(x, y; x_1, y_1) + \cdots + C_m \log E(x, y; x_m, y_m) \\ & + C_1' \log E(x, y)_1 + \cdots + C_{2\varrho}' \log E(x, y)_{2\varrho} + R_1(x, y),\end{aligned}$$

wo R_1 eine rationale Function von x, y bezeichnet und die C Constanten sind.

Auf diese Weise sind die Integrale algebraischer Differentiale in einer Form, die den analytischen Charakter derselben zur Evidenz bringt, dargestellt. Fügt man noch zwei Formeln hinzu, die das Verhalten der E-Functionen in der Nähe der (willkürlich auszuwählenden) Stelle (a, b) angeben, so sind alle Sätze, welche die Theorie der Abelschen Integrale ausmachen, einfache Corollare der unter 1), 2) aufgestellten.

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.*)

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 27. April 1882.)

I.

Herleitung der Relationen, welche unter den Functionen $\sigma(u\,|\,\omega, \omega')$, $\sigma_1(u\,|\,\omega, \omega')$, $\sigma_2(u\,|\,\omega, \omega')$, $\sigma_3(u\,|\,\omega, \omega')$ und deren partiellen Ableitungen nach u, ω, ω' stattfinden.

Es werde irgend eine dieser Functionen bloss mit σ bezeichnet und

$$\varphi = -\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2}$$

gesetzt, so dass für die erste Function

$$\varphi = \wp(u)$$

und für σ_λ, wo λ eine der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet,

$$\varphi = \wp(u + \omega_\lambda)$$

ist. Dann hat man

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3, \tag{1.}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 6\varphi^2 - \frac{1}{2}g_2. \tag{2.}$$

---

*) In Betreff der in dieser Mittheilung gebrauchten Bezeichnungen und als bekannt vorausgesetzten Formeln verweise ich auf die „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz“.

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man sich der Bezeichnung $d'F$ bedient, um anzudeuten, dass ein die Grössen u, ω, ω' enthaltender Ausdruck in Beziehung auf ω, ω' differentiirt werden solle:

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}d'\varphi = (12\varphi^2-g_2)d'\varphi-\varphi dg_2-dg_3,$$

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}d'\varphi-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}d'\varphi+\varphi dg_2+dg_3 = 0,$$

$$(3.)\qquad 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d'\varphi}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)+\frac{\varphi dg_2+dg_3}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2} = 0.$$

Man hat aber

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) = -\frac{6\varphi^2-\frac{1}{2}g_2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{g_2\varphi+\frac{3}{2}g_3}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi^2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) = \frac{1}{2}\varphi-\frac{g_2\varphi^2+\frac{3}{2}g_3\varphi}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi^2-\frac{1}{6}g_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) = \frac{1}{2}\varphi-\frac{\frac{3}{2}g_3\varphi+\frac{1}{12}g_2^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2};$$

wenn man also d_1, d_2 so bestimmt, dass

$$(4.)\qquad dg_2 = -4g_2d_1-6g_3d_2,\qquad dg_3 = -6g_3d_1-\frac{1}{3}g_2^2d_2$$

ist — was angeht, weil $g_2^3-27g_3^2$ nicht gleich Null ist —, so lässt sich die Gleichung (3.) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{2\frac{d'\varphi}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}+2\left(u+\frac{2\varphi}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)d_1+\left(2\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}+\frac{4\varphi^2-\frac{2}{3}g_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right)d_2\right\} = 0$$

schreiben. In dieser Gleichung sind alle Glieder des Ausdrucks, auf den sich das Zeichen $\frac{\partial}{\partial u}$ bezieht, ungerade Functionen von u, weil φ eine gerade und $\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}$ eine ungerade Function derselben Grösse ist; folglich muss dieser

Ausdruck, da er von u unabhängig ist, gleich Null sein. Man hat also

$$d'\varphi+\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2\varphi\right)d_1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}+2\varphi^2-\frac{1}{3}g_2\right)d_2 = 0. \tag{5.}$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{d'\sigma}{\sigma}\right) = \frac{\partial^2 d'\log\sigma}{\partial u^2} = -d'\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) = \frac{\partial\log\sigma}{\partial u}-u\varphi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{u}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) = -u\frac{\partial\varphi}{\partial u}-2\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\right)^2\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial u}-2\varphi\frac{\partial\log\sigma}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right) = 2\varphi^2-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\log\sigma}{\partial u} = -4\varphi^2-2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}+\frac{1}{2}g_2;$$

und es lässt sich also die Gleichung (5.) so schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left\{2\frac{d'\sigma}{\sigma}+2\frac{u}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}d_1+\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}+\frac{1}{12}g_2u^2\right)d_2\right\} = 0.$$

In dieser Gleichung sind nun alle Glieder des Ausdrucks, auf den sich das Zeichen $\frac{\partial^2}{\partial u^2}$ bezieht, gerade Functionen von u; folglich muss der Ausdruck einen von u unabhängigen Werth haben. Bezeichnet man diesen mit C, so wird

$$2d'\sigma+2u\frac{\partial\sigma}{\partial u}d_1+\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}+\frac{1}{12}g_2u^2\sigma\right)d_2 = C\sigma.$$

Nimmt man jetzt

$$\sigma = \sigma(u\,|\,\omega,\omega'),$$

so hat man

$$\sigma = u+u^5\mathfrak{P}(u),$$

und es ergiebt sich, wenn man auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung den Coefficienten von u bestimmt, $C = 2d_1$.

Nimmt man aber $\sigma = \sigma_\lambda$, so ist

$$\sigma_\lambda = 1-\frac{1}{2}e_\lambda u^2+u^4\mathfrak{P}_\lambda(u),$$

und man erhält, wenn man in der Gleichung $u = 0$ setzt, $C = -e_\lambda d_2$. So ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(A.)\qquad 2d'\sigma + 2\left(u\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \sigma\right)d_1 + \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \frac{1}{12}g_2u^2\sigma\right)d_2 = 0,$$

$$(B.)\qquad 2d'\sigma_\lambda + 2u\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u}d_1 + \left(\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{12}g_2u^2 + e_\lambda\right)\sigma_\lambda\right)d_2 = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Wir haben hier σ, σ_λ als Functionen von u, ω, ω' betrachtet, so dass d_1, d_2 homogene lineare Functionen von $d\omega$, $d\omega'$ sind, welche folgendermassen bestimmt werden können.

Man setze

$$\frac{\partial\log\sigma}{\partial u} = \psi(u), \qquad \frac{\partial\psi(u)}{\partial\omega} = \psi^{(1)}(u), \qquad \frac{\partial\psi(u)}{\partial\omega'} = \psi^{(2)}(u),$$

so folgt aus der Gleichung (A.), wenn man dieselbe durch σ dividirt, wodurch sie die Form

$$2d'\log\sigma + 2(u\psi - 1)d_1 + \left(-\varphi + \psi^2 + \frac{1}{12}g_2u^2\right)d_2 = 0$$

erhält, und dann in Beziehung auf u differentiirt:

$$(6.)\quad \begin{cases} \psi^{(1)}(u)d\omega + \psi^{(2)}(u)d\omega' + (\psi(u) - u\varphi(u))d_1 - \left(\varphi(u)\psi(u) - \frac{1}{12}g_2u\right)d_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}d_2 = 0 \\ \psi^{(1)}(u)d\omega + \psi^{(2)}(u)d\omega' + (d_1 - \varphi(u)d_2)\psi(u) + \left(\frac{1}{12}g_2d_2 - d_1\varphi(u)\right)u - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}d_2 = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen

$$\psi(u + 2\omega) = \psi(u) + 2\eta, \qquad \psi(u + 2\omega') = \psi(u) + 2\eta'$$

aber ergiebt sich

$$(7.)\quad \begin{cases} 2\frac{\partial\psi(u+2\omega)}{\partial u} + \psi^{(1)}(u+2\omega) = \psi^{(1)}(u) + 2\frac{\partial\eta}{\partial\omega}, \quad \psi^{(1)}(u+2\omega') = \psi^{(1)}(u) + 2\frac{\partial\eta'}{\partial\omega}, \\ 2\frac{\partial\psi(u+2\omega')}{\partial u} + \psi^{(2)}(u+2\omega') = \psi^{(2)}(u) + 2\frac{\partial\eta'}{\partial\omega'}, \quad \psi^{(2)}(u+2\omega) = \psi^{(2)}(u) + 2\frac{\partial\eta}{\partial\omega'}, \end{cases}$$

oder

$$(8.)\quad \begin{cases} \psi^{(1)}(u+2\omega) - \psi^{(1)}(u) = 2\frac{\partial\eta}{\partial\omega} + 2\varphi(u), \quad \psi^{(2)}(u+2\omega) - \psi^{(2)}(u) = 2\frac{\partial\eta}{\partial\omega'}, \\ \psi^{(1)}(u+2\omega') - \psi^{(1)}(u) = 2\frac{\partial\eta'}{\partial\omega}, \quad \psi^{(2)}(u+2\omega') - \psi^{(2)}(u) = 2\frac{\partial\eta'}{\partial\omega'} + 2\varphi(u). \end{cases}$$

In der Gleichung (6.) setze man nun $u+2\omega$, $u+2\omega'$ für u, und subtrahire sie dann von den so entstehenden neuen Gleichungen, so kommt

$$d\eta+\varphi(u)\,d\omega+\eta\,(d_1-\varphi(u)\,d_2)+\omega\left(\frac{1}{12}g_2d_2-d_1\varphi(u)\right) = 0,$$

$$d\eta'+\varphi(u)\,d\omega'+\eta'(d_1-\varphi(u)\,d_2)+\omega'\left(\frac{1}{12}g_2d_2-d_1\varphi(u)\right) = 0.$$

Da $\varphi(u)$ jeden Werth haben kann, so folgt hieraus

$$\text{(C.)}\quad\left\{\begin{array}{ll} d\omega = \eta\,d_2+\omega\,d_1, & d\eta = -\frac{1}{12}g_2\omega\,d_2-\eta\,d_1,\\ d\omega' = \eta'd_2+\omega'd_1, & d\eta' = -\frac{1}{12}g_2\omega'd_2-\eta'd_1. \end{array}\right.$$

Mit Berücksichtigung der Relation

$$\eta\omega'-\omega\eta' = \frac{1}{2}\pi i$$

erhält man sodann

$$\text{(D.)}\quad d_1 = \frac{2i}{\pi}(\eta'd\omega-\eta d\omega'),\qquad d_2 = -\frac{2i}{\pi}(\omega'd\omega-\omega d\omega'),$$

$$\text{(E.)}\quad\left\{\begin{array}{l} d\eta = \frac{2i}{\pi}\left[\left(-\eta\eta'+\frac{1}{12}g_2\omega\omega'\right)d\omega+\left(\eta^2-\frac{1}{12}g_2\omega^2\right)d\omega'\right]\\ d\eta' = \frac{2i}{\pi}\left[\left(-\eta'^2+\frac{1}{12}g_2\omega'^2\right)d\omega+\left(\eta\eta'-\frac{1}{12}g_2\omega\omega'\right)d\omega'\right], \end{array}\right.$$

$$\text{(F.)}\quad\left\{\begin{array}{l} dg_2 = -\frac{2i}{\pi}\left[\left(4g_2\eta'-6\,g_3\omega'\right)d\omega-\left(4g_2\eta-6\,g_3\omega\right)d\omega'\right]\\ dg_3 = -\frac{2i}{\pi}\left[\left(6g_3\eta'-\frac{1}{3}g_2^2\omega'\right)d\omega-\left(6g_3\eta-\frac{1}{3}g_2^2\omega\right)d\omega'\right], \end{array}\right.$$

$$\text{(G.)}\quad\left\{\begin{array}{l} d_1 = \dfrac{-g_2^2dg_2+18g_3dg_3}{4(g_2^3-27g_3^2)} = -\dfrac{1}{12}\,\dfrac{d(g_2^3-27g_3^2)}{g_2^3-27g_3^2}\\ d_2 = \dfrac{18g_3dg_2-12g_2dg_3}{4(g_2^3-27g_3^2)}. \end{array}\right.$$

Aus der Gleichung

$$4e_1^3-g_2e_1-g_3 = 0$$

ergiebt sich ferner

$$\begin{aligned}(12e_1^2-g_2)de_1 = e_1dg_2+dg_3 &= -(4g_2e_1+6g_3)d_1-\left(6g_3e_1+\frac{1}{3}g_2^2\right)d_2\\ &= -(24e_1^3-2g_2e_1)d_1-\left(24e_1^4-6g_2e_1^2+\frac{1}{3}g_2^2\right)d_2\\ &= -2e_1(12e_1^2-g_2)d_1-(12e_1^2-g_2)\left(2e_1^2-\frac{1}{3}g_2\right)d_2,\end{aligned}$$

also

$$de_1 = -2e_1 d_1 + \left(\frac{1}{3} g_2 - 2e_1^2\right) d_2;$$

und ebenso

$$de_2 = -2e_2 d_1 + \left(\frac{1}{3} g_2 - 2e_2^2\right) d_2,$$

$$de_3 = -2e_3 d_1 + \left(\frac{1}{3} g_2 - 2e_3^2\right) d_2.$$

Hieraus folgt weiter, da $e_1 + e_2 + e_3 = 0$,

$$\begin{aligned} d(e_1 - e_2) &= -2(e_1 - e_2)(d_1 - e_3 d_2), \\ d(e_1 - e_3) &= -2(e_1 - e_3)(d_1 - e_2 d_2), \\ d(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) &= -2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(2d_1 + e_1 d_2). \end{aligned}$$

Es ist aber, wenn man

(H.) $\varepsilon_1 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3), \quad \varepsilon_2 = (e_2 - e_1)(e_2 - e_3), \quad \varepsilon_3 = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)$

setzt,

(J.) $g_2 = 4(3e_\lambda^2 - \varepsilon_\lambda), \quad g_3 = 4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda = 4e_\lambda(\varepsilon_\lambda - 2e_\lambda^2), \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$

und somit

$$\text{(K.)} \quad \begin{cases} de_\lambda = -2e_\lambda d_1 - \left(\frac{4}{3}\varepsilon_\lambda - 2e_\lambda^2\right) d_2 = -2e_\lambda(d_1 - e_\lambda d_2) - \frac{4}{3}\varepsilon_\lambda d_2 \\ d\varepsilon_\lambda = -4\varepsilon_\lambda d_1 - 2e_\lambda \varepsilon_\lambda d_2 \qquad\quad = -4\varepsilon_\lambda(d_1 - e_\lambda d_2) - 6e_\lambda \varepsilon_\lambda d_2. \end{cases}$$

Die Gleichungen (A.), (D.), (E.), (F.) lehren hiernach, dass jede partielle Ableitung der Function σ nach ω und ω' dargestellt werden kann in der Form

$$F_0 \sigma + F_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u} + F_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} + \cdots,$$

wo $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ganze Functionen der Grössen $\omega, \omega', \eta, \eta', g_2, g_3, u$ sind.

Ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen (B.), (D.), (E.), (J.), (K.) für jede partielle Ableitung von σ_λ nach ω, ω' ein Ausdruck

$$F_0^{(\lambda)} \sigma_\lambda + F_1^{(\lambda)} \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial u} + F_2^{(\lambda)} \frac{\partial^2 \sigma_\lambda}{\partial u^2} + \cdots,$$

in welchem $F_0^{(\lambda)}, F_1^{(\lambda)}, F_2^{(\lambda)}, \ldots$ ganze Functionen der Grössen $\omega, \omega', \eta, \eta', \varepsilon_\lambda, e_\lambda$, u sind.

Es lässt sich aber σ in der Form einer beständig convergirenden Potenzreihe der Grössen u, g_2, g_3 darstellen. Betrachtet man demgemäss σ als Function von u, g_2, g_3, so zeigen die Gleichungen (A.), (G.), dass jede partielle

Ableitung von σ nach g_2, g_3 die Form

$$G_0\sigma + G_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + G_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \cdots$$

hat, wo sich jede der Grössen $G_0, G_1, G_2, \ldots$ als eine ganze Function von g_2, g_3, u, dividirt durch eine Potenz von $(g_2^3 - 27g_3^2)$, darstellen lässt.

Ferner ist, wenn man

$$\varphi_\lambda = -\frac{\partial^2 \log \sigma_\lambda}{\partial u^2}$$

setzt,

$$\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial u^2} = 6\varphi_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

und für $u = 0$

$$\varphi_\lambda = e_\lambda, \qquad \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial u} = 0;$$

woraus sich ergiebt, dass in der Entwickelung von φ_λ nach Potenzen von u nur Glieder mit geraden Potenzen dieser Grösse vorkommen, und die Coefficienten derselben ganze Functionen von g_2, e_λ und somit auch von $e_\lambda, \varepsilon_\lambda$ sind. Demgemäss erhält die Entwickelung von σ_λ die Form

$$e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2}(1 + E_2^{(\lambda)}u^4 + E_3^{(\lambda)}u^6 + \cdots),$$

wo $E_2^{(\lambda)}, E_3^{(\lambda)}, \ldots$ ganze Functionen von $\varepsilon_\lambda, e_\lambda$ sind.

Betrachtet man nun σ_λ als Function von $u, e_\lambda, \varepsilon_\lambda$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (B.), (K.) für jede partielle Ableitung von σ_λ nach $e_\lambda, \varepsilon_\lambda$ ein Ausdruck

$$G_0^{(\lambda)}\sigma_\lambda + G_1^{(\lambda)}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u} + G_2^{(\lambda)}\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \cdots,$$

in welchem jede der Grössen $G^{(\lambda)}$ eine ganze Function von $u, e_\lambda, \varepsilon_\lambda$, dividirt durch eine Potenz von $(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)$ ist.

II.

Gebrauch der im Vorstehenden entwickelten Differentialgleichungen zur Entwickelung der Functionen σ, σ_λ.

Aus der Gleichung (A.) erhält man, indem man $d\sigma$ auf die Form

$$\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}dg_2 + \frac{\partial\sigma}{\partial g_3}dg_3 = -\left(4g_2\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + 6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}\right)d_1 - \left(6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}\right)d_2$$

bringt und beachtet, dass d_1, d_2, als Functionen von dg_2, dg_3 betrachtet, von einander unabhängig sind — was aus den Gleichungen (4.) sich ergiebt, weil

$(g_2^3 - 27 g_3^2)$ nicht gleich Null ist —, die beiden nachstehenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(A.)} \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma = 0,$$

$$\text{(B.)} \qquad u \frac{\partial \sigma}{\partial u} - 4 g_2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - 6 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} - \sigma = 0.$$

Setzt man

$$\sigma = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{r}} A_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{r}} g_2^{\mathfrak{m}} g_3^{\mathfrak{n}} u^{\mathfrak{r}}, \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{r} = 0, 1, \ldots \infty)$$

so lehrt die zweite Gleichung, dass in jedem Gliede der Reihe, dessen Coefficient nicht gleich Null ist,

$$\mathfrak{r} - 4\mathfrak{m} - 6\mathfrak{n} - 1 = 0$$

sein muss. Man kann daher setzen

$$\text{(C.)} \qquad \sigma(u) = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \left(\frac{1}{2} g_2\right)^{\mathfrak{m}} (2 g_3)^{\mathfrak{n}} \cdot \frac{u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}}{(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1)!}$$

und erhält zur Bestimmung der Coefficienten $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ aus (A.) die Recursionsformel

$$\text{(D.)} \quad a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = 3(\mathfrak{m}+1) a_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1} + \frac{16}{3}(\mathfrak{n}+1) a_{\mathfrak{m}-2,\mathfrak{n}+1} - \frac{1}{3}(2\mathfrak{m}+3\mathfrak{n}-1)(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}-1) a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}.$$

Bei der Anwendung dieser Formel ist jeder Coefficient, in welchem einer der Indices einen negativen Werth erhält, gleich Null zu setzen. Der Coefficient $a_{0,0}$ ist gleich 1. Betrachtet man als zu einer Gruppe gehörig alle $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, für welche die Summe $4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}$ denselben Werth hat, so lehrt die vorstehende Formel, dass jede Zahl $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ einer bestimmten Gruppe aus zwei Zahlen der unmittelbar vorhergehenden und einer Zahl der zweitvorhergehenden Gruppe berechnet werden kann.

Die Function σ_λ hat nach dem Vorhergehenden die Form $e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} . S_\lambda$, wo S_λ eine Potenzreihe von u, e_λ, ε_λ ist. Dann hat man

$$\begin{aligned} d'\sigma_\lambda &= e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \left(d' S_\lambda - \frac{1}{2} u^2 S_\lambda \, de_\lambda \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \left\{ d' S_\lambda + u^2 S_\lambda \left(e_\lambda (d_1 - e_\lambda d_2) + \frac{2}{3} \varepsilon_\lambda d_2 \right) \right\}, \\ \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial u} &= e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial u} - e_\lambda u \, S_\lambda \right), \\ \frac{\partial^2 \sigma_\lambda}{\partial u^2} &= e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \left(\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial u^2} - 2 e_\lambda u \frac{\partial S_\lambda}{\partial u} - (e_\lambda - e_\lambda^2 u^2) S_\lambda \right), \end{aligned}$$

und es geht die Differentialgleichung (I. (B.)) über in die folgende:

$$\text{(E.)}\qquad 2d'S_\lambda + 2u\frac{\partial S_\lambda}{\partial u}(d_1 - e_\lambda d_2) + \left(\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial u^2} + \varepsilon_\lambda u^2 S_\lambda\right)d_2 = 0.$$

Diese aber zerfällt, da

$$d'S_\lambda = -\left(2e_\lambda\frac{\partial S_\lambda}{\partial e_\lambda} + 4\varepsilon_\lambda\frac{\partial S_\lambda}{\partial \varepsilon_\lambda}\right)(d_1 - e_\lambda d_2) - \left(\frac{4}{3}\frac{\partial S_\lambda}{\partial e_\lambda} + 6e_\lambda\frac{\partial S_\lambda}{\partial \varepsilon_\lambda}\right)\varepsilon_\lambda d_2$$

ist, in die beiden:

$$\text{(F.)}\qquad \frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial u^2} - 8\varepsilon_\lambda\left(\frac{1}{3}\frac{\partial S_\lambda}{\partial e_\lambda} + \frac{3}{2}e_\lambda\frac{\partial S_\lambda}{\partial \varepsilon_\lambda}\right) + \varepsilon_\lambda u^2 S_\lambda = 0,$$

$$\text{(G.)}\qquad u\frac{\partial S_\lambda}{\partial u} - 2e_\lambda\frac{\partial S_\lambda}{\partial e_\lambda} - 4\varepsilon_\lambda\frac{\partial S_\lambda}{\partial \varepsilon_\lambda} = 0.$$

Setzt man

$$S_\lambda = \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{r}} C_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{r}}\, e_\lambda^{\mathfrak{m}}\varepsilon_\lambda^{\mathfrak{n}} u^{\mathfrak{r}},$$

so folgt aus (G.), dass

$$\mathfrak{r} - 2\mathfrak{m} - 4\mathfrak{n} = 0$$

sein muss, wenn $C_{\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{r}}$ nicht gleich Null ist. Man kann also setzen:

$$\text{(H.)}\qquad \sigma_\lambda(u) = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2}\sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(12e_\lambda)^{\mathfrak{m}}(2\varepsilon_\lambda)^{\mathfrak{n}}\cdot\frac{u^{2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}}}{(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n})!},\quad \text{wo}\quad 2\varepsilon_\lambda = 6e_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

und erhält aus (F.) zur Bestimmung der Coefficienten $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ die Recursionsformel

$$\text{(J.)}\qquad c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = 16(\mathfrak{m}+1)c_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1} + \mathfrak{n}c_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}} - (\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}-3)c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1},$$

wo $c_{\mathfrak{m}+1,-1}$, $c_{-1,\mathfrak{n}}$, $c_{\mathfrak{m},-1}$ gleich Null zu setzen sind und $c_{0\,0} = 1$ ist.

Endlich kann man auch der Function σ die Form

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2}S^{(\lambda)}$$

geben. Schreibt man die Gleichung (I. (A.)) in der Gestalt

$$2d'\sigma + 2u\frac{\partial\sigma}{\partial u}d_1 + \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{12}g_2u^2 + e_\lambda\right)\sigma\right)d_2 - 2\sigma(d_1 - e_\lambda d_2) - 3e_\lambda\sigma d_2 = 0,$$

so ist ersichtlich, dass man zu der Gleichung

$$\text{(K.)}\qquad 2d'S^{(\lambda)} + 2\left(u\frac{\partial S^{(\lambda)}}{\partial u} - S^{(\lambda)}\right)(d_1 - e_\lambda d_2) + \left(\frac{\partial^2 S^{(\lambda)}}{\partial u^2} - 3e_\lambda S^{(\lambda)} + \varepsilon_\lambda u^2 S^{(\lambda)}\right)d_2 = 0$$

geführt wird, welche in die beiden nachstehenden zerfällt:

$$(\mathrm{L.})\qquad \frac{\partial^2 S^{(\lambda)}}{\partial u^2} - 8\varepsilon_\lambda\left(\frac{1}{3}\frac{\partial S^{(\lambda)}}{\partial e_\lambda} + \frac{3}{2}e_\lambda\frac{\partial S^{(\lambda)}}{\partial \varepsilon_\lambda}\right) + (-3e_\lambda + \varepsilon_\lambda u^2)S^{(\lambda)} = 0,$$

$$(\mathrm{L}^*.)\qquad u\frac{\partial S^{(\lambda)}}{\partial u} - 2e_\lambda\frac{\partial S^{(\lambda)}}{\partial e_\lambda} - 4\varepsilon_\lambda\frac{\partial S^{(\lambda)}}{\partial \varepsilon_\lambda} - S^{(\lambda)} = 0.$$

Man kann also setzen

$$(\mathrm{M.})\quad \sigma(u) = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2}\sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(3e_\lambda)^{\mathfrak{m}}(2\varepsilon_\lambda)^{\mathfrak{n}}\frac{u^{2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}+1}}{(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}+1)!},\quad \text{wo}\ 2\varepsilon_\lambda = 6e_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

und erhält aus (L.) zur Bestimmung der Coefficienten $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ die Recursionsformel:

$$(\mathrm{N.})\quad b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = 4(\mathfrak{m}+1)b_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1} + (4\mathfrak{n}+1)b_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}} - (\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)(2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}-1)b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1}.$$

Hier ist

$$b_{0,0} = 1,\quad \text{und}\quad b_{\mathfrak{m}+1,-1} = 0,\quad b_{-1,\mathfrak{n}} = 0,\quad b_{\mathfrak{m},-1} = 0.$$

Aus den Gleichungen (J.), (N.) ist unmittelbar ersichtlich, dass die Coefficienten $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ und $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ sämmtlich ganze Zahlen sind. Aber auch die $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ sind alle ganze Zahlen. Denn aus der Gleichung (M.) ergiebt sich, dass, wenn man

$$\sigma(u) = \sum_{\mathfrak{r}=0}^{\infty} C_{\mathfrak{r}}\frac{u^{2\mathfrak{r}+1}}{(2\mathfrak{r}+1)!}$$

setzt, $C_{\mathfrak{r}}$ für jeden Werth von $\mathfrak{r}$ eine ganze Function von $\frac{1}{2}g_2$ und $\frac{1}{2}e_\lambda$ mit ganzzahligen Coefficienten ist. Schafft man aus $C_{\mathfrak{r}}$ alle Potenzen von e_λ, deren Exponent > 2 ist, mittels der Gleichung

$$e_\lambda^3 = \frac{1}{4}g_2 e_\lambda + \frac{1}{4}g_3$$

fort, so müssen in dem so umgeformten Ausdruck von $C_{\mathfrak{r}}$, da derselbe für $\lambda = 1, 2, 3$ denselben Werth hat, die mit e_λ und e_λ^2 multiplicirten Glieder fortfallen; er reducirt sich also auf eine ganze Function von g_2, g_3, deren Coefficienten Brüche sind, die zu Nennern Potenzen von 2 haben. Die $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ könnten also, wenn sie Brüche wären, ebenfalls nur Potenzen von 2 zu Nennern haben; dies ist aber nach der Recursionsformel (D.) nicht der Fall.

Die Werthe der Zahlen $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, für die $4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1 \leqq 35$ ist, finden sich in den oben erwähnten »Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen

Functionen« S. 7; die Werthe derjenigen Zahlen $b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, $c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, für die $2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n} \leqq 12$ ist, welche also zur Entwickelung der Reihen $S^{(\lambda)}$, S_λ bis zu den Gliedern, welche in Beziehung auf u beziehlich vom 13ten und 12ten Grade sind, ausreichen, enthält die folgende Tabelle.

$2\mathfrak{m}+4\mathfrak{n}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{n}$	$b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$	$c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$
0	0	0	1	1
2	1	0	1	0
4	2	0	1	0
	0	1	1	−1
6	3	0	1	0
	1	1	3	−1
8	4	0	1	0
	2	1	6	−1
	0	2	−9	−1
10	5	0	1	0
	3	1	10	−1
	1	2	−141	−6
12	6	0	1	0
	4	1	15	−1
	2	2	−1479	−15
	0	3	−69	−51

ZUR THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.*)

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 15. und 22. Februar und vom 13. December 1883.)

I.

Um die elliptischen Functionen

$$\sin\operatorname{am}(u, k), \quad \cos\operatorname{am}(u, k), \quad \Delta\operatorname{am}(u, k)$$

durch die Jacobi'schen Functionen

$$\begin{aligned}
\vartheta(x, q) &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots,\\
\vartheta_1(x, q) &= 2\sqrt[4]{q}\,.(\sin x - q^2\sin 3x + q^6\sin 5x - \cdots),\\
\vartheta_2(x, q) &= 2\sqrt[4]{q}\,.(\cos x + q^2\cos 3x + q^6\cos 5x + \cdots),\\
\vartheta_3(x, q) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots
\end{aligned}$$

auszudrücken, hat man die Aufgabe zu lösen, für jeden gegebenen Werth von k einen die Gleichung

$$\text{(1.)} \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}$$

befriedigenden Werth von q zu bestimmen. Ist ein solcher Werth gefunden, so hat man, wenn

$$\text{(2.)} \qquad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2(0, q), \qquad x = \frac{u\pi}{2K}$$

*) Durch diese Abhandlung soll eine Lücke ausgefüllt werden, welche sich in der Jacobi'schen »Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet« (Gesammelte Werke, Band I, S. 497 ff.) findet, und auf die ich in einer Anmerkung auf S. 545 a. a. O. aufmerksam gemacht habe. Es sind deshalb hier durchgehends die Jacobi'schen Bezeichnungen von mir angewandt worden.

gesetzt wird,

$$
(3.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\cdot\sin\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{1-k^2}}\cdot\cos\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}\cdot\ \Delta\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}. \end{cases}
$$

Dabei kann der Werth einer der beiden Wurzelgrössen $\sqrt{k}$, $\sqrt[4]{q}$ beliebig fixirt werden, worauf dann der Werth der anderen durch die Gleichung (1.) bestimmt wird. Der Werth von $\sqrt[4]{1-k^2}$ ist so zu wählen, dass

$$
(4.)\quad \sqrt[4]{1-k^2} = \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}
$$

wird.

In der nachgelassenen Abhandlung Jacobi's »Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet« ist die genannte Aufgabe für den Fall, dass k eine reelle, zwischen 0 und 1 enthaltene Grösse ist, behandelt (§ 6) und nachgewiesen worden, dass man von der Gleichung (1.) ausgehend zu demselben Ausdrucke von q gelangt, den Jacobi in den »Fund. nov. funct. ellipt.« auf dem in diesem Werke eingeschlagenen Wege erhalten hatte. Ich werde jetzt zeigen, wie man mit den von Jacobi in der genannten Abhandlung angewandten Hülfsmitteln für jeden (complexen) Werth von k alle die Gleichung (1.) befriedigenden Werthe von q bestimmen kann, und zwar mittels einer Reihe, welche nicht nur ihrer starken Convergenz wegen für einen numerisch gegebenen Werth von k eine bequeme Berechnung der zugehörigen Werthe von q gestattet, sondern auch, wenn man k als eine veränderliche Grösse und q als Function derselben betrachtet, dazu dienen kann, die charakteristischen Eigenschaften dieser Function aufzufinden. Es kommen dabei hauptsächlich in Anwendung die beiden, auch von Jacobi benutzten Gleichungen

$$
(5.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0,q) = \vartheta_3(0,q^4)+\vartheta_2(0,q^4) \\ \vartheta(0,q) = \vartheta_3(0,q^4)-\vartheta_2(0,q^4), \end{cases}
$$

welche sich unmittelbar aus den Ausdrücken von $\vartheta_3(0,q)$, $\vartheta(0,q)$ ergeben, und die Relation

$$
(6.)\quad \vartheta^4(0,q)+\vartheta_2^4(0,q) = \vartheta_3^4(0,q).
$$

Ich betrachte zunächst ausschliesslich reelle, der Bedingung

$$0 \leqq q < 1$$

unterworfene Werthe der Grösse q, und setze fest, dass im Folgenden, wenn a eine positive Grösse ist, unter $\log a$ der reelle Werth des natürlichen Logarithmus von a, und unter a^m, für einen beliebigen Werth von m, der durch die Formel

$$e^{m \log a}$$

gegebene Werth der Potenz a^m verstanden werden soll. Dann haben $\vartheta(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$, $\vartheta_3(0, q)$ stets reelle Werthe und sind stetige Functionen von q. Ferner ist aus den Ausdrücken der Grössen $\vartheta_2(0, q)$, $\vartheta_3(0, q)$ unmittelbar ersichtlich, dass die zweite beständig positiv ist, und für die erste, die für $q = 0$ verschwindet, dasselbe gilt, wenn $q > 0$. Was aber $\vartheta(0, q)$ angeht, so würde, wenn diese Grösse für einen bestimmten Werth von q gleich Null wäre, aus (5.) folgen:

$$\vartheta_3(0, q^4) = \vartheta_2(0, q^4),$$

und es müsste demnach (gemäss Gleichung (6.)) auch $\vartheta(0, q^4) = 0$ sein. Daraus würde dann weiter folgen, dass auch $\vartheta(0, q^{16})$, $\vartheta(0, q^{64})$ u. s. w. gleich Null wären, was unmöglich ist, weil $\vartheta(0, q^m)$ für einen unendlich grossen positiven Werth von m unendlich wenig von 1 verschieden ist. Es kann also $\vartheta(0, q)$ für keinen der betrachteten Werthe von q verschwinden und ist demnach beständig positiv.

Hiernach ist

$$\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}$$

eine stetige Function von q, die für $q = 0$ verschwindet und für jeden anderen Werth von q einen positiven Werth hat. Dieselbe ist, indem in Folge der Gleichung (6.)

$$\vartheta_3^4(0, q) > \vartheta_2^4(0, q),$$

stets kleiner als 1; es lässt sich aber zeigen, dass sie sich, wenn q von der Grenze Null an stetig wachsend der Grenze 1 sich nähert, ebenfalls beständig wachsend, derselben Grenze nähert.

Da nämlich

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2+q^6+\cdots)}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

so lässt sich jedenfalls eine positive Grösse q_0, die <1 ist, so annehmen, dass

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$$

beständig zunimmt, wenn q stetig wachsend das Intervall $(0 \dots q_0)$ durchläuft. Aus den Gleichungen (5.) folgt aber, wenn $q^{\frac{1}{4}}$ für q gesetzt wird,

$$(7.)\qquad \frac{\vartheta\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{1-\dfrac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}}{1+\dfrac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}}.$$

Hiernach nimmt $\frac{\vartheta\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)}$ beständig ab, wenn q stetig wachsend das genannte Intervall durchläuft, oder es nimmt, was dasselbe besagt, $\frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ beständig ab, wenn q stetig wachsend von 0 aus in $q_0^{\frac{1}{4}}$ übergeht. Es ist aber

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = \left(1-\frac{\vartheta^4(0,q)}{\vartheta_3^4(0,q)}\right)^{\frac{1}{4}};$$

es wächst also $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ gleichzeitig mit q, so lange $q < q_0^{\frac{1}{4}}$ ist. Daraus folgt sofort, dass dasselbe gilt, so lange q kleiner als

$$q_0^{\frac{1}{16}},\ q_0^{\frac{1}{64}},\ \dots$$

ist. Die Glieder dieser Reihe convergiren aber gegen die Grenze 1; es wächst also $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ gleichzeitig mit q, wie nahe auch q der Einheit kommen möge. Es ist ferner, wenn

$$\delta = 1-\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$$

gesetzt wird, nach (7.)

$$\frac{\vartheta\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta,$$

$$1-\frac{\vartheta_2^4\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3^4\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{\vartheta^4\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3^4\left(0,q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta^4,$$

und somit auch

$$1-\frac{\vartheta_2\left(0,\, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(0,\, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta^4.$$

Daraus folgt für jeden ganzzahligen positiven Werth von m

$$1-\frac{\vartheta_2\left(0,\, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}{\vartheta_3\left(0,\, q^{\frac{1}{4^m}}\right)} < (\delta)^{4^m};$$

es nähert sich daher, wenn m unendlich gross wird, der Werth von $q^{\frac{1}{4^m}}$ also der Grenze 1 unendlich nahe kommt,

$$\frac{\vartheta_2\left(0,\, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}{\vartheta_3\left(0,\, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}$$

ebenfalls dieser Grenze. Damit ist das oben hinsichtlich der Function $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ Behauptete bewiesen.

Dies vorausgeschickt, denke man sich nun den Quotienten

$$\frac{\vartheta_2^4(0,q)}{\vartheta_3^4(0,q)}$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(q)$ entwickelt. Das Anfangsglied derselben ist $16q$, und ihre Coefficienten sind sämmtlich ganze Zahlen; man kann daher eine unendliche Reihe rationaler Zahlen

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$$

so bestimmen, dass für hinlänglich kleine Werthe von q die Gleichung

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q) \tag{8.}$$

besteht, aus welcher sich, da $\alpha_0 = \frac{1}{16}$ ist,

$$\log(16q) = \log \mathfrak{P}(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}^n(q) \tag{9.}$$

ergiebt, wo $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ebenfalls rationale Zahlen sind.

Nimmt man nun eine positive Grösse q_0, die <1 ist, so an, dass dieselbe im Convergenzbezirke der Reihe $\mathfrak{P}(q)$ liegt, und zugleich, wenn man

$$t_0 = \left(\frac{\vartheta_2(0,q_0)}{\vartheta_3(0,q_0)}\right)^4$$

setzt, die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n$$

(wo $|\beta_n|$ den absoluten Betrag von β_n bezeichnet) einen endlichen Werth hat, so gilt die Gleichung

$$\log q + \log 16 = 4 \log \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^{4n} \tag{10.}$$

sicher für die der Bedingung

$$0 < q \leqq q_0$$

entsprechenden Werthe von q, weil für jeden solchen Werth nach dem Vorhergehenden

$$0 < \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 \leqq t_0$$

ist.

Man bezeichne

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 \text{ mit } t,$$

und setze in (10.) q^4 für q, so erhält man, da nach den Gleichungen (5.)

$$\frac{\vartheta_2(0,q^4)}{\vartheta_3(0,q^4)} = \frac{1-\dfrac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}}{1+\dfrac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}} = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \tag{11.}$$

ist, einen zweiten Ausdruck für $\log q$, nämlich

$$4 \log q + \log 16 = 4 \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}. \tag{12.}$$

Aus (10.) und (12.) ergiebt sich dann die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \log\left(\frac{8}{t}\,\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}. \tag{13.}$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung ist t als Function von q angenommen worden. Da aber, wenn q stetig wachsend das Intervall $(0 \dots q_0)$ durchläuft, t ebenfalls beständig wachsend vom Werthe 0 zum Werthe t_0 übergeht, so erhellt, dass die Gleichung (13.) besteht, wenn man t als eine unabhängige Veränderliche betrachtet und derselben irgend einen dem Intervall $(0 \dots t_0)$ angehörigen Werth giebt.

Es ist aber

$$d \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) = \frac{\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt}{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt}{1-(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \left(\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\right)\frac{dt}{t};$$

entwickelt man also $\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}$ nach Potenzen von t und setzt

$$(14.) \qquad \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \varepsilon_1 t + 2\varepsilon_2 t^2 + 3\varepsilon_3 t^3 + \cdots,$$

so ergiebt sich

$$(15.) \qquad \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) = \log\frac{t}{8} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu t^\nu,$$

und es sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ sämmtlich rationale und positive Zahlen. Aus (15.) folgt sodann

$$(16.) \qquad \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^m = t^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^\nu,$$

wo für einen beliebigen Exponenten m die Coefficienten $\varepsilon_{m,\nu}$ mittels der aus (16.) und (14.) sich ergebenden Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (m+\nu)\varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu-1} = m \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu} \cdot \left(\frac{1}{t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \varepsilon_\nu t^{\nu-1}\right)$$

bestimmt werden können. Man erhält aus dieser Gleichung die Recursionsformel

$$(17.) \qquad \nu \varepsilon_{m,\nu} = m \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu \varepsilon_\mu \varepsilon_{m,\nu-\mu}, \qquad (\nu > 0)$$

aus welcher, da $\varepsilon_{m,0} = (\frac{1}{8})^m$ ist, sich die wichtige Folgerung ergiebt, dass für einen positiven Werth von m die Grössen $\varepsilon_{m,\nu}$ sämmtlich positive Zahlen sind.

Die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu t^\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^\nu$$

convergiren, wie aus der Herleitung derselben erhellt, für jeden (reellen oder complexen) Werth von t, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Bei der angegebenen Beschaffenheit der Grössen ε_ν, $\varepsilon_{m,\nu}$ ist also für jeden zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werth von t und jeden positiven Werth von m

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu t^\nu < \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \log\frac{8}{t},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu} < \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^m.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man t gegen die Grenze 1 convergiren lässt,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu \leqq \log 8, \quad \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{m,\nu} \leqq 1,$$

oder vielmehr, da dies auch gilt, wenn man $n+1$ für n setzt,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu < \log 8, \quad \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_{m,\nu} < 1.$$

Demnach convergiren die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu t^\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^\nu$$

auch für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag gleich 1 ist, und es ergiebt sich aus den Gleichungen (15.), (16.), wenn man t der Grenze 1 sich nähern lässt,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu = \log 8, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} = 1. \tag{18.}$$

Es werde jetzt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{m,\nu} t^{m+\nu} \text{ mit } \mathfrak{P}(t, m)$$

bezeichnet, so gilt nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n t^n + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t, 4n) \tag{19.}$$

für jeden in dem Intervall $(0 \dots t_0)$ enthaltenen reellen Werth von t. Es möge jetzt aber t_0 irgend eine positive Grösse, die <1 ist und zugleich im Innern des Convergenzbezirks der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n$ liegt, bedeuten. Dann ist, wenn man

$$t_1 = t_0^{\frac{1}{4}}$$

setzt, in Folge des Umstandes, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t, 4n)$ sämmtlich positiv sind und die Summe derselben den Werth 1 hat,

$$\mathfrak{P}(t_1, 4n) \text{ positiv, aber kleiner als } t_0^n,$$

und daher

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\, \mathfrak{P}(t_1, 4n) < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|\, t_0^n.$$

Für jeden der Bedingung

$$|t| \leqq t_1$$

entsprechenden Werth von t ist nun

$$|\mathfrak{P}(t, 4n)| \leqq \mathfrak{P}(t_1, 4n),$$

und hat also die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_n|\, \varepsilon_{4n,\nu} |t|^{4n+\nu}$$

einen endlichen Werth. Es ist deshalb die Reihe

$$\sum_{n,\nu} \beta_n \varepsilon_{4n,\nu} t^{4n+\nu} \qquad (n = 1, \ldots \infty;\ \nu = 0, \ldots \infty)$$

unbedingt convergent, und es ergiebt sich, wenn man alle Glieder derselben, welche dieselbe Potenz von t enthalten, in eines zusammenzieht,

$$\text{(20.)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t, 4n) = \sum_{r,\varrho} (r, \varrho) t^{4r+\varrho}, \qquad (\varrho = 0, 1, 2, 3;\ r = 1, \ldots \infty)$$

wo

$$\text{(21.)} \qquad (r, \varrho) = \sum_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n,\, 4r-4n+\varrho}\, \beta_n.$$

Aus der Gleichung (19.) erhält man hiernach

$$\text{(22.)} \qquad \begin{cases} \beta_1 = \varepsilon_1, \quad \beta_2 = \varepsilon_2, \quad \beta_3 = \varepsilon_3, \\ \beta_{4r+\varrho} = \varepsilon_{4r+\varrho} + \dfrac{1}{4} \sum\limits_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n,\, 4r-4n+\varrho}\, \beta_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, \ldots \infty \\ \varrho = 0, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

und kann also die Grössen β_n der Reihe nach berechnen, nachdem man zuvor die durch die Gleichungen (14.), (17.) definirten Zahlen ε_n, $\varepsilon_{4n,\nu}$ bestimmt hat.

Aus den vorstehenden Formeln (22.) ist ersichtlich, dass die Grössen β_n ebenso wie die ε_n, $\varepsilon_{4n,\nu}$ sämmtlich positive rationale Zahlen sind.

Es ergiebt sich aber auch aus dem Vorstehenden, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

für jeden (reellen oder complexen) Werth von t, dessen absoluter Betrag nicht grösser als 1 ist, unbedingt convergirt.

Um dies nachzuweisen, bemerke ich zunächst, dass man die im Vorstehenden gemachte Voraussetzung, es liege die mit t_0 bezeichnete Grösse im Innern des Convergenzbezirkes der Reihe $\sum \beta_n t^n$, jetzt fallen lassen kann und nur anzunehmen braucht, es sei die Reihe für $t = t_0$ convergent. Denn nach dem eben Bewiesenen ist $|\beta_n| = \beta_n$, und es bleibt somit bestehen, dass die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (20.) für $t = t_0^{\frac{1}{4}}$ convergirt. Für denselben Werth von t convergirt aber auch die Reihe $\sum \varepsilon_n t^n$; die Gleichung (19.) lehrt also, dass, wenn die Reihe $\sum \beta_n t^n$ für $t = t_0$ convergirt, dasselbe nothwendig auch für $t = t_0^{\frac{1}{4}}$ und somit auch für

$$t = t_0^{\frac{1}{16}},\; t_0^{\frac{1}{64}},\; \dots$$

stattfindet. Demgemäss convergirt die Reihe für positive Werthe von t, die der Einheit so nahe kommen, wie man will, und es ist also der Radius ihres Convergenzbezirks nicht kleiner als 1.

Hiernach gilt die Gleichung (10.)

$$\log q + \log 16 = 4 \log \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} \right)^{4n}$$

für jeden der Bedingung

$$0 \leqq q < 1$$

entsprechenden Werth von q. Nähert sich aber q der Grenze 1, so convergirt der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung gegen die Grenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n,$$

und es ist daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16.$$

Demzufolge convergirt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

auch dann, wenn der absolute Betrag von t gleich 1 ist, und stellt für den durch die Bedingung

$$|t| \leqq 1$$

definirten Bereich der Grösse t eine continuirliche analytische Function derselben dar.

Setzt man nun

$$(23.) \qquad \psi(t) = \frac{t}{16} e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n},$$

so erhält man

$$(24.) \qquad \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1},$$

wo die Coefficienten α_n identisch sind mit den in der obigen Gleichung (8.)

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q)$$

vorkommenden, welche also aus den β_n berechnet werden können und ebenso wie diese sämmtlich positive rationale Zahlen sind. Lässt man t der Grenze 1 sich nähern, so ergiebt sich

$$(25.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = e^{-\log 16 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n} = 1.$$

Die Function $\psi(t)$ ist demnach durch die Gleichung (24.) für jeden der Bedingung

$$|t| \leqq 1$$

entsprechenden Werth der Veränderlichen t definirt. Für $t = 1$ ist $\psi(t) = 1$, dagegen für jeden anderen Werth von t

$$|\psi(t)| < 1.$$

Nun besteht nach dem Obigen die Gleichung

$$(26.) \qquad q = \psi(t),$$

wenn man

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4$$

setzt, sicher für die einem gewissen Intervall $(0 \ldots q_0)$ angehörigen reellen Werthe von q. Für alle diesen Werthen von q entsprechenden Werthe von t gilt also die Gleichung

$$(27.)\quad (1 + 2\psi(t) + 2\psi^4(t) + 2\psi^9(t) + \cdots)^4 . t = 16\psi(t)(1 + \psi^2(t) + \psi^6(t) + \cdots).$$

Es sind aber, wenn man t als eine unabhängige Veränderliche betrachtet und auf den durch die Bedingung

$$|t| \leqq 1$$

definirten Bereich beschränkt, den Werth $t = 1$ jedoch ausschliesst, beide Seiten der vorstehenden Gleichung eindeutige und continuirliche analytische Functionen von t, weil für jeden der betrachteten Werthe dieser Grösse

$$|\psi(t)| < 1$$

ist. Nach einem bekannten Satze besteht also die Gleichung für jeden dem angegebenen Bereiche angehörigen Werth von t. Es lässt sich ferner zeigen, dass $\vartheta_3(0, q)$ auch für einen complexen Werth von q nicht verschwinden kann, und zwar in derselben Weise, wie oben unter der Voraussetzung, dass q eine positive Grösse sei, für die Function $\vartheta(0, q)$ bewiesen worden ist, dass sie nicht gleich Null werden kann.

Hiermit ist nun bewiesen:

Ist t eine (reelle oder complexe) Grösse, deren absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, und die auch nicht gleich 1 ist, so wird die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4 = t$$

befriedigt, wenn man

$$q = \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1}$$

setzt.

Wenn also der Modul (k) der elliptischen Functionen seinem absoluten Betrage nach die Einheit nicht übersteigt und sein Quadrat nicht gleich 1 ist, so gelten die unter (3.) aufgestellten Ausdrücke von

$$\sin \operatorname{am}(u, k), \quad \cos \operatorname{am}(u, k), \quad \Delta \operatorname{am}(u, k),$$

wenn man

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n k^{2n+2}$$

nimmt. Da ferner die elliptischen Functionen eines beliebigen Moduls auf solche, deren Modul den eben angegebenen Bedingungen entspricht, zurückgeführt werden können, so genügt das Vorstehende zu dem Nachweise, dass jede der genannten Functionen als Quotient zweier Thetareihen darstellbar ist.

Weiter unten werde ich aber zeigen, wie man die Reihe

$$\sum \alpha_n t^n$$

in eine für jeden Werth von t convergirende umgestalten kann, und zugleich nachweisen, wie sich mit den hier angewandten Hülfsmitteln auch die Aufgabe lösen lässt, aus einem die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4 = t$$

befriedigenden Werthe von q alle übrigen abzuleiten.

II.

Nach dem, was im Vorhergehenden über den Convergenzbezirk der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

und die Beschaffenheit der Zahlen β_n festgestellt worden ist, besteht die Gleichung (I., (13.)), welche sich in der Form

$$\log t - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n = \frac{1}{4}\left\{\log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^4 - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}\right\}$$

schreiben lässt, sicher für jeden reellen, in dem Intervall $(0 \dots 1)$ enthaltenen Werth von t, indem die Gleichung (I., (10.)), aus welcher sie abgeleitet wurde, nach dem Vorangehenden für jeden der Bedingung $0 \leqq q < 1$ entsprechenden reellen Werth von q gilt, und für $t = 1$ in Folge der

Gleichungen

$$|\beta_n| = \beta_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \log 16$$

beide Seiten gleich Null werden. Setzt man also

$$e^{-\frac{1}{4}\log 16 + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n,$$

wo dann die Coefficienten γ_n gleich den α_n sämmtlich positive rationale Zahlen sind und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n = 1$ ist, so hat man

$$\psi(t) = t\left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n\right)^4 \tag{1.}$$

und zugleich

$$\psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}. \tag{2.}$$

Die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber für **jeden** (reellen oder complexen) Werth der Grösse t convergent und stellt eine analytische Function derselben dar, wenn man von den vier Werthen, die man für jeden bestimmten Werth von t der Potenz $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ beilegen kann, einen so, wie folgt, fixirt.

Schliesst man von dem Gebiet einer unbeschränkt veränderlichen Grösse x die negativen reellen Werthe derselben, sowie auch die Stellen $0, \infty$ aus, so giebt es unter den unendlich vielen Werthen, die der natürliche Logarithmus von x für einen bestimmten Werth dieser Grösse annehmen kann, immer einen, dessen zweite Coordinate zwischen

$$-\pi \text{ und } +\pi$$

liegt. Dieser Werth des Logarithmus soll im Folgenden überall unter $\log x$ verstanden werden; er ist innerhalb des definirten Bereichs der Veränderlichen x eine eindeutige analytische Function derselben, indem sich, wenn x' irgend eine bestimmte Stelle des Bereichs ist, eine Umgebung derselben angeben lässt, innerhalb welcher die Reihe

$$\log x' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-x'}{x'}\right)^n \tag{3.}$$

einen solchen Werth des natürlichen Logarithmus von x darstellt, dessen zweite Coordinate gleich der von $\log x'$ zwischen $-\pi$ und π liegt. Daraus ergiebt sich insbesondere, dass

$$(4.)\qquad \log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

ist, wenn man die Grösse x auf den durch die Bedingung

$$|x-1| < 1$$

definirten Bereich beschränkt. Denn innerhalb dieses Bereichs sind die einander gleich gesetzten Ausdrücke beide eindeutige analytische Functionen von x; die Gleichung gilt daher für den ganzen Bereich, da sie nach dem eben Bemerkten für eine gewisse Umgebung der Stelle 1 besteht.

Wenn ferner x_0 eine bestimmte negative Grösse ist, so ist für die einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 angehörigen Werthe von x die zweite Coordinate der Grösse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n$$

negativ oder positiv, je nachdem die zweite Coordinate von $x-x_0$ positiv oder negativ ist; man hat daher im ersten Falle

$$(5.)\qquad \log x = \log(-x_0) + \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n,$$

im zweiten dagegen

$$(6.)\qquad \log x = \log(-x_0) - \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n.$$

Hiernach kommt, wenn x der Stelle x_0 sich nähert, je nachdem dies von der positiven oder der negativen Seite der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ her geschieht, $\log x$ der Grenze $\log(-x_0)+\pi i$ oder der Grenze $\log(-x_0)-\pi i$ unendlich nahe. Bezeichnet man die durch die Formeln

$$\log(-x_0)+\pi i, \quad \log(-x_0)-\pi i$$

gegebenen Werthe von $\log x_0$ beziehlich mit

$$\log \overset{+}{x}_0 \text{ und } \log \overset{-}{x}_0,$$

wo dann

$$(7.)\qquad \log \overset{+}{x}_0 = \log \overset{-}{x}_0 + 2\pi i$$

ist, so hat man also nach dem Vorstehenden für die einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 angehörigen Werthe von x

$$\log x = \log \overset{\pm}{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n, \tag{8.}$$

wo das obere oder untere Zeichen über x_0 gilt, je nachdem die zweite Coordinate von $x-x_0$ positiv oder negativ ist.

Aus der Definition von $\log \overset{+}{x}_0$, $\log \overset{-}{x}_0$ erhellt übrigens, dass beide Grössen innerhalb der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ stetige Functionen von x_0 sind.

Definirt man ferner, für die betrachteten Werthe von x und für einen beliebigen Exponenten m, die Potenz x^m durch die Gleichung

$$x^m = e^{m \log x}, \tag{9.}$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (3.), (4.) beziehlich die folgenden:

$$x^m = x'^m . \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x-x'}{x'}\right)^n, \quad \left((m)_n = \frac{(m,-1)^n}{(1,+1)^n}\right), \tag{10.}$$

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n (x-1)^n; \tag{11.}$$

es ist also auch x^m eine eindeutige analytische Function von x.

Aus den Gleichungen (7.), (8.) aber erhält man, wenn man für eine negative Grösse x_0

$$\left\{\begin{aligned} (\overset{+}{x}_0)^m &= e^{m\pi i}(-x_0)^m \\ (\overset{-}{x}_0)^m &= e^{-m\pi i}(-x_0)^m \end{aligned}\right. \tag{12.}$$

setzt,

$$(\overset{+}{x}_0)^m = e^{2m\pi i}(\overset{-}{x}_0)^m, \tag{13.}$$

$$x^m = (\overset{\pm}{x}_0)^m . \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n, \tag{14.}$$

wo das obere oder das untere Zeichen über x_0 gilt, je nachdem die zweite Coordinate von $x-x_0$ positiv oder negativ ist. Der Bereich von x, innerhalb dessen die Gleichungen (10.), (11.), (14.) gelten, ist derselbe wie bei den entsprechenden Gleichungen (3.), (4.), (8.).

Endlich erhellt aus der Definition der Grössen

$$(\overset{+}{x}_0)^m, \quad (\overset{-}{x}_0)^m,$$

dass beide innerhalb der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ stetige Functionen von x_0 sind.

Nach dem Vorstehenden ist, wenn man jetzt unter t eine unbeschränkt veränderliche Grösse versteht,

$$(1-t)^{\frac{1}{4}}$$

eine Function, welche für jeden der Strecke $(1 \cdots +\infty)$ nicht angehörigen Werth von t eindeutig definirt ist, während sie zwei Werthe hat, wenn t in der genannten Strecke angenommen wird. Setzt man, die Werthe $t = 1$ und $t = \infty$ ausschliessend und mit ϱ, σ reelle Grössen bezeichnend,

$$\log(1-t) = \varrho + \sigma i,$$

so hat man

$$(1-t)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\varrho}(\cos\tfrac{1}{4}\sigma + i\sin\tfrac{1}{4}\sigma)$$

und daher, da σ in dem Intervall $(-\pi \cdots +\pi)$ liegt,

$$\left|1+(1-t)^{\frac{1}{4}}\right|^2 - \left|1-(1-t)^{\frac{1}{4}}\right|^2 = 4e^{\frac{1}{4}\varrho}\cos\tfrac{1}{4}\sigma > 0.$$

Daraus folgt, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

stets kleiner als 1, und demgemäss die Reihe auf der Rechten der Gleichung (2.) für jeden Werth von t unbedingt convergent ist. Das Letztere gilt selbst noch, wenn man der Grösse t einen der ausgeschlossenen Werthe giebt, indem $\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ für $t = 1$ den Werth 1, und für $t = \infty$ den Werth -1 hat.

Hiernach ist, wenn man nunmehr $\psi(t)$ durch die Gleichung

$$\psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

definirt, $\psi(t)$ eine Function, welche ebenso wie $\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ nur für die zwischen 1 und $+\infty$ liegenden reellen Werthe von t zwei Werthe hat, für jeden andern Werth von t aber eindeutig bestimmt ist. Dabei ist zu beachten, dass die beiden Werthe von $\psi(t)$, die zu einem zwischen 1 und $+\infty$ liegenden reellen Werthe von t gehören, conjugirte complexe Grössen sind, wie sich aus den Gleichungen (12.) unmittelbar ergiebt.

Aus dem eben in Betreff der Function $\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ Bewiesenen ergiebt sich ferner, dass $\psi(1)=1$, $\psi(\infty)=-1$, für jeden von $1, \infty$ verschiedenen Werth der Grösse t aber

$$|\psi(t)| < \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n,$$

also

$$|\psi(t)| < 1$$

ist.

Schliesst man vom Gebiete der Veränderlichen t die der Strecke $(1\cdots+\infty)$ angehörigen Stellen aus, so ist nach dem Vorstehenden nicht nur $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ eine eindeutige analytische Function, sondern dasselbe gilt auch von den Functionen

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}, \quad \psi(t), \quad \vartheta_2^4(0, \psi(t)), \quad \vartheta_3^4(0, \psi(t)),$$

und es besteht also die Gleichung (I., (27.))

$$\vartheta_2^4(0, \psi(t)) = t\,\vartheta_3^4(0, \psi(t)),$$

deren Richtigkeit für die zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werthe von t nachgewiesen worden ist, für jeden der jetzt betrachteten Werthe dieser Grösse.

Ist ferner t_1 ein zwischen 1 und $+\infty$ liegender reeller Werth von t und setzt man, unter $\varkappa$ eine positive Veränderliche verstehend,

$$\psi(\overset{+}{t}_1) = \operatorname*{Lim}_{\varkappa=0} \psi(t_1+\varkappa i), \qquad \psi(\overset{-}{t}_1) = \operatorname*{Lim}_{\varkappa=0} \psi(t_1-\varkappa i),$$

so sind $\psi(\overset{+}{t}_1)$, $\psi(\overset{-}{t}_1)$ die beiden Werthe von $\psi(t)$ für $t=t_1$. Da nun $\psi(t_1+\varkappa i)$, $\psi(t_1-\varkappa i)$ sich stetig mit $\varkappa$ ändern, und die absoluten Beträge von $\psi(\overset{+}{t}_1)$, $\psi(\overset{-}{t}_1)$ beide kleiner als 1 sind, so erhellt, dass die vorstehende Gleichung auch noch für $t=t_1$ gilt, welchen von ihren beiden Werthen man auch der Grösse $\psi(t_1)$ geben mag.

Damit ist nun bewiesen:

Wird die Function $\psi(t)$ so, wie im Vorstehenden angegeben worden, definirt, so erhält man für jeden Werth der Veränderlichen t, mit Ausschluss von $t=1$ und $t=\infty$, einen die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t$$

befriedigenden Werth der Grösse q, wenn man

$$q = \psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

setzt, wobei man, wenn t einen zwischen 1 und $+\infty$ enthaltenen reellen Werth hat, sowohl den einen als den andern der zugehörigen Werthe von $\psi(t)$ nehmen kann.

Die Coefficienten γ_n können entweder auf die im Vorhergehenden angegebene Weise oder auch durch folgendes Verfahren berechnet werden.

Nach dem eben bewiesenen Satze ist, wenn man

$$t^{\frac{1}{4}} = \xi, \qquad \psi(t)^{\frac{1}{4}} = \eta$$

setzt,

$$2\eta\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta^{4\nu(\nu+1)}\right) = \xi\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}2\eta^{4\nu\nu}\right)$$

oder

$$\eta = \frac{\xi}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\xi\eta^{4\nu\nu}-\eta^{(2\nu+1)(2\nu+1)}).$$

Ferner ist nach der oben unter (1.) gegebenen Formel für die dort betrachteten Werthe von t

$$\eta = \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\xi^{4m+1}.$$

Hieraus ergiebt sich $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ und, wenn man

$$\eta_n = \sum_{m=0}^{n}\gamma_m\xi^{4m+1} \qquad (n=0,1,\ldots\infty)$$

setzt,

$$\gamma_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty}[\xi\eta_n^{4\nu\nu}-\eta_n^{(2\nu+1)(2\nu+1)}]_{\xi^{4n+5}},$$

wobei von der Summe nur diejenigen Glieder in Betracht kommen, in denen

$\nu^2 \leqq n+1$ ist. Mittels dieser Formel erhält man

$$\gamma_1 = \frac{2}{2^5}, \quad \gamma_2 = \frac{15}{2^9}, \quad \gamma_3 = \frac{150}{2^{13}} \quad \text{u. s. w.*)}$$

III.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie man sämmtliche Werthe von q findet, die für einen und denselben Werth von t die Gleichung

$$(1.) \qquad \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t$$

befriedigen. Dazu ist erforderlich, dass man für jede ϑ-Function alle Werthe des Arguments kenne, für welche dieselbe bei einem gegebenen Werth von q verschwindet. Diese Werthe lassen sich sowohl durch Umwandlung der ϑ-Reihen in unendliche Producte (wozu die in den »Fund. nov.« hergeleitete identische Gleichung

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu\nu} z^{\nu}$$

dient) als auch, wenn man nur die von Jacobi in der mehrgenannten Abhandlung entwickelten Sätze benutzen will, auf folgende Weise finden.

Aus der Gleichung**)

$$\frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\vartheta_1(x-y)}{\vartheta_1(x+y)} = \frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta^2(x)}{\vartheta(y)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y)},$$

welche sich im ersten Bande der Jacobi'schen Werke auf S. 536 unter ((I.), (4.))

---

*) Die Formel

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n+1}$$

habe ich seit vielen Jahren in meinen Vorlesungen über die elliptischen Functionen gegeben, aber auf eine andere Art wie hier abgeleitet. Wendet man von ihr nur die r ersten Glieder an, so ist der Fehler, den man begeht, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\left(1-\sum_{n=0}^{r-1}\gamma_n\right)\cdot\left|\frac{1-(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}\right|^{4r+1}.$$

Vgl. die »Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen« von H. A. Schwarz, S. 56.

**) Bei den folgenden Formeln ist vorausgesetzt, dass in allen vorkommenden ϑ-Functionen die Grösse q denselben Werth habe.

findet, ergiebt sich, wenn man beide Seiten nach Potenzen von y entwickelt, durch Vergleichung der Anfangsglieder

$$(2.)\qquad \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{d^2 \log \vartheta_1(x)}{dx^2} = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta^2(x)}{\vartheta(0)\,\vartheta_1^2(x)}.$$

Ist nun ω irgend ein Werth, für den $\vartheta_1(\omega) = 0$ ist, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dass der Quotient $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}$ für $x = \omega$ jedenfalls verschwindet, während aus den Gleichungen (2.), (4.) auf S. 511 a. a. O. erhellt, dass $\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$, $\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ für $x = \omega$ von Null verschiedene, endliche Werthe haben. Aus der Formel für $\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)}$ (S. 513 a. a. O.) ergiebt sich hiernach

$$\frac{\vartheta_1(x+\omega)}{\vartheta(x+\omega)} = \pm \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)},$$

und man hat also

$$\frac{d^2 \log \vartheta_1(x+\omega)}{dx^2} = \frac{d^2 \log \vartheta_1(x)}{dx^2},$$

woraus

$$(3.)\qquad \vartheta_1(x+\omega) = Ce^{-2\nu x i}\,\vartheta_1(x)$$

folgt, wo C, ν von x unabhängige Grössen bezeichnen.

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) auf S. 502 a. a. O. erhält man

$$(4.)\qquad \vartheta_1(x+\pi) = -\vartheta_1(x), \qquad \vartheta_1(x - i\log q) = -q^{-1}e^{-2xi}\,\vartheta_1(x);$$

setzt man also in (3.) $x+\pi$, $x-i\log q$, und in (4.) $x+\omega$ für x, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x+\omega+\pi) &= -e^{-2\nu\pi i}\,.\,Ce^{-2\nu x i}\,\vartheta_1(x),\\
\vartheta_1(x+\omega+\pi) &= -Ce^{-2\nu x i}\,\vartheta_1(x),\\
\vartheta_1(x+\omega-i\log q) &= -e^{-2\nu\log q}\,.\,q^{-1}Ce^{-2(\nu+1)xi}\,\vartheta_1(x),\\
\vartheta_1(x+\omega-i\log q) &= -e^{-2\omega i}\,.\,q^{-1}Ce^{-2(\nu+1)xi}\,\vartheta_1(x).
\end{aligned}$$

Es muss also sein

$$e^{-2\nu\pi i} = 1, \qquad e^{-2\omega i} = e^{-2\nu\log q},$$

und somit

$$(5.)\qquad \omega = \mu\pi - \nu i \log q,$$

wo μ, ν ganze Zahlen bedeuten. Umgekehrt ist, wie aus den Gleichungen (4.) leicht abgeleitet werden kann, stets

$$\vartheta_1(\mu\pi - i\nu\log q) = 0,$$

wenn μ, ν beliebige ganze Zahlen sind.

Aus der Gleichung

$$\vartheta_1(\omega + x) = Ce^{-2\nu x i}\vartheta_1(x)$$

ist ersichtlich, dass $\vartheta_1'(\omega)$ nicht gleich Null ist, die Gleichung $\vartheta_1(x) = 0$ also nur einfache Wurzeln hat. Da ferner

$$\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta_1\left(x - \frac{i}{2}\log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\vartheta(x),$$

$$\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi - \frac{i}{2}\log q\right) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\vartheta_3(x),$$

so werden sämmtliche Wurzeln der Gleichungen

$$\vartheta_2(x) = 0, \qquad \vartheta(x) = 0, \qquad \vartheta_3(x) = 0$$

beziehlich durch die Formeln

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - i\nu\log q, \qquad \mu\pi - i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log q, \qquad \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi - i\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\log q$$

gegeben, und es hat jede dieser Gleichungen ebenfalls nur einfache Wurzeln. Der Werth von $\log q$ kann in den vorstehenden Formeln beliebig fixirt werden.

Setzt man nun

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u}{\vartheta_3^2(0, q)} \\ f(u, q) &= \frac{\vartheta_3(0, q)}{\vartheta_2(0, q)}\frac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ f_1(u, q) &= \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_2(0, q)}\frac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ f_2(u, q) &= \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\frac{\vartheta_3(x, q)}{\vartheta(x, q)}, \end{aligned}\right.$$

so sind $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$ eindeutige Functionen der Grössen u und q, und es bestehen für dieselben, wenn man

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4$$

setzt, nach den Formeln (18.), (23.) auf S. 515, 517 a. a. O. die folgenden Gleichungen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(u,q)}{\partial u} = f_1(u,q) f_2(u,q), & \dfrac{\partial f_1(u,q)}{\partial u} = -f(u,q) f_2(u,q), & \dfrac{\partial f_2(u,q)}{\partial u} = -t f(u,q) f_1(u,q), \\ f(0,q) = 0, & f_1(0,q) = 1, & f_2(0,q) = 1. \end{cases}$$

Beschränkt man die Veränderliche u auf eine gewisse Umgebung der Stelle 0, so können $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$ in der Form gewöhnlicher Potenzreihen dargestellt werden. Die Coefficienten dieser Reihen ergeben sich aus den Gleichungen (7.), und zwar als ganze rationale Functionen der Grösse t, in denen die Coefficienten rationale Zahlen sind. Wenn es daher zwei Grössen q, q_1 giebt, zu denen derselbe Werth von t gehört, so erhält man für $f(u,q_1), f_1(u,q_1), f_2(u,q_1)$ dieselben Reihen wie für $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$, woraus sich in bekannter Weise folgern lässt, dass für jeden endlichen Werth von u die Gleichungen

$$(8.)\quad f(u,q_1) = f(u,q), \qquad f_1(u,q_1) = f_1(u,q), \qquad f_2(u,q_1) = f_2(u,q)$$

gelten.

Nun wird nach dem Vorhergehenden

$$(9.)\quad \begin{cases} f(u,q) = 0 \text{ für } u = (\mu\pi - \nu i \log q)\,\vartheta_3^2(0,q) \\ f_1(u,q) = 0 \text{ für } u = \left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi - \nu i \log q\right)\vartheta_3^2(0,q) \\ \dfrac{1}{f(u,q)} = 0 \text{ für } u = \left(\mu\pi - \left(\nu+\frac{1}{2}\right) i \log q\right)\vartheta_3^2(0,q) \\ f_2(u,q) = 0 \text{ für } u = \left(\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi - \left(\nu+\frac{1}{2}\right) i \log q\right)\vartheta_3^2(0,q), \end{cases}$$

wenn unter μ, ν beliebig anzunehmende ganze Zahlen verstanden werden. Zugleich gilt, dass jede der vorstehenden vier Functionen nur für die angegebenen Werthe von u verschwindet.

In Folge der Gleichungen $f_1(u,q) = f_1(u,q_1)$, $f(u,q) = f(u,q_1)$ wird nun

$$f_1(u,q) = 0 \text{ auch für } u = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0,q_1)$$

und

$$\frac{1}{f(u,q)} = 0 \text{ auch für } u = -\frac{i}{2}\vartheta_3^2(0,q_1)\log q_1;$$

es müssen sich also vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen lassen, dass

$$(10.)\quad \begin{cases} \pi\vartheta_3^2(0,q_1) = \vartheta_3^2(0,q).((2\alpha+1)\pi-2\beta i\log q) \\ -i\vartheta_3^2(0,q_1)\log q_1 = \vartheta_3^2(0,q).(2\gamma\pi-(2\delta+1)i\log q) \end{cases}$$

ist. Aber ebenso muss es vier ganze Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ geben, für welche die Gleichungen

$$(11.)\quad \begin{cases} \pi\vartheta_3^2(0,q) = \vartheta_3^2(0,q_1).((2\alpha'+1)\pi-2\beta' i\log q_1) \\ -i\vartheta_3^2(0,q)\log q = \vartheta_3^2(0,q_1).(2\gamma'\pi-(2\delta'+1)i\log q_1) \end{cases}$$

gelten. Aus diesen vier Gleichungen ergiebt sich, wenn man

$$\varepsilon = (2\alpha'+1)(2\delta'+1)-4\beta'\gamma'$$

setzt,

$$\vartheta_3^2(0,q)\cdot\left(\left(2\alpha+1-\frac{2\delta'+1}{\varepsilon}\right)\pi-\left(2\beta+\frac{2\beta'}{\varepsilon}\right)i\log q\right) = 0,$$

$$\vartheta_3^2(0,q).\left(\left(2\gamma+\frac{2\gamma'}{\varepsilon}\right)\pi-\left(2\delta+1-\frac{2\alpha'+1}{\varepsilon}\right)i\log q\right) = 0;$$

diese Gleichungen können aber, da $\vartheta_3(0,q)$ und der reelle Theil von $\log q$ stets von Null verschiedene Werthe haben, nur bestehen, wenn

$$2\alpha+1 = \frac{2\delta'+1}{\varepsilon},\qquad 2\beta = -\frac{2\beta'}{\varepsilon},\qquad 2\gamma = -\frac{2\gamma'}{\varepsilon},\qquad 2\delta+1 = \frac{2\alpha'+1}{\varepsilon}$$

ist; folglich muss

$$(2\alpha+1)(2\delta+1)-4\beta\gamma = \frac{1}{\varepsilon},$$

also

$$\varepsilon = \pm 1,\qquad (2\alpha+1)(2\delta+1)-4\beta\gamma = \pm 1$$

sein.

Aus (11.) ergiebt sich nun

$$(12.)\quad \frac{1}{\pi i}\log q_1 = \frac{2\gamma+\frac{2\delta+1}{\pi i}\log q}{2\alpha+1+\frac{2\beta}{\pi i}\log q}.$$

Damit q, q_1 dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 seien, ist erforderlich, dass die zweite Coordinate von $\frac{1}{\pi i}\log q$ sowohl als von $\frac{1}{\pi i}\log q_1$ positiv ist, und das Letztere findet in Folge des Ersteren nur statt, wenn

$$(2\alpha+1)(2\delta+1)-4\beta\gamma$$

einen positiven Werth hat. Es muss also

$$(13.)\qquad (2\alpha+1)(2\delta+1)-4\beta\gamma = 1$$

sein.

Nimmt man nun $q = \psi(t)$, so ist durch das Vorstehende bewiesen:

Bedeuten α, β, γ, δ ganze Zahlen, unter denen die Relation (13.) besteht, so sind alle für einen gegebenen Werth von t die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t$$

befriedigenden Werthe von q in der Formel

$$e^{\frac{2\gamma\pi i+(2\delta+1)\log\psi(t)}{(2\alpha+1)\pi i+2\beta\log\psi(t)}\cdot\pi i}$$

enthalten. Dabei sind jedoch die Werthe $t = 0, 1, \infty$ auszuschliessen.

Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob man durch diese Formel, wenn man in ihr für α, β, γ, δ beliebige, der angegebenen Bedingung genügende ganze Zahlen setzt, stets einen die in Rede stehende Gleichung befriedigenden Werth von q erhält. Dass dies wirklich der Fall ist, lässt sich leicht durch die Theorie der sogenannten linearen Transformation der ϑ-Functionen begründen, kann aber auch bloss mit Heranziehung der Formeln, mittels welcher sich die elliptischen Functionen des Arguments ui und des Moduls k auf die Functionen des Arguments u und des Moduls $k' = \sqrt{1-k^2}$ zurückführen lassen, nachgewiesen werden. Dies will ich im Folgenden ausführen.

IV.

Mit Zuhülfenahme der aus den Gleichungen (III., (6.)) und aus den in der Jacobi'schen Abhandlung auf S. 511 unter (D.) zusammengestellten Formeln sich ergebenden Relationen

$$f_1^2(u,q)+f^2(u,q) = 1,$$
$$f_2^2(u,q)+tf^2(u,q) = 1 \qquad \left(t = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4\right)$$

leitet man aus den Gleichungen (III., (7.)) die folgenden ab:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f(u,q)}{f_1(u,q)} = \frac{f_2(u,q)}{f_1^2(u,q)},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{f_1(u,q)} = \frac{f(u,q)f_2(u,q)}{f_1^2(u,q)},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_2(u,q)}{f_1(u,q)} = (1-t)\frac{f(u,q)}{f_1^2(u,q)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen ui für u, q' für q und bestimmt q' so, dass

$$1 = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 + \left(\frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta_3(0,q')}\right)^4$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f(ui,q')}{if_1(ui,q')} = \frac{1}{f_1(ui,q')}\cdot\frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{f_1(ui,q')} = -\frac{f(ui,q')}{if_1(ui,q')}\cdot\frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')} = -\frac{t}{f_1(ui,q')}\cdot\frac{f(ui,q')}{if_1(ui,q')},$$

wo die Grösse t dieselbe Bedeutung hat, wie in den Gleichungen (III., (7.)), so dass also diese bestehen bleiben, wenn man in ihnen an die Stelle von

$$f(u,q),\quad f_1(u,q),\quad f_2(u,q)$$

beziehlich

$$\frac{f(ui,q')}{if_1(ui,q')},\quad \frac{1}{f_1(ui,q')},\quad \frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')}$$

setzt. Daraus folgt, wenn man die Schlüsse wiederholt, mittels welcher im Vorhergehenden die Gleichungen (III., (8.)) begründet worden sind, dass die letzteren Functionen mit den ersteren identisch sind. Man hat also

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} f(u,q) &= \frac{f(ui,q')}{if_1(ui,q')} \\ f_1(u,q) &= \frac{1}{f_1(ui,q')} \\ f_2(u,q) &= \frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')}, \end{aligned}\right.$$

wenn die Grössen q, q' durch die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4+\left(\frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta_3(0,q')}\right)^4 = 1 \tag{2.}$$

mit einander verbunden sind.

Es möge jetzt unter t wieder eine unabhängige Veränderliche verstanden, und die Function, in welche $\vartheta_3^2(0,q)$ durch die Substitution $q=\psi(t)$ übergeht, mit $F(t)$ bezeichnet werden. Dann ist, wie aus den Formeln (III., (9.)) erhellt, wenn man der Grösse t irgend einen reellen, zwischen 0 und 1 enthaltenen Werth giebt und $q=\psi(t)$, $q'=\psi(1-t)$ nimmt, der kleinste positive Werth der Grösse u, für den $f(u,q)=0$ ist, gleich $\pi F(t)$, und der kleinste positive Werth derselben Grösse, für den $f(ui,q')$ verschwindet, gleich $-F(1-t)\log\psi(1-t)$; und es besteht also in Folge der Relationen (1.) die Gleichung

$$\pi F(t) = -F(1-t)\log\psi(1-t), \tag{3.}$$

aus der dann, wenn man $1-t$ für t setzt,

$$\pi F(1-t) = -F(t)\log\psi(t), \tag{4.}$$

$$\log\psi(t)\log\psi(1-t) = \pi^2 \tag{5.}$$

folgt.

Jetzt bedeute τ eine Grösse, welcher nur solche complexe Werthe, deren zweite Coordinate positiv ist, beigelegt werden sollen. Ferner mögen (wie es in den »Formeln und Lehrsätzen« geschehen ist) die Functionen, in welche

$$\vartheta(x,q),\quad \vartheta_1(x,q),\quad \vartheta_2(x,q),\quad \vartheta_3(x,q)$$

durch die Substitutionen

$$x = v\pi,\qquad q = e^{\tau\pi i},\qquad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$$

übergehen, beziehlich mit

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau),\quad \vartheta_1(v\,|\,\tau),\quad \vartheta_2(v\,|\,\tau),\quad \vartheta_3(v\,|\,\tau)$$

bezeichnet werden. Dann ist jede der letzteren Functionen eine eindeutige analytische Function der von einander unabhängigen Veränderlichen v, τ, wofern man das Gebiet von τ so, wie angegeben worden, beschränkt, während v jeden Werth, mit Ausnahme von ∞, annehmen kann.

Man gebe nun der Grösse τ zunächst irgend einen Werth, dessen erste Coordinate gleich Null ist, so dass $\frac{\tau}{i}$ einen reellen, zwischen 0 und $+\infty$ enthaltenen Werth hat und somit, wenn man

$$q = e^{\tau\pi i}, \qquad t = \left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4 = \left(\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}\right)^4$$

setzt, t, q beide reell und zwischen 0 und 1 gelegen sind. Daraus folgt $\tau\pi i = \log\psi(t)$, weil einem reellen, zwischen 0 und 1 enthaltenen Werthe von t, wie in (I.) gezeigt worden ist, nur ein demselben Intervall angehöriger Werth q und diesem nur ein Werth von τ, für den $\frac{\tau}{i}$ reell ist, entspricht. Setzt man nun $\tau'\pi i = \log\psi(1-t)$, so ist nach Gleichung (5.) $\tau\tau' = -1$ und nach Gleichung (4.)

$$\vartheta_3^2(0\,|\,\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta_3^2\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right).$$

Ferner hat man

$$\left(\frac{\vartheta_2\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right)}\right)^4 = 1-\frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)} = \frac{\vartheta_0^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)},$$

also

$$\vartheta_0^4(0\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2 \vartheta_2^4\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right),$$

und somit auch

$$\vartheta_2^4(0\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2 \vartheta_0^4\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right).$$

Da nun $\frac{i}{\tau}$, $\vartheta_0(0\,|\,\tau)$, $\vartheta_0\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right)$ u. s. w. sämmtlich positive Grössen sind, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} \vartheta_0(0\,|\,\tau) &= \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_2\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right) \\ \vartheta_2(0\,|\,\tau) &= \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_0\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right) \\ \vartheta_3(0\,|\,\tau) &= \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_3\left(0\,|-\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sind hergeleitet unter der Voraussetzung, dass $\frac{\tau}{i}$ einen zwischen 0 und $+\infty$ enthaltenen reellen Werth habe. Da aber alle vorkommenden Functionen eindeutige analytische Functionen von τ sind, wenn der Werth von $\left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$ so, wie in (II.) angegeben worden, fixirt wird, so ist durch das Vorstehende die Richtigkeit der Gleichung für jeden Werth, den τ annehmen kann, bewiesen.

Aus den Ausdrücken der ϑ-Functionen ergeben sich ferner unmittelbar die folgenden Relationen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0\,|\,\tau) = \vartheta_3(0\,|\,\tau+1) \\ \vartheta_2(0\,|\,\tau) = i^{-\frac{1}{2}}\,\vartheta_2(0\,|\,\tau+1) \\ \vartheta_3(0\,|\,\tau) = \vartheta_0(0\,|\,\tau+1). \end{cases}$$

Aus (7.) erhält man nun weiter:

$$(8.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0\,|\,\tau) = \vartheta_0(0\,|\,\tau+2) \\ \vartheta_2(0\,|\,\tau) = -i\vartheta_2(0\,|\,\tau+2) \\ \vartheta_3(0\,|\,\tau) = \vartheta_3(0\,|\,\tau+2). \end{cases}$$

Ferner aus (6.), wenn man die ϑ-Functionen auf der rechten Seite zunächst in Functionen von $\left(-\frac{1}{\tau}-2\right)$ und diese dann in Functionen von $\frac{\tau}{1+2\tau}$ verwandelt,

$$(9.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0\,|\,\tau) = i\left(\frac{1}{1+2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_0\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{1+2\tau}\right) \\ \vartheta_2(0\,|\,\tau) = \left(\frac{1}{1+2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{1+2\tau}\right) \\ \vartheta_3(0\,|\,\tau) = \left(\frac{1}{1+2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{1+2\tau}\right). \end{cases}$$

Setzt man für τ in (8.) $\tau-2$ und in (9.) $\frac{\tau}{1-2\tau}$, so ergiebt sich weiter:

$$(10.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0\,|\,\tau) = \vartheta_0(0\,|\,\tau-2) \\ \vartheta_2(0\,|\,\tau) = i\vartheta_2(0\,|\,\tau-2) \\ \vartheta_3(0\,|\,\tau) = \vartheta_3(0\,|\,\tau-2); \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0\,|\,\tau) = -i\left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_0\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{1-2\tau}\right) \\ \vartheta_2(0\,|\,\tau) = \left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{1-2\tau}\right) \\ \vartheta_3(0\,|\,\tau) = \left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{1-2\tau}\right). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen (7.) bis (11.) leitet man nun die folgenden ab, in denen g, h beliebige ganze Zahlen bedeuten:

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = i^{-g}\cdot\dfrac{\vartheta_2(0\,|\,\tau+2g)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau+2g)}, & \dfrac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \dfrac{\vartheta_0(0\,|\,\tau+2g)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau+2g)}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \dfrac{\vartheta_2\left(0\,\Big|\,\dfrac{\tau}{1+2h\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\,\Big|\,\dfrac{\tau}{1+2h\tau}\right)}, & \dfrac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = i^{h}\cdot\dfrac{\vartheta_0\left(0\,\Big|\,\dfrac{\tau}{1+2h\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\,\Big|\,\dfrac{\tau}{1+2h\tau}\right)}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = i^{-g}\cdot\dfrac{\vartheta_2\left(0\,\Big|\,\dfrac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\,\Big|\,\dfrac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}, & \dfrac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = i^{h}\cdot\dfrac{\vartheta_0\left(0\,\Big|\,\dfrac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\,\Big|\,\dfrac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right)}. \end{cases}$$

Angenommen jetzt, es seien a, b, c, d vier gegebene ganze Zahlen, unter denen die Relation $ad-bc=1$ besteht; b und c seien grade, a und d also ungrade. Man setze in den beiden letzten der vorstehenden Gleichungen

$$\tau_1 = \frac{c+d\tau}{a+b\tau} \text{ für } \tau, \text{ und } -g,\ -h \text{ für } g,\ h;$$

dadurch erhält man, wenn man

$$c_1 = c-2ga,\qquad d_1 = d-2gb,\qquad a_1 = a-2hc_1,\qquad b_1 = b-2hd_1,$$
$$\tau_2 = \frac{c_1+d_1\tau}{a_1+b_1\tau}$$

setzt,

$$\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{g}\cdot\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_2)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_2)},\qquad \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{-h}\cdot\frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_2)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_2)}.$$

Es ist aber, wenn man mit ε diejenige der Zahlen 1, -1 bezeichnet, welcher a mod. 4 congruent ist,

$$\frac{\varepsilon c}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2} \equiv g \pmod{4},$$

ferner, in Folge der Gleichung $ad-bc=1$, $d\equiv a$ (mod. 4) und somit $d_1\equiv d\equiv\varepsilon$,

$$\frac{\varepsilon b}{2} - \frac{\varepsilon b_1}{2} \equiv h \pmod{4}.$$

Folglich hat man

$$(13.)\quad i^{-\frac{\varepsilon c}{2}}\cdot\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_2)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_2)},\qquad i^{\frac{\varepsilon b}{2}}\cdot\frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_2)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_2)}.$$

Zugleich besteht unter den Zahlen a_1, b_1, c_1, d_1 die Gleichung $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$, und es ist

$$a_1 \equiv a \equiv \varepsilon \ (\text{mod. } 4).$$

Hieraus folgt nun sofort weiter:

Setzt man, unter g, h, g_1, h_1, g_2, h_2 u. s. w. beliebig anzunehmende ganze Zahlen verstehend,

$$\begin{array}{llll} c_1 = c - 2ga, & d_1 = d - 2gb, & a_1 = a - 2hc_1, & b_1 = b - 2hd_1, \\ c_2 = c_1 - 2g_1 a_1, & d_2 = d_1 - 2g_1 b_1, & a_2 = a_1 - 2h_1 c_2, & b_2 = b_1 - 2h_1 d_2, \\ c_3 = c_2 - 2g_2 a_2, & d_3 = d_2 - 2g_2 b_2, & a_3 = a_2 - 2h_2 c_3, & b_3 = b_2 - 2h_2 d_3, \end{array}$$

u. s. w.

und

$$\tau_2 = \frac{c_1 + d_1 \tau}{a_1 + b_1 \tau}, \qquad \tau_3 = \frac{c_2 + d_2 \tau}{a_2 + b_2 \tau}, \qquad \tau_4 = \frac{c_3 + d_3 \tau}{a_3 + b_3 \tau} \text{ u. s. w.},$$

so sind $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3 \ldots$ grade, $a_1, d_1, a_2, d_2, a_3, d_3 \ldots$ ungrade Zahlen, unter denen die Gleichungen

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1, \qquad a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1, \qquad a_3 d_3 - b_3 c_3 = 1, \ldots$$

bestehen, und es ist

$$i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_2)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_2)} = i^{-\frac{\varepsilon c_2}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_3)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_3)} = i^{-\frac{\varepsilon c_3}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_4)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_4)} = \cdots,$$

$$i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_2)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_2)} = i^{\frac{\varepsilon b_2}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_3)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_3)} = i^{\frac{\varepsilon b_3}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_4)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_4)} = \cdots.$$

Ist nun b nicht gleich Null, so bestimme man, was immer angeht, die Zahlen g, h so, dass $|d_1| < |b|$, $|b_1| < |d_1|$ und somit

$$|b_1| < |b|$$

wird. Ist dann auch b_1 von Null verschieden, so bestimme man weiter g_1, h_1 so, dass

$$|b_2| < |b_1|,$$

ferner, wenn auch b_2 von Null verschieden ist, g_2, h_2 so, dass

$$|b_3| < |b_2|$$

wird, u. s. f. Auf diese Weise verfahrend gelangt man nothwendig zu einem Ausdruck τ_r, in welchem $b_{r-1} = 0$ ist. In Folge der Gleichung $a_{r-1} d_{r-1} - b_{r-1} c_{r-1} = 1$, und weil $a, a_1, a_2, \dots a_{r-1}$ sämmtlich $\equiv \varepsilon$ (mod. 4) sind, ist dann $a_{r-1} = \varepsilon$, $d_{r-1} = \varepsilon$, $\tau_r = \varepsilon c_{r-1} + \tau$, folglich (nach (12.))

$$i^{-\frac{\varepsilon c_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_r)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_r)} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}, \qquad i^{\frac{\varepsilon b_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_r)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_r)} = \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}.$$

So ergiebt sich schliesslich

$$\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}, \qquad \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}. \tag{14.}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wenn man

$$\tau = \frac{1}{\pi i} \log \psi(t)$$

nimmt,

$$\left(\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)}\right)^4 = t,$$

oder

$$\left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4 = t, \tag{15.}$$

wenn

$$q = e^{\tau_1 \pi i} = e^{\frac{c\pi i + d \log \psi(t)}{a\pi i + b \log \psi(t)} \cdot \pi i} \tag{16.}$$

gesetzt wird. Damit ist das am Schlusse des § III Behauptete bewiesen, und kann nunmehr der dort aufgestellte Satz bestimmter folgendermassen ausgesprochen werden:

Für jeden gegebenen Werth der Veränderlichen t giebt es unendlich viele Werthe der Grösse q, die der Gleichung

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4$$

genügen; dieselben werden sämmtlich durch die Formel

$$q = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1) \log \psi(t)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta \log \psi(t)} \cdot \pi i}$$

geliefert, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten, die der Bedingung

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1$$

genügen müssen, einer weiteren Beschränkung aber nicht unterworfen sind. (Der Werth des Logarithmus von $\psi(t)$ in der vorstehenden Formel kann beliebig fixirt werden.)

V.

Giebt man nun der Grösse q irgend einen der Werthe, die sie nach der vorstehenden Formel annehmen kann, wenn man $t = k^2$ setzt — wobei die singulären Werthe $k^2 = 0, 1, \infty$ auszuschliessen sind —, so hat man

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\vartheta_3(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ \cos\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_2(0, q)} \frac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ \Delta\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} \frac{\vartheta_3(x, q)}{\vartheta(x, q)}, \end{aligned}\right.$$

wo

$$(2.)\qquad x = \frac{u}{\vartheta_3^2(0, q)}.$$

In dieser Form dargestellt erscheinen $\sin\operatorname{am}(u, k)$, $\cos\operatorname{am}(u, k)$, $\Delta\operatorname{am}(u, k)$ als eindeutige Functionen von u und q, indem die in $\vartheta_1(x, q)$, $\vartheta_2(x, q)$, $\vartheta_2(0, q)$ vorkommende Wurzelgrösse $\sqrt[4]{q}$ sich weghebt. Drückt man aber $\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}$, $\frac{\vartheta_0(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}$ durch k^2 aus, so wird

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\operatorname{am}(u, k) &= \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ \cos\operatorname{am}(u, k) &= \frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \frac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ \Delta\operatorname{am}(u, k) &= \sqrt[4]{1-k^2} \cdot \frac{\vartheta_3(x, q)}{\vartheta(x, q)}; \end{aligned}\right.$$

es bleibt jedoch noch zu ermitteln, welche Werthe man den Wurzelgrössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\sqrt[4]{q}$ beizulegen hat. Dazu sind noch einige, die Functionen $\psi(t)$, $\log\psi(t)$ betreffende Erörterungen erforderlich.

Scheidet man von dem Gebiete der Veränderlichen t die der Strecke $(1 \cdots +\infty)$ angehörigen reellen Werthe aus, so ist $\psi(t)$ eine eindeutige und continuirliche Function von t, welche ausserdem, dass ihr absoluter Betrag beständig kleiner als 1 ist, die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Sie hat einen reellen oder imaginären Werth, je nachdem t reell oder imaginär ist.

2. Im ersteren Falle stimmt ihr Zeichen mit dem Zeichen von t überein.

3. Für jeden imaginären Werth von t hat ihre zweite Coordinate dasselbe Zeichen wie die zweite Coordinate von t.

Das Erste ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n+1},$$

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0, \psi(t))}{\vartheta_3(0, \psi(t))}\right)^4 = 16\psi(t)\cdot\left(\frac{1+\psi^2(t)+\psi^6(t)+\cdots}{1+2\psi(t)+2\psi^4(t)+\cdots}\right)^4,$$

von denen die erste zeigt, dass $\psi(t)$ für die der Strecke $(-\infty \ldots 1)$ angehörigen reellen Werthe von t ebenfalls reell ist, die andere aber lehrt, dass umgekehrt, wenn $\psi(t)$ einen reellen Werth hat, auch t reell ist und somit, unter der gemachten Annahme, zwischen $-\infty$ und 1 liegt. Aus der zweiten Gleichung erhellt ferner die Richtigkeit des unter No. 2 Angegebenen. Das Dritte aber wird so bewiesen.

Für $t = 1+i$ ist $\log(1-t) = -\frac{\pi}{2}i$, also

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{8}i}}{1+e^{-\frac{\pi}{8}i}} = i\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{16},$$

und somit, da die γ_n sämmtlich positive Zahlen sind, $\psi(t)$ gleich dem Producte aus i und einer positiven Grösse. Von dem Werthe $1+i$ aus kann aber t stetig sich ändernd zu jedem anderen complexen Werthe t_1, dessen zweite Coordinate positiv ist, übergehen, ohne dabei einen reellen Werth anzunehmen; die zweite Coordinate von $\psi(t)$ ändert sich bei diesem Übergange stetig mit t, ohne den Werth Null anzunehmen (No. 1) und ist also für $t = t_1$ ebenso wie für $t = 1+i$ positiv. In ganz ähnlicher Weise wird gezeigt, dass $\psi(t)$ für $t = 1-i$ gleich dem Producte aus i und einer negativen Grösse ist, und daraus die Übereinstimmung des Zeichens der zweiten Coordinate von $\psi(t)$ mit dem Zeichen der zweiten Coordinate von t auch in dem Falle, wo die letztere negativ ist, gefolgert. Übrigens ergiebt sich aus der oben festgesetzten Bedeutung von $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ und aus No. 1, dass conjugirten complexen

Werthen von t auch conjugirte complexe Werthe von $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ und von $\psi(t)$ entsprechen, und es daher genügt, die unter No. 3 angegebene Eigenschaft der Function $\psi(t)$ für Werthe von t, deren zweite Coordinate positiv ist, nachzuweisen.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken:

Setzt man

$$\varphi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}},$$

so ist

$$1-t = \left(\frac{1-\varphi(t)}{1+\varphi(t)}\right)^4,$$

und es lässt sich mit Hülfe dieser beiden Gleichungen zeigen, dass der Function $\varphi(t)$ die unter No. 1 bis 3 angegebenen Eigenschaften ebenfalls zukommen; es braucht dazu in der vorstehenden Beweisführung nur überall $\varphi(t)$ statt $\psi(t)$ gesetzt zu werden.

Nach dem Vorstehenden sind nun, wenn man von dem Gebiete der Veränderlichen t auch die der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ angehörigen reellen Werthe ausscheidet, nicht nur $\varphi(t)$, $\psi(t)$, sondern auch

$$\log \varphi(t), \qquad \log \psi(t)$$

eindeutig definirte und continuirliche Functionen von t. Aus der obigen Gleichung (II.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n = e^{-\log 2 + \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n}$$

ergiebt sich aber, wenn man $\varphi^4(t)$ für t setzt,

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)\, e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi^{4n}(t)},$$

und hieraus

$$\log \psi(t) = \log\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi^{4n}(t) + 2m\pi i,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, die innerhalb des jetzt der Grösse t angewiesenen Gebietes, der Stetigkeit der Functionen $\varphi(t)$, $\log(\frac{1}{2}\varphi(t))$, $\log \psi(t)$ wegen, nicht verschiedene Werthe haben kann. Für jeden zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werth von t sind aber die genannten Functionen alle drei reell und somit $m=0$; es gilt also die Gleichung

$$(4.)\qquad \log\psi(t) = \log\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

für jeden der nicht ausgeschlossenen Werthe von t, unter der Bedingung, dass die Werthe der Logarithmen so, wie in (II.) festgesetzt worden ist, bestimmt werden.

Giebt man ferner der Grösse t einen zwischen 1 und $+\infty$ enthaltenen reellen Werth, so bleibt die vorstehende Gleichung gültig, wenn man der Potenz $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ den einen oder den andern der beiden Werthe, die sie alsdann annehmen kann, und zugleich der Function $\psi(t)$ den entsprechenden Werth beilegt.

Für einen negativen reellen Werth von t endlich hat man

$$\lim_{\varkappa=0}\log\psi(t\pm i\varkappa) = \log(-\psi(t))\pm\pi i,\qquad \lim_{\varkappa=0}\log\varphi(t\pm i\varkappa) = \log(-\varphi(t))\pm\pi i$$

(wo $\varkappa$ eine positive Grösse bedeutet), und somit

$$(5.)\qquad \log(-\psi(t)) = \log\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Dies vorausgeschickt, definire man nun die Werthe der Potenzen

$$(k^2)^{\frac{1}{4}},\qquad (1-k^2)^{\frac{1}{4}},\qquad \psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$$

so, wie in (II.) festgesetzt worden ist; dann ergiebt sich, zunächst unter der Voraussetzung, dass weder k^2 noch $1-k^2$ einen der Strecke $(-\infty\ldots 0)$ angehörigen reellen Werth habe, aus den Gleichungen

$$k^2 = \left(\frac{\vartheta_2(0,\psi(k^2))}{\vartheta_3(0,\psi(k^2))}\right)^4,\qquad 1-k^2 = \left(\frac{\vartheta(0,\psi(k^2))}{\vartheta_3(0,\psi(k^2))}\right)^4,$$

wenn man der in $\vartheta_2(0,\psi(k^2))$ vorkommenden Wurzelgrösse $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ den Werth $\psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$ beilegt,

$$(6.)\qquad (k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\vartheta_2(0,\psi(k^2))}{\vartheta_3(0,\psi(k^2))},\qquad (1-k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\vartheta(0,\psi(k^2))}{\vartheta_3(0,\psi(k^2))}.$$

Denn diese Gleichungen bestehen, wenn k^2 eine zwischen 0 und 1 enthaltene Grösse ist; sie gelten also, da $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$, $\vartheta_2(0, \psi(k^2))$, $\vartheta_3(0, \psi(k^2))$, $\vartheta(0, \psi(k^2))$ sämmtlich eindeutige analytische Functionen von k^2 sind, wenn vom Gebiete dieser Grösse die den Strecken $(-\infty \cdots 0)$ und $(1 \cdots +\infty)$ angehörigen reellen Werthe ausgeschlossen werden, auch für jeden complexen Werth von k^2.

Da ferner die zweite Coordinate von $\psi(k^2)$ nach dem Obigen dasselbe Zeichen hat wie die zweite Coordinate von k^2, so nähert sich

$$\log \psi(k^2) - \log(k^2),$$

wenn k^2 einem reellen negativen Werthe unendlich nahe kommt, einer reellen, und somit

$$\frac{\psi(k^2)^{\frac{1}{4}}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

einer positiven Grenze; die erste der Gleichungen (6.) bleibt daher auch für einen negativen Werth von k^2 gültig, unter der Bedingung, dass man nach Fixirung des Werthes von $(k^2)^{\frac{1}{4}}$ der Wurzelgrösse $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ denjenigen ihrer Werthe gebe, für den

$$\frac{\sqrt[4]{\psi(k^2)}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

eine positive Grösse ist. Die zweite der Gleichungen (6.) behält ebenfalls für einen negativen Werth von k^2 ihre Gültigkeit, indem für einen solchen Werth $\psi(k^2)$ reell und daher $\vartheta(0, \psi(k^2))$, $\vartheta_3(0, \psi(k^2))$ ebenso wie $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$ positive Grössen sind.

Für einen zwischen 1 und $+\infty$ liegenden reellen Werth von k^2 endlich bleiben die in Rede stehenden Gleichungen gültig, wenn man nach Fixirung des Werthes von $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$ den zu diesem gehörigen Werth von $\psi(k^2)$ nimmt.

Hiernach bestehen die obigen Gleichungen (3.), wenn man die Werthe der Wurzelgrössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ so fixirt, dass in jeder von ihnen die erste Coordinate positiv und ihrem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die zweite ist,*) ferner

$$q = \psi(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}\right)^{4n+1}$$

setzt und endlich auch den Werth von $\sqrt[4]{q}$ so bestimmt, dass seine erste Coordinate positiv und ihrem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die zweite ist, wobei in dem Falle, wo k^2 und somit auch q einen negativen Werth hat, die Bedingung zu erfüllen ist, dass $\frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{k^2}}$ eine positive Grösse sein muss.

Man setze ferner, unter Beibehaltung der im Vorstehenden bestimmten Werthe der Grössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\psi(k^2)$ und nach Annahme von vier, der Bedingung

$$(2\alpha+1)(2\delta+1)-4\beta\gamma = 1$$

entsprechenden ganzen Zahlen α, β, γ, δ,

$$\tau = \frac{1}{\pi i}\log\psi(k^2), \qquad \tau_1 = \frac{2\gamma+(2\delta+1)\tau}{2\alpha+1+2\beta\tau},$$

$$q = e^{\tau_1 \pi i}, \qquad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4}\tau_1 \pi i};$$

wobei in dem Falle, dass k^2 eine negative Grösse ist, dem $\log\psi(k^2)$ derjenige Werth beigelegt werden muss, für welchen $e^{\frac{1}{4}\log\psi(k^2)}$ gleich dem im Vorhergehenden bestimmten Werth von $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ wird. Dann ist, den Gleichungen (14.) des vorhergehenden Paragraphen zufolge, wenn unter ε diejenige der Zahlen $1, -1$ verstanden wird, der $2\alpha+1$ mod. 4 congruent ist,

$$\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{\varepsilon\gamma}\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}, \qquad \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = i^{-\varepsilon\beta}\cdot\frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}.$$

Man hat daher

$$\text{(8.)} \qquad \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = i^{\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{k^2}, \qquad \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = i^{-\varepsilon\beta}\sqrt[4]{1-k^2},$$

---

*) Dass nach dieser Bestimmung $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dieselben Werthe erhalten wie die Potenzen $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$, folgt unmittelbar aus der in (II.) gegebenen Definition der letzteren.

und die Gleichungen (1.) gestalten sich folgendermassen:

$$(9.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{i^{-\varepsilon\gamma}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\[2ex] \cos\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{i^{-\varepsilon\beta-\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\[2ex] \Delta\operatorname{am}(u,k) = i^{-\varepsilon\beta}\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\[2ex] x = \dfrac{u}{\vartheta_3^2(0,q)} \\[2ex] \sqrt[4]{q} = e^{\frac{2\gamma\pi i+(2\delta+1)\log\psi(k^2)}{(2\alpha+1)\pi i+2\beta\log\psi(k^2)}\cdot\frac{\pi i}{4}}. \end{cases}$$

Hiermit ist die Aufgabe, welche zur Vervollständigung der von Jacobi in der mehrgenannten Abhandlung entwickelten Theorie der elliptischen Functionen noch zu lösen war, im Wesentlichen erledigt. Es bleibt aber noch Eines auszuführen.

Die unendliche Reihe, durch welche die Function $\psi(t)$ ausgedrückt ist, convergirt nur schwach, wenn der absolute Betrag der Grösse $1-t$ klein, also t einen wenig von 1 verschiedenen Werth hat. Es ist daher von wesentlicher Bedeutung, dass sich, wie jetzt gezeigt werden soll, aus der in Rede stehenden Reihe andere Ausdrücke von $\psi(t)$ herleiten lassen, von denen, welchen Werth auch t haben möge, immer einer wenigstens zur Berechnung von $\psi(t)$ sehr wohl sich eignet.

VI.

Unter der Bedingung, dass vom Gebiete der Veränderlichen t die der Strecke $(1\cdots+\infty)$ angehörigen reellen Werthe ausgeschlossen werden, ist $\psi(t)$ nicht nur, wie im vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden, eine eindeutig definirte und continuirliche, sondern auch eine überall regulär sich verhaltende Function.*) Dies erhellt sofort, wenn man beachtet, dass in dem Bereiche, auf den durch die angegebene Bedingung die Veränderlichkeit

*) Ich sage von einer eindeutig definirten Function einer Veränderlichen t, dass sie sich in der Nähe eines bestimmten Werthes t_0 der letzteren regulär verhalte, wenn sie sich für alle einer gewissen Umgebung der Stelle t_0 angehörigen Werthe von t in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe von $t-t_0$ darstellen lässt.

von t beschränkt wird, $\varphi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ eine eindeutig definirte und reguläre Function ist, und dass die Potenzreihe von $\varphi(t)$, durch welche $\psi(t)$ dargestellt wird, in der Nähe jedes bestimmten Werthes von t gleichmässig convergirt.

Scheidet man ferner von dem Gebiete der Grösse t auch die negativen reellen Werthe aus, so kann in dem Bereiche, auf den dann die Veränderlichkeit von t beschränkt ist — derselbe möge mit T' bezeichnet werden —, $\psi(t)$ weder verschwinden noch einen negativen reellen Werth erhalten; es ist also in diesem Bereiche auch $\log\psi(t)$ eine eindeutig definirte und reguläre Function.

Aus dieser Eigenschaft von $\log\psi(t)$ ergiebt sich nun, dass die in (IV.) unter der Voraussetzung, dass t eine zwischen 0 und 1 liegende reelle Grösse sei, begründete Gleichung

$$\log\psi(t)\log\psi(1-t) = \pi^2 \tag{1.}$$

für jeden dem Bereiche T' angehörigen Werth von t Gültigkeit hat.

Da nämlich nicht nur $\log\psi(t)$, sondern auch $\log\psi(1-t)$ in T' überall regulär sich verhält, so lässt sich, wenn t_0 irgend ein bestimmter Werth von t ist, in einer bestimmten Umgebung von t_0 der Ausdruck

$$\log\psi(t)\log\psi(1-t)-\pi^2$$

in der Form einer Potenzreihe von $t-t_0$ darstellen. Nimmt man t_0 in der Strecke $(0\ldots 1)$ an, so sind die Coefficienten dieser Reihe, weil es dann in jeder Nähe von t_0 Werthe der Grösse t giebt, für welche der vorstehende Ausdruck verschwindet, nothwendig alle gleich Null; dies muss also, da der Bereich T' ein Continuum ist, nach einem bekannten functionentheoretischen Satze auch für jeden anderen Werth von t_0 der Fall sein, und somit die Gleichung (1.) an jeder Stelle von T' bestehen.

Es ist ferner, da die zweite Coordinate von $\psi(t)$ dasselbe Zeichen wie die zweite Coordinate von t hat,

$$\log\psi(t) = \log(-\psi(t)) \pm i\pi,$$

wo das obere oder das untere Zeichen vor i gilt, je nachdem die zweite Coordinate von t positiv oder negativ ist. Da nun $\log(-\psi(t))$ in der Nähe eines jeden negativen reellen Werthes von t sich regulär verhält, so ergiebt sich

$$(2.)\qquad \begin{cases} \log\psi(\overset{+}{t}) = \log(-\psi(t))+i\pi \\ \log\psi(\overset{-}{t}) = \log(-\psi(t))-i\pi \end{cases}$$

für jeden negativen reellen Werth von t.

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man aus Gleichung (1.) für einen reellen Werth von t, der >1,

$$(3.)\qquad \begin{cases} \log\psi(\overset{+}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log(-\psi(1-t))-i\pi} \\ \log\psi(\overset{-}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log(-\psi(1-t))+i\pi}. \end{cases}$$

Man nehme jetzt an, es habe die Grösse t einen imaginären Werth, und verstehe unter ϵ die Zahl 1 oder -1, je nachdem die zweite Coordinate von t positiv oder negativ ist. Dann verwandelt sich

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}},$$

wenn man $1-t$ für t setzt, in

$$\frac{1-t^{\frac{1}{4}}}{1+t^{\frac{1}{4}}} = -\frac{1-\left(1-\dfrac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}}{1+\left(1-\dfrac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}};$$

man hat also

$$(4.)\qquad \psi(1-t) = -\psi\left(\frac{t-1}{t}\right),$$

woraus

$$(5.)\qquad \log\psi(1-t) = \log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right)-\epsilon i\pi.$$

Die Gleichung (1.) ferner verwandelt sich, wenn man in ihr $\frac{t-1}{t}$ für t setzt, in

$$(6.)\qquad \log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right)\log\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \pi^2.$$

Setzt man dann in (5.) $\frac{t-1}{t}$ für t und beachtet, dass die zweite Coordinate von $\frac{t-1}{t}$ dasselbe Zeichen wie die zweite Coordinate von t hat, so kommt

$$(7.)\qquad \log\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right)-\epsilon i\pi.$$

Endlich ergiebt sich aus (1.), wenn man $\frac{1}{1-t}$ für t setzt,

$$\log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right)\log\psi\left(\frac{t}{t-1}\right) = \pi^2. \tag{8.}$$

Die Gleichungen (1.), (5.), (6.), (7.), (8.) führen nun zu den folgenden, in denen auf der Rechten vor i das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die zweite Coordinate von t positiv oder negativ ist:

$$\left\{\begin{aligned}
\log\psi(t) &= \frac{\pi^2}{\log\psi(1-t)} \\
\log\psi(t) &= \frac{\pi^2}{\log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right)\mp i\pi} \\
\log\psi(t) &= \frac{\pi\log\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi\mp i\log\psi\left(\frac{1}{t}\right)} \\
\log\psi(t) &= \frac{\pi^2}{\log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right)}\pm i\pi \\
\log\psi(t) &= \log\psi\left(\frac{t}{t-1}\right)\pm i\pi.
\end{aligned}\right. \tag{9.}$$

Die Modificationen, welche diese Gleichungen erfahren, wenn die zweite Coordinate von t verschwindet, sind nach dem Vorhergehenden leicht zu ermitteln.

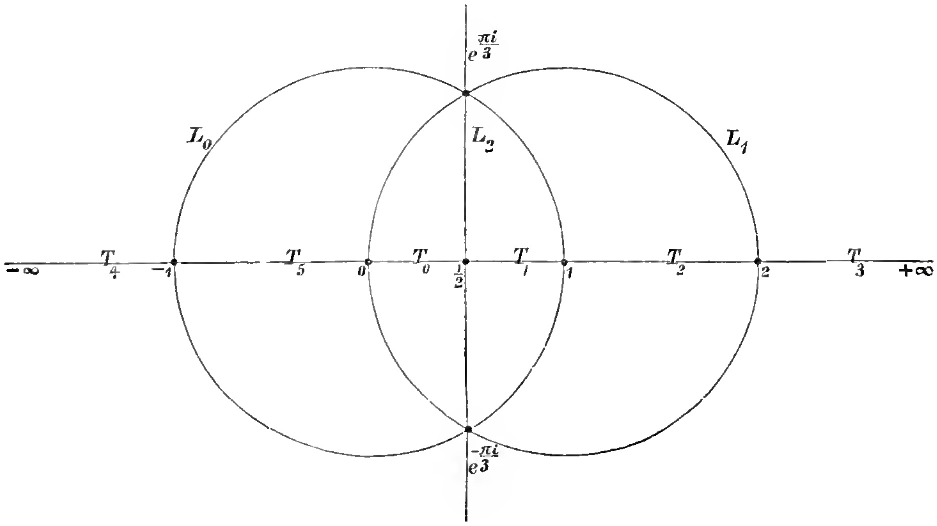
Jetzt denke man sich in der Ebene der Veränderlichen t einen Kreis (L_0) mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt 0, einen zweiten Kreis (L_1) mit demselben Radius und dem Mittelpunkt 1 beschrieben und durch die Durchschnittspunkte von (L_0), (L_1), in denen t die Werthe $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$ hat, eine unbegrenzte Gerade (L_2) gelegt. Dann wird durch diese drei Linien die Ebene in sechs Stücke $(T_0, T_1, \ldots T_5)$ zerlegt, in der Art, dass die Strecken

$$\left(0\cdots\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2}\cdots 1\right),\quad (1\cdots 2),\quad (2\cdots+\infty),\quad (-\infty\cdots-1),\quad (-1\cdots 0)$$

beziehlich in

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad T_4, \quad T_5$$

liegen.



Ordnet man jedem Werthe von t zwei andere t', t'' zu mittels der Gleichungen

$$t + t' = 1, \qquad tt'' = 1,$$

so entsprechen Werthen von t in

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad T_4, \quad T_5$$

Werthe von t' beziehlich in

$$T_1, \quad T_0, \quad T_5, \quad T_4, \quad T_3, \quad T_2,$$

und Werthe von t'' beziehlich in

$$T_3, \quad T_2, \quad T_1, \quad T_0, \quad T_5, \quad T_4.$$

Daraus ergiebt sich dann leicht der folgende Satz:

Liegt t in

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad T_4, \quad T_5,$$

so liegen beziehlich

$$1-t, \quad \frac{t-1}{t}, \quad \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{1-t}, \quad \frac{t}{t-1}$$

in T_0.

Nach den unter (9.) zusammengestellten Formeln lässt sich also die Berechnung von $\psi(t)$ für jeden gegebenen Werth von t zurückführen auf die Berechnung derselben Function für ein dem Bereiche T_0 angehöriges Argument.

Für reelle Werthe von t kommen dann die folgenden Formeln zur Anwendung:

$$(10.)\quad \begin{cases} t = \frac{1}{2}\cdots 1, & \log\psi(t) = \dfrac{\pi^2}{\log\psi(1-t)} \\[2ex] t = 1\ldots 2, & \log\psi(\overset{+}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right)-i\pi}, \quad \log\psi(\overset{-}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right)+i\pi} \\[2ex] t = 2\cdots+\infty, & \log\psi(\overset{+}{t}) = \dfrac{\pi\log\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi-i\log\psi\left(\frac{1}{t}\right)}, \quad \log\psi(\overset{-}{t}) = \dfrac{\pi\log\psi\left(\frac{1}{t}\right)}{\pi+i\log\psi\left(\frac{1}{t}\right)} \\[2ex] t = -\infty\cdots-1, & \log\psi(\overset{+}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right)}+i\pi, \quad \log\psi(\overset{-}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right)}-i\pi \\[2ex] t = -1\ldots 0, & \log\psi(\overset{+}{t}) = \log\psi\left(\frac{t}{t-1}\right)+i\pi, \quad \log\psi(\overset{-}{t}) = \log\psi\left(\frac{t}{t-1}\right)-i\pi. \end{cases}$$

Es bleibt nun noch zu untersuchen, welches der grösste Werth ist, den der absolute Betrag von

$$\varphi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}.$$

annehmen kann, wenn die Grösse t auf den Bereich T_0 beschränkt wird.

Wie bekannt, gehört dieser grösste Werth zu einem an der Grenze von T_0 liegenden Werthe von t. Die Grenze von T_0 aber wird gebildet von der zwischen den Punkten $e^{-\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{\pi i}{3}}$ liegenden Strecke der Geraden L_2 und dem von denselben Punkten begrenzten und durch den Punkt 0 gehenden Bogen des Kreises L_1.

Setzt man, unter w eine reelle Grösse verstehend,

$$t = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \frac{1}{e^{wi}+1},$$

so durchläuft t die Gerade L_2, wenn w die Strecke $(-\pi \cdots + \pi)$ durchläuft. Dann ist $\frac{d \log |\varphi(t)|}{dw}$ gleich dem reellen Bestandtheil von

$$\frac{d \log \varphi(t)}{dw} = \left(\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{d \log t}{dw},$$

also, da

$$1-t = \frac{e^{\frac{wi}{2}}}{2 \cos \frac{w}{2}}, \qquad \frac{d \log t}{dw} = -ite^{wi} = -i(1-t),$$

$$\frac{d\,|\varphi(t)|}{dw} = \frac{1}{2} |\varphi(t)| \cdot \left(\left(2 \cos \frac{w}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \sin \frac{w}{8} + \left(2 \cos \frac{w}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \sin \frac{3w}{8}\right).$$

Innerhalb der Strecke $(w = -\pi \cdots + \pi)$ wird $|\varphi(t)|$ weder gleich Null noch unendlich gross; es verschwindet also $\frac{d\,|\varphi(t)|}{dw}$ für $w = 0$ und ist positiv, wenn w zwischen 0 und π, negativ, wenn w zwischen 0 und $-\pi$ liegt. Der absolute Betrag von $\varphi(t)$ ist also ein Minimum für $w = 0$ und nimmt beständig zu, wenn t stetig wachsend die Strecke $(0 \ldots \pi)$ oder stetig abnehmend die Strecke $(0 \cdots -\pi)$ durchläuft.

Für $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$ hat man, da $1 - e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ ist,

$$\varphi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{\pi i}{12}}}{1 + e^{-\frac{\pi i}{12}}} = i \operatorname{tg} \frac{\pi}{24};$$

und für $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$

$$\varphi(t) = -i \operatorname{tg} \frac{\pi}{24}.$$

Der grösste Werth, den der absolute Betrag von $\varphi(t)$ in der die Punkte $e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{-\frac{\pi i}{3}}$ verbindenden Geraden annehmen kann, ist also gleich $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

Setzt man ferner

$$t = 1 - e^{-wi},$$

so durchläuft t den Kreis L_1, wenn w die Strecke $(-\pi \cdots + \pi)$ durchläuft. Dann hat man

$$\varphi(t) = \frac{1-e^{-\frac{wi}{4}}}{1+e^{-\frac{wi}{4}}} = i \operatorname{tg} \frac{w}{8},$$

und der absolute Betrag von $\varphi(t)$ ist ein Minimum an der Stelle $w = 0$, $t = 0$ und ein Maximum an der Stelle $w = \pm\pi$, $t = 2$. Den grössten Werth, welchen derselbe in dem einen Theil der Begrenzung von T_0 bildenden Kreisbogen annehmen kann, erreicht er also in den Punkten $e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Damit ist bewiesen:

Der absolute Betrag von $\varphi(t)$ hat in dem Bereiche T_0 seinen grössten Werth an den Stellen $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$ und $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, und es ist derselbe gleich $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

Hiernach convergirt für jeden dem Bereiche T_0 angehörigen Werth von t die Reihe

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{2}{2^5}\varphi(t)^5 + \frac{15}{2^9}\varphi(t)^9 + \frac{150}{2^{13}}\varphi(t)^{13} + \cdots$$

so rasch, dass in der Praxis der Regel nach schon die drei ersten Glieder, in manchen Fällen sogar die zwei ersten den Werth der Function $\psi(t)$ in hinlänglicher Annäherung geben.

VII.

Setzt man in den Reihen, durch welche die Functionen $\vartheta_0(v\,|\,\tau)$, $\vartheta_1(v\,|\,\tau)$ u. s. w. definirt werden, unter ε eine der Zahlen $1, -1$ verstehend, $\varepsilon + \tau$ für τ, so ergiebt sich, dass die Functionen

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau), \qquad \vartheta_1(v\,|\,\tau), \qquad \vartheta_2(v\,|\,\tau), \qquad \vartheta_3(v\,|\,\tau)$$

beziehlich den Functionen

$$\vartheta_3(v\,|\,\varepsilon+\tau), \quad i^{-\frac{\varepsilon}{2}}\vartheta_1(v\,|\,\varepsilon+\tau), \quad i^{-\frac{\varepsilon}{2}}\vartheta_2(v\,|\,\varepsilon+\tau), \quad \vartheta_0(v\,|\,\varepsilon+\tau)$$

gleich sind.

Setzt man ferner in den Gleichungen (IV., (1.))

$$\sqrt[4]{q} = e^{\frac{\tau\pi i}{4}}, \qquad \sqrt[4]{q'} = e^{-\frac{\pi i}{4\tau}}, \qquad u = \vartheta_3^2(0,q).v\pi, \qquad ui = \vartheta_3^2(0,q').v'\pi,$$

drückt [mittels der Formeln (III., (6.))] $f(u,q)$, $f_1(u,q)$, $f_2(u,q)$ durch die Functionen $\vartheta(v\pi,q)$, $\vartheta_1(v\pi,q)$, …, $f(ui,q')$, $f_1(ui,q')$, $f_2(ui,q')$ durch $\vartheta(v'\pi,q')$, $\vartheta_1(v'\pi,q')$, … aus, und bemerkt, dass nach den Formeln (IV., (6.))

$$\frac{\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} = \frac{\vartheta_3(0,q')}{\vartheta(0,q')}, \qquad \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} = \frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta(0,q')}, \qquad \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = \frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta_3(0,q')},$$

$$\vartheta_3^2(0,q) = \frac{i}{\tau}\vartheta_3^2(0,q')$$

und somit

$$v' = -\frac{v}{\tau}$$

ist, so gelangt man zu dem folgenden Satze:

Der Quotient je zweier der Functionen

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_1(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_2(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_3(v\,|\,\tau)$$

ändert seinen Werth nicht, wenn man an Stelle dieser Functionen beziehlich die folgenden:

$$\vartheta_2\left(-\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right), \quad \frac{1}{i}\vartheta_1\left(-\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right), \quad \vartheta_0\left(-\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right), \quad \vartheta_3\left(-\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$$

setzt.

Jetzt setze man, wie oben (V.)

$$\text{(1.)} \qquad \tau_1 = \frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1)\log\psi(k^2)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(k^2)}$$

und

$$\text{(2.)} \quad \left\{\begin{aligned} &\tau_2 = \frac{1}{-\tau_1}, \quad \tau_3 = e+\tau_2 = \frac{1-e\tau_1}{-\tau_1}, \quad \tau_4 = \frac{1}{-\tau_3} = \frac{\tau_1}{1-e\tau_1}, \\ &\tau_5 = e+\tau_4 = \frac{e}{1-e\tau_1}, \quad \tau_6 = \frac{1}{-\tau_5} = -e+\tau_1, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(3.)} \quad \left\{\begin{aligned} &v_1 = \frac{u}{\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_1)}, \quad v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1}, \quad v_3 = v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1}, \\ &v_4 = \frac{v_3}{\tau_3} = -\frac{v_1}{\tau_1\tau_3}, \quad v_5 = ev_4 = \frac{-ev_1}{\tau_1\tau_3}, \quad v_6 = \frac{v_5}{\tau_5} = \frac{-ev_1}{\tau_1\tau_3\tau_5}, \end{aligned}\right.$$

oder, da nach den Formeln (IV., (6.), (7.))

$$\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_1) = \frac{i}{\tau_1}\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_2) = \frac{i}{\tau_1}\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_3)$$
$$= -\frac{1}{\tau_1\tau_3}\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_4) = \frac{ei}{\tau_1\tau_3}\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_5) = \frac{-e}{\tau_1\tau_3\tau_5}\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_6)$$

ist,

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \frac{u}{\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_1)}, & v_2 &= \frac{ui}{\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_2)}, & v_3 &= \frac{ui}{\pi\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_3)}, \\ v_4 &= \frac{u}{\pi\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_4)}, & v_5 &= \frac{ui}{\pi\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_5)}, & v_6 &= \frac{u}{\pi\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_6)}. \end{aligned}\right.$$

Dann erhält man, indem man in den Gleichungen (V., (9.)) die Functionen $\vartheta(x, q)$, $\vartheta_1(x, q)$, ... beziehlich in

$$\vartheta_0(v_1\,|\,\tau_1),\quad \vartheta_1(v_1\,|\,\tau_1),\quad \vartheta_2(v_1\,|\,\tau_1),\quad \vartheta_3(v_1\,|\,\tau_1)$$

verwandelt und diese mittels wiederholter Anwendung der beiden vorstehenden Sätze durch ϑ-Functionen der Argumente

$$(v_2, \tau_2),\quad (v_3, \tau_3),\quad \ldots\quad (v_6, \tau_6)$$

ersetzt, die nachstehenden Darstellungen der elliptischen Functionen **sin am (u, k)**, cos am (u, k), Δ am (u, k), in denen ε, β, γ, $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dieselbe Bedeutung haben wie in den citirten Gleichungen (9.):

$$(5.)\quad i^{\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{k^2}\,.\,\sin\operatorname{am}(u, k) = \frac{\vartheta_1(v_1\,|\,\tau_1)}{\vartheta_0(v_1\,|\,\tau_1)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\vartheta_1(v_2\,|\,\tau_2)}{\vartheta_2(v_2\,|\,\tau_2)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\vartheta_1(v_3\,|\,\tau_3)}{\vartheta_2(v_3\,|\,\tau_3)}$$
$$= \frac{\vartheta_1(v_4\,|\,\tau_4)}{\vartheta_0(v_4\,|\,\tau_4)} = i^{\frac{e}{2}-1}\cdot\frac{\vartheta_1(v_5\,|\,\tau_5)}{\vartheta_3(v_5\,|\,\tau_5)} = i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1(v_6\,|\,\tau_6)}{\vartheta_3(v_6\,|\,\tau_6)},$$

$$(6.)\quad \frac{i^{\varepsilon(\beta+\gamma)}\sqrt[4]{k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}}\cdot\cos\operatorname{am}(u, k) = \frac{\vartheta_2(v_1\,|\,\tau_1)}{\vartheta_0(v_1\,|\,\tau_1)} = \frac{\vartheta_0(v_2\,|\,\tau_2)}{\vartheta_2(v_2\,|\,\tau_2)} = i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_3(v_3\,|\,\tau_3)}{\vartheta_2(v_3\,|\,\tau_3)}$$
$$= i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_3(v_4\,|\,\tau_4)}{\vartheta_0(v_4\,|\,\tau_4)} = i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_0(v_5\,|\,\tau_5)}{\vartheta_3(v_5\,|\,\tau_5)} = i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_2(v_6\,|\,\tau_6)}{\vartheta_3(v_6\,|\,\tau_6)},$$

$$(7.)\quad \frac{i^{\varepsilon\beta}}{\sqrt[4]{1-k^2}}\cdot\Delta\operatorname{am}(u, k) = \frac{\vartheta_3(v_1\,|\,\tau_1)}{\vartheta_0(v_1\,|\,\tau_1)} = \frac{\vartheta_3(v_2\,|\,\tau_2)}{\vartheta_2(v_2\,|\,\tau_2)} = i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_0(v_3\,|\,\tau_3)}{\vartheta_2(v_3\,|\,\tau_3)}$$
$$= i^{\frac{e}{2}}\cdot\frac{\vartheta_2(v_4\,|\,\tau_4)}{\vartheta_0(v_4\,|\,\tau_4)} = \frac{\vartheta_2(v_5\,|\,\tau_6)}{\vartheta_3(v_5\,|\,\tau_6)} = \frac{\vartheta_0(v_6\,|\,\tau_6)}{\vartheta_3(v_6\,|\,\tau_6)}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass

$$v_3 = v_2, \qquad v_5 = \mathfrak{e}v_4, \qquad v_6 = v_1$$

ist.

Die Grössen $\tau_1, \ldots \tau_6$, durch τ_1 ausgedrückt, haben die Gestalt

$$\frac{\mathfrak{c} + \mathfrak{d}\tau_1}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\tau_1},$$

wo jede der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ einen der Werthe $0, 1, -1$ hat und die Relation $\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1$ besteht. Durch $\tau = \frac{1}{\pi i} \log \psi(k^2)$ ausgedrückt erhalten sie also die Form

$$\frac{c + d\tau}{a + b\tau},$$

wo a, b, c, d ganze, durch die Gleichung

$$ad - bc = 1$$

mit einander verbundene Zahlen sind. Es ist zugleich leicht zu zeigen, dass umgekehrt, wenn a, b, c, d irgend vier, der vorstehenden Bedingungsgleichung genügende ganze Zahlen sind, der Ausdruck $\frac{c+d\tau}{a+b\tau}$ stets auf eine der 6 Formen

$$\tau_1, \qquad \frac{1}{-\tau_1}, \qquad \frac{1-\mathfrak{e}\tau_1}{-\tau_1}, \qquad \frac{\tau_1}{1-\mathfrak{e}\tau_1}, \qquad \frac{\mathfrak{e}}{1-\mathfrak{e}\tau_1}, \qquad -\mathfrak{e}+\tau_1$$

gebracht werden kann, wo τ_1 die Gestalt

$$\tau_1 = \frac{2\gamma + (2\delta+1)\tau}{(2\alpha+1) + 2\beta\tau}$$

hat und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze, durch die Gleichung

$$(2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma = 1$$

mit einander verbundene Zahlen sind. Dabei kann $\mathfrak{e}$ nach Belieben gleich 1 oder gleich -1 gesetzt werden.

Nimmt man insbesondere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich 0 an, also

$$\tau_1 = \frac{1}{\pi i} \log \psi(k^2),$$

und bestimmt, zunächst unter der Voraussetzung, dass k^2 eine imaginäre Grösse und, wie oben, ε gleich 1 oder gleich -1 sei, je nachdem die zweite Coordinate von k^2 positiv oder negativ ist, mittels der Formeln (2.) die Grössen $\tau_2, \dots \tau_5$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (VI., (1.), (5.), (6.), (7.), (8.))

$$(8.)\quad \left\{\begin{array}{lll} \tau_1\pi i = \log\psi(k^2), & \tau_2\pi i = \log\psi(1-k^2), & \tau_3\pi i = \log\psi\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right), \\ \tau_4\pi i = \log\psi\left(\frac{1}{k^2}\right), & \tau_5\pi i = \log\psi\left(\frac{1}{1-k^2}\right), & \tau_6\pi i = \log\psi\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right). \end{array}\right.$$

Man hat ferner

$$\log(k^2) = \log(-k^2)+\varepsilon\pi i, \qquad \log(1-k^2) = \log(k^2-1)-\varepsilon\pi i,$$

und daher

$$(9.)\qquad \sqrt[4]{k^2} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt[4]{-k^2}, \qquad \sqrt[4]{1-k^2} = i^{-\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt[4]{k^2-1}.$$

Man erhält also aus den Gleichungen (5.), (6.), (7.), wenn man jetzt wieder die Jacobi'schen Bezeichnungen einführt und

$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{lll} q = \psi(k^2), & q_1 = \psi(1-k^2), & q_2 = \psi\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right), \\ q_3 = \psi\left(\frac{1}{k^2}\right), & q_4 = \psi\left(\frac{1}{1-k^2}\right), & q_5 = \psi\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right); \end{array}\right.$$

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = \frac{u}{\vartheta_3^2(0,q)}, & x_1 = \frac{ui}{\vartheta_3^2(0,q_1)}, & x_2 = \frac{ui}{\vartheta^2(0,q_2)}, \\ x_3 = \frac{u}{\vartheta_2^2(0,q_3)}, & x_4 = \frac{ui}{\vartheta_2^2(0,q_4)}, & x_5 = \frac{u}{\vartheta^2(0,q_5)} \end{array}\right.$$

setzt — wo dann

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{lll} q = -q_5, & q_2 = -q_1, & q_4 = -q_3 \\ x_2 = x_1, & x_4 = \varepsilon x_3, & x_5 = x \end{array}\right.$$

ist —, sechs specielle Formel-Systeme, die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt sind.

In den drei ersten Colonnen stehen unter $\sin\mathrm{am}(u,k)$, $\cos\mathrm{am}(u,k)$, $\Delta\mathrm{am}(u,k)$ die Zähler, und in der vierten Colonne der gemeinschaftliche Nenner der Brüche, durch welche diese Functionen in den sechs angegebenen Fällen ausgedrückt werden.

	$\sin \operatorname{am}(u, k)$	$\cos \operatorname{am}(u, k)$	$\Delta \operatorname{am}(u, k)$	
1.	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_1(x, q)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_2(x, q)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \vartheta_3(x, q)$	$/\vartheta(x, q)$
2.	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_1(x_1, q_1)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta(x_1, q_1)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \vartheta_3(x_1, q_1)$	$/\vartheta_2(x_1, q_1)$
3.	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_1(x_2, q_2)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_3(x_2, q_2)$	$\sqrt[4]{k^2-1} \cdot \vartheta(x_2, q_2)$	$/\vartheta_2(x_2, q_2)$
4.	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_1(x_3, q_3)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \vartheta_3(x_3, q_3)$	$\sqrt[4]{k^2-1} \cdot \vartheta_2(x_3, q_3)$	$/\vartheta(x_3, q_3)$
5.	$\frac{1}{i\sqrt[4]{-k^2}} \cdot \vartheta_1(x_4, q_4)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{-k^2}} \cdot \vartheta(x_4, q_4)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \vartheta_2(x_4, q_4)$	$/\vartheta_3(x_4, q_4)$
6.	$\frac{1}{\sqrt[4]{-k^2}} \cdot \vartheta_1(x_5, q_5)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{-k^2}} \cdot \vartheta_2(x_5, q_5)$	$\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \vartheta(x_5, q_5)$	$/\vartheta_3(x_5, q_5)$

Diese Ausdrücke der elliptischen Functionen gelten nun auch für reelle Werthe von k^2, wenn die vorkommenden Wurzelgrössen richtig bestimmt werden, worüber ich Folgendes bemerke.

Es ist oben angegeben worden, wie man für einen gegebenen reellen Werth von k^2 die Wurzelgrösse $\sqrt[4]{1-k^2}$, von welcher der Werth von $q = \psi(k^2)$ abhängt, sowie die Werthe von $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{q}$ zu bestimmen habe, damit die Gleichungen

$$\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} = \sqrt[4]{k^2}, \qquad \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} = \sqrt[4]{1-k^2}$$

bestehen. Auf dieselbe Weise fixire man, wenn an die Stelle von k^2 die

Grössen

$$(13.)\quad k_1^2 = 1-k^2, \quad k_2^2 = \frac{k^2-1}{k^2}, \quad k_3^2 = \frac{1}{k^2}, \quad k_4^2 = \frac{1}{1-k^2}, \quad k_5^2 = \frac{-k^2}{1-k^2}$$

treten, für $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ die Werthe von

$$\sqrt[4]{1-k_\nu^2}, \quad \sqrt[4]{k_\nu^2}, \quad q_\nu, \quad \sqrt[4]{q_\nu},$$

so dass man

$$(14.)\quad \frac{\vartheta_2(0, q_\nu)}{\vartheta_3(0, q_\nu)} = \sqrt[4]{k_\nu^2}, \quad \frac{\vartheta(0, q_\nu)}{\vartheta_3(0, q_\nu)} = \sqrt[4]{1-k_\nu^2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5)$$

hat. Setzt man andererseits in den Formeln der vorstehenden Tabelle $u = 0$ und bestimmt sodann die Werthe, welche $\frac{\vartheta_2(0, q_\nu)}{\vartheta_3(0, q_\nu)}$, $\frac{\vartheta(0, q_\nu)}{\vartheta_3(0, q_\nu)}$ nach diesen Formeln haben müssen, so ergiebt sich

$$(15.)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\sqrt[4]{k_1^2} = \sqrt[4]{1-k^2}, & & \sqrt[4]{1-k_1^2} = \sqrt[4]{k^2} & \\
\sqrt[4]{k_2^2} = \sqrt[4]{\frac{k^2-1}{k^2}} & = \frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_2^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{k^2}} & = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \\
\sqrt[4]{k_3^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{k^2}} & = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_3^2} = \sqrt[4]{\frac{k^2-1}{k^2}} & = \frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \\
\sqrt[4]{k_4^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-k^2}} & = \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_4^2} = \sqrt[4]{\frac{-k^2}{1-k^2}} & = \frac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}} \\
\sqrt[4]{k_5^2} = \sqrt[4]{\frac{-k^2}{1-k^2}} & = \frac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_5^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-k^2}} & = \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}.
\end{array}\right.$$

Durch diese Gleichungen werden also die Werthe gegeben, die in den Formeln (1.), (2.) der Tabelle die Grössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, in den Formeln (3.), (4.) ferner $\sqrt[4]{k^2-1}$, $\sqrt[4]{k^2}$, und in den Formeln (5.), (6.) $\sqrt[4]{-k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ haben müssen, wobei es nun keinen Unterschied macht, ob k^2 imaginär oder reell ist.

Gehört die Grösse $t = k^2$ dem oben (VI.) mit T_0 bezeichneten Bereiche an, so wird man von den vorstehenden Ausdrücken der elliptischen Functionen am zweckmässigsten die unter (1.) aufgestellten anwenden, weil dann der absolute Betrag von q niemals die Grenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}\right)^{4n+1}$$

überschreitet und deshalb die ϑ-Reihen sehr rasch convergiren.

Gehört aber $t = k^2$ dem Bereiche T_ν an ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$), so liegt k_ν^2 im Bereiche T_0, und man gebraucht dann zur Berechnung der elliptischen Functionen am zweckmässigsten die in der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe der Tabelle angegebenen Ausdrücke.

Ist k^2 reell und liegt im Bereiche T_ν ($\nu = 0, \dots 5$), so sind in den unter No. $(\nu+1)$ aufgestellten Formeln q_ν und die vorkommenden Wurzelgrössen sämmtlich reelle und positive Grössen.

Es ist noch zu bemerken, dass aus den Gleichungen

$$\vartheta_3(0, q_\nu) = \vartheta_3(0, q_\nu^4) + \vartheta_2(0, q_\nu^4), \qquad \frac{\vartheta_2(0, q_\nu^4)}{\vartheta_3(0, q_\nu^4)} = \frac{1-\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}$$

sich die folgenden Ausdrücke von $\vartheta_3(0, q_\nu)$, $\vartheta(0, q_\nu)$, $\vartheta_2(0, q_\nu)$ ergeben:

$$(16.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0, q_\nu) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot \vartheta_3(0, q_\nu^4) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot (1+2q_\nu^4+2q_\nu^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta(0, q_\nu) = \dfrac{2\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot \vartheta_3(0, q_\nu^4) = \dfrac{2\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot (1+2q_\nu^4+2q_\nu^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta_2(0, q_\nu) = \dfrac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot \vartheta_3(0, q_\nu^4) = \dfrac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot (1+2q_\nu^4+2q_\nu^{16}+\cdots). \end{cases}$$

Man erhält also insbesondere für die in den Gleichungen (11.) vorkommenden Grössen $\vartheta_3(0, q), \dots \vartheta(0, q_5)$:

$$(17.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0, q) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot (1+2q^4+2q^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta_3(0, q_1) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{k^2}} \cdot (1+2q_1^4+2q_1^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta(0, q_2) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{k^2}} \cdot (1+2q_2^4+2q_2^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta_2(0, q_3) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{k^2-1}+\sqrt[4]{k^2}} \cdot (1+2q_3^4+2q_3^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta_2(0, q_4) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{1-k^2}+\sqrt[4]{-k^2}} \cdot (1+2q_4^4+2q_4^{16}+\cdots) \\[2ex] \vartheta(0, q_5) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot (1+2q_5^4+2q_5^{16}+\cdots). \end{cases}$$

ZUR THEORIE DER AUS n HAUPTEINHEITEN GEBILDETEN COMPLEXEN GRÖSSEN.

(Auszug aus einem an H. A. Schwarz gerichteten Briefe, der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen mitgetheilt am 1. December 1883.)

Berlin, 19.—27. Juni 1883.

. . . . . . Ich komme jetzt zur Beantwortung Ihres Briefes vom 9. d. M. Die Fragen, die derselbe enthält, lassen sich, wie ich glaube, in völlig befriedigender Weise erledigen.

In der Selbstanzeige seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste schliesst Gauss, nachdem er seine Auffassungsweise des Begriffes und der Theorie der aus zwei Haupteinheiten $(1, i)$ gebildeten complexen Grössen dargelegt hat, mit folgender Bemerkung:

»Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.« (Gauss Werke, Band II. S. 178.)

Aus dieser Bemerkung scheint mir hervorzugehen, dass Gauss Untersuchungen darüber angestellt habe, ob sich für complexe Grössen mit n Haupteinheiten die Grundoperationen, Addition, Multiplication, Subtraction und Division so definiren lassen, dass die im Gebiete der sogenannten reellen Zahlgrössen (der Grössen mit einer Haupteinheit) bestehenden arithmetischen

Gesetze ihre Gültigkeit behalten, und dass er dabei zu der Überzeugung gekommen sei, es werde dies unmöglich, sobald $n > 2$.

Um über diesen Punkt ins Klare zu kommen, habe ich bereits vor Jahren*) folgende Betrachtungen angestellt.

Nach Aufstellung des Begriffes einer aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grösse ist zunächst zu untersuchen, ob und wie sich für ein Gebiet solcher Grössen, d. h. für die Gesammtheit der aus denselben Haupteinheiten $(e_1, e_2, \dots e_n)$ gebildeten Grössen die arithmetischen Grundoperationen so definiren lassen, dass erstens, wenn $a, b, c, \dots$ beliebige Grössen des Gebietes sind,

$$a+b, \quad a-b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

ebenfalls dem Gebiete angehören, und dass zweitens die in den folgenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze gelten:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)+c &= (a+c)+b \\ (a-b)+b &= a, \end{aligned}\right. \qquad (2.)\quad \left\{\begin{aligned} ab &= ba \\ (ab)c &= (ac)b \\ a(b+c) &= ab+ac \\ \frac{a}{b}b &= a. \end{aligned}\right. \quad \dots$$

Es mögen im Folgenden mit den griechischen Buchstaben Zahlgrössen bezeichnet werden, die aus einer unbenannten Haupteinheit gebildet sind, so kann jede Grösse des betrachteten Gebietes in der Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

dargestellt werden, wenn man unter $\xi_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}$ die Grösse versteht, die man dadurch erhält, dass man $e_\mathfrak{a}$ an die Stelle der unbenannten Haupteinheit von $\xi_\mathfrak{a}$ setzt. Die Zahlgrössen $\xi_\mathfrak{a}$ sollen die Coordinaten der betrachteten complexen Grösse genannt werden. Dies vorausgeschickt, sei

$$a = \sum_\mathfrak{a} \alpha_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}, \qquad b = \sum_\mathfrak{a} \beta_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots n)$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (1.), dass $a+b$, $a-b$ zu definiren sind durch die Formeln

$$(3.)\qquad a+b = \sum_\mathfrak{a} (\alpha_\mathfrak{a} + \beta_\mathfrak{a}) e_\mathfrak{a}, \qquad a-b = \sum_\mathfrak{a} (\alpha_\mathfrak{a} - \beta_\mathfrak{a}) e_\mathfrak{a} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots n).$$

*) Im Wintersemester 1861—62 habe ich zum ersten Male über diesen Gegenstand etwas vorgetragen.

Ferner folgt aus (2.)

$$ab = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} (\alpha_\mathfrak{b}\beta_\mathfrak{c})(e_\mathfrak{b}e_\mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1, 2, \dots n) \tag{4.}$$

oder, da $e_\mathfrak{b}e_\mathfrak{c}$ die Form

$$e_\mathfrak{b}e_\mathfrak{c} = \sum_\mathfrak{a} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\, e_\mathfrak{a} \tag{5.}$$

haben soll:

$$ab = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} (\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\alpha_\mathfrak{b}\beta_\mathfrak{c})\, e_\mathfrak{a}. \tag{6.}$$

Aus den Gleichungen

$$e_\mathfrak{b}e_\mathfrak{c} = e_\mathfrak{c}e_\mathfrak{b}, \qquad (e_\mathfrak{b}e_\mathfrak{c})e_\mathfrak{d} = (e_\mathfrak{b}e_\mathfrak{d})e_\mathfrak{c} \qquad (\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d} = 1, 2, \dots n) \tag{7.}$$

ergiebt sich nun eine Anzahl von Bedingungsgleichungen, denen die Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ genügen müssen, welche hinzuschreiben für das Folgende jedoch nicht erforderlich ist. Man überzeugt sich aber leicht, dass denselben durch unendlich viele Werthsysteme der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ Genüge geschehen kann. Wählt man irgend eins dieser Werthsysteme aus, so wird durch die Gleichung (6.) das Product ab stets so definirt, dass die Gleichungen

$$ab = ba, \qquad (ab)c = (ac)b, \qquad a(b+c) = ab + ac$$

bestehen. Um dann $\frac{a}{b}$ zu definiren, setze man

$$\frac{a}{b} = \sum_\mathfrak{a} \gamma_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a}; \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots n)$$

dann sind $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$\alpha_\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\beta_\mathfrak{b}\gamma_\mathfrak{c} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots n) \tag{8.}$$

bestehen.

Hat nun die Determinante

$$\varepsilon = \Big| \sum_\mathfrak{b} \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\beta_\mathfrak{b} \Big| \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1, 2, \dots n)$$

einen von Null verschiedenen Werth, so sind durch die vorstehenden Gleichungen die Coordinaten $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ eindeutig bestimmt, und es ist demnach die Division von a durch b möglich. Ist aber $\varepsilon = 0$, so ist die Division nur dann ausführbar, wenn unter den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ eine bestimmte Relation stattfindet; es hat aber dann der Quotient $\frac{a}{b}$ unendlich viele Werthe.

Hiernach ist die Wahl der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ der Beschränkung zu unterwerfen, dass die in Rede stehende Determinante nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe von $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ verschwinden darf. Aber, wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann es doch specielle Grössen b geben, für welche die zugehörige Determinante verschwindet — eine genauere Untersuchung zeigt sogar, dass solche Grössen stets existiren, sobald $n > 2$ ist —,*) worauf jedoch hier noch nicht eingegangen zu werden braucht. Eine derartige Grösse b ist dadurch charakterisirt, dass sich ihr, und zwar auf unendlich viele Arten, eine andere Grösse c, die nicht gleich Null ist, so zugesellen lässt, dass

$$bc = 0$$

ist; ich will sie deshalb einen »Theiler der Null« nennen, und diese Benennung auch auf den Fall ausdehnen, wo sie selbst den Werth Null hat. Es ist klar, dass ein Theiler der Null wieder einen solchen giebt, wenn er mit einer beliebigen Grösse multiplicirt wird.

Hiernach wird die Gleichung

$$a + bx = 0$$

durch unendlich viele Werthe von x befriedigt, wenn a, b die Form

$$a = ka', \qquad b = kb'$$

haben und k ein Theiler der Null ist, b' aber nicht. Denn dann kann man, wenn l irgend ein solcher Theiler der Null ist, der mit k multiplicirt das Product 0 giebt, x so bestimmen, dass $a' + b'x = l$ ist, und hat dann

$$k(a' + b'x) = kl = 0.$$

Ebenso kann eine algebraische Gleichung beliebigen Grades

$$a + bx + \cdots + hx^m = 0$$

unendlich viele Wurzeln besitzen, wenn ihre Coefficienten $(a, b, \dots h)$ die Form

$$a = ka', \quad b = kb', \quad \dots \quad h = kh'$$

haben und k ein Theiler der Null ist. Dazu brauchen bloss die Grössen

*) Auch in dem Falle, wo $n = 2$, kann es solche Grössen geben, wenn man bei der Definition der Multiplication die Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ den angegebenen Bedingungen entsprechend, im Übrigen aber nach Willkür annimmt.

$a', b', \ldots h'$ so beschaffen zu sein, dass sich die Gleichung

$$a' + b'x + \cdots + h'x^m = l$$

für unendlich viele Werthe von l, für welche $kl = 0$ ist, lösen lässt.

Die Existenz der »Theiler der Null«, welche nicht gleich Null sind, scheint also einen wesentlichen Unterschied zwischen der Arithmetik der aus mehreren Haupteinheiten gebildeten Grössen und der gewöhnlichen Arithmetik zu begründen. Indessen, da es im Gebiete der aus einer Haupteinheit gebildeten Grössen keinen anderen Theiler der Null giebt, als diese selbst, so ist der Satz, dass in der Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen eine algebraische Gleichung von der angegebenen Beschaffenheit unendlich viele Wurzeln haben könne, eine naturgemäss begründete Analogie zu dem in der gewöhnlichen Arithmetik geltenden, dass eine algebraische Gleichung unendlich viele Wurzeln hat, wenn alle ihre Coefficienten gleich Null sind. Und diese Analogie würde eine vollkommene sein, und die Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen mit der Arithmetik der aus einer Haupteinheit gebildeten, so weit als es überhaupt möglich ist, in Einklang gebracht werden, wenn es sich herausstellte, dass im Allgemeinen, d. h. wenn bei der Festsetzung des Multiplicationsverfahrens nur specielle — bestimmt anzugebende — Werthsysteme der Grössen $\varepsilon_{a,b,c}$ ausgeschlossen werden, eine algebraische Gleichung nur in dem Falle, wo alle ihre Coefficienten aus einem und demselben Theiler der Null durch Multiplication desselben mit beliebigen Grössen hervorgehen, unendlich viele Wurzeln haben könne.

Dies verhält sich aber in der That so. —

Angenommen wird also zunächst, dass die vorhin mit ε bezeichnete Determinante nicht identisch gleich Null sei. Daraus ergiebt sich die Existenz einer Grösse e_0 von der Eigenschaft, dass $e_0 a = ae_0 = a$ ist für jeden Werth von a.*)

Nun sei

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

eine Grösse des betrachteten Gebietes mit unbestimmten Coordinaten $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$,

*) Siehe die Anmerkungen auf Seite 332.

und es werde x^ν auf die Form

$$(9.)\qquad x^\nu = \xi_1^{(\nu)} e_1 + \xi_2^{(\nu)} e_2 + \cdots + \xi_n^{(\nu)} e_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

gebracht. Angenommen nun, es sei die Determinante

$$|\xi_\mu^{(\nu)}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

identisch gleich Null, so lässt sich aus den Gleichungen (9.) eine andere von der Form

$$X_0 x^{m+1} + X_1 x^m + \cdots + X_m x = 0$$

ableiten, wo $m < n$ und die Coefficienten X_μ ganze Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind, von denen X_0 nicht identisch gleich Null ist.

Man lege nun den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bestimmte Werthe $\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_n'$ bei, wodurch X_μ den Werth X_μ' erhalte. Dann existiren, wenn man von particulären Werthsystemen der Grössen ξ_ν' absieht, unendlich viele Werthsysteme $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, für welche die Gleichungen

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1'}{X_0'}, \quad \cdots \quad \frac{X_m}{X_0} = \frac{X_m'}{X_0'}$$

bestehen.*) Setzt man daher

$$a_\mu = X_\mu' e_0, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots m)$$

so hat die Gleichung

$$a_0 x^{m+1} + a_1 x^m + \cdots + a_m x = 0$$

unendlich viele Wurzeln, ohne dass ihre Coefficienten sämmtlich Theiler der Null sind.

Die Determinante

$$|\xi_\mu^{(\nu)}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

ist eine homogene ganze Function der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und im Allgemeinen nicht identisch gleich Null, wie man leicht nachweisen kann.**) Ihre Coefficienten können mithin nur für specielle Werthsysteme der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ verschwinden, und diese müssen also ausgeschlossen werden, wenn der Forderung, dass eine algebraische Gleichung nur in dem besprochenen Falle solle unendlich viele Wurzeln haben können, genügt werden soll.

---

*) Siehe die Anmerkung auf Seite 332.

**) Siehe die Anmerkung auf Seite 337.

Dies vorausgesetzt, gebe man den Coordinaten ξ_μ irgend welche bestimmten Werthe, für welche die in Rede stehende Determinante einen von Null verschiedenen Werth und zugleich x einen Werth g erhält, der nicht ein Theiler der Null ist. Dann lassen sich die Grössen $e_1, e_2, \dots e_n$ in der Form

$$e_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} g^{\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b} = 1, 2, \dots n) \tag{10.}$$

darstellen, und man erhält, wenn man auch g^{n+1} bildet, eine Gleichung

$$g^{n+1} + \varepsilon_1 g^n + \varepsilon_2 g^{n-1} + \dots + \varepsilon_n g = 0 \tag{11.}$$

oder

$$g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \dots + \varepsilon_n e_0 = 0. \tag{11a.}$$

Setzt man nun, unter $\mathfrak{n}$ irgend eine ganze positive Zahl verstehend,

$$g_{\mathfrak{n}} = g^{\mathfrak{n}}, \qquad g_0 = e_0, \tag{12.}$$

so lässt sich jede Grösse a des betrachteten Gebietes in der Form

$$a = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}} \qquad (\mathfrak{a} = 0, 1, \dots n-1) \tag{13.}$$

darstellen. Dann ist

$$\Big(\sum_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}\Big) = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} (\alpha_{\mathfrak{b}} \beta_{\mathfrak{c}}) g_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \qquad (\mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 0, 1, \dots n-1) \tag{14.}$$

und mittels der aus (11a.) sich ergebenden Gleichungen

$$g_{n+\mathfrak{n}} + \varepsilon_1 g_{n+\mathfrak{n}-1} + \varepsilon_2 g_{n+\mathfrak{n}-2} + \dots + \varepsilon_n g_{\mathfrak{n}} = 0 \qquad (\mathfrak{n} = 0, 1, \dots \infty)$$

kann dann das Product auf die Form

$$\sum_{\mathfrak{a}} \gamma_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}} \qquad (\mathfrak{a} = 0, 1, \dots n-1)$$

gebracht werden.

Führt man nun die Grössen $g_0, g_1, \dots g_{n-1}$ statt der Grössen $e_1, e_2, \dots e_n$ als Haupteinheiten ein, so erhält man ein vereinfachtes Multiplicationsverfahren, bei welchem jede der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ eine ganze Function der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ ist, oder auch einen der Werthe 0, 1 hat. Dasselbe lässt sich nun auch folgendermassen formuliren.

Man verstehe unter ξ eine unbestimmte Grösse mit einer unbenannten Haupteinheit und setze

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \dots + \varepsilon_n.$$

Ferner werde, wenn

$$a = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}} \qquad (\mathfrak{a} = 0, 1, \ldots n-1)$$

ist, die Function

$$\sum_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} \xi^{\mathfrak{a}}$$

als die zu a gehörige Function von ξ bezeichnet, sowie umgekehrt a die zu dieser Function gehörige Grösse genannt. Dann lässt sich das Multiplicationsverfahren kurz so ausdrücken:

Es seien $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ die zu zwei gegebenen Grössen a, b gehörigen Functionen, $\chi(\xi)$ der Rest, welcher bei der Division des Productes $\varphi(\xi).\psi(\xi)$ durch $f(\xi)$ bleibt, so dass man

$$\varphi(\xi).\psi(\xi) = \vartheta(\xi).f(\xi) + \chi(\xi)$$

hat — wo $\vartheta(\xi)$, $\chi(\xi)$ ganze Functionen der Grösse ξ von nicht höherem als beziehlich dem $(n-2)^{\text{ten}}$ und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade sind —, und c die zu $\chi(\xi)$ gehörige Grösse, so ist

$$ab = c.$$

Umgekehrt lässt sich leicht zeigen, dass die in den Gleichungen

$$ab = ba, \qquad (ab)c = (ac)b, \qquad a(b+c) = ab + ac$$

ausgesprochenen Gesetze der Multiplication bestehen, wenn man nach willkürlicher Annahme der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ das angegebene Multiplicationsverfahren anwendet. Dasselbe lässt sich übrigens unverändert auch auf ein Product von mehr als zwei Factoren anwenden.

Die Function $f(\xi)$ werde in Factoren ersten oder zweiten Grades mit reellen Coefficienten zerlegt; diese seien $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots f_r(\xi)$, und in jedem derselben sei der Coefficient der höchsten Potenz von ξ gleich Eins.

Angenommen nun, es seien unter diesen Factoren gleiche vorhanden und es komme z. B. der Factor $f_1(\xi)$ λ-mal vor, so setze man

$$f(\xi) = f_1^{\lambda}(\xi).F(\xi),$$
$$\varphi(\xi) = f_1(\xi).F(\xi).\varphi_1(\xi),$$

unter $\varphi_1(\xi)$ eine ganze Function mit willkürlich anzunehmenden reellen Coefficienten verstehend, deren Grad kleiner ist als der von $f_1^{\lambda-1}(\xi)$ — wo dann, wenn $\lambda = 2$ und $f_1(\xi)$ vom ersten Grade ist, $\varphi_1(\xi)$ auf eine Constante sich reducirt —, so ist

$$\varphi^{\lambda}(\xi) \text{ durch } f(\xi)$$

theilbar. Es ergiebt sich aber aus dem angegebenen Multiplicationsverfahren, dass ein Product beliebig vieler Factoren den Werth Null hat, wenn das Product der zugehörigen Functionen durch $f(\xi)$ theilbar ist. Folglich hat man, wenn x die zu $\varphi(\xi)$ gehörige complexe Grösse ist,

$$x^{\lambda} = 0.$$

Diese Gleichung besteht also für unendlich viele Werthe von x.

Wenn also für die Arithmetik der aus n Haupteinheiten gebildeten Grössen gelten soll, dass ausschliesslich algebraische Gleichungen von der oben angegebenen Beschaffenheit möglicherweise unendlich viele Wurzeln haben, so müssen von den Werthsystemen der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$, welche den aus den Gleichungen (7.) sich ergebenden Bedingungsgleichungen genügen, ausser den bereits angegebenen noch alle diejenigen ausgeschlossen werden, bei denen für irgend eine Grösse g die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ solche Werthe erhalten, dass die Discriminante der Gleichung

$$\xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \dots + \varepsilon_n = 0$$

verschwindet.

Es lässt sich aber nachweisen, dass die in Rede stehende Forderung stets befriedigt wird, wenn für ein bestimmtes Werthsystem der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

Aus den Gleichungen (9.) erhält man für jede Grösse

$$x = \sum_{\mathfrak{a}} \xi_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots n)$$

eine Gleichung

$$X_0 x^{n+1} + X_1 x^n + \dots + X_n x = 0,$$

wo

$$X_0 = |\xi_{\mu}^{(\nu)}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n)$$

und die Coefficienten $X_1, \dots X_n$ ebenso wie X_0 homogene ganze Functionen von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ sind. Dann sind von den fraglichen Werthsystemen der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ nur diejenigen auszuschliessen, für welche entweder die oben mit ε bezeichnete Determinante, oder X_0, oder endlich die Discriminante der Gleichung

$$X_0 \xi^n + X_1 \xi^{n-1} + \dots + X_n = 0$$

identisch verschwindet.

Denn man wähle aus den übrigen Systemen irgend eins aus und gebe den Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ bestimmte Werthe, der Art dass weder ε, noch X_0, noch die genannte Discriminante gleich Null wird, setze

$$(15.)\qquad g = \sum_{\mathfrak{a}} \xi_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}, \qquad g_0 = \frac{g}{g}, \qquad g_{\mathfrak{n}} = g^{\mathfrak{n}}, \qquad \varepsilon_{\mathfrak{a}} = \frac{X_{\mathfrak{a}}}{X_0},$$

und definire die Multiplication auf die vorhin angegebene Weise mit Hülfe der Function

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \dots + \varepsilon_n.$$

Den Functionen, welche zu den mit einander zu multiplicirenden Grössen gehören, gebe man aber eine andere Form. Unter den vorhin mit $f_1(\xi)$, $f_2(\xi), \dots f_r(\xi)$ bezeichneten Factoren giebt es jetzt weder gleiche, noch solche, die einen gemeinschaftlichen Theiler haben; man kann also dem Quotienten $\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)}$, wenn $\varphi(\xi)$ eine beliebige ganze Function von nicht höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade mit reellen Coefficienten ist, die Gestalt

$$(16.)\qquad \frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\varphi_1(\xi)}{f_1(\xi)} + \frac{\varphi_2(\xi)}{f_2(\xi)} + \dots + \frac{\varphi_r(\xi)}{f_r(\xi)}$$

geben, in der Art, dass $\varphi_\mu(\xi)$ eine reelle Constante oder eine ganze lineare Function von ξ mit reellen Coefficienten ist, jenachdem $f_\mu(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist. In dieser Form wollen wir uns fortan $\varphi(\xi)$ dargestellt denken. Die Gesammtheit der Grössen, für welche die zugehörige Function von ξ die Form

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \varphi_\mu(\xi)$$

hat, und die mit $\mathfrak{G}_\mu$ bezeichnet werde, bildet nun eine Mannigfaltigkeit von einer oder von zwei Dimensionen, jenachdem $f_\mu(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist, indem alle in ihr enthaltenen Grössen im ersten Falle aus der zu $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ gehörigen Grösse, im anderen aber aus den zu $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$, $\frac{\xi f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ gehörigen zwei Grössen abgeleitet werden können. Demnach lehrt die Gleichung (16.), dass jede dem betrachteten Gebiete angehörige Grösse a dargestellt werden kann als Summe von r anderen $(a_1, \dots a_r)$, die beziehlich den Theilgebieten $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ angehören und die Componenten von a genannt werden mögen. Dabei ist noch zu bemerken: Nach (16.) ist $\varphi(\xi)$ nur dann identisch gleich Null, wenn sämmtliche $\varphi_\mu(\xi)$ es sind. Eine Grösse a hat also nur dann den Werth

Null, wenn ihre Componenten $(a_1, \dots a_r)$ sämmtlich verschwinden; woraus noch folgt, dass a nur auf eine einzige Art als Summe von r den Gebieten $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_r$ angehörigen Grössen dargestellt werden kann.

Dies vorausgeschickt, seien nun a_μ, b_ν zwei Grössen, die den Theilgebieten $\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{G}_\nu$ angehören, und

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\varphi_\mu(\xi), \qquad \psi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f_\nu(\xi)}\psi_\nu(\xi)$$

die zu ihnen gehörigen Functionen. Dann ist, wenn $\mu \gtrless \nu$, $\varphi(\xi).\psi(\xi)$ durch $f(\xi)$ theilbar, also

$$a_\mu . b_\nu = 0. \tag{17.}$$

Wenn aber $\nu = \mu$, so ist aus der Gleichung

$$\varphi(\xi).\psi(\xi) = \vartheta(\xi).f(\xi)+\chi(\xi)$$

ersichtlich, dass $\chi(\xi)$ den Theiler $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$, also die Form $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\chi_\mu(\xi)$ hat, wo $\chi_\mu(\xi)$ eine Constante oder eine ganze lineare Function von ξ ist, jenachdem $f_\mu(\xi)$ vom ersten oder zweiten Grade ist. Es ist also $a_\mu . b_\mu$ eine Grösse, die demselben Theilgebiete angehört, wie a_μ, b_μ.

Es ist ferner ersichtlich, dass das Product

$$\varphi(\xi).\psi(\xi) = \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \cdot \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \cdot \varphi_\mu(\xi)\psi_\mu(\xi)$$

nur dann durch $f(\xi)$ theilbar sein kann, wenn eine der Functionen $\varphi_\mu(\xi)$, $\psi_\mu(\xi)$ identisch gleich Null ist. Denn da $f_\mu(\xi)$ und $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muss, wenn

$$\frac{1}{f_\mu(\xi)} \cdot \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \cdot \varphi_\mu(\xi)\psi_\mu(\xi)$$

eine ganze Function sein soll, $\varphi_\mu(\xi).\psi_\mu(\xi)$ durch $f_\mu(\xi)$ theilbar sein, wozu erforderlich ist, dass $\varphi_\mu(\xi).\psi_\mu(\xi)$ identisch gleich Null sei, was in dem Falle, wo $f_\mu(\xi)$ vom ersten Grade ist, unmittelbar erhellt, in dem andern Falle aber daraus folgt, dass $f_\mu(\xi)$ nicht ein Product zweier linearen Functionen von ξ mit reellen Coefficienten ist.

Hiernach wird das Product zweier demselben Theilgebiete angehörenden Grössen nur in dem Falle gleich Null, wo einer seiner Factoren verschwindet.

Nun seien $g', g'', \dots g^{(r)}$ die Componenten der Grösse g_0, so folgt, wenn a_μ irgend eine dem Gebiet $\mathfrak{G}_\mu$ angehörige Grösse ist, aus den Gleichungen

$$(18.)\qquad g_0 = g'+g''+\cdots+g^{(r)}, \qquad g_0 a_\mu = g^{(\mu)} a_\mu, \qquad g_0 a_\mu - a_\mu = 0,$$

dass

$$(19.)\qquad g^{(\mu)} a_\mu = a_\mu$$

ist.

Wenn nun $f_\mu(\xi)$ vom ersten Grade ist, so kann jede dem Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ angehörige Grösse in der Form $\alpha g^{(\mu)}$ dargestellt werden, und es ist

$$(20.)\qquad (\alpha g^{(\mu)})(\beta g^{(\mu)}) = (\alpha\beta) g^{(\mu)}.$$

Wenn dagegen $f_\mu(\xi)$ vom zweiten Grade ist, so sei $h^{(\mu)}$ irgend eine nicht aus $g^{(\mu)}$ ableitbare Grösse des Gebietes $\mathfrak{G}_\mu$, so kann jede andere Grösse des Gebietes aus $g^{(\mu)}$ und $h^{(\mu)}$ abgeleitet werden; es ist also auch

$$h^{(\mu)} h^{(\mu)} = \gamma h^{(\mu)} + \gamma' g^{(\mu)},$$

oder

$$(21.)\qquad (h^{(\mu)} - \tfrac{1}{2}\gamma g^{(\mu)})^2 - (\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2) g^{(\mu)} g^{(\mu)} = 0.$$

Die Grösse $\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2$ ist nothwendig negativ. Denn wäre sie positiv oder gleich Null, so würde das Product der beiden dem Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Grössen

$$h^{(\mu)} - (\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2}) g^{(\mu)}, \qquad h^{(\mu)} - (\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\gamma' + \tfrac{1}{4}\gamma^2}) g^{(\mu)}$$

gleich Null, ohne dass einer seiner Factoren verschwände.

Setzt man also

$$(22.)\qquad k^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{4}\gamma^2)}} h^{(\mu)} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{-(\gamma' + \frac{1}{2}\gamma^2)}} g^{(\mu)},$$

so ist $k^{(\mu)}$ eine Grösse des Gebietes $\mathfrak{G}_\mu$, für welche die Gleichung

$$(23.)\qquad k^{(\mu)} k^{(\mu)} = -g^{(\mu)}$$

besteht. Man kann dann jede Grösse des Gebietes in der Form

$$\alpha g^{(\mu)} + \alpha' k^{(\mu)}$$

darstellen, und es ist

$$(24.)\qquad (\alpha g^{(\mu)} + \alpha' k^{(\mu)})(\beta g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}) = (\alpha\beta - \alpha'\beta') g^{(\mu)} + (\alpha'\beta + \alpha\beta') k^{(\mu)}.$$

Es lassen sich also statt der ursprünglichen Haupteinheiten $(e_1, e_2, \dots e_n)$ n andere, aus denen alle Grössen des betrachteten Gebietes ebenfalls abgeleitet werden können, dergestalt einführen, dass erstens in jedem der Theilgebiete $\mathfrak{G}_\mu$ alle Grössen, jenachdem der Grad der zugehörigen Function $f_\mu(\xi)$ 1 oder 2 ist, aus einer dieser neuen Einheiten oder aus zweien sich ableiten lassen, und dass zweitens die Multiplication zweier diesem Theilgebiete angehörigen Grössen im ersten Fall so wie bei den aus 1 abgeleiteten (sogenannten reellen) Grössen (Gleichung (20.)), im andern Falle aber nach der für die Multiplication der gewöhnlichen complexen, aus zwei Haupteinheiten (1 und $i = \sqrt{-1}$) abgeleiteten Grössen geltenden Regel (Gleichung (24.)) ausgeführt werden kann.*)

Sind dann a, b zwei beliebige Grössen des Gebietes, und $a_1, a_2, \dots a_r$ die Componenten von a, $b_1, b_2, \dots b_r$ die Componenten von b, so ist

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r; \tag{25.}$$

d. h. man findet für jedes der Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ die ihm angehörige Componente des Products ab, wenn man die entsprechenden Componenten der Factoren mit einander multiplicirt, was nach einer der Formeln (20.), (24.) auszuführen ist.

Soll das Product ab gleich Null sein, so müssen die sämmtlichen Producte $a_\mu b_\mu$ es sein, also in jedem derselben einer der Factoren verschwinden. Ist also keine der Componenten von b gleich Null, so kann ab nur verschwinden, wenn a gleich Null ist. Sind dagegen einige Componenten von b gleich Null, so ist, damit ab verschwinde, nothwendig und hinreichend, dass die den übrigen Componenten von b entsprechenden Componenten von a sämmtlich gleich Null sind. Theiler der Null sind also sämmtliche Grössen b, deren Componenten nicht sämmtlich von Null verschiedene Werthe haben.

Ist b nicht ein Theiler von Null, so ergiebt sich aus (25.)

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_r}{b};\tag{26.}$$

und aus (20.), (24.)

$$\frac{\alpha g^{(\mu)}}{\beta g^{(\mu)}} = \frac{\alpha}{\beta} g^{(\mu)},\tag{27.}$$

---

*) Zu demselben Resultate ist, wie Ihnen bekannt, auf einem anderen Wege auch Herr Hazzidakis gekommen.

wenn $\mathfrak{G}_\mu$ eine einfache Mannigfaltigkeit,

$$(28.)\qquad \frac{\alpha g^{(\mu)}+\alpha' k^{(\mu)}}{\beta g^{(\mu)}+\beta' k^{(\mu)}} = \frac{\alpha\beta+\alpha'\beta'}{\beta\beta+\beta'\beta'}g^{(\mu)}+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\beta\beta+\beta'\beta'}k^{(\mu)},$$

wenn $\mathfrak{G}_\mu$ eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen ist.

Nimmt man zu den vorstehenden Formeln für die Multiplication und Division noch folgende hinzu

$$(29.)\qquad \begin{cases} a+b = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_r+b_r) \\ a-b = (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_r-b_r), \end{cases}$$

so erkennt man die Richtigkeit des nachstehenden Satzes:

Sind beliebig viele Grössen $a, b, c, d, \ldots$ des betrachteten Gebietes gegeben und es soll aus denselben durch eine bestimmte Rechnung, bei der nur die elementaren Rechnungsoperationen (Addition, Subtraction, Multiplication und Division) in Anwendung kommen, eine andere Grösse abgeleitet werden; so erhält man die Componente der letzteren für jedes Theilgebiet $\mathfrak{G}_\mu$, wenn man die vorgeschriebene Rechnung mit den diesem Gebiete angehörenden Componenten der Grössen $a, b, c, d, \ldots$ ausführt.

Angenommen nun, es seien $a, b, \ldots l$ gegebene Grössen, und es sei eine unbekannte Grösse x so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$a+bx+\cdots+lx^\lambda = 0$$

bestehe.

Die Coefficienten einer solchen Gleichung können auch (a ausgenommen) unbenannte, aus einer Haupteinheit gebildete Grössen sein. Dann kann man aber, wenn z. B. in der Gleichung das Glied αx^m vorkommt, dafür $(\alpha g_0)x^m$ setzen; man braucht also nur den Fall zu betrachten, wo alle Coefficienten complexe Grössen des betrachteten Gebietes sind.

Es seien $x_\mu, a_\mu, b_\mu, \ldots l_\mu$ die dem Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Componenten von $x, a, b, \ldots l$, so hat der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung nach dem Vorstehenden im Gebiete $\mathfrak{G}_\mu$ die Componente

$$a_\mu+b_\mu x_\mu+\cdots+l_\mu x_\mu^\lambda;$$

es zerfällt also die vorgelegte Gleichung in die folgenden r Gleichungen

$$a_\mu+b_\mu x_\mu+\cdots+l_\mu x_\mu^\lambda = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r).$$

Eine Gleichung von dieser Form, in der die Coefficienten und ebenso die zu bestimmende Grösse Grössen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten sind, kann aber — wenn für sie die Definition der Multiplication wie im Vorhergehenden (Gleichungen (20.), (24.)) gegeben wird — nur dann unendlich viele Wurzeln haben, wenn alle ihre Coefficienten gleich Null sind.

Die vorgelegte Gleichung kann also nur in dem Falle durch unendlich viele Werthe von x befriedigt werden, wenn wenigstens für einen Werth von μ

$$a_\mu,\ b_\mu,\ \dots\ l_\mu$$

sämmtlich gleich Null sind.

Nehmen wir an, es finde dies statt für $(r-\varrho)$ Werthe von μ, und diese seien $\varrho+1, \dots r$, so dass man

$$a = \sum_\mu a_\mu,\quad b = \sum_\mu b_\mu,\quad \dots\quad l = \sum_\mu l_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots \varrho)$$

hat. Nimmt man dann eine Grösse

$$k = \sum_\mu k_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \dots \varrho)$$

wo k_μ eine von Null verschiedene Grösse des Gebietes $\mathfrak{G}_\mu$ bedeutet, willkürlich an, so kann man die Grössen $a', b', \dots l'$ so bestimmen, dass

$$a = ka',\quad b = kb',\quad \dots\quad l = kl'$$

wird. Denn es sei a'_μ die Componente von a' in $\mathfrak{G}_\mu$, so ist

$$ka' = \sum_\mu k_\mu a'_\mu,$$

es muss also $a'_\mu = \frac{a_\mu}{k_\mu}$ sein für $\mu = 1, 2, \dots \varrho$, während a'_μ für $\mu = \varrho+1, \dots r$ willkürlich angenommen werden kann. Ebenso werden $b', \dots l'$ bestimmt. (Nimmt man für sämmtliche $a'_\mu, b'_\mu, \dots l'_\mu$, wenn $\mu > \varrho$ ist, von Null verschiedene Grössen an, so sind die Grössen $a', b', \dots l'$ nicht mehr so beschaffen, wie die $a, b, \dots l$, nämlich es findet nicht mehr statt, dass für einen bestimmten Werth von μ die Componenten $a'_\mu, b'_\mu, \dots l'_\mu$ sämmtlich verschwinden.)

Hiermit ist nun bewiesen:

Wenn die arithmetischen Grundoperationen so definirt werden, wie im Vorhergehenden geschehen, so findet in der That statt, was oben als Forderung hingestellt worden ist: eine algebraische Gleichung

$$a+bx+\cdots+lx^{\lambda} = 0$$

kann nur in dem Falle durch unendlich viele Werthe von x befriedigt werden, wenn alle ihre Coefficienten aus einem und demselben Theiler der Null durch Multiplication mit anderen Grössen hervorgehen.

Sie sehen, lieber College, aus der vorstehenden Darlegung, dass bei meiner Untersuchung über die Möglichkeit einer Arithmetik der complexen Grössen mit beliebig vielen Haupteinheiten zwei Gesichtspunkte als massgebend im Auge gehalten worden sind: es sollen nicht nur für das Addiren, Multipliciren u. s. w. complexer Grössen die in den obigen Gleichungen (1.), (2.) ausgesprochenen formalen Gesetze gelten, sondern es sollen zugleich zwischen der Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen und der Arithmetik der aus einer Haupteinheit gebildeten Grössen nur solche Unterschiede bestehen, die in der Natur der Sache begründet sind, d. h. welche sich herausstellen, wie man auch unter Aufrechterhaltung der ersten Forderung die arithmetischen Operationen definiren möge. In der gewöhnlichen Arithmetik gilt nun, dass eine Grösse, welche algebraisch von andern gegebenen abhängt, im Allgemeinen, d. h. wenn specielle, bestimmt charakterisirbare Werthsysteme der gegebenen Grössen ausgeschlossen werden, stets nur eine endliche Anzahl von Werthen haben kann. Dies ist von solch wesentlicher Bedeutung, dass eine Arithmetik complexer Grössen, für die nicht dasselbe gälte, eine von der gewöhnlichen ganz verschiedene sein und nicht als eine naturgemässe Verallgemeinerung der letzteren betrachtet werden könnte.

Wie man nun aber auch die Multiplication — auf die es allein ankommt — der ersten Forderung entsprechend definiren mag, es zeigt sich, dass es stets algebraische Gleichungen giebt, welche unendlich viele Wurzeln haben. Als Gleichungen dieser Art geben sich zunächst diejenigen zu erkennen, deren Coefficienten aus einem und demselben Theiler der Null durch Multiplication desselben mit anderen Grössen hervorgehen. Da es immer Theiler der Null giebt (wenn man nämlich in dem Falle, wo $n = 1$ oder 2 ist, die Null selbst als solchen auffasst), so ist die Existenz solcher Gleichungen in der Natur der Sache begründet. Zugleich hat sich aber gezeigt, dass es andere Gleichungen mit unendlich vielen Wurzeln nur giebt, wenn unter den das Multiplicationsverfahren bestimmenden Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ gewisse, nicht durch die Multiplicationsgesetze bedingte Relationen stattfinden. Solche Werthsysteme der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ mussten also ausgeschlossen werden, wenn die Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen soweit, als überhaupt möglich, mit der gewöhnlichen in Übereinstimmung gebracht werden sollte. Dass aber dies auch genüge, um den gestellten Forderungen gerecht zu werden, ist im Vorhergehenden streng bewiesen.

Aus dem Obigen geht noch hervor, dass die Gleichung

$$a + bx + \cdots + lx^{\lambda} = 0$$

durch keinen Werth von x befriedigt werden kann, wenn für irgend einen Werth von μ die Grössen $b_{\mu}, \ldots l_{\mu}$ sämmtlich verschwinden, a_{μ} aber nicht. Will man nun die weitere Forderung stellen, dass in jedem andern Falle die Gleichung wirklich Wurzeln haben solle, die dem betrachteten Grössengebiete angehören — mit anderen Worten, will man die Vorstellung imaginärer Wurzeln beseitigen —, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass jedes der Theilgebiete $\mathfrak{G}_{\mu}$ eine zweifache Mannigfaltigkeit sei — d. h. man hat bei der Festsetzung des Multiplicationsverfahrens die Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ so anzunehmen, dass die Gleichung

$$\xi^{n} + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \cdots + \varepsilon_n = 0$$

keine reelle Wurzel hat, so dass also n gerade sein muss. Dann hat die Gleichung

$$a + bx + \cdots + lx^{\lambda} = 0$$

$\lambda^{\frac{1}{2}n}$ Wurzeln, wofern l nicht ein Theiler der Null ist — die Modificationen, die eintreten, wenn l ein solcher Theiler ist, sind leicht festzustellen —, ein Satz, der dem für $n = 2$ geltenden nicht widerspricht, sondern als eine Verallgemeinerung desselben zu betrachten ist.

Wenn ich nun mit dem Ergebniss der vorstehenden Untersuchung die im Anfang angeführte Gaussische Bemerkung, dass complexe Grössen mit mehr als zwei Haupteinheiten in der allgemeinen Arithmetik unzulässig seien, zusammenhalte, so scheint es mir, dass Gauss diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, dass das Product zweier Grössen, sobald $n > 2$, verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren den Werth Null hat. Denn hätte er diesen Umstand nicht als ein unübersteigliches Hinderniss für die Einführung der allgemeinen complexen Grössen in die Arithmetik betrachtet, so würde es ihm schwerlich entgangen sein, dass sich eine Arithmetik dieser Grössen begründen lässt, in welcher alle Sätze entweder mit denen der Arithmetik der gewöhnlichen complexen Grössen identisch sind oder doch in der letzteren ihr Analogon finden. Er würde dann auch ohne Zweifel seinen Ausspruch dahin modificirt haben, dass die Einführung der allgemeinen complexen Grössen in der Arithmetik zwar nicht unstatthaft, wohl aber überflüssig sei. In der That geht aus dem oben (Seite 324) ausgesprochenen Satze hervor, dass die Arithmetik der allgemeinen complexen Grössen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Grössen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre.

Gestatten Sie mir nunmehr auf die in Ihrem Briefe enthaltenen, auf den besprochenen Gegenstand sich beziehenden Bemerkungen einzugehen.

Wenn in dem betrachteten Gebiete nach Fixirung der Grössen $\varepsilon_{a,b,c}$ eine Reihe von Grössen g_0, g_1, g_2 u. s. w. existiren soll, für welche die obigen Formeln (14.), (15.) gelten, und durch die sich jede andere Grösse des Gebietes in der Form

$$\alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_{n-1} g_{n-1}$$

ausdrücken lässt, so darf (ausser ε) die im Vorstehenden mit X_0 bezeichnete Function der unbestimmten Grössen $\xi_1, \ldots \xi_n$ nicht identisch verschwinden. Dass dies an sich nicht unmöglich sei, geht aus dem mir von Ihnen mitgetheilten Beispiele des Herrn Kyparissos Stephanos evident hervor — mir war es aber durch Erwägungen bekannt, die geeignet sind, auf die Frage betreffend die Einführung allgemeiner complexer Grössen und die möglichen Verallgemeinerungen der gebräuchlichen arithmetischen Algorithmen noch von einer anderen Seite her Licht zu werfen, und über die ich noch einiges sagen möchte. Vorher will ich nur noch erwähnen, dass ich mich in früheren Vorträgen auf die Möglichkeit des identischen Verschwindens der Function X_0 gar nicht eingelassen, sondern nur bewiesen habe, dass dieselbe im Allgemeinen nicht identisch gleich Null sei. Wahrscheinlicherweise habe ich mich dabei nicht deutlich genug ausgedrückt. Im vergangenen Semester,*) wo ich über den Gegenstand abermals im Seminar vorgetragen, habe ich aber ausdrücklich gesagt, ich werde mich zunächst auf den Fall beschränken, in welchem die Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ solche Werthe haben, dass weder ε, noch X_0, noch die Discriminante der Gleichung

$$X_0\xi^n + X_1\xi^{n-1} + \cdots + X_n = 0$$

identisch verschwinde. Unter dieser Annahme wurde der soeben angeführte Satz (Seite 324) bewiesen, was mir diesmal die Hauptsache war. Am Schlusse sollten dann die Erörterungen folgen, die mir jene in Betreff der Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ gemachte Annahme als nothwendig erscheinen lassen. Leider reichte zu dem Letzteren die Zeit nicht aus, ich werde in diesem Semester darauf zurückkommen.

Für Grössen, die aus einer Haupteinheit gebildet sind, lassen sich die Multiplicationsgesetze auch aus den folgenden Grundgleichungen ableiten:

$$\text{(A.)}\qquad \begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac,\\ (a+b)c &= ac+bc,\\ a(bc) &= (ab)c. \end{aligned}$$

Die beiden ersten begründen das sogenannte distributive, die dritte das associative Gesetz. Das commutative Gesetz $ab = ba$ ist dann eine Folge der genannten. Bei complexen Grössen gilt dies nicht mehr allgemein; man kommt vielmehr bei Zugrundelegung der Gleichungen (A.) auch zu Algorithmen, bei denen ab nicht gleich ba ist. Unter diesen Algorithmen ist z. B. Hamilton's Quaternionencalcul enthalten, in welchem das commutative Gesetz nicht gilt.

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich ebenso wie oben

$$\text{(B.)}\qquad \Big(\sum_{\mathfrak{a}}\alpha_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{a}}\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{a}}e_{\mathfrak{a}}\Big) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{a}}, \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1,2,\ldots n)$$

wenn

$$\text{(C.)}\qquad e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{a}}\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{a}}$$

*) Winter-Semester 1882—83.

gesetzt wird. Unter den Grössen $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ müssen dann die aus den Gleichungen

$$\text{(D.)}\qquad e_{\mathfrak{b}}(e_{\mathfrak{c}}e_{\mathfrak{b}}) = (e_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{c}})e_{\mathfrak{b}}$$

sich ergebenden Relationen stattfinden, während man aber $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ und $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ nicht als gleich annehmen darf.

Nimmt man an, was nothwendig ist, dass, wenn der Werth eines Products und einer seiner Factoren gegeben ist, dadurch im Allgemeinen auch der andere Factor eindeutig bestimmt sei, so lässt sich mittels der dritten der Gleichungen (A.) die Existenz einer Grösse g_0 beweisen, für welche

$$g_0 b = b g_0 = b$$

ist, bei beliebiger Annahme der Grösse b. Ferner folgt aus derselben Gleichung, dass

$$a^{\mathfrak{m}} a^{\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = a^{\mathfrak{n}} a^{\mathfrak{m}}$$

ist. Setzt man nun wie oben

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n, \\ x^\nu &= \xi_1^{(\nu)} e_1 + \xi_2^{(\nu)} e_2 + \cdots + \xi_n^{(\nu)} e_n, \end{aligned}$$

so ergiebt sich wieder eine Gleichung

$$X_0 x^{n+1} + X_1 x^n + \cdots + X_n x = 0,$$

in der die Coefficienten $X_0, X_1, \ldots X_n$ homogene ganze Functionen der Grössen ξ sind. Ist nun X_0 nicht identisch gleich Null, so kann man ganz dieselben Schlüsse machen wie oben; es muss sich eine Reihe von Grössen g_0, g_1, g_2 u. s. w. so bestimmen lassen, dass man

$$\text{(E.)}\qquad g_{\mathfrak{m}} g_{\mathfrak{n}} = g_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$$

hat, und dass sich jede Grösse a des Gebietes in der Form

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_{n-1} g_{n-1}$$

darstellen lasse. Dann hat man

$$\Big(\sum_{\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{a}} \beta_{\mathfrak{a}} g_{\mathfrak{a}}\Big) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} (\alpha_{\mathfrak{a}}\beta_{\mathfrak{b}}) g_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b} = 0, 1, \ldots n-1).$$

Hiernach gilt für das Product zweier beliebigen Grössen a, b das Gesetz

$$ab = ba,$$

sobald die Function X_0 nicht identisch verschwindet.

Da nun z. B. für die Quaternionen dieses Gesetz nicht gilt, so muss man schliessen, dass die Function X_0 auch identisch verschwinden kann. Man ist also auch nicht berechtigt, in dem Falle, wo man von den Gleichungen (2.) ausgeht, von der Function X_0, auf die man alsdann kommt, anzunehmen, dass sie nicht identisch verschwinden könne, was ja, wie das Beispiel des Herrn Stephanos lehrt, in der That der Fall sein kann.

Das von Herrn Stephanos gefundene Multiplicationsverfahren ist enthalten in der Formel

$$\begin{aligned}(\alpha_0 e_0+\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_{n-1}e_{n-1})(\beta_0 e_0+\beta_1 e_1+\cdots+\beta_{n-1}e_{n-1})\\ = \alpha_0\beta_0 e_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)e_1+\cdots+(\alpha_0\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}\beta_0)e_{n-1}.\end{aligned}$$

Für eine beliebige Grösse

$$x = \alpha_0 e_0+\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_{n-1}e_{n-1}$$

gilt dann die Gleichung

$$x^2-2\alpha_0 x+\alpha_0^2 e_0 = 0,$$

die bei gegebenem Werthe von α_0 also durch unendlich viele Werthe von x befriedigt wird. Nach den im Vorstehenden entwickelten Grundsätzen würde also ein solches Multiplicationsverfahren zu den unzulässigen gehören.

Ich bemerke noch, dass bei Adoptirung desselben auch für ein gerades n die Lösung der Gleichung

$$x^2 = a = \alpha_0 e_0+\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_{n-1}e_{n-1}$$

nicht immer möglich sein würde, nämlich dann nicht, wenn α_0 negativ ist.

Indem ich diesen langen Brief überlese, finde ich, dass sich an ihm sehr bemerkbar macht, dass er in Folge mancherlei Störungen mit vielen Unterbrechungen geschrieben worden ist. Wollen Sie es also mit Nachsicht aufnehmen, wenn Sie darin manche Wiederholungen, manche zu umständliche Darstellung finden. Es lag mir daran, Ihnen einmal eine authentische Darstellung meiner Theorie der complexen Grössen zu geben; die Aufzeichnungen auch der besten Zuhörer enthalten doch manches unrichtig Aufgefasste — mit oder ohne Schuld des Docenten —, namentlich, wo es sich nicht bloss um Wiedergabe von Rechnungen handelt.

Wollen Sie von dem Mitgetheilten für Ihre Vorträge Gebrauch machen, so habe ich selbstverständlich nichts dagegen. Auch wenn Sie Einwendungen zu machen haben, so enthalten Sie mir dieselben nicht vor.

. . . .

(Geschlossen den 27. Juni 1883.)

Zusätzliche Bemerkungen zu dem vorstehenden Briefe.

(Von Herrn H. A. Schwarz.)

1.

Seite 315. »Daraus ergiebt sich die Existenz einer Grösse e_0 von der Eigenschaft, dass $e_0 a = a e_0 = a$ ist für jeden Werth von a.«

Ist nämlich a eine Grösse, für welche ε nicht gleich Null ist, so ist $\frac{a}{a}$ eine Grösse, mit der multiplicirt jede andere Grösse unverändert bleibt. Diese Grösse $\frac{a}{a} = e_0$ hat aber für jeden Werth von a einunddenselben Werth; es ist nämlich, wenn a' eine andere Grösse bezeichnet, für welche ε ebenfalls nicht verschwindet,

$$\frac{a}{a} = \frac{a'}{a'},$$

indem diese beiden Grössen mit a multiplicirt einander gleich werden.

2.

Seite 316. »Dann existiren, wenn man von particulären Werthsystemen der Grössen ξ'_ν absieht, unendlich viele Werthsysteme $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, für welche die Gleichungen

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{X'_1}{X'_0}, \quad \dots \quad \frac{X_m}{X_0} = \frac{X'_m}{X'_0}$$

bestehen.«

Die Richtigkeit dieser Behauptung kann folgendermassen dargethan werden.

Die rationalen Functionen $\frac{X_\mu}{X_0}$ der n von einander unabhängigen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ mögen mit

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \qquad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

bezeichnet werden. Die Coefficienten dieser rationalen Functionen haben ausschliesslich reelle Werthe, und die Anzahl n der unabhängigen Variablen, von welchen dieselben abhängen, ist grösser als die Anzahl m der betrachteten Functionen.

Nun besteht ganz allgemein der Satz:

Wenn m rationale Functionen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_m$ mit ausschliesslich reellen Coefficienten von mehr als m veränderlichen Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ gegeben sind, so kann man den letzteren stets unendlich viele Systeme solcher reellen Werthe beilegen, dass für alle diese Werthsysteme jede der gegebenen Functionen denselben Werth erhält.

Um diesen Satz zu beweisen, denke man sich für die Umgebung einer nicht singulären Stelle $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ im Gebiete der reellen Werthe der unabhängigen Variablen die Differenzen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) - \mathfrak{f}_\mu(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') \qquad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

in Reihen entwickelt, welche nach Potenzen der Grössen $\xi_\nu - \xi_\nu'$ $(\nu = 1, 2, \dots n)$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten.

Es ergeben sich also m Gleichungen von der Form

$$(1.) \qquad \mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) - \mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{P}_\mu(\xi_1 - \xi_1', \xi_2 - \xi_2', \dots \xi_n - \xi_n'),$$

in welchen $\mathfrak{g}_\mu$ den Werth $\mathfrak{f}_\mu(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ bezeichnet.

Die Grössen $\mathfrak{g}_\mu$ und die Coefficienten der einzelnen Glieder der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu$ haben reelle Werthe.

Wenn nun die Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu$ auf die in denselben enthaltenen linearen Glieder reducirt werden, und es ist unter den Determinanten m^{ter} Ordnung, welche aus den Systemen der $m.n$ Coefficienten dieser linearen Glieder gebildet werden können, für ein nicht singuläres System von Argumentwerthen $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ mindestens eine von Null verschieden, so möge angenommen werden — da es auf die Reihenfolge, in welcher die n Argumente mit $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ bezeichnet werden, nicht ankommt —, dass die Determinante

$$(2.) \qquad \left| \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \xi_\nu} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots m)$$

für das betrachtete System von Argumentwerthen $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ einen von Null verschiedenen Werth habe.

Unter dieser Voraussetzung können bekanntlich die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_\mu(\xi_1-\xi_1', \xi_2-\xi_2', \dots \xi_n-\xi_n') = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \dots m) \tag{3.}$$

in Bezug auf die Grössen $\xi_1-\xi_1', \xi_2-\xi_2', \dots \xi_m-\xi_m'$ als Unbekannte durch Reihenentwickelungen aufgelöst werden, welche nach Potenzen der Grössen $\xi_{m+1}-\xi_{m+1}', \dots \xi_n-\xi_n'$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und für alle der Stelle $(\xi_{m+1}', \dots \xi_n')$ hinreichend nahe liegenden Werthsysteme $(\xi_{m+1}, \dots \xi_n)$ convergiren. Diese Potenzreihen haben reelle Coefficienten, und das constante Glied derselben hat den Werth Null.

Hieraus ergiebt sich aber, da das System der Werthe $(\xi_{m+1}, \dots \xi_n)$ in der Umgebung der Stelle $(\xi_{m+1}', \dots \xi_n')$ willkürlich gewählt werden kann, die Richtigkeit des angeführten Lehrsatzes.

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass für das System der Functionen $\mathfrak{f}_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n), \dots \mathfrak{f}_n(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ jede Functionaldeterminante m^{ter} Ordnung den Werth Null hat; dann sind die Werthe der Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu$ nicht mehr, wie in dem ersten Falle, von einander unabhängig, sondern die Werthe einiger derselben sind durch die Werthe der übrigen bereits bestimmt.

In diesem Falle kann man annehmen, dass, während alle Functionalsubdeterminanten des Systemes der Functionen $\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, deren Ordnungszahl gleich r oder grösser als r ist, den Werth Null haben, mindestens eine der Functionalsubdeterminanten $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für das Werthsystem $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ der unabhängigen Variablen einen von Null verschiedenen Werth habe.

Da es bei dieser Annahme weder auf die Reihenfolge, in der die Functionen $\mathfrak{f}_\mu$ mit $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots \mathfrak{f}_m$, noch auf die Reihenfolge, in der die Argumente ξ_ν mit $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ bezeichnet werden, ankommt, so kann man von der Voraussetzung ausgehen, es habe die Determinante

$$\left| \frac{\partial \mathfrak{f}_\mu}{\partial \xi_\nu} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots r-1) \tag{4.}$$

für das betrachtete nicht singuläre Werthsystem $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ der Argumente einen von Null verschiedenen Werth.

Zu dem Systeme der Functionen $\mathfrak{f}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \dots r-1)$ füge man eine von diesen Functionen unabhängige rationale Function $\mathfrak{f}_0$ derselben Argumente

$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ hinzu und wähle zugleich aus der Gesammtheit der übrigen Functionen $\mathfrak{f}_\mu$, für welche also $\mu > r-1$ ist, eine beliebige aus, etwa $\mathfrak{f}_r$.

Die Function $\mathfrak{f}_0$ möge der Bedingung gemäss gewählt werden, dass die Functionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{f}_\mu}{\partial \xi_\nu}\right| \qquad (\mu = 0, 1, \dots r-1;\ \nu = 1, 2, \dots r) \tag{5.}$$

für das betrachtete Werthsystem $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ einen von Null verschiedenen Werth hat, was auf unendlich viele Arten geschehen kann.

Es ergiebt sich dann, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \mathfrak{f}_\mu, \qquad \mathfrak{f}_\mu(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n') = \mathfrak{g}_\mu$$

gesetzt wird, ein System von r Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu - \mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{P}_\mu(\xi_1-\xi_1', \xi_2-\xi_2', \dots \xi_n-\xi_n'), \qquad (\mu = 0, 1, \dots r-1) \tag{6.}$$

welches bei Beschränkung der Veränderlichkeit der Grössen

$$\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \dots \mathfrak{f}_{r-1};\ \xi_{r+1}, \dots \xi_n$$

auf eine gewisse Umgebung der Stelle

$$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \dots \mathfrak{g}_{r-1};\ \xi_{r+1}', \dots \xi_n')$$

in Bezug auf die Grössen $\xi_1-\xi_1', \xi_2-\xi_2', \dots \xi_r-\xi_r'$ als Unbekannte durch convergente Potenzreihen

$$\xi_\nu - \xi_\nu' = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(\mathfrak{f}_0-\mathfrak{g}_0, \mathfrak{f}_1-\mathfrak{g}_1, \dots \mathfrak{f}_{r-1}-\mathfrak{g}_{r-1};\ \xi_{r+1}-\xi_{r+1}', \dots \xi_n-\xi_n') \quad (\nu = 1, 2, \dots r) \tag{7.}$$

aufgelöst werden kann.

Es giebt also unendlich viele der Umgebung der nicht singulären Stelle $(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_n')$ angehörende Systeme von reellen Werthen $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, welche die Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \mathfrak{g}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots r-1)$$

befriedigen.

Für die Differenz

$$\mathfrak{f}_r(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) - \mathfrak{g}_r = \mathfrak{P}_r(\xi_1-\xi_1', \xi_2-\xi_2', \dots \xi_n-\xi_n')$$

ergiebt sich nun ebenfalls in Folge der Gleichungen (7.) eine convergente

Potenzreihe

$$(8.)\quad \mathfrak{f}_r(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)-\mathfrak{g}_r = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r(\mathfrak{f}_0-\mathfrak{g}_0, \mathfrak{f}_1-\mathfrak{g}_1, \dots \mathfrak{f}_{r-1}-\mathfrak{g}_{r-1};\ \xi_{r+1}-\xi'_{r+1}, \dots \xi_n-\xi'_n).$$

Aus dem Umstande aber, dass für das System der von den n Argumenten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ abhängenden Functionen $\mathfrak{f}_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots r$) der Voraussetzung zufolge alle Functionaldeterminanten r^{ter} Ordnung den Werth Null haben, wird gefolgert, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r}{\partial\mathfrak{f}_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r}{\partial\xi_\nu} \qquad (\nu = r+1, r+2, \dots n)$$

identisch gleich Null sind; es kommen also in der Potenzreihe $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_r$ Glieder, welche von den Grössen $\mathfrak{f}_0, \xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots \xi_n$ unmittelbar abhängen, nicht vor.

Ein ganz analoger Schluss gilt für jede der Differenzen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)-\mathfrak{g}_\mu \qquad (\mu = r+1, r+2, \dots m).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen besteht also, wenn dem Index μ irgend einer der Werthe $r, r+1, \dots m$ beigelegt wird, jedesmal eine Gleichung von der Form

$$(9.)\quad \mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)-\mathfrak{g}_\mu = \overline{\overline{\mathfrak{P}}}_\mu(\mathfrak{f}_1-\mathfrak{g}_1, \mathfrak{f}_2-\mathfrak{g}_2, \dots \mathfrak{f}_{r-1}-\mathfrak{g}_{r-1}) \qquad (\mu = r, r+1, \dots m).$$

Werden daher den Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ solche, einer gewissen Umgebung der Stelle $(\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_n)$ angehörenden Werthe beigelegt, für welche die Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \mathfrak{g}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \dots r-1)$$

erfüllt sind, so befriedigen diese Werthe auch die Gleichungen

$$\mathfrak{f}_\mu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \mathfrak{g}_\mu, \qquad (\mu = r, r+1, \dots m)$$

da in allen hier mit $\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}, \overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ bezeichneten Potenzreihen das constante Glied den Werth Null hat.

Hiermit ist die allgemeine Richtigkeit des angeführten Lehrsatzes dargethan.

3.

Seite 316. »Die Determinante $|\xi_{\mu}^{(\nu)}|$ ist .... im Allgemeinen nicht identisch gleich Null, wie man leicht nachweisen kann.«

Dieser Nachweis kann dadurch geführt werden, dass man ein specielles Multiplicationsverfahren aufstellt, bei dessen Zugrundelegung die Gleichungen (7.) auf Seite 313 erfüllt sind und für welches die in Rede stehende Determinante sich als im Allgemeinen von Null verschieden erweist.

Ein solches Multiplicationsverfahren ist durch die Gleichungen

$$e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}} = e_{\mathfrak{a}}, \qquad e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{b}} = 0 \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt.

Bei Zugrundelegung dieses Multiplicationsverfahrens geht die Determinante $|\xi_{\mu}^{(\nu)}|$ in die Determinante $|\xi_{\mu}^{\nu}|$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$ über; die letztere aber hat, wenn je zwei der Grössen ξ_{μ} von einander verschieden sind und keine dieser Grössen gleich Null ist, einen von Null verschiedenen Werth.

4.

Seite 320—324. Man kann die Frage aufwerfen, ob die in Rede stehenden Theilgebiete von der Wahl der Grösse g abhängig sind oder nicht. Es lässt sich zeigen, dass das Letztere der Fall ist — vorausgesetzt, dass g kein Theiler der Null sei und dass die Determinante $|\xi_{\mu}^{(\nu)}| = X_0$ sowohl als auch die Discriminante der Gleichung $f(\xi) = 0$ einen von Null verschiedenen Werth habe.

Es sei bei Zugrundelegung einer bestimmten Grösse

$$g = \sum_{\mathfrak{a}} \xi'_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}$$

r' die Anzahl der Theilgebiete $\mathfrak{G}_{\varrho}$, welche Mannigfaltigkeiten einer Dimension, r'' die Anzahl der Theilgebiete $\mathfrak{G}_{\sigma}$, welche Mannigfaltigkeiten zweier Dimensionen sind, so dass $r = r' + r''$, $n = r' + 2r''$ ist, während die Indices ϱ, σ zwei ganze Zahlen bezeichnen, von denen die erste r', die zweite r'' von einander verschiedene Werthe annehmen kann.

Denkt man sich nun die Grössen $g^{(\varrho)}$ und die Grössenpaare $g^{(\sigma)}, k^{(\sigma)}$ zu neuen Haupteinheiten gewählt, so ist die Grösse e_0 bestimmt durch die Gleichung

$$e_0 = \sum_{\varrho} g^{(\varrho)} + \sum_{\sigma} g^{(\sigma)} \qquad \text{[Siehe Seite 322 (18.)].}$$

Es bezeichne jetzt x eine beliebige Grösse des betrachteten Gebietes, es sei also

$$x = \sum_{\varrho} \eta_{\varrho} g^{(\varrho)} + \sum_{\sigma} (\eta_{\sigma} g^{(\sigma)} + \zeta_{\sigma} k^{(\sigma)}),$$

so ergiebt sich, wenn festgesetzt wird, dass die Bezeichnungen

$$\eta g^{(\sigma)} + \zeta k^{(\sigma)} \quad \text{und} \quad (\eta + \zeta i) g^{(\sigma)} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

gleichbedeutend sein sollen, aus der Gleichung

$$x = \sum_{\varrho} \eta_{\varrho} g^{(\varrho)} + \sum_{\sigma} (\eta_{\sigma} + \zeta_{\sigma} i) g^{(\sigma)}$$

durch Erhebung beider Seiten in die ν^{te} Potenz die Gleichung

$$x^{\nu} = \sum_{\varrho} \eta_{\varrho}^{\nu} g^{(\varrho)} + \sum_{\sigma} (\eta_{\sigma} + \zeta_{\sigma} i)^{\nu} g^{(\sigma)}.$$

Denkt man sich nun n aus einer unbenannten Haupteinheit gebildete Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bestimmt, welche der Bedingung genügen, dass die Gleichung

$$x^n + \varepsilon_1 x^{n-1} + \varepsilon_2 x^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n e_0 = 0$$

besteht, was stets möglich ist, so ergiebt sich, dass die algebraische Gleichung

$$x^n + \varepsilon_1 x^{n-1} + \varepsilon_2 x^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n = 0$$

im Gebiete der aus den Haupteinheiten 1 und $i = \sqrt{-1}$ gebildeten gewöhnlichen complexen Grössen die Wurzeln η_{ϱ}, $\eta_{\sigma} + \zeta_{\sigma} i$, $\eta_{\sigma} - \zeta_{\sigma} i$ besitzt. Es ergiebt sich hieraus, wenn mit ξ eine veränderliche aus einer unbenannten Haupteinheit gebildete Grösse bezeichnet wird, die Identität

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n \\ &= \prod_{\varrho} (\xi - \eta_{\varrho}) \prod_{\sigma} (\xi^2 - 2\eta_{\sigma} \xi + \eta_{\sigma}^2 + \zeta_{\sigma}^2), \end{aligned}$$

durch welche die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ als ganze homogene Functionen der Grössen $\eta_{\varrho}, \eta_{\sigma}, \zeta_{\sigma}$ bestimmt sind.

Wenn die Coordinaten der betrachteten complexen Grösse x bezogen auf die früheren Haupteinheiten $e_1, e_2, \ldots e_n$ mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden, so ist klar, dass die neuen Coordinaten $\eta_{\varrho}, \eta_{\sigma}, \zeta_{\sigma}$ der Grösse x ganze homogene Functionen ersten Grades der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind.

Aus dem Umstande, dass die im Vorstehenden mit $f(\xi)$ bezeichnete Function und die von Herrn Weierstrass ebenso bezeichnete mit einander übereinstimmen, ergeben sich folgende Sätze:

1. Die mit $X_1, X_2, \dots X_n$ bezeichneten ganzen Functionen der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ sind in Folge der Bedingungen, welchen die Grössen $\varepsilon_{a,b,c}$ unterworfen sind, durch die Function X_0 theilbar.

2. Jede Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ im Gebiete der aus 1 und $\sqrt{-1}$ gebildeten gewöhnlichen complexen Grössen ist eine ganze homogene Function ersten Grades der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$.

3. Die Grössen

$$f_\varrho(x) = x - \eta_\varrho e_0, \qquad f_\sigma(x) = (x - \eta_\sigma e_0)^2 + \zeta_\sigma^2 e_0$$

sind Theiler der Null, und zwar hat im Theilgebiete $\mathfrak{G}_\varrho$ die Componente von $f_\varrho(x)$, im Theilgebiete $\mathfrak{G}_\sigma$ die Componente von $f_\sigma(x)$ den Werth Null. Wenn die Discriminante der Gleichung $f(\xi) = 0$ einen von Null verschiedenen Werth hat, mit anderen Worten, wenn die Grössen $\eta_\varrho, \eta_\sigma + \zeta_\sigma i, \eta_\sigma - \zeta_\sigma i$ sämmtlich von einander verschieden sind, so hat keine andere Componente der Grössen $f_\varrho(x), f_\sigma(x)$ den Werth Null. Hieraus folgt aber, dass, wenn in dem Producte der r Factoren

$$\prod_\mu f_\mu(x) \qquad (\mu = 1, 2, \dots r)$$

ein beliebiger Factor $f_\nu(x)$ weggelassen wird, das Product der übrigen Factoren unter der angegebenen Voraussetzung eine von Null verschiedene dem Theilgebiete $\mathfrak{G}_\nu$ angehörende Grösse ist.

Hiermit ist bewiesen, dass die erklärten Theilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{G}_r$ sich **nicht** ändern, wenn an die Stelle der ihrer Definition zu Grunde liegenden Grösse $g = \sum_a \xi'_a e_a$ eine beliebige andere Grösse $x = \sum_a \xi_a e_a$ tritt, für welche die gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Die zu Anfang dieser Bemerkung aufgeworfene Frage ist hiermit beantwortet.

ZU LINDEMANN'S ABHANDLUNG: »ÜBER DIE LUDOLPH'SCHE ZAHL«.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 3. December 1885.)

Für die Ergebnisse der in der genannten Abhandlung*) mitgetheilten Untersuchungen des Herrn Lindemann, namentlich für den darin enthaltenen, bis dahin vergebens erstrebten Beweis, dass die Zahl π keine algebraische Zahl und somit die Quadratur des Kreises auf constructivem Wege unausführbar ist, hat sich in den weitesten Kreisen ein so lebhaftes Interesse kundgegeben, dass ich glaube, es werde eine möglichst elementar gehaltene, nur auf allbekannte Sätze sich stützende Begründung der Lindemann'schen Theoreme, wie ich sie im Nachstehenden zu geben versuche, zahlreichen Mathematikern willkommen sein.**)

---

*) Diese Abhandlung, deren Inhalt durch die Überschrift nur unvollständig angegeben wird, ist von mir am 22. Juni 1882 der Akademie vorgelegt worden und bald darauf etwas weiter ausgeführt auch in den »Mathematischen Annalen« (Bd. XX) erschienen.

**) Ich bemerke ausdrücklich, dass die Veröffentlichung dieses im Sommer 1882 entstandenen und seinem wesentlichen Inhalte nach am 26. October desselben Jahres in der Akademie vorgetragenen Aufsatzes im Einverständnisse mit Herrn Lindemann erfolgt, und dass ich damit nur bezwecke, die von demselben gegebenen oder angedeuteten Beweise seiner Sätze ohne wesentliche Modification der leitenden Grundgedanken zu vereinfachen und zu vervollständigen. Das erstere erreiche ich hauptsächlich dadurch, dass ich nicht, wie Herr Lindemann es thut, bei dem Leser die vollständige Kenntniss des Inhalts der berühmten Hermite'schen Abhandlung »Sur la fonction exponentielle« (Compt. rend. t. 77, 1873) voraussetze, sondern aus derselben nur die Methode zur Herleitung des in § 1 unter Nr. VI aufgestellten Hülfssatzes entnehme.

Der Aufsatz ist übrigens im Manuscript mehreren befreundeten Mathematikern mitgetheilt und dann unter Benutzung der Bemerkungen, die mir einige von ihnen haben zukommen lassen, umgearbeitet worden. Namentlich hat mir Herr H. A. Schwarz verschiedene redactionelle Änderungen vorgeschlagen, auf die ich gern eingegangen bin. Besonderen Dank schulde ich ferner Herrn Dedekind für eine auf den Beweis des im Anfange des § 3 aufgestellten Hülfssatzes sich beziehende Mittheilung, durch welche es mir möglich geworden ist, diesen Beweis wesentlich zu vereinfachen.

§ 1. Hülfssätze aus der Theorie der Exponentialfunction.

I. Es bedeute $[z, \lambda]$ für jeden ganzzahligen, nicht negativen Werth von λ die durch die Gleichung

$$\frac{[z, \lambda]}{\lambda!} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \frac{z^\varkappa}{\varkappa!} \tag{1.}$$

definirte ganze Function λ^{ten} Grades des Arguments z, ferner sei

$$g(z) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_\lambda z^\lambda \tag{2.}$$

eine beliebige ganze Function von z, und es werde gesetzt:

$$G(z) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_\lambda [z, \lambda]; \tag{3.}$$

dann besteht die Gleichung

$$g(z) e^{-z} dz = d(-G(z) e^{-z}), \tag{4.}$$

und es ist $G(z)$ eine ganze Function der Veränderlichen z von demselben Grade wie die Function $g(z)$.

Dabei ist zu bemerken, dass durch die vorstehende Gleichung die Function $G(z)$ eindeutig definirt wird.

II. Es seien

$$\begin{cases} f(z) = \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu z^{n+1-\nu} \\ h(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu \end{cases} \tag{5.}$$

zwei ganze Functionen von z, beziehlich vom $(n+1)^{\text{ten}}$ und vom n^{ten} Grade; die Coefficienten der zweiten sollen willkürlich anzunehmende Grössen und die Coefficienten der ersten nur der Beschränkung unterworfen sein, dass a_0 nicht gleich Null sein und die Function $f(z)$ mit ihrer ersten Ableitung $f'(z)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen darf. Man bestimme, unter m eine beliebig anzunehmende positive ganze Zahl verstehend, auf die in I. angegebene Weise eine Reihe von ganzen Functionen

$$H_0(z),\ H_1(z),\ \ldots\ H_m(z), \tag{6.}$$

welche den Gleichungen

$$(7.)\qquad \begin{cases} h(z)e^{-z}dz = d(-H_0(z)e^{-z}) \\ f'(z)H_{\mu-1}(z)e^{-z}dz = d(-H_\mu(z)e^{-z}) \qquad (\mu = 1, 2, \dots m) \end{cases}$$

genügen; dann hat man, wenn

$$(8.)\qquad h_0(z) = h(z), \qquad h_\mu(z) = f'(z)H_{\mu-1}(z) \qquad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

gesetzt wird, für $\mu = 0, 1, \dots m-1$

$$(9.)\qquad d\left(-\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!}\overset{m-\mu}{f(z)}e^{-z}\right) = \frac{h_\mu(z)}{(m-\mu)!}\overset{m-\mu}{f(z)}e^{-z}dz - \frac{h_{\mu+1}(z)}{(m-\mu-1)!}\overset{m-\mu-1}{f(z)}e^{-z}dz$$

und (für $\mu = m$)

$$(10.)\qquad d(-H_m(z)e^{-z}) = h_m(z)e^{-z}dz.$$

Aus diesen $(m+1)$ Gleichungen ergiebt sich, wenn man sie durch Addition mit einander vereinigt:

$$(11.)\qquad \frac{h(z)}{m!}\overset{m}{f(z)}e^{-z}dz = d\sum_{\mu=0}^{m}\left\{-\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!}\overset{m-\mu}{f(z)}e^{-z}\right\}.$$

Die Coefficienten der Functionen $[z, \lambda]$ sind, wie aus der Formel (1.) unmittelbar erhellt, ganze Zahlen; die Coefficienten der durch die Gleichung (3.) definirten Function $G(z)$ also ganze lineare Functionen der Grössen $b_0, b_1, \dots b_l$ mit ganzzahligen Coefficienten. Demgemäss lehren die Formeln (7.), dass jede der Functionen $H_0(z), H_1(z), \dots H_m(z)$ eine ganze Function der Grössen

$$z,\ a_0,\ a_1,\ \dots\ a_{n+1},\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_n$$

mit ganzzahligen Coefficienten ist.

III. Die im Vorstehenden definirte Function $H_m(z)$ ist niemals durch die Function $f(z)$ theilbar, ausgenommen in dem Falle, wo die Grössen $c_0, c_1, \dots c_n$ sämmtlich den Werth Null haben und somit jede der Functionen $H_0(z), H_1(z), \dots H_m(z)$ sich für jeden Werth von z auf Null reducirt.

Es werde gesetzt:

$$(12.)\qquad \overline{H}_m(z) = \sum_{\mu=0}^{m}\left\{\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!}\overset{m-\mu}{f(z)}\right\},$$

so ist (nach Gleichung (11.))

$$\overline{H}_m(z) - \frac{d\overline{H}_m(z)}{dz} = \frac{h(z)}{m!}\overset{m}{f}(z).$$

Wenn daher die Coefficienten der Function $h(z)$ nicht sämmtlich den Werth Null haben, so ist $\overline{H}_m(z)$ eine ganze Function von z, die nicht für jeden Werth dieser Grösse verschwindet und deren Grad (nach I.) nicht grösser ist als $m(n+1)+n = (m+1)(n+1)-1$. Bezeichnet man also mit $\varrho+1$ die kleinste positive ganze Zahl, für welche $\overline{H}_m(z)$ nicht durch $\overset{\varrho+1}{f}(z)$ theilbar ist, und setzt

$$\overline{H}_m(z) = H_m^*(z) f^{\varrho}(z),$$

so ist $H_m^*(z)$ eine ganze Function von z, die nicht für jeden Werth dieser Grösse verschwindet, und $\varrho \leqq m$. Man hat dann

$$\left(H_m^*(z) - \frac{dH_m^*(z)}{dz}\right) f(z) - \varrho H_m^*(z) f'(z) = \frac{h(z)}{m!}\overset{m-\varrho+1}{f(z)},$$

und es ist daher $\varrho H_m^*(z) f'(z)$ durch $f(z)$ theilbar. Dies aber ist, da die Functionen $f(z)$, $f'(z)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen und die Function $H_m^*(z)$ nicht durch $f(z)$ theilbar ist, nur der Fall für $\varrho = 0$; es ist also $f(z)$ kein Theiler von $\overline{H}_m(z)$ und somit, der Gleichung (12.) zufolge, auch kein Theiler der Function $H_m(z)$.

IV. Bezeichnet man (unter der Annahme, dass $n > 1$ sei) mit z', z'' irgend zwei derjenigen Werthe von z, für welche $f(z) = 0$ wird, so ergiebt sich aus der Gleichung (11.) die folgende:

$$H_m(z'')e^{-z''} - H_m(z')e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{h(z)}{m!}\overset{m}{f}(z) e^{-z} dz. \tag{13.}$$

Aus den Gleichungen (7.) und (1.) bis (4.) erhellt, dass die Function $H_m(z)$, bei unbestimmten Werthen der Grössen $c_0, c_1, \ldots c_n$, vom $(mn+n)^{\text{ten}}$ Grade ist und dass in derselben die Coefficienten von

$$z^{mn+n},\ z^{mn+n-1},\ \ldots\ z^{mn+n-(m-1)}$$

beziehlich durch

$$a_0^m,\ a_0^{m-1},\ \ldots\ a_0$$

theilbar sind. Daraus folgt, dass die Function $a_0^{m(n-1)} H_m(z)$ sich auf die

Form

$$a_0^{m(n-1)} H_m(z) = G(z,m) f(z) + g(z,m) \tag{14.}$$

bringen lässt, in der Art, dass $G(z,m)$, $g(z,m)$ beide ganze Functionen der Grössen z, a_0, a_1, ... a_{n+1}, c_0, c_1, ... c_n mit ganzzahligen Coefficienten werden und $g(z,m)$ in Beziehung auf z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade ist. Die Gleichung (13.) kann also in die folgende verwandelt werden:

$$g(z'',m)e^{-z''} - g(z',m)e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{h(z)(a_0^{n-1}f(z))^m}{m!} e^{-z} dz. \tag{15.}$$

Die Coefficienten der Functionen $H_m(z)$, $G(z,m)$, $g(z,m)$ sind, wie für die erste aus ihrer oben angegebenen Bildungsweise, für die beiden anderen aber aus der vorstehenden Definition derselben hervorgeht, homogene ganze lineare Functionen der willkürlich anzunehmenden Grössen c_0, c_1, ... c_n. Wenn man daher, unter ν irgend eine der Zahlen $0, 1, \dots n$ verstehend, mit $g_\nu(z,m)$ die Function bezeichnet, in welche $g(z,m)$ dadurch übergeht, dass man $c_\nu = 1$ und die übrigen der Grössen c_0, c_1, ... c_n sämmtlich gleich Null annimmt, so hat man

$$g(z,m) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z,m), \tag{16.}$$

und es gehen aus der Gleichung (15.) die folgenden $(n+1)$ Gleichungen hervor:

$$g_\nu(z'',m)e^{-z''} - g_\nu(z',m)e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{z^\nu(a_0^{n-1}f(z))^m}{m!} e^{-z} dz \qquad (\nu = 0, 1, \dots n). \tag{17.}$$

Die Functionen $g_\nu(z,m)$ sind ganze Functionen der Grössen z, a_0, a_1, ... a_{n+1} mit ganzzahligen Coefficienten. Bezeichnet man ferner mit $G_\nu(z,m)$ die Function, in welche $G(z,m)$ durch die Annahme

$$h(z) = z^\nu$$

übergeht, so ist

$$\left\{\begin{aligned} G(z,m) &= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu G_\nu(z,m) \\ a_0^{m(n-1)} H_m(z) &= f(z) \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu G_\nu(z,m) + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z,m), \end{aligned}\right. \tag{18.}$$

und es ergiebt sich aus der letzten Gleichung, da $H_m(z)$ (nach III.) nur dann durch $f(z)$ theilbar ist, wenn die Grössen c_ν sämmtlich verschwinden, dass der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, m)$$

nur dann für jeden Werth von z gleich Null ist, wenn jede der Grössen $c_0, c_1, \dots c_n$ den Werth Null hat — mit anderen Worten, dass unter den in den Gleichungen (17.) vorkommenden $(n+1)$ ganzen Functionen von z

$$g_0(z, m),\ g_1(z, m),\ \dots\ g_n(z, m)$$

für keinen Werth von m eine lineare Abhängigkeit stattfindet.

Aus dieser Eigenschaft der Functionen $g_\nu(z, m)$ ergiebt sich ferner:

Giebt man der Grösse z irgend $(n+1)$ bestimmte Werthe

$$z_0,\ z_1,\ \dots\ z_n,$$

unter denen keine zwei gleiche sich finden, so hat die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda, m)| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \dots n)$$

stets einen von Null verschiedenen Werth.

Wäre nämlich diese Determinante gleich Null, so würden sich $(n+1)$ Grössen $c_0, c_1, \dots c_n$ so bestimmen lassen, dass die $(n+1)$ Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z_\lambda, m) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \dots n)$$

beständen, ohne dass sämmtliche Grössen $c_0, c_1, \dots c_n$ den Werth Null hätten. Dann würde aber der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, m),$$

der eine ganze Function der Veränderlichen z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade ist, für jeden Werth von z verschwinden, was nach dem Vorhergehenden nicht stattfinden kann.

V. Da

$$\frac{z^\nu (a_0^{n-1} f(z))^m}{m!} e^{-z}$$

eine (transcendente) ganze Function von z ist, so hat das Integral auf der Rechten der Gleichung (17.) bei gegebenen Werthen von m, ν, z', z'' einen von dem Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Werth, den man, unter τ eine auf das Intervall $(0\ldots 1)$ beschränkte reelle Veränderliche verstehend, in der Form

$$\int_0^1 \frac{(z''-z')(z'+(z''-z')\tau)^\nu [a_0^{n-1}f(z'+(z''-z')\tau)]^m}{m!} e^{-z'-(z''-z')\tau}d\tau$$

darstellen kann. Es lässt sich aber, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, eine ganze Zahl M so bestimmen, dass für jeden Werth von m, der grösser als M ist, und für jeden der betrachteten Werthe von τ

$$\left|\frac{(z''-z')(z'+(z''-z')\tau)^\nu [a_0^{n-1}f(z'+(z''-z')\tau)]^m}{m!} e^{-z'-(z''-z')\tau}\right| < \delta$$

und somit auch, nach einem bekannten Satze, der absolute Betrag des Integrals

$$\int_{z'}^{z''} \frac{z^\nu (a_0^{n-1}f(z))^m}{m!} e^{-z}dz$$

kleiner als δ ist. Aus der Gleichung (17.) ergiebt sich also, wenn man beide Seiten derselben mit

$$e^{z''+z'}$$

multiplicirt,

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty}\{g_\nu(z',m)e^{z''}-g_\nu(z'',m)e^{z'}\} = 0 \qquad (\nu = 0,1,\ldots n). \tag{19.}$$

VI. Bis jetzt sind die Coefficienten der Function $f(z)$ keiner anderen Beschränkung als der oben (unter II.) angegebenen unterworfen worden. Setzt man aber nunmehr noch fest, dass dieselben sämmtlich gegebene ganze Zahlen sein sollen, so werden, nach dem oben (IV.) Bemerkten, für jeden Werth der Zahl m auch die Coefficienten der Functionen $g_\nu(z,m)$ sämmtlich ganze Zahlen. Man kann ferner, wenn $z_0, z_1, \ldots z_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ sind, den Gleichungen (19.) gemäss m so gross annehmen, dass jede der Differenzen

$$g_\nu(z_0,m)e^{z_\lambda}-g_\nu(z_\lambda,m)e^{z_0} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0,1,\ldots n\\ \nu = 0,1,\ldots n\end{pmatrix}$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig klein angenommene positive Grösse δ. Zugleich hat dann die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda,m)| \qquad (\lambda,\nu = 0,1,\ldots n)$$

einen von Null verschiedenen Werth, indem unter den Grössen $z_0, z_1, \ldots z_n$ keine zwei gleiche sich finden.

Damit ist ein Satz bewiesen, der im Folgenden hauptsächlich zur Begründung der Lindemann'schen Theoreme dienen wird und sich so aussprechen lässt:

»Es sei $f(z)$ eine ganze Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades der Veränderlichen z mit gegebenen ganzzahligen Coefficienten, die so beschaffen sind, dass die Gleichung

$$f(z) = 0$$

$(n+1)$ von einander verschiedene Wurzeln hat, welche mit

$$z_0, z_1, \ldots z_n$$

bezeichnet werden mögen. Alsdann lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, auf mannigfaltige Weise ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen

$$g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$$

des Arguments z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade, deren Coefficienten sämmtlich ganze Zahlen sind, so bestimmen, dass erstens jede der Differenzen

$$g_\nu(z_0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_0} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots n \\ \nu = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, und zweitens die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda)| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

einen von Null verschiedenen Werth hat.«

§ 2. Beweis, dass die Ludolph'sche Zahl π eine transcendente Zahl ist.

Da $e^{\pi i} = -1$ ist und die Function e^x nur für solche Werthe ihres Arguments, welche (ungrade) Vielfache von πi sind, den Werth -1 annimmt, so kann dem zu beweisenden Satze der folgende substituirt werden:

»Die Grösse $e^x + 1$ hat, wenn x eine algebraische Zahl ist, stets einen von Null verschiedenen Werth.«

Es bedeute x_1 irgend eine gegebene algebraische Zahl. Dieselbe sei Wurzel einer Gleichung r^{ten} Grades

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r = 0,$$

deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind — wobei angenommen werden darf, dass $r > 1$ sei, weil für $r = 1$ $e^{x_1} = e^{-c_1}$ und somit eine positive Grösse ist. Die vorstehende Gleichung hat dann ausser x_1 noch $(r-1)$ andere Wurzeln; werden diese mit $x_2, \ldots x_r$ bezeichnet, so ist es, damit der aufgestellte Satz bestehe, nothwendig und hinreichend, dass die Grösse

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda} + 1)$$

einen von Null verschiedenen Werth habe. Dies aber lässt sich folgendermaassen zeigen:

Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ von einander unabhängige Veränderliche, so hat man

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{\xi_\lambda} + 1) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r} e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r}, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r = 0, 1)$$

oder, wenn man $2^r = p$ setzt und die p Functionen

$$\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r = 0, 1)$$

in irgend einer Ordnung genommen, mit $\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{p-1}$ bezeichnet,

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{\xi_\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{\zeta_\mu}.$$

Sind also

$$z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$$

die Werthe, welche

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots \zeta_{p-1}$$

dadurch annehmen, dass man

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots \quad \xi_r = x_r$$

setzt, so ist

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu}.$$

Die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe, welche in der Reihe $z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$ vorhanden sind, sei $(n+1)$, und es mögen die Ausdrücke $\zeta_0, \zeta_1, \dots \zeta_{p-1}$ so geordnet sein, dass unter den $(n+1)$ Grössen $z_0, z_1, \dots z_n$ keine zwei gleiche sich finden, und $z_0 = 0$ ist; wobei zu bemerken, dass $n+1 > 1$ ist, weil in der Reihe $z_0, z_1, \dots z_{p-1}$ auch die Grössen $x_1, \dots x_r$ enthalten sind. Dann kann man, unter z eine unbestimmte Grösse verstehend, eine ganze Function $f(z)$ vom Grade $(n+1)$ herstellen, welche nur ganzzahlige Coefficienten hat und für $z = z_0, z_1, \dots z_n$ verschwindet. Es kann nämlich das Product

$$\prod_{\mu=0}^{p-1} (z-\zeta_\mu)$$

dargestellt werden als ganze Function der Grössen $z, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ mit ganzzahligen Coefficienten, welche sich nicht ändert, wenn die Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ in beliebiger Weise permutirt werden, und sich somit, wenn man für $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ die Wurzeln einer Gleichung r^{ten} Grades mit lauter rationalen Zahlcoefficienten einsetzt, in eine ganze Function p^{ten} Grades von z mit eben solchen Coefficienten verwandelt. Es lässt sich also $\prod\limits_{\mu=0}^{p-1} (z-z_\mu)$ als ganze Function von z mit lauter rationalen Zahlcoefficienten darstellen; dividirt man diese Function dann durch den grössten Theiler, den sie mit ihrer ersten Ableitung gemein hat, so ist der Quotient eine ganze Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von z, aus der man, indem man sie mit einer passenden ganzen Zahl multiplicirt, eine Function

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \cdots + a_{n+1}$$

erhält, welche lauter ganzzahlige Coefficienten hat und für $z = z_0, z_1, \dots z_n$ verschwindet.

Nachdem diese Function $f(z)$ hergestellt worden, kann man aus ihr, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen

$$g_0(z),\ g_1(z),\ \dots\ g_n(z)$$

von der im Schlusssatz (VI.) des vorigen Paragraphen angegebenen Beschaffenheit ableiten, so dass, wenn man

$$g_\nu(0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda) = \varepsilon_{\lambda,\nu}\delta \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \dots n \\ \nu = 0, 1, \dots n \end{pmatrix}$$

setzt, jede der Grössen $\varepsilon_{\lambda,\nu}$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist.

Die Grössen $g_\nu(z_\lambda)$ sind sämmtlich algebraische Zahlen; multiplicirt man jede derselben mit a_0^n, so verwandeln sie sich alle in ganze algebraische Zahlen.*)

Nimmt man nun δ so klein an, dass $|(p-1)a_0^n\delta|<1$ ist, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$a_0^n g_\nu(0)\sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = \sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)+\varepsilon_\nu, \qquad (\nu=0,1,\dots n)$$

wo jede der Grössen ε_ν dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist.

Es ist aber

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(\zeta_\mu)$$

für jeden Werth von ν eine symmetrische ganze Function der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ mit ganzzahligen Coefficienten; also ist die ganze algebraische Zahl

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)$$

zugleich eine rationale Zahl, d. h. sie ist eine ganze Zahl im gewöhnlichen Sinne. Ferner lässt sich zeigen, dass die $(n+1)$ Zahlen

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) \qquad (\nu=0,1,\dots n)$$

nicht sämmtlich den Werth Null haben. Man hat nämlich

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) = \sum_{\lambda=0}^{n} N_\lambda g_\nu(z_\lambda),$$

---

*) Nach der von Herrn Kronecker eingeführten Terminologie heisst eine Grösse x eine algebraische Zahl, wenn sie einer algebraischen Gleichung von der Form

$$x^\nu + A_1 x^{\nu-1}+\dots+A_\nu = 0,$$

in der die Coefficienten $A_1, \dots A_\nu$ sämmtlich rationale Zahlen sind, genügt. Sind insbesondere diese Coefficienten sämmtlich ganze Zahlen, so wird x eine ganze algebraische Zahl genannt, und es ist in diesem Falle auch jede ganze rationale Function von x mit lauter ganzzahligen Coefficienten eine ganze algebraische Zahl.

Hiernach sind, da

$$a_0^n f(z) = (a_0 z)^{n+1}+a_1(a_0 z)^n+\dots+a_n a_0^{n-1}(a_0 z)+a_{n+1}a_0^n$$

ist, $a_0 z_0, a_0 z_1, \dots a_0 z_n$ sämmtlich ganze algebraische Zahlen, und dasselbe gilt also auch, da der Grad der Function $g_\nu(z)$ nicht grösser als n ist, von jeder der Grössen $a_0^n g_\nu(z_\lambda)$.

wo $N_0, N_1, \dots N_n$ sämmtlich positive ganze Zahlen sind; es müsste also, wenn die in Rede stehenden Zahlen alle den Werth Null haben sollten, die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda)| \qquad (\overline{\lambda, \nu} = 0, 1, \dots n)$$

gleich Null sein, was nicht der Fall ist.

Es giebt also mindestens einen bestimmten Werth von ν, für welchen

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu)$$

eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl, und somit

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\mu) + \varepsilon_\nu = a_0^n g_\nu(0) \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = a_0^n g_\nu(0) \prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda} + 1)$$

nicht gleich Null ist.

Daraus folgt unmittelbar, dass das Product

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda} + 1)$$

und somit auch jeder einzelne Factor desselben einen von Null verschiedenen Werth hat; w. z. b. w.

Damit ist, dem oben Bemerkten gemäss, dargethan, dass die Zahl πi und daher auch π selbst eine transcendente Zahl ist.

Als ein Corollar zu diesem Satze ergiebt sich, dass die »Quadratur des Kreises« eine unlösbare Aufgabe ist, wenn verlangt wird, dass sie durch eine geometrische Construction, bei der nur algebraische Curven und Flächen zur Anwendung kommen, bewerkstelligt werde. (Vergl. den Schlusssatz des § 3.)

§ 3. Allgemeinere, auf die Exponentialfunction sich beziehende Sätze.

I. Zunächst ist der folgende Hülfssatz zu beweisen. Es seien gegeben $(k+1)$ Reihen von je r Grössen:

$$\begin{array}{ll}
(1) & A_1', \; A_2', \; \dots A_r' \\
(2) & A_1'', \; A_2'', \; \dots A_r'' \\
. & \dots\dots\dots\dots \\
. & \dots\dots\dots\dots \\
(k) & A_1^{(k)}, \; A_2^{(k)}, \; \dots A_r^{(k)} \\
(k+1) & x_1, \; x_2, \; \dots x_r,
\end{array}$$

wobei angenommen werde, dass in jeder der k ersten Reihen wenigstens **eine** Grösse vorkomme, die einen von Null verschiedenen Werth hat, und in der letzten Reihe keine zwei gleiche Grössen sich finden. Man bilde das Product

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{r} A'_{\mathfrak{a}} e^{x_{\mathfrak{a}}} \cdot \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} A''_{\mathfrak{b}} e^{x_{\mathfrak{b}}} \ldots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{r} A^{(k)}_{\mathfrak{k}} e^{x_{\mathfrak{k}}}$$

und bringe dasselbe, welches mit P bezeichnet werde, auf die Form*)

$$P = \sum_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}} A'_{\mathfrak{a}} A''_{\mathfrak{b}} \ldots A^{(k)}_{\mathfrak{k}} e^{x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} + \cdots + x_{\mathfrak{k}}} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k} = 1, \ldots r).$$

Aus der Gesammtheit der Werthe, welche die aus k Gliedern bestehende Summe

$$x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} + \cdots + x_{\mathfrak{k}}$$

annimmt, wenn man für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}$ alle möglichen Systeme von k der Reihe $1, 2, \ldots r$ entnommenen Zahlen setzt, hebe man die von einander verschiedenen, deren Anzahl $(n+1)$ sein möge, heraus; bezeichnet man dieselben mit $z_0, z_1, \ldots z_n$, so ergiebt sich

$$P = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

wo für jeden bestimmten Werth von λ

$$C_\lambda = \sum_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}}' A'_{\mathfrak{a}} A''_{\mathfrak{b}} \ldots A^{(k)}_{\mathfrak{k}}$$

ist, unter der Bedingung, dass die Summation sich über diejenigen Werthsysteme $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}$, für welche $x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} + \cdots + x_{\mathfrak{k}} = z_\lambda$ ist, erstrecke. Es ist nun zu beweisen, **dass unter den so definirten Grössen C_λ mindestens eine sich findet, die nicht gleich Null ist.**

Die Grössen $x_1, \ldots x_r$ können sowohl imaginäre als reelle Werthe haben. Man betrachte eine complexe Grösse $t + t'i$ (wo t, t' reelle Grössen bezeichnen) als **positiv**, wenn $t > 0$ oder auch $t = 0$, $t' > 0$, dagegen als **negativ**, wenn

*) Es ist nothwendig, dass bei dieser Umformung von P das Argument der Exponentialgrösse, durch welche das Product aus den Factoren

$$e^{x_{\mathfrak{a}}}, e^{x_{\mathfrak{b}}}, \ldots e^{x_{\mathfrak{k}}}$$

dargestellt wird, gleich $x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} + \cdots + x_{\mathfrak{k}}$ genommen werde, und nicht etwa, was an sich gestattet wäre, gleich dieser Summe plus einem Vielfachen von $2\pi i$. Ohne diese Festsetzung würden die im Folgenden einzuführenden Grössen C_λ nicht gehörig bestimmt sein.

$t < 0$ oder auch $t = 0$, $t' < 0$ ist; dann darf man, da das Product P seinen Werth nicht ändert, wenn in dem gegebenen Grössensysteme irgend zwei Colonnen unter einander vertauscht werden, voraussetzen, es seien die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_r$ so geordnet, dass die Differenzen

$$x_1 - x_2,\ x_2 - x_3,\ \ldots\ x_{r-1} - x_r$$

sämmtlich positive Grössen sind.

Dies vorausgesetzt, nehme man aus jeder der obigen Reihen (1), (2), ... (k) die erste Grösse, welche nicht den Werth Null hat, heraus; diese sei A'_α in der ersten Reihe, A''_β in der zweiten, ..., $A^{(k)}_\varkappa$ in der k^{ten}, so ist

$$A'_\alpha A''_\beta \ldots A^{(k)}_\varkappa e^{x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\varkappa}$$

eines der Glieder, aus denen P zusammengesetzt wird. Irgend ein anderes Glied, dessen Coefficient nicht den Werth Null hat, sei

$$A'_\mathfrak{a} A''_\mathfrak{b} \ldots A^{(k)}_\mathfrak{k} e^{x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} + \cdots + x_\mathfrak{k}},$$

so ist

$$\mathfrak{a} \geqq \alpha,\ \mathfrak{b} \geqq \beta,\ \ldots\ \mathfrak{k} \geqq \varkappa,$$

und es giebt unter den Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{k}$ mindestens eine, welche grösser ist als die entsprechende der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$. Folglich ist

$$(x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\varkappa) - (x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} + \cdots + x_\mathfrak{k}) = (x_\alpha - x_\mathfrak{a}) + (x_\beta - x_\mathfrak{b}) + \cdots + (x_\varkappa - x_\mathfrak{k})$$

eine positive Grösse und somit $(x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} + \cdots + x_\mathfrak{k})$ nicht gleich $(x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\varkappa)$. Es findet sich also unter den Gliedern

$$A'_\mathfrak{a} A''_\mathfrak{b} \ldots A^{(k)}_\mathfrak{k} e^{x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} + \cdots + x_\mathfrak{k}}$$

keines, in welchem das Argument der Exponentialgrösse denselben Werth hätte, wie in dem Gliede

$$A'_\alpha A''_\beta \ldots A^{(k)}_\varkappa e^{x_\alpha + x_\beta + \cdots + x_\varkappa};$$

der Coefficient des letzteren ist also eine der Grössen C_λ, unter denen sich hiernach unter allen Umständen eine findet, welche nicht gleich Null ist.*)

*) Dass man in der Reihe der Grössen $C_0, C_1, \ldots C_n$ eine, die nicht gleich Null ist, ohne Weiteres auf die angegebene Weise ermitteln könne, wenn man die Grössen $x_1, \ldots x_r$ so auf einander folgen lässt, dass die Differenzen $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots x_{r-1} - x_r$ sämmtlich positive Werthe (in dem festgesetzten Sinne) erhalten, ist eine Bemerkung, die ich Herrn Dedekind verdanke.

II. Nunmehr seien, wie in § 2, $x_1, x_2, \dots x_r$ die Wurzeln einer Gleichung r^{ten} Grades

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r = 0,$$

deren Coefficienten sämmtlich gegebene rationale Zahlen sind, und deren Discriminante einen von Null verschiedenen Werth hat. Ferner seien $N_1, N_2, \dots N_r$ gegebene ganze Zahlen, unter denen wenigstens eine nicht gleich Null ist. Dann lässt sich beweisen, dass die Summe

$$\sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho e^{x_\varrho}$$

niemals den Werth Null hat.

Man bezeichne die Grössen, welche aus der vorstehenden Summe dadurch hervorgehen, dass man in derselben die Grössen $x_1, \dots x_r$ auf jede mögliche Weise permutirt, mit

$$X', X'', \dots X^{(k)},$$

wo $k = r!$ ist, so hat, wenn $\mathfrak{n}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots k$ bedeutet, $\mathrm{X}^{(\mathfrak{n})}$ die Form

$$\mathrm{X}^{(\mathfrak{n})} = \sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho^{(\mathfrak{n})} e^{x_\varrho},$$

wo die Reihe der Zahlen $N_1^{(\mathfrak{n})}, N_2^{(\mathfrak{n})}, \dots N_r^{(\mathfrak{n})}$ aus der Reihe $N_1, N_2, \dots N_r$ durch eine bestimmte Permutation der Glieder der letzteren hervorgeht. Setzt man dann

$$P = \prod_{\mathfrak{n}=1}^{k} \mathrm{X}^{(\mathfrak{n})},$$

so ist

$$(1.) \qquad P = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k}} N'_\mathfrak{a} N''_\mathfrak{b} \dots N^{(k)}_\mathfrak{k} e^{x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} + \cdots + x_\mathfrak{k}}, \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots \mathfrak{k} = 1, 2, \dots r)$$

woraus sich, wenn man die von einander verschiedenen Werthe der Grössen

$$x_\mathfrak{a} + x_\mathfrak{b} + \cdots + x_\mathfrak{k}, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots \mathfrak{k} = 1, 2, \dots r)$$

wie in I., mit $z_0, z_1, \dots z_n$ bezeichnet,

$$(2.) \qquad P = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda}$$

ergiebt, wo jetzt die Grössen C_λ sämmtlich ganze Zahlen sind, von denen, dem in I. Bewiesenen gemäss, wenigstens eine nicht gleich Null ist.

Mittels der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_r$ sind, kann man nun eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades mit lauter ganzzahligen Coefficienten herstellen, deren Wurzeln die Grössen $z_0, z_1, \dots z_n$ sind. Bildet man nämlich, unter $z, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ von einander unabhängige Veränderliche verstehend, aus den durch die Formel

$$z-(\xi_{\mathfrak{a}}+\xi_{\mathfrak{b}}+\cdots+\xi_{\mathfrak{k}}) \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots \mathfrak{k} = 1, 2, \dots r)$$

repräsentirten Grössen ein Product, so ist dasselbe eine ganze Function von $z, \xi_1, \dots \xi_r$ mit lauter ganzzahligen Coefficienten, und zugleich eine symmetrische Function von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$, verwandelt sich also, wenn man $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2, \dots \xi_r = x_r$ setzt, in eine ganze Function von z mit lauter rationalen Zahlcoefficienten, welche für $z = z_0, z_1, \dots z_n$, und zwar nur für diese Werthe von z, verschwindet. Dividirt man dann diese Function durch den grössten Theiler, den sie mit ihrer ersten Ableitung gemein hat, so ist der Quotient eine ganze Function $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, aus der man, indem man sie mit einer passenden ganzen Zahl multiplicirt, eine ganze Function

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \cdots + a_{n+1} \tag{3.}$$

erhält, welche lauter ganzzahlige Coefficienten hat und für $z = z_0, z_1, \dots z_n$ verschwindet.

Aus dieser Function $f(z)$ kann man nun, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen

$$g_0(z),\ g_1(z),\ \dots\ g_n(z)$$

von der im Schlusssatze (VI.) des § 1 angegebenen Beschaffenheit ableiten, so dass, wenn

$$g_\nu(z_0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_0} = \varepsilon_{\lambda,\nu}\delta \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \dots n\\ \nu = 0, 1, \dots n\end{pmatrix} \tag{4.}$$

gesetzt wird, jede der Grössen $\varepsilon_{\lambda,\nu}$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Dann ergiebt sich aus dem obigen Ausdrucke der Grösse P

$$a_0^n g_\nu(z_0)e^{-z_0}P = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) + a_0^n e^{-z_0}\delta \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\lambda,\nu} C_\lambda \qquad (\nu = 0, 1, \dots n). \tag{5.}$$

Hier ist nun jede der Grössen $a_0^n g_\nu(z_\lambda)$ eine ganze algebraische Zahl; es lässt sich aber zeigen, dass jede der $(n+1)$ Summen

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

eine ganze rationale Zahl, d. h. also eine ganze Zahl im gewöhnlichen Sinne ist.

Versteht man wieder unter $z, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ von einander unabhängige Veränderliche, so ist das Product

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{r} N'_{\mathfrak{a}} e^{\xi_{\mathfrak{a}}} . \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} N''_{\mathfrak{b}} e^{\xi_{\mathfrak{b}}} \dots \sum_{\mathfrak{k}=1}^{r} N^{(k)}_{\mathfrak{k}} e^{\xi_{\mathfrak{k}}}$$

und somit auch die Summe

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k}} N'_{\mathfrak{a}} N''_{\mathfrak{b}} \dots N^{(k)}_{\mathfrak{k}} e^{\xi_{\mathfrak{a}}+\xi_{\mathfrak{b}}+\dots+\xi_{\mathfrak{k}}} \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k} = 1, 2, \dots r)$$

eine symmetrische Function von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$. Entwickelt man dieselbe in eine Potenzreihe von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$, so ist die Summe der Glieder $\mathfrak{m}^{\text{ter}}$ Dimension dieser Reihe, nämlich

$$\frac{1}{\mathfrak{m}!} \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k}} N'_{\mathfrak{a}} N''_{\mathfrak{b}} \dots N^{(k)}_{\mathfrak{k}} (\xi_{\mathfrak{a}}+\xi_{\mathfrak{b}}+\dots+\xi_{\mathfrak{k}})^{\mathfrak{m}}, \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k} = 1, 2, \dots r)$$

und daher auch, wenn $g(z)$ eine beliebige ganze Function von z ist,

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k}} N'_{\mathfrak{a}} N''_{\mathfrak{b}} \dots N^{(k)}_{\mathfrak{k}} g(\xi_{\mathfrak{a}}+\xi_{\mathfrak{b}}+\dots+\xi_{\mathfrak{k}}) \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k} = 1, 2, \dots r)$$

eine symmetrische ganze rationale Function der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$. Die letztere erhält also, wenn man (für $\nu = 0, 1, \dots n$) $g(z) = g_\nu(z)$ annimmt und $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots \xi_r = x_r$ setzt, einen rationalen Werth, der sich durch Multiplication mit a_0^n in eine ganze Zahl verwandelt. Es ist aber nach dem Obigen für jeden bestimmten Werth von λ

$$C_\lambda = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k}}' N'_{\mathfrak{a}} N''_{\mathfrak{b}} \dots N^{(k)}_{\mathfrak{k}}, \tag{6.}$$

wenn die Summation über diejenigen Zahlensysteme, für welche

$$x_{\mathfrak{a}} + x_{\mathfrak{b}} + \dots + x_{\mathfrak{k}} = z_\lambda$$

ist, erstreckt wird, und daher

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\dots\mathfrak{k}} N'_{\mathfrak{a}} N''_{\mathfrak{b}} \dots N^{(k)}_{\mathfrak{k}} a_0^n g_\nu(x_{\mathfrak{a}}+x_{\mathfrak{b}}+\dots+x_{\mathfrak{k}}), \tag{7.}$$

also auch $\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda)$ eine ganze rationale Zahl.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Zahl wenigstens für einen Werth von ν einen von Null verschiedenen Werth hat. Da nämlich die Grössen C_λ nach I. nicht sämmtlich gleich Null sind, so müsste, wenn alle $(n+1)$ Zahlen

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

den Werth Null hätten, die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda)| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots n)$$

gleich Null sein, was nicht der Fall ist.

Nimmt man also die Grösse δ so klein an, dass jede der Grössen

$$a_0^n e^{-z_0} \delta \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\lambda,\nu} C_\lambda \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist, so findet sich unter den Grössen auf der Rechten der Gleichungen (5.) wenigstens eine, die nicht gleich Null ist; woraus sich unmittelbar ergiebt, dass das Product P, und somit auch die Grösse

$$\sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho e^{x_\varrho},$$

welche ein Factor dieses Productes ist, einen von Null verschiedenen Werth hat; was zu beweisen war.

Selbstverständlich gilt dieser Satz auch, wenn unter $N_1, N_2, \ldots N_r$ rationale Zahlen verstanden werden.

Nimmt man für $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene ganze Zahlen an, so ergiebt sich als ein besonderer Fall des vorstehenden Theorems der von Hermite bewiesene Satz, dass die Zahl e keine algebraische Zahl ist.

Eine naheliegende Verallgemeinerung des Theorems ergiebt sich folgendermaassen:

Sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r gegebene, von einander verschiedene algebraische Zahlen, so lässt sich stets eine algebraische Gleichung — im Allgemeinen von höherem als dem r^{ten} Grade — mit lauter rationalen Zahlcoefficienten und nicht verschwindender Discriminante herstellen, unter deren Wurzeln die gegebenen Grössen $x_1, x_2, \ldots x_r$ sich finden. Ist der Grad dieser

Gleichung gleich r, so sind $x_1, x_2, \ldots x_r$ solche r Grössen, für welche das bewiesene Theorem unmittelbar gilt. Hat die Gleichung aber ausser $x_1, x_2, \ldots x_r$ noch l andere Wurzeln

$$x_{r+1}, \ldots x_{r+l},$$

und werden unter $N_1, N_2, \ldots N_{r+l}$ rationale Zahlen verstanden, so ist

$$\sum_{\varrho=1}^{r+l} N_\varrho e^{x_\varrho}$$

nur in dem Falle gleich Null, wo $N_1, N_2, \ldots N_{r+l}$ sämmtlich den Werth Null haben. Nimmt man also für jeden Werth von ϱ, der grösser als r ist, $N_\varrho = 0$ an, so ergiebt sich:

Werden unter $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene algebraische Zahlen, unter $N_1, N_2, \ldots N_r$ aber beliebige rationale Zahlen verstanden, so kann die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} N_\varrho e^{x_\varrho} = 0$$

nur dadurch befriedigt werden, dass man jeder der Zahlen N_ϱ den Werth Null giebt.

III. Jetzt seien

$$X_1, X_2, \ldots X_r,$$
$$x_1, x_2, \ldots x_r$$

zwei Systeme von je r gegebenen algebraischen Zahlen, wobei angenommen werde, dass die Grössen $X_1, X_2, \ldots X_r$ nicht sämmtlich gleich Null seien, und unter den $x_1, x_2, \ldots x_r$ keine zwei gleiche sich finden.

Die Grössen $X_1, X_2, \ldots X_r$ lassen sich durch eine Grösse ξ, welche eine der Wurzeln einer bestimmten irreductiblen algebraischen Gleichung mit lauter rationalen Zahlcoefficienten ist, in der Form

$$X_1 = G_1(\xi), \quad X_2 = G_2(\xi), \quad \ldots \quad X_r = G_r(\xi)$$

ausdrücken, wo $G_1(\xi), G_2(\xi), \ldots G_r(\xi)$ ganze Functionen von ξ, deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, bedeuten. Bezeichnet man mit ξ' irgend eine andere Wurzel der genannten Gleichung, so sind die Grössen

$$G_1(\xi'), \; G_2(\xi'), \; \ldots \; G_r(\xi')$$

nicht alle gleich Null, weil der bekannten Eigenschaft einer irreductiblen Gleichung gemäss $G_\varrho(\xi')$ nicht gleich Null sein kann, wenn nicht (für denselben Werth von ϱ) auch $G_\varrho(\xi) = 0$ ist. Nun seien $\xi, \xi', \ldots \xi^{(k-1)}$ sämmtliche Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung, so bringe man das Product

$$P = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{r} G_{\mathfrak{a}}(\xi) e^{x_{\mathfrak{a}}} \cdot \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} G_{\mathfrak{b}}(\xi') e^{x_{\mathfrak{b}}} \ldots \sum_{\mathfrak{l}=1}^{r} G_{\mathfrak{l}}(\xi^{(k-1)}) e^{x_{\mathfrak{l}}}$$

auf die in I. beschriebene Weise, indem man für die dort mit

$$A'_\varrho, \quad A''_\varrho, \quad \ldots \quad A^{(k)}_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

bezeichneten unbestimmten Grössen beziehlich

$$G_\varrho(\xi), \; G_\varrho(\xi'), \; \ldots \; G_\varrho(\xi^{(k-1)})$$

substituirt, auf die Form

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

wo die Grössen $z_0, z_1, \ldots z_n$ also von einander verschiedene algebraische Zahlen sind, die $C_0, C_1, \ldots C_n$ aber zunächst als symmetrische ganze Functionen von $\xi, \xi', \ldots \xi^{(k-1)}$ mit lauter rationalen Zahlcoefficienten und sodann sämmtlich als rationale Zahlen dargestellt werden können. Da nun $C_0, C_1, \ldots C_n$ nicht sämmtlich gleich Null sind, so hat nach dem Schlusssatze von II. die Grösse

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda}$$

unter den in Betreff der Grössen $X_1, X_2, \ldots X_r, x_1, x_2, \ldots x_r$ gemachten Voraussetzungen einen von Null verschiedenen Werth. Dasselbe gilt also auch von dem Producte P und somit auch von dem Ausdrucke

$$\sum_{\varrho=1}^{r} X_\varrho e^{x_\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{r} G_\varrho(\xi) e^{x_\varrho},$$

der ein Factor des Productes ist.

Damit ist bewiesen:

»Werden unter $x_1, x_2, \ldots x_r$ irgend r von einander verschiedene, unter $X_1, X_2, \ldots X_r$ aber beliebige algebraische Zahlen verstanden, so kann die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} X_\varrho e^{x_\varrho} = 0$$

nur in dem Falle, wo $X_1, X_2, \ldots X_r$ sämmtlich den Werth Null haben, bestehen.«

In diesem von Lindemann ohne ausgeführten Beweis aufgestellten allgemeinen Satze finden die von Hermite begonnenen Untersuchungen über die Exponentialfunction ihren Abschluss.

IV. Schliesslich mögen noch einige, aus dem vorstehenden Theorem unmittelbar sich ergebende specielle Sätze angeführt werden.

Nimmt man $r = 2$, $X_1 = -1$, $x_2 = 0$ an und setzt x für x_1, X für X_2, so ergiebt sich, dass die Gleichung $e^x = X$ nicht bestehen kann, wenn x, X beide algebraische Zahlen sind und zugleich x einen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt:

»Die Exponentialgrösse e^x ist stets eine transcendente Zahl, wenn x eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist.«

»Der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl X ist immer eine transcendente Zahl, wenn X nicht den Werth 1 hat.«

Diese beiden, von Lindemann besonders hervorgehobenen Sätze scheinen mir zu den schönsten Sätzen der Arithmetik zu gehören.

Nimmt man ferner

$$r = 3, \qquad X_1 = i, \qquad X_2 = -i, \qquad x_2 = -x_1, \qquad x_3 = 0$$

an und setzt $\frac{xi}{2}$ für x_1, X für X_3, so ergiebt sich, dass die Gleichung

$$2 \sin \frac{x}{2} = X$$

nicht bestehen kann, wenn x, X beide algebraische Zahlen sind und x einen von Null verschiedenen Werth hat. Daraus folgt:

Ein Kreisbogen, dessen Sehne, durch den Halbmesser des Kreises gemessen, eine algebraisch ausdrückbare Länge hat, kann nicht durch eine geometrische Construction, bei der nur algebraische Curven und Flächen zur Anwendung kommen, rectificirt werden; ebensowenig ist der zu einem solchen Bogen gehörige Kreissector durch eine derartige Construction quadrirbar.

Hat nämlich in einem Kreise, dessen Halbmesser als Längeneinheit angenommen wird, ein Bogen die Länge x, seine Sehne also die Länge $2 \sin \frac{x}{2}$ und der zugehörige Kreissector den Inhalt $\frac{1}{2} x$, so würde, wenn durch eine Construction der angegebenen Art der Bogen rectificirbar oder der Sector quadrirbar wäre, daraus eine algebraische Gleichung zwischen x und $2 \sin \frac{x}{2}$ sich ergeben. Eine solche Gleichung existirt aber nicht, wenn $2 \sin \frac{x}{2}$, wie angenommen, eine algebraische Zahl ist.

Fast alle in diesem Bande abgedruckten Abhandlungen sind einer sachlichen Durchsicht unterworfen worden, und zwar durch die Herren G. Frobenius (Nr. 7), K. Hensel (Nr. 2), G. Hettner (Nr. 1, 4), H. v. Mangoldt (Nr. 8 bis 15, 17), R. Rothe (Nr. 5, 6). Jeder dieser Herren hat auch mindestens eine Correctur des von ihm durchgesehenen Textes gelesen. Die erste Correctur aller Bogen bis auf drei ist durch Herrn R. Rothe, die Revision vom 18. Bogen an durch Herrn A. Gutzmer besorgt worden. Herr C. Barich hat sämmtliche Bogen in typographischer Hinsicht revidirt.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).