MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

FÜNFTER BAND.

VORLESUNGEN
ÜBER DIE
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1915.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

KARL WEIERSTRASS.

BEARBEITET

VON

J. KNOBLAUCH.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1915.

VORWORT.

Der folgenden Darstellung der Theorie der elliptischen Functionen liegt für die Kapitel 1 bis 9, 12 und 13 ein Manuscript zu Grunde, das Weierstrass im Jahre 1863 Herrn F. Mertens dictirt hat. Für einige specielle Abschnitte der Anfangskapitel ist eine Ausarbeitung von Herrn Felix Müller aus dem Winter-Semester 1864—65 zu Rathe gezogen worden.

Die Grundlage des 31. Kapitels bildet ein Weierstrasssches Manuscript, dessen Entstehungszeit nicht bekannt ist.

Das Übrige ist nach meiner Nachschrift einer von Weierstrass im Winter-Semester 1874—75 gehaltenen Vorlesung ausgearbeitet worden, in wenigen Einzelheiten unter Heranziehung einer Ausarbeitung von Georg Hettner. Nach dem Gesammtplan von Weierstrass' Mathematischen Werken giebt die vorliegende Darstellung nicht Alles wieder, was in dieser Vorlesung und in dem erstgenannten Manuscript enthalten war. Dagegen kommt der Beweis für die Nichtexistenz von mehr als zwei Perioden in der Weierstrassschen Vorlesung über elliptische Functionen nicht vor.

Herr Rudolf Rothe hat sich der dankenswerthen Mühe unterzogen, die meisten Formeln zu controliren und von sämmtlichen Bogen mehrere Correcturen zu lesen.

Berlin, den 7. Februar 1915.

Johannes Knoblauch.

INHALTS-VERZEICHNISS.

EINLEITUNG.

Die für reelle und complexe Werthe des Argumentes u eindeutig erklärte Exponentialfunction $E(u) = e^u$ hat folgende Haupteigenschaften:

1) Sind die Argumente u, v und w durch die Gleichung

$$w = u + v$$

verbunden, so besteht zwischen den zugehörigen Functionswerthen

$$E(u) = x, \quad E(v) = y, \quad E(w) = z$$

die algebraische Gleichung

$$z = xy.$$

2) Die Function $E(u)$ genügt der algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dE(u)}{du} = E(u).$$

3) Zu einem gegebenen Werthe der Function gehören unendlich viele Werthe des Argumentes. Ist einer von ihnen bekannt, so erhält man jeden anderen durch Addition oder Subtraction eines Vielfachen von $2\pi i$; die Function ist periodisch mit der primitiven Periode $2\pi i$.

Diese Eigenschaften lassen sich, sinngemäss verallgemeinert, auf rationale, und weiter auf beliebige algebraische Functionen von $E(u)$ übertragen. Man kann von einer solchen Function z. B. ohne Schwierigkeit beweisen, dass ihre Werthe für die Argumente u, v und $u+v$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, dass also, wie man sagt, die Function ein algebraisches Additionstheorem hat. Betrachtet man aber umgekehrt die Existenz eines solchen Additionstheorems als Fundamentaleigenschaft einer noch zu bestimmenden Function, so findet man, dass die algebraisch von $E(u)$ abhängigen Ausdrücke in einer Classe allgemeinerer Functionen enthalten sind, denen diese Eigenschaft zukommt, und die man als elliptische Functionen bezeichnet. Man könnte zu ihnen auch durch Verallgemeinerung einer der beiden anderen Grundeigenschaften von $E(u)$ gelangen. Denn jede elliptische Function genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in der u nicht explicite vorkommt, und ferner sind diese Functionen periodisch, und zwar in allgemeinerem Sinne als die Function $E(u)$. Es existiren nämlich für jede solche Function $\varphi(u)$ zwei constante Grössen 2ω und $2\omega'$ von der Art, dass für beliebige ganze Zahlen m und n die Gleichung

$$\varphi(u + 2m\omega + 2n\omega') = \varphi(u)$$

stattfindet, während die beiden Grössen 2ω und $2\omega'$ sich nicht, wie bei der Exponentialfunction, auf eine zurückführen lassen; ihr Verhältniss ist nicht rational und nicht reell. Man bezeichnet deshalb die elliptischen Functionen als doppelt periodisch.

Wollte man nun von der ersten Haupteigenschaft, also von der Forderung eines algebraischen Additionstheorems ausgehend in die Theorie der elliptischen Functionen einzudringen versuchen, so würde man, wie sich schon nach den ersten Schritten zeigt, eine grössere Anzahl von Sätzen der allgemeinen Functionenlehre kennen oder im voraus beweisen müssen. Es soll deshalb hier der historische Weg eingeschlagen werden, der von der Umkehrung eines sogenannten elliptischen Integrals erster Art

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ausgeht. Ein Integral heisst dann ein elliptisches, wenn es die Form

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

hat, worin $R(x)$ eine ganze Function dritten oder vierten Grades ohne quadratischen Theiler, F eine rationale Function der beiden Argumente x und $\sqrt{R(x)}$ bedeutet. Diese Integrale führen ihren Namen nach dem für die Theorie völlig gleichgiltigen Umstande, dass eines von ihnen geeignet ist, den Bogen einer Ellipse darzustellen. Es war natürlich, dass man anfing sich mit solchen Integralen zu beschäftigen, nachdem man sich davon überzeugt hatte, dass Integrale derselben Form, in denen der Grad von $R(x)$ gleich 1 oder 2 ist, durch Kreisfunctionen und Logarithmen ausdrückbar sind. Der von Abel herrührende Gedanke, ein specielles elliptisches Integral umzukehren, nämlich in der Gleichung

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u$$

die obere Grenze x als Function des Integralwerthes u zu betrachten, hat sich für die gesammte Analysis als besonders fruchtbar erwiesen.

Eine solche Umkehrung ist gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x).$$

Dass das Integral dieser Gleichung ein algebraisches Additionstheorem hat, lässt sich leicht mit Hilfe des von Euler gefundenen Resultates zeigen, wonach die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}$$

algebraisch integrirbar ist. Es ist zweckmässig, sich des von Euler in seinen Untersuchungen über das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ angewendeten Verfahrens zu einem anderen Zweck zu bedienen, nämlich zur formalen Vereinfachung dieses Differentials, d. h. zur Herstellung einer Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}},$$

in der R_1 eine von R verschiedene Function bedeutet. Durch Umkehrung des aus dem transformirten Differential $\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$ entspringenden Integrals ergiebt sich, wenn $R_1(x_1)$ passenden Bedingungen unterworfen wird, eine Function von besonders einfachen Eigenschaften, die den weiteren Untersuchungen zu Grunde gelegt werden soll.

Erstes Kapitel.

Transformation des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

Das elliptische Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, in dem $R(x)$ eine allgemeine ganze Function vierten Grades bedeuten soll, ändert seine Form nicht, wenn an Stelle von x eine ganze oder gebrochene lineare Function von x eingeführt wird:

$$(1.)\qquad x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Hierin bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle oder complexe Constanten, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ nicht verschwinden soll.

Um diese wichtige Eigenschaft des elliptischen Differentials zu beweisen, setze man den aus (1.) folgenden Werth

$$(2.)\qquad x = \frac{\delta x_1 - \beta}{\alpha - \gamma x_1}$$

zunächst in $R(x)$ ein, so geht diese Function in einen Quotienten über, dessen Nenner $(\alpha - \gamma x_1)^4$ und dessen Zähler wieder eine ganze Function vierten Grades ist. Es werde dann

$$R(x) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\alpha - \gamma x_1)^4} R_1(x_1)$$

oder, hiermit gleichbedeutend,

$$R_1(x_1) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma x + \delta)^4} R(x)$$

gesetzt. Ist $\sqrt{R(x)}$ ein beliebiger der beiden Werthe, die die Quadratwurzel aus $R(x)$ haben kann, so soll $\sqrt{R_1(x_1)}$ durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \sqrt{R_1(x_1)} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2} \sqrt{R(x)}$$

oder

$$\sqrt{R(x)} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha-\gamma x_1)^2}\sqrt{R_1(x_1)} \tag{4.}$$

definirt werden. Aus dieser Formel in Verbindung mit

$$dx = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha-\gamma x_1)^2}dx_1$$

folgt dann in der That

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}.$$

Die Gleichungen (1.) und (3.) lehren, dass nicht nur x_1 eine rationale Function von x ist, sondern auch $\sqrt{R_1(x_1)}$ eine rationale Function von x und $\sqrt{R(x)}$. Setzt man $\sqrt{R(x)} = y$, $\sqrt{R_1(x_1)} = y_1$, so erhalten die beiden Gleichungen (3.) und (4.) die Form

$$y_1 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)y}{(\gamma x+\delta)^2}, \tag{5.}$$

$$y = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)y_1}{(\alpha-\gamma x_1)^2}. \tag{6.}$$

Es werde nun umgekehrt zu der Gleichung (1.) von vornherein eine Gleichung (5.) hinzugenommen; durch die y_1 als rationale Function von x und y erklärt wird, und zwischen x und y die Beziehung $y^2 = R(x)$ festgesetzt. Aus (1.) und (5.) folgen durch Auflösung die beiden Gleichungen (2.) und (6.), die x und y rational durch x_1 und y_1 ausdrücken, und ferner sieht man, dass x_1 und y_1 durch eine Gleichung $y_1^2 = R_1(x_1)$ verbunden sind, wo $R_1(x_1)$ eine Function derselben Art wie $R(x)$ bedeutet.

Dieses Ergebniss legt es nahe, sich folgende Aufgabe zu stellen:

Sind zwei Veränderliche x und y durch eine Gleichung

$$y^2 = R(x) \tag{7.}$$

verbunden, wo $R(x)$ eine ganze Function ohne quadratischen Theiler bedeutet, über deren Grad keine besondere Annahme gemacht wird, so sollen zwei rationale Functionen dieser Veränderlichen, $F(x,y)$ und $G(x,y)$, derart bestimmt werden, dass wenn man

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x,y), \\ y_1 &= G(x,y) \end{aligned} \tag{8.}$$

setzt, zwischen x_1 und y_1 eine Gleichung derselben Form

$$y_1^2 = R_1(x_1) \tag{9.}$$

besteht, während zugleich x und y rational durch x_1 und y_1 ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} x &= F_1(x_1, y_1), \\ y &= G_1(x_1, y_1). \end{aligned} \tag{10.}$$

Vermöge (7.) lässt sich die erste Gleichung (8.) auf die Form

$$x_1 = P + Qy$$

bringen, wo P und Q rationale Functionen von x sind. Die Elimination von y ergiebt dann zwischen x und x_1 eine Gleichung der Form

$$Lx_1^2 + Mx_1 + N = 0, \tag{11.}$$

in der L, M, N ganze Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass x_1 die irrationale Function $\sqrt{R(x)}$ wirklich enthalte, d. h. dass Q nicht Null sei, ist der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung nicht als Product zweier ganzen Functionen von x und x_1 darstellbar. Denn wäre dies der Fall, so müsste jede der Functionen in Bezug auf x_1 vom ersten Grade sein, sodass x_1 rational durch x allein darstellbar sein würde.

Wendet man dieselben Schlüsse auf die Gleichungen (9.) und (10.) an, die der Annahme nach geeignet sein sollen, (7.) und (8.) zu ersetzen, so sieht man, dass die Beziehung (11.) zwischen x und x_1 auch in der Form

$$L_1x^2 + M_1x + N_1 = 0 \tag{12.}$$

geschrieben werden kann, wo L_1, M_1, N_1 ganze Functionen von x_1 sind. Die Functionen L, M, N können also nicht von höherem als dem zweiten Grade sein. Die Vergleichung von

$$x_1 = P + Q\sqrt{R(x)}$$

mit dem aus (11.) folgenden Ausdruck

$$x_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}$$

ergiebt dann weiter, dass $R(x)$ höchstens vom vierten Grade sein kann.

Nimmt man nun die ganze Function $R(x)$ als gegeben an, so hat man zur Lösung der gestellten Aufgabe L, M, N so zu bestimmen, dass

$$M^2 - 4LN = k^2 R(x) \tag{13.}$$

wird, unter k eine Constante verstanden. Setzt man dann, nach Fixirung eines Werthes von $\sqrt{k^2 R(x)}$, der mit ky bezeichnet werden soll,

$$x_1 = \frac{-M + ky}{2L}, \tag{14.}$$

so ergiebt sich zwischen x und x_1 eine Gleichung der Form (11.) oder (12.), wo L_1, M_1, N_1 ganze Functionen zweiten Grades sind, oder auch

$$(2L_1 x + M_1)^2 = M_1^2 - 4L_1 N_1.$$

Wird nunmehr eine ganze Function $R_1(x_1)$ durch die Gleichung

$$M_1^2 - 4L_1 N_1 = k^2 R_1(x_1)$$

erklärt und ein Werth von $\sqrt{k^2 R_1(x_1)}$, der ky_1 heissen möge, mittels der Formel

$$y_1 = \frac{2L_1 x + M_1}{k} \tag{15.}$$

fixirt, in der L_1 und M_1 durch Einsetzen des Werthes (14.) für x_1 rational durch x und y dargestellt zu denken sind, so sind x_1 und y_1 rationale Functionen von x und y und mit einander durch die Gleichung

$$y_1^2 = R_1(x_1)$$

verbunden. Umgekehrt folgt

$$x = \frac{-M_1 + ky_1}{2L_1}, \tag{16.}$$

$$y = \frac{2Lx_1 + M}{k}, \tag{17.}$$

sodass, wenn noch der Ausdruck von x in die letzte Gleichung eingesetzt wird, x und y als rationale Functionen von x_1 und y_1 erscheinen.

Endlich ergiebt sich aus der Gleichung zwischen x und x_1,

$$f(x, x_1) = 0,$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = 0,$$

die, wenn man $f(x, x_1)$ einmal gleich $L_1 x^2 + M_1 x + N_1$, dann gleich $L x_1^2 + M x_1 + N$ setzt, die Form annimmt:

$$(2 L_1 x + M_1)\, dx + (2 L x_1 + M)\, dx_1 = 0$$

oder

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dx_1}{y_1},$$

d. h.

$$(18.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}.$$

Man kann also noch hinzufügen, dass die Lösung der gestellten Aufgabe die Transformation des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in eines von derselben Form, $\frac{-dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}$, nach sich zieht. Der Werth der Quadratwurzel aus $R(x)$ kann dabei beliebig fixirt werden, dagegen ist der Grösse $\sqrt{R_1(x_1)}$ der Werth beizulegen, der durch die Gleichungen (14., 15.) bestimmt wird. Diese Überführung des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in ein anderes von derselben Gestalt ist zugleich die einzig mögliche, wenn, wie es hier der Fall ist, auch x und $\sqrt{R(x)}$ durch x_1 und $\sqrt{R_1(x_1)}$ rational ausdrückbar sein sollen.

Wir gehen nun auf die Bestimmung von L, M und N näher ein. Wird

$$L = \lambda x^2 + \mu x + \nu,$$
$$M = \lambda' x^2 + \mu' x + \nu',$$
$$N = \lambda'' x^2 + \mu'' x + \nu''$$

gesetzt, so erfordert das Bestehen der Gleichung (13.), in der

$$R(x) = A x^4 + 4 B x^3 + 6 C x^2 + 4 B' x + A'$$

sein möge, fünf Bedingungsgleichungen, die in Bezug auf die zehn Constanten $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ und k homogen und von der zweiten Dimension sind. Der Homogeneität wegen kann man, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, zunächst eine dieser Grössen gleich 1 setzen. Durch drei weitere Relationen kann bewirkt werden, dass $R_1(x_1)$ nur zwei, anstatt, wie $R(x)$, fünf Coefficienten enthält. Endlich lässt sich dadurch, dass eine der Constanten unbestimmt bleibt, erreichen, dass zu einem willkürlichen Werthe von x und einem der zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x)}$ ein ein für alle Mal bestimmter Werth von x_1 gehört, der auch unendlich gross sein kann.

Die drei an zweiter Stelle genannten Bedingungen sollen so beschaffen sein, dass $R_1(x_1)$ nur vom dritten Grade wird und ausserdem das Glied mit

x_1^2 nicht enthält, der Coefficient von x_1^3 aber einen festen Zahlenwerth hat. Die Bestimmung des Systems der Constanten wird sehr erleichtert, wenn man eine dieser Bedingungen vorwegnimmt.

Ordnet man $Lx_1^2 + Mx_1 + N$ nach Potenzen von x, so findet man

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda x_1^2 + \lambda' x_1 + \lambda'', \\ M_1 &= \mu x_1^2 + \mu' x_1 + \mu'', \\ N_1 &= \nu x_1^2 + \nu' x_1 + \nu''. \end{aligned}$$

Die Bedingung dafür, dass in

$$M_1^2 - 4 L_1 N_1 = k^2 R_1(x_1)$$

das Glied mit x_1^4 fehlt, lautet

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 0,$$

sodass

$$\lambda L = \left(\lambda x + \frac{\mu}{2}\right)^2$$

wird. Der oben gemachten Bemerkung gemäss nehme man

$$\lambda = 1$$

und setze ausserdem, nur die Bezeichnung ändernd,

$$\frac{\mu}{2} = -x_0,$$

so erhält L die Form

$$L = (x - x_0)^2.$$

Der Inhalt der nunmehr zu berücksichtigenden Gleichung (13.) lässt sich dahin aussprechen, dass $M^2 - k^2 R(x)$ durch L theilbar werden muss. Sind M und k dieser Bedingung gemäss bestimmt, so ergiebt sich N von selbst durch Ausführung einer Division.

Es sei

$$M = m_0 + m_1(x - x_0) + m_2(x - x_0)^2.$$

Sind m_0, m_1, m_2 und x_0 gefunden, so kennt man auch λ', μ', ν'. Ferner sei

$$R(x) = r_0 + r_1(x - x_0) + r_2(x - x_0)^2 + r_3(x - x_0)^3 + r_4(x - x_0)^4.$$

Wenn nun $M^2 - k^2 R(x)$ durch $L = (x - x_0)^2$ theilbar sein, d. h. in diesem

Ausdruck die Glieder mit $(x-x_0)^0$ und $(x-x_0)^1$ fehlen sollen, so müssen die Bedingungen

$$m_0^2 = k^2 r_0,$$
$$2 m_0 m_1 = k^2 r_1$$

bestehen. Hieraus folgt, da nach der über die Function $R(x)$ gemachten Annahme r_0 und r_1 nicht gleichzeitig verschwinden können,

$$\frac{m_0}{2m_1} = \frac{r_0}{r_1},$$

sodass man setzen kann:

$$m_0 = -\frac{r_0}{g}, \quad m_1 = -\frac{r_1}{2g}, \quad k^2 = \frac{r_0}{g^2},$$

unter g eine willkürliche Constante verstanden. Es sei noch

$$m_2 = -\frac{h}{g},$$

wo h die Grösse m_2 vertreten soll, so wird

$$M = -\frac{1}{g}\left[h(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} r_1 (x-x_0) + r_0\right],$$

$$N = \frac{M^2 - k^2 R(x)}{4L} = \frac{g^2 M^2 - r_0 R(x)}{4g^2 (x-x_0)^2}$$
$$= \frac{1}{4g^2}\left[(h^2 - r_0 r_4)(x-x_0)^2 + (hr_1 - r_0 r_3)(x-x_0) + \left(\frac{1}{4} r_1^2 + 2hr_0 - r_0 r_2\right)\right].$$

Man kann sagen, dass durch die für L, M, N gefundenen Ausdrücke die fünf auf S. 8 erwähnten Bedingungsgleichungen und zwei von den noch hinzuzunehmenden Festsetzungen erfüllt werden. Um die noch übrigen Bedingungen aufzustellen, muss man $R_1(x_1)$ bilden.

Es sei

$$Lx_1^2 + Mx_1 + N = L'(x-x_0)^2 + M'(x-x_0) + N',$$

so hat man

$$L' = x_1^2 - \frac{h}{g} x_1 + \frac{h^2 - r_0 r_4}{4g^2} = \left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^2 - \frac{r_0 r_4}{4g^2},$$

$$M' = -\frac{r_1}{2g} x_1 + \frac{hr_1 - r_0 r_3}{4g^2} = -\frac{r_1}{2g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) - \frac{r_0 r_3}{4g^2},$$

$$N' = -\frac{r_0}{g} x_1 + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{1}{4} r_1^2 + 2hr_0 - r_0 r_2\right) = -\frac{r_0}{g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) - \frac{1}{4g^2}\left(r_0 r_2 - \frac{1}{4} r_1^2\right).$$

Nun war $R_1(x_1)$ durch die Gleichung (S. 7)

$$k^2 R_1(x_1) = M_1^2 - 4 L_1 N_1$$

definirt, und da aus

$$L_1 x^2 + M_1 x + N_1 = L'(x-x_0)^2 + M'(x-x_0) + N'$$

die Beziehungen

$$L_1 = L', \quad M_1 = M' - 2L'x_0, \quad N_1 = N' - M'x_0 + L'x_0^2,$$
$$M_1^2 - 4L_1 N_1 = M'^2 - 4L'N'$$

folgen, so ergiebt sich

$$R_1(x_1) = \frac{(gM')^2 - 4g^2 L'N'}{r_0}$$

oder

$$R_1(x_1) = 4g\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^3 + r_2\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right)^2 + \frac{r_1 r_3 - 4 r_0 r_4}{4g}\left(x_1 - \frac{h}{2g}\right) + \frac{r_0 r_3^2 + r_4 r_1^2 - 4 r_0 r_2 r_4}{16 g^2}.$$

Hierin ist $4g$ der Coefficient von x_1^3, $r_2 - 6h$ der von x_1^2. Beide sollen vorläufig beibehalten, nur statt h eine Grösse g_1 mittels der Gleichung

$$r_2 - 6h = 6g_1$$

eingeführt werden. Die Rechnung liefert alsdann, wenn

$$r_0 r_4 - \frac{1}{4} r_1 r_3 + \frac{1}{12} r_2^2 = g_2,$$

$$\frac{1}{6} r_0 r_2 r_4 + \frac{1}{48} r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16} r_0 r_3^2 - \frac{1}{16} r_4 r_1^2 - \frac{1}{216} r_2^3 = g_3$$

gesetzt wird,

$$R_1(x_1) = 4g\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right)^3 - \frac{g_2}{g}\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right) - \frac{g_3}{g^2}.$$

Um die Transformation zu Ende zu führen, braucht man noch den Werth von M. Es ist

$$-gM = r_0 + \frac{1}{2} r_1 (x-x_0) + \frac{1}{6} r_2 (x-x_0)^2 - g_1 (x-x_0)^2,$$

woraus in Verbindung mit (14.) und $g^2 k^2 = r_0$ folgt:

$$g x_1 + \frac{1}{2} g_1 = \frac{\sqrt{r_0}\sqrt{R(x)} + r_0 + \frac{1}{2} r_1 (x-x_0) + \frac{1}{6} r_2 (x-x_0)^2}{2(x-x_0)^2}.$$

In diesen Formeln ist

$$r_0 = R(x_0), \quad r_1 = R'(x_0), \quad r_2 = \frac{1}{2} R''(x_0), \quad r_3 = \frac{1}{6} R'''(x_0), \quad r_4 = \frac{1}{24} R^{\mathrm{IV}}(x_0) = A,$$

also

$$\frac{dr_0}{dx_0} = r_1, \quad \frac{dr_1}{dx_0} = 2r_2, \quad \frac{dr_2}{dx_0} = 3r_3, \quad \frac{dr_3}{dx_0} = 4r_4, \quad \frac{dr_4}{dx_0} = 0.$$

Benutzt man diese Gleichungen bei der Bildung von $\frac{dg_2}{dx_0}$ und $\frac{dg_3}{dx_0}$, so findet man

$$\frac{dg_2}{dx_0} = 0, \quad \frac{dg_3}{dx_0} = 0,$$

d. h. g_2 und g_3 sind von x_0 unabhängig. Man darf daher zur Bestimmung dieser beiden Grössen $x_0 = 0$ annehmen, also in den Formeln auf S. 11

$$r_0 = A', \quad r_1 = 4B', \quad r_2 = 6C, \quad r_3 = 4B, \quad r_4 = A$$

setzen; dadurch ergiebt sich

$$\begin{aligned} g_2 &= AA' - 4BB' + 3C^2, \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3. \end{aligned}$$

g_2 und g_3 sind die beiden Fundamental-Invarianten der Function $R(x)$.

Setzt man in die Formel für x_1 die Werthe von r_0, r_1 und r_2 ein, so erhält sie die Gestalt

$$(19.) \quad gx_1 + \frac{1}{2}g_1 = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{1}{24}R''(x_0).$$

Aus dieser, der Formel (14.) entsprechenden Gleichung geht hervor, dass x_1 für $x = x_0$ unendlich gross wird, vorausgesetzt, dass dabei der Wurzelgrösse $\sqrt{R(x)}$ derjenige Werth von $\sqrt{R(x_0)}$ beigelegt wird, der in den vorstehenden Formeln vorkommt. Anstatt nun weiter aus (15.) den Werth von $y_1 = \sqrt{R_1(x_1)}$ zu bilden, der die Differentialgleichung (18.) zur Folge hat, entnehme man umgekehrt hieraus

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{\sqrt{R_1(x_1)}}{\sqrt{R(x)}}$$

und ziehe die aus der Formel für x_1 durch Differentiation hervorgehende Gleichung hinzu. Auf diese Weise ergiebt sich

$$(20.) \quad g\sqrt{R_1(x_1)} = \left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right)\sqrt{R(x)}.$$

Hiermit ist folgendes Resultat begründet:

Wenn man bei willkürlicher Annahme der Constanten g, g_1, x_0

$$R_1(x_1) = 4g\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right)^3 - \frac{g_2}{g}\left(x_1 + \frac{g_1}{2g}\right) - \frac{g_3}{g^2}$$

setzt, unter g_2 und g_3 die beiden Invarianten von $R(x)$ verstanden, ferner x_1 durch die Gleichung (19.) definirt und unter $\sqrt{R_1(x_1)}$ denjenigen Werth dieser Wurzelgrösse versteht, der durch die Formel (20.) bestimmt wird, so besteht zwischen x und x_1 die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}}.$$

Der Ausdruck von $R_1(x_1)$ lässt es als zweckmässig erscheinen,

$$g = 1$$

anzunehmen, d. h. dem Coefficienten der höchsten Potenz in $R_1(x_1)$ den Werth 4 beizulegen. Ferner sollte die zweite Potenz nicht vorkommen (S. 9), was durch

$$g_1 = 0$$

erreicht wird. Unter diesen Voraussetzungen soll s für x_1 geschrieben und

$$R_1(s) = S$$

gesetzt werden, sodass

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 \tag{21.}$$

wird. Bei Berücksichtigung der Werthe von g_2 und g_3 erhält man

$$S = -\begin{vmatrix} A, & B, & C-2s \\ B, & C+s, & B' \\ C-2s, & B', & A' \end{vmatrix}. \tag{22.}$$

Wir sind somit zu folgendem Ergebniss gelangt:

Versteht man unter $R(x)$ eine beliebige ganze rationale Function dritten oder vierten Grades ohne quadratischen Theiler, unter $\sqrt{R(x)}$ einen beliebigen der beiden Werthe, die diese Wurzelgrösse haben kann, setzt dann

$$s = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{1}{24}R''(x_0) \tag{I.}$$

und definirt $\sqrt{S}$ durch die Formel

$$\text{(II.)} \quad \sqrt{S} = \left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right)\sqrt{R(x)},$$

so wird

$$\text{(III.)} \qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}};$$

d. h. das elliptische Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ lässt sich mittels der Gleichungen (I.), (II.), die eine willkürliche Constante x_0 enthalten, in die specielle Form $\frac{-ds}{\sqrt{S}}$, die die Normalform heissen möge, transformiren. Die Coefficienten der ganzen Function dritten Grades $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$ sind von x_0 unabhängig.

Nach der Theorie, die zu diesem Resultat geführt hat, müssen sich auch umgekehrt x und $\sqrt{R(x)}$ rational durch s und $\sqrt{S}$ darstellen lassen. Es war (S. 7 (16.))

$$x = \frac{-M_1 + ky_1}{2L_1}.$$

Führt man L' und M' statt L_1 und M_1 ein (S. 11), so kann man setzen:

$$x = x_0 + \frac{-M' + ky_1}{2L'}.$$

Hierin ist noch

$$k = \sqrt{R(x_0)}, \quad y_1 = \sqrt{S}$$

zu nehmen, ferner

$$g = 1, \quad h = \frac{1}{12}R''(x_0)$$

in die auf S. 10 angegebenen Ausdrücke von L' und M' einzuführen. Dann ergiebt sich

$$x = x_0 + \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{S} + \frac{1}{2}R'(x_0)(s - \frac{1}{24}R''(x_0)) + \frac{1}{24}R(x_0)R'''(x_0)}{2(s - \frac{1}{24}R''(x_0))^2 - \frac{1}{2}AR(x_0)}$$

oder auch

$$x = \frac{P + \sqrt{R(x_0)}\sqrt{S}}{2Q},$$

wo P und Q bei Einführung der Coefficienten von $R(x)$ die Werthe annehmen:

$$P = 2x_0 s^2 + 2(Bx_0^2 + 2Cx_0 + B')s + (AB' - BC)x_0^2 + \frac{1}{2}(AA' + 4BB' - 5C^2)x_0 + BA' - B'C,$$

$$Q = s^2 - (Ax_0^2 + 2Bx_0 + C)s + (B^2 - AC)x_0^2 + (BC - AB')x_0 + \frac{1}{4}(C^2 - AA').$$

Der Werth von $\sqrt{R(x)}$ würde auch hier wieder am einfachsten nach dem auf S. 12 angewendeten Verfahren bestimmt werden können.

Für verschiedene Zwecke ist es nützlich, die Gleichung (I.) noch weiter umzuformen. Zieht man das auf den Quotienten folgende Glied $\frac{1}{24}R''(x_0)$ zu ihm hinzu, setzt für $R(x_0)$, $R'(x_0)$, $R''(x_0)$ ihre Werthe und definirt eine ganze Function von x und x_0 durch die Formel

$$R(x, x_0) = Ax^2x_0^2 + 2Bxx_0(x+x_0) + 6Cxx_0 + 2B'(x+x_0) + A',$$

so wird

$$\text{(IV.)} \qquad s = \frac{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)} + R(x, x_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{1}{2}C.$$

Schreibt man andererseits in der Gleichung (I.)

$$\sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(x_0)}\right)^2 - \frac{1}{2}R(x) - \frac{1}{2}R(x_0)$$

und entwickelt $-\frac{1}{2}R(x)$ nach Potenzen von $x-x_0$, so ergiebt sich

$$\text{(V.)} \qquad s = \left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(x_0)}}{2(x-x_0)}\right)^2 - \frac{1}{4}A(x+x_0)^2 - B(x+x_0) - C.$$

Die Formeln (I.) und (II.) vereinfachen sich sehr, wenn die willkürliche Constante x_0 gleich einer Wurzel a der Gleichung $R(x) = 0$ angenommen wird. Man hat dann

$$\text{(VI.)} \qquad \begin{aligned} s &= \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{x-a} + \frac{1}{24}R''(a), \\ \sqrt{S} &= \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{(x-a)^2}\sqrt{R(x)}. \end{aligned}$$

Weil $R(x)$ keinen quadratischen Theiler haben sollte, so kann $R'(a)$ nicht gleich Null sein.

Will man ferner prüfen, was aus s für $x_0 = \infty$ wird, so bedient man sich zweckmässig der Gleichung (IV.). Es ist

$$\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0^2} = \sqrt{A + 4Bx_0^{-1} + \cdots};$$

der Grenzwerth dieses Ausdrucks für unendlich grosses x_0 wird einer der Werthe der Quadratwurzel aus A, der jetzt, ebenso wie im allgemeinen Falle der von $\sqrt{R(x_0)}$, beliebig zu fixiren ist. Ferner hat man

$$\lim_{x_0=\infty} \frac{R(x, x_0)}{x_0^2} = Ax^2 + 2Bx,$$

und da endlich der Nenner des Quotienten in (IV.) sich nach Absonderung des Factors x_0^2 dem Werthe 2 nähert, so wird für den Grenzfall

$$\text{(VII.)} \qquad s = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + \frac{1}{2}C.$$

In der Formel (II.) verschwindet für $x_0 = \infty$ das erste Glied, das zweite wird nach dem eben Bemerkten gleich $-\frac{1}{4}\sqrt{A}\,R'(x)$, und das dritte und vierte zusammen ergeben, da x_0^4 sich aus $R(x_0) - \frac{1}{4}R'(x_0)(x_0 - x)$ weghebt, ebenfalls einen endlichen Grenzwerth. Das Resultat ist

$$\text{(VIII.)} \qquad \sqrt{S} = -\frac{1}{4}\sqrt{A}\,R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)}.$$

Diese Untersuchung lässt zunächst nur erkennen, dass die Formeln für s und $\sqrt{S}$ auch noch für $x_0 = \infty$ einen Sinn behalten. Dass sie nach wie vor geeignet sind, die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

nach sich zu ziehen, kann durch Ausführung der Differentiation leicht festgestellt werden.

Nimmt man noch

$$A = 0$$

hinzu, d. h. fordert, das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ für $R(x)$ als beliebige ganze Function dritten Grades auf die Normalform $\frac{-ds}{\sqrt{S}}$ zu bringen, wobei $s = \infty$ zu $x = \infty$ gehören soll, so geben die Gleichungen

$$\text{(IX.)} \qquad \begin{aligned} s &= Bx + \frac{1}{2}C, \\ \sqrt{S} &= -B\sqrt{R(x)} \end{aligned}$$

die Lösung dieser Aufgabe.

Zweites Kapitel.

Integration der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ durch Reihenentwickelung.

Nach den Ergebnissen des ersten Kapitels lässt sich die Integration der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x),$$

die jetzt in Angriff genommen werden soll, auf die der einfacheren

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$$

zurückführen. Dennoch bleiben wir, um uns von der Tragweite der Ergebnisse eine klare Vorstellung zu bilden, zunächst bei der Gleichung (1.) stehen.

Der Aufgabe werde die Nebenbedingung hinzugefügt, dass x für $u = 0$ den beliebig vorgeschriebenen, endlichen Werth x_0 annehmen solle. Wir versuchen dann, der Differentialgleichung durch eine gewöhnliche Potenzreihe

$$(2.)\qquad x = x_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u^\nu$$

zu genügen. Anstatt jedoch diese in (1.), d. h. in die Gleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x_0) + R'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}R''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}R'''(x_0)(x-x_0)^3 + A(x-x_0)^4$$

einzusetzen, differentiiren wir noch einmal nach u und stellen die Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2}R'(x) = \frac{1}{2}R'(x_0) + \frac{1}{2}R''(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{4}R'''(x_0)(x-x_0)^2 + 2A(x-x_0)^3$$

mit (2.) zusammen.

Da aus (2.)

$$\frac{d^2x}{du^2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)\, a_\nu u^{\nu-2}$$

folgt, so wird der Coefficient von u^ν auf der linken Seite von (3.) gleich

$$(\nu+1)(\nu+2)\, a_{\nu+2}.$$

Auf der rechten Seite ergiebt sich dafür ein Ausdruck, der ausser x_0 und den Coefficienten der Function

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

nur solche Grössen der Reihe $a_1, a_2, \ldots$ enthält, deren Index nicht grösser als ν ist, und zwar ist dieser Ausdruck eine ganze rationale Function aller vorkommenden Grössen, mit rationalen Zahlcoefficienten; diese Function werde mit $G_\nu(x_0, a_1, \ldots a_\nu)$ bezeichnet. Die Vergleichung beider Seiten liefert

$$\begin{aligned}
1.2\, a_2 &= G_0(x_0),\\
2.3\, a_3 &= G_1(x_0, a_1),\\
3.4\, a_4 &= G_2(x_0, a_1, a_2),\\
&\cdots\cdots\\
(\nu+1)(\nu+2)\, a_{\nu+2} &= G_\nu(x_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu),\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Diese Formeln bestimmen nach willkürlicher Annahme von x_0 und a_1 der Reihe nach $a_2, a_3, \ldots$, und zwar wieder als ganze Functionen von $x_0, a_1, A, B, \ldots A'$, mit rationalen Zahlcoefficienten. Aus der Gleichung (3.), der dann formal durch die Annahme (2.) genügt wird, folgt aber rückwärts nur

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x) + c,$$

sodass die Constante c zu Null gemacht werden muss. Da nun für $u = 0$

$$x = x_0, \qquad \frac{dx}{du} = a_1,$$

mithin

$$c = a_1^2 - R(x_0)$$

ist, so muss man

$$a_1 = \sqrt{R(x_0)}$$

setzen, um die gegebene Differentialgleichung (1.) zu befriedigen. Welcher ihrer beiden Werthe dabei der Wurzelgrösse beigelegt wird, bleibt gleichgiltig.

Nachdem so eine Reihe (2.) aufgestellt worden ist, die der Differentialgleichung (1.) formal genügt, kann man die Coefficienten a_ν von $\nu = 2$ an auch nach der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu x}{du^\nu}\right)_0$$

bestimmen, indem man mittels der Differentialgleichung die Ausdrücke von

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{du^2}, \quad \frac{1}{2.3}\frac{d^3x}{du^3}, \quad \ldots$$

durch x und $\frac{dx}{du}$ darstellt und in ihnen

$$x = x_0, \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x_0)}$$

setzt. Die ersten Werthe der Differentialquotienten sind

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2}R'(x), \qquad \frac{d^3x}{du^3} = \frac{1}{2}R''(x)\frac{dx}{du}, \qquad \frac{d^4x}{du^4} = \frac{1}{2}R(x)R'''(x) + \frac{1}{4}R'(x)R''(x).$$

Allgemein werden die Ableitungen gerader Ordnung ganze Functionen von x, die ungerader Ordnung Producte aus solchen Functionen mit $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$. Setzt man

$$\frac{d^{2\nu}x}{du^{2\nu}} = F_{2\nu}(x), \qquad \frac{d^{2\nu+1}x}{du^{2\nu+1}} = F_{2\nu+1}(x)\frac{dx}{du},$$

so kann man die ganzen Functionen $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... aus den Recursionsformeln

$$(4.)\qquad \begin{aligned} F_{2\nu+1}(x) &= \frac{dF_{2\nu}(x)}{dx}, \\ F_{2\nu+2}(x) &= R(x)\frac{dF_{2\nu+1}(x)}{dx} + \frac{1}{2}F_{2\nu+1}(x)\frac{dR(x)}{dx} \end{aligned}$$

in Verbindung mit den Anfangswerthen

$$F_0(x) = x, \qquad F_1(x) = 1$$

bestimmen. Wird noch

$$(5.)\qquad \begin{aligned} x_0 + \frac{1}{2}F_2(x_0)u^2 + \frac{1}{24}F_4(x_0)u^4 + \cdots &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F_{2\nu}(x_0)}{(2\nu)!}u^{2\nu} &= \varphi(u), \\ u + \frac{1}{6}F_3(x_0)u^3 + \frac{1}{120}F_5(x_0)u^5 + \cdots &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F_{2\nu+1}(x_0)}{(2\nu+1)!}u^{2\nu+1} &= \varphi_1(u) \end{aligned}$$

gesetzt, so ist

$$(6.)\qquad x = \varphi(u) + \sqrt{R(x_0)}\,\varphi_1(u)$$

der allgemeinste Ausdruck von x in Form einer gewöhnlichen Potenzreihe, der der Differentialgleichung (1.) formal genügt und die Nebenbedingung erfüllt, für $u = 0$ den endlichen Werth x_0 anzunehmen.

Allein dieses Ergebniss würde bedeutungslos sein, wenn die Potenzreihe nicht innerhalb eines bestimmten Bereiches convergirte. Um die Convergenz zu beweisen, beachten wir zunächst, dass in den Reihen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ jeder Coefficient einer Potenz von u ein Product aus ganzen positiven Potenzen der Grössen $x_0, A, B, \dots A'$ und einer positiven Zahl ist, wie sich dies aus der Bildungsweise der Functionen $F_\lambda(x)$ $(\lambda = 2, 3, \dots)$ unmittelbar zu erkennen giebt, und dass in der zu untersuchenden Potenzreihe die Coefficienten theils den Werthen $F_\lambda(x_0)$ gleich, theils Producte aus solchen Werthen mit $\sqrt{R(x_0)}$ sind. Unter einer ganzen positiven Potenz soll dabei stets eine Potenz mit ganzzahligem positivem Exponenten verstanden werden. Aus der genannten Eigenschaft der Reihe folgt, dass der absolute Betrag eines jeden Coefficienten nicht grösser ist als der Werth, den man erhält, wenn man in der Formel für den Coefficienten jede der Constanten $x_0, A, B, \dots A'$ durch eine andere, die positiv und dem absoluten Betrage nach nicht kleiner ist, ersetzt. Convergirt demnach die dann entstehende Reihe, so wird die ursprüngliche mindestens innerhalb desselben Bereiches convergent sein. Nun genügt ferner die neue Reihe, ebenfalls zunächst formal, der Differentialgleichung, die aus (1.) entsteht, wenn $A, \dots A'$ durch jene positiven Zahlen ersetzt werden, und der Nebenbedingung, für $u = 0$ den Werth ξ_0 zu liefern, wenn ξ_0 diejenige positive Zahl bedeutet, die an die Stelle von x_0 tritt. Durch passende Wahl der neuen Zahlgrössen kann man aber bewirken, dass nach ihrer Einführung das Integral der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ eine einfache Beurtheilung seiner Convergenz gestattet.

Setzt man z. B.

$$\alpha(x+\beta)^4$$

für $R(x)$, so erhält man

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{\alpha}\,(x+\beta)^2,$$

woraus durch Integration unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$\frac{1}{\xi_0+\beta} - \frac{1}{x+\beta} = \sqrt{\alpha}\,u$$

oder

$$x+\beta = \frac{\xi_0^2+\beta}{1-(\xi_0+\beta)\sqrt{\alpha}\,u}$$

folgt. Die Potenzreihe, in die dieser Ausdruck entwickelt werden kann, convergirt, wenn

$$\frac{1}{(\xi_0+\beta)\sqrt{\alpha}} = r$$

gesetzt wird, für $|u| < r$.

Giebt man also α und β positive Werthe der Art, dass

$$\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha\beta^2,\ \alpha\beta^3,\ \alpha\beta^4$$

der Reihe nach nicht kleiner sind als die absoluten Werthe von

$$A,\ B,\ C,\ B',\ A',$$

und versteht unter ξ_0 den absoluten Betrag von x_0, so kann man sicher sein, dass die ursprünglich für x angenommene Reihe wenigstens für alle diejenigen Werthe von u convergirt, die dem absoluten Betrage nach kleiner als r sind. Der absoluten Convergenz wegen kann die Reihe im Besonderen so angeordnet werden, wie in der Gleichung (6.) geschehen ist.

Diese Ergebnisse gelten nur für einen endlichen Werth x_0. Doch lässt sich mit ihrer Hilfe leicht die Frage beantworten, ob es auch convergente Ausdrücke für x giebt, die der Differentialgleichung (1.) genügen und für $u=0$ unendlich gross werden. Vermöge der Substitution

$$x = \frac{1}{z}$$

geht nämlich (1.) in

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \bar{R}(z) \tag{7.}$$

über, wo

$$\bar{R}(z) = A'z^4+4B'z^3+6Cz^2+4Bz+A \tag{8.}$$

aus $R(x)$, von der Bezeichnung der Variablen abgesehen, durch Vertauschung von A mit A', B mit B' hervorgeht. Zu $x=\infty$ gehört $z=0$. Man hat also in den Ausdrücken (5.), nachdem man

$$A,\ B,\ C,\ B',\ A'$$

der Reihe nach in

$$A',\ B',\ C,\ B,\ A$$

verwandelt hat, $x_0 = 0$ anzunehmen, wodurch $\varphi(u)$ in $\bar{\varphi}(u)$, $\varphi_1(u)$ in $\bar{\varphi}_1(u)$ übergehen möge, und

$$z = \bar{\varphi}(u) + \sqrt{\bar{R}(0)}\,\bar{\varphi}_1(u)$$

zu setzen. Die Gleichung zwischen x und z liefert dann für x den Quotienten

$$x = \frac{1}{\bar{\varphi}(u) + \sqrt{A}\,\bar{\varphi}_1(u)},$$

der für hinreichend kleine Werthe von u wieder in eine absolut convergente Reihe entwickelt werden kann. Ist A nicht Null, d. h. die ganze Function $R(x)$ wirklich vom vierten Grade, so hat diese Reihe die Form

$$x = cu^{-1} + c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots,$$

für

$$c = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Ist dagegen $R(x)$ nur vom dritten Grade, so fallen alle Potenzen von u mit ungeradem Exponenten weg, und es wird

$$x = c' u^{-2} + c_0' + c_1' u^2 + \cdots,$$

wo

$$c' = \frac{1}{B}$$

ist.

Drittes Kapitel.

Die Function $\wp u$.

Nach der am Anfang des vorigen Kapitels gemachten Bemerkung kann die Integration der allgemeinen Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

auf die der einfacheren

$$(1.) \qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

zurückgeführt werden, mit der wir uns im Nächstfolgenden beschäftigen wollen. Es sei

$$s = \wp u$$

eine specielle Lösung dieser Differentialgleichung, und zwar diejenige, die für $u = 0$ unendlich gross wird. Die letzte Formel für x auf S. 22 lehrt ein Element dieser Function kennen. Für hinreichend kleine Werthe von u ist nämlich wegen $B = 1$

$$(2.) \qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + c'_0 + c'_1 u^2 + c'_2 u^4 + \cdots.$$

Eine Hauptaufgabe, die wir zu lösen haben, ist die, eine Darstellung für $\wp u$ zu finden, die für alle endlichen Werthe des Arguments u Giltigkeit hat.

Wenn man eine Formel kennte, mit deren Hilfe die $\wp$-Function eines zusammengesetzten Arguments $u+v$ rational durch $\wp u$, $\wp v$ und die zugehörigen Werthe der Ableitungen $\wp' u$, $\wp' v$ dargestellt wird, wie es entsprechend z. B. bei der Sinus-Function der Fall ist, so würde man sofort den Giltigkeitsbereich der Function erweitern können. Man brauchte nur $v = u$ zu setzen, danach $\frac{u}{2}$ für u zu schreiben, sodass $\wp u$ durch $\wp \frac{u}{2}$ und $\wp' \frac{u}{2}$ rational ausgedrückt erscheint, und für $\wp \frac{u}{2}$ und $\wp' \frac{u}{2}$ die aus (2.) folgenden Reihen einzuführen. Convergirt dann die Reihe (2.) für $|u| < r$, so gilt die neue Darstellung von $\wp u$ für $\left|\frac{u}{2}\right| < r$ oder $|u| < 2r$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man den Bereich, in dem die Function definirt ist, beliebig weit ausdehnen.

Eine Formel für $\wp(u+v)$ lässt sich nun durch folgende Überlegung herstellen. Da die Differentialgleichung (1.) u nicht explicite enthält, so bleibt sie ungeändert, wenn $u+v$ für u gesetzt wird; d. h. es ist

$$(\wp'(u+v))^2 = 4\wp^3(u+v) - g_2\wp(u+v) - g_3.$$

Mit anderen Worten, die Function $\wp(u+v)$ genügt derselben Differentialgleichung wie $\wp u$, nur wird sie für $u = 0$ nicht unendlich gross, sondern gleich $\wp v$. Eine solche Function lässt sich aber nach den im ersten Kapitel entwickelten Transformationsformeln durch $\wp u$ und $\wp' u$ darstellen. Denn setzt man

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}} = du,$$

so sind jene Gleichungen geeignet, eine Beziehung zwischen einer Function x zu vermitteln, die der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

genügt und für $u = 0$ den Werth x_0 annimmt, und einer Function s, die die Gleichung

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = S$$

befriedigt und für $u = 0$ unendlich gross wird. Für den hier vorliegenden Zweck hat man

$$R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad x = \wp(u+v), \quad x_0 = \wp v$$

zu setzen, also

$$R(x_0) = 4\wp^3 v - g_2\wp v - g_3 = (\wp' v)^2.$$

Der in den Formeln auf S. 13, 14 vorkommende Werth $\sqrt{R(x_0)}$ ist hiernach gleich $\pm\wp' v$, ebenso wie $\sqrt{S} = \pm\wp' u$. Die Einführung von

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad B' = -\frac{1}{4}g_2, \quad A' = -g_3$$

in jene Formeln liefert

$$\wp(u+v) = \frac{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3+\varepsilon\wp' u\,\wp' v}{2(\wp u-\wp v)^2},$$

wo $\pm 1=\varepsilon$ gesetzt ist. Den Werth von ε kann man mit Hilfe der Transformationsformeln selbst bestimmen, indem man die Beziehung zwischen $\sqrt{R(x)}$ und $\sqrt{S}$ in Betracht zieht. Allein einfacher ist es, für die vorkommenden Functionen die für hinreichend kleine Werthe von u geltenden Reihenentwicklungen einzusetzen und die Anfangsglieder links und rechts zu vergleichen. Aus der Reihe (2.) oder

$$\wp u = \frac{1}{u^2}+\mathfrak{P}(u^2),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe mit nur positiven Potenzen bedeutet, folgt

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3}+\frac{d\mathfrak{P}(u^2)}{du},$$

ferner zwei entsprechende Gleichungen für $\wp v$ und $\wp' v$, sowie

$$\wp(u+v) = \frac{1}{(u+v)^2}+\mathfrak{P}((u+v)^2).$$

Die Durchführung der Rechnung ergiebt

$$\varepsilon = -1,$$

also

$$(3.)\qquad \wp(u+v) = \frac{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\wp' u\,\wp' v}{2(\wp u-\wp v)^2}.$$

Wollte man hieraus in Verbindung mit

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3,$$
$$(\wp' v)^2 = 4\wp^3 v-g_2\wp v-g_3$$

die Ableitungen $\wp' u$ und $\wp' v$ eliminiren, so würde man eine algebraische Gleichung zwischen $\wp u$, $\wp v$ und $\wp(u+v)$ erhalten. Das heisst:

Die $\wp$-Function hat ein algebraisches Additionstheorem.

Doch soll auch der Inhalt der Formel (3.) selbst, in der $\wp(u+v)$ als rationale Function von $\wp u$, $\wp v$ und $\wp' u$, $\wp' v$ erscheint, als Additionstheorem der $\wp$-Function bezeichnet werden.

Wir ziehen aus (3.) einige Folgerungen.

Da

$$(4.)\qquad \wp(-u) = \wp u,$$

so ist

$$(5.)\qquad \wp'(-u) = -\wp' u,$$

mithin

$$(6.)\qquad \wp(u-v) = \frac{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3+\wp' u\,\wp' v}{2(\wp u-\wp v)^2}.$$

Durch Addition und Subtraction folgt aus (3.) und (6.)

$$(7.)\qquad \wp(u+v)+\wp(u-v) = \frac{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3}{(\wp u-\wp v)^2},$$

$$(8.)\qquad \wp(u+v)-\wp(u-v) = \frac{-\wp' u\,\wp' v}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Multiplicirt man ferner beiderseits (3.) mit (6.), so erhält man unter Berücksichtigung der Ausdrücke von $(\wp' u)^2$ und $(\wp' v)^2$ als Functionen von $\wp u$ und $\wp v$ für den Zähler der rechten Seite

$$((\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3)^2-(4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3)(4\wp^3 v-g_2\wp v-g_3).$$

Diese ganze Function von $\wp u$ und $\wp v$ ist durch $(\wp u-\wp v)^2$ theilbar, und es wird

$$(9.)\qquad \wp(u+v)\,\wp(u-v) = \frac{(\wp u\,\wp v+\frac{1}{4}g_2)^2+g_3(\wp u+\wp v)}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Nach Division durch den Werth (6.) von $\wp(u-v)$ ergiebt sich hieraus

$$(10.)\qquad \wp(u+v) = \frac{2(\wp u\,\wp v+\frac{1}{4}g_2)^2+2g_3(\wp u+\wp v)}{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3+\wp' u\,\wp' v}.$$

Im Gegensatz zu der Ausgangsformel (3.) ist diese auch für $v = u$ brauchbar und liefert

$$(11.)\qquad \wp(2u) = \frac{(\wp^2 u+\frac{1}{4}g_2)^2+2g_3\wp u}{4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3};$$

$\wp(2u)$ lässt sich also rational durch $\wp u$ allein, ohne $\wp' u$, darstellen. Diese Eigenschaft bleibt, wenn n eine positive ganze Zahl ist, für $\wp(nu)$ bestehen. Denn angenommen, es sei für einen bestimmten Werth von n eine Formel

$$(12.)\qquad \wp(nu) = F(\wp u),$$

in der F eine rationale Function bedeutet, als giltig nachgewiesen, dann liefert das Additionstheorem:

$$\wp((n+1)u) = \frac{(\wp u + \wp(nu))(2\wp u\,\wp(nu) - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp' u\,\wp'(nu)}{2(\wp u - \wp(nu))^2}$$
$$= \frac{(\wp u + F(\wp u))(2\wp u\,F(\wp u) - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \frac{1}{n}F'(\wp u)(\wp' u)^2}{2(\wp u - F(\wp u))^2}.$$

Es lässt sich also, da $(\wp' u)^2$ durch $4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3$ ersetzt werden kann, $\wp(n+1)u)$ wieder als rationale Function von $\wp u$ darstellen.

Nunmehr können die oben (S. 23, 24) angedeuteten Schlüsse angewendet werden, nur insofern vereinfacht, als in der Formel für $\wp(nu)$ die Ableitung $\wp' u$ nicht vorkommt. Es sei

$$\wp(nu) = \frac{G_1(\wp u)}{G_2(\wp u)},$$

wo G_1 und G_2 ganze rationale Functionen bezeichnen. Setzt man im Zähler und Nenner die unter der Annahme $|u| < r$ geltende Reihe für $\wp u$ ein, die nur die eine negative Potenz u^{-2} enthält, und ordnet wieder nach Potenzen von u, so entstehen zwei Potenzreihen, die ebenfalls innerhalb jenes Bereiches convergiren und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen aufweisen. Durch Erweiterung des Quotienten mit einer passend gewählten positiven Potenz kann man die Reihen in gewöhnliche Potenzreihen überführen, sodass

$$\wp(nu) = \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(u)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(u)}$$

oder

$$\wp u = \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{u}{n}\right)}{\overline{\mathfrak{P}}_2\left(\frac{u}{n}\right)}$$

wird. Die beiden Potenzreihen gelten für

$$\left|\frac{u}{n}\right| < r;$$

vermittelst des Multiplicationstheorems, wie man den Inhalt der Formel (12.) bezeichnen kann, ergiebt sich also eine Darstellung der $\wp$-Function, die für

$$|u| < nr,$$

d. h., da n willkürlich angenommen werden darf, für beliebig grosse Werthe des Arguments Geltung hat.

Freilich muss bewiesen werden, dass die Function bei Erweiterung ihres Giltigkeitsbereiches fortfährt, der Differentialgleichung (1.) zu genügen. Es werde

$$\overline{\mathfrak{P}}_1\left(\frac{u}{n}\right) = \mathfrak{P}_1(u), \quad \overline{\mathfrak{P}}_2\left(\frac{u}{n}\right) = \mathfrak{P}_2(u)$$

gesetzt, d. h. die Potenzen der Zahl n in die Reihen-Coefficienten aufgenommen, sodass

$$\wp u = \frac{\mathfrak{P}_1(u)}{\mathfrak{P}_2(u)}$$

wird. Für $|u| < r$ muss der Quotient der beiden Potenzreihen sich in die Reihe (2.) entwickeln lassen. Für diesen Bereich gilt also die Gleichung

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}\right)^2 = 4\left(\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}\right)^3 - g_2\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} - g_3$$

oder

$$(13.)\qquad \left(\mathfrak{P}_2\frac{d\mathfrak{P}_1}{du} - \mathfrak{P}_1\frac{d\mathfrak{P}_2}{du}\right)^2 = 4\mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_2 - g_2\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^3 - g_3\mathfrak{P}_2^4.$$

Hier sind die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite gewöhnliche Potenzreihen von u. Sollen sie für alle Werthe des angegebenen Bereiches einander gleich sein, so müssen in ihnen die Coefficienten gleicher Potenzen paarweise übereinstimmen. Dann gilt aber die Gleichung (13.) oder die unmittelbar vorhergehende für alle Werthe des Bereiches, innerhalb dessen die beiden Reihen überhaupt convergiren, d. h. für $|u| < nr$.

Die Darstellung der $\wp$-Function durch den Quotienten der beiden Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(u)$ und $\mathfrak{P}_2(u)$ hat den Übelstand, dass sie noch von der Zahl n abhängt. Im nächsten Kapitel wird gezeigt werden, dass man $\wp u$ durch den Quotienten zweier beständig convergenten Reihen ausdrücken kann, deren Coefficienten allein Functionen von g_2 und g_3 sind. Zunächst aber wollen wir in der Reihe (2.) die Coefficienten c_0', c_1', c_2' bestimmen, die dort ebenfalls gebraucht werden.

Diese Reihe ist aus der Entwickelung des reciproken Werthes einer gewöhnlichen Potenzreihe $\overline{\varphi}(u)$ entstanden (S. 22). Dabei war $\overline{\varphi}(u)$ allgemein eine für $u = 0$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \overline{R}(z),$$

in der $\overline{R}(z)$ die für $A = 0$ aus der Formel (8.) (S. 21) hervorgehende Function bedeutet. Im vorliegenden Falle, wo

$$R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

ist, hat man noch

$$B = 1, \quad C = 0, \quad B' = -\frac{1}{4} g_2, \quad A' = -g_3$$

zu setzen. Unter diesen Annahmen, deren erste zur Bestimmung des Coefficienten von u^{-2} in der Reihe für $\wp u$ benutzt worden ist (S. 23), möge $G(z)$ für $\overline{R}(z)$ geschrieben werden, sodass

$$G(z) = 4z - g_2 z^3 - g_3 z^4$$

wird. Anstatt nun das auf S. 18 entwickelte Recursionsverfahren anzuwenden, kann man die Coefficienten von $\overline{\varphi}(u)$ direct mittels der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = G(z) \tag{14.}$$

berechnen, indem man, weil nur gerade Potenzen vorkommen und das Anfangsglied gleich Null ist,

$$z = \overline{\varphi}(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{d^{2\nu} z}{du^{2\nu}}\right)_0 \frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

setzt. Um die Coefficienten in der Reihe (2.) bis zu dem von u^4 zu bestimmen, muss man in der Reihe für $\overline{\varphi}(u)$ bis u^8 fortgehen.

Nun folgt aus (14.)

$$\frac{d^2 z}{du^2} = \frac{1}{2} G'(z),$$

$$\frac{d^3 z}{du^3} = \frac{1}{2} G''(z) \frac{dz}{du},$$

$$\frac{d^4 z}{du^4} = \frac{1}{4} G'(z) G''(z) + \frac{1}{2} G(z) G'''(z).$$

Da z für $u = 0$ verschwindet und

$$G(0) = 0, \quad G'(0) = 4, \quad G''(0) = 0, \quad G'''(0) = -6 g_2, \quad G^{\mathrm{IV}}(0) = -24 g_3$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{du^2}\right)_0 = 1$$

und

$$\left(\frac{d^4 z}{du^4}\right)_0 = 0.$$

Die weiteren Differentiationen liefern folgende Ergebnisse, in denen zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{3}{4} G'(z)\, G'''(z) + \frac{1}{4} G''(z)^2 + \frac{1}{2} G(z)\, G^{\mathrm{IV}}(z),$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} G''(z) + \frac{3}{2} \frac{d\alpha}{dz} G'(z) + \frac{d^2\alpha}{dz^2} G(z)$$

gesetzt ist:

$$\frac{d^5 z}{du^5} = \alpha \frac{dz}{du},$$

$$\frac{d^6 z}{du^6} = \frac{\alpha}{2} G'(z) + \frac{d\alpha}{dz} G(z),$$

$$\frac{d^7 z}{du^7} = \beta \frac{dz}{du},$$

$$\frac{d^8 z}{du^8} = \frac{\beta}{2} G'(z) + \frac{d\beta}{dz} G(z).$$

Diese Formeln ergeben

$$\left(\frac{d^6 z}{du^6}\right)_0 = \frac{1}{2} \alpha_0 G'(0) = -36 g_2,$$

$$\left(\frac{d^8 z}{du^8}\right)_0 = \frac{1}{2} \beta_0 G'(0) = 15 G'(0)\, G^{\mathrm{IV}}(0) = -4.15.24 g_3,$$

also

$$\overline{\varphi}(u) = u^2 - \frac{g_2}{20} u^6 - \frac{g_3}{28} u^8 + \cdots,$$

woraus

$$\wp u = \frac{1}{u^2} \frac{1}{1 - \frac{g_2}{20} u^4 - \frac{g_3}{28} u^6 + \cdots}$$

folgt.

Für hinreichend kleine Werthe von u lässt sich der Quotient, der mit $\frac{1}{u^2}$ multiplicirt die $\wp$-Function darstellt, in eine Potenzreihe

$$1 + \frac{g_2}{20} u^4 + \frac{g_3}{28} u^6 + \cdots$$

entwickeln, wo die nur angedeuteten Glieder mindestens die achte Potenz von u enthalten. Hiernach wird schliesslich

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots, \tag{15.}$$

d. h.

$$c_0' = 0, \quad c_1' = \frac{g_2}{20}, \quad c_2' = \frac{g_3}{28}.$$

Dass $\bar{\varphi}(u)$ kein Glied mit u^4, also $\wp u$ kein constantes Glied enthält, rührt, wie man sieht, daher, dass in der ganzen Function dritten Grades $R(x)$ die zweite Potenz von x fehlt. Denn hierdurch wird das Fehlen von z^2 in $G(z)$, d. h. die Gleichung $G''(0) = 0$ bedingt.

Die Coefficienten von $\bar{\varphi}(u)$ sind ganze rationale Functionen der Invarianten g_2 und g_3 (S. 18), und dasselbe gilt für die Coefficienten der Reihe für $\wp u$.

Viertes Kapitel.

Die Function σu.

Aus der Reihe

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots, \tag{1.}$$

die nur die eine negative Potenz u^{-2} enthält, kann man eine andere, in der negative Potenzen garnicht vorkommen, dadurch herleiten, dass man zweimal hinter einander integrirt und den dann auftretenden Logarithmus durch Übergang zur Exponentialfunction wegschafft. Wir bezeichnen die neue Reihe mit σu und setzen, da der Logarithmus mit dem negativen Zeichen behaftet auftritt,

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}, \tag{2.}$$

vervollständigen ausserdem die Definition der Function σu durch die Festsetzung, dass die beiden bei der Integration auftretenden Constanten gleich Null sein sollen. Aus der Gleichung

$$-\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -\frac{d^2 \log u}{du^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots$$

folgt dann

$$-\frac{d \log \frac{\sigma u}{u}}{du} = \frac{g_2}{20} \frac{u^3}{3} + \frac{g_3}{28} \frac{u^5}{5} + \cdots, \tag{3.}$$

und weiter

$$\log \frac{\sigma u}{u} = -\frac{g_2}{20} \frac{u^4}{3.4} - \frac{g_3}{28} \frac{u^6}{5.6} - \cdots = -\mathfrak{P}(u^2),$$

also

$$\sigma u = u e^{-\mathfrak{P}(u^2)} = u - \frac{g_2}{2} \frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} - \cdots, \tag{4.}$$

wo die hingeschriebenen Glieder die einzigen sind, die keine höhere als die siebente Potenz von u enthalten.

Die beiden der Differentialgleichung (2.) hinzugefügten Nebenbedingungen lassen sich dahin aussprechen, es solle für $u = 0$

$$\frac{d \log \frac{\sigma u}{u}}{du} = 0, \qquad \frac{\sigma u}{u} = 1$$

sein.

Nach der Entstehung der Reihe (4.) sind ihre Coefficienten wieder ganze rationale Functionen der Invarianten. Ferner ist hervorzuheben, dass σu eine ungerade Function ist:

$$\sigma(-u) = -\sigma u, \tag{5.}$$

also $\sigma' u$ gerade:

$$\sigma'(-u) = \sigma' u. \tag{6.}$$

Wir werden häufig auch die ungerade Function $\frac{d \log \sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$ gebrauchen, für die zur Abkürzung $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ geschrieben werden soll. Die Gleichung (3.) liefert für sie die Entwickelung

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \frac{g_3}{140} u^5 + \cdots. \tag{7.}$$

Nach der Herleitung der Gleichung (4.) convergirt die Reihe für σu zunächst nur innerhalb eines beschränkten Bereiches, $|u| < r$. Es ist jedoch von der grössten Wichtigkeit, dass sie beständig, d. h. für alle endlichen Werthe von u convergent ist. Um dies zu beweisen, stellen wir $\wp(2u)$ in einer anderen Form dar als auf S. 26, und leiten aus dem neuen Ausdruck einen solchen für $\sigma(2u)$ her.

Setzen wir zu diesem Zweck in der Formel des Additionstheorems (S. 25 (3.)) $v = u + h$ und entwickeln nach Potenzen von h, so ergiebt sich als Anfangsglied links $\wp(2u)$, rechts im Nenner $2h^2 \wp'^2 u$. Im Zähler verschwinden, wie es hiernach sein muss, die Coefficienten von h^0 und h^1, und zwar auf Grund der Differentialgleichung der $\wp$-Function und der aus ihr abgeleiteten

$$\wp'' u = 6 \wp^2 u - \frac{1}{2} g_2.$$

Der Coefficient von h^2 liefert, durch $2\wp'^2 u$ dividirt, die Formel

$$\wp(2u) = \frac{3}{2}\frac{\wp^2 u\,\wp'' u}{\wp'^2 u} + \wp u - \frac{1}{8} g_2 \frac{\wp'' u}{\wp'^2 u} - \frac{1}{4}\frac{\wp''' u}{\wp' u}.$$

Entfernt man noch die Invariante g_2 mittels der Gleichung für $\wp'' u$, so erhält man

$$(8.)\qquad \wp(2u) = \wp u - \frac{1}{4}\frac{d}{du}\frac{\wp'' u}{\wp' u}.$$

Die Beziehung (2.) zwischen der $\wp$-Function und der σ-Function ergiebt nun

$$\frac{1}{4}\frac{d^2 \log \sigma(2u)}{du^2} = \frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{du}\frac{\wp'' u}{\wp' u},$$

und nach Ausführung einer Integration

$$\frac{d\log\sigma(2u)}{du} = 4\frac{d\log\sigma u}{du} + \frac{\wp'' u}{\wp' u} + c.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten c beachte man, dass die links und an erster Stelle rechts stehenden Functionen in Folge von (7.) kein constantes Glied enthalten. Dieselbe Thatsache tritt für den Quotienten an zweiter Stelle nach Einführung der Reihenentwicklungen

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10} u + \cdots,$$

$$\wp'' u = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \cdots$$

hervor. Mithin muss

$$c = 0$$

sein. Die nochmalige Integration liefert nach Bestimmung der multiplicativen Constanten aus den Anfangsgliedern

$$(9.)\qquad \sigma(2u) = -\sigma^4 u . \wp' u,$$

d. h.

$$\sigma(2u) = \sigma^4 u \cdot \frac{d^3 \log \sigma u}{du^3}$$

oder

$$(10.)\qquad \sigma(2u) = \sigma^3 u\,\sigma''' u - 3\sigma^2 u\,\sigma' u\,\sigma'' u + 2\sigma u\,\sigma'^3 u.$$

Wird hierin $\frac{u}{2}$ für u gesetzt, so stehen in der Gleichung

$$\sigma u = \sigma^3\left(\frac{u}{2}\right)\sigma'''\left(\frac{u}{2}\right) - 3\sigma^2\left(\frac{u}{2}\right)\sigma'\left(\frac{u}{2}\right)\sigma''\left(\frac{u}{2}\right) + 2\sigma\left(\frac{u}{2}\right)\sigma'^3\left(\frac{u}{2}\right)$$

links und rechts gewöhnliche Potenzreihen von u, die für alle Werthe

$$|u| < r$$

übereinstimmen und demnach identisch sein müssen. Da aber die einzelnen Bestandtheile des rechts stehenden Ausdruckes für

$$\left|\frac{u}{2}\right| < r$$

convergiren, so muss auch die Reihe für σu innerhalb des Bereiches

$$|u| < 2r$$

convergent sein. Die Wiederholung dieses Schlusses ergiebt unmittelbar die beständige Convergenz der σ-Reihe.

Durch die Formel (2.) oder die mit ihr übereinstimmende

$$\wp u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \, \sigma'' u}{\sigma^2 u} \tag{11.}$$

wird nunmehr die $\wp$-Function für alle endlichen Werthe des Arguments als Quotient zweier beständig convergenten Potenzreihen definirt. Dass der Ausdruck (11.) der Differentialgleichung

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3$$

genügt, ergiebt sich durch dieselben Schlüsse wie auf S. 28. Und ferner leuchtet nach dem für das Additionstheorem (S. 25) gegebenen Beweise ein, dass auch dieses Theorem für beliebige Werthe des Arguments giltig bleibt.

Freilich würden diese Resultate einen grossen Theil ihrer Bedeutung einbüssen, wenn es nicht gelänge, die Coefficienten der σ-Reihe auf einem weniger beschwerlichen Wege zu bestimmen als dem, der zu den Ausdrücken für die ersten dieser Coefficienten geführt hat. Wir werden im nächsten Kapitel auf die Ermittelung des Bildungsgesetzes ausgehen. An dieser Stelle möge noch eine von Differentialquotienten freie Relation zwischen den beiden Functionen σu und $\wp u$ hergeleitet werden, die für die Theorie von grundlegender Wichtigkeit ist.

Mittels der Differentialgleichung der $\wp$-Function ist es möglich, die zweite Ableitung des Logarithmus von $\wp u$ oder von einer linearen Function von $\wp u$ durch die $\wp$-Function selbst darzustellen. Gelingt es, einen solchen

Ausdruck so umzuformen, dass er eine lineare Function von $\wp$-Functionen wird, so kann man nach Benutzung der Gleichung (2.) durch zweimalige Integration zum Ziel kommen. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{d^2\log(\wp u-\wp v)}{du^2} &= \frac{1}{\wp u-\wp v}\,\frac{d^2(\wp u-\wp v)}{du^2}-\frac{1}{(\wp u-\wp v)^2}\left(\frac{d(\wp u-\wp v)}{du}\right)^2\\ &= \frac{6\wp^2 u-\frac{1}{2}g_2}{\wp u-\wp v}-\frac{4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3}{(\wp u-\wp v)^2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}g_2(\wp u+\wp v)+g_3+2\wp^3 u-6\wp^2 u\,\wp v}{(\wp u-\wp v)^2}.\end{aligned}$$

Das Aggregat der drei ersten Glieder des Zählers weist auf die Benutzung des Additionstheorems oder, da $\wp' u$ und $\wp' v$ nicht auftreten, der aus ihm folgenden Formel

$$\wp(u+v)+\wp(u-v) = \frac{(\wp u+\wp v)(2\wp u\,\wp v-\frac{1}{2}g_2)-g_3}{(\wp u-\wp v)^2}$$

(S. 26 (7.)) hin. Der Zähler erhält hierbei den Factor $(\wp u-\wp v)^2$, der sich gegen den Nenner hebt, sodass

$$\frac{d^2\log(\wp u-\wp v)}{du^2} = 2\wp u-\wp(u+v)-\wp(u-v) \tag{12.}$$

wird. Die rechte Seite hat die gewünschte, oben erwähnte Eigenschaft. Mittels der Gleichung (2.) folgt nun

$$\frac{d^2\log(\wp u-\wp v)}{du^2} = -2\frac{d^2\log\sigma u}{du^2}+\frac{d^2\log\sigma(u+v)}{du^2}+\frac{d^2\log\sigma(u-v)}{du^2},$$

und die Integration ergiebt

$$\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v} = -2\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)+C.$$

Zur Bestimmung von C setze man $-u$ für u, so wird

$$\frac{-\wp' u}{\wp u-\wp v} = 2\frac{\sigma'}{\sigma}u-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)+C.$$

Die Addition zur vorangehenden Gleichung liefert dann

$$C = 0.$$

Durch nochmalige Integration der so gefundenen Formel

$$\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-2\frac{\sigma'}{\sigma}u \tag{13.}$$

erhält man weiter

$$\wp u - \wp v = C' \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}.$$

Bei der Entwickelung nach Potenzen von u entsteht links das Anfangsglied $\frac{1}{u^2}$, rechts $C' \frac{\sigma(v)\,\sigma(-v)}{u^2}$; es muss also

$$C' = -\frac{1}{\sigma^2 v}$$

sein. Daraus folgt die gesuchte Relation

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}. \tag{14.}$$

Man kann sie z. B. dazu benutzen, die Gleichung (9.), auf die sich die Erweiterung des Convergenzbereichs der σ-Reihe stützte, auf anderem Wege herzuleiten als vorher. Setzt man nämlich in (14.)

$$v = u + h$$

und entwickelt nach Potenzen von h, so folgt

$$h\wp' u + \cdots = \frac{(\sigma(2u) + h\sigma'(2u) + \cdots)(-h + \cdots)}{\sigma^2 u(\sigma^2 u + \cdots)}$$

und durch Vergleichung der Anfangsglieder

$$\wp' u = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u}.$$

Um auch von der Formel (13.) eine Anwendung zu machen, setzen wir mit ihrer Hilfe das Additionstheorem der $\wp$-Function in eine andere Gestalt. Die Vertauschung von u und v liefert

$$\frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

und die Addition dieser Gleichung zu der ursprünglichen:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}. \tag{15.}$$

Differentiirt man nach u und geht allenthalben zur $\wp$-Function zurück, so erhält man

$$\wp(u+v) = \wp u - \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}. \tag{16.}$$

Dies ist schon ein Ausdruck für $\wp(u+v)$, der von dem auf S. 25 gegebenen nur der Form nach verschieden ist.

Führt man nun weiter die angedeutete Differentiation aus, vertauscht nochmals u mit v und addirt beide Gleichungen, so erhält man

$$2\wp(u+v) = \wp u + \wp v - \frac{1}{2}\,\frac{\wp'' u - \wp'' v}{\wp u - \wp v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2.$$

Nun ist (S. 33)

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2.$$

Ersetzt man hierin u durch v und subtrahirt, so folgt

$$\frac{\wp'' u - \wp'' v}{\wp u - \wp v} = 6(\wp u + \wp v), \tag{17.}$$

und mit Hilfe dieser Formel geht die vorstehende über in

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v. \tag{18.}$$

Fünftes Kapitel.

Die partielle Differentialgleichung der σ-Function.

Die ungerade Function σu konnte nach S. 35 u. 33 durch eine beständig convergente Potenzreihe dargestellt werden, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind,

$$\sigma u = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(g_2, g_3)\, u^{2\nu+1}.$$

Aus der Gleichung (4.) des vorigen Kapitels, nämlich

$$(1.)\qquad \sigma u = u - \frac{g_2}{2}\frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} + \cdots$$

lassen sich die Ausdrücke der vier ersten Functionen $f_\nu(g_2, g_3)$ ablesen. Zu ihrer allgemeinen Bestimmung bietet sich der Weg dar, durch Zusammenstellung der Differentialgleichung der $\wp$-Function mit

$$(2.)\qquad -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = \wp u$$

eine Differentialgleichung für die σ-Function zu bilden. Allein die hierauf zu gründende Methode würde namentlich deshalb unzweckmässig sein, weil jene Differentialgleichung $\wp' u$ in der zweiten, $\wp u$ selbst sogar in der dritten Potenz enthält.

Wir betrachten von vornherein σu, und demnach auch $\wp u$, als Function der drei Argumente u, g_2, g_3 und setzen, wo dies ausdrücklich hervorgehoben werden soll,

$$\sigma u = \sigma(u; g_2, g_3), \qquad \wp u = \wp(u; g_2, g_3).$$

Werden die Grössen f_ν als ganze Functionen von g_2 und g_3 mit unbestimmten

Coefficienten eingeführt, so lässt sich schreiben:

$$(3.)\qquad \sigma u = \sum_{\lambda,\mu,\nu} C_{\lambda\mu\nu}\, g_2^\lambda g_3^\mu u^{2\nu+1},$$

wo λ, μ, ν unabhängig von einander alle positiven ganzzahligen Werthe, Null eingeschlossen, zu durchlaufen haben. Die Bestimmung der Grössen $C_{\lambda\mu\nu}$ gelingt mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung, der die Function $\sigma(u; g_2, g_3)$ genügt und die zunächst hergeleitet werden soll.

Die Grundlage der folgenden Untersuchung bildet wieder die Differentialgleichung der $\wp$-Function, die jetzt, wenn der Einfachheit wegen auch das Argument u weggelassen wird, in der Form

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

zu schreiben ist. Differentiirt man sie nach u, g_2 und g_3 einzeln, so erhält man

$$2\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2} = 12\wp^2 - g_2,$$

$$2\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_2} = (12\wp^2 - g_2)\frac{\partial\wp}{\partial g_2} - \wp,$$

$$2\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_3} = (12\wp^2 - g_2)\frac{\partial\wp}{\partial g_3} - 1.$$

Wir richten im Folgenden unser Augenmerk auf die beständige Elimination der Potenzen von $\wp$ und auf die Herstellung linearer Verbindungen von Differentialquotienten.

Zunächst liefert die Elimination von $\wp^2$ aus den drei letzten Gleichungen

$$2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_2} - \frac{\partial\wp}{\partial g_2}\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\right) = -\wp,$$

$$2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\frac{\partial^2\wp}{\partial u\,\partial g_3} - \frac{\partial\wp}{\partial g_3}\frac{\partial^2\wp}{\partial u^2}\right) = -1$$

oder

$$(5.)\qquad 2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}} = -\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2},$$

$$(6.)\qquad 2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\dfrac{\partial\wp}{\partial u}} = -\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}.$$

Andererseits kann man eine homogene lineare Function der rechten Seiten dieser Gleichungen und der $\wp$-Function selbst dadurch herstellen, dass man bildet:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1} = -\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}\left(6\wp^2-\frac{1}{2}g_2\right), \tag{7.}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = -\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}\left(6\wp^2-\frac{1}{2}g_2\right)+2\wp \tag{8.}$$

und wieder die höheren Potenzen von $\wp$ entfernt. Weil nach (4.)

$$6\wp^4-\frac{1}{2}g_2\wp^2 = \frac{3}{2}\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^2+g_2\wp^2+\frac{3}{2}g_3\wp$$

ist, so wird die Gleichung (8.):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2}\wp-\left(g_2\wp^2+\frac{3}{2}g_3\wp\right)\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}.$$

Durch Elimination von $\wp^2$ aus dieser und der Gleichung (7.) folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(6\wp^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(g_2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = 3\wp-9g_3\wp\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}-\frac{1}{2}g_2^2\left(\frac{\partial\wp}{\partial u}\right)^{-2}.$$

Zieht man nun (5.) und (6.) hinzu, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{6\wp^2-g_2}{\frac{\partial\wp}{\partial u}} = 3\wp+18g_3\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial\wp}{\partial g_2}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}}+g_2^2\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial\wp}{\partial g_3}}{\frac{\partial\wp}{\partial u}},$$

und hieraus durch Integration in Bezug auf u, nachdem man rechts im ersten Gliede $-\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2}$ an Stelle von $\wp$ gesetzt hat,

$$6\wp^2-g_2 = -3\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\,\frac{\partial\wp}{\partial u}+18g_3\frac{\partial\wp}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\wp}{\partial g_3}+C\frac{\partial\wp}{\partial u}.$$

Da nun die mit C multiplicirte Grösse $\frac{\partial\wp}{\partial u}$ eine ungerade, die in den übrigen Gliedern auftretenden Grössen aber sämmtlich gerade Functionen von u sind, so muss $C=0$ sein. Man setze jetzt

$$-\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\,\frac{\partial\wp}{\partial u} = \frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\,\frac{\partial^3\log\sigma}{\partial u^3} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2}\right)^2$$

und eliminire $\wp^2$ mittels der Gleichung

$$6\wp^2-\frac{1}{2}g_2 = \frac{\partial^2\wp}{\partial u^2} = -\frac{\partial^4\log\sigma}{\partial u^4},$$

so erhält man

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 - 18 g_3 \frac{\partial^3 \log \sigma}{\partial u^2 \partial g_2} - g_2^2 \frac{\partial^3 \log \sigma}{\partial u^2 \partial g_3} + \frac{3}{2}\frac{\partial^4 \log \sigma}{\partial u^4} + \frac{1}{4} g_2 = 0.$$

Integrirt man weiter nach u, und zwar zweimal, so folgt

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 - 18 g_3 \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_2} - g_2^2 \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_3} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2} + \frac{1}{8} g_2 u^2 + C' u + C'' = 0.$$

Die früher (S. 32) aufgestellte Reihenentwicklung

$$\log \sigma = \log u - \frac{g_2}{240} u^4 - \frac{g_3}{840} u^6 + \cdots$$

und die daraus abgeleiteten

$$\frac{\partial \log \sigma}{\partial g_2} = -\frac{u^4}{240} + \cdots, \quad \frac{\partial \log \sigma}{\partial g_3} = -\frac{u^6}{840} + \cdots$$

lehren, dass, von $C'u + C''$ abgesehen, nirgends die Potenzen u^1 oder u^0 vorkommen, dass also C' und C'' verschwinden müssen. Wird endlich das erste Glied vermöge der Relation

$$\left(\frac{\partial \log \sigma}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 \log \sigma}{\partial u^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}$$

mit dem vierten zusammengezogen, so ergiebt sich für die σ-Function die homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(9.) \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma = 0.$$

Auf den ersten Anblick scheint es am nächsten zu liegen, an Stelle der beiden Ableitungen auf den linken Seiten von (7.) und (8.) nur eine, und zwar die von $\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-1}$ zu berechnen und demnach jene beiden Gleichungen durch

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = -\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-2}\left(6\wp^2 - \frac{1}{2} g_2\right) + 1$$

zu ersetzen. Alsdann könnte man $\wp^3$ mittels der Differentialgleichung (4.) eliminiren und weiter so verfahren wie vorher. Auf diesem Wege ergiebt sich zunächst

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\wp\left(\frac{\partial \wp}{\partial u}\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{2} + 2 g_2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\frac{\partial \wp}{\partial g_2}}{\frac{\partial \wp}{\partial u}} + 3 g_3 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\frac{\partial \wp}{\partial g_3}}{\frac{\partial \wp}{\partial u}}.$$

Die Integration nach u liefert

$$\wp = -\frac{1}{2}u\frac{\partial\wp}{\partial u} + 2g_2\frac{\partial\wp}{\partial g_2} + 3g_3\frac{\partial\wp}{\partial g_3}; \tag{10.}$$

denn das noch auftretende Glied $C\frac{\partial\wp}{\partial u}$ muss wegfallen, wie man sich durch Einsetzen der Reihenentwicklung für $\wp$ überzeugt. Führt man nun $\wp = -\frac{\partial^2 \log\sigma}{\partial u^2}$ ein und integrirt noch zweimal nach u, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{2}u\frac{\partial\log\sigma}{\partial u} + 2g_2\frac{\partial\log\sigma}{\partial g_2} + 3g_3\frac{\partial\log\sigma}{\partial g_3} + C'u + C'' = 0.$$

Die Bestimmung der beiden Constanten lässt sich mittels der auf der vorigen Seite angegebenen Reihenentwicklungen ausführen; danach wird

$$C' = 0, \quad C'' = \frac{1}{2},$$

sodass die partielle Differentialgleichung

$$u\frac{\partial\sigma}{\partial u} - 4g_2\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} - 6g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - \sigma = 0 \tag{11.}$$

gilt. Sie ist insofern einfacher als die Gleichung (9.), als sie keine Ableitung zweiter Ordnung enthält. Allein für die Bestimmung der Coefficienten $C_{\lambda\mu\nu}$ ist sie nicht brauchbar, weil diese Grössen beim Einsetzen der Reihe (3.) herausfallen. Was die Differentialgleichung liefert, ist eine Relation zwischen den Exponenten λ, μ, ν.

Eine genauere Einsicht in die Bedeutung dieser Relation, die zur Vereinfachung der Coefficientenbestimmung benutzt werden soll, erhält man durch folgendes kürzere Verfahren. Es werde

$$u = mv$$

und gleichzeitig

$$\wp = \frac{q}{m^2}$$

gesetzt, unter m eine willkürliche Constante verstanden, sodass in der Differentialgleichung (4.) der $\wp$-Function die linke Seite und das erste Glied der rechten formal ungeändert bleiben. Zusammen mit der Nebenbedingung, q solle für $v = 0$ unendlich gross werden, lehrt die aus (4.) hervorgehende Differentialgleichung

$$\left(\frac{dq}{dv}\right)^2 = 4q^3 - m^4 g_2 q - m^6 g_3,$$

dass q eine $\wp$-Function von v mit den Invarianten $m^4 g_2$, $m^6 g_3$ ist. Die Gleichung $\wp = \frac{q}{m^2}$ kann demnach in der Form

$$\wp(u; g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right) \tag{12.}$$

geschrieben werden. Die Einführung der σ-Function ergiebt

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(u; g_2, g_3)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \log \sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_6\right)}{\partial u^2},$$

und durch Integration folgt hieraus

$$\frac{\partial \log \sigma(u; g_2, g_3)}{\partial u} = \frac{\partial \log \sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right)}{\partial u},$$

wo eine Constante nicht hinzutritt, weil, wie die Reihenentwicklung für $\log \sigma$ auf S. 42 zeigt, die beiden links und rechts stehenden Functionen kein constantes Glied enthalten. Eine nochmalige Integration ergiebt, nachdem die Constante aus derselben Reihenentwicklung bestimmt ist,

$$\sigma(u; g_2, g_3) = m\sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right). \tag{13.}$$

Die Formeln (12.) und (13.) geben den wesentlichen Inhalt der Differentialgleichungen (10.) und (11.) wieder.

Wendet man nun die in der Gleichung (13.) ausgesprochene Eigenschaft auf die Reihe (3.) an, so wird

$$\sigma u = \sum_{\lambda, \mu, \nu} C_{\lambda\mu\nu} m^{4\lambda+6\mu-2\nu} g_2^\lambda g_3^\mu u^{2\nu+1}.$$

Es darf also, da m beliebig ist, diese Grösse nicht vorkommen, d. h. es muss

$$4\lambda + 6\mu - 2\nu = 0$$

sein. Führt man den hieraus folgenden Werth von ν in die Reihenentwicklung ein und bezeichnet den Coefficienten $C_{\lambda\mu\nu}$, der dann nur noch von den beiden Zahlenwerthen λ und μ abhängt, mit $c_{\lambda\mu}$, so kann man schreiben:

$$\sigma u = \sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu} g_2^\lambda g_3^\mu u^{4\lambda+6\mu+1}. \tag{14.}$$

Setzt man diese Reihe für σu in die partielle Differentialgleichung (9.) ein, so erhält man die Recursionsformel

$$(4\lambda+6\mu+1)(4\lambda+6\mu)c_{\lambda\mu} = 12(\lambda+1)c_{\lambda+1,\mu-1} + \frac{2}{3}(\mu+1)c_{\lambda-2,\mu+1} - \frac{1}{12}c_{\lambda-1,\mu}, \tag{15.}$$

in der $c_{00} = 1$ und alle Grössen $c_{\lambda\mu}$, in denen ein Index negativ ist, gleich Null zu setzen sind. Es ist zweckmässig, die Bezeichnung der Reihencoefficienten durch die Substitution

$$c_{\lambda\mu} = \frac{a_{\lambda\mu}}{2^{\lambda-\mu}.(4\lambda+6\mu+1)!}$$

zu ändern und demnach

$$(16.)\qquad \sigma u = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\left(\frac{g_2}{2}\right)^{\lambda}(2g_3)^{\mu}\frac{u^{4\lambda+6\mu+1}}{(4\lambda+6\mu+1)!}$$

zu schreiben. Die aus der Formel

$$(17.)\quad a_{\lambda\mu} = 3(\lambda+1)a_{\lambda+1,\mu-1}+\frac{16}{3}(\mu+1)a_{\lambda-2,\mu+1}-\frac{1}{3}(2\lambda+3\mu-1)(4\lambda+6\mu-1)a_{\lambda-1,\mu}$$

der Reihe nach zu bestimmenden Grössen $a_{\lambda\mu}$ werden nämlich dann sämmtlich ganze Zahlen, wie nachher (S. 50) bewiesen werden wird.

Man kann von den Grössen $c_{\lambda\mu}$ zu einem System ganzer Zahlen auch dadurch übergehen, dass man

$$c_{\lambda\mu} = \frac{b_{\lambda\mu}}{2.6^{\lambda-1}(4\lambda+6\mu+1)!}$$

setzt. Die Relation (15.) verwandelt sich dann in

$$(18.)\quad b_{\lambda\mu} = 2(\lambda+1)b_{\lambda+1,\mu-1}+24(\mu+1)b_{\lambda-2,\mu+1}-(2\lambda+3\mu-1)(4\lambda+6\mu-1)b_{\lambda-1,\mu},$$

und diese Gleichung liefert für die Grössen $b_{\lambda\mu}$, abgesehen von der ersten,

$$b_{00} = \frac{1}{3},$$

in der That ganzzahlige Werthe, wenn man, dem Vorhergehenden entsprechend, alle diejenigen gleich Null setzt, in denen ein Index negativ wird. Die σ-Reihe erhält hierbei die Form

$$(19.)\qquad \sigma u = \sum_{\lambda,\mu}\frac{b_{\lambda\mu}}{2.6^{\lambda-1}}g_2^{\lambda}g_3^{\mu}\frac{u^{4\lambda+6\mu+1}}{(4\lambda+6\mu+1)!}$$

oder

$$(20.)\qquad \sigma u = u+\sum_{\lambda,\mu}{}'\frac{b_{\lambda\mu}}{2.6^{\lambda-1}}g_2^{\lambda}g_3^{\mu}\frac{u^{4\lambda+6\mu+1}}{(4\lambda+6\mu+1)!},$$

wo der Strich an dem Summenzeichen, wie üblich, andeutet, dass die Combination $\lambda = 0$, $\mu = 0$ auszuschliessen ist.

Die partielle Differentialgleichung (9.), die zur Herleitung von Recursionsformeln für die Coefficienten der $\mathfrak{S}$-Reihe benutzt worden ist, lässt mancherlei Umformungen zu, von denen hier einige ausgeführt werden sollen.

Es seien e_1, e_2, e_3 die drei Werthe, die für s gesetzt die Gleichung

$$S \equiv 4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

befriedigen, also

$$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

Die drei Grössen e_λ sind durch die Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{21.}$$

verbunden und hängen mit g_2 und g_3 vermöge der Formeln

$$e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2, \tag{22.}$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3 \tag{23.}$$

zusammen.

Aus (21.) und (22.) folgt

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \frac{1}{2} g_2, \tag{24.}$$

$$e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2 + e_1^2 e_2^2 = \frac{1}{16} g_2^2, \tag{25.}$$

$$e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 = \frac{1}{8} g_2^2. \tag{26.}$$

Aus (21.) ergiebt sich ferner

$$e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 - 3 e_1 e_2 e_3 = 0,$$

also nach (23.)

$$e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 = \frac{3}{4} g_3. \tag{27.}$$

Man führe nun statt der Invarianten g_2, g_3 zwei lineare Verbindungen der Grössen e_1, e_2, e_3, nämlich

$$e_1 - e_3 = \alpha, \qquad e_2 - e_3 = \beta \tag{28.}$$

ein. Aus (21.) folgt dann

$$e_1 = \frac{2\alpha - \beta}{3}, \quad e_2 = \frac{2\beta - \alpha}{3}, \quad e_3 = -\frac{\alpha + \beta}{3}, \tag{29.}$$

und es ist daher

$$(30.)\qquad g_2 = \frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta),\qquad g_3 = -\frac{4}{27}(\alpha+\beta)(2\alpha-\beta)(2\beta-\alpha).$$

Die Formeln (24.) und (27.) liefern

$$dg_2 = 4e_1\,de_1+4e_2\,de_2+4e_3\,de_3,$$
$$dg_3 = 4e_1^2\,de_1+4e_2^2\,de_2+4e_3^2\,de_3,$$

woraus mit Benutzung von (29.)

$$\frac{\partial g_2}{\partial\alpha} = \frac{8}{3}e_1-\frac{4}{3}e_2-\frac{4}{3}e_3 = 4e_1,$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial\beta} = -\frac{4}{3}e_1+\frac{8}{3}e_2-\frac{4}{3}e_3 = 4e_2,$$
$$\frac{\partial g_3}{\partial\alpha} = \frac{8}{3}e_1^2-\frac{4}{3}e_2^2-\frac{4}{3}e_3^2,$$
$$\frac{\partial g_3}{\partial\beta} = -\frac{4}{3}e_1^2+\frac{8}{3}e_2^2-\frac{4}{3}e_3^2$$

folgt. Mit Hilfe dieser Formeln kann man in die Differentialgleichung (9.) ebenfalls α und β an Stelle von g_2 und g_3 einführen, wobei man sich der Gleichungen

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = \frac{\partial\sigma}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\alpha},$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = \frac{\partial\sigma}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\beta}+\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\beta}$$

zu bedienen hat. Sie liefern

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = 4e_1\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}+\frac{4}{3}(2e_1^2-e_2^2-e_3^2)\frac{\partial\sigma}{\partial g_3},$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = 4e_2\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}+\frac{4}{3}(2e_2^2-e_3^2-e_1^2)\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}.$$

Hieraus geht noch

$$-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}+\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right) = 4e_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}+\frac{4}{3}(2e_3^2-e_1^2-e_2^2)\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}$$

hervor. Die drei letzten Gleichungen multiplicire man beiderseits der Reihe nach mit e_1^2, e_2^2, e_3^2 und vereinige sie dann durch Addition, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (25.), (26.), (27.)

$$3g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}+\frac{1}{6}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} = (e_1^2-e_3^2)\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}+(e_2^2-e_3^2)\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = -\frac{\alpha(2\beta-\alpha)}{3}\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}-\frac{\beta(2\alpha-\beta)}{3}\frac{\partial\sigma}{\partial\beta},$$

sodass die Differentialgleichung (9.) schliesslich in

$$(31.)\quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}+\frac{4}{3}\alpha(2\beta-\alpha)\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}+\frac{4}{3}\beta(2\alpha-\beta)\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}+\frac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)u^2\sigma = 0$$

übergeht.

Jetzt werde

$$(32.)\quad e^{\frac{1}{2}e_3u^2}\sigma u = S_0(u)$$

gesetzt, und somit

$$(33.)\quad \sigma u = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}S_0(u).$$

Dann hat man

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial u}+\frac{1}{3}(\alpha+\beta)uS_0\right),$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial u^2}+\frac{2(\alpha+\beta)}{3}u\frac{\partial S_0}{\partial u}+\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)^2u^2S_0+\frac{\alpha+\beta}{3}S_0\right),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \alpha}+\frac{1}{6}u^2S_0\right),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = e^{\frac{1}{6}(\alpha+\beta)u^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \beta}+\frac{1}{6}u^2S_0\right),$$

und die Gleichung (31.) transformirt sich daher in die folgende:

$$(34.)\quad \frac{\partial^2 S_0}{\partial u^2}+\frac{2}{3}(\alpha+\beta)u\frac{\partial S_0}{\partial u}+\frac{4}{3}\alpha(2\beta-\alpha)\frac{\partial S_0}{\partial \alpha}+\frac{4}{3}\beta(2\alpha-\beta)\frac{\partial S_0}{\partial \beta}+\left(\alpha\beta u^2+\frac{\alpha+\beta}{3}\right)S_0 = 0.$$

Setzt man, unter m eine willkürliche Constante verstehend, $m^2\alpha$ und $m^2\beta$ für α und β, so geht g_2 in m^4g_2, g_3 in m^6g_3 über. Der durch die Gleichung (13.) dargestellten Eigenschaft der σ-Function entspricht demnach folgende der Function S_0:

$$(35.)\quad S_0(u;\alpha,\beta) = mS_0\left(\frac{u}{m};\, m^2\alpha,\, m^2\beta\right).$$

Aus der Form der Entwickelung von σu (S. 39 (1.)) geht hervor, dass sich $S_0(u)$ durch eine Reihe

$$S_0(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu s_\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

darstellen lässt, in der s_ν eine ganze Function von g_2 und g_3, also auch von

α und β ist. Die vorstehende Relation (35.) zeigt, dass

$$s_\nu(\alpha, \beta) = \frac{1}{m^{2\nu}} s_\nu(m^2\alpha, m^2\beta),$$

d. h. s_ν eine homogene Function ν^{ten} Grades von α und β sein muss, sodass man

$$\alpha \frac{\partial s_\nu}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial s_\nu}{\partial \beta} = \nu s_\nu \tag{36.}$$

hat. Die Gleichung (34.) aber führt zu der Relation

$$s_\nu - \frac{2}{3}(2\nu-1)(\alpha+\beta)s_{\nu-1} - \frac{4}{3}(2\beta-\alpha)\alpha\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha} - \frac{4}{3}(2\alpha-\beta)\beta\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}$$
$$+ (2\nu-2)(2\nu-1)\alpha\beta s_{\nu-2} - \frac{\alpha+\beta}{3}s_{\nu-1} = 0,$$

die man, unter Berücksichtigung von (36.), mit Hilfe der Gleichungen

$$(2\beta-\alpha)\alpha\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha} + (2\alpha-\beta)\beta\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta} = 3\alpha\beta\left(\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right) - (\alpha+\beta)\left(\alpha\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right)$$
$$= 3\alpha\beta\left(\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right) - (\nu-1)(\alpha+\beta)s_{\nu-1}$$

in

$$s_\nu = (\alpha+\beta)s_{\nu-1} + 4\alpha\beta\left(\frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial s_{\nu-1}}{\partial\beta}\right) - 2(\nu-1)(2\nu-1)\alpha\beta s_{\nu-2} \tag{37.}$$

überführen kann. In dieser Recursionsformel ist

$$s_0 = 1$$

zu nehmen. Sie lehrt, dass die Coefficienten der ganzen Functionen s_ν ganze Zahlen sind.

Aus der Gleichung (32.), nämlich

$$\sigma u = e^{-\frac{1}{2}e_3 u^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s_\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \tag{38.}$$

ergiebt sich nun, wenn man

$$\alpha = e_1 - e_3, \quad \beta = e_2 - e_3$$

einführt, σu als Function von u und e_1, e_2, e_3. Setzt man noch für die Exponentialgrösse die Reihenentwicklung,

$$e^{-\frac{1}{2}e_3 u^2} = 1 - \frac{e_3 u^2}{2} + \frac{e_3^2}{4}\frac{u^4}{2!} - \cdots + (-1)^\nu \frac{e_3^\nu}{2^\nu}\frac{u^{2\nu}}{\nu!} + \cdots,$$

und schreibt (38.) in der Form

$$\sigma u = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \tag{39.}$$

so erkennt man, dass die ganzen Functionen r_ν der Grössen e_1, e_2, e_3 mit den Functionen s_ν derselben Art durch die Gleichung

$$\frac{r_\nu}{(2\nu+1)!} = (-1)^\nu \frac{s_\nu}{(2\nu+1)!} - (-1)^{\nu-1} \frac{s_{\nu-1}}{(2\nu-1)!} \frac{e_3}{2} + (-1)^{\nu-2} \frac{s_{\nu-2}}{(2\nu-3)!} \frac{1}{2!} \frac{e_3^2}{4} - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu s_0 \frac{1}{\nu!} \frac{e_3^\nu}{2^\nu}$$

oder

$$r_\nu = (-1)^\nu \left(s_\nu + (2\nu+1)\, 2\nu \cdot \frac{e_3}{2} s_{\nu-1} + \frac{(2\nu+1)2\nu(2\nu-1)(2\nu-3)}{2!} \frac{e_3^2}{4} s_{\nu-2} + \cdots + \frac{(2\nu+1)\ldots 1}{\nu!} \frac{e_3^\nu}{2^\nu} \right)$$

verbunden sind. Der Coefficient von $(-1)^\nu e_3^\lambda s_{\nu-\lambda}$ hat hierin den Werth

$$\frac{(2\nu+1)!}{2^\lambda (2\nu-2\lambda+1)!\,\lambda!} = \frac{(2\nu+1)\,2\nu \ldots (2\nu-2\lambda+2)}{2^\lambda \lambda!}$$
$$= (2\nu+1)(2\nu-1)\ldots(2\nu-2\lambda+3) \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\lambda+1)}{\lambda!},$$

ist also eine ganze Zahl; demnach sind auch die Coefficienten der ganzen Functionen r_ν sämmtlich ganze Zahlen. Da nun die Function σu ihren Werth nicht ändert, wenn die Grössen e_1, e_2, e_3 in beliebiger Weise unter einander vertauscht werden, so ist auch r_ν eine ganze symmetrische Function, mit ganzzahligen Coefficienten, von e_1, e_2, e_3, und also auch eine Function der elementaren symmetrischen Functionen dieser Grössen, d. h. nach (22.) und (23.) von $\frac{g_2}{4}$ und $\frac{g_3}{4}$.

Durch Vergleich mit der Reihenentwicklung (16.) ergiebt sich

$$r_\nu = \sum a_{\lambda\mu} \left(\frac{g_2}{2}\right)^\lambda (2g_3)^\mu,$$

wo die Summe über alle ganzzahligen Werthe von λ und μ zu erstrecken ist, die durch die Bedingung

$$2\lambda + 3\mu = \nu$$

verknüpft sind. Mittels dieser Formel kann man nun leicht zeigen, dass die Grössen $a_{\lambda\mu}$ sämmtlich ganze Zahlen sein müssen. Wäre nämlich eine von ihnen ein Bruch, so würde der Recursionsformel (17.) zufolge der Nenner eine Potenz von 3 sein; dies ist aber nach dem vorher über r_ν Bemerkten nicht statthaft.

Sechstes Kapitel.

Lösung der Gleichung $\wp u = s$ durch Reihenentwicklung.

Um den analytischen Zusammenhang zwischen der $\wp$-Function und ihrem Argumente vollständig darzulegen, genügt es nicht, wie im Vorhergehenden geschehen ist, $\wp u$ mit Hilfe von Reihen, die nach Potenzen von u fortschreiten, auszudrücken, sondern es müssen auch Formeln entwickelt werden, vermittelst deren man alle Argumente finden kann, für welche die Function einen gegebenen Werth annimmt. Wir beginnen diese Untersuchung mit dem Nachweise, dass wenn s eine willkürlich angenommene Grösse bedeutet, sich stets Werthe von u finden lassen, die der Gleichung

$$(1.) \qquad \wp u = s$$

genügen.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$du = \frac{d\wp u}{\wp' u}$$

und entnehmen aus der Differentialgleichung

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

den Ausdruck

$$(2.) \qquad \frac{1}{\wp' u} = \frac{-1}{2}\left(\sqrt{\wp u}\right)^{-3}(1 - e_1 \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}}(1 - e_2 \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}}(1 - e_3 \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}}.$$

Unter

$$(1+x)^m$$

soll dabei, wenn x dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist, stets derjenige Werth dieser Potenz verstanden werden, der durch die binomische Reihe

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots$$

gegeben wird. Dann gilt die Gleichung (2.), deren linke Seite eindeutig bestimmt ist, bei passender Wahl des Werthes von $\sqrt{\wp u}$. Das negative Zeichen auf der rechten Seite ist dabei aus dem Grunde gesetzt, damit dieser Werth für reelle Invarianten und bei reellen, hinreichend kleinen Werthen von u negativ werde.

Nach Multiplication der drei Reihen für

$$(1-e_\lambda \wp^{-1} u)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

erhält man

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{-1}{2\sqrt{\wp u}}\left(\wp^{-1} u + G_1 \wp^{-2} u + G_2 \wp^{-3} u + \cdots\right),$$

wo $G_1, G_2, \ldots$ ganze rationale symmetrische Functionen von e_1, e_2, e_3, d. h. ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, und demnach

$$du = \frac{-1}{2\sqrt{\wp u}}\left(\wp^{-1} u + G_1 \wp^{-2} u + G_2 \wp^{-3} u + \cdots\right) d\wp u.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung der Eigenschaft von $\wp u$, für $u = 0$ unendlich gross zu werden,

$$u = \frac{1}{\sqrt{\wp u}}\left(1 + \frac{1}{3} G_1 \wp^{-1} u + \frac{1}{5} G_2 \wp^{-2} u + \cdots\right). \tag{3.}$$

Diese Beziehung zwischen u und $\wp u$ gilt, so lange

$$|e_\lambda \wp^{-1} u| < 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3) \tag{4.}$$

ist, d. h. für alle Werthe von u, für die $\wp u$ dem absoluten Betrage nach grösser ist als jede der Grössen e_1, e_2, e_3.

Nun besteht für alle endlichen Werthe von u eine Entwickelung der Form

$$\wp u = \frac{H(u)}{G(u)},$$

in der $G(u)$ und $H(u)$ beständig convergirende, nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihen bedeuten (S. 28), die nur gerade Potenzen enthalten. Betrachtet man im Besonderen alle Werthe des Bereiches, für den die Ungleichungen (4.) gelten, so kann man setzen:

$$\wp u = \frac{\mathfrak{H}(\wp^{-1} u)}{\mathfrak{G}(\wp^{-1} u)}$$

oder

$$(5.)\qquad \mathfrak{G}(\wp^{-1}u)\,\wp u = \mathfrak{H}(\wp^{-1}u),$$

wo auch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gewöhnliche Potenzreihen sind. Da aber die Reihen auf der linken und rechten Seite dieser Gleichung für alle Werthe des Arguments $\wp u$ innerhalb eines bestimmten Bereiches einander gleich sind, so müssen sie in den Coefficienten übereinstimmen.

Dieses vorausgeschickt, sei nun s ein beliebiger Werth, der dem absoluten Betrage nach grösser als e_1, e_2, e_3 ist, und es werde bei beliebiger Annahme des Zeichens von $\sqrt{s}$

$$(\mathrm{I.})\qquad u = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \frac{1}{3}G_1 s^{-1} + \frac{1}{5}G_2 s^{-2} + \cdots\right)$$

gesetzt, so ist

$$G(u) = \mathfrak{G}(s^{-1}),\quad H(u) = \mathfrak{H}(s^{-1}),$$

also

$$\wp u = \frac{\mathfrak{H}(s^{-1})}{\mathfrak{G}(s^{-1})}.$$

Aus dieser Gleichung folgt in Verbindung mit der Identität

$$\mathfrak{G}(s^{-1}).s = \mathfrak{H}(s^{-1}):$$

$$\wp u = s,$$

d. h. die Gleichung (1.) wird durch die Formel (I.) erfüllt, wenn nur

$$|s| > |e_\lambda| \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

ist.

Angenommen weiter, es sei für irgend einen bestimmten, von e_1, e_2, e_3 verschiedenen Werth s_0 ein Argument u_0 gefunden, für das

$$\wp u_0 = s_0$$

ist, so hat man

$$\frac{(\wp' u)^2}{(\wp' u_0)^2} = \frac{4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3}{4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3} = \frac{\wp u - e_1}{s_0 - e_1}\,\frac{\wp u - e_2}{s_0 - e_2}\,\frac{\wp u - e_3}{s_0 - e_3},$$

oder wenn

$$\wp' u_0 = t_0$$

gesetzt wird,

$$(\wp' u)^2 = t_0^2\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_1 - s_0}\right)\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_2 - s_0}\right)\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_3 - s_0}\right).$$

Nimmt man u so nahe bei u_0 an, dass $\wp u - s_0$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als jede der Differenzen $e_1 - s_0$, $e_2 - s_0$, $e_3 - s_0$, so lässt sich aus

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{t_0}\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_1 - s_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_2 - s_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\wp u - s_0}{e_3 - s_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

eine Darstellung der Form

$$(6.) \qquad \frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{t_0}\Big(1 + G_1(s_0)(\wp u - s_0) + G_2(s_0)(\wp u - s_0)^2 + \cdots\Big)$$

ableiten, in der die Coefficienten $G_1(s_0)$, $G_2(s_0)$, ... aus s_0, g_2 und g_3 rational zusammengesetzt sind. Nach Multiplication mit $d\wp u$ liefert die Ausführung der Integration

$$(7.) \quad u - u_0 = \frac{1}{t_0}\left((\wp u - s_0) + \frac{1}{2}G_1(s_0)(\wp u - s_0)^2 + \frac{1}{3}G_2(s_0)(\wp u - s_0)^3 + \cdots\right).$$

Genau wie vorher kann man sich mittels der Gleichung

$$G(u)\wp u = H(u)$$

davon überzeugen, dass wenn man

$$(\text{II.}) \qquad u - u_0 = \frac{1}{t_0}\left((s - s_0) + \frac{1}{2}G_1(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{3}G_2(s_0)(s - s_0)^3 + \cdots\right)$$

setzt, die Gleichung

$$\wp u = s$$

gelten muss, sobald nur $s - s_0$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als jede der Differenzen $e_1 - s_0$, $e_2 - s_0$, $e_3 - s_0$, was mit dem Ausdrucke: s liege in der Umgebung von s_0, bezeichnet werden soll.

Die Formeln (I., II.) reichen nun aus, um zu jedem gegebenen, nur von e_1, e_2, e_3 verschiedenen Werthe von s einen Werth von u zu berechnen, der die Gleichung (1.) befriedigt. Man nehme nämlich, was auf unendlich viele Weisen geschehen kann, eine Reihe von Grössen $s_0, s_1, \ldots s_n$ dergestalt an, dass die erste dem absoluten Betrage nach grösser ist als e_1, e_2, e_3, jede der übrigen in der Umgebung der ihr in der Reihe vorangehenden liegt, und schliesslich s in der Umgebung von s_n. Dann bestimme man vermittelst der Formel (I.) ein Argument u_0, für das

$$\wp u_0 = s_0$$

ist, darauf nach der Formel (II.), indem man in ihr

$$t_0 = \wp' u_0$$

nimmt, ein zweites, u_1, für das

$$\wp u_1 = s_1$$

ist; aus diesem auf dieselbe Weise ein drittes, u_2, wofür

$$\wp u_2 = s_2$$

wird, bis man, so fortfahrend, zu einem Argumente u_n gelangt, für das

$$\wp u_n = s_n$$

ist, und von dem man dann zu dem gesuchten übergehen kann. Über das Zeichen von $\sqrt{s_0}$ darf man bei der Berechnung von u_0 willkürlich verfügen. Ist dieses Zeichen aber fixirt, so sind die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n, u$ eindeutig bestimmt, und es ist leicht zu sehen, dass wenn man den entgegengesetzten Werth von $\sqrt{s_0}$ nimmt, man schliesslich auch $-u$ für u erhält. Man kann daher bewirken, dass $\wp' u$ sowohl dem einen als dem anderen der beiden Werthe von $\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$ gleich wird; das erhaltene Resultat lässt sich somit folgendermassen aussprechen:

Sind s und t irgend zwei durch die Gleichung

$$t^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

verbundene Grössen, so lässt sich durch eine endliche Anzahl von Reihenentwicklungen stets ein Argument u dergestalt bestimmen, dass

$$\wp u = s, \quad \wp' u = t$$

wird.

Hierbei ist jedoch der Fall, dass s einer der Grössen e_1, e_2, e_3 gleich ist, noch nicht berücksichtigt und muss besonders behandelt werden.

Zu dem Ende nehme man einen Werth s_0 in der Umgebung von e_1 an, denke sich auf die angegebene Weise ein zugehöriges Argument u_0 bestimmt und beschränke dann u auf einen diesen Werth enthaltenden Bereich von so geringer Ausdehnung, dass $\wp u$ beständig in der Umgebung von e_1 liegt. Dann setze man

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} \frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}} \left(1 - \frac{\wp u - e_1}{e_2 - e_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\wp u - e_1}{e_3 - e_1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

nach willkürlicher Annahme des Werthes von $\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}$, wodurch dann auch der von $\sqrt{\wp u - e_1}$ bestimmt ist; durch Reihenentwicklung folgt hieraus

$$\frac{1}{\wp' u} = \frac{1}{2\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\,\frac{1}{\sqrt{\wp u - e_1}}\Big(1+\overline{G}_1(e_1)(\wp u - e_1)+\overline{G}_2(e_1)(\wp u - e_1)^2+\cdots\Big),$$

wo die Coefficienten $\overline{G}_1(e_1)$, $\overline{G}_2(e_1)$, ... aus e_1, g_2 und g_3 rational zusammengesetzt sind. Durch das schon zweimal angewendete Verfahren ergiebt sich

$$u = \omega_1 + \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\Big(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(\wp u - e_1)+\frac{1}{5}\overline{G}_2(e_1)(\wp u - e_1)^2+\cdots\Big),$$

unter ω_1 eine Constante verstanden. Zu ihrer Bestimmung setze man $u = u_0$, so wird

$$\omega_1 = u_0 - \frac{\sqrt{\wp u_0 - e_1}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\Big(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(\wp u_0 - e_1)+\cdots\Big)$$

oder

$$(8.)\quad \omega_1 = u_0 - \frac{\wp' u_0}{2(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\Big(1-\frac{\wp u_0 - e_1}{e_2-e_1}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(1-\frac{\wp u_0 - e_1}{e_3-e_1}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(\wp u_0 - e_1)+\cdots\Big).$$

Aus der letzteren Darstellung geht hervor, dass ω_1 durch u_0 eindeutig bestimmt ist.

Wie vorher folgt dann weiter, dass wenn man

$$(\text{III.})\quad u = \omega_1 + \frac{\sqrt{s - e_1}}{\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}}\Big(1+\frac{1}{3}\overline{G}_1(e_1)(s - e_1)+\frac{1}{5}\overline{G}_2(e_1)(s - e_1)^2+\cdots\Big)$$

setzt und dabei das Zeichen von $\sqrt{s-e_1}$ beliebig annimmt, man immer

$$\wp u = s$$

erhält, sobald nur s in der Umgebung von e_1 liegt. Für s gleich e_1 selbst ergiebt sich

$$\wp \omega_1 = e_1.$$

Vertauscht man endlich e_1 mit e_2 oder e_3 und nimmt u_0 so an, dass $\wp u_0$ in der Umgebung von e_2 oder e_3 liegt, so erhält man, der Formel (8.) entsprechend, zwei Argumente ω_2, ω_3, die den Gleichungen

$$\wp \omega_2 = e_2, \quad \wp \omega_3 = e_3$$

genügen.

Siebentes Kapitel.

Bestimmung aller Lösungen der Gleichung $\wp u = s$.

Nachdem im vorigen Kapitel bewiesen worden ist, dass man stets einen oder vielmehr zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Werthe von u finden kann, für welche $\wp u$ einen gegebenen Werth s annimmt, kommt es jetzt darauf an, alle Argumente zu ermitteln, die die Gleichung

$$\wp u = s$$

befriedigen. Die Beantwortung der Frage, ob es, wenn $\wp u' = s$ ist, ausser $\pm u'$ überhaupt Argumentwerthe giebt, für welche die $\wp$-Function denselben Werth erhält, kann mit Hilfe des Additionstheorems angebahnt werden. Hierbei wird es zum ersten Mal von praktischer Bedeutung, dass dieses Theorem für beliebige Werthe von u gilt. Dass dem in der That so ist, ersieht man aus dem im dritten Kapitel geführten Beweise. Wenn die abgeleiteten Resultate dort auf die Werthe innerhalb eines bestimmten Bereiches beschränkt blieben, so hatte dies seinen Grund nur darin, dass die $\wp$-Function noch nicht darüber hinaus definirt war.

Es werde nun angenommen, für einen von $\pm u'$ verschiedenen Werth u'' sei

$$\wp u'' = \wp u'.$$

Aus

$$4\wp^3 u'' - g_2 \wp u'' - g_3 = 4\wp^3 u' - g_2 \wp u' - g_3$$

oder

$$(\wp' u'')^2 = (\wp' u')^2$$

folgt dann

$$\wp' u'' = \pm \wp' u'.$$

Falls hierin das obere Zeichen gilt, so ergicbt sich aus der Formel des

Additionstheorems (S. 25),

$$\wp(u+u') = \frac{(\wp u + \wp u')(2\wp u\, \wp u' - \tfrac{1}{2} g_2) - g_3 - \wp' u\, \wp' u'}{2(\wp u - \wp u')^2},$$

in der u irgend einen endlichen Werth bezeichnen soll, für den auch $\wp u$ endlich ist, die Gleichung

$$\wp(u+u') = \wp(u+u'').$$

Ist aber

$$\wp' u'' = -\wp' u',$$

so folgt

$$\wp(u-u') = \wp(u+u'').$$

Im ersten Falle ersetze man u durch $u-u'$, im zweiten durch $u+u'$, so wird

$$\wp u = \wp(u+u''-u')$$

und

$$\wp u = \wp(u+u''+u')$$

und weiter, wenn

$$u'' \pm u' = w$$

gesetzt wird,

$$\wp u = \wp(u+w).$$

Da die $\wp$-Function für $u=0$ unendlich wird, so muss auch $\wp w$ unendlich gross sein. Das heisst:

Wenn es Werthe u'' ausser u' giebt, für die die $\wp$-Function den Werth $\wp u'$ annimmt, so muss sich u'' in der Form

$$u'' = \pm u' + w$$

darstellen lassen, wo w eine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function bedeutet.

Ob es solche Stellen ausser $u=0$ wirklich giebt, ist bis jetzt freilich nicht entschieden. Um aber überhaupt die Frage nach der Existenz von Argumenten u'' auf die nach dem Vorhandensein der Unendlichkeitsstellen w zurückführen zu können, hat man zuerst noch zu untersuchen, ob jede Unendlichkeitsstelle für den vorliegenden Zweck brauchbar ist, ob also, wenn von w nichts weiter bekannt ist, als dass $\wp u$ für $u=w$ unendlich gross wird, immer behauptet werden kann, es sei

$$\wp(\pm u'+w) = \wp u'.$$

Das doppelte Vorzeichen kann weggelassen werden; denn wenn

$$\wp(u+w) = \wp u$$

ist, so folgt daraus

$$\wp(\pm u+w) = \wp(\pm u) = \wp u.$$

Der Werth von $\wp(u+w)$ kann aus dem Additionstheorem durch einen Grenzübergang abgeleitet werden. Sondert man im Zähler und Nenner der Formel für $\wp(u+v)$ den Factor $\wp^2 v$ ab und lässt v sich einem Werthe w nähern, für den $\wp w$ unendlich gross wird, so wird der Nenner gleich 2. Im Zähler

$$\left(\frac{\wp u}{\wp v}+1\right)\left(2\wp u - \frac{g_2}{2\wp v}\right) - \frac{g_3}{\wp^2 v} - \frac{\wp' u\, \wp' v}{\wp^2 v}$$

reducirt sich das von den Ableitungen freie Aggregat auf $2\wp u$, und das letzte Glied fällt weg, weil $\wp' v$ von derselben Ordnung unendlich wird wie $(\wp v)^{\frac{3}{2}}$. Demnach ist in der That

$$\wp(u+w) = \wp u,$$

woraus folgt, dass wenn w eine beliebige Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function bedeutet, die Annahme

$$u'' = \pm u' + w$$

immer die Gleichung

$$\wp u'' = \wp u'$$

nach sich zieht.

Um nun zu zeigen, dass solche Werthe w, für die $\wp w$ unendlich gross wird, wirklich existiren, gehen wir von der Bemerkung aus, dass für jeden Werth von u die Gleichung

$$\wp(u+v) = \wp(u-v)$$

besteht, wenn $\wp' v$ verschwindet, d. h. wenn $\wp v$ einen der Werthe e_1, e_2, e_3 hat; daraus folgt dann

$$\wp(u+2v) = \wp u,$$

also

$$\wp(2v) = \infty.$$

Man kann daher für w jede der Grössen

$$2\omega_1,\ 2\omega_2,\ 2\omega_3$$

(S. 56) nehmen, von denen unter der hier zu machenden Voraussetzung, dass keine der Differenzen e_2-e_3, e_3-e_1, e_1-e_2 verschwinde, keine zwei einander gleich sind.

Dieses vorausgeschickt, seien w' und w'' irgend zwei solche Werthe von w, so folgt aus der Gleichung

$$\wp(u+w') = \wp u:$$

$$\wp u = \wp(u+w') = \wp(u+2w') = \wp(u+3w') = \cdots$$

und auch

$$\wp u = \wp(u-w') = \wp(u-2w') = \wp(u-3w') = \cdots;$$

d. h. es ist für jeden ganzzahligen Werth von m

$$\wp(u+mw') = \wp u.$$

Ebenso hat man, wenn auch n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\wp(u+nw'') = \wp u.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+mw'$ für u, so ergiebt sich

$$\wp(u+mw'+nw'') = \wp u,$$

also

$$\wp(mw'+nw'') = \infty.$$

Auf diese Weise lassen sich aus w' und w'' unendlich viele andere Unendlichkeitsstellen w ableiten. Es lässt sich aber auch zeigen, und für die Theorie der $\wp$-Function ist dies von der wesentlichsten Bedeutung, dass bei passender Wahl von w' und w'' der Ausdruck

$$mw'+nw''$$

alle Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function enthält.

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns sämmtliche Werthe w in bekannter Weise durch Punkte in einer Ebene dargestellt. Zu den Unendlichkeitsstellen gehört auch der Nullpunkt, der jetzt mit w_0 bezeichnet werden soll. Man verbinde ihn mit irgend einem anderen der betrachteten Punkte, w', und bezeichne mit w_1 diejenige Stelle w auf der Geraden w_0w', die der Stelle w_0 am nächsten liegt. Da die in der Nähe des Nullpunkts geltende Entwickelung

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2)$$

für alle Werthe eines bestimmten Bereiches convergirt, d. h. die $\wp$-Function innerhalb dieses Bereiches nur für $u = 0$ unendlich gross wird, so muss w_1 nothwendig einen endlichen Abstand von w_0 haben.

Alle für ein beliebiges ganzzahliges m durch den Ausdruck

$$mw_1$$

dargestellten Punkte gehören ebenfalls dem System w an und liegen auf der durch w_0 und w_1 gehenden unbegrenzten geraden Linie. Ein in dieser Geraden ganz willkürlich angenommener Punkt ist durch

$$\mu w_1$$

darstellbar, wo μ eine reelle Grösse bedeutet. Gehört er zu den Unendlichkeitsstellen, so gehört dazu auch

$$\mu w_1 - m' w_1,$$

wenn m' die grösste in μ enthaltene ganze Zahl ist. Dieser Punkt liegt auf der Strecke $w_0 w_1$, fällt aber nicht mit w_1 zusammen. Nach der Erklärung von w_1 muss er daher mit w_0 zusammenfallen, d. h. es muss μ gleich der ganzen Zahl m' sein. Hiernach liefert der Ausdruck mw_1 alle in der genannten Linie enthaltenen Punkte des Systems.

Es giebt aber nothwendig noch Punkte w ausserhalb dieser Geraden. Denn aus

$$\wp(u + w_1) = \wp u$$

folgt

$$\wp'(u + w_1) = \wp' u,$$

und hieraus für $u = -\frac{w_1}{2}$, wo $\frac{w_1}{2}$ keine Unendlichkeitsstelle ist,

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = \wp'\left(-\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right),$$

d. h.

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0.$$

Es muss also $\wp\left(\frac{w_1}{2}\right)$ gleich einer der Grössen e_1, e_2, e_3 sein, die mit e bezeichnet werde. Versteht man nun unter w'' einen Werth, für den $\wp\left(\frac{w''}{2}\right)$ einer der beiden anderen Grössen, die e' heisse, gleich wird, so hat man auch

$$\wp w'' = \infty.$$

Läge nun w'' auf der geraden Linie $w_0 w_1$, so müsste bei passender Wahl von m

$$w'' = mw_1$$

sein. Dann wäre aber weiter für einen geraden Werth, $m = 2l$,

$$\wp\left(\frac{w''}{2}\right) = \wp(lw_1) = \infty,$$

und für einen ungeraden, $m = 2l+1$,

$$\wp\left(\frac{w''}{2}\right) = \wp\left(lw_1 + \frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = e,$$

also in keinem Falle gleich e'.

Hiernach bilden die Punkte w_0, w_1, w'' ein Dreieck. Sind in diesem noch andere Stellen w vorhanden, so liegen sie doch sicher alle in endlichen Abständen von der Linie $w_0 w_1$. Denn in der Umgebung jedes zwischen w_0 und w_1 gelegenen Punktes lässt sich die $\wp$-Function in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln, die für alle Stellen eines bestimmten Bereiches convergirt, also nicht unendlich gross wird. In der Nähe von w_0 gilt die Entwickelung

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2),$$

die, wie bereits benutzt, innerhalb eines gewissen, den Punkt w_0 umgebenden Kreises nur in diesem Punkte eine Unendlichkeitsstelle hat. Endlich erhält man, wenn man $u - w = h$ setzt, die vorstehende Gleichung in der Form

$$\wp h = \frac{1}{h^2} + \mathfrak{P}(h^2)$$

benutzt und

$$\wp(u-w) = \wp u$$

berücksichtigt, für die $\wp$-Function in der Nähe irgend einer Unendlichkeitsstelle w, z. B. w_1, die Darstellung

$$\wp u = \frac{1}{(u-w)^2} + \mathfrak{P}((u-w)^2),$$

wo die Potenzreihe wieder einen endlichen Convergenzbereich hat.

Es sei nun w_2 diejenige in dem Dreieck $w_0 w_1 w''$ gelegene Unendlichkeitsstelle, die von $w_0 w_1$ den kleinsten Abstand hat. Sind mehrere Stellen in gleichem kürzesten Abstande vorhanden, so behalte man eine beliebige von ihnen bei, z. B. die dem Punkte w_0 zunächst gelegene. Innerhalb des Dreiecks $w_0 w_1 w_2$ befinden sich keine Unendlichkeitsstellen mehr. Zieht man dann von w_1 und w_2 aus Parallelen zu $w_0 w_2$ und $w_0 w_1$, die sich in w_3 schneiden mögen, so enthält auch das Parallelogramm $w_0 w_1 w_3 w_2$ ausser seinen vier Ecken keinen weiteren Punkt des Systems w. Alle Punkte dieses Parallelogramms, die auf den Seiten eingeschlossen, werden nämlich durch den Ausdruck

$$\mu w_1 + \nu w_2$$

dargestellt, wenn den Zahlen μ und ν alle Werthe von 0 bis 1 beigelegt werden. Dabei liegt ein solcher Punkt in dem Dreieck $w_0 w_1 w_2$ oder $w_3 w_1 w_2$, je nachdem $\mu + \nu$ kleiner oder grösser als Eins ist. Jedem Punkte in dem ersten Dreieck entspricht nun einer in dem zweiten, der durch

$$(1-\mu) w_1 + (1-\nu) w_2 = w_1 + w_2 - (\mu w_1 + \nu w_2)$$

dargestellt wird. Beide gehören also gleichzeitig dem System an oder nicht an, woraus unmittelbar folgt, dass von den Punkten des zweiten Dreiecks nur diejenigen, die den Ecken des ersten entsprechen, Unendlichkeitsstellen sein können, d. h. ausser w_1 und w_2 nur noch w_3.

Endlich kann ein beliebiger Punkt der complexen Ebene, weil das Verhältniss $w_1 : w_2$ nicht reell ist, durch den Ausdruck

$$\alpha w_1 + \beta w_2$$

dargestellt werden, wo α und β reelle Zahlen sind. Bestimmt man zwei ganze Zahlen m und n so, dass für

$$0 \leqq \mu < 1, \quad 0 \leqq \nu < 1$$

die Gleichungen

$$\alpha = m + \mu, \quad \beta = n + \nu$$

gelten, so wird hierdurch jedem Punkte der Ebene ein Punkt im Innern und auf den Seiten $w_0 w_1$, $w_0 w_2$ des Parallelogramms $w_0 w_1 w_3 w_2$, deren Endpunkte w_1, w_2 ausgeschlossen, zugeordnet, und der angenommene Punkt gehört nach dem eben Bewiesenen nur dann zu den Unendlichkeitsstellen, wenn $\mu = \nu = 0$ ist. Das heisst:

Es existiren zwei Werthe w_1, w_2 des Arguments der $\wp$-Function von der Art, dass sämmtliche Unendlichkeitsstellen der Function in der Form

$$m w_1 + n w_2$$

enthalten sind; w_1 und w_2 sind dabei nur an die Bedingung gebunden, dass in dem Dreieck $w_0 w_1 w_2$ kein weiterer Unendlichkeitspunkt gelegen ist.

Nach der Erörterung, die auf die Stelle w geführt hat, kann man nun weiter behaupten:

Für jeden Werth s giebt es unendlich viele Werthe u, für die $\wp u = s$ wird. Ist u' einer von ihnen, so sind alle übrigen in der Form

$$u = \pm u' + m w_1 + n w_2$$

enthalten, und für das obere Vorzeichen hat $\wp' u$ dasselbe Zeichen wie $\wp' u'$, für das untere das entgegengesetzte.

Schon in der Einleitung ist als Periode einer Function eine Constante bezeichnet worden, deren Hinzufügung zum Argument den Werth der Function nicht ändert. Wir erkennen hier, für die $\wp$-Function, die Existenz zweier Perioden w_1 und w_2, deren Verhältniss $w_1 : w_2$ nicht reell ist, und durch die sich sämmtliche Perioden in der Form

$$m w_1 + n w_2$$

darstellen lassen, unter m und n ganze Zahlen verstanden. Die $\wp$-Function wird deshalb als d o p p e l t p e r i o d i s c h bezeichnet, die beiden Grössen w_1 und w_2 bilden ein p r i m i t i v e s P e r i o d e n p a a r.

Wie schon aus der Construction auf S. 62 geschlossen werden kann, ist ein solches Periodenpaar nicht eindeutig bestimmt. Rein analytisch lässt sich dies in folgender Art beweisen: Es seien W_1 und W_2 zunächst zwei beliebige Perioden der $\wp$-Function, die sich also als homogene lineare Functionen von w_1 und w_2 mit ganzzahligen Coefficienten darstellen lassen müssen:

$$W_1 = p w_1 + q w_2,$$
$$W_2 = p' w_1 + q' w_2.$$

Unendlich viele Perioden werden durch den Ausdruck

$$a W_1 + b W_2$$

gegeben, in dem a und b ebenfalls ganze Zahlen bezeichnen. Sollen sämmtliche Perioden durch diesen Ausdruck darstellbar sein, so müssen a, b, p, q, p', q' sich so bestimmen lassen, dass für jedes Paar ganzer Zahlen m, n

$$m w_1 + n w_2 = a W_1 + b W_2$$

gesetzt werden kann, was die Gleichungen

$$ap + bp' = m,$$
$$aq + bq' = n$$

nach sich zieht. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die gestellte Forderung folgt hieraus in der Form

$$pq'-qp' = \pm 1.$$

Man kann also, nachdem man p und q als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler angenommen hat, noch auf unendlich viele Weisen p' und q' so wählen, dass aW_1+bW_2 dieselbe Mannigfaltigkeit von Grössen darstellt wie mw_1+nw_2, d. h. dass (W_1, W_2) an die Stelle des primitiven Periodenpaares (w_1, w_2) treten darf.

Irgend eine Periode w, die mit einer anderen w' zusammen ein primitives Periodenpaar bilden kann, soll als primitive Periode bezeichnet werden. Setzt man

$$w = 2\omega,$$

so ist ω keine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function, denn $\omega = \frac{w}{2}$ lässt sich nicht in der Form $mw+nw'$ darstellen; ω soll als halbe Periode bezeichnet werden. Nach S. 56 ist dann $\wp\omega$ gleich einer der Grössen e_λ, wir wollen annehmen: gleich e_1.

Es soll untersucht werden, wie die $\wp$-Function sich ändert, wenn ihr Argument um eine solche halbe Periode vermehrt wird. Nach dem Additionstheorem ist wegen $\wp'\omega = 0$:

$$\wp(u+\omega) = \frac{(\wp u+e_1)(2e_1\wp u - \frac{1}{2}g_2) - g_3}{2(\wp u - e_1)^2}.$$

Nun ist (S. 46 (22., 23.))

$$e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2 = -\frac{1}{4}g_2,$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3,$$

mithin

$$\wp(u+\omega) = \frac{(\wp u+e_1)(e_1\wp u+e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2) - 2e_1e_2e_3}{(\wp u-e_1)^2}.$$

Im Zähler fällt $e_1\wp^2 u$ weg, wenn e_1 auf beiden Seiten der Gleichung subtrahirt wird. Unter Benutzung der Relation

$$e_1+e_2+e_3 = 0$$

erhält man dann

$$(1.)\qquad \wp(u+\omega)-e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u - e_1}.$$

Es sei ω' eine halbe Periode, die zu e_3 gehört, sodass

$$\wp\omega' = e_3$$

ist. Aus der eben abgeleiteten Gleichung folgt dann

$$\wp(\omega+\omega') = e_2.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1, \\ \omega+\omega' &= \omega_2, \\ \omega' &= \omega_3, \end{aligned}$$

so ergiebt sich in gleicher Weise wie vorher die allgemeinere Formel

$$\wp(u+\omega_\alpha)-e_\alpha = \frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha}, \tag{2.}$$

wo α, β, γ die Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge bedeuten.

Achtes Kapitel.

Grundformeln der Theorie der σ-Function.

Mit der $\wp$-Function war die σ-Function durch die Relation (S. 35 (11.))

$$\wp u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \, \sigma'' u}{\sigma^2 u}$$

verbunden. Soll nun $\wp u$ für $u = w$ unendlich gross werden, so muss, weil $\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u$ wegen der beständigen Convergenz der σ-Reihe für keinen endlichen Werth von u unendlich werden kann, der Nenner der rechten Seite, also σu selbst, für das Argument w verschwinden. D. h. jede Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function ist Nullstelle der σ-Function.

Aber auch das Umgekehrte gilt. Es werde nämlich angenommen, die Function σu verschwinde für $u = w$, und zwar nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen, sodass für hinreichend kleine Werthe von $|u-w|$

$$\sigma u = \frac{(u-w)^n}{n!} \sigma^{(n)} w + \cdots$$

oder

$$\sigma u = c(u-w)^n (1 + \mathfrak{P}_0(u-w))$$

gesetzt werden kann. Behufs Herstellung von

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$$

bilde man

$$\log \sigma u = \log c + n \log (u-w) + \mathfrak{P}(u-w),$$

wo die Potenzreihe $\mathfrak{P}(u-w)$, immer für Werthe von u, die hinreichend nahe bei w liegen, aus der Entwickelung von $\log(1 + \mathfrak{P}_0(u-w))$ entstanden ist; dann ergiebt sich

$$-\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = \frac{n}{(u-w)^2} - \mathfrak{P}''(u-w).$$

Hiernach wird in der That $\wp u$ für $u = w$ unendlich gross, und zwar von der zweiten Ordnung.

Vergleicht man nun andererseits diese Entwickelung mit der, die aus der Gleichung (S. 25)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2)$$

dadurch folgt, dass $u-w$ für u gesetzt wird, nämlich

$$\wp(u-w) = \frac{1}{(u-w)^2} + \mathfrak{P}((u-w)^2),$$

so sieht man, dass

$$n = 1$$

sein muss. Die Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function sind also Nullstellen erster Ordnung der σ-Function; schon die erste Ableitung, $\sigma' u$, verschwindet für $u = w$ nicht mehr.

Aus der Gleichung

$$\frac{d^2 \log \sigma(u + mw_1 + nw_2)}{du^2} = \frac{d^2 \log \sigma u}{du^2},$$

durch welche die doppelte Periodicität der $\wp$-Function gekennzeichnet werden kann, folgt nun durch wiederholtes Differentiiren

$$\frac{d^r \log \sigma(u + mw_1 + nw_2)}{du^r} = \frac{d^r \log \sigma u}{du^r},$$

d. h. alle Ableitungen des Logarithmus der σ-Function, deren Ordnung grösser als Eins ist, sind doppelt periodische Functionen. Es kommt jedoch darauf an, die Änderung der ersten Ableitung dieses Logarithmus und namentlich auch die der σ-Function selbst bei einer Vermehrung ihres Arguments um eine Periode der $\wp$-Function zu untersuchen.

Im Folgenden sollen nur solche Perioden betrachtet werden, deren Hälften nicht wieder Perioden oder Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function sind.

Aus

$$\wp(u + 2\omega) = \wp u$$

folgt

$$\wp(u+\omega) = \wp(u-\omega)$$

oder

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega) - \frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) = 0.$$

Eine einmalige Integration liefert

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) = C.$$

Zur Bestimmung der Constanten C darf man $u = 0$ setzen, weil die in der entstehenden Gleichung

$$C = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega - \frac{\sigma'}{\sigma}(-\omega)$$

auftretende Grösse $\sigma\omega$ von Null verschieden ist. Da

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(-u) = -\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

ist (S. 33), so hat man

$$C = 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega$$

zu setzen und erhält dann

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega) + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega.$$

Daraus ergiebt sich schliesslich

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega.$$

Es sei nun ω' eine von ω verschiedene halbe Periode der $\wp$-Function, in dem Sinne, dass $\wp\omega$ und $\wp\omega'$ verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

gleich sind. Dann ist auch

$$\text{(3.)} \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'.$$

Ersetzt man in (2.) u durch $u+2\omega$ und benutzt die Gleichung selbst, so bekommt man

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+4\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 4\frac{\sigma'}{\sigma}\omega,$$

und bei wiederholter Anwendung desselben Verfahrens

$$(4.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega.$$

In gleicher Weise folgt aus (3.)

$$(5.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'$$

und durch Vereinigung beider Formeln

$$(6.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega + 2n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'.$$

Versteht man unter $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar, sodass der Ausdruck $2m\omega+2n\omega'$ geeignet ist, alle Perioden darzustellen, so kennzeichnet die letzte Gleichung das Verhalten der Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ bei einer Änderung ihres Arguments um eine beliebige Periode der $\wp$-Function.

Werden die Bezeichnungen

$$(7.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}\omega = \eta, \quad \frac{\sigma'}{\sigma}\omega' = \eta'$$

eingeführt, so heisst die Formel (6.):

$$(8.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2m\omega+2n\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2m\eta + 2n\eta'.$$

Sie nimmt für

$$m\omega + n\omega' = \tilde{\omega},$$
$$m\eta + n\eta' = \tilde{\eta}$$

die Form an

$$(9.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\tilde{\eta}.$$

Bei einer Vermehrung ihres Arguments um eine Periode der $\wp$-Function ändert sich hiernach die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ um eine additive Constante, die aus den beiden Grössen 2η und $2\eta'$ ebenso zusammengesetzt ist wie die Periode aus 2ω und $2\omega'$.

Ersetzt man u durch $u-\tilde{\omega}$, so geht die Gleichung (9.) in

$$(10.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\tilde{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\tilde{\omega}) + 2\tilde{\eta}$$

über.

Sind nun m und n nicht beide gerade, also $\tilde{\omega}$ nicht selbst eine Periode und demnach $\sigma\tilde{\omega}$ nicht Null, so kann man in dieser Formel $u = 0$ setzen und erhält

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega} = \frac{\sigma'}{\sigma}(-\tilde{\omega}) + 2\tilde{\eta}$$

oder

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega} = \tilde{\eta},$$

d. h.

$$(11.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(m\omega + n\omega') = m\frac{\sigma'}{\sigma}\omega + n\frac{\sigma'}{\sigma}\omega'.$$

Diese Relation ist für die Theorie der Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ wichtig, wenn man diese Function ausser von dem Argument u noch als abhängig von zwei anderen Grössen betrachtet, nämlich von ω und ω' oder, was auf dasselbe hinauskommt, von zweien der Grössen e_1, e_2, e_3 oder von den beiden Invarianten g_2 und g_3.

Durch Integration nach u folgt aus (10.) nun weiter:

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = \quad Ce^{2\tilde{\eta}u}\sigma(u-\tilde{\omega})$$

oder

$$\sigma(\tilde{\omega}+u) = -Ce^{2\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u).$$

Zur Bestimmung der Constanten C kann man, wenn $\sigma\tilde{\omega}$ nicht Null ist, $u = 0$ setzen und erhält

$$C = -1.$$

Dieses Verfahren ist nicht mehr anwendbar, wenn m und n beide gerade sind. Eine Reihenentwicklung liefert dann

$$u\sigma'\tilde{\omega} + \cdots = -C(1 + 2\tilde{\eta}u + \cdots)(-u\sigma'\tilde{\omega} + \cdots),$$

und durch Vergleichung der Anfangsglieder findet sich, weil $\sigma'\tilde{\omega}$ nicht verschwindet (S. 68),

$$C = 1.$$

Hiernach ist

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = \pm e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(u-\tilde{\omega}),$$

also

$$\sigma(u+2\tilde{\omega}) = \pm e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma u,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $\sigma\tilde{\omega}$ verschwindet oder nicht, d. h. jenachdem m und n beide gerade sind oder nicht. Um das Vorzeichen durch eine Potenz $(-1)^k$ zu ersetzen, hat man nur zu beachten, dass das Product $(m+1)(n+1)$ stets gerade ist, ausser wenn m und n gleichzeitig gerade sind, dass also

$$k = (m+1)(n+1) - 1$$

die gestellte Bedingung erfüllt. Die gefundene Formel lautet demnach, genauer geschrieben:

$$(12.)\qquad \sigma(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u.$$

Bei Vermehrung ihres Argumentes um eine Periode der $\wp$-Function ändert sich die σ-Function um einen Exponentialfactor, in dem der Exponent eine lineare Function von u ist.

Im Besonderen wird

$$(13.)\qquad \begin{aligned} \sigma(u+2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega') &= -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u. \end{aligned}$$

Ersetzt man u in der ersten dieser Gleichungen durch $u+2\omega'$, in der zweiten durch $u+2\omega$, so erhält man zwei verschiedene Ausdrücke für $\sigma(u+2\omega+2\omega')$, die mit einander verglichen

$$e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)+2\eta'(u+\omega')} = e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')+2\eta(u+\omega)}$$

liefern. Die Differenz der Exponenten, aus der u von selbst wegfällt, kann nur gleich einem Vielfachen von $2\pi i$ sein, d. h. man hat

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{l\pi i}{2}.$$

In dieser wichtigen Relation muss die ganze Zahl l sich ermitteln lassen, weil die linke Seite nach Annahme von ω und ω' eindeutig definirt ist. Diese Bestimmung soll später ausgeführt, hier aber nur gezeigt werden, dass l eine ungerade Zahl ist.

Formt man nämlich den ersten Ausdruck für $\sigma(u+2\omega+2\omega')$, zu dem man durch das beschriebene Verfahren kommt, dadurch um, dass man einmal $2\eta\omega'$ durch den aus der Relation folgenden Werth $2\omega\eta'+l\pi i$ ersetzt, so wird

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = e^{2\eta(u+\omega+\omega')+2\eta'(u+\omega')+2\eta'\omega+l\pi i}\,\sigma u$$
$$= (-1)^l e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\,\sigma u.$$

Für $m = n = 1$ wird aber der Zahlenfactor in der Gleichung (12.) gleich -1, also muss l von der Form $2k+1$ und

$$\eta\omega'-\omega\eta' = \frac{(2k+1)\pi i}{2} \tag{14.}$$

sein.

Neuntes Kapitel.

Die Perioden der $\wp$-Function für reelle Invarianten.

Der in den Anwendungen der elliptischen Functionen am häufigsten vorkommende Fall ist der, dass die Invarianten g_2 und g_3 reell sind. Dabei hat man aber noch die beiden Möglichkeiten zu unterscheiden, dass die Grössen e_1, e_2, e_3 alle drei reell oder zwei von ihnen conjugirt complex sind. Bezeichnet man mit G die Discriminante der ganzen Function

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

setzt also

$$(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = G$$

oder

$$\frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = G, \tag{1.}$$

so werden diese beiden Annahmen durch das Vorzeichen von G gekennzeichnet.

Es sei nun erstens

$$g_2^3 - 27g_3^2 > 0,$$

und die drei alsdann reellen Grössen e_1, e_2, e_3 in absteigender Folge geordnet:

$$e_1 > e_2 > e_3. \tag{2.}$$

Wir betrachten die $\wp$-Function zunächst für kleine reelle positive Werthe des Argumentes. Für solche ist (S. 23)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u),$$

wenn in der Bezeichnung kein Gewicht darauf gelegt wird, dass in der gewöhnlichen Potenzreihe $\mathfrak{P}$ nur gerade Potenzen vorkommen; daraus folgt

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \mathfrak{P}'(u).$$

Zu $u = 0$ gehört $\wp u = \infty$. Wächst u, so nimmt $\wp u$ ab, wie der Ausdruck von $\wp' u$ lehrt, und dieses Abnehmen dauert sicher so lange, bis die stetige Function $\wp' u$ zum ersten Mal gleich Null geworden ist, was für $u = \omega$ eintreten möge. Wegen

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

und der zwischen e_1, e_2, e_3 festgesetzten Grössenordnung muss dann die $\wp$-Function den Werth e_1 annehmen, also die Gleichung

$$\wp\omega = e_1 \tag{3.}$$

gelten. Dem Intervall $0 \ldots \omega$ des Arguments u ist das Intervall $+\infty \ldots e_1$ der Function $\wp u$ eindeutig zugeordnet.

Jenseits des Argumentwerthes ω kann der Verlauf der $\wp$-Function mittels der Gleichung

$$\wp(u+\omega) = \wp(u-\omega)$$

oder

$$\wp(\omega+u) = \wp(\omega-u) \tag{4.}$$

verfolgt werden. Denkt man sich die Gleichung

$$s = \wp u$$

durch eine Curve veranschaulicht, die auf ein rechtwinkliges cartesisches Coordinatensystem (u, s) bezogen ist, so gehören zu den Argumentwerthen $\omega + u$ und $\omega - u$ zwei Punkte der u-Axe, die vom Punkte ω gleich weit entfernt sind. Nach der Gleichung (4.) kommen diesen Punkten gleiche Ordinaten der Curve zu, d. h. die Curve verläuft symmetrisch zu der der s-Axe im Abstande ω parallelen Geraden $u = \omega$. Die Geraden $u = 0$ und $u = 2\omega$ sind Asymptoten der Curve.

Der Periodicität wegen erstrecken sich die übrigen Zweige der Curve in gleicher Weise zwischen den Geraden $u = 2\omega$ und $u = 4\omega$, $u = 4\omega$ und $u = 6\omega$, u. s. f.; und entsprechend auf der negativen Seite der s-Axe.

Zu bemerken ist noch, dass das Minimum e_1 von s nothwendig positiv ist. Denn wegen

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

können nicht alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 negativ sein, und e_1 war die grösste von ihnen. Ein reelles Argument u, für welches $\wp u$ gleich e_2 oder e_3 würde, existirt daher nicht.

Es sei nun u_1 irgend ein reeller Werth von u, für den die $\wp$-Function unendlich gross wird. Man kann eine ganze Zahl m so bestimmen, dass wenn

$$u_1 = 2m\omega + u_0$$

gesetzt wird, u_0 zwischen 0 und 2ω liegt, 2ω selbst ausgeschlossen. Wegen

$$\wp u_1 = \wp u_0$$

ist dann auch u_0 eine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function. In dem Intervall $0 \leqq u < 2\omega$ wird aber diese Function nur für $u = 0$ unendlich gross. Denn wäre 2ω nicht die kleinste positive Unendlichkeitsstelle, so würde auch ω nicht der kleinste positive Werth sein, für den $\wp u$ gleich einer der Grössen e_α, nämlich gleich e_1 wird. Aus $u_0 = 0$ folgt nun

$$u_1 = 2m\omega,$$

d. h. alle reellen Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function sind für ganzzahliges m in dieser Form enthalten.

Ausser diesen reellen Unendlichkeitsstellen giebt es unendlich viele rein imaginäre. Wird nämlich in der Formel S. 44 (12.) $m = i$ gesetzt und zugleich ui für u geschrieben, so folgt

$$\wp(ui; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3); \tag{5.}$$

hiernach entspricht jedem reellen Werthe, für den die $\wp$-Function mit den Invarianten $g_2, -g_3$ unendlich gross wird, eine rein imaginäre Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function mit den Invarianten g_2, g_3. Und zwar sind alle diese Werthe Vielfache des mit i multiplicirten kleinsten positiven Werthes $2\bar{\omega}$, für den die Function $\bar{s} = \wp(u; g_2, -g_3)$ unendlich wird. Dem oben Auseinandergesetzten zufolge ist dabei $\bar{\omega}$ der kleinste positive Werth, für den diese Function der grössten Wurzel der Gleichung

$$\bar{S} \equiv 4\bar{s}^3 - g_2\bar{s} + g_3 = 0$$

gleich wird. Weil sich diese Gleichung auch in der Form

$$4(-\bar{s})^3 - g_2(-\bar{s}) - g_3 = 0$$

schreiben lässt, so folgt, dass ihre Wurzeln $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, von der Reihenfolge abgesehen, mit $-e_1, -e_2, -e_3$ übereinstimmen müssen. Da ferner

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad \text{also} \quad -e_3 > -e_2 > -e_1$$

sein sollte, so muss, wenn auch hier

$$\bar{e}_1 > \bar{e}_2 > \bar{e}_3$$

gesetzt wird,

$$\bar{e}_1 = -e_3, \quad \bar{e}_2 = -e_2, \quad \bar{e}_3 = -e_1$$

sein. Bestimmt man demnach $\bar{\omega}$, wie angegeben, der Gleichung

$$\wp(\bar{\omega}; g_2, -g_3) = -e_3 \tag{6.}$$

gemäss und setzt

$$\bar{\omega} i = \omega', \tag{7.}$$

so ist ω' der dem absoluten Betrage nach kleinste rein imaginäre Werth, für den $\wp(u; g_2, g_3)$ unendlich gross wird, und alle Unendlichkeitsstellen derselben Art sind in der Form $2n\omega'$ enthalten. Die Gleichung (5.) liefert in Verbindung mit (6.) und (7.)

$$\wp\omega' = e_3. \tag{8.}$$

Man kann die vorher definirte Grösse ω durch ein bestimmtes Integral darstellen, indem man zunächst

$$\omega = \int_0^\omega du$$

setzt und dann die Transformation

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

anwendet, wo unter $\sqrt{S}$ für grosse positive Werthe von s der positive Werth zu verstehen ist. Durchläuft u das Intervall von 0 bis ω, so geht $s = \wp u$ von $+\infty$ bis e_1, also wird

$$\omega = \int_\infty^{e_1} \frac{-ds}{\sqrt{S}}.$$

Nun hat $\bar{\omega}$ für die Function $\bar{s} = \wp(u; g_2, -g_3)$ dieselbe Bedeutung wie ω für $\wp(u; g_2, g_3)$, und man kann daher setzen

$$\bar{\omega} = \int_\infty^{-e_3} \frac{-d\bar{s}}{\sqrt{S}}.$$

Demnach wird schliesslich

$$
(9.) \quad
\begin{aligned}
\omega &= \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \\
\omega' &= i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}.
\end{aligned}
$$

Da 2ω und $2\omega'$ Unendlichkeitsstellen und damit Perioden der $\wp$-Function sind, so müssen unendlich viele Perioden in der Form

$$2m\omega + 2n\omega'$$

enthalten sein. Das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ würde primitiv genannt werden dürfen, wenn alle Perioden sich durch diesen Ausdruck darstellen liessen.

Nach S. 63 ist dies sicher dann der Fall, wenn in der Ebene der complexen Grösse u innerhalb und auf dem Umfange des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, 2ω, $2\omega'$, das im Nullpunkt rechtwinklig ist, ausser den Eckpunkten selbst keine Unendlichkeitsstelle liegt. Nun sind zwar dem bereits Bewiesenen zufolge auf den Seiten $0, 2\omega$ und $0, 2\omega'$ keine weiteren Unendlichkeitspunkte gelegen; es ist aber noch nicht nachgewiesen, dass es keine complexen, zu Punkten innerhalb des Dreiecks oder auf dessen dritter Seite gehörenden Werthe giebt, für die $\wp u$ unendlich gross wird. Es sei u' ein solcher Werth, und es werde

$$u' = 2\mu\omega + 2\nu\omega'$$

gesetzt, so sind μ und ν reelle, den Bedingungen

$$0 < \mu < 1, \quad 0 < \nu < 1, \quad \mu + \nu \leqq 1$$

unterworfene Zahlen. Dass $\wp u'$ nicht unendlich gross sein kann, erkennt man am deutlichsten, wenn man mittels des Additionstheorems $\wp u'$ auf $\wp(2\mu\omega)$ und $\wp(2\nu\omega')$ zurückführt. Nach der Formel S. 25 (3.) ist

$$\wp u' = \frac{(\wp(2\mu\omega) + \wp(2\nu\omega'))(2\wp(2\mu\omega)\wp(2\nu\omega') - \tfrac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp'(2\mu\omega)\wp'(2\nu\omega')}{2(\wp(2\mu\omega) - \wp(2\nu\omega'))^2}.$$

In dem Quotienten kann der Zähler nicht unendlich gross werden. Dass nämlich innerhalb der Strecken $0, 2\omega$ und $0, 2\omega'$ keine Unendlichkeitsstellen liegen, findet seinen Ausdruck darin, dass $\wp(2\mu\omega)$ und $\wp(2\nu\omega')$ nicht unendlich werden, wenn μ und ν alle Werthe von 0 bis 1, die Grenzen ausgeschlossen, durchlaufen; und nach der Differentialgleichung der $\wp$-Function sind $\wp'(2\mu\omega)$ und $\wp'(2\nu\omega')$ gleichzeitig mit $\wp(2\mu\omega)$ und $\wp(2\nu\omega')$ endlich. Sollte der Nenner des Quotienten verschwinden, so müsste $\wp(2\mu\omega) = \wp(2\nu\omega')$ sein. Diese Gleichung kann aber nicht stattfinden, denn $\wp(2\mu\omega)$ liegt zwischen $+\infty$ und e_1, und $\wp(2\nu\omega')$, wie die Beziehungen (5.) und (8.) lehren, in dem Intervall $-\infty \dots e_3$, das sich mit dem ersten an keiner Stelle deckt.

Hiermit ist bewiesen, dass die durch die Formeln (9.) definirten Ausdrücke nach Multiplication mit 2 ein primitives Periodenpaar liefern.

Die beiden eben betrachteten Intervalle von Werthen der $\wp$-Function sind durch das Intervall $e_1 \dots e_3$ von einander getrennt. Man kann nach den Argumenten u fragen, die dieser Werthereihe zugehören. Zunächst ergiebt sich aus der Formel (1.) auf S. 65

$$\wp(u+\omega) - e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp u - e_1}$$

für $u = \omega'$

$$\wp(\omega+\omega') = e_2.$$

Man setze ferner in der Formel (2.) auf S. 66 $\alpha = 2$ und $-u$ für u, so wird

$$\wp(\omega+\omega'-u) = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u - e_2}. \tag{10.}$$

Durchläuft jetzt u stetig das Intervall $0 \dots \omega$, der das Argument u darstellende Punkt also das Stück 0ω der Axe des Reellen, so läuft $\omega+\omega'-u$ stetig längs der durch die Punkte $\omega+\omega'$ und ω' gehenden Parallelen zu dieser Axe von dem ersten Punkte zum zweiten. Die Function $\wp(\omega+\omega'-u)$ nimmt dann alle Werthe zwischen e und e_3 an. Mit anderen Worten, $\wp u$ durchläuft das Intervall $e_2 \dots e_3$, wenn u auf directem Wege von $\omega+\omega'$ bis ω' geht. Genau ebenso folgt, dass wenn u die Strecke von $\omega+\omega'$ bis ω, der Axe des Imaginären parallel, durchläuft, die $\wp$-Function alle Werthe des Intervalles $e_2 \dots e_1$ annimmt.

Diese Ergebnisse mögen in einer Tabelle vereinigt werden, die zugleich das Vorzeichen von $\wp' u$ für die vier Theilintervalle erkennen lässt. Für kleine reelle positive Werthe des Argumentes war

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \mathfrak{P}'(u).$$

Die erste Ableitung der $\wp$-Function ist also für solche Werthe negativ, und zwar gilt dies, nach der Definition von ω (S. 75), bis zu diesem Werthe hin.

Für kleine positiv imaginäre Argumentwerthe ist

$$\wp'(vi) = -\frac{2}{(vi)^3} + \mathfrak{P}'(vi) = -i\frac{2}{v^3} + \mathfrak{P}'(vi).$$

Man kann demnach sagen, dass $\wp' u$ für Werthe von u zwischen 0 und ω' negativ imaginär ist.

In den beiden noch fehlenden Intervallen kann das Zeichen der $\wp'$-Function mittels der aus (10.) folgenden Gleichung

$$\wp'(\omega+\omega'-u) = \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{(\wp u-e_2)^2}\wp' u = -\frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{(\wp u - e_2)^2}\wp' u$$

bestimmt werden. Der Factor von $\wp' u$ ist reell und negativ; hiernach hat $\wp' u$ zwischen $\omega+\omega'$ und ω' das entgegengesetzte Vorzeichen wie in dem Intervall $0 \ldots \omega$, und zwischen $\omega+\omega'$ und ω das entgegengesetzte Zeichen wie für die Werthe zwischen 0 und ω'. In der folgenden Tabelle enthält die zweite Spalte die zu dem nebenstehenden Intervall des Arguments u gehörigen Werthe der $\wp$-Function, die dritte die zugehörigen Werthe der Grösse $\wp' u : |\wp' u| = \varepsilon$.

u	$\wp u$	ε
$0 \ldots \omega$	$+\infty \ldots e_1$	-1
$\omega \ldots \omega+\omega'$	$e_1 \ldots e_2$	$+i$
$\omega+\omega' \ldots \omega'$	$e_2 \ldots e_3$	$+1$
$\omega' \ldots 0$	$e_3 \ldots -\infty$	$-i$

Diese Tabelle gestattet, für jeden reellen Werth der $\wp$-Function das Intervall eines zugehörigen Werthes von u anzugeben, vorausgesetzt, dass ε der in der dritten Spalte stehenden Grösse gleich ist. Ist gegebenen Falls das Vorzeichen von $\wp' u$ dem aus der Tabelle hervorgehenden entgegengesetzt, so hat man wegen

$$\wp(w-u) = \wp u,$$
$$\wp'(w-u) = -\wp' u$$

$w-u$ statt des aus der Tabelle zu entnehmenden Werthes von u zu setzen und das Intervall danach zu bestimmen.

Vermöge der Gleichung

$$\wp u = s$$

wird der Umfang des Rechtecks mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ in der Ebene der Grösse u auf die Axe des Reellen in der Ebene der Grösse s abgebildet. Durchläuft u den Umfang im positiven Sinne, nämlich so, dass die eingeschlossene Fläche zur Linken bleibt, so durchläuft s die Axe des Reellen im negativen Sinne.

Es sei jetzt zweitens (vgl. S. 74) die Discriminante G von S negativ, also

$$g_2^3 - 27 g_3^2 < 0.$$

Von den Grössen e_α ist dann nur eine reell, es sei e_2; e_1 und e_3 sind conjugirt complex.

Wir beginnen wieder damit, dem Argument u reelle, wenig von Null verschiedene Werthe beizulegen. Für $u = 0$ ist die $\wp$-Function unendlich gross, für wachsende Argumente $\wp u$ und $\wp' u$ reell, $\wp' u$ ausserdem negativ, also

$$\wp' u = \frac{ds}{du} = -\sqrt{S},$$

wenn nach wie vor unter $\sqrt{S}$ der reelle positive Werth der Quadratwurzel verstanden wird. Der Werth von s, bis zu dem die Abnahme dieser Grösse sicher dauert, für den also $\wp' u$ zum ersten Mal verschwindet, ist hier

$$s = e_2,$$

wo e_2 positiv oder negativ sein kann. Und zwar ist dies unter der jetzigen Annahme der einzige reelle Werth, für den die Ableitung gleich Null wird. Ist ω_2 der kleinste positive Werth, der die Gleichung

$$\wp \omega_2 = e_2$$

befriedigt, so ist $2\omega_2$ die kleinste positive Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function, und ω_2 lässt sich, wie aus der auf S. 77 angestellten Überlegung durch Vertauschung der Bezeichnungen folgt, durch ein bestimmtes Integral darstellen:

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}. \tag{12.}$$

Ferner sind alle reellen Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function in der Form $2m\omega_2$ enthalten.

Um zu untersuchen, ob es rein imaginäre Unendlichkeitsstellen giebt, beziehen wir uns wieder auf die Gleichung (5.). Die Discriminante der ganzen Function $\bar{S}$ ist mit der von S identisch, und die Gleichung $\bar{S} = 0$ hat nur eine reelle Wurzel, $-e_2$. Ist $\bar{\omega}_2$ der kleinste positive Werth, für den die Gleichung

$$\wp(\bar{\omega}_2; g_2, -g_3) = -e_2$$

stattfindet, und wird

$$\bar{\omega}_2 i = \omega_2'$$

gesetzt, so ist

$$\wp\omega_2' = e_2 \tag{13.}$$

und, der zweiten Formel (9.) entsprechend,

$$\omega_2' = i\int_{-e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}.$$

Geht u auf directem Wege von 0 nach ω_2', so nimmt $\wp u$ die Werthe von $-\infty$ bis e_2 an. Im Besonderen erhält die Function den Werth e_2 sowohl für das reelle Argument ω_2 wie für das rein imaginäre ω_2'. Der Tabelle auf S. 80 entspricht für $G < 0$ einfach folgende:

u	$\wp u$	ε
$0 \ldots \omega_2$	$+\infty \ldots e_2$	-1
$\omega_2' \ldots 0$	$e_2 \ldots -\infty$	$-i$

Wie im Falle $G > 0$, so bilden auch hier die Punkte 0, $2\omega_2$ und $2\omega_2'$ ein im Nullpunkt rechtwinkliges Dreieck. Unendlichviele Perioden der $\wp$-Function sind in der Form

$$2m\omega_2 + 2n\omega_2'$$

enthalten; ein wesentlicher Unterschied gegen die erste Annahme liegt jedoch darin, dass hier nicht alle Perioden durch einen solchen Ausdruck darstellbar sind, dass also $(2\omega_2, 2\omega_2')$ kein primitives Periodenpaar ist. Zwar findet man durch dieselben Schlüsse wie auf S. 78, dass wenn man

$$u' = 2\mu\omega_2 + 2\nu\omega_2'$$

setzt, der Zähler des Ausdruckes für $\wp u'$ nicht unendlich gross wird. Dagegen kann das Nichtverschwinden des Nenners hier nicht behauptet werden.

Denn die Intervalle $+\infty \ldots e_2$ und $-\infty \ldots e_2$, in denen für $0 < \mu < 1$ und $0 < \nu < 1$ die Grössen $\wp(2\mu\omega_2)$ und $\wp(2\nu\omega_2')$ liegen, hängen in e_2 zusammen, und der Nenner wird gleich Null, wenn gleichzeitig

$$\wp(2\mu\omega_2) = e_2 \quad \text{und} \quad \wp(2\nu\omega_2') = e_2$$

ist, was für $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ eintritt. Es kann also $\wp u'$ für

$$u' = \omega_2 + \omega_2'$$

unendlich gross werden, und dass dies wirklich zutrifft, erkennt man, ohne genauere Untersuchung des Zählers von $\wp u'$, einfach mittels der Formel

$$\wp(u+\omega_2) = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u - e_2}.$$

Denn für $u = \omega_2'$ verschwindet $\wp u - e_2$, während $(e_2-e_1)(e_2-e_3)$ nicht Null, sondern als Product zweier conjugirt complexen Grössen reell und positiv ist. Die Unendlichkeitsstelle $\omega_2+\omega_2'$ liegt auf der Hypotenuse des vorher erwähnten rechtwinkligen Dreiecks.

Da sich nun $\omega_2+\omega_2'$ nicht für ganzzahlige Werthe von m und n in der Form $2m\omega_2 + 2n\omega_2'$ darstellen lässt, so kann $(2\omega_2, 2\omega_2')$ nicht als primitives Periodenpaar bezeichnet werden. Man könnte aber weiter untersuchen, ob im Innern oder auf dem Umfange des durch die Punkte $0, 2\omega_2, \omega_2+\omega_2'$ gebildeten Dreiecks ausser diesen Eckpunkten selbst noch andere Unendlichkeitsstellen der $\wp$-Function liegen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde man nach dem Früheren behaupten können, dass $(2\omega_2, \omega_2+\omega_2')$ ein primitives Periodenpaar ist.

Wir wollen für eine negative Discriminante sämmtliche Unendlichkeitsstellen aufsuchen. Die reellen und die rein imaginären sind bereits bekannt, $2m\omega_2$ und $2n\omega_2'$. Es sei jetzt $u = \alpha+\beta i$. Nach dem Additionstheorem ist

$$\wp(\alpha+\beta i) = \frac{(\wp(\alpha)+\wp(\beta i))(2\wp(\alpha)\wp(\beta i)-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\wp'(\alpha)\wp'(\beta i)}{2(\wp(\alpha)-\wp(\beta i))^2}.$$

Die Annahme $\wp(\alpha) = \wp(\beta i)$, für die der Nenner verschwindet, werde zunächst ausgeschlossen. Nun ist auf S. 59 bewiesen worden, dass wenn $\wp u$ endlich ist, $\wp w$ aber unendlich gross, die Gleichung

$$\wp(u+w) = \wp u$$

gilt. Hierin sei u reell, gleich α, w eine der bereits gefundenen nicht reellen Unendlichkeitsstellen, also rein imaginär, von der Form $2n\omega_2'$, so ist

$$\wp(\alpha + 2n\omega_2') = \wp(\alpha),$$

also endlich, wenn α nicht selbst eine Unendlichkeitsstelle ist. Ebenso ist, wenn $\wp(\beta i)$ als endlich, $\alpha = 2m\omega_2$ vorausgesetzt wird,

$$\wp(\beta i + 2m\omega_2) = \wp(\beta i)$$

wieder eine endliche Grösse. Mit anderen Worten: Wenn man einen complexen Werth aufsuchen will, der möglicherweise Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function ist, und dessen reeller und imaginärer Bestandtheil, als Argumente von $\wp u$ gesetzt, verschiedene Functionswerthe ergeben, so muss man beide Bestandtheile als Unendlichkeitsstellen annehmen. Auf diese Weise kommt man zu den Werthen

$$2m\omega_2 + 2n\omega_2',$$

von denen man in der That bereits weiss, dass sie Unendlichkeitsstellen sind.

Ausserdem aber können solche Stellen auch aus dem Verschwinden des Nenners der Additionsformel entspringen. Wie aus der Tabelle auf S. 82 hervorgeht, wird nun $\wp(\alpha)$ nur dann gleich $\wp(\beta i)$, wenn der gemeinsame Werth gleich e_2 ist.

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\wp(\alpha) = e_2$$

ist

$$\alpha = \pm\,\omega_2 + w.$$

Da aber α reell sein soll, so muss auch w reell, gleich $2m'\omega_2$ sein. Und weil das Vorzeichen ausser Betracht bleiben darf, so ist

$$\alpha = \omega_2 + 2m'\omega_2$$

zu setzen. Ebenso gilt die Gleichung

$$\wp(\beta i) = e_2$$

für

$$\beta i = \omega_2' + 2n'\omega_2'.$$

Demnach wird

$$\alpha + \beta i = \omega_2 + \omega_2' + 2m'\omega_2 + 2n'\omega_2'.$$

Dass die $\wp$-Function für $u = \omega_2 + \omega_2'$ wirklich unendlich gross wird, ist bereits gezeigt worden. Hiernach sind für $G < 0$ sämmtliche Unendlichkeitsstellen in einer der Formen

$$w = 2m\omega_2 + 2n\omega_2',$$
$$w = (2m'+1)\omega_2 + (2n'+1)\omega_2',$$

d. h. in dem Ausdruck

$$w = k\omega_2 + k'\omega_2'$$

enthalten, wo die ganzen Zahlen k und k' gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind.

Schreibt man

$$w = \frac{k-k'}{2}\cdot 2\omega_2 + k'(\omega_2 + \omega_2'),$$

so lässt diese Darstellung das Periodenpaar $(2\omega_2, \omega_2 + \omega_2')$ als primitiv erkennen.

Da $\wp\omega_2 = \wp\omega_2' = e_2$ war, so muss $\wp\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}$ gleich einer der beiden von e_2 verschiedenen Grössen e_α sein. Nun ist nach der Erklärung der Grössen ω_2 und ω_2' und nach der Tabelle auf S. 82 $\wp\frac{\omega_2}{2}$ reell und $\wp'\frac{\omega_2}{2}$ negativ, $\wp\frac{\omega_2'}{2}$ reell und $\wp'\frac{\omega_2'}{2}$ negativ imaginär. Wegen

$$\wp\left(\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2}\right) = \frac{\left(\wp\frac{\omega_2}{2} + \wp\frac{\omega_2'}{2}\right)\left(2\wp\frac{\omega_2}{2}\wp\frac{\omega_2'}{2} - \frac{1}{2}g_2\right) - g_3 - \wp'\frac{\omega_2}{2}\wp'\frac{\omega_2'}{2}}{2\left(\wp\frac{\omega_2}{2} - \wp\frac{\omega_2'}{2}\right)^2}$$

stimmt in Folge dessen das Vorzeichen des imaginären Theiles von $\wp\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}$ mit dem von $-\wp'\frac{\omega_2}{2}\wp'\frac{\omega_2'}{2}$ überein und ist negativ. Welcher der beiden Grössen e_1, e_3 der Ausdruck $\wp\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}$ gleich wird, richtet sich daher nach dem Vorzeichen ihrer imaginären Theile. Ist z. B. e_3 im imaginären Theile negativ, so ist

$$\wp\left(\frac{\omega_2+\omega_2'}{2}\right) = e_3$$

und demnach

$$\wp\left(\frac{\omega_2-\omega_2'}{2}\right) = e_1$$

zu setzen.

Zehntes Kapitel.

Die Functionen $\sigma_\alpha u$ und die σ-Quotienten.

Eine Grundformel der Theorie der σ-Function, die die Änderung dieser Function bei einer Vermehrung ihres Argumentes um eine Periode der $\wp$-Function erkennen lässt, ist (S. 72 (12.))

$$(1.)\qquad \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u,$$

wobei $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar der $\wp$-Function bedeutet. Wird hierin

$$m\omega+n\omega' = \tilde{\omega},$$
$$m\eta+n\eta' = \tilde{\eta}$$

gesetzt, so erhält die Gleichung die Form

$$\sigma(u+2\tilde{\omega}) = (-1)^{mn+m+n} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma u.$$

Im Folgenden werde angenommen, dass die ganzen Zahlen m und n nicht beide gerade, also $\tilde{\omega}$ nicht gleich einer ganzen Periode der $\wp$-Function sei, und $u-\tilde{\omega}$ an Stelle von u eingeführt, so heisst die Formel

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = -e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(u-\tilde{\omega})$$

oder, weil σu eine ungerade Function ist (S. 33),

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u),$$

oder auch

$$e^{-\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}+u) = e^{\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u).$$

Die Function auf der linken oder rechten Seite dieser Gleichung, durch ihren Werth für $u=0$ dividirt, soll, als von dem Zahlenpaar (m, n) abhängig, mit $\sigma_{mn} u$ bezeichnet werden:

$$\text{(2.)} \qquad \frac{e^{-\tilde{\eta} u}\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \frac{e^{\tilde{\eta} u}\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \sigma_{mn} u.$$

Diese Bezeichnung soll aber keine bleibende sein, weil, wie leicht bewiesen werden kann, sich sämmtliche Functionen $\sigma_{mn} u$ auf nur drei wesentlich verschiedene zurückführen lassen.

Es sei

$$m_1\omega + n_1\omega' = \tilde{\omega}_1$$

eine von $\tilde{\omega}$ verschiedene halbe Periode, jedoch so beschaffen, dass m_1 und m, n_1 und n gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind, dass also

$$m_1 - m = 2m',$$
$$n_1 - n = 2n'$$

gesetzt werden kann. Zu dem Zahlenpaar (m_1, n_1) gehört die Function

$$e^{-\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}_1+u)}{\sigma\tilde{\omega}_1} = e^{\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}_1-u)}{\sigma\tilde{\omega}_1} = \sigma_{m_1 n_1} u.$$

In dem ersten Ausdruck ersetze man $\tilde{\omega}_1$ durch seinen aus

$$\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega} = 2m'\omega + 2n'\omega'$$

folgenden Werth. Dann kann $\sigma(\tilde{\omega}_1+u)$ mittels der Ausgangsgleichung (1.) umgeformt werden, wenn darin m und n durch m' und n', u durch $\tilde{\omega}+u$ ersetzt wird. Es entsteht

$$\sigma(\tilde{\omega}_1+u) = \sigma(\tilde{\omega}+u+2m'\omega+2n'\omega') = \varepsilon' e^{2(m'\eta+n'\eta')(\tilde{\omega}+u+m'\omega+n'\omega')}\sigma(\tilde{\omega}+u).$$

Das Vorzeichen

$$\varepsilon' = (-1)^{m'n'+m'+n'}$$

wird nicht explicite gebraucht, weil der obige Ausdruck durch den aus ihm für $u = 0$ folgenden, $\sigma\tilde{\omega}_1$, zu dividiren ist. Führt man die Division wirklich aus und multiplicirt mit $e^{-\tilde{\eta}_1 u}$, wo

$$\tilde{\eta}_1 = m_1\eta + n_1\eta' = \tilde{\eta} + 2(m'\eta + n'\eta')$$

ist, so erhält man

$$e^{-\tilde{\eta}_1 u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}_1+u)}{\sigma\tilde{\omega}_1} = e^{-\tilde{\eta} u}\frac{\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}},$$

d. h.

$$\sigma_{m_1 n_1} u = \sigma_{mn} u.$$

Hiernach kommt es bei der Bildung solcher Functionen nicht sowohl auf die Werthe der ganzen Zahlen m und n, als auf ihre kleinsten Reste nach dem Modul 2 an. Da nun der Grundannahme über m und n gemäss nicht beide Reste gleich Null sein können, so darf man sich auf die drei Fälle

$$m = 1,\quad n = 0;\qquad m = 1,\quad n = 1;\qquad m = 0,\quad n = 1$$

beschränken. Die ihnen entsprechenden Functionen $\sigma_{10} u$, $\sigma_{11} u$, $\sigma_{01} u$ seien mit $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ bezeichnet; dann gelten die Definitionsgleichungen:

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned} & e^{-\eta u}\frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} = e^{\eta u}\frac{\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega} = \sigma_1 u \\ & e^{-(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')} = e^{(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega+\omega')} = \sigma_2 u \\ & e^{-\eta' u}\frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} = e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'} = \sigma_3 u. \end{aligned}\right.$$

Setzt man

$$\omega + \omega' = \omega'',\qquad \eta + \eta' = \eta'',$$

so kann die zweite von ihnen auch in der Form

$$e^{-\eta'' u}\frac{\sigma(\omega''+u)}{\sigma\omega''} = e^{\eta'' u}\frac{\sigma(\omega''-u)}{\sigma\omega''} = \sigma_2 u$$

geschrieben werden. Endlich kann man, unter Anwendung der Bezeichnungen auf S. 66 und der ihnen entsprechenden

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1, \\ \eta + \eta' &= \eta_2, \\ \eta' &= \eta_3, \end{aligned}$$

die drei Gleichungen in die eine

$$(4.)\qquad e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(\omega_\alpha+u)}{\sigma\omega_\alpha} = e^{\eta_\alpha u}\frac{\sigma(\omega_\alpha-u)}{\sigma\omega_\alpha} = \sigma_\alpha u \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

zusammenziehen.

Bei der Einführung von $-u$ statt u gehen die beiden Ausdrücke für $\sigma_\alpha u$ in einander über, d. h. es wird

$$(5.)\qquad \sigma_\alpha(-u) = \sigma_\alpha u;$$

$\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ sind gerade Functionen.

Dass sie wirklich alle drei von einander verschieden sind, ersieht man sehr einfach aus ihrer Beziehung zur $\wp$-Function. Setzt man in der Gleichung

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

(S. 37 (14.)) $v = \omega_\alpha$ und kehrt das Zeichen um, so folgt

$$\wp u - \wp \omega_\alpha = \frac{\sigma(\omega_\alpha + u)\,\sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega_\alpha} = e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(\omega_\alpha + u)}{\sigma u\, \sigma \omega_\alpha} \cdot e^{\eta_\alpha u} \frac{\sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma u\, \sigma \omega_\alpha},$$

d. h. wegen $\wp \omega_\alpha = e_\alpha$:

$$\wp u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2 \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{6.}$$

Wären nun für zwei verschiedene Zahlen α und β aus der Reihe 1, 2, 3 die Functionen $\sigma_\alpha u$ und $\sigma_\beta u$ einander gleich, so müsste $e_\alpha = e_\beta$ sein, was ausgeschlossen war.

Eliminirt man aus den drei, in (6.) enthaltenen Relationen die Function $\wp u$, so erhält man folgende drei Gleichungen, die zwei unabhängigen äquivalent sind:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\,\sigma^2 u &= 0 \\ \sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma^2 u &= 0 \\ \sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma^2 u &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

Multiplicirt man der Reihe nach mit e_1, e_2, e_3 und addirt, so ergiebt sich weiter

$$(e_2 - e_3)\,\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma_3^2 u = 0, \tag{8.}$$

d. h. zwischen den Quadraten der drei neu eingeführten Functionen besteht eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten.

Kennt man die Stammfunction σu und eine der aus ihr abgeleiteten Functionen $\sigma_\alpha u$, so kann man mittels der Formeln (7.) die beiden anderen algebraisch bestimmen.

Eine Relation von anderer Form unter den vier Functionen σu und $\sigma_\alpha u$ erhält man aus (6.) in Verbindung mit der Differentialgleichung der $\wp$-Function

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3),$$

nämlich:

$$\wp' u = 2\varepsilon \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}.$$

Da $\wp' u$ und die drei Quotienten auf der rechten Seite eindeutig definirt sind, so muss das Vorzeichen ε sich bestimmen lassen. Die Entwickelung in der Nähe der Stelle $u = 0$ liefert als Anfangsglied links $\frac{-2}{u^3}$, rechts, weil die drei Functionen $\sigma_\alpha u$ für $u = 0$ den Werth 1 annehmen, $\frac{2\varepsilon}{u^3}$, also wird

$$\varepsilon = -1$$

und demnach

$$\wp' u = -2 \frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u}. \tag{9.}$$

Nun war (S. 34 (9.))

$$\wp' u = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u},$$

mithin folgt

$$\sigma(2u) = 2 \sigma u\, \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u. \tag{10.}$$

Vermehrt man in der Gleichung (6.) das Argument um eine beliebige Periode $2\bar{\omega}$ der $\wp$-Function, so ergiebt sich

$$\left(\frac{\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega})}{\sigma\,(u+2\bar{\omega})}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2.$$

Der Quotient $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$ selbst kann also bei einer solchen Vermehrung höchstens sein Vorzeichen ändern. Um dies genauer zu untersuchen, kann man sich einer Formel bedienen, die in der Theorie der Functionen $\sigma_\alpha u$ der Grundgleichung (1.) für die Stammfunction an die Seite zu stellen ist. Es werde nämlich

$$\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega}) = e^{-\eta_\alpha(u+2\bar{\omega})} \frac{\sigma(\omega_\alpha + u + 2\bar{\omega})}{\sigma \omega_\alpha}$$

berechnet. Die Benutzung von (1.) liefert, für $\varepsilon = (-1)^{mn+m+n}$,

$$\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega}) = \varepsilon e^{-\eta_\alpha(u+2\bar{\omega})} e^{2\bar{\eta}(\omega_\alpha+u+\bar{\omega})} \frac{\sigma(\omega_\alpha+u)}{\sigma\omega_\alpha}$$

oder

$$\sigma_\alpha(u+2\bar{\omega}) = \varepsilon e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})+2(\bar{\eta}\omega_\alpha - \bar{\omega}\eta_\alpha)} \sigma_\alpha u. \tag{11.}$$

Bei einer Vermehrung des Arguments um eine Periode der $\wp$-Function wird also jede Function $\sigma_\alpha u$ mit einem Exponentialfactor derselben Art multiplicirt, wie er bei der Stammfunction σu aufgetreten war; der Exponent ist nämlich eine lineare Function von u. Die speciellen, in (11.) enthaltenen Formeln hängen ihrer Gestalt nach von der Form der Periode $2\bar{\omega}$ und von deren Beziehung zu der besonderen Periode ab, die wegen $\wp\omega_\alpha = e_\alpha$ zu dem Index α gehört.

Specialisirt man zunächst α, lässt aber die Periode $2\tilde{\omega}$ beliebig, so kommt es auf den Ausdruck

$$\tilde{\eta}\omega_\alpha - \tilde{\omega}\eta_\alpha = (m\eta + n\eta')\omega_\alpha - (m\omega + n\omega')\eta_\alpha$$

an, der für

$$\alpha = 1, \quad \omega_\alpha = \omega, \quad \eta_\alpha = \eta$$

den Werth

$$n(\eta'\omega - \omega'\eta) = -n\frac{(2k+1)\pi i}{2}$$

(S. 73 (14.)), und für

$$\alpha = 3, \quad \omega_\alpha = \omega', \quad \eta_\alpha = \eta'$$

den Werth

$$m(\eta\omega' - \omega\eta') = m\frac{(2k+1)\pi i}{2}$$

annimmt, für

$$\alpha = 2, \quad \omega_\alpha = \omega + \omega', \quad \eta_\alpha = \eta + \eta'$$

aber der Summe dieser beiden Werthe gleich wird. Man erhält, wenn man die in den drei Fällen auftretenden Potenzen

$$(-1)^{-n}, \ (-1)^m, \ (-1)^{m-n}$$

mit ε zusammenzieht,

$$(12.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{mn+m} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma_1 u \\ \sigma_2(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{mn} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma_2 u \\ \sigma_3(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{mn+n} e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma_3 u. \end{aligned} \right.$$

Wir specialisiren diese Formeln nun weiter zuerst in der Weise, dass wir in jeder einzelnen $\tilde{\omega}$ gleich einer zu dem auftretenden Index gehörenden halben Periode setzen, und zwar gleich ω in der ersten, gleich $\omega + \omega'$ in der zweiten und gleich ω' in der dritten. Die so entstehenden Gleichungen lassen sich, wie sofort ersichtlich, in die eine

$$(13.) \quad \sigma_\alpha(u + 2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

zusammenziehen, die natürlich auch direct aus (11.) unter der Annahme $\tilde{\omega} = \omega_\alpha$ hervorgeht. Es bleibt übrig, in jeder der Formeln (12.) $\tilde{\omega}$ gleich den beiden nicht zu dem Index gehörigen halben Perioden aus der Reihe $\omega, \omega+\omega', \omega'$, d. h. in (11.) $\tilde{\omega} = \omega_\beta$ zu nehmen. Dann ergiebt sich

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u \qquad \binom{\alpha, \beta = 1,2,3}{\beta \gtrless \alpha}. \tag{14.}$$

In Verbindung mit

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u \tag{15.}$$

lassen diese Gleichungen das periodische Verhalten aller zwölf Quotienten erkennen, die man aus den vier Functionen $\sigma u, \sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ bilden kann.

Für eine beliebige Periode $2\tilde{\omega}$ folgt aus (12.), wenn man jede der Formeln durch die für die Stammfunction dividirt, das Argument aber in jedem Quotienten nur einmal schreibt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^n\frac{\sigma_1}{\sigma}u \\ \frac{\sigma_2}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{m+n}\frac{\sigma_2}{\sigma}u \\ \frac{\sigma_3}{\sigma}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^m\frac{\sigma_3}{\sigma}u. \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

Stellt man dagegen die Formeln (12.) nur unter einander durch Division zusammen, so liefern sie

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_2}{\sigma_3}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^n\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^{m+n}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}u \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(u+2\tilde{\omega}) &= (-1)^m\frac{\sigma_1}{\sigma_2}u. \end{aligned}\right. \tag{17.}$$

Bei der Specialisirung der Periode benutzt man zweckmässiger die Gleichungen (13.), (14.), (15.), und erhält zunächst aus (13.) und (15.):

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\omega_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u; \tag{18.}$$

d. h. der Quotient $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$ hat die Periode $2\omega_\alpha$. Ferner ergiebt sich aus (14.) und (15.), nachdem man diese Gleichung in der Form

$$\sigma(u+2\omega_\beta) = -e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma u$$

geschrieben hat,

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\omega_\beta) = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u, \tag{19.}$$

und wenn man hierin u nochmals um $2\omega_\beta$ vermehrt und die Gleichung selbst wieder benutzt:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+4\omega_\beta) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u. \tag{20.}$$

Der betrachtete Quotient hat also auch die Periode $4\omega_\beta$.

Nimmt man zu der Function $\sigma_\alpha u$ noch eine andere, von ihr verschiedene $\sigma_\beta u$ hinzu, für die mithin nach (14.) die Gleichung

$$\sigma_\beta(u+2\omega_\alpha) = e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\beta u$$

gilt, so erhält man weiter durch Zusammenstellung mit (13.):

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+2\omega_\alpha) = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u, \qquad (\beta \gtrless \alpha) \tag{21.}$$

und wie eben:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+4\omega_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u \qquad (\beta \gtrless \alpha). \tag{22.}$$

Ist endlich γ die von α und β verschiedene Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, gelten also nach (14.) die Formeln

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\gamma) = e^{2\eta_\gamma(u+\omega_\gamma)}\sigma_\alpha u, \qquad (\alpha \gtrless \gamma)$$
$$\sigma_\beta(u+2\omega_\gamma) = e^{2\eta_\gamma(u+\omega_\gamma)}\sigma_\beta u, \qquad (\beta \gtrless \gamma)$$

so findet sich durch Division

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+2\omega_\gamma) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u \qquad (\alpha \gtrless \beta \gtrless \gamma). \tag{23.}$$

Hiernach sind die Quotienten $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$, $\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u$, $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u$ doppeltperiodische Functionen, und zwar hat $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$ und sein reciproker Werth die Perioden $2\omega_\alpha$ und $4\omega_\beta$, $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u$ die Perioden $4\omega_\alpha$ (oder $4\omega_\beta$) und $2\omega_\gamma$. Man kann auch einfacher sagen: $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$ und $\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\gamma}u$ haben die Perioden $2\omega_\alpha$ und $4\omega_\beta$ (oder $4\omega_\gamma$). Trennt man alle möglichen Fälle von einander, so sieht man, dass die σ-Quotienten, wie man diese Functionen kurz zu bezeichnen pflegt, in drei Gruppen von je vier Functionen zerfallen, die dasselbe periodische Verhalten zeigen, und zwar haben

$$\begin{array}{llll}
\frac{\sigma_1}{\sigma}u,\ \frac{\sigma}{\sigma_1}u,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3}u,\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2}u & \text{die Perioden} & 2\omega, & 4\omega', \\
\frac{\sigma_2}{\sigma}u,\ \frac{\sigma}{\sigma_2}u,\ \frac{\sigma_3}{\sigma_1}u,\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}u & \quad\text{"}\qquad\text{"} & 2(\omega+\omega'), & 4\omega', \\
\frac{\sigma_3}{\sigma}u,\ \frac{\sigma}{\sigma_3}u,\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}u,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}u & \quad\text{"}\qquad\text{"} & 4\omega, & 2\omega'.
\end{array}$$

Es entsteht die Frage, ob diese Periodenpaare für die nebenstehenden Functionen primitiv sind, ob demnach z. B. sämmtliche Perioden der Function $\frac{\sigma_1}{\sigma}u$ in der Form $2m\omega+4n\omega'$ dargestellt werden können. Es sei $2\overline{\omega}$ irgend eine Periode eines σ-Quotienten, also von dieser Grösse nichts weiter bekannt, als dass z. B.

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\overline{\omega}) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$$

oder

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u+2\overline{\omega}) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}u$$

ist, wo $2\overline{\omega}$ nicht in beiden Gleichungen denselben Werth zu haben braucht. Durch Quadriren der ersten Formel und unter Benutzung von (6.) ergiebt sich

$$\wp(u+2\overline{\omega}) = \wp u.$$

Und da sich aus der zweiten Formel in Verbindung mit

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta}$$

dieselbe Folgerung ziehen lässt, so sind nothwendigerweise alle Perioden der σ-Quotienten auch Perioden der $\wp$-Function. Dass das Umgekehrte nicht gilt, lehren die Gleichungen (19.) und (21.). Vielmehr müssen in den Formeln (16.) und (17.), die für eine beliebige Periode der $\wp$-Function gelten, die Potenzen von -1 einzeln den Werth $+1$ haben, wenn $2\tilde{\omega}$ eine Periode eines σ-Quotienten sein soll. Ist nun $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar der $\wp$-Function, und wird wieder

$$2\tilde{\omega} = 2m\omega + 2n\omega'$$

gesetzt, so muss z. B. n eine gerade Zahl, $2n'$, sein, wenn $2\tilde{\omega}$ eine Periode von $\frac{\sigma_1}{\sigma}u$ und $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u$ sein soll. Dies liefert die Darstellung

$$2\tilde{\omega} = 2m\omega + 4n'\omega',$$

in der die ganzen Zahlen m und n' keiner weiteren Beschränkung unterworfen sind. Hiernach ist $(2\omega, 4\omega')$ für die betrachteten Functionen ein primitives Periodenpaar, und ebenso $(4\omega, 2\omega')$ für die Functionen der dritten Reihe. Für die der zweiten Gruppe muss

$$m \equiv n \mod 2,$$

d. h. in

$$2\tilde{\omega} = m(2\omega + 2\omega') + (n-m)\,2\omega'$$

$n-m$ eine gerade Zahl, oder $(2\omega + 2\omega', 4\omega')$ ein primitives Periodenpaar sein. Es ist klar, dass hierin $4\omega'$ auch durch 4ω ersetzt werden kann.

Elftes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der $\mathfrak{S}$-Quotienten.

Aus der Gleichung (6.) des vorigen Kapitels (S. 89)

$$(1.)\qquad \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = \wp u - e_\alpha$$

kann man durch Differentiation und Benutzung des Ausdruckes von $\wp' u$ (S. 90 (9.)) simultane Differentialgleichungen zwischen den σ-Quotienten herstellen und aus ihnen weiter mittels der Relation

$$(2.)\qquad \sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma^2 u = 0$$

Differentialgleichungen für die einzelnen Quotienten ableiten.

So folgt unmittelbar aus (1.):

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u \frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u = -\frac{\sigma_1}{\sigma}u\frac{\sigma_2}{\sigma}u\frac{\sigma_3}{\sigma}u = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u,$$

wenn wieder α, β, γ die Zahlen 1, 2, 3, von der Reihenfolge abgesehen, bedeuten; d. h.

$$(3.)\qquad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u = -\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u.$$

Nach (2.) ist dann

$$\left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma}u\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 + e_\alpha - e_\beta$$

und

$$\left(\frac{\sigma_\gamma}{\sigma}u\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 + e_\alpha - e_\gamma.$$

Die Elimination von $\frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}}u$ und $\frac{\mathfrak{S}_\gamma}{\mathfrak{S}}u$ liefert

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}u\right)^2 = \left(\left(\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}\right)^2 + e_\alpha - e_\beta\right)\left(\left(\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}\right)^2 + e_\alpha - e_\gamma\right). \tag{4.}$$

Der Quotient $\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}u$ genügt also der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (x^2 + e_\alpha - e_\beta)(x^2 + e_\alpha - e_\gamma), \tag{5.}$$

und zwar gehören in der Lösung

$$x = \frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}u$$

die Werthe $u = 0$, $x = \infty$ zusammen.

Durch Einführung des reciproken Werthes von x könnte man aus (5.) unmittelbar eine Differentialgleichung für $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\alpha}u$ ablesen. Um jedoch zunächst wieder eine solche zwischen drei $\mathfrak{S}$-Quotienten herzustellen, nehme man die Ausgangsgleichung (1.) in der Form

$$\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2 = \frac{1}{\wp u - e_\gamma}$$

an und verfahre im Ubrigen wie vorher; dann ergiebt sich

$$\frac{d}{du}\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u = \frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}_\gamma}u\,\frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}_\gamma}u. \tag{6.}$$

Die aus (2.) folgenden Ausdrücke

$$\left(\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2 = 1 - (e_\alpha - e_\gamma)\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2,$$
$$\left(\frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2 = 1 - (e_\beta - e_\gamma)\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2$$

liefern in Verbindung mit der Formel (6.)

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2 = \left(1 - (e_\alpha - e_\gamma)\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2\right)\left(1 - (e_\beta - e_\gamma)\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right)^2\right); \tag{7.}$$

d. h. es ist

$$\xi = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = (1-(e_\alpha-e_\gamma)\xi^2)(1-(e_\beta-e_\gamma)\xi^2), \tag{8.}$$

und zwar unter der Bedingung, dass für $u = 0$

$$\xi = 0, \quad \frac{d\xi}{du} = 1$$

wird. Der Anfangswerth von $\frac{d\xi}{du}$ ergiebt sich aus der Gleichung (6.), da die drei Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ für $u = 0$ den Werth 1 annehmen (S. 90).

Wendet man endlich dasselbe Verfahren auf die aus (1.) folgende Formel

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\gamma}$$

an, so ergiebt sich, den Gleichungen (3.) und (6.) entsprechend,

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u = -(e_\alpha-e_\gamma)\frac{\sigma}{\sigma_\gamma}u\,\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\gamma}u, \tag{9.}$$

und die Relation (2.) ist wieder zur Elimination der beiden σ-Quotienten auf der rechten Seite zu benutzen. Die entstehende Differentialgleichung heisst

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2 = \left(1-\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2\right)\left(e_\alpha-e_\beta+(e_\beta-e_\gamma)\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u\right)^2\right). \tag{10.}$$

Nebenbedingung für die Integration der Gleichung

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 = (1-\eta^2)(e_\alpha-e_\beta+(e_\beta-e_\gamma)\eta^2) \tag{11.}$$

durch die Lösung

$$\eta = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}u$$

ist hier $\eta = 1$ für $u = 0$, während $\frac{d\eta}{du}$ für den Anfangswerth von u verschwindet.

Die Differentialgleichungen (4.), (7.) und (10.), von denen die beiden ersten je drei, die dritte sechs Formeln enthält, lassen erkennen, dass jeder der zwölf σ-Quotienten einer Differentialgleichung von der Form

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

genügt. Hierin bedeutet $R(x)$ eine ganze Function vierten Grades, die nur die geraden Potenzen enthält.

Es seien im Besonderen die drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell und, wie früher, den Ungleichungen

$$e_1 > e_2 > e_3$$

gemäss geordnet. Setzt man in (8.)

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3,$$

so kann man auf Grund dieser Differentialgleichung und der Nebenbedingung schreiben:

$$u = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2)}},$$

eine Darstellung, die ohne genauere Festsetzungen über das Integral freilich nur für reelle Werthe der Variablen gilt. Die Function $\xi = \frac{\sigma}{\sigma_3} u$ erscheint dann als Umkehrung dieses Integrals im Sinne Abels. Durch die Transformation

$$\sqrt{e_1-e_3}\,\xi = \xi', \quad \sqrt{e_1-e_3}\,u = u'$$

erhält man

$$u' = \int_0^{\xi'} \frac{d\xi'}{\sqrt{(1-\xi'^2)(1-k^2\xi'^2)}},$$

wo die reelle, positive und unterhalb Eins gelegene Grösse k^2 durch die Gleichung

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = k^2$$

erklärt ist. Die Umkehrungsfunction dieses Integrals erster Gattung in der Legendreschen Normalform ist eine der drei elliptischen Functionen Jacobis,

$$\xi' = \sin \operatorname{am} u'.$$

Die Beziehung zwischen ihr und einem bestimmten σ-Quotienten wird durch die Gleichung

$$(12.)\qquad \frac{\sigma}{\sigma_3} u = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \sin \operatorname{am} \left(u\sqrt{e_1-e_3}\right)$$

wiedergegeben, durch die man die Jacobische Function auch für nicht reelle Grössen e_α und für beliebige complexe Argumente u definiren kann. Nun ist (S. 97)

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-(e_1-e_3)\left(\frac{\sigma}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-\sin^2 \operatorname{am} u',$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-(e_2-e_3)\left(\frac{\sigma}{\sigma_3}u\right)^2 = 1-k^2\sin^2 \operatorname{am} u',$$

d. h. die beiden anderen Jacobischen Functionen werden durch die Gleichungen

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u = \cos \operatorname{am}\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right), \tag{13.}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u = \Delta \operatorname{am}\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right) \tag{14.}$$

bestimmt. Aus der Formel

$$\wp u = e_3 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right)^2$$

ergiebt sich noch

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\sin^2 \operatorname{am}\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right)}. \tag{15.}$$

Werden die Functionen Jacobis auf das Argument u bezogen, so nehmen die Gleichungen (12.), (13.), (14.) die Form an:

$$\sin \operatorname{am} u = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right), \tag{16.}$$

$$\cos \operatorname{am} u = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right), \tag{17.}$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right). \tag{18.}$$

Wir wollen an dieser Stelle untersuchen, was aus den Functionen $\wp u$, σu und $\sigma_\alpha u$ wird, wenn der sonst immer ausgeschlossene Fall eintritt, dass zwei oder alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich werden. Die Discriminante der Function S muss dann verschwinden:

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0.$$

Für $e_2 = e_3$ ist die Differentialgleichung der $\wp$-Function

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_3)^2,$$

und die des Quotienten $\frac{\sigma}{\sigma_3}u$

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = 1-(e_1-e_3)\,\xi^2.$$

Die Einführung von ξ' und u' liefert

$$\left(\frac{d\xi'}{du'}\right)^2 = 1-\xi'^2,$$

also, mit Rücksicht auf die Nebenbedingung,

$$\xi'^2 = \sin^2 u',$$

und es wird demnach

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1-e_3}{\sin^2\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right)}.$$

Da $e_1+e_2+e_3 = 0$ ist, so müssen sich im vorliegenden Falle die drei Grössen e_α durch eine einzige, z. B. e_1, darstellen lassen:

$$e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}e_1.$$

Dann wird

$$\wp u = -\frac{e_1}{2} + \frac{\frac{3e_1}{2}}{\sin^2\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right)}. \tag{19.}$$

Die zweimalige Integration dieser Gleichung und die Bestimmung der Constanten aus den Anfangsgliedern ergiebt

$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{\frac{3e_1}{2}}}\, e^{\frac{e_1 u^2}{4}} \sin\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right). \tag{20.}$$

Die Functionen $\sigma_\alpha u$ werden bei passender Wahl des Quadratwurzelwerthes durch die Relationen

$$\sigma_\alpha u = \sigma u\sqrt{\wp u - e_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

gegeben, und zwar bestimmt sich das Vorzeichen daraus, dass alle drei Functionen für $u = 0$ den Werth 1 annehmen. So findet sich

$$\sigma_1 u = e^{\frac{e_1 u^2}{4}} \cos\left(u\sqrt{\frac{3e_1}{2}}\right), \tag{21.}$$

$$\sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{e_1 u^2}{4}}. \tag{22.}$$

Alle bis jetzt eingeführten Functionen entarten also für $e_2 = e_3$ in Exponentialgrössen und trigonometrische Functionen.

Sind alle drei Grössen e_α einander gleich, so ist wegen

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

der gemeinsame Werth gleich Null; die Invarianten g_2 und g_3 verschwinden einzeln. Aus der Differentialgleichung der $\wp$-Function

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3$$

ergiebt sich

$$\wp u = \frac{1}{u^2},$$

und hieraus weiter, immer in Verbindung mit den bekannten Nebenbedingungen,

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = \frac{1}{u},$$

$$\sigma u = u,$$

$$\sigma_\alpha u = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Sämmtliche Functionen reduciren sich also auf ihre Anfangsglieder.

Zwölftes Kapitel.

Darstellung der σ-Function durch ein unendliches Product.

Die Eigenschaft der σ-Function, durch eine beständig convergente Potenzreihe darstellbar zu sein, hat es ermöglicht, sie für alle endlichen Werthe des Argumentes zu definiren (S. 35). Aber das Bildungsgesetz jener Potenzreihe (S. 32) lässt eine wichtige Eigenschaft der σ-Function nicht hervortreten, nämlich die, für eine bestimmte zweifache Mannigfaltigkeit von Stellen, die Perioden der $\wp$-Function, mit der Ordnungszahl Eins zu verschwinden (S. 68).

Wäre die Anzahl der Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ endlich, gleich n, so würde man die Function gleich dem Ausdruck

$$C(u-a_1)\ldots(u-a_n)$$

setzen, in dem die Constante C als bekannt zu gelten hat, wenn der Werth der Function für einen von den Nullstellen verschiedenen Argumentwerth bekannt ist. Eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Ausdruckes für unendlich viele Nullstellen ist nicht statthaft, weil das dabei entstehende unendliche Product nicht convergiren würde. Aber man kann versuchen, unter Voraussetzung bestimmter Eigenschaften der Nullstellen das Product

$$C\left(1-\frac{u}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{a_n}\right)$$

zu verallgemeinern, wobei der Werth $u = 0$ unter den Nullstellen zunächst nicht enthalten sein soll.

Entsprechend der Identität

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)}$$

definiren wir, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)$$

convergent ist, ein unendliches Product mit den Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ durch die Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)}.$$

Jedoch untersuchen wir gleich die Convergenz einer allgemeineren Reihe als der im Exponenten auftretenden; sie soll aus dieser entstehen, wenn jedem Gliede $\log\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)$ eine Anzahl von Anfangsgliedern seiner Entwickelung nach Potenzen von $\frac{u}{a_\nu}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen hinzugefügt wird. An die Stelle des unendlichen Productes $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{u}{a_\nu}\right)$ tritt dann ebenfalls ein allgemeinerer Ausdruck, dessen Bildungsgesetz im Laufe der Untersuchung selbst erörtert werden soll.

Mit $a_1, a_2, \ldots$ mögen jetzt die Nullstellen $2\bar{\omega}$ der σ-Function mit Ausnahme der Stelle $u = 0$, nach der Grösse ihrer absoluten Beträge in aufsteigender Folge geordnet, bezeichnet werden. Sie erscheinen bei der Darstellung in der Ebene der Grösse u als Eckpunkte von Perioden-Parallelogrammen. In jedem endlichen Bereiche liegt also nur eine endliche Anzahl dieser Stellen. Das heisst: Nach Annahme einer beliebig grossen positiven Zahl G lässt sich immer eine positive ganze Zahl q so bestimmen, dass für alle $n \geqq q$

$$|a_n| > G,$$

oder für $|a_n| = A_n$

$$\frac{1}{A_n} < \frac{1}{G}$$

ist. Diese Voraussetzung über die Vertheilung der Nullstellen soll für die folgende allgemeinere Untersuchung beibehalten, ausserdem aber angenommen werden, es existiere eine ganze positive Zahl r von der Beschaffenheit, dass

$$\sum_n \frac{1}{a_n^\lambda}$$

für $\lambda \geqq r$ absolut convergirt, dass mithin für solche Werthe von λ die Reihe

$$\sum_n \frac{1}{A_n^\lambda}$$

convergent ist. Da es bei der Beurtheilung der Convergenz einer Reihe auf eine endliche Zahl von Anfangsgliedern niemals ankommt, so reicht es aus, die Summation über n von $n = q$ an vorzunehmen.

Die für $|u| < |a_n|$ convergente Reihenentwickelung von $\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right)$ lautet

$$\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) = -\frac{u}{a_n} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_n^2} - \cdots - \frac{1}{\mu}\frac{u^\mu}{a_n^\mu} - \cdots.$$

Wie schon angedeutet, betrachten wir statt dessen den Ausdruck

$$\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + \frac{u}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_n^2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\frac{u^{r-1}}{a_n^{r-1}} = -\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{u^\lambda}{a_n^\lambda};$$

und zwar soll darin r die eben eingeführte Bedeutung haben. Wir untersuchen, ob unter den gemachten Voraussetzungen die Reihe convergirt, die man erhält, wenn man diese Ausdrücke für alle a_n summirt, deren absolute Beträge grösser als G sind; d. h., vom Vorzeichen abgesehen, die Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty}\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{u^\lambda}{\lambda a_n^\lambda}.$$

Angenommen, es werde die absolute Convergenz, d. h. für

$$|u| = U$$

die Convergenz der Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty}\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{U^\lambda}{\lambda A_n^\lambda}$$

gefordert, so kann die Folge der Glieder beliebig vertauscht, und insbesondere die Summe in der Form

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{U^\lambda}{\lambda}\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{A_n^\lambda}$$

angeordnet werden. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{A_n^\lambda} = B_\lambda,$$

wo B_λ der Annahme (S. 104) gemäss für $\lambda \geqq r$ endlich ist, so kommt Alles auf die Prüfung der Convergenz der Reihe

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty}\frac{B_\lambda U^\lambda}{\lambda}$$

hinaus.

Für diesen Zweck kann der folgende Satz benutzt werden. Es sei

$$c_1 \frac{U}{G} + c_2 \frac{U^2}{G^2} + \cdots + c_\lambda \frac{U^\lambda}{G^\lambda} + \cdots$$

eine nach Potenzen von $\frac{U}{G}$ fortschreitende, mit nur positiven Coefficienten c_λ behaftete Reihe, deren Convergenz aus dem Grunde feststehen soll, weil von einem bestimmten Werthe r des Index λ an der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder

$$\frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda} \frac{U}{G}$$

kleiner als Eins bleibt. Oder es sei, nach Abtrennung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern,

$$c_r \frac{U^r}{G^r} + c_{r+1} \frac{U^{r+1}}{G^{r+1}} + \cdots$$

eine Reihe, für die dieses Convergenz-Kriterium schon vom ersten Gliede an gilt. Dann ist, so wird behauptet, auch

$$c_r B_r U^r + c_{r+1} B_{r+1} U^{r+1} + \cdots$$

eine convergente Reihe.

Nun ist nach der Definition von B_λ

$$B_{\lambda+1} = \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{A_n^{\lambda+1}},$$

und da für alle bei dieser Summation in Betracht kommenden Werthe die Ungleichung

$$A_n > G$$

besteht, so hat man

$$\frac{1}{A_n^{\lambda+1}} = \frac{1}{A_n} \cdot \frac{1}{A_n^\lambda} < \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{A_n^\lambda},$$

und nach Ausführung der Summation

$$B_{\lambda+1} < \frac{1}{G} B_\lambda.$$

Für den Quotienten zweier aufeinander folgenden Glieder der zweiten Reihe gilt also

$$\frac{c_{\lambda+1} B_{\lambda+1}}{c_\lambda B_\lambda} U < \frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda} \frac{U}{G},$$

wo die rechte Seite nach Voraussetzung kleiner als Eins ist. Die Convergenz der ersten Reihe zieht also in der That die der zweiten nach sich.

Auf die Reihe

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{B_\lambda U^\lambda}{\lambda}$$

ist dieses Ergebniss ohne Weiteres anwendbar, wenn

$$U < G$$

genommen wird; denn es ist

$$c_\lambda = \frac{1}{\lambda},$$

und der Quotient

$$\frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda} \frac{U}{G} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \frac{U}{G}$$

bleibt kleiner als Eins.

Auf Grund der vorher angestellten Erörterungen ergiebt sich demnach, dass die Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{u^\lambda}{\lambda a_n^\lambda}$$

für $|u| < G$ absolut convergirt. Nun ist, wenn

$$\text{(1.)} \qquad \frac{u}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_n^2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\frac{u^{r-1}}{a_n^{r-1}} = g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)$$

gesetzt wird,

$$\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right) = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{u^\lambda}{\lambda a_n^\lambda}.$$

Man kann also behaupten: Die Reihe

$$\sum_{n=q}^{\infty} \left\{\log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)\right\}$$

ist für $|u| < G$ absolut convergent und lässt sich, wenn

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{a_n^\lambda} = -b_\lambda$$

gesetzt wird, auch in der Form

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}$$

darstellen. Durch Übergang zu den Exponentialgrössen erhält man, bei Definition des unendlichen Productes nach S. 104,

$$\prod_{n=q}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\} = e^{\sum\limits_{\lambda=r}^{\infty}\frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}}. \tag{2.}$$

Da die rechts im Exponenten stehende Reihe absolut, mithin auch unbedingt convergent ist, so kann auch das unendliche Product auf der linken Seite als unbedingt convergent bezeichnet werden. Der Ausdruck rechter Hand, also auch das unendliche Product selbst, lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln, die sicher für alle Werthe $|u| < G$ convergirt. Fügt man beiderseits das Product der endlichen Anzahl von Factoren hinzu, die zu den Nullstellen $|a_n| \leqq G$ gehören, so erhält man

$$\prod_{(n)}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\} = e^{\sum\limits_{\lambda=r}^{\infty}\frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}}\cdot\prod_{n=1}^{q-1}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\}, \tag{3.}$$

wo das unendliche Product links sich über alle Nullstellen a_n erstreckt. Die Entwickelbarkeit des Ausdrucks auf der rechten Seite in eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende, für $|u| < G$ convergirende Reihe bleibt bestehen. Da endlich G beliebig gross angenommen werden kann, so hat das Product

$$\prod_{(n)}\left\{\left(1-\frac{u}{a_n}\right)e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}\right\}$$

für alle endlichen Werthe von u den Charakter einer ganzen Function.

Der bis jetzt ausgeschlossen gewesene Fall, dass $u = 0$ zu den Nullstellen gehört, erledigt sich einfach dadurch, dass wenn $u = 0$ eine Nullstelle p^{ter} Ordnung ist, dem vorstehenden unendlichen Product noch u^p als Factor hinzuzufügen ist.

Wenn man hiernach unter einer bestimmten Annahme über die Stellen a_n eine Function bilden kann, die diese Stellen zu Nullstellen hat, so bleibt doch noch die Aufgabe zu lösen, eine Function, die diese Eigenschaft besitzt und ausserdem überall den Charakter einer ganzen Function hat, aber anderweitig bereits definirt ist, mittels eines unendlichen Productes darzustellen. Die gegebene Function sei mit $f(u)$, das vorher erklärte unendliche Product mit $\varphi(u)$ bezeichnet. Wir betrachten den Quotienten

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \psi(u).$$

Da Zähler und Nenner im Endlichen nirgends unendlich gross werden, so kann $\psi(u)$ jedenfalls nur dann Null werden, wenn der Zähler verschwindet, und nur unendlich gross, wenn der Nenner Null wird. Ist nun a irgend eine Nullstelle von $f(u)$, l die zugehörige Ordnungszahl, gilt also in der Nähe von a für die Function die Entwickelung

$$f(u) = (u-a)^l(c_0 + \cdots) = \left(1-\frac{u}{a}\right)^l(c_0' + \cdots),$$

wo c_0' von Null verschieden ist, so denke man sich a l-mal in die Reihe der Nullstellen aufgenommen, sodass auch $\varphi(u)$ den Factor $\left(1-\frac{u}{a}\right)$ l-mal enthält. Man kann sagen, dass sich auf diese Weise jede Nullstelle des Zählers gegen eine Nullstelle des Nenners hebt, und umgekehrt. Die Function $\psi(u)$ wird also für endliche Werthe ihres Arguments weder Null noch unendlich gross. Vermöge der letzteren Eigenschaft lässt sich $\psi(u)$ als beständig convergente Potenzreihe darstellen, während die erste Eigenschaft gestattet, diese Reihe noch in eine besondere Form zu setzen. Es wird nämlich $\frac{1}{\psi(u)}$ nicht unendlich gross, und dasselbe gilt für $\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}$, sodass auch dieser Quotient als beständig convergirende Reihe, die mit $\frac{dg(u)}{du}$ bezeichnet werden möge, dargestellt werden kann. Aus

$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{dg(u)}{du}$$

folgt dann

$$\psi(u) = e^{g(u)}.$$

Eine multiplicative Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, weil $g(u)$ nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Hiernach wird

$$f(u) = \varphi(u)\, e^{g(u)}.$$

Gehört auch der Werth $u = 0$ zu den Nullstellen von $f(u)$, und zwar mit der Ordnungszahl p, so hat man $\varphi(u)$ durch $u^p\varphi(u)$ zu ersetzen, und erhält dann

$$f(u) = u^p\, \varphi(u)\, e^{g(u)}.$$

Hiernach lässt sich schliesslich folgender Satz aussprechen: Es sei $f(u)$ eine Function, die im Endlichen überall den Character einer ganzen Function hat;

sie verschwinde für unendlich viele Stellen a_n, von denen aber in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl liegt und die ausserdem die Eigenschaft haben, dass bei passender Annahme einer positiven ganzen Zahl r die Reihe $\sum\limits_{(n)} \frac{1}{a_n^\lambda}$ für $\lambda \geqq r$ absolut convergirt. Dann kann

$$(4.)\qquad f(u) = e^{g(u)} u^p \prod_{(n)} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)} \right\}$$

gesetzt werden.

Wir bezeichnen eine Function der Form

$$\left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)},$$

die nur eine einzige Nullstelle a_n hat, als eine Primfunction. Die Gleichung (4.) liefert also die Darstellung von $f(u)$ als Product von Primfunctionen.

Wir brauchen für die folgenden Untersuchungen noch den Ausdruck für eine Ableitung beliebiger Ordnung des Logarithmus des unendlichen Productes $\varphi(u)$. Für die Annahme $|u| < G$, die zunächst festgehalten werden möge, war $\varphi(u)$ durch die Gleichung (3.)

$$\varphi(u) = e^{\sum\limits_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}} \prod_{n=1}^{q-1} \left\{ \left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)} \right\}$$

definirt. Aus ihr folgt

$$(5.)\qquad \frac{d^m \log \varphi(u)}{du^m} = \sum_{n=1}^{q-1} \left\{ \frac{d^m \log\left(1 - \frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} \right\} + \frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda}.$$

Die Differentiation der Potenzreihe darf gliedweise ausgeführt werden, d. h. man kann setzen

$$\frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = \sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-m+1) b_\lambda u^{\lambda-m},$$

oder wenn für b_λ sein Werth (S. 107) eingeführt wird,

$$\frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda}.$$

Die absoluten Beträge der Glieder der abgeleiteten Reihe bilden ebenfalls eine convergente Reihe, denn diese würde aus

$$\sum_{\lambda=r}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} \frac{U^\lambda}{\lambda A_n^\lambda}$$

durch m-malige Differentiation hervorgehen. Die abgeleitete Reihe convergirt demnach auch unbedingt, und man kann im Besonderen

$$(6.)\qquad \frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = -\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)\frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda}$$

setzen.

Nun war andererseits (S. 107)

$$(7.)\qquad \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda} = \sum_{n=q}^{\infty} \left\{\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)\right\},$$

mithin ist auch die m^{te} Ableitung der linken Seite gleich der m^{ten} Ableitung der rechten. Wir betrachten statt dieser das Ergebniss der gliedweisen Differentiation. Aus

$$\log\left(1-\frac{u}{a_n}\right) + g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right) = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{u^\lambda}{a_n^\lambda}$$

folgt

$$\frac{d^m \log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} = -\sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)\frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda},$$

woraus sich durch Summation

$$\sum_{n=q}^{\infty} \left\{\frac{d^m \log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m}\right\} = -\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{\lambda=r}^{\infty} (\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)\frac{u^{\lambda-m}}{a_n^\lambda}$$

ergiebt. Nach der Formel (6.) ist aber die rechte Seite gleich

$$\frac{d^m}{du^m} \sum_{\lambda=r}^{\infty} \frac{b_\lambda u^\lambda}{\lambda};$$

mit anderen Worten, die Differentiation der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (7.) kann gliedweise ausgeführt werden. Setzt man das Resultat dieser Differentiation in (5.) ein, so erhält man

$$(8.)\qquad \frac{d^m \log \varphi(u)}{du^m} = \sum_{(n)} \left\{\frac{d^m \log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m}\right\},$$

wo jetzt die Summation wieder über sämmtliche Nullstellen a_n zu erstrecken ist; d. h. unter den gemachten Voraussetzungen ist die Regel für die Differentiation des Logarithmus des unendlichen Productes dieselbe wie für ein endliches Product.

Man kann noch schreiben

$$\frac{d \log\left(1-\frac{u}{a_n}\right)}{du} = \frac{1}{u-a_n} = \frac{d \log (u-a_n)}{du},$$

also

$$\frac{d^m \log \varphi(u)}{du^m} = \sum_{(n)} \left\{ \frac{d^m \log (u-a_n)}{du^m} + \frac{d^m g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)}{du^m} \right\}, \tag{9.}$$

und wie vorher gilt diese zunächst nur für $|u| < G$ bewiesene Formel für alle endlichen Werthe des Argumentes.

Zur Erläuterung des Vorstehenden und weil das Resultat später gebraucht werden wird, möge die Sinusfunction durch ein unendliches Product dargestellt werden. Die Function

$$\sin u\pi$$

verschwindet, und zwar mit der Ordnungszahl 1, für alle positiven und negativen ganzzahligen Argumentwerthe $u = \nu$, die Null eingeschlossen. Nun convergirt die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\nu^2}$$

unbedingt, während

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\nu}$$

noch nicht oder wenigstens nur bedingt convergent ist. Man kann demnach $r = 2$ annehmen, wobei sich die ganze Function $g_{r-1}\left(\frac{u}{a_n}\right)$ auf ihr Anfangsglied $\frac{u}{a_n}$ reducirt. Hiernach darf

$$\sin u\pi = e^{g(u)}\, u \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{\nu}\right) e^{\frac{u}{\nu}}\right\}$$

gesetzt werden. Zur Bestimmung von $g(u)$ bilde man

$$\frac{d \log \sin u\pi}{du} \equiv \pi \operatorname{ctg} u\pi = g'(u) + \frac{1}{u} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{d \log (u-\nu)}{du} + \frac{1}{\nu}\right),$$

$$\frac{d^2 \log \sin u\pi}{du^2} \equiv \frac{-\pi^2}{\sin^2 u\pi} = g''(u) - \frac{1}{u^2} - \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(u-\nu)^2},$$

also

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi} = -g''(u) + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-\nu)^2}.$$

Wird hierin $u+1$ für u gesetzt, so geht die Summe über in

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-(\nu-1))^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-\nu)^2},$$

da $\nu-1$ ebenso wie ν alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; d. h. die Summe ist periodisch mit der Periode 1, und daher auch mit der Periode m, wenn dieses irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da die linke Seite der abgeleiteten Gleichung dieselbe Periode hat, so muss auch

$$g''(u+m) = g''(u)$$

sein. Auf Grund dieser Eigenschaft kann man die weitere Untersuchung von $g''(u)$ auf solche Werthe des Arguments beschränken, deren reeller Theil zwischen 0 und 1 liegt.

In der aus

$$g''(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-\nu)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi}$$

folgenden Ungleichung

$$(10.) \qquad |g''(u)| < \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u-\nu|^2} + \frac{\pi^2}{|\sin u\pi|^2}$$

werde

$$u = \alpha + \beta i,$$

und demnach

$$|u-\nu|^2 = (\alpha-\nu)^2 + \beta^2$$

gesetzt. Die Summe wird dann

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u-\nu|^2} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-\nu)^2+\beta^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+\nu)^2+\beta^2}.$$

Wegen

$$0 \leqq \alpha < 1$$

ist für jeden Werth von ν

$$\nu - \alpha > \nu - 1, \quad \nu + \alpha \geqq \nu,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-\alpha)^2+\beta^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)^2+\beta^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+\alpha)^2+\beta^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+\beta^2},$$

und in Folge dessen

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|u-\nu|^2}<\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2}<\frac{1}{\beta^2}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2},$$

mithin schliesslich

$$(11.)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|u-\nu|^2}<2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2}.$$

Ferner ist

$$\sin u\pi=\sin(\alpha+\beta i)\pi=\frac{1}{2}\Big(\big(e^{\beta\pi}+e^{-\beta\pi}\big)\sin\alpha\pi+i\big(e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}\big)\cos\alpha\pi\Big),$$

$$\begin{aligned}4|\sin u\pi|^2&=\big(e^{\beta\pi}+e^{-\beta\pi}\big)^2\sin^2\alpha\pi+\big(e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}\big)^2\cos^2\alpha\pi\\&=e^{2\beta\pi}+e^{-2\beta\pi}-2\cos 2\alpha\pi\\&\geqq\big(e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}\big)^2,\end{aligned}$$

also

$$(12.)\qquad \frac{\pi^2}{|\sin u\pi|^2}\leqq\left(\frac{2\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}\right)^2.$$

Aus (11.) und (12.) folgt in Verbindung mit (10.)

$$(13.)\qquad |g''(u)|<2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+\beta^2}+\left(\frac{2\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}\right)^2,$$

d. h. der absolute Werth der beständig convergenten Potenzreihe bleibt für jedes Argument unterhalb einer angebbaren Grenze.

Nun gilt der Satz, dass eine beständig convergente Potenzreihe $f(u)$, deren Werth dem absoluten Betrage nach auch für beliebig wachsendes Argument eine endliche positive Grösse G nicht überschreitet, sich auf eine Constante reduciren muss. Es sei nämlich

$$f(u)=c_0+c_1u+c_2u^2+\cdots,$$

so gilt die Ungleichung

$$|c_n|<Mr^{-n},$$

wo M die obere Grenze der absoluten Beträge aller Werthe bezeichnet, die die Function auf einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise vom Radius r in der Ebene der complexen Variablen u annehmen kann. Nach der Voraussetzung ist demnach

$$|c_n|<Gr^{-n}.$$

Lässt man nun r beliebig wachsen, so wird

$$c_n=0$$

für jeden ganzzahligen Werth von n, Null ausgeschlossen, d. h. die Potenzreihe reducirt sich auf ihr Anfangsglied c_0.

Im vorliegenden Falle muss aber wegen der für $g''(u)$ oder c_0 geltenden Ungleichung (13.) auch c_0 verschwinden, wie man erkennt, wenn man β in's Unendliche wachsen lässt. Aus

$$g''(u) = 0$$

folgt dann

$$g'(u) = c',$$

mithin nach S. 112

$$\pi \operatorname{ctg} u\pi = c' + \frac{1}{u} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{u-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) = c' + \frac{1}{u} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2-\nu^2}.$$

Die linke Seite und, abgesehen von c', die rechte sind ungerade Functionen, demnach muss

$$c' = 0,$$

und $g(u)$, also auch $e^{g(u)}$, eine Constante sein. Setzt man C für $e^{g(u)}$, so ergiebt sich

$$\sin u\pi = Cu \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{\nu}\right) e^{\frac{u}{\nu}}\right\}.$$

Zur Bestimmung von C entwickele man links und rechts in Potenzreihen. Da die linke Seite mit $u\pi$, die rechte mit Cu anfängt, so wird

$$C = \pi,$$

$$\sin u\pi = u\pi \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{\nu}\right) e^{\frac{u}{\nu}}\right\}, \tag{14.}$$

oder wenn in dem unendlichen Product je zwei Factoren, die zu entgegengesetzt gleichen Werthen von ν gehören, zusammengefasst werden:

$$\sin u\pi = u\pi \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1-\frac{u^2}{\nu^2}\right). \tag{15.}$$

Um nun auch die σ-Function als unendliches Product darzustellen, hat man sich zu erinnern, dass die Nullstellen dieser Function mit den Unendlichkeitsstellen w der $\wp$-Function übereinstimmen, und dass $\sigma' w$ nicht gleichzeitig mit σw gleich Null wird, dass also die Ordnungszahl des Verschwindens für jede solche Stelle gleich Eins ist (S. 68). Man hat demnach

$$a_n = 2m'\omega + 2n'\omega'$$

zu setzen, d. h. jedem Zahlenpaar (m', n') eine Zahl n zuzuordnen, und das unendliche Product über alle Nullstellen a_n, jede einmal gesetzt, zu erstrecken. Dies kommt darauf hinaus, bei der Multiplication jede der beiden Zahlen m' und n' alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe, Null eingeschlossen, durchlaufen zu lassen. Für m' und n' möge jedoch, da die Bezeichnung a_n nicht mehr gebraucht wird, m und n geschrieben werden.

Es ist vor allem zu untersuchen, ob eine Zahl r der Art existirt, dass

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^r} \qquad \left(\begin{array}{c} w = 2m\omega + 2n\omega'; \\ m, n = -\infty, \cdots +\infty, \\ \text{ausgenommen } m = n = 0 \end{array}\right)$$

absolut convergirt. Setzt man

$$2\omega = a + bi, \qquad 2\omega' = a' + b'i$$

und

$$W = |w| = ((ma + na')^2 + (mb + nb')^2)^{\frac{1}{2}},$$

so lässt sich zeigen, dass

$$\sum_W{}' \frac{1}{W^3}$$

convergent ist. Man kann nämlich nach einem bekannten Satze über quadratische Formen auf unendlich viele Weisen zwei homogene lineare Functionen M und N von m und n so annehmen, dass

$$(ma + na')^2 + (mb + nb')^2 = gM^2 + hN^2$$

wird, wo g und h reelle positive Zahlen bezeichnen, und dann die Bestimmung von M und N, g und h durch Hinzunahme der Bedingung

$$m^2 + n^2 = M^2 + N^2$$

vervollständigen. Ist $g \leqq h$, so wird

$$W^2 \geqq g(M^2 + N^2)$$

und weiter in Folge der zweiten Bedingung

$$W^2 \geqq g(m^2 + n^2).$$

Die angegebene Reihe wird daher sicher dann convergent sein, wenn

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

convergirt. Setzt man zuerst $n = 0$, dann $m = 0$ und bezeichnet mit μ und ν

positive ganze Zahlen, so sind die beiden convergenten Reihen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^3} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3},$$

und zwar jede mit dem Factor 2, Bestandtheile der letzteren Reihe. Zu ihnen tritt noch

$$\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots\infty)$$

versehen mit dem Factor 4. Diese Reihe convergirt aber ebenfalls; denn da

$$\mu^2+\nu^2>\mu\nu,$$

so ist

$$\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^{\frac{3}{2}}}<\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{(\mu\nu)^{\frac{3}{2}}}<\sum_{\mu}\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\cdot\sum_{\nu}\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}},$$

und eine Reihe der Form

$$\sum_{\mu}\frac{1}{\mu^{1+\varrho}}$$

ist für $\varrho>0$ stets convergent. Man darf also, wie behauptet, $r=3$ annehmen, während für $r=2$ die Schlüsse nicht mehr gelten.

Der Formel (1.) entsprechend werde nun

$$g_{r-1}\left(\frac{u}{w}\right)=\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2},$$

$$\sigma u = e^{g(u)}\,u\prod_w{}'\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\}$$

gesetzt, wo das unendliche Product über alle Nullstellen w bis auf $w=0$, d. h. wegen

$$w=2m\omega+2n\omega'$$

über alle positiven und negativen ganzzahligen Werthepaare (m,n), ausgenommen $m=n=0$, zu erstrecken ist (S. 116).

Zur Bestimmung von $g(u)$ möge die dritte Ableitung von $\log\sigma u$ gebildet werden, sodass $g_{r-1}\left(\frac{u}{w}\right)$ wegfällt. Es entsteht

$$(16.)\qquad \frac{d^3\log\sigma u}{du^3}=g'''(u)+\frac{2}{u^3}+\sum_w{}'\frac{2}{(u-w)^3}$$

oder

$$(17.)\qquad -\wp' u = g'''(u) + \sum_w \frac{2}{(u-w)^3},$$

wo jetzt die Summation auf sämmtliche Stellen w (Null eingeschlossen) auszudehnen ist. Vermehrt man in dieser Gleichung u um 2ω, so geht die Grösse

$$u - w = u - (2m\omega + 2n\omega')$$

über in $u-(2(m-1)\omega+2n\omega')$. Da $m-1$ dieselben Werthe wie m durchläuft, so bleibt die Summe $\sum_w \frac{1}{(u-w)^3}$ ungeändert. Dasselbe gilt für eine Vermehrung von u um $2\omega'$. Da ferner $\wp' u$ die Perioden 2ω und $2\omega'$ hat, so muss auch

$$g'''(u) = -\wp' u - \sum_w \frac{2}{(u-w)^3}$$

eine doppelt periodische Function oder aber eine Constante sein.

Der erste Fall kann nicht eintreten, weil, wie leicht zu sehen, eine beständig convergente Potenzreihe nicht doppelt periodisch sein kann. Es ist vorhin bewiesen worden, dass der Werth einer solchen Reihe $f(u)$, wenn sie sich nicht von vornherein auf ihr Anfangsglied reduciren soll, mit unbegrenzt wachsendem u selbst jede angebbare Grenze übersteigen muss. Ein Werth u, für den die Ungleichung

$$|f(u)| > G$$

gilt, werde auf die Form

$$u = 2a\omega + 2b\omega'$$

gebracht, von a und b die grössten darin enthaltenen ganzen Zahlen m und n abgesondert und die Reste mit μ und ν bezeichnet, also

$$u = 2m\omega + 2n\omega' + 2\mu\omega + 2\nu\omega'$$

gesetzt, so ist der Periodicität zufolge

$$f(u) = f(2\mu\omega + 2\nu\omega').$$

Lässt man μ und ν alle Werthe von Null bis Eins durchlaufen, so kann, weil die Reihe $f(u)$ für alle endlichen Argumente convergirt, eine Zahl g so angegeben werden, dass

$$|f(2\mu\omega + 2\nu\omega')| < g$$

ist. Wählt man nun $G > g$, bestimmt einen Werth u der ersten Ungleichung gemäss und denkt sich dann für diesen die beiden Zahlen μ und ν ermittelt, so widerspricht die zweite Ungleichung der ersten. Eine doppelt periodische Function ist also niemals durch eine beständig convergente Potenzreihe darstellbar.

Für den vorliegenden Fall muss demnach $g'''(u)$ eine Constante werden. Vertauscht man, um ihren Werth zu ermitteln, in (17.) u mit $-u$, so geht der Summenausdruck in

$$\sum_w \frac{1}{(-u-w)^3} = -\sum_w \frac{1}{(u+w)^3}$$

über, und wenn noch w durch $-w$ ersetzt wird, in

$$-\sum_w \frac{1}{(u-w)^3},$$

weil $-m$ und $-n$ dieselben Werthe durchlaufen wie m und n; d. h. die Summe ist eine ungerade Function von u. Da dasselbe für $\wp' u$ gilt, so muss

$$g'''(u) = 0$$

sein.

Bei der Differentiation des Logarithmus der σ-Function gehen der Gleichung (16.) die folgenden voran:

$$\text{(18.)} \qquad \frac{\sigma'}{\sigma} u = \quad g'(u) + \frac{1}{u} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

$$\text{(19.)} \qquad \wp u = -g''(u) + \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Die Constante, der $g''(u)$ nunmehr gleich sein muss, kann aus (19.) durch die Annahme $u = 0$ bestimmt werden. Denn hierfür verschwindet die Summe rechts, und ebenso die Grösse $\wp u - \frac{1}{u^2}$, weil die bei kleinen Werthen von u geltende Reihe für $\wp u$ mit $\frac{1}{u^2}$ anfängt und kein constantes Glied enthält. Es ist daher

$$g''(u) = 0,$$

$$\text{(20.)} \qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Genau auf dieselbe Weise folgt aus Gleichung (18.), dass auch

$$g'(u) = 0,$$

also

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) \tag{21.}$$

sein muss.

Endlich ergiebt die Bestimmung der in

$$\sigma u = Cu \prod_w{}' \left\{\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\}$$

noch auftretenden Constanten den Werth

$$C = 1,$$

weil die Entwickelung des unendlichen Productes mit Eins anfängt und

$$\lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1$$

ist.

Die gesuchte Darstellung der σ-Function wird also durch die Formel

$$\sigma u = u \prod_w{}' \left\{\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} \tag{22.}$$

geliefert.

Setzt man für w seinen Werth ein und nimmt unter derselben Voraussetzung die Gleichungen (21.) und (20.) hinzu, so erhält man folgende, für alle endlichen Argumente gültigen Ausdrücke von σu, $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ und $\wp u$:

$$\sigma u = u \prod_{m,n}{}' \left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega+2n\omega'}\right) e^{\frac{u}{2m\omega+2n\omega'} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2m\omega+2n\omega'}\right)^2}\right\}, \tag{23.}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' \left\{\frac{1}{u-2m\omega-2n\omega'} + \frac{1}{2m\omega+2n\omega'} + \frac{u}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right\}, \tag{24.}$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n}{}' \left\{\frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right\}. \tag{25.}$$

Hierin bedeutet, wie immer, der Strich an dem Product- und dem Summenzeichen, dass das Werthepaar $m = n = 0$ ausgeschlossen werden soll, während im Übrigen m und n alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

In Verbindung mit der früher aufgestellten Reihenentwickelung für die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ lassen sich aus der Gleichung (24.) Ausdrücke für die Invarianten g_2 und g_3 durch die Perioden 2ω und $2\omega'$ ableiten.

Wir behalten die Gleichung in der abgekürzten Form (21.) bei und entwickeln $\frac{1}{u-w}$ nach steigenden Potenzen von u, setzen also für $|u|<|w|$

$$\frac{1}{u-w} = -\frac{1}{w} - \frac{u}{w^2} - \frac{u^2}{w^3} - \cdots$$

oder

$$\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^{\nu+2}}{w^{\nu+3}}.$$

Bei der Summation über alle Werthe von

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

fallen sämmtliche Ausdrücke der Form

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^{2\lambda+1}} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

weg, weil entgegengesetzt gleichen Werthen des Zahlenpaares (m, n) entgegengesetzt gleiche Werthe von w, und damit von $w^{2\lambda+1}$ entsprechen. Die Entwickelung von $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ erhält daher die Form

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} - c_2 u^3 - c_3 u^5 - \cdots,$$

und zwar ist im Besonderen

$$c_2 = \sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \qquad c_3 = \sum_w{}' \frac{1}{w^6}.$$

Nun war (S. 33)

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60}u^3 - \frac{g_3}{140}u^5 + \cdots,$$

mithin ergeben sich für g_2 und g_3 die Formeln

$$(26.) \qquad g_2 = 60\sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140\sum_w{}' \frac{1}{w^6}.$$

Dreizehntes Kapitel.

Umwandlung des unendlichen Productes für die σ-Function.

Das unbedingt convergente unendliche Product auf S. 120, durch welches die σ-Function dargestellt wird, kann durch passende Anordnung der Factoren in ein solches von stärkerer Convergenz verwandelt werden.

Wir vereinigen zunächst alle Factoren, für die $n = 0$ ist, und ziehen zu ihnen auch den Factor u hinzu, so entsteht das Product

$$u \prod_m{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}} \right\}.$$

Sein Werth darf sicher dann gleich

$$\prod_m{}' e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}} \cdot u \prod_m{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega}} \right\}$$

gesetzt werden, wenn die beiden hierin mit einander multiplicirten unendlichen Producte einzeln convergent sind. Dies unterliegt aber keinem Zweifel, denn der erste Factor ist gleich

$$e^{\sum_m' \frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}} = e^{\frac{u^2}{4\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\sum_m' \frac{1}{m^2}} = e^{\frac{u^2}{4\omega^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}},$$

wo $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ eine endliche bestimmte Grösse ist, und der zweite lässt sich aus der Formel (14.) auf S. 115 dadurch herleiten, dass $\frac{u}{2\omega}$ an Stelle von u geschrieben wird, wobei sich

$$\text{(1.)} \qquad \sin\frac{u\pi}{2\omega} = \frac{u\pi}{2\omega} \prod_m{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{2m\omega}\right) e^{\frac{u}{2m\omega}} \right\}$$

ergiebt.

Der Productausdruck für den Sinus kann auch dazu benutzt werden, den Werth von $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ zu finden. Durch Differentiation von $\log\sin u\pi$ folgt nämlich

$$\pi\,\mathrm{ctg}\,u\pi = \frac{1}{u} + \sum_m{}'\left(\frac{1}{u-m}+\frac{1}{m}\right), \tag{2.}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi} = \frac{1}{u^2} + \sum_m{}'\frac{1}{(u-m)^2}. \tag{3.}$$

Entwickelt man nun den Sinus in eine Potenzreihe,

$$\sin u\pi = u\pi - \frac{u^3\pi^3}{6} + \cdots,$$

setzt also

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 u\pi} = \frac{1}{u^2 - \frac{u^4\pi^2}{3} + \cdots} = \frac{1}{u^2}\left(1+\frac{u^2\pi^2}{3}+\cdots\right) = \frac{1}{u^2} + \frac{\pi^2}{3} + \cdots,$$

führt diesen Ausdruck in die Gleichung (3.) ein und macht, nachdem man $\frac{1}{u^2}$ auf beiden Seiten gestrichen hat, $u = 0$, so erhält man

$$\sum_m{}'\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{3},$$

d. h.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demnach wird

$$u\prod_m{}'\left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega}\right)e^{\frac{u}{2m\omega}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{4m^2\omega^2}}\right\} = \frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\sin\frac{u\pi}{2\omega}. \tag{4.}$$

Um auch die Factoren des σ-Productes, für die $n \gtrless 0$ ist, mittels der Sinusfunction darzustellen, setzen wir in der Formel (1.) $u-2n\omega'$ statt u und erhalten

$$\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{(u-2n\omega')\pi}{2\omega} = (u-2n\omega')\prod_m{}'\left\{\left(1-\frac{u-2n\omega'}{2m\omega}\right)e^{\frac{u-2n\omega'}{2m\omega}}\right\},$$

woraus für $u = 0$

$$-\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega} = -2n\omega'\prod_m{}'\left\{\left(1+\frac{2n\omega'}{2m\omega}\right)e^{-\frac{2n\omega'}{2m\omega}}\right\}$$

hervorgeht. Die Division des ersten Ausdruckes durch den zweiten liefert

$$(5.)\qquad \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = \left(1-\frac{u}{2n\omega'}\right)\prod_m{}'\left\{\left(1-\frac{u}{2m\omega+2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{2m\omega}}\right\}.$$

Es erscheint also bei dieser Operation unter dem Productzeichen der Factor $\left(1-\frac{u}{w}\right)$, aber noch nicht mit demselben Exponentialfactor behaftet wie in dem Productausdruck für die σ-Function. Um nun $\frac{u}{w}$ statt $\frac{u}{2m\omega}$ in den Exponenten zu bringen, setze man in der durch Differentiation von $\log\sin\frac{u\pi}{2\omega}$ folgenden, der Gleichung (2.) entsprechenden Formel

$$(6.)\qquad \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega} = \frac{1}{u}+\sum_m{}'\left(\frac{1}{u-2m\omega}+\frac{1}{2m\omega}\right)$$

$u=-2n\omega'$, wodurch sich

$$\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega} = \frac{1}{2n\omega'}+\sum_m{}'\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{2m\omega}\right)$$

und weiter

$$e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = e^{\frac{u}{2n\omega'}}\prod_m{}' e^{\frac{u}{w}-\frac{u}{2m\omega}}$$

ergiebt. Vereinigt man dann diese Gleichung durch Multiplication mit (5.), so wird

$$(7.)\qquad \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = \left(1-\frac{u}{2n\omega'}\right)e^{\frac{u}{2n\omega'}}\prod_m{}'\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}}\right\}$$

$$= \prod_m\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}}\right\}.$$

Es fehlt im Exponenten noch $\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}$. Nun folgt durch Differentiation der Gleichung (6.)

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{u\pi}{2\omega}} = \frac{1}{u^2}+\sum_m{}'\frac{1}{(u-2m\omega)^2}.$$

Wird auch hierin $u=-2n\omega'$ gesetzt, so erhält man

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = \frac{1}{(2n\omega')^2}+\sum_m{}'\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2} = \sum_m\frac{1}{w^2},$$

und hieraus in Verbindung mit (7.):

$$\prod_m \left\{\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} = \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}+\frac{\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}{2\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck über alle von Null verschiedenen Werthe von n und vereinigt das Product mit dem vorher berechneten, das aus der Annahme $n=0$ entstanden war, so gewinnt man für die σ-Function folgende Darstellung:

$$(8.)\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_n{}' \left\{\frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right)^2}\right\}.$$

Durch eine veränderte Anordnung der Operationen, die zu dieser Formel geführt haben, kann man sich davon überzeugen, dass alle Exponentialgrössen auf der rechten Seite, die u^2 enthalten, zusammengefasst werden dürfen. Man multiplicire beide Seiten der Gleichung (7.), die rechte, nachdem man sie in der Form

$$\prod_m \left\{\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} \cdot \prod_m e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

geschrieben hat, über die von Null verschiedenen Werthe von n, so ergiebt sich unter Voraussetzung der Convergenz des unendlichen Productes

$$\prod_n{}' \prod_m e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} = \prod_n{}' e^{\frac{1}{2}u^2\sum\limits_m \frac{1}{w^2}} = \prod_n{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right)^2}$$

die Formel

$$\prod_n{}' \prod_m \left\{\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} = \prod_n{}' \left\{\frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right\} \prod_n{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right)^2}$$

oder, nachdem wieder die zu $n=0$ gehörenden Primfactoren und der Factor u hinzugezogen sind,

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}} \cdot \prod_n' \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\},$$

d. h., wenn

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = g \tag{9.}$$

gesetzt wird,

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_n' \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} e^{\frac{u\pi}{2\omega}\operatorname{ctg}\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\}. \tag{10.}$$

Die Convergenz des Productes

$$\prod_n' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}}$$

wird nun allein durch die Existenz der Zahl g bedingt. Um sie zu prüfen, setze man

$$\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{n\omega'\pi i}{\omega}} - e^{-\frac{n\omega'\pi i}{\omega}}\right),$$

ferner bleibend

$$e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} = h, \tag{11.}$$

also

$$\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega} = \frac{1}{2i}(h^n - h^{-n}),$$

$$\sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = -\sum_n' \frac{4}{(h^n-h^{-n})^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(h^n-h^{-n})^2}$$

oder

$$\sum_n' \frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}} = -8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(1-h^{2n})^2} = -8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{-2n}}{(1-h^{-2n})^2}.$$

Aus elementaren Convergenzsätzen folgt, je nachdem man die Reihe in der ersten oder in der zweiten Form schreibt, dass für $|h|<1$ und $|h|>1$ Convergenz stattfindet. Gleich Eins aber kann der absolute Betrag von h nicht sein, weil das Verhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell ist. Die Grösse g hat also unter allen Umständen einen endlichen bestimmten Werth.

Übrigens darf man, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen,

$$|h|<1$$

annehmen. Setzt man nämlich

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha+\beta i,$$

also

$$\beta = \Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right),$$

so erkennt man aus

$$h = e^{(\alpha+\beta i)\pi i} = e^{-\beta\pi}(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi),$$

d. h.

$$|h| = e^{-\beta\pi},$$

dass diese Bedingung dann erfüllt sein würde, wenn

$$\beta>0$$

wäre. Dies kann aber nöthigenfalls durch Umkehrung des Vorzeichens von ω' erreicht werden, die für die Formeln ohne Bedeutung ist, weil in dem Ausdruck von w,

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

n alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe zu durchlaufen hat.

Die Formel (10.) kann in mannigfacher Weise weiter umgestaltet werden. Trennt man das unendliche Product in zwei, die sich auf $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $n = -1, -2, -3, \ldots$ beziehen, und multiplicirt diese gliedweise, so erhält man

$$(12.)\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\}$$

oder auch, nach Anwendung einer elementaren Relation unter Sinusfunctionen,

$$(13.)\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{u\pi}{2\omega}}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right).$$

Andererseits kann man, indem man überall statt des Sinus die Exponentialfunction einführt, setzen:

$$\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi = \frac{1}{2i}\left(e^{\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi i} - e^{-\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi i}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(h^n e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - h^{-n} e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}\right)$$
$$= -\frac{h^{-n} e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{2i}\left(1-h^{2n} e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right).$$

Wird hierin das Vorzeichen von u umgekehrt, ferner $u = 0$ angenommen, und werden die entstehenden Ausdrücke in (12.) eingeführt, so folgt

$$(14.)\qquad \mathfrak{S}u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \frac{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-h^{2n} e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right)\left(1-h^{2n} e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}\right)}{(1-h^{2n})^2},$$

eine Formel, die auch in der Gestalt

$$(15.)\qquad \mathfrak{S}u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-2h^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega}+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}$$

geschrieben werden kann. Für

$$(16.)\qquad e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} = z$$

heisst die Gleichung (14.):

$$(17.)\qquad \mathfrak{S}u = \frac{2\omega}{\pi} e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \frac{z-z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2})}{(1-h^{2n})^2}.$$

Durch Differentiation des Logarithmus der veränderten Ausdrücke für die Function $\mathfrak{S}u$ lassen sich auch für $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u$ und $\wp u$ neue Darstellungen finden. Wir benutzen für diesen Zweck die Formeln (12.) und (14.); denn Gleichung (13.) ist von (12.), und (15.) von (14.) nur unwesentlich verschieden. Aus (12.) folgt

$$(18.)\quad \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\cdot 2gu + \frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{ctg}\frac{u\pi}{2\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\pi - \operatorname{ctg}\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\pi\right)\right\},$$

und aus (14.)

$$(19.)\quad \frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{gu\pi^2}{2\omega^2} + \frac{\pi i}{2\omega}\,\frac{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} + e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}} - \frac{\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n}e^{\frac{u\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{\frac{u\pi i}{\omega}}} - \frac{h^{2n}e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}}\right).$$

Setzt man in der letzten Gleichung $u = \omega$, so verschwindet sowohl die Differenz unter dem Summenzeichen wie auch der der Summe vorangehende Quotient, und es entsteht ein einfacher Zusammenhang zwischen g und der schon früher (S. 70) eingeführten Grösse $\eta = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega$, nämlich

$$\eta = \frac{g\pi^2}{2\omega}$$

oder

$$(20.)\quad g = \frac{2\omega\eta}{\pi^2}.$$

In Verbindung mit der Definitionsgleichung (9.) für g liefert die Relation (20.) eine Darstellung von η durch die Perioden 2ω und $2\omega'$:

$$(21.)\quad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{n\omega'\pi}{\omega}}\right),$$

oder, nach Einführung von h:

$$(22.)\quad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left(\frac{1}{6} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(h^n - h^{-n})^2}\right).$$

Für den, in den obigen Formeln für σu übereinstimmend auftretenden Exponentialfactor ergiebt sich die Gleichung

$$e^{g\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}.$$

Ein besonders wichtiges Resultat aber folgt aus der Gleichung (19.) durch die Annahme $u = \omega'$. Setzt man wie früher $\eta' = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega'$, so wird

$$\eta' = 2g\omega'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \frac{\pi i}{2\omega}\,\frac{e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} + 1}{e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} - 1} - \frac{\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n}e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}} - \frac{h^{2n}e^{-\frac{\omega'\pi i}{\omega}}}{1-h^{2n}e^{-\frac{\omega'\pi i}{\omega}}}\right),$$

und bei Einführung von $e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}} = h$ und Berücksichtigung der Beziehung zwischen g und η:

$$\eta' = \frac{\eta\omega'}{\omega} + \frac{\pi i}{2\omega}\,\frac{h+1}{h-1} - \frac{\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n+1}}{1-h^{2n+1}} - \frac{h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\right).$$

Die Summe der n ersten Glieder der unendlichen Reihe, von dem Factor $-\frac{\pi i}{\omega}$ abgesehen, heisse S_n, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{h^{2n+1}}{1-h^{2n+1}} - \frac{h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\right) = \lim_{n=\infty} S_n$$

ist. Man hat

$$S_n = -\frac{h}{1-h} + \frac{h^{2n+1}}{1-h^{2n+1}}.$$

Ist nun $|h| < 1$, so nähert sich mit unbegrenzt wachsendem n der zweite Theil der Grenze Null, und es wird

$$\eta'\omega = \eta\omega' + \frac{\pi i}{2}\,\frac{h+1}{h-1} + \pi i\,\frac{h}{1-h}$$

oder

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}.$$

Ist aber $|h| > 1$, so nähert sich der zweite Theil, nämlich

$$\frac{1}{h^{-(2n+1)} - 1},$$

dem Werthe -1, und es wird

$$\eta\omega' - \omega\eta' = -\frac{\pi i}{2}.$$

Damit ist der Werth der auf S. 73 mit $2k+1$ bezeichneten ungeraden Zahl gleich ± 1 gefunden. Zusammenfassend kann man sagen, dass in der Relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \pm\frac{\pi i}{2} \tag{23.}$$

das obere oder das untere Zeichen entsprechend der Ungleichung

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) \gtrless 0$$

gilt.

Die Gleichung (23.), die ihrem Inhalt nach, aber nicht in dieser Form, von Legendre aufgestellt worden ist, wird als Legendresche Relation bezeichnet.

Differentiirt man die beiden Gleichungen (18.) und (19.), nachdem man für g seinen Werth aus (20.) eingeführt hat, so erhält man folgende Ausdrücke für die $\wp$-Function:

$$(24.)\quad \wp u = -\frac{\eta}{\omega} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{u\pi}{2\omega}} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\pi} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi} \right\}$$

und

$$(25.)\quad \wp u = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{1}{(z-z^{-1})^2} - \frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{h^{2n}z^2}{(1-h^{2n}z^2)^2} + \frac{h^{2n}z^{-2}}{(1-h^{2n}z^{-2})^2}\right\}.$$

Vierzehntes Kapitel.

Darstellung elliptischer Functionen mittels der σ-Function.

Eine besonders hervorstechende Eigenschaft der $\wp$-Function und mehrerer anderer Ausdrücke, die im Verlaufe der Untersuchung aufgetreten sind, nämlich der σ-Quotienten, ist ihre doppelte Periodicität. Sie giebt Veranlassung, sich mit doppelt periodischen Functionen überhaupt zu beschäftigen und namentlich die Frage nach deren Darstellbarkeit durch bekannte Functionen aufzuwerfen. Für die $\wp$-Function waren die Perioden mit den Unendlichkeitsstellen identisch, und es ist ferner (S. 62) bewiesen worden, dass die Entwickelung von $\wp u$ in der Nähe einer solchen Stelle die Form

$$\wp u = \frac{1}{(u-w)^2} + \mathfrak{P}(u-w)$$

hat, also nur die eine negative Potenz $(u-w)^{-2}$ enthält. Wir sagen von einer Function, dass sie für eine bestimmte Stelle den Charakter einer rationalen Function habe, wenn sie sich in der Umgebung dieser Stelle in eine Potenzreihe entwickeln lässt, die nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen aufweist. Im Besonderen würde sie den Charakter einer ganzen Function haben, wenn negative Potenzen garnicht vorkämen. Dies vorausgeschickt, soll unter einer elliptischen Function eine solche verstanden werden, die doppelt periodisch ist und für alle endlichen Werthe des Arguments den Charakter einer rationalen Function hat. Dann sind $\wp u$ und die σ-Quotienten spezielle elliptische Functionen.

Die doppelte Periodicität einer Function $\varphi(u)$ bedingt die Existenz eines Paares constanter Grössen w, w' der Art, dass

$$\begin{aligned} \varphi(u+w) &= \varphi(u), \\ \varphi(u+w') &= \varphi(u) \end{aligned}$$

ist und dass sich alle Grössen W, für die eine Gleichung

$$\varphi(u+W) = \varphi(u)$$

besteht, in der Form

$$W = mw + m'w'$$

darstellen lassen, wo m und m' positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. In der Theorie der $\wp$-Function ist bewiesen worden, dass das Verhältniss der beiden Bestandtheile w, w' eines primitiven Periodenpaares nicht reell ist; doch war der Beweis an die besonderen Eigenschaften der $\wp$-Function gebunden. Aber man kann allgemein für irgend eine doppelt periodische Function zeigen, dass das Periodenverhältniss $\frac{w'}{w}$ nicht reell sein kann. Es sei

$$\frac{w'}{w} = r$$

gesetzt, also (w, rw) als primitives Periodenpaar angenommen; durch passende Wahl der Bezeichnungen kann erreicht werden, dass die Grösse r, wenn reell, zugleich positiv und kleiner als Eins ist. Setzt man

$$1 = qr + r',$$

wo qr das grösste unterhalb Eins liegende Vielfache von r, und demnach

$$r' < r$$

ist, so muss auch

$$r'w = w - qw'$$

eine Periode der Function $\varphi(u)$ sein. Der Ansatz

$$r = q'r' + r'' \qquad (r'' < r')$$

führt in gleicher Weise auf die Periode $r''w$, und da die Reste $r', r'', \ldots$ beständig und unbegrenzt abnehmen, so müsste es eine unendlich kleine Periode geben, was mit dem Begriff der Periode, als einer Constanten, nicht vereinbar ist. Ein Widerspruch würde nur dann nicht vorliegen, wenn in der Reihe der Reste

$$r', r'', r''', \ldots$$

nach einer endlichen Anzahl von Gliedern der Werth Null vorkäme, d. h. wenn r rational wäre. Was lässt sich dann über die Perioden aussagen?

Setzt man

$$r'w = w'',$$

so kann man wegen

$$w = qw' + w''$$

jede Periode W, die ursprünglich als homogene lineare ganzzahlige Function von w und w' angenommen war, als ebensolche Function von w' und w'' darstellen; bei Fortsetzung der Operationen wird das primitive Periodenpaar (w', w'') weiter durch (w'', w''') ersetzt, wo

$$w''' = r''w$$

ist, u. s. f. Ist nun

$$r^{(n-2)} = q^{(n-1)} r^{(n-1)} + r^{(n)},$$

und wäre

$$r^{(n)} = 0,.$$

also

$$w^{(n-1)} = q^{(n-1)} w^{(n)},$$

so würden sich alle Perioden W, weil homogene lineare Functionen von $w^{(n-1)}$ und $w^{(n)}$ mit ganzzahligen Coefficienten, als Vielfache von $w^{(n)}$ allein darstellen lassen. D. h. die Function $\varphi(u)$ wäre, der Voraussetzung entgegen, nur einfach periodisch.

Hiernach muss für doppelt periodische Functionen das Verhältniss $\frac{w'}{w}$ als nicht relle Zahl vorausgesetzt werden.

Auf die Existenz unendlich kleiner Perioden würde man, wie Jacobi gezeigt hat, auch durch die Annahme geführt werden, dass eine Function einer Variablen mehr als zwei Perioden habe. Der Widerspruch tritt hier nicht ein, wenn, beispielsweise für drei primitive Perioden w, w', w'', diese Grössen durch eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten

$$mw + m'w' + m''w'' = 0$$

verbunden wären. Dann würde man aber, ähnlich wie bei der eben durchgeführten Untersuchung, durch Einführung neuer primitiver Periodensysteme, unter Verkleinerung der Zahlcoefficienten m, m', m'', zu dem Ergebniss kommen, dass eine Periode durch zwei andere in der oben genannten Weise darstellbar, die Function also nur doppelt periodisch wäre.

Die Beschränkung auf doppelt periodische Functionen einer Variablen ist hiernach gerechtfertigt.

Um nun einen Weg zu ermitteln, auf dem man zu Ausdrücken elliptischer Functionen von gegebenen speciellen Eigenschaften gelangen könnte, gehen wir von der Formel (S. 37)

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

aus. Durch sie wird eine besondere elliptische Function, die für $u = \pm v$ verschwindet und für $u = 0$ von der zweiten Ordnung unendlich gross wird, als Quotient von Producten von σ-Functionen dargestellt. Die σ-Functionen im Zähler haben die Nullstellen, die im Nenner die Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function zu Nullstellen; ausserdem erscheint der Quotient mit der Constanten $-\frac{1}{\sigma^2 v}$ multiplicirt. Behufs Verallgemeinerung eines solchen Ausdruckes bilde man

$$C\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\ldots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\ldots\sigma(u-v_s)} = \varphi(u)$$

und untersuche, ob $\varphi(u)$ doppelt periodisch sein kann. Aus den Gleichungen (S. 72 (13.))

$$\sigma(u+2\omega-u_1) = -e^{2\eta(u-u_1+\omega)}\,\sigma(u-u_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma(u+2\omega-v_s) = -e^{2\eta(u-v_s+\omega)}\,\sigma(u-v_s)$$

folgt für

$$u_1+u_2+\cdots+u_r = u',$$
$$v_1+v_2+\cdots+v_s = v':$$

$$\varphi(u+2\omega) = (-1)^{r-s}e^{2\eta[(r-s)(u+\omega)-u'+v']}\,\varphi(u),$$

und entsprechend

$$\varphi(u+2\omega') = (-1)^{r-s}e^{2\eta'[(r-s)(u+\omega')-u'+v']}\,\varphi(u).$$

Für die Periodicität von $\varphi(u)$ mit den Perioden 2ω und $2\omega'$ ist vor allem nöthig, dass u aus den Exponentialfactoren wegfällt. Dazu muss

$$\eta(r-s) = 0$$

und

$$\eta'(r-s) = 0$$

sein; und da wegen der Legendreschen Relation (S. 130)

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\varepsilon\pi i}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

nicht beide Grössen η und η' Null sein können, so muss

$$r - s = 0$$

gesetzt, d. h. die Anzahl der Nullstellen der Function $\varphi(u)$ gleich der Anzahl der Unendlichkeitsstellen angenommen werden. Was von den Exponentialfactoren übrig bleibt, wird sicher dann gleich Eins, wenn

$$u' - v' = 0$$

gemacht wird. Da nun ferner $\varphi(u)$ offenbar für alle endlichen Werthe des Arguments den Charakter einer rationalen Function hat, so ergiebt sich: Der Ausdruck

$$C \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{\sigma(u-u_\varrho)}{\sigma(u-v_\varrho)} = \varphi(u)$$

stellt unter der Bedingung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho$$

eine elliptische Function dar.

Besteht diese Bedingung nicht, so kann man versuchen, $\varphi(u)$ durch Multiplication mit einer Exponentialgrösse, deren Argument eine lineare Function von u ist, in eine doppelt periodische Function überzuführen. Wegen des Auftretens der willkürlichen Constanten C genügt es dabei, den Exponentialfactor gleich $e^{\alpha u}$ statt gleich $e^{\alpha u+\beta}$ anzunehmen. Wird nun

$$e^{\alpha u}\varphi(u) = \psi(u)$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\psi(u+2\omega) &= e^{2\alpha\omega}(-1)^{r-s} e^{2\eta[(r-s)(u+\omega)-u'+v']}\psi(u),\\
\psi(u+2\omega') &= e^{2\alpha\omega'}(-1)^{r-s} e^{2\eta'[(r-s)(u+\omega')-u'+v']}\psi(u),
\end{aligned}$$

und somit wie vorher $r = s$. Für das vollständige Wegfallen der Exponentialfactoren sind die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha\omega + \eta(v'-u') &= k\pi i,\\
\alpha\omega' + \eta'(v'-u') &= k'\pi i,
\end{aligned}$$

in denen k und k' ganze Zahlen sind, nothwendig und hinreichend. Mit Hilfe der Legendreschen Relation erhält man aus ihnen für $\varepsilon = +1$

$$\begin{aligned}
v' - u' &= -2k'\omega + 2k\omega',\\
\alpha &= \quad 2k'\eta - 2k\eta'.
\end{aligned}$$

Sind demnach $u_1, \dots u_r$, $v_1, \dots v_r$ zwei Reihen von je r Argumenten, so gewählt, dass

$$\sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho - \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho = 2\tilde{\omega}$$

ist, so setze man

$$2\tilde{\omega} = -2k'\omega + 2k\omega';$$

dann wird

$$Ce^{(2k'\eta - 2k\eta')u} \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{\sigma(u-u_\varrho)}{\sigma(u-v_\varrho)} = \psi(u)$$

eine elliptische Function.

Dieser Satz gestattet, mittels der einen Function σu beliebig viele elliptische Functionen zu bilden. Besonders wichtig aber ist die Thatsache, dass sich jede elliptische Function in der Form $\psi(u)$ darstellen lässt.

Um dies zu beweisen, ist es nöthig, den Begriff einer Unendlichkeits- oder Nullstelle einer elliptischen Function genauer zu definiren. Vor allem ist zu bemerken, dass die Eigenschaft einer elliptischen Function $f(u)$, im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function zu haben, es mit sich bringt, dass in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen liegen kann. Und da $\frac{1}{f(u)}$ eine Function von denselben wesentlichen Eigenschaften ist wie $f(u)$, ihre Unendlichkeitsstellen aber mit den Nullstellen von $f(u)$ zusammenfallen, so gilt dasselbe auch für die Nullstellen. Es sei nun u_0 eine beliebige Nullstelle von $f(u)$. Da das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell ist, so kann man u_0 als homogene lineare Function von 2ω und $2\omega'$ darstellen und im Besonderen

$$u_0 = 2(m+\mu)\omega + 2(n+\nu)\omega'$$

setzen, wo m, n ganze Zahlen und

$$0 \leqq \mu < 1, \quad 0 \leqq \nu < 1$$

sein soll; d. h. man kann der Stelle u_0 eine andere

$$u_0 - (2m\omega + 2n\omega') = u_0'$$

in dem Periodenparallelogramm mit den Ecken $0, 2\omega, 2\omega+2\omega', 2\omega'$ eindeutig zuordnen, in welchem übrigens die Punkte auf den in der Ecke $2\omega+2\omega'$ zusammenstossenden Seiten nicht mitgezählt, sondern zu angrenzenden Periodenparallelogrammen gerechnet werden. Alle von u_0' um eine beliebige Periode verschiedenen Nullstellen führen hierbei auf u_0' zurück. Es seien r Stellen dieser Art im Periodenparallelogramm gelegen, wobei jede einzelne Stelle in die Reihe

$$u_1,\ u_2,\ \dots\ u_r$$

so oft aufgenommen werden soll wie die Ordnungszahl des Verschwindens angiebt. Entsprechendes gilt für die im Periodenparallelogramm liegenden Unendlichkeitsstellen

$$v_1,\ v_2,\ \dots\ v_s.$$

Versteht man nun unter $\varphi(u)$ denselben Ausdruck wie auf S. 135, so verschwinden $f(u)$ und $\varphi(u)$ an den Stellen u_ϱ $(\varrho = 1, \dots r)$ und den ihnen congruenten, d. h. von ihnen um eine beliebige Periode verschiedenen Stellen; und unendlich gross werden beide Functionen für die Argumentwerthe v_σ $(\sigma = 1, \dots s)$ und die ihnen congruenten. Der Quotient $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ wird hiernach für keinen endlichen Werth von u Null oder unendlich gross, lässt sich also in der Form $e^{g(u)}$ darstellen (S. 109). Vermehrt man nun u um 2ω, dann um $2\omega'$ und setzt wegen der Periodicität von $f(u)$ die auftretenden Exponentialfactoren gleich Eins, so erhält man als Bedingungen:

$$g(u+2\omega) - g(u) + (r-s)\pi i + 2\eta\,(r-s)(u+\omega) + 2\eta\,(v'-u') = 2k\pi i,$$
$$g(u+2\omega') - g(u) + (r-s)\pi i + 2\eta'(r-s)(u+\omega') + 2\eta'(v'-u') = 2k'\pi i.$$

Um die lineare Function von u zum Wegfall zu bringen, differentiire man zweimal hinter einander nach u, so wird

$$g''(u+2\omega) - g''(u) = 0,$$
$$g''(u+2\omega') - g''(u) = 0.$$

Die beständig convergente Potenzreihe $g''(u)$ muss sich aber, wenn sie doppelt periodisch sein soll, auf eine Constante reduciren (S. 118). Setzt man dementsprechend

$$g(u) = au^2 + \alpha u + \beta,$$

wo e^β wieder zu der multiplicativen Constanten C hinzugezogen werden kann, so ergiebt sich

$$g(u+2\omega) - g(u) = 4a\omega u + 4a\omega^2 + 2\alpha\omega,$$

und die Bedingung für das Wegfallen von u aus dem ersten Exponentialfactor liefert nun

$$4a\omega + 2\eta(r-s) = 0.$$

In gleicher Weise folgt

$$4a\omega' + 2\eta'(r-s) = 0.$$

Die Determinante dieser beiden in a und $r-s$ homogenen linearen Gleichungen ist nach der Legendreschen Relation von Null verschieden; mithin müssen die beiden Gleichungen

$$a = 0, \quad r-s = 0$$

bestehen. Nachdem nun $e^{g(u)} = e^{\alpha u}$ und $\varphi(u)$ gleich der auf S. 136 so bezeichneten Function geworden ist, gelten für α und $v'-u'$ dieselben Gleichungen wie dort mit denselben Folgerungen, d. h. es ergiebt sich für die elliptische Function $f(u)$, wie behauptet, die Darstellung

$$f(u) = C\frac{\sigma(u-u_1)\dots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\dots\sigma(u-v_r)}e^{(2k'\eta-2k\eta')u}. \tag{1.}$$

Verzichtet man darauf, dass die Null- und Unendlichkeitsstellen, die in dieser Formel vorkommen, sämmtlich im Periodenparallelogramm liegen sollen, so kann man den Exponentialfactor weglassen. Dies wird z. B. dadurch erreicht, dass v_r durch

$$v_r - 2k'\omega + 2k\omega' = v'_r$$

ersetzt wird. Man kann dann entweder, weil

$$v_1 + \dots + v_{r-1} + v'_r = u_1 + \dots + u_r$$

wird, die Schlüsse von S. 135 anwenden oder auch

$$\sigma(u-v_r) = \sigma(u-v'_r+2k'\omega-2k\omega')$$

mittels der Formel S. 72 (12.) auf $\sigma(u-v')$ zurückführen.

Der constante Factor C in der Darstellung (1.) bestimmt sich in jedem Falle durch Angabe eines Werthes von $f(u)$, den diese Function für ein von den Null- und Unendlichkeitsstellen verschiedenes Argument annimmt.

Die Anzahl der Unendlichkeitsstellen einer elliptischen Function im Periodenparallelogramm, jede mit der zugehörigen Ordnungszahl gerechnet, bezeichnen wir als Grad der elliptischen Function. Er kann auch als Anzahl der Nullstellen der Function im Periodenparallelogramm erklärt werden, wenn man jede von ihnen so oft zählt wie die Ordnungszahl der Stelle angiebt. Denn die Gleichung

$$r - s = 0$$

besagt, dass eine elliptische Function innerhalb dieses Gebietes ebenso oft Null wie unendlich gross wird.

Dieser Satz lässt sich dahin verallgemeinern, dass eine elliptische Function im Periodenparallelogramm jeden beliebigen Werth A gleich oft annimmt. Die Function $f(u) - A$ nämlich wird an denselben r Stellen unendlich gross wie $f(u)$ selbst. Sie muss also auch an r Stellen Null werden, d. h. die Gleichung

$$f(u) = A$$

wird durch r Werthe des Arguments befriedigt.

Nach dem oben bei der Bestimmung von $g''(u)$ wieder benutzten Satze giebt es keine elliptische Function vom Grade Null. Denn da eine solche im Endlichen nirgends unendlich gross wird, so müsste sie sich als beständig convergente Potenzreihe darstellen lassen.

Aber auch elliptische Functionen ersten Grades können nicht existiren. Denn die Gleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{r} v_\varrho - \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho = 2\tilde{\omega}$$

würde für eine solche in

$$v_1 - u_1 = 2\tilde{\omega}$$

übergehen, die, weil u_1 und v_1 im Periodenparallelogramm liegen, nur für $2\tilde{\omega} = 0$ bestehen könnte. Dann würde der Exponentialfactor und, wegen $v_1 = u_1$, auch der Quotient von σ-Functionen gleich Eins werden, die Function $f(u)$ sich also auf eine Constante reduciren.

Dagegen giebt es elliptische Functionen zweiten Grades. Die $\wp$-Function ist eine solche, und zwar zeichnet sie sich durch die Eigenschaft aus, dass ihre beiden Unendlichkeitsstellen in eine, $u = 0$, zusammenfallen.

Fünfzehntes Kapitel.

Darstellung elliptischer Functionen durch die $\wp$-Function.

Die im vorigen Kapitel besprochene Darstellung einer elliptischen Function durch einen Quotienten von σ-Producten entspricht dem Ausdruck einer rationalen Function durch einen Quotienten zweier ganzen Functionen. Es giebt für die rationalen Functionen eine andere wichtige Darstellung, die ebenfalls in der Theorie der elliptischen Functionen ihr Analogon hat, nämlich als Aggregat von Partialbrüchen, d. h. von rationalen Functionen, die nur an je einer Stelle unendlich gross werden. Dabei können noch solche Partialbrüche, für welche die Ordnung des Unendlichwerdens grösser als Eins ist, als Ableitungen anderer betrachtet werden, die nur Unendlichkeitsstellen erster Ordnung haben.

Es sei

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m$$

ein System incongruenter Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function $f(u)$; diese Stellen mögen sämmtlich im Periodenparallelogramm liegen und, im Gegensatz zu der Voraussetzung auf S. 138, alle unter einander verschieden sein. Die zugehörigen Ordnungszahlen seien

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ l_m.$$

Wird eine beliebige Stelle der Reihe vorläufig mit v, ihre Ordnungszahl mit l bezeichnet, so gilt für die Function $f(u)$ in der Nähe des Argumentwerthes v die Entwickelung

$$f(u) = c(u-v)^{-1} + c'(u-v)^{-2} + \cdots + c^{(l-1)}(u-v)^{-l} + \mathfrak{P}(u-v),$$

d. h., wenn für c auch $c^{(0)}$ geschrieben wird,

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{l-1} c^{(\nu)}(u-v)^{-\nu-1} + \mathfrak{P}(u-v).$$

Anstatt der negativen Potenzen von $(u-v)^{-2}$ an kann man elliptische Functionen einführen, die nur je eine negative Potenz aufweisen; denn es ist

$$\begin{aligned} \wp(u-v) &= \quad (u-v)^{-2} + \mathfrak{P}_0(u-v), \\ \wp'(u-v) &= -2(u-v)^{-3} + \mathfrak{P}_0'(u-v), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aber das Anfangsglied $c(u-v)^{-1}$ kann auf diese Art nicht zum Wegfall gebracht werden. Dem wird abgeholfen, wenn man an Stelle der Function $f(u)$ zunächst ihre erste Ableitung betrachtet, denn deren Entwickelung in der Nähe der Stelle v liefert

$$f'(u) = -\sum_{\nu=0}^{l-1} (\nu+1)\, c^{(\nu)}(u-v)^{-\nu-2} + \mathfrak{P}'(u-v).$$

Da nun allgemein

$$\wp^{(\nu)}(u-v) = (-1)^{\nu}(\nu+1)!\,(u-v)^{-\nu-2} + \mathfrak{P}_0^{(\nu)}(u-v)$$

ist, so definiren wir eine Function $\varphi'(u)$ durch die Formel

$$\varphi'(u) = -\sum_{\nu=0}^{l-1} (\nu+1)\, c^{(\nu)} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu+1)!}\, \wp^{(\nu)}(u-v)$$

und betrachten die Differenz

$$f'(u) - \varphi'(u);$$

sie wird für $u = v$ nicht mehr unendlich gross.

Erklärt man jetzt m Functionen

$$\varphi_1'(u), \ldots \varphi_m'(u)$$

für die Stellen

$$v_1, \ldots v_m$$

der Function $\varphi'(u)$ entsprechend, d. h. setzt man, wenn in der Nähe der Stelle v_μ die Entwickelung

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{l_\mu-1} c_\mu^{(\nu)}(u-v_\mu)^{-\nu-1} + \mathfrak{P}_\mu(u-v_\mu)$$

gilt,

$$\varphi_\mu'(u) = \sum_{\nu=0}^{l_\mu-1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\, c_\mu^{(\nu)}\, \wp^{(\nu)}(u-v_\mu)$$

und subtrahirt die Summe

$$\varphi_1'(u) + \cdots + \varphi_m'(u) = \psi'(u)$$

von $f'(u)$, so wird die Differenz

$$f'(u) - \psi'(u)$$

an keiner im Periodenparallelogramm gelegenen Stelle, und demnach überhaupt für keinen endlichen Werth, unendlich gross. Da nun, wie sich von selbst versteht, die in $\varphi_1'(u), \ldots \varphi_m'(u)$ enthaltenen $\wp$-Functionen so gewählt sind, dass sie dasselbe Periodenpaar haben wie die elliptische Function $f(u)$, so ist $f'(u) - \psi'(u)$ eine elliptische Function. Nach dem im Vorhergehenden wiederholt herangezogenen Satze (S. 118) kann eine solche nicht, wie es doch nach dem eben Bewiesenen sein müsste, als beständig convergente Potenzreihe darstellbar sein, ausser wenn sich diese auf ihr Anfangsglied reducirt. D. h. es muss

$$f'(u) - \psi'(u) = C',$$

$$f(u) = \psi(u) + C'u + C''$$

sein. Wegen

$$\wp(u-v) = -\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)$$

gilt für $\psi(u)$ die Formel

$$\psi(u) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{l_\mu - 1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} c_\mu^{(\nu)} \wp^{(\nu-1)}(u - v_\mu).$$

In ihr sind sämmtliche Glieder periodisch bis auf die Summe an erster Stelle, die sich bei einer Vermehrung des Argumentes um die Periode 2ω der Function $f(u)$ um die Constante

$$2\eta \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu$$

ändert. Die in dem Ausdruck von $f(u)$ enthaltene lineare Function $C'u + C''$ ändert sich dabei um $2C'\omega$; es muss also

$$C'\omega + \eta \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0$$

werden. Ebenso erhält man bei Vermehrung von u um eine von 2ω unabhängige Periode $2\omega'$ von $f(u)$

$$C'\omega' + \eta' \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0.$$

Wird noch angenommen, das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ sei für die $\wp$-Function primitiv, so ist die Determinante dieser beiden in C' und $\sum c_\mu$ homogenen linearen Gleichungen nach der Legendreschen Relation von Null verschieden, mithin

$$C' = 0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0.$$

Die zweite dieser beiden Relationen, die mit Rücksicht auf die Bedeutung von c_μ die Form

$$\sum_{\mu=1}^{m} [f(u)]_{(u-v_\mu)^{-1}} = 0 \tag{1.}$$

annimmt, enthält einen wichtigen allgemeinen Satz der Theorie der elliptischen Functionen. Entwickelt man nämlich eine beliebige elliptische Function in der Nähe aller Unendlichkeitsstellen eines incongruenten Systems, so ist die Summe der Coefficienten der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenzen, bezogen auf alle diese Stellen, gleich Null.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man der Darstellung einer elliptischen Function, die wegen $C' = 0$ zunächst die Gestalt

$$f(u) = \psi(u) + C'',$$

d. h.

$$f(u) = C'' + \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_\mu) + c'_\mu \wp(u - v_\mu) - \frac{1}{2} c''_\mu \wp'(u - v_\mu) + \cdots \tag{2.}$$
$$+ \frac{(-1)^{l_\mu}}{(l_\mu - 1)!} c_\mu^{(l_\mu - 1)} \wp^{(l_\mu - 2)}(u - v_\mu) \Big\}$$

annimmt, noch eine veränderte Form geben. Ersetzt man nämlich in der Gleichung S. 37 (15.) v durch $-v_\mu$, multiplicirt mit c_μ und summirt über μ, so ergiebt sich

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_\mu) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma} u - \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma} v_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\wp' u + \wp' v_\mu}{\wp u - \wp v_\mu}.$$

Des in Rede stehenden Satzes wegen fällt rechts die erste Summe, aus der $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ herausgezogen werden kann, weg, die zweite kann beim Einsetzen in (2.) mit der Constanten C'' zu einer neuen Constanten C vereinigt werden, und man erhält, wenn noch

$$\frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} = \wp(u, v) \tag{3.}$$

gesetzt wird,

$$f(u) = C + \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ c_\mu \wp(u, v_\mu) + \sum_{\nu=1}^{l_\mu - 1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} c_\mu^{(\nu)} \wp^{(\nu-1)}(u - v_\mu) \Big\}. \tag{4.}$$

Diese Darstellung entspricht, soweit es der Natur der Sache nach möglich ist, der einer rationalen Function durch eine Summe von Partialbrüchen. Der nächstliegende Gedanke würde allerdings der gewesen sein, elliptische Functionen mit nur einer Unendlichkeitsstelle für die Darstellung zu verwenden. Aber nach dem auf S. 140 bewiesenen Satze können solche Functionen nicht existiren.

Die in der Gleichung (4.) vorkommenden $\wp$-Functionen und ihre Ableitungen beziehen sich auf die zusammengesetzten Argumente $u-v_1, \dots u-v_m$. Nun ist nach dem Additionstheorem

$$\wp(u-v) = R(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v),$$

wo R eine rationale Function der vier Argumente $\wp u, \dots \wp' v$ bezeichnet. Differentiirt man den Ausdruck nach u und lässt dieses Argument weg, so erhält man

$$\wp'(u-v) = \frac{\partial R}{\partial \wp}\wp' + \frac{\partial R}{\partial \wp'}\wp''.$$

Wird jetzt

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

eingesetzt, so erscheint $\wp'(u-v)$ wieder als rationale Function der ursprünglichen vier Argumente:

$$\wp'(u-v) = R_1(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v).$$

So weiter schliessend gewinnt man den Ausdruck

$$\wp^{(\nu)}(u-v) = R_\nu(\wp u, \wp' u, \wp v, \wp' v),$$

der nur dann seine Bedeutung verliert, wenn unter den Unendlichkeitsstellen von $f(u)$ die Stelle $v = 0$ enthalten ist. Denn für diese werden $\wp v$ und $\wp' v$ unendlich gross. Aber für eine solche Annahme kommt in dem auf $v = 0$ bezüglichen Theile der Darstellung (4.) gar kein zusammengesetztes Argument vor, und man braucht nur $\wp'' u, \wp''' u, \dots$ durch $\wp u$ und $\wp' u$ auszudrücken, um diesen Theil als rationale, und zwar als ganze rationale Function von $\wp u$ und der ersten Ableitung dieser Function zu erhalten.

Setzt man die Ausdrücke aller vorkommenden Ableitungen in (4.) ein und nimmt das Aggregat $\sum c_\mu \wp(u, v_\mu)$ hinzu, das bereits in $\wp u$ und $\wp' u$ rational ist, so wird schliesslich

$$f(u) = R(\wp u, \wp' u). \tag{5.}$$

Ist also $f(u)$ eine elliptische Function mit den beiden Perioden 2ω und $2\omega'$, deren Verhältniss nicht reell ist, und denkt man sich, etwa nach der Formel S. 120 (25.), eine $\wp$-Function gebildet, für die das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives ist, so lässt sich $f(u)$ rational durch diese specielle elliptische Function und ihre erste Ableitung darstellen.

Für die wirkliche Herleitung eines solchen Ausdruckes hat man, wie wir sehen, die Unendlichkeitsstellen der elliptischen Function und die Coefficienten der negativen Potenzen, die bei der Entwickelung in der Nähe dieser Stellen auftreten, als bekannt anzunehmen. Ausserdem muss man, um die in (4.) vorkommende Constante C zu bestimmen, den Werth von $f(u)$ für einen von den Unendlichkeitsstellen verschiedenen Werth des Argumentes kennen.

Da $\wp' u$ mit $\wp u$ durch eine in $\wp' u$ quadratische Gleichung zusammenhängt, so ist die rationale Function $R(\wp u, \wp' u)$ als lineare Function von $\wp' u$ darstellbar. Der Ausdruck der elliptischen Function,

$$f(u) = R_1(\wp u) + \wp'(u)\, R_2(\wp u), \tag{6.}$$

vereinfacht sich noch weiter, wenn $f(u)$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle wird

$$f(u) = \quad f(-u) = \quad R_1(\wp u) - \wp' u \,.\, R_2(\wp u),$$

im zweiten

$$f(u) = -f(-u) = -R_1(\wp u) + \wp' u \,.\, R_2(\wp u).$$

Diese beiden Gleichungen können mit (6.) zusammen nur dann bestehen, wenn für die erste Annahme $R_2(\wp u)$, für die zweite $R_1(\wp u)$ verschwindet. Das heisst: Eine gerade elliptische Function lässt sich als rationale Function von $\wp u$ allein, eine ungerade als Product einer solchen Function mit $\wp' u$ darstellen.

Hat eine elliptische Function nur eine einzige Unendlichkeitsstelle v, so heisst die Gleichung (2.):

$$f(u) = C'' + c\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) + c'\wp(u-v) - \frac{1}{2}c''\wp'(u-v) + \cdots + \frac{(-1)^l}{(l-1)!}c^{(l-1)}\wp^{(l-2)}(u-v),$$

und die Relation

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu = 0$$

liefert nichts weiter als

$$c = 0.$$

Eine elliptische Function mit nur einer Unendlichkeitsstelle muss daher nicht blos von höherer als der ersten Ordnung unendlich gross werden, sondern sie enthält überhaupt kein Glied mit der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $u-v$.

Ist im Besonderen

$$v = 0,$$

so wird

$$f(u) = C'' + c'\wp u - \frac{1}{2}c''\wp' u + \cdots + \frac{(-1)^l}{(l-1)!}c^{(l-1)}\wp^{(l-2)}(u).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\wp'' u &= 6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2,\\
\wp''' u &= 12\wp u\,\wp' u,.\\
\wp^{\mathrm{IV}} u &= 12\wp u\,\wp'' u + 12(\wp' u)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

d. h. sämmtliche Ableitungen sind ganze rationale Functionen von $\wp u$ und $\wp' u$ (S. 145). Demnach ist jede elliptische Function, die nur die eine Unendlichkeitsstelle Null hat, durch die Stammfunction $\wp u$ und ihre erste Ableitung als ganze Function darstellbar.

Nimmt man diese wieder als linear in $\wp' u$ an,

$$f(u) = G_1(\wp u) + \wp' u\, G_2(\wp u), \tag{7.}$$

so schliesst man wie oben, dass eine gerade elliptische Function mit der einzigen Unendlichkeitsstelle Null als ganze Function von $\wp u$, eine ungerade als Product einer solchen mit $\wp' u$ darstellbar sein muss.

Man kann den Ausdruck (4.) von $f(u)$ noch etwas übersichtlicher gestalten, indem man alle seine Bestandtheile, nicht blos den ersten, mit der durch die Gleichung (3.) definirten Function $\wp(u, v)$ in Zusammenhang bringt. Betrachtet man u als einen Parameter, v als das Argument dieser Function, so sieht man, dass $\wp(u, v)$ als elliptische Function von v mit den Unendlichkeitsstellen $v = u$ und $v = 0$ aufgefasst werden kann. Wir bestimmen die Coefficienten der auftretenden negativen Potenzen, indem wir zuerst $v = u+h$, dann $v = h$ setzen. Nun ist

$$\wp(u, v) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

also

$$\wp(u, u+h) = \frac{\sigma'}{\sigma}(-h) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+h).$$

Eine negative Potenz der unendlich kleinen Grösse h kommt nur aus dem ersten Gliede, und zwar wird

$$\wp(u, u+h) = -h^{-1} + \mathfrak{P}(h). \tag{8.}$$

Ferner ist

$$\wp(u, h) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-h) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}h,$$

und eine negative Potenz von h, nämlich h^{-1}, erscheint hier nur in der Entwickelung des dritten Gliedes, sodass

$$\wp(u, h) = h^{-1} + \mathfrak{P}(h) \tag{9.}$$

wird. Die betrachtete Function ist also eine elliptische Function zweiten Grades von v, und die gesuchten Entwickelungscoefficienten haben die Werthe

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1.$$

Unter Benutzung der Eigenschaften der Function $\wp(u, v)$ schreibe man in dem Satze (1.) $\varphi(v)$ statt $f(u)$ und setze dann

$$\varphi(v) = f(v)\,\wp(u, v),$$

so lautet, für $v_1', \ldots v_r'$ als Unendlichkeitsstellen von $\varphi(v)$, die Gleichung (1.):

$$\sum_{\varrho=1}^{r} [f(v)\,\wp(u, v)]_{(v-v_\varrho')^{-1}} = 0. \tag{10.}$$

Die Stellen v_ϱ' setzen sich aus den Unendlichkeitsstellen des ersten und denen des zweiten Factors von $\varphi(v)$ zusammen, sind also, wenn die Null unter den ersten nicht enthalten ist,

$$v_1, \ldots v_m, u, 0.$$

Demnach ist $r = m+2$, und für $v = v_\varrho' + h$ wird

$$[f(u+h)\,\wp(u, u+h)]_{h^{-1}} + [f(h)\,\wp(u, h)]_{h^{-1}} + \sum_{\mu=1}^{m} [f(v_\mu + h)\,\wp(u, v_\mu + h)]_{h^{-1}} = 0.$$

Der erste Coefficient ist unmittelbar zu bestimmen. Für jeden Argumentwerth, der von den Unendlichkeitsstellen der Function f verschieden ist, hat man nämlich

$$f(u+h) = f(u)+hf'(u)+\cdots,$$

und die Zusammenstellung dieser Gleichung mit (8.) liefert

$$[f(u+h)\wp(u,\, u+h)]_{h^{-1}} = -f(u),$$

mithin

$$f(u) = \sum_{\mu=1}^{m}[f(v_\mu+h)\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}}+[f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}}. \tag{11.}$$

Der gesuchte Ausdruck von $f(u)$ erscheint also zunächst durch eine Summe von Entwickelungscoefficienten dargestellt. Nun ist (S. 142)

$$f(v_\mu+h) = c_\mu h^{-1}+c'_\mu h^{-2}+\cdots+c_\mu^{(l_\mu-1)}h^{-l_\mu}+\mathfrak{P}_\mu(h).$$

Es wird noch

$$\wp(u,\, v_\mu+h) = \wp(u,v_\mu)+h\frac{\partial\wp(u,v_\mu)}{\partial v_\mu}+\cdots$$

gebraucht, eine Entwickelung, in der

$$\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu\wp(u,v)}{\partial v^\nu} = \wp(u,v)_\nu \tag{12.}$$

gesetzt werden möge, sodass sie die Form

$$\wp(u,\, v_\mu+h) = \wp(u,v_\mu)+h\wp(u,v_\mu)_1+h^2\wp(u,v_\mu)_2+\cdots$$

annimmt. Dann erhält man

$$[f(v_\mu+h)\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}} = c_\mu\wp(u,v_\mu)+c'_\mu\wp(u,v_\mu)_1+c''_\mu\wp(u,v_\mu)_2+\cdots$$

oder, wenn

$$c_\mu = c_\mu^{(0)},\quad \wp(u,v) = \wp(u,v)_0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{l_\mu-1}c_\mu^{(\nu)}\wp(u,v_\mu)_\nu = f(u,v_\mu) \tag{13.}$$

gesetzt wird,

$$[f(v_\mu+h)\wp(u,\, v_\mu+h)]_{h^{-1}} = f(u,v_\mu). \tag{14.}$$

Die Gleichung (11.) geht daher über in

$$f(u) = \sum_{\mu=1}^{m}f(u,v_\mu)+[f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}}. \tag{15.}$$

Da nun die Stelle $u=0$ unter den Unendlichkeitsstellen von $f(u)$ nicht vorkommt, so kann man behufs Umwandlung des letzten Entwickelungscoefficienten setzen:

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \cdots,$$

d. h. nach Hinzuziehung von (9.):

$$[f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}} = f(0),$$

$$(16.)\qquad f(u) = f(0) + \sum_{\mu=1}^{m} f(u, v_\mu).$$

Wird $f(v)$ selbst, ebenso wie $\wp(u,v)$, für $v=0$ unendlich gross, so nehme man $v_m = 0$, sodass

$$v_1, \ldots v_{m-1}, u, 0$$

die Unendlichkeitsstellen von $\varphi(v)$ sind. An die Stelle von (15.) tritt dann

$$(17.)\qquad f(u) = \sum_{\mu=1}^{m-1} f(u, v_\mu) + [f(h)\wp(u,h)]_{h^{-1}}.$$

Die Ordnungszahl des Unendlichwerdens von $f(v)$ für $v=0$ heisse l, dann hat $f(h)$ die Form

$$f(h) = c_0 h^{-1} + c_0' h^{-2} + \cdots + c_0^{(l-1)} h^{-l} + f_0 + h\mathfrak{P}_0(h),$$

wo f_0 die Constante bezeichnet, mit der die in $f(h)$ enthaltene gewöhnliche Potenzreihe anfängt. Ferner ist

$$\begin{aligned}\wp(u,h) &= \frac{\sigma'}{\sigma}(u-h) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}h \\ &= -h\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{du^2}\frac{\sigma'}{\sigma}u - \cdots + \frac{1}{h} - \frac{g_2}{60}h^3 - \frac{g_3}{140}h^5 + \cdots \\ &= h\wp u - \frac{h^2}{2}\wp' u + \cdots + h^{-1} - \cdots.\end{aligned}$$

Setzt man

$$(18.)\qquad \left[\frac{\sigma'}{\sigma}h\right]_{h^\nu} = l_\nu,$$

sodass l_ν für gerade Werthe von ν und für $\nu=1$ gleich Null, für alle anderen positiven Werthe gleich einer bestimmten Function von g_2 uud g_3 ist, und ferner

$$(19.)\qquad \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\wp^{(\nu-1)}(u) + l_\nu = \wp(u,0)_\nu,$$

so kann man schreiben:

$$\wp(u,h) = h^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \wp(u,0)_\nu h^\nu.$$

Durch Zusammenstellung mit dem Ausdruck von $f(h)$ ergiebt sich mithin

$$[f(h)\,\wp(u,h)]_{h^{-1}} = f_0 + c_0'\,\wp(u,0)_1 + c_0''\,\wp(u,0)_2 + \cdots + c_0^{(l-1)}\,\wp(u,0)_{l-1} = f_0 + f(u,0),$$

wenn

$$\text{(20.)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{l-1} c_0^{(\lambda)}\,\wp(u,0)_\lambda = f(u,0)$$

gesetzt wird. Diese Definition entspricht der Formel (13.), und man darf auch hier von $\lambda = 0$ an summiren, wenn man

$$\wp(u,0)_0 = 0$$

hinzunimmt. Endlich kann man noch, wegen $0 = v_m$,

$$f(u,0) = f(u,v_m)$$

setzen und dies Glied in die Summe auf der rechten Seite von (17.) aufnehmen. Das Resultat heisst dann, der Darstellung (16.) entsprechend,

$$\text{(21.)} \qquad f(u) = f_0 + \sum_{\mu=1}^{m} f(u,v_\mu).$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck der elliptischen Function $f(u)$. Nach seiner Herleitung bedeutet f_0 das constante Glied in der Entwickelung von $f(h)$ nach Potenzen von h, die Grössen $f(u,v_\mu)$ sind durch die Formeln (13.) und (20.) erklärt, die in ihnen vorkommenden $\wp(u,v)_\nu$ durch (12.) und (19). Kommt $v = 0$ nicht unter den Unendlichkeitsstellen der Function vor, so ist von den Gleichungen (19.) und (20.) abzusehen und

$$f_0 = f(0)$$

zu setzen.

Der Vorzug der Darstellung (21.) vor der zuerst abgeleiteten (4.) besteht darin, dass in (21.) nur die $\wp$-Function des Argumentes u nebst ihren Ableitungen auftritt, während vorher die zusammengesetzten Argumente $u - v_\mu$ vorkamen. Das Additionstheorem braucht also hier nicht angewendet zu werden.

Aus der Darstellung (5.) der elliptischen Function $f(u)$ durch eine rationale Function von $\wp u$ und $\wp' u$ lassen sich wichtige Folgerungen ableiten.

Differentiirt man nach u, so wird

$$f'(u) = \frac{\partial R}{\partial \wp}\,\wp' u + \frac{\partial R}{\partial \wp'}\,\wp'' u,$$

d. h. nach Einführung von

$$\wp''u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2:$$

$$f'(u) = \bar{R}(\wp u, \wp' u).$$

Eliminirt man $\wp u$ und $\wp' u$ aus dieser Gleichung in Verbindung mit (5.) und

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

so ergiebt sich zwischen $f(u)$ und $f'(u)$ eine algebraische Gleichung. Jede elliptische Function genügt also einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung.

Es sei ferner $f_1(u)$ eine zweite elliptische Function mit denselben Perioden wie $f(u)$, sodass man

$$f_1(u) = R_1(\wp u, \wp' u)$$

setzen kann. Dieselbe Elimination wie eben liefert den Satz, dass zwei elliptische Functionen mit übereinstimmenden Perioden durch eine algebraische Gleichung verbunden sind.

Setzt man drittens die Gleichung (5.) auch für die Argumente v und $u+v$ an,

$$f(v) = R(\wp v, \wp' v),$$

$$f(u+v) = R(\wp(u+v), \wp'(u+v)),$$

drückt $\wp(u+v)$ und $\wp'(u+v)$ nach dem Additionstheorem durch $\wp u, \wp v, \wp' u, \wp' v$ aus und eliminirt diese vier Grössen aus den Formeln für $f(u), f(v), f(u+v)$, $(\wp' u)^2$ und $(\wp' v)^2$, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen $f(u)$, $f(v)$ und $f(u+v)$. Das heisst: Jede elliptische Function hat ein algebraisches Additionstheorem.

Sechzehntes Kapitel.

Darstellung der Functionen $\sigma_\alpha u$ durch unendliche Producte.

Im dreizehnten Kapitel sind für die σ-Function mehrere Darstellungen durch einfach unendliche Producte gegeben worden. Die Formeln (12.), (14.) und (15.) (S. 127—128) werden, wenn für den Exponentialfactor der auf S. 129 angegebene Werth eingeführt wird,

$$(1.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\pi}{\sin\frac{n\omega'\pi}{\omega}} \right\},$$

$$(2.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} - e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - h^{2n} e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right)\left(1 - h^{2n} e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}\right)}{(1-h^{2n})^2},$$

$$(3.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sin\frac{u\pi}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2h^{2n}\cos\frac{u\pi}{\omega} + h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}.$$

Hierin war (S. 126 (11.))

$$(4.)\qquad e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}} = h;$$

wird noch

$$(5.)\qquad e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} = z$$

gesetzt (S. 128 (16.)), so geht die Darstellung (2.) in

$$(6.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2})}{(1-h^{2n})^2}$$

über.

Es sei

$$(7.)\qquad \frac{\omega'}{\omega} = \tau,$$

$$(8.)\qquad \frac{u}{2\omega} = v,$$

so wird

$$(9.)\qquad h = e^{\tau\pi i},$$

$$(10.)\qquad z = e^{v\pi i},$$

$$(11.)\qquad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} = e^{2\omega\eta v^2}.$$

Aus den obigen Formeln lassen sich in Folge der Definitionsgleichungen für $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$,

$$(12.)\qquad \sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

neue Ausdrücke für diese Functionen bilden. Man könnte übrigens auch ohne Weiteres die abgeleiteten Functionen als doppelt unendliche Producte von Primfactoren darstellen, deren jeder nur an einer Stelle Null wird (vgl. Kap. 12). Denn die Nullstellen sind bekannt, und das Verfahren zur Bestimmung von $e^{g(u)}$ ist nach dem Früheren vorgezeichnet.

Nimmt man nun erstens $\alpha = 1$, ersetzt also in (1.) u durch $u+\omega$ und demnach v durch $v+\frac{1}{2}$, so geht in

$$(13.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{2\omega\eta v^2} \sin v\pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\tau - v)\pi}{\sin n\tau\pi}\cdot\frac{\sin(n\tau+v)\pi}{\sin n\tau\pi}$$

$\sin v\pi$ in $\cos v\pi$, der Zähler $\sin(n\tau-v)\pi.\sin(n\tau+v)\pi$ des allgemeinen Gliedes unter dem Productzeichen in $\cos(n\tau-v)\pi.\cos(n\tau+v)\pi$ über. Das Argument des Exponentialfactors wird unter Hinzuziehung von $-\eta u$ (nach (12.))

$$2\omega\eta(v+\tfrac{1}{2})^2 - \eta.2\omega v.$$

Der entstehende Ausdruck ist durch $\sigma\omega$, d. h. durch den für $u = 0$ oder $v = 0$ aus $e^{-\eta u}\sigma(u+\omega)$ hervorgehenden Werth zu dividiren. Dann ergiebt sich

$$(14.)\qquad \sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\cos v\pi \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\tau-v)\pi}{\cos n\tau\pi}\cdot\frac{\cos(n\tau+v)\pi}{\cos n\tau\pi}.$$

Bei directer Transformation der Formel (6.) ist zu beachten, dass z durch

$ze^{\frac{\pi i}{2}} = zi$ ersetzt werden muss. Es folgt

$$(15.)\qquad \sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\frac{z+z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2})}{(1+h^{2n})^2}.$$

Der Schreibweise (3.) oder

$$(16.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi}e^{2\omega\eta v^2}\sin v\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n}\cos 2v\pi+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}$$

entspricht

$$(17.)\qquad \sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\cos v\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2h^{2n}\cos 2v\pi+h^{4n}}{(1+h^{2n})^2}.$$

Vermehrt man zweitens, für $\alpha = 3$, u um ω', ersetzt also v durch $v+\frac{1}{2}\tau$ multiplicirt mit $e^{-\eta' u}$ und dividirt durch $\sigma\omega'$, so erscheint als Argument der Exponentialgrösse

$$2\omega\eta(v^2+v\tau)-\eta'.2\omega v = 2\omega\eta v^2+2v(\eta\omega'-\omega\eta') = 2\omega\eta v^2+v\pi i$$

wegen $|h|<1$ (S. 127, 130). Die Grösse z wird durch $zh^{\frac{1}{2}}$ vertreten. Vor dem Product steht, wenn jetzt die Transformation mit der Formel (6.) beginnt,

$$e^{2\omega\eta v^2}z\frac{zh^{\frac{1}{2}}-z^{-1}h^{-\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}-h^{-\frac{1}{2}}},$$

und unter dem Productzeichen

$$\frac{(1-h^{2n+1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2})}{(1-h^{2n+1})(1-h^{2n-1})}.$$

Die Producte der einzelnen Theile dieses Ausdruckes können, wieder in Folge von $|h|<1$, von einander getrennt werden; das ist ein ganz specieller Fall des auf S. 104—110 bewiesenen Satzes. Nun beginnt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n+1}z^2}{1-h^{2n+1}}\quad\text{mit}\quad\frac{1-h^3z^2}{1-h^3},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n-1}z^{-2}}{1-h^{2n-1}}\quad\text{mit}\quad\frac{1-hz^{-2}}{1-h}.$$

Um das erste Product dem zweiten gleichgebildet zu machen, hat man also mit $\frac{1-hz^2}{1-h}$ zu erweitern. Vor dem Productzeichen steht dann, von $e^{2\omega\eta v^2}$

abgesehen, im Ganzen

$$z\frac{zh^{\frac{1}{2}}-z^{-1}h^{-\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}-h^{-\frac{1}{2}}}\frac{1-h}{1-hz^2}=1.$$

Hiernach ist, wenn die beiden Theile wieder zusammengezogen werden,

$$(18.)\qquad \sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2})}{(1-h^{2n-1})^2},$$

oder

$$(19.)\qquad \sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2h^{2n-1}\cos 2v\pi+h^{4n-2}}{(1-h^{2n-1})^2}.$$

Die Wiedereinführung der trigonometrischen statt der Exponentialfunctionen liefert

$$(20.)\qquad \sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((n-\frac{1}{2})\tau-v)\pi\,.\,\sin((n-\frac{1}{2})\tau+v)\pi}{\sin(n-\frac{1}{2})\tau\pi\,.\,\sin(n-\frac{1}{2})\tau\pi}.$$

Um endlich den Übergang von σu zu $\sigma_2 u$ zu machen, hätte man u um $\omega+\omega'$, also v um $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$ zu vermehren, mit $e^{-(\eta+\eta')u}$ zu multipliciren und dann durch den für $u=0$ entstehenden Ausdruck zu dividiren. Einfacher ist es,

$$\sigma_3(u+\omega) = e^{-\eta'(u+\omega)}\frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega'}$$

durch

$$\sigma_3\omega = e^{-\eta'\omega}\frac{\sigma(\omega+\omega')}{\sigma\omega'}$$

zu dividiren. Man erhält dann

$$(21.)\qquad \sigma_2 u = e^{-\eta u}\frac{\sigma_3(u+\omega)}{\sigma_3\omega};$$

d. h. σ_2 geht aus σ_3 in derselben Weise hervor wie σ_1 aus σ. Die entstehenden Gleichungen lauten

$$(22.)\qquad \sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((n-\frac{1}{2})\tau-v)\pi\,.\,\cos((n-\frac{1}{2})\tau+v)\pi}{\cos(n-\frac{1}{2})\tau\pi\,.\,\cos(n-\frac{1}{2})\tau\pi},$$

$$(23.)\qquad \sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2})}{(1+h^{2n-1})^2},$$

$$(24.)\qquad \sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2h^{2n-1}\cos 2v\pi+h^{4n-2}}{(1+h^{2n-1})^2}.$$

Man kann den gefundenen Formeln einen allgemeineren Inhalt geben, wenn man an die Stelle von $(2\omega, 2\omega')$ ein anderes primitives Periodenpaar

$(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ treten lässt. Es sei

$$2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega',$$
$$2\tilde{\omega}' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

mit der Bedingung

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

Der Ausdruck der σ-Function durch das unendliche Doppelproduct kann von der Wahl des primitiven Periodenpaares nicht abhängen; denn die σ-Function ist durch ihre Nullstellen vollständig bestimmt, und es muss daher gleichgiltig sein, ob man diese in der Form $w = 2m\omega + 2n\omega'$ oder $w_1 = 2m_1\tilde{\omega} + 2n_1\tilde{\omega}'$ schreibt. Aus dem Ausdruck selbst kann man dies in folgender Weise ableiten. Es sei (S. 120 (22.))

$$\sigma(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = u\prod_{w_1}{}'\left\{\left(1 - \frac{u}{w_1}\right)e^{\frac{u}{w_1} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_1^2}}\right\},$$

wo also das Product über alle positiven und negativen ganzen Zahlen m_1 und n_1, ausgenommen $m_1 = n_1 = 0$, zu erstrecken ist. Nun ist bei der Darstellung durch 2ω und $2\omega'$

$$w_1 = m_1(2p\omega + 2q\omega') + n_1(2p'\omega + 2q'\omega').$$

Schreibt man dies in der Form

$$2m\omega + 2n\omega',$$

sodass

$$m = pm_1 + p'n_1, \quad n = qm_1 + q'n_1$$

ist, so entspricht jedem Paare ganzer Zahlen (m_1, n_1) ein ebensolches Paar (m, n), und wenn man m_1 und n_1 unabhängig von einander alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen lässt, so durchlaufen auch m und n diese Werthe. Umgekehrt gehören zu jedem Paar ganzer Zahlen (m, n) dann und nur dann auch ganzzahlige Werthe von m_1, n_1, wenn, wie hier bereits vorausgesetzt, $pq' - qp' = \pm 1$ ist (vgl. S. 64—65). Unter dieser Bedingung ist die Gesammtheit der in dem Product

$$u\prod_{w}{}'\left\{\left(1 - \frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}\right\} = \sigma(u\,|\,\omega, \omega')$$

enthaltenen Factoren mit der Gesammtheit der in jenem Product vorkommenden identisch, d. h.

$$\sigma(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \sigma(u|\omega, \omega').$$

Aus denselben Gründen ist auch die $\wp$-Function von der Wahl des primitiven Periodenpaares unabhängig. Betrachtet man die elliptischen und die mit ihnen zusammenhängenden Functionen als nicht nur von dem Argument u, sondern auch von den Grössen ω und ω' abhängend, so kann man sagen: Die σ-Function und die $\wp$-Function bleiben ungeändert, wenn auf ω, ω' eine homogene lineare Substitution mit der Determinante ± 1 angewendet wird; sie haben für eine solche Substitution den Charakter von Invarianten.

Von den Functionen $\sigma_\alpha u$ lässt sich nicht dasselbe behaupten, wenigstens nicht von $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ einzeln, sondern nur von ihrer Gesammtheit. Betrachtet man z. B. die Function $\sigma_1(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, die durch die Gleichung

$$\sigma_1(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{-\tilde{\eta} u} \frac{\sigma(u+\tilde{\omega}|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega}|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')}$$

definirt ist, so hat man nach der eben bewiesenen Invarianz

$$\sigma_1(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{-\tilde{\eta} u} \frac{\sigma(u+\tilde{\omega}|\omega, \omega')}{\sigma(\tilde{\omega}|\omega, \omega')}. \tag{25.}$$

Da nun $\tilde{\omega} = p\omega + q\omega'$ z. B. beliebig gleich $\omega, \omega+\omega'$ oder ω' gesetzt werden darf, so geht die rechte Seite der Reihe nach in eine der drei Functionen $\sigma_1(u|\omega, \omega'), \sigma_2(u|\omega, \omega'), \sigma_3(u|\omega, \omega')$ über.

Ist

$$\wp\tilde{\omega} = e_\alpha, \quad \wp(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}') = e_\beta, \quad \wp\tilde{\omega}' = e_\gamma, \tag{26.}$$

wo α, β, γ, wie früher, von einander verschieden, also gleich den Zahlen 1, 2, 3, abgesehen von der Reihenfolge, sein sollen, so möge

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_1(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\alpha(u|\omega, \omega') \\ \sigma_2(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\beta(u|\omega, \omega') \\ \sigma_3(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\gamma(u|\omega, \omega') \end{aligned}\right. \tag{27.}$$

gesetzt werden. Von den Functionen auf den rechten Seiten können nicht zwei einander gleich werden, sonst würden nach der Formel

$$\sigma_\alpha^2 u = (\wp u - e_\alpha)\sigma^2 u$$

(S. 89) auch zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich sein.

Die erste Aufgabe ist, festzustellen, wie man aus dem Bildungsgesetz des neuen primitiven Periodenpaares, d. h. aus den beiden Paaren ganzer Zahlen (pq), $(p'q')$, die Werthe der Indices α, β, γ finden kann. Schon früher (S. 88) ist bewiesen worden, dass es dabei nicht sowohl auf die Werthe dieser Zahlen als auf ihre Reste für den Modul 2 ankommt, sodass für $p_1 \equiv p$, $q_1 \equiv q \bmod 2$

$$\sigma_{p_1 q_1}(u) = \sigma_{pq}(u)$$

ist. Hiernach genügt es, p, q, p', q' die Werthe 0 und 1 beizulegen, wobei selbstverständlich noch $p = q = 0$, $p' = q' = 0$ auszuschliessen ist. Die Fälle, die der Bedingung

$$pq' - qp' = \pm 1$$

zufolge möglich sind, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Grösse $\tilde{\omega}$ ist darin der Reihe nach gleich ω, $\omega + \omega'$, ω' gesetzt; die eben genannte Bedingung ergiebt dann die zugehörigen Werthe von $\tilde{\omega}'$, und zwar sind jeder der drei Annahmen über das Zahlenpaar (pq) nur zwei für $(p'q')$ zuzuordnen, weil auch die gleichzeitigen Annahmen $p' = p$, $q' = q$ nicht zulässig sind.

	p	q	p'	q'
I	1	0	0	1
II	1	0	1	1
III	1	1	0	1
IV	1	1	1	0
V	0	1	1	0
VI	0	1	1	1

Nach der Formel (25.) gehören dabei für die Function $\sigma_1(u \,|\, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ die Annahmen I und II, III und IV, V und VI zusammen, da es auf $\tilde{\omega}'$ nicht ankommt; sie liefern der Reihe nach $\alpha = 1, 2, 3$. Ebenso kommt für

$$\sigma_3(u \,|\, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{-\tilde{\eta}' u} \frac{\sigma(u + \tilde{\omega}' \,|\, \omega, \omega')}{\sigma(\tilde{\omega}' \,|\, \omega, \omega')}$$

nur das Zahlenpaar $(p'q')$ in Betracht. D. h. die Annahmen IV und V, II und VI, I und III gehören zusammen und geben $\gamma = 1, 2, 3$. Da nun die Zahlen α, β, γ stets mit den Zahlen 1, 2, 3 in ihrer Gesammtheit übereinstimmen, so lässt sich der Werth von β in jedem Falle sofort angeben, und es entsteht folgende Tabelle.

	α	β	γ
I	1	2	3
II	1	3	2
III	2	1	3
IV	2	3	1
V	3	2	1
VI	3	1	2

Hiernach kann man aus den aufgestellten Productformeln andere ableiten, in denen

$$\omega \quad \omega' \quad \eta \quad \eta' \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad v \quad \tau$$

durch

$$\tilde{\omega} \quad \tilde{\omega}' \quad \tilde{\eta} \quad \tilde{\eta}' \quad \sigma_\alpha \quad \sigma_\beta \quad \sigma_\gamma \quad \frac{u}{2\tilde{\omega}} \quad \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$$

ersetzt sind. Doch sollen die Zeichen v und τ, sowie h und z in der allgemeineren Bedeutung beibehalten werden, sodass jetzt

$$\text{(28.)} \qquad \frac{u}{2\tilde{\omega}} = v, \qquad e^{v\pi i} = z,$$

$$\text{(29.)} \qquad \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \tau, \qquad e^{\tau\pi i} = h$$

ist. Die allgemeinen Formeln lauten dann

$$\text{(30.)} \qquad \sigma u = \frac{2\tilde{\omega}}{\pi} e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2})}{(1-h^{2n})^2},$$

$$\text{(31.)} \qquad \sigma_\alpha u = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \frac{z + z^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2})}{(1+h^{2n})^2},$$

$$\text{(32.)} \qquad \sigma_\beta u = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2})}{(1+h^{2n-1})^2},$$

$$\text{(33.)} \qquad \sigma_\gamma u = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}v^2} \prod_{u=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2})}{(1-h^{2n-1})^2}.$$

Siebzehntes Kapitel.

Weitere Umwandlung der Productausdrücke für die σ-Functionen.

Aus den gefundenen Formeln können durch Einführung der Quadratwurzeln aus den Differenzen der Grössen e_1, e_2, e_3 die in den Nennern vorkommenden Functionen von h entfernt werden.

Zunächst ergeben sich mittels der Beziehungen

$$\wp u - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right)^2 \qquad (\lambda = \alpha, \beta, \gamma)$$

für bestimmte Werthe der Quadratwurzeln aus diesen Differenzen die nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\lambda = \alpha;\quad & u = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\beta - e_\alpha} &= \frac{\sigma_\alpha(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')},\\
& u = \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\gamma - e_\alpha} &= \frac{\sigma_\alpha \tilde{\omega}'}{\sigma \tilde{\omega}'},\\
\lambda = \beta;\quad & u = \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\gamma - e_\beta} &= \frac{\sigma_\beta \tilde{\omega}'}{\sigma \tilde{\omega}'},\\
& u = \tilde{\omega}, & \sqrt{e_\alpha - e_\beta} &= \frac{\sigma_\beta \tilde{\omega}}{\sigma \tilde{\omega}},\\
\lambda = \gamma;\quad & u = \tilde{\omega}, & \sqrt{e_\alpha - e_\gamma} &= \frac{\sigma_\gamma \tilde{\omega}}{\sigma \tilde{\omega}},\\
& u = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}', & \sqrt{e_\beta - e_\gamma} &= \frac{\sigma_\gamma(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')}.
\end{aligned}$$

Diese Wurzelwerthe gehören paarweise derart zusammen, dass sich immer zwei Wurzeln eines und desselben Paares auf dieselbe Differenz mit entgegengesetzten Vorzeichen beziehen. Der Zusammenhang zwischen zwei solchen Grössen ergiebt sich aus der eindeutigen Darstellung sofort. So erhält man mittels der Formeln S. 88 (4.) z. B.

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = -e^{\tilde{\eta}(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')} \frac{\sigma\tilde{\omega}'}{\sigma\tilde{\omega}.\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')},$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = e^{(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')\tilde{\omega}} \frac{\sigma\tilde{\omega}'}{\sigma\tilde{\omega}.\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')},$$

also

$$\frac{\sqrt{e_\beta - e_\alpha}}{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}} = -e^{\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\tilde{\eta}'} = -e^{\frac{\varepsilon\pi i}{2}},$$

$$\sqrt{e_\beta - e_\alpha} = -\varepsilon i \sqrt{e_\alpha - e_\beta},$$

wo $\varepsilon = +1$ ist, wenn der Annahme auf S. 127 entsprechend

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega} i}\right) > 0$$

vorausgesetzt wird.

Von den sechs Wurzelgrössen sollen $\sqrt{e_\beta - e_\gamma}$, $\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}$, $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$ beibehalten werden. Um den Werth der ersten aus der Formel

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = \frac{\sigma_\gamma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')}{\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')}$$

in Verbindung mit den Gleichungen (30.) und (33.) (S. 160) zu finden, hat man

$$v = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau, \quad z = i h^{\frac{1}{2}}$$

zu setzen. Dann wird

$$\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}') = \frac{2\tilde{\omega}}{\pi} e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)^2} \frac{h^{\frac{1}{2}} + h^{-\frac{1}{2}}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n+1})(1+h^{2n-1})}{(1-h^{2n})^2},$$

$$\sigma_\gamma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}') = e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n})(1+h^{2n-2})}{(1-h^{2n-1})^2}.$$

Es sei nun

$$(1.) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n}) = h_0,$$

$$(2.) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n}) = h_1,$$

$$(3.) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}) = h_2,$$

$$(4.) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n-1}) = h_3,$$

sodass die in den Nennern von $\sigma u, \sigma_\alpha u, \sigma_\beta u, \sigma_\gamma u$ vorkommenden Functionen von h der Reihe nach gleich $h_0^2, h_1^2, h_2^2, h_3^2$ sind. Die Division von $\sigma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')$ in $\sigma_\gamma(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')$ liefert, wenn die einzelnen Producte von einander getrennt und

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n+1}) = \frac{1}{1+h}\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-2}) = 2\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n})$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{e_\beta - e_\gamma} = 4\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}h^{\frac{1}{4}}\frac{h_1^2}{h_3^2}\frac{h_0^2}{h_2^2}.$$

Noch einfacher ergiebt sich

$$\sqrt{e_\alpha - e_\gamma} = \frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\frac{h_2^2}{h_3^2}\frac{h_0^2}{h_1^2},$$

$$\sqrt{e_\alpha - e_\beta} = \frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\frac{h_3^2}{h_2^2}\frac{h_0^2}{h_1^2}.$$

Hiernach lassen sich auch noch bestimmte Werthe der vierten Wurzeln aus $e_\beta - e_\gamma, \ldots$, mit $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ multiplicirt, als eindeutige Functionen von h darstellen:

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = 2h^{\frac{1}{8}}\frac{h_0 h_1}{h_2 h_3}, \tag{5.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \frac{h_0 h_2}{h_1 h_3}, \tag{6.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \frac{h_0 h_3}{h_1 h_2}. \tag{7.}$$

Unter $h^{\frac{1}{8}}$ wird dabei der durch die Reihe für $e^{\frac{1}{8}\tau\pi i}$ bestimmte Werth verstanden. Definirt man nun z. B. $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ als positiv, wenn $\tilde{\omega}$ reell und positiv ist, sonst als im reellen Theile positiv, so sind die Werthe der vierten Wurzeln völlig bestimmt.

Die Ausdrücke selbst können in Folge einer zwischen h_0, h_1, h_2, h_3 stattfindenden Beziehung noch vereinfacht werden. Multiplicirt man diese vier unendlichen Producte gliedweise, so findet man

$$h_0 h_1 h_2 h_3 = (1-h^2)(1-h^4)(1-h^6)\cdots = h_0,$$

also

$$h_1 h_2 h_3 = 1, \tag{8.}$$

und demnach

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = 2h^{\frac{1}{4}}h_0 h_1^2 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n})^2,$$

$$(10.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = h_0 h_2^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n-1})^2,$$

$$(11.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = h_0 h_3^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})^2.$$

Ist, wie schon früher (S. 74), G die Discriminante der cubischen Gleichung $S = 0$, also

$$\begin{aligned} G &= (e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2 \\ &= (e_\beta-e_\gamma)^2(e_\alpha-e_\gamma)^2(e_\alpha-e_\beta)^2, \end{aligned}$$

und wird ein bestimmter Werth der achten Wurzel aus G durch die Formel

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}$$

erklärt, so folgt aus (9.), (10.), (11.)

$$(12.)\qquad \frac{2\tilde{\omega}}{\pi}\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} = 2h^{\frac{1}{4}}h_0^3 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^3.$$

Man multiplicire nun die letzte Gleichung mit der für $\mathfrak{G}u$, die drei, aus denen sie abgeleitet ist, der Reihe nach mit denen für $\mathfrak{G}_\alpha u$, $\mathfrak{G}_\beta u$, $\mathfrak{G}_\gamma u$, schreibe ausserdem den Exponentialfactor wieder als Function von u, so erhält man für die $\mathfrak{G}$-Functionen folgende Ausdrücke:

$$(13.)\qquad \mathfrak{G}u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[3]{G}}\,\frac{z-z^{-1}}{i}h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2}),$$

$$(14.)\qquad \mathfrak{G}_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}(z+z^{-1})h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2}),$$

$$(15.)\qquad \mathfrak{G}_\beta u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2}),$$

$$(16.)\qquad \mathfrak{G}_\gamma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2}).$$

Darin ist $\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}$ als reciproker Werth der oben eingeführten Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ definirt.

Achtzehntes Kapitel.

Die vier Theta-Functionen.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Transformation der für die σ-Functionen gefundenen Productausdrücke in unendliche Reihen. Dass eine solche Umwandlung möglich ist, ergiebt sich aus dem schon auf S. 155 herangezogenen Satze durch Vertauschung von Bezeichnungen. Die unendlichen Reihen enthalten unendlichviele Potenzen von z^2 mit positiven und negativen Exponenten. Bei der wirklichen Darstellung wird man eine der eben abgeleiteten Formeln (15.), (16.) vor (13.) und (14.) bevorzugen, weil diese im Gegensatz zu jenen vor dem Productzeichen noch $z \mp z^{-1}$ enthalten. Ferner ist $\sigma_\beta u$ noch vor $\sigma_\gamma u$ dadurch ausgezeichnet, dass die beiden Bestandtheile im zweiten und dritten Factor des allgemeinen Gliedes durch das Pluszeichen verbunden sind. Wir gehen also von $\sigma_\beta u$ aus; die Ausdrücke für die übrigen σ-Functionen lassen sich dann durch einfache Substitutionen herleiten.

Es sei

$$(1.)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^2)(1+h^{2n-1}z^{-2}) = F(z),$$

und es werde

$$(2.)\qquad F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu}$$

gesetzt, wo die Coefficienten A_ν zu bestimmende Functionen von h sind. Für die Berechnung soll untersucht werden, wie $F(z)$ sich ändert, wenn das Argument u um eine Periode vermehrt wird. Die Vermehrung um $2\tilde{\omega}$ ist allerdings ohne Wirkung auf $F(z)$, denn z ändert dann nur sein Vorzeichen. Aber bei der Änderung von u um $2\tilde{\omega}$ geht v in $v+\tau$, z in hz über. In

$F(hz)$ kommt vor

$$(1+h^3z^2)(1+h^5z^2)\dots$$
$$(1+h^{-1}z^{-2})(1+hz^{-2})\dots;$$

will man $F(z)$ daraus wieder erhalten, so hat man mit $1+hz^2$ zu multipliciren und mit $1+h^{-1}z^{-2}$ zu dividiren:

$$F(z) = \frac{1+hz^2}{1+h^{-1}z^{-2}}F(hz),$$

oder

$$(3.)\qquad F(z) = hz^2 F(hz);$$

also

$$\sum A_\nu z^{2\nu} = hz^2 \sum A_\nu h^{2\nu} z^{2\nu}$$
$$= \sum A_\nu h^{2\nu+1} z^{2\nu+2}.$$

Um links und rechts die Coefficienten vergleichen zu können, ersetze man rechts ν durch $\nu-1$; dann durchläuft ν wieder die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Aus

$$\sum A_\nu z^{2\nu} = \sum A_{\nu-1} h^{2\nu-1} z^{2\nu}$$

folgt

$$A_\nu = h^{2\nu-1} A_{\nu-1}$$

oder

$$A_\nu h^{-\nu^2} = A_{\nu-1} h^{-(\nu-1)^2};$$

d. h. $A_\nu h^{-\nu^2}$ bleibt ungeändert, wenn man ν durch $\nu-1$ ersetzt. Durch weiteres Hinabsteigen zu $\nu-2, \nu-3, \dots$ findet man

$$A_\nu h^{-\nu^2} = A_0,$$
$$(4.)\qquad A_\nu = A_0 h^{\nu^2},$$

wo A_0 noch zu bestimmen ist.

Nun lassen sich die drei unendlichen Producte, die in der Formel (1.) für $F(z)$ mit einander multiplicirt sind, aus einem und demselben Ausdruck herleiten. Es sei

$$(5.)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+h^n z) = f(h,z),$$

so wird

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n}) = f(h^2,-1),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}z^2) = f(h^2,h^{-1}z^2),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}z^{-2}) = f(h^2,h^{-1}z^{-2}).$$

Solche Producte kommen schon bei Euler in der Introductio in analysin infinitorum vor, wo von der Theilung der Zahlen die Rede ist. Ferner werde

$$f(h, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6.}$$

gesetzt. Da für $z = 0$ $f(h, z)$ gleich Eins wird und die Reihe sich auf das Anfangsglied reducirt, so ist

$$a_0 = 1.$$

Zur Bestimmung der übrigen Coefficienten ersetze man wieder z durch hz und vergleiche die neue Function mit der ursprünglichen. Es ist

$$f(h, hz) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + h^{n+1} z) = \frac{f(h, z)}{1 + hz},$$

$$(1 + hz) \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Multiplicirt man links aus, so fällt das Anfangsglied a_0 der ersten Summe gegen das Anfangsglied der rechten Seite weg; schreibt man dann in der zweiten Summe links n für $n+1$, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} h^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

und durch Coefficientenvergleichung

$$(a_n + a_{n-1}) h^n = a_n,$$

$$a_n = \frac{h^n}{1 - h^n} a_{n-1}. \tag{7.}$$

Da a_0 bekannt ist, so sind sämmtliche Coefficienten bekannt, und zwar wird

$$a_n = \frac{h^n}{1 - h^n} \frac{h^{n-1}}{1 - h^{n-1}} \cdots \frac{h}{1 - h} a_0,$$

$$a_n = \frac{h^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-h)(1-h^2)\dots(1-h^n)}. \tag{8.}$$

Setzt man nun, um die einzelnen Theile von $F(z)$ zu bilden,

$$f(h^2, h^{-1} z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n},$$

so findet man die Coefficienten c_n dadurch, dass man erstens in $a_n(h)$ h^2 für h

schreibt und zweitens die aus der Substitution $h^{-1}z^2$ für z hervorgehende Potenz von h berücksichtigt. Dann wird

$$(9.)\qquad c_n = h^{-n}a_n(h^2) = \frac{h^{n^2}}{(1-h^2)(1-h^4)\dots(1-h^{2n})}.$$

Ebenso ist

$$f(h^2, h^{-1}z^{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-2n},$$

wo c_n denselben Werth hat wie vorher, da nur z durch z^{-1} vertreten wird. Aus diesen Reihen setzt sich $F(z)$ in folgender Weise zusammen:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu} = f(h^2,-1)(c_0+c_1z^2+\dots+c_\nu z^{2\nu}+\dots).\\ (c_0+c_1z^{-2}+\dots+c_\nu z^{-2\nu}+\dots),$$

und die Coefficientenvergleichung ergiebt z. B. für irgend einen positiven Werth von ν

$$A_\nu = f(h^2,-1)(c_0c_\nu+c_1c_{\nu+1}+c_2c_{\nu+2}+\dots),$$

$$(10.)\qquad A_\nu = f(h^2,-1)\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda c_{\lambda+\nu}.$$

Die Gleichung (4.) könnte hieraus sofort wieder abgeleitet werden. Benutzt man sie in der Form

$$A_0 = h^{-\nu^2}A_\nu$$

und setzt

$$f(h^2,-1)c_{\lambda+\nu} = f(h^2,-1)\frac{h^{(\lambda+\nu)^2}}{(1-h^2)(1-h^4)\dots(1-h^{2\lambda+2\nu})}$$
$$= h^{(\lambda+\nu)^2}(1-h^{2\lambda+2\nu+2})(1-h^{2\lambda+2\nu+4})\dots,$$

so findet man

$$(11.)\qquad A_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda h^{\lambda^2+2\lambda\nu}(1-h^{2\lambda+2\nu+2})(1-h^{2\lambda+2\nu+4})\dots.$$

Dieser Ausdruck gilt für beliebige Werthe von ν, und man kann A_0 gleich seinem Grenzwerth für $\nu=\infty$ setzen, wenn ein solcher existirt. Nun ist der Annahme nach $|h|<1$, mithin verschwinden mit unbegrenzt wachsendem ν alle Potenzen von h, in deren Exponenten ν überhaupt vorkommt; die unendlichen Producte werden zu Eins, ihre Coefficienten $c_\lambda h^{\lambda^2+2\lambda\nu}$ für $\lambda>0$ zu Null. Nur für $\lambda=0$ ist ν hierin garnicht enthalten. Das entsprechende Glied von A_0 ist

$$c_0(1-h^{2\nu+2})(1-h^{2\nu+4})\dots$$

und nähert sich für $\nu=\infty$ der Grenze c_0. Diese Grösse hat aber den Werth Eins, wie aus

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$$

sofort folgt. Also ist schliesslich

$$A_0 = 1,$$

$$F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} h^{\nu^2} z^{2\nu}. \tag{12.}$$

Hiernach ist die Reihenentwickelung des in $\mathfrak{S}_\beta u$ vorkommenden unendlichen Productes bekannt, und damit auch des in $\mathfrak{S}_\gamma u$ enthaltenen, denn dieses ist gleich $F(zi)$.

Es sei ferner die in $\mathfrak{S}_\alpha u$ auftretende Function von z und h mit $F_1(z)$ bezeichnet, also

$$(z+z^{-1})h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2}) = F_1(z)$$

gesetzt. Diese Grösse kann mit

$$F\left(zh^{\frac{1}{2}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n-2}z^{-2})$$
$$= \frac{z+z^{-1}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^2)(1+h^{2n}z^{-2})$$

verglichen werden, es ist

$$F_1(z) = zh^{\frac{1}{4}}F\left(zh^{\frac{1}{2}}\right).$$

Endlich wird

$$F_1(iz) = i(z-z^{-1})h^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})(1-h^{2n}z^2)(1-h^{2n}z^{-2}),$$

und dieser Ausdruck kommt, vom Zeichen abgesehen, in $\mathfrak{S}u$ vor.

Die Zusammenstellung der vier Formeln ergiebt

$$\mathfrak{S}u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[8]{G}}\,\frac{z}{i}\,h^{\frac{1}{4}}F\left(zih^{\frac{1}{2}}\right), \tag{13.}$$

$$\mathfrak{S}_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}\,zh^{\frac{1}{4}}F\left(zh^{\frac{1}{2}}\right), \tag{14.}$$

$$\mathfrak{S}_{\beta} u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}} \frac{e^{\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_{\alpha} - e_{\gamma}}} F(z), \tag{15.}$$

$$\mathfrak{S}_{\gamma} u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}} \frac{e^{\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_{\alpha} - e_{\beta}}} F(zi). \tag{16.}$$

Die aus den rechten Seiten hervorgehenden Reihenentwickelungen können in verschiedenen Formen geschrieben werden, wenn für z und h ihre Werthe als Exponentialgrössen wieder eingesetzt oder auch h beibehalten und die Potenzen von z zu trigonometrischen Functionen von v vereinigt werden. Man kommt hierauf unmittelbar, wenn man die Glieder mit gleichen Potenzen von h zusammenzieht:

$$\begin{aligned}
F(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\left(z^{2n} + z^{-2n}\right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\left(e^{2nv\pi i} + e^{-2nv\pi i}\right) \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2} \cos 2nv\pi, \\
F(zi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{n^2}\left(z^{2n} + z^{-2n}\right) \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{n^2} \cos 2nv\pi.
\end{aligned}$$

In

$$z h^{\frac{1}{4}} F\left(z h^{\frac{1}{2}}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} h^{(\nu+\frac{1}{2})^2} z^{2\nu+1}$$

hat man zu demselben Zweck die Glieder mit $\nu = n$ und $\nu = -(n+1)$ zusammenzunehmen. Das allgemeine Glied heisst dann

$$h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\left(z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\right) = 2h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)v\pi.$$

Ebenso ist in der Reihe für $\mathfrak{S}u$ zu verfahren, nur erhalten dort die Potenzen von z, die mit derselben Potenz von h multiplicirt sind, entgegengesetzte Vorzeichen. Das allgemeine Glied wird:

$$\frac{(-1)^n}{i} h^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\left(z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\right) = 2(-1)^n h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \sin(2n+1)v\pi.$$

Für diese Reihen sollen, wenn mit der in σu vorkommenden begonnen wird, folgende Bezeichnungen gelten, in die das in h enthaltene Periodenverhältniss τ aufgenommen wird:

$$(17.)\qquad 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \sin(2n+1)v\pi = 2h^{\frac{1}{4}}\sin v\pi - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3v\pi + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi - \cdots = \vartheta_0(v|\tau),$$

$$(18.)\qquad 2\sum_{n=0}^{\infty} h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)v\pi = 2h^{\frac{1}{4}}\cos v\pi + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3v\pi + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi + \cdots = \vartheta_1(v|\tau),$$

$$(19.)\qquad 1+2\sum_{n=1}^{\infty} h^{n^2}\cos 2nv\pi = 1+2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi + 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_2(v|\tau),$$

$$(20.)\qquad 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n h^{n^2}\cos 2nv\pi = 1-2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi - 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_3(v|\tau).$$

Die Ausdrücke der σ-Functionen durch die ϑ-Functionen werden:

$$(21.)\qquad \sigma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[8]{G}}\,\vartheta_0\left(\frac{u}{2\tilde{\omega}}\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right),$$

$$(22.)\qquad \sigma_\alpha u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}}\,\vartheta_1\left(\frac{u}{2\tilde{\omega}}\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right),$$

$$(23.)\qquad \sigma_\beta u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}\,\vartheta_2\left(\frac{u}{2\tilde{\omega}}\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right),$$

$$(24.)\qquad \sigma_\gamma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{2\tilde{\omega}}\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right).$$

Diese Formeln gestatten, auch die vorkommenden Wurzelgrössen, die auf S. 164 durch unendliche Producte dargestellt worden sind, in Form von Reihen auszudrücken. Da für $u=0$ $\sigma_\alpha u = 1$ wird, so hat man aus (22.)

$$(25.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = \vartheta_1(0|\tau) = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \cdots = 2h^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} h^{n(n+1)},$$

und ebenso aus (23.) und (24.)

$$(26.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} = \vartheta_2(0|\tau) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots,$$

$$(27.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta} = \vartheta_3(0|\tau) = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots.$$

Sind beispielsweise e_1, e_2, e_3 reell, so giebt es ein primitives Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ mit einer reellen positiven und einer positiv imaginären Periode. Es sei dann $\tilde{\omega} = \omega$, wozu $\alpha = 1$ gehört, und ferner $\beta = 2$, $\gamma = 3$. Wegen

$$\frac{\omega'}{\omega} = \mu i, \quad \mu > 0$$

ist

$$h = e^{-\mu\pi}$$

reell, positiv und kleiner als Eins. Die Werthe der beiden Reihen auf den rechten Seiten von (25.) und (26.) sind, wie unmittelbar zu sehen, reell und positiv. Von der dritten kann man dies in folgender Art beweisen. Für hinreichend kleine Werthe von h ist $\vartheta_3(0|\tau)$ sicher positiv. Um negativ zu werden, müsste es der Stetigkeit wegen durch Null hindurchgehen. Nun verschwindet aber $\vartheta_3(v|\tau)$ allgemein nur dann, wenn $\sigma_3(u|\omega, \omega')$ verschwindet, also für

$$u = 2m\omega + 2(n - \tfrac{1}{2})\omega'.$$

Welches auch die Werthe von ω und $|\omega'|$ sein mögen, so ist hierunter kein reeller Werth enthalten.

Hiernach ergeben sich aus den obigen Formeln, nachdem $\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}$ als positiv erklärt ist (S. 163), die Werthe der vierten Wurzeln $\sqrt[4]{e_2 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_3}$, $\sqrt[4]{e_1 - e_2}$ ebenfalls als positiv.

Was die Darstellung von e_1, e_2, e_3 selbst durch $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ angeht, so folgt diese aus (25.), (26.), (27.), nämlich

$$e_\beta - e_\gamma = \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 \vartheta_1'^4(0),$$

$$e_\alpha - e_\gamma = \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 \vartheta_2^4(0),$$

$$e_\alpha - e_\beta = \left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 \vartheta_3^4(0),$$

in Verbindung mit

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$$

in der Form

$$(28.)\quad \begin{cases} e_\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 (\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)) \\ e_\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 (\vartheta_1^4(0) - \vartheta_3^4(0)) \\ e_\gamma = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}\right)^2 (\vartheta_1^4(0) + \vartheta_2^4(0)). \end{cases}$$

Die drei hierin vorkommenden Werthe der Theta-Functionen für das Argument Null sind durch eine einfache Relation verbunden. Da nämlich in (25.), (26.), (27.) nur die Differenzen der Grössen e_λ auftreten, so ergiebt sich

$$(29.)\quad \vartheta_1^4(0) + \vartheta_3^4(0) = \vartheta_2^4(0).$$

Man kann auch die Function ϑ_0 oder vielmehr ihre erste Ableitung für $v = 0$ in die Relationen einbeziehen, indem man die Gleichung (21.) hinzunimmt. Es ist (S. 32)

$$\begin{aligned} \sigma u &= u + c_1 u^5 + \cdots = 2\tilde{\omega} v + \cdots, \\ e^{2\tilde{\omega}\tilde{\eta} v^2} &= 1 + 2\tilde{\omega}\tilde{\eta} v^2 + \cdots, \\ \vartheta_0(v) &= v\vartheta_0'(0) + \tfrac{1}{6} v^3 \vartheta_0'''(0) + \cdots. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von v^1 ergiebt sich

$$2\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}\,\frac{1}{\sqrt[8]{G}}\,\vartheta_0'(0),$$

d. h.

$$(30.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{G} = \frac{1}{2\tilde{\omega}}\,\vartheta_0'(0)$$

oder, da

$$\vartheta_0'(v) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \cos(2n+1)v\pi$$

ist,

$$(31.)\quad \begin{aligned} \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{G} &= \frac{\pi}{\tilde{\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \\ &= \frac{\pi}{\tilde{\omega}} h^{\frac{1}{4}} (1 - 3h^{1\cdot 2} + 5h^{2\cdot 3} - 7h^{3\cdot 4} + \cdots). \end{aligned}$$

Nun war

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta},$$

also wird

$$\vartheta_0'(0) = \pi\,\vartheta_1(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0). \tag{32.}$$

Endlich kann man aus derselben Potenzentwickelung einen Ausdruck von $\tilde{\eta}$ mittels der Theta-Reihen ableiten. Ein Glied mit v^3 kommt auf der linken Seite der Gleichung (21.) nicht vor; die Nullsetzung des Coefficienten dieser Potenz auf der rechten Seite liefert

$$\begin{aligned}
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -\frac{1}{6}\,\frac{\vartheta_0'''(0)}{\vartheta_0'(0)} \\
&= \frac{\pi^2}{6}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^3 h^{n(n+1)}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,h^{n(n+1)}} \\
&= \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^{1\cdot 2}+5^3h^{2\cdot 3}-7^3h^{3\cdot 4}+\cdots}{1-3h^{1\cdot 2}+5h^{2\cdot 3}-7h^{3\cdot 4}+\cdots}.
\end{aligned} \tag{33.}$$

Aus den übrigen Beziehungen zwischen σ- und ϑ-Functionen ergeben sich veränderte Ausdrücke für dieselbe Grösse. Es ist, wie aus $\sigma_\alpha u = \sigma u\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ und den Reihenentwickelungen von σu und $\wp u$ folgt,

$$\sigma_\alpha u = 1 - \tfrac{1}{2}e_\alpha u^2 + \cdots = 1 - 2e_\alpha\tilde{\omega}^2 v^2 + \cdots,$$

und ferner

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1(0) + \tfrac{1}{2}\vartheta_1''(0)\,v^2 + \cdots.$$

Behält man in (22.) den Coefficienten von v^2 bei, so findet man

$$-2e_\alpha\tilde{\omega}^2\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma} = \frac{1}{2}\vartheta_1''(0) + 2\tilde{\omega}\tilde{\eta}\,\vartheta_1(0).$$

Die vierte Wurzel kann hieraus mittels (25.) entfernt werden, und die Zusammenstellung der entstehenden Gleichung mit denen, die in derselben Weise aus (23) und (24.) hervorgehen, liefert

$$\left\{\begin{aligned}
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\alpha\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_1''(0)}{\vartheta_1(0)} \\
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\beta\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} \\
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\gamma\tilde{\omega}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}
\end{aligned}\right. \tag{34.}$$

oder

$$
(35.)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\alpha\tilde{\omega}^2 + \frac{\pi^2}{2}\,\frac{1 + 3^2 h^{1\cdot 2} + 5^2 h^{2\cdot 3} + \cdots}{1 + h^{1\cdot 2} + h^{2\cdot 3} + \cdots}\\
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\beta\tilde{\omega}^2 + 4\pi^2\,\frac{h + 4h^4 + 9h^9 + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots}\\
2\tilde{\omega}\tilde{\eta} &= -2e_\gamma\tilde{\omega}^2 - 4\pi^2\,\frac{h - 4h^4 + 9h^9 - \cdots}{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots}.
\end{aligned}
\right.
$$

Neunzehntes Kapitel.

Die allgemeine Theta-Function.

Die Theta-Functionen sind von Jacobi in die Analysis eingeführt worden. In seinem Werke Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829) kommen erst zwei von ihnen vor, die mit $\Theta(u)$ und $\mathrm{H}(u)$ bezeichnet werden; und zwar stimmt $\mathrm{H}(u)$ überein mit der Reihe, durch die wir σu dargestellt haben, $\Theta(u)$ mit der in $\sigma_3 u$ auftretenden. Die hier mit h bezeichnete Grösse heisst bei Jacobi q, und demgemäss erscheinen die Functionen ϑ als abhängig von den beiden Argumenten v und q. Den Functionen

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_1(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_2(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_3(v\,|\,\tau)$$

entsprechen bei Jacobi

$$\vartheta_1(v\pi, q), \quad \vartheta_2(v\pi, q), \quad \vartheta_3(v\pi, q), \quad \vartheta(v\pi, q).$$

Man hat also, um zu den Jacobischen Functionen überzugehen, überall den Index um eine Einheit zu vermehren und den Index 4 wegzulassen.

Während Jacobi bei der Begründung der elliptischen Functionen ursprünglich von der Umkehrung eines Integrals ausgegangen war, hat er später den Gang der Theorie ganz geändert. Unter der Voraussetzung, dass in

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$$

x und k reell sind, konnte man leicht beweisen, dass $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ u. s. w. reguläre Functionen von u sind. Sobald man aber $\sin\operatorname{am} u$ allgemein für complexe Werthe von u und k erklären wollte, stiess man auf Schwierigkeiten. Sie hatten hauptsächlich darin ihren Grund, dass man die Theorie der Functionen complexer Argumente damals noch nicht so weit ausgebildet hatte, um sich von der Bedeutung eines Integrals mit complexer oberer Grenze eine hinreichend genaue Vorstellung machen zu können. In der obigen Gleichung zwischen x und u gehören zu einem Werthe von x unendlich viele Werthe von u. Hat man einen solchen, so ergiebt sich ein zweiter in der Form $2K-u$, wo

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

und dann alle übrigen durch Addition einer beliebigen Periode. Die Aufgabe wäre nun gewesen, aus der Theorie der complexen Integrale nachzuweisen, dass das elliptische Integral alle diese unendlich vielen Werthe hat. Dann aber ist es leicht zu zeigen, dass umgekehrt, wenn x als Function von u betrachtet wird, x eine einwerthige Function von u ist. Jacobi bemerkt in seinen hinterlassenen Papieren, dass diese Schwierigkeit ihn bewogen habe, den ursprünglich eingeschlagenen Weg zu verlassen. Er nimmt die Theta-Reihen als gegeben an, gleichgiltig wie sie gefunden sind, und untersucht sie. Zuerst zeigt er, dass sie unter der hier immer festgehaltenen Voraussetzung über τ reguläre Functionen dieser Grösse sind, sodann, wie die vier Reihen aus einander entspringen. Weitere Sätze führen auf die Additionstheoreme der elliptischen Functionen. Endlich beweist Jacobi die Existenz einer Differentialgleichung erster Ordnung von der bekannten Form. Er bemerkt in jener Notiz: Wenn einst die Theorie der Integrale mit complexen Grenzen so ausgebildet sein wird, dass man sofort in die functionale Beziehung zwischen u und der oberen Grenze eine Einsicht erhält, so wird es vortheilhafter sein, von dem Integral auszugehen.

Nach den Formeln auf S. 169—171 erscheinen die vier Functionen ϑ ursprünglich, d. h. vor Einführung trigonometrischer Functionen, als Reihen, die nach beiden Seiten in's Unendliche fortschreiten. Es ist

$$(1.)\qquad \vartheta_0(v|\tau) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1},$$

$$(2.)\qquad \vartheta_1(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1},$$

$$(3.)\qquad \vartheta_2(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{n^2} z^{2n},$$

$$(4.)\qquad \vartheta_3(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h^{n^2} z^{2n}.$$

Setzt man für h und z die Exponentialgrössen ein, durch die sie definirt sind (S. 160), so findet man

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{((n+\frac{1}{2})^2\tau+(2n+1)v)\pi i},$$

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{((n+\frac{1}{2})^2\tau+(2n+1)v)\pi i},$$

$$\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(n^2\tau+2nv)\pi i},$$

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{(n^2\tau+2nv)\pi i}.$$

Auch kann man noch $(-1)^n$ in dem allgemeinen Gliede von ϑ_3, $\frac{1}{i}(-1)^n$ in dem von ϑ_0 als Exponentialgrösse schreiben und erhält dann, unter Weglassung des zweiten Arguments τ,

$$\vartheta_0(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(n+\frac{1}{2})(2v-1+(n+\frac{1}{2})\tau)\pi i}, \tag{5.}$$

$$\vartheta_1(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(n+\frac{1}{2})(2v+(n+\frac{1}{2})\tau)\pi i}, \tag{6.}$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n(2v+n\tau)\pi i}, \tag{7.}$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n(2v-1+n\tau)\pi i}. \tag{8.}$$

Alle vier Ausdrücke können in die eine Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(2v+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\tau\right)\pi i} = \vartheta(v;\,\mu,\nu) \tag{9.}$$

zusammengefasst werden, wobei μ nur die Werthe -1 und 0, ν die Werthe 1 und 0 anzunehmen hat. Es ist nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_0(v) &= \vartheta(v;\,-1,1) \\ \vartheta_1(v) &= \vartheta(v;\quad 0,1) \\ \vartheta_2(v) &= \vartheta(v;\quad 0,0) \\ \vartheta_3(v) &= \vartheta(v;\,-1,0). \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

Die vier Functionen genügen, wie die Differentiation von (9.) erkennen lässt, einer und derselben partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = 4\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}. \tag{11.}$$

Multiplicirt man, den Gleichungen S. 171 (21.), (22.), (23.), (24.) gemäss, die ϑ-Reihen mit $e^{\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}}$ und setzt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}} + \left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}} + \mu + \left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i} = \Theta(u;\mu,\nu), \tag{12.}$$

so sieht man, dass die $\mathfrak{S}$- und ϑ-Functionen übereinstimmend in dem Ausdruck

$$C\Theta(u;\mu,\nu)$$

enthalten sind, wo der constante Factor C für die verschiedenen $\mathfrak{S}$-Functionen verschiedene Werthe hat, $\tilde{\eta}$ aber eine Constante bedeutet, die für die ϑ-Functionen gleich Null, für die $\mathfrak{S}$-Functionen gleich $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\tilde{\omega}$ zu setzen ist. μ und ν haben die oben angegebenen speciellen Werthe. Abgesehen davon heisst $\Theta(u;\mu,\nu)$ eine Θ-Function mit den Parametern μ und ν.

Für die allgemeine Theorie der Θ-Functionen ist es wichtig, dass man die Function mit zwei Parametern aus $\Theta(u;0,0)$ durch Vermehrung des Arguments um eine passend gewählte, von den Parametern abhängige Grösse und Multiplication mit einem Exponentialfactor herleiten kann. Es sei

$$\Theta(u;0,0) = \Theta(u). \tag{13.}$$

Man bilde $\Theta(u+\overline{\omega})$, wo

$$\overline{\omega} = \mu\tilde{\omega} + \nu\tilde{\omega}' \tag{14.}$$

sein soll. Der Exponent im allgemeinen Gliede setzt sich dann zusammen aus dem Aggregat, das in $\Theta(u;\mu,\nu)$ als Exponent vorkommt, und den Gliedern

$$\frac{\tilde{\eta} u}{\tilde{\omega}}(\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}') - \frac{\nu u\pi i}{2\tilde{\omega}} + \frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\omega}}(\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}')^2 - \frac{\nu^2\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\frac{\pi i}{4} - \frac{\mu\nu\pi i}{2}.$$

Diese können vereinfacht werden, wenn man eine durch die Gleichung

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\tilde{\eta}' = \frac{\pi i}{2} \tag{15.}$$

definirte Grösse $\tilde{\eta}'$ einführt. Der Coefficient von u wird nämlich $\mu\tilde{\eta}+\nu\tilde{\eta}'$, und die von u freien Glieder erhalten die Form

$$\frac{\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}'}{2}(\mu\tilde{\eta}+\nu\tilde{\eta}') - \frac{\mu\nu\pi i}{4}.$$

Mithin ist

$$(16.)\qquad \Theta(u+\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}') = \Theta(u;\mu,\nu)\, e^{(\mu\tilde{\eta}+\nu\tilde{\eta}')\left(u+\frac{\mu\tilde{\omega}+\nu\tilde{\omega}'}{2}\right)-\frac{\mu\nu\pi i}{4}},$$

oder umgekehrt, wenn noch, dem Ansatz (14.) entsprechend,

$$(17.)\qquad \mu\tilde{\eta}+\nu\tilde{\eta}' = \bar{\eta}$$

geschrieben wird,

$$(18.)\qquad \Theta(u;\mu,\nu) = \Theta(u+\bar{\omega})\, e^{-\bar{\eta}\left(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}\right)+\frac{\mu\nu\pi i}{4}}.$$

Diese Gleichung ist deshalb von Bedeutung, weil sie gestattet, die Untersuchung der allgemeinen Theta-Function auf die der Function $\Theta(u)$ zurückzuführen. Das Argument der Exponentialfunction in dem allgemeinen Gliede der Reihe, die die $\mathfrak{S}$- und ϑ-Functionen umfasst, nämlich, für $C = e^c$,

$$\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}} + \left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i + c,$$

ist eine vollständige ganze Function zweiten Grades der Variablen u und der ganzen Zahl n, über die summirt wird. Setzt man sie gleich

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}un + a_{22}n^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}n + a_{33},$$

so haben $a_{11}, \dots a_{33}$ folgende Werthe:

$$a_{11} = \frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\omega}},\quad 2a_{12} = \frac{\pi i}{\tilde{\omega}},\quad a_{22} = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\pi i,$$

$$2a_{13} = \frac{\nu\pi i}{2\tilde{\omega}},\quad 2a_{23} = \left(\mu+\frac{\nu\tilde{\omega}'}{2\tilde{\omega}}\right)\pi i,\quad a_{33} = \frac{\nu}{2}\left(\mu+\frac{\nu}{2}\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i + c.$$

Denkt man sich umgekehrt $a_{11}, \dots a_{33}$ gegeben, so wird $\tilde{\omega}$ durch die zweite dieser Gleichungen bestimmt, dann $\tilde{\omega}'$ und $\tilde{\eta}$ durch die dritte und erste, ν und sodann μ durch die vierte und fünfte, c durch die letzte Gleichung. Das heisst, man kann, wie auch $a_{11}, \dots a_{33}$ gewählt sein mögen,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{11}u^2+2a_{12}un+a_{22}n^2+2a_{13}u+2a_{23}n+a_{33}} = C\Theta(u;\mu,\nu)$$

setzen, bei passender Annahme der sechs Constanten $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}', \tilde{\eta}, \mu, \nu, C$. Freilich hat dieses Resultat nur eine Bedeutung, wenn die Exponentialreihe convergirt. Wegen des eben bewiesenen Zusammenhanges zwischen $\Theta(u;\mu,\nu)$ und $\Theta(u;0,0)$ kommt es aber bei der Beurtheilung der Convergenz nur auf diese Reihe an. Für $\mu=0$, $\nu=0$ wird $a_{12}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=c$; mithin handelt es sich, von dem constanten Factor C abgesehen, um die Convergenz von

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{11}u^2+2a_{12}un+a_{22}n^2}.$$

Nun ist

$$\Theta(u)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}+n\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+n\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i}=e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}\vartheta_2\left(\frac{u}{2\tilde{\omega}}\middle|\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right),$$

und für die Convergenz der Reihe ϑ_2 gilt die Bedingung

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\right)>0.$$

Allerdings ist sie nur unter den Voraussetzungen abgeleitet worden, die in der Theorie der elliptischen Functionen gelten, dass nämlich $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ ein primitives Periodenpaar der $\wp$-Function bedeute, die der ganzen Theorie zu Grunde liegt, und dass

$$\tilde{\eta}=\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}$$

sei. Aber der Werth von $\tilde{\eta}$ ist offenbar nicht von Belang, da $\tilde{\eta}$ in ϑ_2 nicht vorkommt, vielmehr der Factor $e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}}$ herausgezogen worden ist, wie man dies von vornherein auch mit $e^{a_{11}u^2}$ hätte machen können. Und ebenso ist die Bedeutung von $2\tilde{\omega}$ und $2\tilde{\omega}'$ als Perioden in der Theorie der ϑ-Reihen ganz in den Hintergrund getreten. Man sieht daher, dass die obige Convergenzbedingung nur in die neuen Bezeichnungen umgesetzt zu werden braucht. Da

$$a_{22}=-\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\pi$$

ist, so lautet sie

$$\Re(a_{22})<0.$$

Ganz direct kann diese Bedingung in folgender Weise abgeleitet werden.

Zunächst sieht man sofort, dass sie nothwendig ist. Denn wäre $\Re(a_{22}) \geqq 0$, so würde in

$$\Theta(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{22} n^2}$$

das allgemeine Glied nicht mit wachsendem n beliebig klein werden.

Um zu untersuchen, ob die Bedingung auch hinreicht, setze man

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}un + a_{22}n^2 = a_{22}\left(n + \frac{a_{12}}{a_{22}}u\right)^2 + \left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right)u^2,$$

$$\Theta(u) = e^{\left(a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}\right)u^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a_{22}\left(n + \frac{a_{12}}{a_{22}}u\right)^2},$$

wo es auf den Exponentialfactor vor dem Summenzeichen nicht ankommt. Es sei

$$a_{22} = \alpha + \beta i,$$

$$\frac{a_{12}}{a_{22}}u = \xi + \eta i,$$

also der Exponent im allgemeinen Gliede

$$(\alpha + \beta i)\left((n+\xi)^2 + 2(n+\xi)\eta i - \eta^2\right).$$

Betrachtet man die Reihe der absoluten Beträge,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(n+\xi)^2 - \alpha\eta^2 - 2\beta(n+\xi)\eta} = e^{-\frac{\beta^2\eta^2}{\alpha} - \alpha\eta^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\left(n + \xi - \frac{\beta\eta}{\alpha}\right)^2},$$

und setzt

$$\xi - \frac{\beta\eta}{\alpha} = \zeta,$$

so kommt die absolute Convergenz der Reihe für $\Theta(u)$ auf die Convergenz von

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(n+\zeta)^2}$$

hinaus. Bei positivem n wird der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder,

$$\frac{e^{\alpha(n+1+\zeta)^2}}{e^{\alpha(n+\zeta)^2}} = e^{2\alpha n}\, e^{\alpha(1+2\zeta)},$$

für $\Re(a_{22}) = \alpha < 0$ mit wachsendem n kleiner als Eins, ja sogar beliebig klein. Ist n negativ, $n = -m$, handelt es sich also um den Bestandtheil

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{\alpha(-m+\zeta)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{\alpha(m-\zeta)^2},$$

so bleibt das Ergebniss bestehen, weil sich nur das Zeichen von ζ geändert hat. Demnach ist die Bedingung

$$\Re(a_{22}) < 0 \tag{19.}$$

für die Convergenz der allgemeinen Theta-Reihe nothwendig und hinreichend.

Zwanzigstes Kapitel.

Die Theta-Function mit zwei Parametern. Verwandlungsformeln für die Θ- und σ-Functionen.

Im zehnten Kapitel ist untersucht worden, wie die σ-Functionen sich ändern, wenn das Argument um eine der Grössen $2\tilde{\omega}$ oder $2\tilde{\omega}'$ vermehrt wird. Die Resultate wurden gebraucht, um das periodische Verhalten der σ-Quotienten genau festzustellen. Die entsprechenden Ergebnisse für die ϑ-Functionen würde man mit einem Blick übersehen können, wenn man die Veränderung der Θ-Function mit zwei Parametern bei der Vermehrung des Arguments um eine beliebige Grösse kennte. Denn von dieser Function konnte man zu den ϑ-Functionen dadurch übergehen, dass man $\tilde{\eta} = 0$ setzte, ohne Rücksicht darauf, welche Bedeutung dieser Grösse ursprünglich zukam, und ausserdem noch andere Constanten specialisirte (S. 179). Man steht daher vor der Aufgabe, die Änderung von $\Theta(u; \mu, \nu)$ bei Vermehrung von u um einen beliebigen Zuwachs zu untersuchen, unter der einzigen Annahme, dass die vorhin ermittelte Convergenzbedingung gelte. In Folge dieser Bedingung können $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ kein reelles Verhältniss haben, und man darf daher eine beliebige complexe Grösse $\overline{\omega}'$ in die Form

$$\mu'\tilde{\omega} + \nu'\tilde{\omega}'$$

setzen, für μ' und ν' als reelle Grössen.

Nach der Formel S. 180 (18.) wird nun

$$\Theta(u + \overline{\omega}'; \mu, \nu) = \Theta(u + \overline{\omega} + \overline{\omega}')\, e^{-\overline{\eta}\left(u + \frac{1}{2}\overline{\omega} + \overline{\omega}'\right) + \frac{\mu\nu\pi i}{4}}.$$

Da aber

$$\overline{\omega}+\overline{\omega}' = (\mu+\mu')\tilde{\omega}+(\nu+\nu')\tilde{\omega}'$$

ist, so kann man dieselbe Formel auch umgekehrt dazu verwenden, $\Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}')$ durch eine Θ-Function mit den beiden Parametern $\mu+\mu'$, $\nu+\nu'$ darzustellen. Setzt man, entsprechend S. 179 (14.) und S. 180 (17.),

$$(1.)\qquad \mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}' = \overline{\omega}',$$

$$(2.)\qquad \mu'\tilde{\eta}+\nu'\tilde{\eta}' = \overline{\eta}',$$

so erhält man (S. 180 (16.))

$$\Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}') = \Theta(u;\,\mu+\mu',\,\nu+\nu')\,e^{(\overline{\eta}+\overline{\eta}')\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-(\mu+\mu')(\nu+\nu')\frac{\pi i}{4}}.$$

Bei der Elimination von $\Theta(u+\overline{\omega}+\overline{\omega}')$ erscheint als Argument des Exponentialfactors

$$\overline{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-\frac{1}{2}(\overline{\eta}\,\overline{\omega}'-\overline{\omega}\,\overline{\eta}')-(\mu\nu'+\mu'\nu+\mu'\nu')\frac{\pi i}{4}.$$

Nun ist nach (1.) und (2.)

$$\overline{\eta}\,\overline{\omega}'-\overline{\omega}\,\overline{\eta}' = (\mu\nu'-\mu'\nu)(\tilde{\eta}\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}\tilde{\eta}'),$$

und weiter, da $\tilde{\eta}'$ durch die Gleichung

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}\tilde{\eta}' = \frac{\pi i}{2}$$

erklärt war,

$$\overline{\eta}\,\overline{\omega}'-\overline{\omega}\,\overline{\eta}' = (\mu\nu'-\mu'\nu)\frac{\pi i}{2}.$$

Demnach wird schliesslich

$$(3.)\qquad \Theta(u+\overline{\omega}';\,\mu,\nu) = e^{-\frac{\mu\nu'\pi i}{2}}\,\Theta(u;\,\mu+\mu',\,\nu+\nu')\,e^{\overline{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}.$$

Bei einer beliebigen Veränderung des Arguments wird also die Θ-Function mit zwei Parametern übergeführt in eine Θ-Function mit veränderten Parametern, multiplicirt mit zwei Exponentialfactoren von verschiedener Beschaffenheit. Der erste enthält einen der beiden Parameter der gegebenen Function, der zweite nur Grössen, die mit dem Bildungsgesetz des Increments $\overline{\omega}'$ zusammenhängen. Dieser zweite Factor bleibt mithin für alle Θ-Functionen derselbe.

Nun hatten in den Theta-Reihen, die aus der Theorie der elliptischen Functionen entspringen, die Parameter μ und ν nur die Werthe $-1, 0$ und $+1, 0$. Um die Formel (3.) auf diesen Fall anwenden zu können, braucht man eine Relation, durch die man, wenn μ' und ν' ganze Zahlen sind, die neuen Parameter $\mu+\mu'$, $\nu+\nu'$ wieder auf jene speciellen Werthe zurückführen kann. Es ist leicht, die Veränderung zu beurtheilen, die die Function

$$\Theta(u;\mu,\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i}$$

erfährt, wenn die Parameter um gerade Zahlen vermehrt werden. Ersetzt man μ durch $\mu+2p$, so ändert sich das allgemeine Glied um den Factor

$$e^{\left(n+\frac{\nu}{2}\right)2p\pi i} = e^{\nu p\pi i},$$

der herausgezogen werden kann. Es wird also

$$\Theta(u;\mu+2p,\nu) = e^{\nu p\pi i}\,\Theta(u;\mu,\nu). \tag{4.}$$

Vermehrt man ν um $2q$, so tritt nur $n+q$ an die Stelle von n, und durchläuft ebenso wie dieses alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Θ-Function bleibt ungeändert:

$$\Theta(u;\mu,\nu+2q) = \Theta(u;\mu,\nu). \tag{5.}$$

Beide Formeln zusammen geben

$$\Theta(u;\mu+2p,\nu+2q) = e^{\nu p\pi i}\,\Theta(u;\mu,\nu). \tag{6.}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung kann man die Werthe der (ganzzahligen) Parameter auf ihre kleinsten Reste für den Modul 2, also auf 0 und $+1$ oder -1 zurückführen.

Für die elliptischen Θ-Functionen werde nun, den Gleichungen S. 178 (10.) gemäss,

$$\left\{\begin{aligned} \Theta(u;-1,1) &= \Theta_0(u)\\ \Theta(u;\;\;0,1) &= \Theta_1(u)\\ \Theta(u;\;\;0,0) &= \Theta_2(u)\\ \Theta(u;-1,0) &= \Theta_3(u)\end{aligned}\right. \tag{7.}$$

gesetzt. Bei der Beurtheilung der Veränderung dieser Functionen der Formel

(3.) zufolge hat man vier Fälle zu unterscheiden, weil die (nunmehr ganzzahligen) Coefficienten μ', ν' des Incrementes $\mu'\tilde{\omega} + \nu'\tilde{\omega}'$, jeder für sich, gerade oder ungerade sein können. Es sei erstens

$$\bar{\omega}' = 2p\tilde{\omega} + 2q\tilde{\omega}'.$$

Die θ-Function auf der rechten Seite von (3.) hat die Parameter $\mu + 2p$, $\nu + 2q$, reducirt sich also nach (6.), von dem Exponentialfactor abgesehen, auf $\theta(u; \mu, \nu)$ selbst. Das heisst in den Bezeichnungen (7.): Die Indices der θ-Functionen bleiben ungeändert. Der an letzter Stelle in (3.) stehende, für alle vier Functionen übereinstimmende Factor lautet

$$e^{\bar{\eta}'(u + \frac{1}{2}\bar{\omega}') - pq\pi i}.$$

Ausserdem treten die beiden Exponentialfactoren $e^{-\frac{\mu\nu'\pi i}{2}}$ und $e^{\nu p\pi i}$ hinzu. Sie liefern, zusammengefasst, der Reihe nach

$$\begin{array}{llll}
\text{für} & \mu = -1, & \nu = 1: & e^{q\pi i + p\pi i} = (-1)^{p+q}, \\
\text{„} & \mu = 0, & \nu = 1: & e^{p\pi i} = (-1)^{p}, \\
\text{„} & \mu = 0, & \nu = 0: & 1, \\
\text{„} & \mu = -1, & \nu = 0: & e^{q\pi i} = (-1)^{q}.
\end{array}$$

Die entsprechenden Formeln gehen aus der ersten Zeile der Tabelle auf S. 188 hervor. Beispielsweise heisst die vierte, vollständig ausgeschrieben:

$$\theta_3(u + 2p\tilde{\omega} + 2q\tilde{\omega}') = (-1)^q \theta_3(u)\, e^{(2p\tilde{\eta} + 2q\tilde{\eta}')(u + p\tilde{\omega} + q\tilde{\omega}') - pq\pi i}.$$

Ist zweitens

$$\bar{\omega}' = (2p+1)\tilde{\omega} + 2q\tilde{\omega}',$$

so führen die Parameter, $\mu + 2p + 1$ und $\nu + 2q$, auf $\mu + 1$ und ν. Beim Ausgehen von der Function θ_0 nehmen sie (nach (7.)) die Werthe 0 und 1 an, θ_0 verwandelt sich in θ_1. Für die Function θ_1 sind die Parameterwerthe 0 und 1, die zunächst in 1 und 1 übergehen; um den Werth des ersten Parameters auf -1 zu bringen, benutzt man die Formel (4.) in der speciellen Gestalt

$$(8.) \qquad \theta(u; \mu, \nu) = e^{-\nu\pi i}\theta(u; \mu + 2, \nu)$$

und erhält

$$\Theta(u; -1, 1) = -\Theta(u; 1, 1).$$

Die Function Θ_1 verwandelt sich also in $-\Theta_0$. Aus den Parameterwerthen 0, 0 von Θ_2 gehen die Werthe 1, 0 hervor, die wegen (8.), nämlich

$$\Theta(u; -1, 0) = \Theta(u; 1, 0)$$

durch -1 und 0 ersetzt werden können. Θ_2 führt mithin auf Θ_3. Endlich geben die Parameterwerthe -1 und 0 von Θ_3 die Werthe 0 und 0, Θ_3 geht in Θ_2 über. In allen vier Fällen kommen auch hier die vorher ermittelten, aus

$$e^{-\frac{\mu\nu'\pi i}{2}+\nu p\pi i}$$

entstandenen Vorzeichen hinzu, weil der allein geänderte Parameter μ' in diesem Ausdruck nicht enthalten ist. Der für die vier Theta-Functionen übereinstimmende Exponentialfactor heisst

$$e^{((2p+1)\tilde{\eta}+2q\tilde{\eta}')(u+(p+\frac{1}{2})\tilde{\omega}+q\tilde{\omega}')-(p+\frac{1}{2})q\pi i}.$$

Die Formeln sind in der zweiten Zeile der Tabelle enthalten.

In derselben Weise erledigen sich die beiden noch übrigen Annahmen

$$\overline{\omega}' = (2p+1)\tilde{\omega} + (2q+1)\tilde{\omega}'$$

und

$$\overline{\omega}' = 2p\tilde{\omega} + (2q+1)\tilde{\omega}'.$$

Die Resultate sind in der dritten und vierten Zeile der Tabelle zusammengestellt.

$\overline{\omega}'$	$\Theta_0(u+\overline{\omega}')$	$\Theta_1(u+\overline{\omega}')$	$\Theta_2(u+\overline{\omega}')$	$\Theta_3(u+\overline{\omega}')$	Exponentialfactor
$2p\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	$(-1)^{p+q}\Theta_0$	$(-1)^p\Theta_1$	Θ_2	$(-1)^q\Theta_3$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-pq\pi i}$
$(2p+1)\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	$(-1)^{p+q}\Theta_1$	$(-1)^{p+1}\Theta_0$	Θ_3	$(-1)^q\Theta_2$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-(p+\frac{1}{2})q\pi i}$
$(2p+1)\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$(-1)^q i\Theta_2$	Θ_3	$(-1)^{p+1}\Theta_0$	$(-1)^{p+q} i\Theta_1$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-(p+\frac{1}{2})(q+\frac{1}{2})\pi i}$
$2p\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$(-1)^q i\Theta_3$	Θ_2	$(-1)^p\Theta_1$	$(-1)^{p+q} i\Theta_0$	$e^{\overline{\eta}'(u+\frac{1}{2}\overline{\omega}')-p(q+\frac{1}{2})\pi i}$

Alle hierin enthaltenen Formeln gehen also aus (3.) hervor, wenn die zusammengesetzten Parameter mittels (6.) reducirt werden. Sämmtliche sechzehn Verwandlungsformeln kann man sich in einer einzigen enthalten denken, wenn man (3.) und (6.) in passender Weise vereinigt. Es sei μ_0 gleich -1 oder 0, ν_0 gleich $+1$ oder 0 und in jedem Falle so gewählt, dass

$$\mu+\mu' \equiv \mu_0 \mod 2,$$
$$\nu+\nu' \equiv \nu_0 \mod 2,$$

d. h.

$$\mu+\mu' = \mu_0+2p_0,$$
$$\nu+\nu' = \nu_0+2q_0.$$

Übrigens wird q_0 nicht gebraucht, wie aus der speciellen Beziehung (5.) ersichtlich ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\Theta(u;\,\mu+\mu',\,\nu+\nu') &= \Theta(u;\,\mu_0+2p_0,\,\nu_0+2q_0)\\ &= e^{\nu_0 p_0 \pi i}\,\Theta(u;\,\mu_0,\,\nu_0)\\ &= e^{\nu_0\frac{\mu+\mu'-\mu_0}{2}\pi i}\,\Theta(u;\,\mu_0,\,\nu_0),\end{aligned}$$

und demnach in Verbindung mit (3.)

$$\text{(9.)}\quad \Theta(u+\tilde{\omega}';\,\mu,\nu) = e^{(\nu_0(\mu+\mu'-\mu_0)-\mu\nu')\frac{\pi i}{2}}\,\Theta(u;\,\mu_0,\nu_0)\,e^{\tilde{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\tilde{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}.$$

Diese Gleichung enthält, der Definition der Zahlen μ_0 und ν_0 gemäss, auch rechts nur wieder eine der Functionen $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

Aus den Verwandlungsformeln für diese Functionen bei Vermehrung des Arguments um eine beliebige ganzzahlige homogene lineare Function von $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ lassen sich die entsprechenden für $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ fast ohne Rechnung ableiten. Die Function

$$\Theta(u;\,\mu,\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\tilde{\eta}u^2}{2\tilde{\omega}}+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{u}{\tilde{\omega}}+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right)\pi i}$$

geht in

$$\vartheta(v;\,\mu,\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\left(2v+\mu+\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\tau\right)\pi i}$$

über, wenn

$$\tilde{\eta} = 0,\quad \tilde{\omega} = \tfrac{1}{2},\quad \tilde{\omega}' = \tfrac{1}{2}\tau$$

gesetzt und v für u geschrieben wird (S. 179). Bei dieser Specialisirung der Constanten entsprechen den Functionen $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ der Reihe nach $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Der Tabelle für jene Functionen lässt sich daher eine für diese an die Seite stellen, die erkennen lässt, wie die Functionen ϑ sich ändern, wenn das Argument um $p+q\tau$ oder $p+\frac{1}{2}+q\tau$ u. s. w. vermehrt wird.

Der bei allen Functionen auftretende Exponentialfactor

$$e^{(\mu'\tilde{\eta}+\nu'\tilde{\eta}')\left(u+\frac{\mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}'}{2}\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}$$

lässt sich hier vereinfachen. In der Definitionsgleichung für $\tilde{\eta}'$ (S. 179 (15.)) fällt das erste Glied weg, und wegen $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}$ wird

$$\tilde{\eta}' = -\pi i.$$

Der Exponentialfactor heisst somit

$$e^{-\nu'\pi i\left(v+\frac{1}{4}\mu'+\frac{1}{4}\nu'\tau\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}$$

oder

$$e^{-\nu'\pi i\left(v+\frac{1}{4}\nu'\tau\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{2}}$$

oder, da ν' eine ganze Zahl sein sollte,

$$e^{-\frac{\mu'\nu'\pi i}{2}}\, e^{-\nu' v\pi i}\, h^{-\frac{1}{4}\nu'^2}.$$

Danach lautet die Tabelle für die Transformation der ϑ-Functionen jetzt folgendermassen:

$\overline{\omega}'$	$\vartheta_0(v+\overline{\omega}')$	$\vartheta_1(v+\overline{\omega}')$	$\vartheta_2(v+\overline{\omega}')$	$\vartheta_3(v+\overline{\omega}')$	Exponentialfactor
$p+q\tau$	$(-1)^{p+q}\,\vartheta_0$	$(-1)^p\,\vartheta_1$	ϑ_2	$(-1)^q\,\vartheta_3$	$h^{-q^2}\,e^{-2qv\pi i}$
$p+\frac{1}{2}+q\tau$	$(-1)^{p+q}\,\vartheta_1$	$(-1)^{p+1}\,\vartheta_0$	ϑ_3	$(-1)^q\,\vartheta_2$	$(-1)^q\,h^{-q^2}\,e^{-2qv\pi i}$
$p+\frac{1}{2}+(q+\frac{1}{2})\tau$	$(-1)^q\,i\vartheta_2$	ϑ_3	$(-1)^{p+1}\,\vartheta_0$	$(-1)^{p+q}\,i\vartheta_1$	$(-1)^{p+q}(-i)\,h^{-(q+\frac{1}{2})^2}\,e^{-(2q+1)v\pi i}$
$p+(q+\frac{1}{2})\tau$	$(-1)^q\,i\vartheta_3$	ϑ_2	$(-1)^p\,\vartheta_1$	$(-1)^{p+q}\,i\vartheta_0$	$(-1)^p\,h^{-(q+\frac{1}{2})^2}\,e^{-(2q+1)v\pi i}$

Von den hierin enthaltenen Formeln mögen speciell die aus der ersten Zeile in's Auge gefasst werden, die vor den übrigen dadurch ausgezeichnet sind, dass die vier Functionen bei der Verwandlung in sich selbst übergehen. Sie heissen, vollständig ausgeschrieben:

$$(10.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v+p+q\tau) = (-1)^{p+q} h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\,\vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+p+q\tau) = (-1)^{p}\;.\; h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\,\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+p+q\tau) = \qquad\quad h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\,\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+p+q\tau) = (-1)^{q}\;.\; h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\,\vartheta_3(v). \end{cases}$$

Besonders bemerkenswerth sind unter diesen wieder die für $q = 0$, in denen keine Potenz von h und auch kein von v abhängiger Factor, sondern höchstens ein Vorzeichen auftritt. Es sei noch $p = 1$; dann ergiebt sich

$$(11.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(v+1) = -\vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+1) = \quad \vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+1) = \quad \vartheta_3(v). \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen das periodische Verhalten der ϑ-Functionen hervortreten. Von welchem primitiven Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ man auch ausgehen möge, so haben doch die ϑ-Functionen immer bestimmte ganze Zahlen zu Perioden; und zwar ϑ_2 und ϑ_3 die Zahl Eins, ϑ_0 und ϑ_1, wie durch Iterirung der beiden ersten Gleichungen folgt, die Zahl Zwei.

Man hätte dies auch aus den trigonometrischen Reihen ablesen können, durch die die vier Functionen erklärt worden sind (S. 171). Es war z. B.

$$\vartheta_0(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^{\frac{(2n+1)^2}{4}} \sin(2n+1)v\pi.$$

Vermehrt man v um Eins, so ändert sich das Argument des Sinus um $(2n+1)\pi$, und der Sinus wechselt sein Zeichen. Ebenso verhält sich der Cosinus in $\vartheta_1(v)$. Dagegen enthalten ϑ_2 und ϑ_3 im allgemeinen Gliede $\cos 2nv\pi$, und bei einer Vermehrung des Arguments um ein gerades Vielfaches von π bleiben die trigonometrischen Functionen ungeändert.

Der Änderung von v um die Zahl Eins in den Formeln für die ϑ-Functionen entspricht wegen

$$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}}$$

die von u um $2\tilde{\omega}$ in den Formeln für die σ- und Θ-Functionen. Während diese Functionen dabei mit einem Exponentialfactor multiplicirt werden, ändern also die ϑ-Functionen höchstens ihr Zeichen.

Der Vermehrung von u um $2\tilde{\omega}'$ entspricht eine Änderung von v um τ. Die Annahme $p = 0$, $q = 1$ in der ersten Zeile der Tabelle auf S. 190, d. h. in den Formeln (10.), ergiebt

$$(12.)\quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_0(v+\tau) &= -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_0(v) \\ \vartheta_1(v+\tau) &= h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v) \\ \vartheta_2(v+\tau) &= h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+\tau) &= -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_3(v). \end{aligned} \right.$$

Den Verwandlungsformeln (11.) stehen diejenigen an Einfachheit am nächsten, die man erhält, wenn man das Argument v um $\frac{1}{2}$ vermehrt. Sie gehen aus der zweiten Zeile der Tabelle für $p = 0$, $q = 0$ hervor:

$$(13.)\quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}) &= \vartheta_1(v) \\ \vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}) &= -\vartheta_0(v) \\ \vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}) &= \vartheta_3(v) \\ \vartheta_3(v+\tfrac{1}{2}) &= \vartheta_2(v). \end{aligned} \right.$$

Durch wiederholte Anwendung erhält man, wie unmittelbar ersichtlich, die Formeln (11.) wieder.

Endlich kann man solche Verwandlungsformeln auch für die σ-Functionen aufstellen, die sich von den Θ-Functionen um constante Factoren unterscheiden (S. 179). Wird

$$(14.)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma u &= C_0\,\Theta_0(u), & \sigma_\alpha u &= C_\alpha\,\Theta_1(u), \\ \sigma_\beta u &= C_\beta\,\Theta_2(u), & \sigma_\gamma u &= C_\gamma\,\Theta_3(u) \end{aligned} \right.$$

gesetzt, so haben die multiplicativen Constanten die Werthe

$$(15.)\quad \left\{ \begin{aligned} C_0 &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[8]{G}}, & C_\alpha &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}}, \\ C_\beta &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}, & C_\gamma &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\omega}}}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}} \end{aligned} \right.$$

(S. 171). Es handelt sich um die Bestimmung von $\sigma_\lambda(u + \mu'\tilde{\omega} + \nu'\tilde{\omega}')$. λ kann die Werthe $0, \alpha, \beta, \gamma$ annehmen, wobei unter $\sigma_0 u$ die Function σu selbst zu verstehen ist. μ' und ν' bedeuten, wie zuletzt immer, ganze Zahlen.

Nun ist

$$\sigma_\lambda(u+\bar{\omega}') = C_\lambda \Theta_l(u+\bar{\omega}'),$$

wo l für jedes λ eine bestimmte, aus den Beziehungen (14.) zu entnehmende Zahl der Reihe $0, 1, 2, 3$ bezeichnet. Aus der Tabelle auf S. 188 folgt dann

$$\Theta_l(u+\bar{\omega}') = \varepsilon_{ll'}\, e^{\bar{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}\, \Theta_{l'}(u);$$

l' bedeutet wieder eine bestimmte Zahl $0, 1, 2$ oder 3 und $\varepsilon_{ll'}$ den in der Tabelle vor $\Theta_{l'}(u)$ stehenden Factor ± 1 oder $\pm i$. Geht man nun vermöge der Gleichung

$$\sigma_{\lambda'}(u) = C_{\lambda'} \Theta_{l'}(u)$$

von der neuen Θ-Function zu der entsprechenden σ-Function zurück, so erhält man

$$\sigma_\lambda(u+\bar{\omega}') = \varepsilon_{ll'} \frac{C_\lambda}{C_{\lambda'}} \sigma_{\lambda'}(u)\, e^{\bar{\eta}'\left(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}'\right)-\frac{\mu'\nu'\pi i}{4}}. \tag{16.}$$

Was durch die Tabelle nicht mit gegeben wird, sind allein die Quotienten $\frac{C_\lambda}{C_{\lambda'}}$. Bei ihrer Zusammenstellung hat man zu berücksichtigen, dass die in der ersten Gleichung (15.) vorkommende achte Wurzel durch den Ausdruck

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}$$

bestimmt ist.

$\bar{\omega}'$	$\frac{C_0}{C_{\lambda'}}$	$\frac{C_\alpha}{C_{\lambda'}}$	$\frac{C_\beta}{C_{\lambda'}}$	$\frac{C_\gamma}{C_{\lambda'}}$
$2p\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	1	1	1	1
$(2p+1)\tilde{\omega}+2q\tilde{\omega}'$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}$	$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}$
$(2p+1)\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}$	$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}}$
$2p\tilde{\omega}+(2q+1)\tilde{\omega}'$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}$	$\frac{\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}}$	$\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\sqrt[4]{e_\beta-e_\gamma}$

Zur Erläuterung dieser Tabelle möge beispielsweise

$$\sigma_3(u+(2m+1)\omega+(2n+1)\omega')$$

berechnet werden. Man setze

$$(17.)\quad \alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=3;\quad \tilde{\omega}=\omega,\quad \tilde{\omega}'=\omega';\quad p=m,\quad q=n.$$

Die letzte Formel (14.) lautet

$$\sigma_3 u = C_3\Theta_3(u).$$

Nach der Tabelle auf S. 188 — vierte Spalte, dritte Zeile — wird $\Theta_3(u+\overline{\omega}')$ im vorliegenden Falle in $(-1)^{p+q}i\Theta_1(u)$ übergeführt, und von $\Theta_1(u)$ leitet die zweite Formel (14.) zu $\sigma_1 u$ zurück. Das Constantenverhältniss $\frac{C_\gamma}{C_{\gamma'}}$ ist gleich $\frac{C_3}{C_1}$, sein Werth nach der Tabelle auf voriger Seite

$$\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}.$$

Der noch hinzutretende Exponentialfactor findet sich in der ersten Tabelle vor. Die gesuchte Formel ist

$$(18.)\quad \sigma_3(u+(2m+1)\omega+(2n+1)\omega')$$
$$=(-1)^{m+n}i\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\sigma_1 u\,.\,e^{((2m+1)\eta+(2n+1)\eta')(u+(m+\frac{1}{2})\omega+(n+\frac{1}{2})\omega')-(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\pi i}.$$

Setzt man noch specieller

$$m=0,\quad n=0,$$

so findet man

$$\sigma_3(u+\omega+\omega') = e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}e^{(\eta+\eta')\left(u+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}\sigma_1(u).$$

Da jede der Zahlen α,β,γ für sich die Werthe 1, 2, 3 annehmen kann, wenn nur α,β,γ insgesammt und von der Reihenfolge abgesehen den Zahlen 1, 2, 3 gleich sind, so kann man den Werth der linken Seite von (18.) aus den vorangehenden Formeln noch auf verschiedenen anderen Wegen herleiten. Es sei z. B. $\alpha=3$, $\tilde{\omega}=\omega'$, und etwa $\tilde{\omega}'=-\omega$. Man hat aus

$$\mu'\tilde{\omega}+\nu'\tilde{\omega}'=(2m+1)\omega+(2n+1)\omega'$$

die ganzen Zahlen μ' und ν' zu bestimmen und die beiden Tabellen auf's neue zu benutzen. Die allgemeine Verwandlungsformel führt dann, wie von vornherein klar, wieder auf $\sigma_1 u$, und auch der erste Bestandtheil des Exponentialfactors,

$$e^{\bar{\eta}'(u+\frac{1}{2}\bar{\omega}')},$$

bleibt ungeändert. Was sich im Allgemeinen ändert, sind die vierten Wurzeln, das Vorzeichen und der zweite Theil des Exponentialfactors. Bei der Überführung des einen Ausdruckes in den andern ist nun zu beachten, dass die vierten Wurzeln, nach Festsetzung eines Werthes von $\sqrt{\frac{\pi}{2\bar{\omega}}}$, eindeutig bestimmt waren (S. 163), dass aber für die zweite Annahme die Grösse h, durch die die Bestimmung sich vollzieht, einen anderen Werth hat als für die erste (S. 160 (29.)).

Handelt es sich nur um die Darstellung von

$$\sigma_\lambda(u+\mu\omega+\nu\omega'), \qquad (\lambda=0,1,2,3)$$

so kann man sich bei Anwendung der Formeln (14.), (15.) und der Tabelle mit der Annahme (17.) begnügen.

Die Verwandlungsformeln enthalten insbesondere auch die Gleichungen S. 72 (12.) und S. 91 (12.), von denen zu Anfang dieses Kapitels schon die Rede gewesen ist.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Beziehungen zwischen σ-Functionen von mehrgliedrigen Argumenten.

Wir kommen jetzt zu einer Gruppe von Gleichungen zwischen σ-Functionen, deren Argumente aus mehrgliedrigen Ausdrücken bestehen. Diese Gleichungen lassen eine grosse Anzahl von Folgerungen zu, und namentlich kann man aus ihnen die Additionstheoreme der σ-Quotienten herstellen, die auf anderem Wege weit schwieriger abzuleiten sind. Man kann von der Formel

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

ausgehen. Stellt man sie noch für zwei andere Argumente v', v'' auf, befreit beide Formeln von den Nennern und multiplicirt, so erhält man

$$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\,\sigma(v'+v'')\,\sigma(v'-v'') = (\wp u - \wp v)(\wp v' - \wp v'')\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v\,\sigma^2 v'\,\sigma^2 v''.$$

Hierin werde mit v, v', v'' zweimal hintereinander eine cyklische Vertauschung vorgenommen. Bei der Addition aller drei Gleichungen verschwindet die rechte Seite identisch, und es wird

$$(1.)\quad \sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\,\sigma(v'+v'')\,\sigma(v'-v'') + \sigma(u+v')\,\sigma(u-v')\,\sigma(v''+v)\,\sigma(v''-v)$$
$$+\,\sigma(u+v'')\,\sigma(u-v'')\,\sigma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0.$$

Aus dieser Grundformel lassen sich solche für σ-Functionen mit Index dadurch ableiten, dass die Argumente um halbe Perioden vermehrt werden. Es seien

$$p \qquad q \qquad q' \qquad q''$$

Incremente der Veränderlichen

$$u \qquad v \qquad v' \qquad v''.$$

Dann muss z. B.

$$p+q = \tilde{\omega}_\lambda$$
$$p-q = \tilde{\omega}'_\lambda$$

sein, wo $\tilde{\omega}_\lambda$, $\tilde{\omega}'_\lambda$ incongruente halbe Perioden bedeuten. Es folgt

$$2p = \tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}'_\lambda, \quad 2q = \tilde{\omega}_\lambda - \tilde{\omega}'_\lambda,$$

sodass auch $2p$ und $2q$ im Allgemeinen gleich oder congruent halben Perioden werden. Setzt man nun weiter, der Gleichung

$$p+q = \tilde{\omega}_\lambda$$

entsprechend,

$$p+q' = \tilde{\omega}_\mu, \quad p+q'' = \tilde{\omega}_\nu, \quad 2p = \tilde{\omega}_\varrho,$$

also

$$(2.) \qquad p = \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho, \quad q = \tilde{\omega}_\lambda - \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho, \quad q' = \tilde{\omega}_\mu - \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho, \quad q'' = \tilde{\omega}_\nu - \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\varrho,$$

so wird

$$\begin{aligned} p-q &= \tilde{\omega}_\varrho - \tilde{\omega}_\lambda, \ \ldots \\ q'+q'' &= \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu - \tilde{\omega}_\varrho, \ \ldots \\ q'-q'' &= \tilde{\omega}_\mu - \tilde{\omega}_\nu, \ \ldots, \end{aligned}$$

d. h. alle zwölf in der Formel (1.) vorkommenden Argumente werden um halbe oder auch um ganze Perioden vermehrt.

Die formale Bevorzugung von u soll im Folgenden festgehalten werden, obgleich, wie unmittelbar ersichtlich, die Formel (1.) auch bei cyklischer Vertauschung aller vier Grössen u, v, v', v'' ungeändert bleibt.

Von halben Perioden kommen nur drei in Betracht, nämlich $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ und $\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'$, für die

$$\wp\tilde{\omega} = e_\alpha, \quad \wp(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}') = e_\beta, \quad \wp\tilde{\omega}' = e_\gamma$$

ist. Zu ihnen gehören die Functionen $\sigma_\alpha u$, $\sigma_\beta u$, $\sigma_\gamma u$ vermöge dreier Gleichungen, deren erste

$$\sigma_\alpha u = e^{-\tilde{\eta} u}\frac{\sigma(u+\tilde{\omega})}{\sigma\tilde{\omega}}$$

lautet. Setzt man demgemäss

$$(3.) \qquad \sigma(u+\tilde{\omega}_\lambda) = \sigma\tilde{\omega}_\lambda\, e^{\tilde{\eta}_\lambda u}\,\sigma_\lambda u$$

und wendet dieselbe Bezeichnungsweise auch für μ, ν und ϱ an, so müssen, wenn $\tilde{\omega}_\lambda, \dots \tilde{\omega}_\varrho$ wirklich halbe (nicht ganze) Perioden sind, von den Functionen $\sigma_\lambda u, \dots \sigma_\varrho u$ mindestens zwei einander gleich sein. Ist dagegen das Increment für irgend eines der in (1.) vorkommenden Argumente eine ganze Periode, so muss die Übergangsformel (3.) durch eine andere, S. 72 (12.), ersetzt werden. Man kann diese in der Form

$$\sigma(u+2\tilde{\omega}_\lambda) = \pm e^{2\tilde{\eta}_\lambda(u+\tilde{\omega}_\lambda)}\sigma u$$

schreiben.

Es sei noch

$$\tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu \equiv \tilde{\omega}_{\lambda\mu},$$
$$\tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu + \tilde{\omega}_\nu \equiv \tilde{\omega}_{\lambda\mu\nu};$$

diese Grössen sind dann wieder halbe Perioden oder auch gleich Null. Ordnet man ihnen Functionen $\sigma_{\lambda\mu}(u)$, $\sigma_{\lambda\mu\nu}(u)$ zu, so geht z. B. aus dem ersten Gliede der Formel (1.), von constanten und Exponentialfactoren abgesehen, das Product

$$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_{\lambda\varrho}(u-v)\,\sigma_{\mu\nu\varrho}(v'+v'')\,\sigma_{\mu\nu}(v'-v'') \tag{4.}$$

hervor.

Die zu den zusammengesetzten halben Perioden gehörenden Grössen $\tilde{\eta}_{\lambda\mu}, \dots$ bestimmen sich aus der Formel

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\tilde{\omega}_\lambda + \tilde{\omega}_\mu) = \frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}_\lambda + \frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}_\mu \tag{5.}$$

(vgl. S. 71 (11.)), die freilich für $\lambda = \mu$ nicht gilt. In diesem Falle tritt an die Stelle von (3.) die obige Gleichung für $\sigma(u+2\tilde{\omega}_\lambda)$. Ihre Anwendung hat auf den Coefficienten von u im Exponentialfactor dieselbe Wirkung, als wenn man die Relation (5.),

$$\tilde{\eta}_{\lambda\mu} = \tilde{\eta}_\lambda + \tilde{\eta}_\mu,$$

auch für $\lambda = \mu$ gelten lassen wollte (vgl. S. 70 (9.)).

Zieht man nun aus dem im ersten Gliede von (1.) auftretenden Exponentialfactor alle Ausdrücke zusammen, die die Variablen enthalten, so findet man als Theil des Exponenten

$$\tilde{\eta}_{\lambda}(u+v)+(\tilde{\eta}_{\varrho}-\tilde{\eta}_{\lambda})(u-v)+(\tilde{\eta}_{\mu}+\tilde{\eta}_{\nu}-\tilde{\eta}_{\varrho})(v'+v'')+(\tilde{\eta}_{\mu}-\tilde{\eta}_{\nu})(v'-v'')$$
$$= 2\tilde{\eta}_{\lambda}v+2\tilde{\eta}_{\mu}v'+2\tilde{\eta}_{\nu}v''+\tilde{\eta}_{\varrho}(u-v-v'-v'').$$

Die übrigen Theile kommen nur für den constanten Factor in Betracht, mit dem das Product (4.) noch behaftet ist.

Der eben angegebene Ausdruck bleibt nun ungeändert, wenn v, v', v'' und demnach auch λ, μ, ν cyklisch unter einander vertauscht werden. Soweit die Exponentialgrössen von den Variablen abhängen, fallen sie also aus der Gleichung weg, und es bleibt

$$\begin{aligned}
&c_1\,\sigma_{\lambda}(u+v)\ \sigma_{\lambda\varrho}(u-v)\ \sigma_{\mu\nu\varrho}(v'+v'')\,\sigma_{\mu\nu}(v'-v'')\\
(6.)\qquad &+c_2\,\sigma_{\mu}(u+v')\ \sigma_{\mu\varrho}(u-v')\ \sigma_{\nu\lambda\varrho}(v''+v)\ \ \sigma_{\nu\lambda}(v''-v)\\
&+c_3\,\sigma_{\nu}(u+v'')\,\sigma_{\nu\varrho}(u-v'')\,\sigma_{\lambda\mu\varrho}(v\ +v')\ \sigma_{\lambda\mu}(v\ -v')\ =\ 0.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten, die eigentlich mit $c_{\lambda\mu\nu\varrho}$, $c'_{\lambda\mu\nu\varrho}$, $c''_{\lambda\mu\nu\varrho}$ bezeichnet werden müssten, sind von den vorkommenden halben Perioden abhängig, ändern sich also im Allgemeinen von einer Annahme zur anderen. Sie sind stets von Null verschieden.

Es sei nun beispielsweise

$$\tilde{\omega}_{\lambda}=\tilde{\omega}_{\mu}=\tilde{\omega}_{\nu}=\tilde{\omega},\qquad \tilde{\omega}_{\varrho}=0$$

vorausgesetzt, so ist

$$\lambda=\mu=\nu=\alpha,\qquad \varrho=0.$$

Die Zusammensetzung mit ϱ trägt zu dem Werthe eines Index nichts bei, d. h. es ist, in sofort verständlicher Bezeichnung,

$$(\lambda\varrho)=(\mu\varrho)=(\nu\varrho)=\alpha.$$

Der zweigliedrige Index $(\mu\nu)$ weist auf die Vermehrung des Arguments der Stammfunction um $\tilde{\omega}_{\mu}+\tilde{\omega}_{\nu}$ hin. Diese Grösse ist hier eine ganze Periode, $2\tilde{\omega}$, die σ-Function geht in sich selbst über, es ist

$$(\mu\nu)=0,$$

und ebenso

$$(\nu\lambda)=0,\quad (\lambda\mu)=0,$$
$$(\mu\nu\varrho)=0,\quad (\nu\lambda\varrho)=0,\quad (\lambda\mu\varrho)=0.$$

Die Formel (6.) lautet also

$$
\begin{aligned}
&c_1 \sigma_\alpha(u+v)\ \sigma_\alpha(u-v)\ \sigma(v'+v'')\sigma(v'-v'') \\
(7.)\qquad &+c_2\sigma_\alpha(u+v')\ \sigma_\alpha(u-v')\ \sigma(v''+v)\ \sigma(v''-v) \\
&+c_3\sigma_\alpha(u+v'')\sigma_\alpha(u-v'')\sigma(v+v')\ \sigma(v-v') = 0.
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung der Coefficienten kann man einigen Veränderlichen specielle Werthe beilegen, z. B.

$$v' = v'' = 0$$

setzen. Die übrig bleibende Gleichung liefert dann

$$c_2 = c_3,$$

und wegen der Symmetrie der Gleichung (7.) muss der gemeinsame Werth von c_2 und c_3 auch gleich dem von c_1 sein. Da er nicht verschwindet, so heisst die Formel

$$
\begin{aligned}
(8.)\quad &\sigma_\alpha(u+v)\sigma_\alpha(u-v)\sigma(v'+v'')\sigma(v'-v'')+\sigma_\alpha(u+v')\sigma_\alpha(u-v')\sigma(v''+v)\sigma(v''-v) \\
&+\sigma_\alpha(u+v'')\sigma_\alpha(u-v'')\sigma(v+v')\sigma(v-v') = 0.
\end{aligned}
$$

Wie es sich von selbst versteht, vertritt diese Gleichung ein System von dreien, weil α gleich 1, 2, 3 gesetzt werden kann.

Hiervon abgesehen, handelt es sich jetzt darum, sämmtliche Gleichungen zu bilden, die in (6.) für die verschiedenen Annahmen über die halben Perioden $\tilde{\omega}_\lambda, \ldots \tilde{\omega}_\varrho$ enthalten sind. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Bei der äusserlichen Bevorzugung von u, also auch von $\tilde{\omega}_\varrho$, lassen z. B. die ersten sieben Zeilen, ausser der an die Spitze gestellten Gleichung (1.), folgende für $\tilde{\omega}_\varrho = 0$ geltenden Möglichkeiten hervortreten.

Zweite Zeile: die drei ersten halben Perioden einander gleich und von Null verschieden;

dritte Zeile: zwei von diesen Grössen einander gleich und gleich Null;

vierte und fünfte Zeile: zwei einander gleich und von Null verschieden, die dritte gleich Null oder nicht;

sechste und siebente Zeile: alle drei von einander verschieden, und zwar eine gleich Null oder nicht.

Die noch übrigen Zeilen geben dann alle für $\tilde{\omega}_\varrho \neq 0$ möglichen Annahmen wieder.

	$\tilde\omega_\lambda$	$\tilde\omega_\mu$	$\tilde\omega_\nu$	$\tilde\omega_\varrho$	λ	$(\lambda\varrho)$	$(\mu\nu\varrho)$	$(\mu\nu)$	μ	$(\mu\varrho)$	$(\nu\lambda\varrho)$	$(\nu\lambda)$	ν	$(\nu\varrho)$	$(\lambda\mu\varrho)$	$(\lambda\mu)$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	α	α	0	0	α	α	0	0	α	α	0	0
3	0	0	$\tilde\omega$	0	0	0	α	α	0	0	α	α	α	α	0	0
4	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	0	α	α	α	α	α	α	α	α	0	0	0	0
5	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	0	α	α	β	β	α	α	β	β	γ	γ	0	0
6	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	0	0	α	α	β	β	β	β	α	α	0	0	γ	γ
7	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	0	α	α	α	α	β	β	β	β	γ	γ	γ	γ
8	0	0	0	$\tilde\omega$	0	α	α	0	0	α	α	0	0	α	α	0
9	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	α	0	α	0	α	0	α	0	α	0	α	0
10	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	α	β	γ	0	α	β	γ	0	α	β	γ	0
11	0	0	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	α	0	α	0	α	0	α	α	0	α	0
12	0	0	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	0	γ	β	α	0	γ	β	α	α	β	γ	0
13	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	$\tilde\omega$	α	0	0	α	α	0	0	α	0	α	α	0
14	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	0	$\tilde\omega'$	α	β	β	α	α	β	β	α	0	γ	γ	0
15	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	$\tilde\omega$	α	0	γ	β	α	0	γ	β	γ	β	α	0
16	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	α	β	α	β	α	β	α	β	γ	0	γ	0
17	$\tilde\omega$	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	α	β	0	γ	α	β	0	γ	β	α	γ	0
18	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	0	$\tilde\omega$	α	0	γ	β	β	γ	0	α	0	α	β	γ
19	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	0	$\tilde\omega'$	α	β	α	β	β	α	β	α	0	γ	0	γ
20	$\tilde\omega$	$\tilde\omega+\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	$\tilde\omega'$	α	β	β	α	β	α	α	β	γ	0	0	γ

Setzt man

$$\begin{array}{lllll} (9.) & u+v = a, & u-v = b, & v'+v'' = c, & v'-v'' = \partial, \\ (10.) & u+v' = a', & u-v' = b', & v''+v = c', & v''-v = \partial', \\ (11.) & u+v'' = a'', & u-v'' = b'', & v+v' = c'', & v-v' = \partial'' \end{array}$$

und betrachtet an Stelle von u, v, v', v'' entweder a, b, c, ∂ oder a', b', c', ∂' oder $a'', b'', c'', \partial''$ als unabhängige Variable, so sind alle σ-Relationen, die überhaupt aus (6.), nämlich

$$(12.) \quad c_1\,\sigma_\lambda a\,\sigma_{\lambda\varrho} b\,\sigma_{\mu\nu\varrho} c\,\sigma_{\mu\nu}\partial + c_2\,\sigma_\mu a'\,\sigma_{\mu\varrho} b'\,\sigma_{\nu\lambda\varrho} c'\,\sigma_{\nu\lambda}\partial' + c_3\,\sigma_\nu a''\,\sigma_{\nu\varrho} b''\,\sigma_{\lambda\mu\varrho} c''\,\sigma_{\lambda\mu}\partial'' = 0$$

hervorgehen können, in der Tabelle enthalten. Um sie herzustellen, muss man da, wo ein einzelner der Indices α, β, γ vorkommt, diesem die Werthe 1, 2, 3 beilegen, und wo mehrere auftreten, ihnen auf alle möglichen Arten verschiedene Zahlenwerthe aus der Reihe 1, 2, 3 ertheilen.

Aber die Zusammenstellung enthält einige Gleichungen mehrfach. So lassen sich z. B. die $\mathfrak{S}$-Producte, die der dritten Zeile entsprechen,

$$\mathfrak{S}a\,\mathfrak{S}b\,\mathfrak{S}_\alpha c\,\mathfrak{S}_\alpha \partial,\quad \mathfrak{S}a'\,\mathfrak{S}b'\,\mathfrak{S}_\alpha c'\,\mathfrak{S}_\alpha \partial',\quad \mathfrak{S}_\alpha a''\,\mathfrak{S}_\alpha b''\,\mathfrak{S}c''\,\mathfrak{S}\partial'',$$

aus den zu der zweiten Zeile gehörenden

$$\mathfrak{S}_\alpha a\,\mathfrak{S}_\alpha b\,\mathfrak{S}c\,\mathfrak{S}\partial,\quad \mathfrak{S}_\alpha a'\,\mathfrak{S}_\alpha b'\,\mathfrak{S}c'\,\mathfrak{S}\partial',\quad \mathfrak{S}_\alpha a''\,\mathfrak{S}_\alpha b''\,\mathfrak{S}c''\,\mathfrak{S}\partial'',$$

die dieselben Indices, nur in anderer Reihenfolge, enthalten, durch Vertauschung von Bezeichnungen ableiten. Aus (9.), (10.), (11.) folgt nämlich

$$(13.)\quad \begin{cases} a' = \tfrac{1}{2}(a+b+c+\partial), & b' = \tfrac{1}{2}(a+b-c-\partial) \\ c' = \tfrac{1}{2}(a-b+c-\partial), & \partial' = \tfrac{1}{2}(-a+b+c-\partial), \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} a'' = \tfrac{1}{2}(a+b+c-\partial), & b'' = \tfrac{1}{2}(a+b-c+\partial) \\ c'' = \tfrac{1}{2}(a-b+c+\partial), & \partial'' = \tfrac{1}{2}(a-b-c-\partial). \end{cases}$$

Vertauscht man nun a mit c, setzt $-\partial$ für b und $-b$ für ∂, um zunächst das Product $\mathfrak{S}_\alpha a\,\mathfrak{S}_\alpha b\,\mathfrak{S}c\,\mathfrak{S}\partial$, vom Vorzeichen abgesehen, in das darüberstehende zu verwandeln, so gehen

$$a'\quad b'\quad c'\quad \partial'\qquad a''\quad b''\quad c''\quad \partial''$$

in

$$c'\quad \partial'\quad a'\quad b'\qquad a''\quad -b''\quad c''\quad -\partial''$$

über, und damit auch $\mathfrak{S}_\alpha a'\,\mathfrak{S}_\alpha b'\,\mathfrak{S}c'\,\mathfrak{S}\partial'$ in $\mathfrak{S}a'\,\mathfrak{S}b'\,\mathfrak{S}_\alpha c'\,\mathfrak{S}_\alpha \partial'$, während das dritte Product nur sein Zeichen ändert.

Die Tabelle

3	2	$a\|c,\quad b\|-\partial$
6	5	$a\|-a,\ \partial\|-\partial$
8	2	$a\|-c$
9	2	$b\|c$
11	2	$a\|-\partial$
12	10	$a\|-\partial,\ b\|c$
13	2	$b\|\partial$
14	5	$b\|\partial$
15	10	$b\|\partial$
16	5	$b\|c$
17	10	$c\|\partial$
18	10	$b\|+\partial,\ \partial\|-b,\ c\|-c$
19	5	$b\|-c$
20	5	$b\|-\partial$

enthält in der ersten Spalte die Nummern der Gleichungen, die mit anderen, daneben angezeigten, inhaltlich übereinstimmen. In der dritten Spalte sind Substitutionen (im Allgemeinen blosse Vertauschungen) angegeben, durch die die Gleichungen der zweiten Spalte in die entsprechenden der ersten übergeführt werden können.

Es kommt jetzt darauf an, die sechs unabhängigen Relationen, die zu den Zeilen 1, 2, 4, 5, 7 und 10 der Tabelle auf S. 201 gehören, vollständig herzustellen, d. h. für jede dieser Gleichungen die Verhältnisse der Coefficienten c_1, c_2, c_3 zu berechnen. Von der Ausgangsgleichung abgesehen, ist dies für die Annahme 2 bereits geschehen (S. 200). Die Voraussetzung 4 führt auf

$$c_1\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha \partial + c_2\,\sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha \partial' + c_3\,\sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma \partial'' = 0.$$

Nimmt man $v = v' = v'' = 0$, so sieht man, dass

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1$$

gesetzt werden darf. Eine zweite Gleichung, in der nunmehr der dritte Coefficient stehen bleibt, folgt dann für

$$v' = v'' = 0, \quad v = u,$$

nämlich

$$\sigma_\alpha(2u) - \sigma_\alpha^4 u + c_3\,\sigma^4 u = 0.$$

Die linke Seite ist nach Potenzen von u zu entwickeln und der Coefficient von u^4 gleich Null zu setzen. Dazu kann man die Formeln

$$\sigma_\alpha^2 u = (\wp u - e_\alpha)\,\sigma^2 u,$$

$$\wp u - e_\alpha = \frac{1}{u^2} - e_\alpha + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots,$$

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240}u^5 + \cdots,$$

$$\sigma^2 u = u^2 - \frac{g_2}{120}u^6 + \cdots$$

benutzen, aus denen

$$\sigma_\alpha^2 u = 1 - e_\alpha u^2 + \frac{g_2}{24}u^4 + \cdots,$$

$$\sigma_\alpha u = 1 - \frac{1}{2}e_\alpha u^2 + \left(\frac{g_2}{48} - \frac{e_\alpha^2}{8}\right)u^4 + \cdots$$

26*

hervorgeht. Die Bestimmungsgleichung für c_3 lautet

$$\left(\frac{g_2}{3} - 2e_\alpha^2\right) - \left(e_\alpha^2 + \frac{g_2}{12}\right) + c_3 = 0$$

und liefert

$$c_3 = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma).$$

Hiernach gilt die Relation

$$(15.) \quad \begin{aligned} &\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(v'+v'')\,\sigma_\alpha(v'-v'') - \sigma_\alpha(u+v')\,\sigma_\alpha(u-v')\,\sigma_\alpha(v''+v)\,\sigma_\alpha(v''-v) \\ &\qquad + (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\sigma(u+v'')\,\sigma(u-v'')\,\sigma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Die Annahme 5 liefert die Gleichungsform

$$c_1 \sigma_\alpha a\, \sigma_\alpha b\, \sigma_\beta c\, \sigma_\beta \partial + c_2 \sigma_\alpha a'\, \sigma_\alpha b'\, \sigma_\beta c'\, \sigma_\beta \partial' + c_3 \sigma_\gamma a''\, \sigma_\gamma b''\, \sigma c''\, \sigma \partial'' = 0.$$

Dieselbe Specialisirung wie im vorigen Fall,

$$v = v' = v'' = 0,$$

führt zu demselben Ergebniss

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1.$$

Setzt man ferner

$$u = v' = v'' = 0,$$

so findet man

$$\sigma_\alpha^2 v - \sigma_\beta^2 v + c_3 \sigma^2 v = 0,$$

d. h. wegen der Identität

$$\sigma_\alpha^2 v - \sigma_\beta^2 v + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma^2 v = 0$$

(S. 89 (7.)):

$$c_3 = e_\alpha - e_\beta.$$

Die neue Formel lautet

$$(16.) \quad \begin{aligned} &\sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\beta(v'+v'')\,\sigma_\beta(v'-v'') - \sigma_\alpha(u+v')\,\sigma_\alpha(u-v')\,\sigma_\beta(v''+v)\,\sigma_\beta(v''-v) \\ &\qquad + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma_\gamma(u+v'')\,\sigma_\gamma(u-v'')\,\sigma(v+v')\,\sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Die Annahme 7 ergiebt

$$c_1 \sigma_\alpha a\, \sigma_\alpha b\, \sigma_\alpha c\, \sigma_\alpha \partial + c_2 \sigma_\beta a'\, \sigma_\beta b'\, \sigma_\beta c'\, \sigma_\beta \partial' + c_3 \sigma_\gamma a''\, \sigma_\gamma b''\, \sigma_\gamma c''\, \sigma_\gamma \partial'' = 0.$$

Setzt man wieder v, v' und v'' gleich Null, sodass

$$c_1 \sigma_\alpha^2 u + c_2 \sigma_\beta^2 u + c_3 \sigma_\gamma^2 u = 0$$

wird, und führt die auf der vorigen Seite benutzte Reihenentwickelung für

$\sigma_\alpha^2 u$ auch für $\sigma_\beta^2 u$ und $\sigma_\gamma^2 u$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} c_1 + \quad c_2 + \quad c_3 &= 0, \\ e_\alpha c_1 + e_\beta c_2 + e_\gamma c_3 &= 0, \end{aligned}$$

und daraus

$$c_1 : c_2 : c_3 = e_\beta - e_\gamma : e_\gamma - e_\alpha : e_\alpha - e_\beta,$$

$$\begin{aligned} &(e_\beta - e_\gamma)\, \sigma_\alpha(u+v)\;\; \sigma_\alpha(u-v)\;\; \sigma_\alpha(v'+v'')\, \sigma_\alpha(v'-v'') \\ (17.)\qquad &+ (e_\gamma - e_\alpha)\, \sigma_\beta(u+v')\; \sigma_\beta(u-v')\; \sigma_\beta(v''+v)\;\; \sigma_\beta(v''-v) \\ &+ (e_\alpha - e_\beta)\, \sigma_\gamma(u+v'')\, \sigma_\gamma(u-v'')\, \sigma_\gamma(v+v')\;\; \sigma_\gamma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Annahme, zur Zeile 10 der Tabelle gehörend, liefert eine Gleichung der Form

$$c_1\, \sigma_\alpha a\, \sigma_\beta b\, \sigma_\gamma c\, \sigma \partial + c_2\, \sigma_\alpha a'\, \sigma_\beta b'\, \sigma_\gamma c'\, \sigma \partial' + c_3\, \sigma_\alpha a''\, \sigma_\beta b''\, \sigma_\gamma c''\, \sigma \partial'' = 0.$$

Die Coefficientenbestimmung vollzieht sich genau wie auf S. 200, mithin wird

$$\begin{aligned} (18.)\quad \sigma_\alpha(u+v)\, \sigma_\beta(u-v)\, \sigma_\gamma(v'+v'')\, \sigma(v'-v'') + \sigma_\alpha(u+v')\, \sigma_\beta(u-v')\, \sigma_\gamma(v''+v)\, \sigma(v''-v) \\ + \sigma_\alpha(u+v'')\, \sigma_\beta(u-v'')\, \sigma_\gamma(v+v')\, \sigma(v-v') = 0. \end{aligned}$$

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Die Additionstheoreme der σ-Quotienten. Relationen zwischen Theta-Functionen von mehrgliedrigen Argumenten.

Aus der grossen Anzahl von Folgerungen, die sich aus den sechs Formeln (1.), (8.), (15.), (16.), (17.), (18.) des vorigen Kapitels ziehen lassen, soll eine Gruppe hervorgehoben werden. Man kann die vier unabhängigen Variablen, von denen die Argumente sämmtlicher σ-Functionen abhängen, so wählen, dass als zusammengesetzte Argumente nur noch $u+v$ und $u-v$ auftreten, alle übrigen aber eingliedrig werden. Entfernt man dann aus zwei Formeln, in denen $u-v$ in einer und derselben σ-Function vorkommt, diese durch Division, so bekommt man eine Relation zwischen σ-Quotienten für die Argumente u, v und $u+v$.

Die sechs Ausgangsformeln lauten, für die Bezeichnungen $a, \dots \partial''$ zusammengestellt:

$$(1.)\qquad \sigma a\,\sigma b\,\sigma c\,\sigma\partial + \sigma a'\,\sigma b'\,\sigma c'\,\sigma\partial' + \sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(2.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma c\,\sigma\partial + \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma c'\,\sigma\partial' + \sigma_\alpha a''\,\sigma_\alpha b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(3.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha\partial - \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\alpha c'\,\sigma_\alpha\partial' + (e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)\,\sigma a''\,\sigma b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(4.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\beta c\,\sigma_\beta\partial - \sigma_\alpha a'\,\sigma_\alpha b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta\partial' + (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma_\gamma a''\,\sigma_\gamma b''\,\sigma c''\,\sigma\partial'' = 0,$$

$$(5.)\qquad (e_\beta-e_\gamma)\,\sigma_\alpha a\,\sigma_\alpha b\,\sigma_\alpha c\,\sigma_\alpha\partial + (e_\gamma-e_\alpha)\,\sigma_\beta a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\beta c'\,\sigma_\beta\partial' + (e_\alpha-e_\beta)\,\sigma_\gamma a''\,\sigma_\gamma b''\,\sigma_\gamma c''\,\sigma_\gamma\partial'' = 0,$$

$$(6.)\qquad \sigma_\alpha a\,\sigma_\beta b\,\sigma_\gamma c\,\sigma\partial + \sigma_\alpha a'\,\sigma_\beta b'\,\sigma_\gamma c'\,\sigma\partial' + \sigma_\alpha a''\,\sigma_\beta b''\,\sigma_\gamma c''\,\sigma\partial'' = 0.$$

Hierin mögen a, b, c, ∂ als unabhängige Variable betrachtet werden, $a', \dots \partial''$ als deren Functionen, bestimmt durch die Ausdrücke (13.) und (14.) auf

S. 202. Es werde ferner

$$(7.)\qquad b = 0, \quad c = 0$$

angenommen, und die Bezeichnungen a, ∂ dadurch verändert, dass

$$(8.)\qquad a = u-v, \quad \partial = u+v$$

gesetzt wird, wo demnach jetzt u und v andere Bedeutung haben als vorher. Die übrigen Argumente erhalten die Werthe

$$(9.)\qquad \begin{cases} a' = u, & b' = -v, \quad c' = -v, \quad \partial' = -u \\ a'' = -v, & b'' = u, \quad c'' = u, \quad \partial'' = -v. \end{cases}$$

Hierfür werden die Gleichungen (1.) und (2.) identisch erfüllt; die übrigen liefern

$$(10.)\qquad \sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(u+v) = \sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 v - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v,$$

$$(11.)\qquad \sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\beta(u+v) = \sigma_\alpha u\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\beta v + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma u\,\sigma v\,\sigma_\gamma u\,\sigma_\gamma v,$$

$$(12.)\qquad (e_\beta - e_\gamma)\,\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma_\alpha(u+v) = (e_\alpha - e_\gamma)\,\sigma_\beta^2 u\,\sigma_\beta^2 v - (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma_\gamma^2 u\,\sigma_\gamma^2 v,$$

$$(13.)\qquad \sigma_\alpha(u-v)\,\sigma\,(u+v) = \sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v + \sigma v\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u.$$

Es werde nun vorübergehend

$$(14.)\qquad \frac{\sigma}{\sigma_\alpha} u = \varphi(u), \quad \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} u = \varphi_1(u), \quad \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha} u = \varphi_2(u)$$

gesetzt. Giebt man α, β, γ, von der Reihenfolge abgesehen, die Werthe 1, 2, 3, so lassen sich alle zwölf σ-Quotienten durch diese drei Functionen rational darstellen. Durch Division folgt aus (10.) und (13.)

$$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}(u+v) = \frac{\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v + \sigma v\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}{\sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\alpha^2 v - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

d. h.

$$(15.)\qquad \varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\,\varphi_1(v)\,\varphi_2(v) + \varphi(v)\,\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)}{1 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^2(u)\,\varphi^2(v)}.$$

Mittels der Identität

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\,\sigma^2 u = 0,$$

in der β auch durch γ ersetzt werden kann, ergeben sich zwischen $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ die Beziehungen

$$1 - \varphi_1^2(u) + (e_\alpha - e_\beta)\,\varphi^2(u) = 0,$$
$$1 - \varphi_2^2(u) + (e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^2(u) = 0,$$

und demnach aus (15.) durch Elimination von φ_1 und φ_2 eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und $\varphi(u+v)$.

Stellt man ferner (10.) und (11.) durch Division zusammen, so findet man

$$(16.)\qquad \varphi_1(u+v) = \frac{\varphi_1(u)\varphi_1(v) + (e_\alpha - e_\beta)\varphi(u)\varphi(v)\varphi_2(u)\varphi_2(v)}{1-(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\varphi^2(u)\varphi^2(v)}$$

und nach Vertauschung von β und γ, also φ_1 und φ_2

$$(17.)\qquad \varphi_2(u+v) = \frac{\varphi_2(u)\varphi_2(v) + (e_\alpha - e_\gamma)\varphi(u)\varphi(v)\varphi_1(u)\varphi_1(v)}{1-(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\varphi^2(u)\varphi^2(v)}.$$

Diese Gleichungen lassen für die Functionen $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ einzeln dieselbe Folgerung zu wie für $\varphi(u)$.

Aus (15.), (16.), (17.) kann man die Additionstheoreme herleiten, die Jacobi für die Functionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ in seinem Grundwerk (vgl. S. 176) ohne Beweis mitgetheilt hat. Setzt man nämlich in (14.) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, benutzt die Gleichungen S. 99 (12.) und S. 100 (13.), (14.), sowie die Definitionsgleichung für k^2,

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

schreibt endlich für $u\sqrt{e_1 - e_3}$ und $v\sqrt{e_1 - e_3}$ wieder u und v, so findet man

$$(18.)\qquad \sin \operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

$$(19.)\qquad \cos \operatorname{am}(u+v) = \frac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v},$$

$$(20.)\qquad \Delta \operatorname{am}(u+v) = \frac{\Delta \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} v - k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Die in den Gleichungen (15.), (16.), (17.) enthaltenen Additionstheoreme für die σ-Quotienten sind nicht etwa die einzigen. Man erhält andere Formen theils durch anderweite Zusammenstellung der Formeln (10.) bis (13.), theils durch Veränderung der Annahmen (7, 8) in den Gleichungen (1.) bis (6.).

Den letzteren Gleichungen lassen sich entsprechende für die Theta-Functionen mit Hilfe der Beziehungen S. 192 (14.) und (15.) an die Seite stellen. Die beiden Gleichungen (1.) und (2.) liefern sofort:

$$(21.)\qquad \Theta_0 a\, \Theta_0 b\, \Theta_0 c\, \Theta_0 \partial + \Theta_0 a'\, \Theta_0 b'\, \Theta_0 c'\, \Theta_0 \partial' + \Theta_0 a''\, \Theta_0 b''\, \Theta_0 c''\, \Theta_0 \partial'' = 0,$$

$$(22.)\qquad \Theta_\lambda a\, \Theta_\lambda b\, \Theta_0 c\, \Theta_0 \partial + \Theta_\lambda a'\, \Theta_\lambda b'\, \Theta_0 c'\, \Theta_0 \partial' + \Theta_\lambda a''\, \Theta_\lambda b''\, \Theta_0 c''\, \Theta_0 \partial'' = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3).$$

In den drei Gliedern auf der linken Seite von (3.) erscheint nicht unmittelbar ein gemeinsamer Factor. Von den beiden ersten sondert sich C_α^4 ab, und von dem dritten $(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,C_0^4$. Die Ausdrücke von C_α und C_0 lehren jedoch, dass diese beiden Werthe einander gleich sind. Es wird also

$$\Theta_1 a\,\Theta_1 b\,\Theta_1 c\,\Theta_1 \partial - \Theta_1 a'\,\Theta_1 b'\,\Theta_1 c'\,\Theta_1 \partial' + \Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0.$$

Aber die Gleichung bleibt nicht in dieser Form bestehen, wenn man den Index 1 in 2 verändert, d. h. in (3.) den Index α mit β vertauscht. Vergleicht man nämlich C_β^4 mit $(e_\beta - e_\gamma)(e_\beta - e_\alpha)\,C_0^4$, so sieht man, dass diese Werthe entgegengesetzt gleich sind, dass also

$$\Theta_2 a\,\Theta_2 b\,\Theta_2 c\,\Theta_2 \partial - \Theta_2 a'\,\Theta_2 b'\,\Theta_2 c'\,\Theta_2 \partial' - \Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0$$

wird. Bei Vertauschung von 1 mit 3, d. h. α mit γ erscheinen dieselben Vorzeichen wie im ersten Fall; es ergiebt sich

$$\Theta_3 a\,\Theta_3 b\,\Theta_3 c\,\Theta_3 \partial - \Theta_3 a'\,\Theta_3 b'\,\Theta_3 c'\,\Theta_3 \partial' + \Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0.$$

Die drei Relationen lassen sich in die eine

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\lambda b\,\Theta_\lambda c\,\Theta_\lambda \partial - \Theta_\lambda a'\,\Theta_\lambda b'\,\Theta_\lambda c'\,\Theta_\lambda \partial' + \varepsilon_\lambda \Theta_0 a''\,\Theta_0 b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0 \tag{23.}$$

zusammenziehen, wo

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} +1 & \text{für } \lambda = 1,\ \lambda = 3 \\ -1 & \text{„} \quad \lambda = 2. \end{cases}$$

Führt man die entsprechende Überlegung für die Gleichung (4.) durch, wobei im Ganzen sechs Fälle zu berücksichtigen sind, so findet man

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\lambda b\,\Theta_\mu c\,\Theta_\mu \partial - \Theta_\lambda a'\,\Theta_\lambda b'\,\Theta_\mu c'\,\Theta_\mu \partial' + \varepsilon\,\Theta_\nu a''\,\Theta_\nu b''\,\Theta_0 c''\,\Theta_0 \partial'' = 0 \tag{24.}$$

unter der Bedingung

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{für } (\lambda\mu\nu) = (123),\ (231),\ (132) \\ -1 & \text{„} \quad (\lambda\mu\nu) = (312),\ (213),\ (321). \end{cases}$$

Bei der Transformation der beiden noch übrigen Gleichungen (5.) und (6.) kann nirgends ein doppeltes Vorzeichen auftreten. Es wird

$$\Theta_1 a\,\Theta_1 b\,\Theta_1 c\,\Theta_1 \partial - \Theta_2 a'\,\Theta_2 b'\,\Theta_2 c'\,\Theta_2 \partial' + \Theta_3 a''\,\Theta_3 b''\,\Theta_3 c''\,\Theta_3 \partial'' = 0, \tag{25.}$$

$$\Theta_\lambda a\,\Theta_\mu b\,\Theta_\nu c\,\Theta_0 \partial + \Theta_\lambda a'\,\Theta_\mu b'\,\Theta_\nu c'\,\Theta_0 \partial' + \Theta_\lambda a''\,\Theta_\mu b''\,\Theta_\nu c''\,\Theta_0 \partial'' = 0. \tag{26.}$$

Sehr einfach ist der Übergang von den Θ- zu den ϑ-Functionen. Je zwei entsprechende Functionen unterscheiden sich durch den Factor $e^{\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}}$. Aus den einzelnen Producten von vier Functionen treten also die Factoren

$$e^{\frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\omega}}(a^2+b^2+c^2+\partial^2)}, \quad e^{\frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\omega}}(a'^2+b'^2+c'^2+\partial'^2)}, \quad e^{\frac{\tilde{\eta}}{2\tilde{\omega}}(a''^2+b''^2+c''^2+\partial''^2)}$$

heraus. In Folge der Gleichungen S. 202 (13.), (14.) ist aber

$$a^2+b^2+c^2+\partial^2 = a'^2+b'^2+c'^2+\partial'^2 = a''^2+b''^2+c''^2+\partial''^2,$$

die Exponentialfactoren fallen weg, und es ergiebt sich für die Functionen $\vartheta_\lambda(v)$ genau dasselbe Formelsystem wie für die Functionen $\Theta_\lambda(u)$.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Das Multiplicationstheorem der $\wp$-Function.

Schon im dritten Kapitel (S. 26—27) ist bewiesen worden, dass $\wp(nu)$, wenn n eine positive ganze Zahl ist, rational durch $\wp u$ ausgedrückt werden kann. Es liegt nahe, zum Zweck der wirklichen Darstellung $\wp(nu)$ mit $\sigma(nu)$ ebenso in Verbindung zu bringen wie $\wp u$ mit σu.

Aus

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$$

folgt durch Einführung von nu statt u

$$n^2 \wp(nu) = -\frac{d^2 \log \sigma(nu)}{du^2}.$$

Allerdings ist $\sigma(nu)$ ebensowenig bekannt wie $\wp(nu)$ selbst. Aber man kann mit Hilfe von $\sigma(nu)$ eine elliptische Function herstellen, mit der dann $\wp(nu)$ unmittelbar zusammenhängt.

Ersetzt man nämlich in der Formel

$$\sigma(u + 2n\omega) = (-1)^n e^{2n\eta(u+n\omega)} \sigma u$$

(vgl. S. 72 (12.)) u durch nu, so erhält man

$$\text{(1.)} \qquad \sigma(n(u+2\omega)) = (-1)^n e^{2n^2\eta(u+\omega)} \sigma(nu).$$

Derselbe Exponentialfactor wie hier tritt auch auf, wenn in

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \sigma u$$

beide Seiten zur Potenz n^2 erhoben werden:

$$\text{(2.)} \qquad \sigma^{n^2}(u+2\omega) = (-1)^{n^2} e^{2n^2\eta(u+\omega)} \sigma^{n^2}(u).$$

Wird nun mit (2.) in (1.) dividirt, so fällt ausser dem Exponentialfactor auch die Potenz von (-1) weg, sodass

$$(3.)\qquad \frac{\sigma(n(u+2\omega))}{\sigma^{n^2}(u+2\omega)} = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$$

wird. Für die Function

$$(4.)\qquad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \varphi_n(u)$$

gilt also die Eigenschaft

$$\varphi_n(u+2\omega) = \varphi_n(u),$$

und ebenso

$$\varphi_n(u+2\omega') = \varphi_n(u).$$

Und da ferner $\varphi_n(u)$ offenbar im Endlichen überall den Charakter einer rationalen Function hat, so ist es eine elliptische Function mit den Perioden 2ω und $2\omega'$. Wäre $\varphi_n(u)$ als Function von $\wp u$ bekannt, so würde auch $\wp(nu)$ bekannt sein, in Folge der Relation

$$(5.)\qquad \frac{d^2\log\varphi_n(u)}{du^2} = n^2(\wp u - \wp(nu)).$$

Der Zusammenhang zwischen $\wp(nu)$ und $\varphi_n(u)$ kann auch in einer anderen, von Differentialquotienten freien Form angegeben werden. Wird nämlich in

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

$v = nu$ gesetzt, so folgt

$$\wp u - \wp(nu) = \frac{\sigma((n+1)u)\,\sigma((n-1)u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(nu)}$$
$$= \frac{\sigma((n+1)u)}{(\sigma u)^{(n+1)^2}}\,\frac{\sigma((n-1)u)}{(\sigma u)^{(n-1)^2}}\left(\frac{(\sigma u)^{n^2}}{\sigma(nu)}\right)^2,$$

oder

$$(6.)\qquad \wp u - \wp(nu) = \frac{\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_{n-1}(u)}{\varphi_n^2(u)}.$$

Will man jetzt nach den Ergebnissen des fünfzehnten Kapitels $\varphi_n(u)$ durch $\wp u$ und $\wp' u$ ausdrücken, so muss man die Unendlichkeitsstellen der Function kennen. Da $\sigma(nu)$ im Endlichen nicht unendlich gross werden kann, so fallen diese Stellen mit den Nullstellen des Nenners von $\varphi_n(u)$ zusammen. Aber σu verschwindet im Periodenparallelogramm nur einmal, für $u = 0$, und zwar von der ersten Ordnung. Und da $u = 0$ auch für $\sigma(nu)$ eine Nullstelle erster Ordnung ist, aber für den Nenner n^2mal gezählt werden muss, so wird $\varphi_n(u)$ an der Stelle $u = 0$ (und den congruenten) mit der Ordnungszahl n^2-1 unendlich gross. Setzt man also

$$n^2 - 1 = l,$$

so erhält man nach S. 147 die Darstellung

$$\varphi_n(u) = c + c'\wp u - \frac{1}{2}c''\wp' u + \cdots + (-1)^l \frac{c^{(l-1)}}{(l-1)!}\wp^{(l-2)}(u).$$

Der Ausdruck

$$G_1(\wp u) + \wp' u \,.\, G_2(\wp u),$$

auf den die rechte Seite führt, lässt sich hier von vornherein vereinfachen, weil $\varphi_n(u)$ entweder gerade oder ungerade ist. Denn bei einer Änderung des Vorzeichens von u ändert $\sigma(nu)$ ebenfalls das Zeichen, $\sigma^{n^2}(u)$ bleibt ungeändert oder geht in $-\sigma^{n^2}(u)$ über, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es wird also $\varphi_n(u)$ eine ungerade Function bei geradem, eine gerade bei ungeradem n. Im ersten Falle ist $\varphi_n(u)$ das Product von $\wp' u$ mit einer ganzen Function von $\wp u$, im zweiten eine ganze Function von $\wp u$ allein.

Um die Grade dieser ganzen rationalen Functionen zu bestimmen, hat man zu beachten, dass

$$\begin{aligned} \wp^{(2\mu)}(u) &= G(\wp u)_{\mu+1}, \\ \wp^{(2\mu+1)}(u) &= \wp'(u)\,\overline{G}(\wp u)_\mu \end{aligned}$$

ist, wo die rechts beigefügten Indices die Grade von G und $\overline{G}$ bedeuten. Die höchste in $\wp' u \,.\, G_2(\wp u)$ oder in $G_1(\wp u)$ vorkommende Potenz von $\wp u$ entspringt aus der höchsten, nämlich der $(l-2)^{\text{ten}}$ Ableitung. Bei ungeradem n, wo l gerade ist, muss für diese

$$2\mu = l - 2 = n^2 - 3, \quad \mu + 1 = \frac{n^2-1}{2},$$

bei geradem n

$$2\mu + 1 = n^2 - 3, \quad \mu = \frac{n^2-4}{2}$$

gesetzt werden, d. h. es ist

bei ungeradem n

$$(7.)\quad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = A_0 + A_1 \wp u + \cdots + A_{\frac{n^2-1}{2}} (\wp u)^{\frac{n^2-1}{2}} = G(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}},$$

bei geradem n

$$(8.)\quad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} = \wp' u \left(B_0 + B_1 \wp u + \cdots + B_{\frac{n^2-4}{2}} (\wp u)^{\frac{n^2-4}{2}} \right) = \wp' u \, \overline{G}(\wp u)_{\frac{n^2-4}{2}},$$

wo G und $\overline{G}$ eine andere Bedeutung haben als vorher. Die vollständige Darstellung von $\varphi_n(u)$ und damit auch von $\wp(nu)$ würde die Bestimmung der Coefficienten A_ν und B_ν als Functionen von g_2 und g_3 erfordern. Sie hängt mit der Ermittelung der Nullstellen der beiden ganzen Functionen auf das Engste zusammen.

Die Function $\varphi_n(u)$ kann nur verschwinden, wenn der Zähler Null wird, also für

$$u = \frac{2\tilde{\omega}}{n} = \frac{2\mu\omega + 2\nu\omega'}{n}.$$

Die incongruenten unter diesen Stellen findet man, wenn man den ganzen Zahlen μ und ν unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \ldots n-1$ beilegt. Von den so entstehenden Zahlenpaaren (μ, ν) ist das Paar $(0, 0)$ auszuschliessen, denn für $u = 0$ wird $\varphi_n(u)$ nicht Null, sondern unendlich gross. Die Anzahl der übrig bleibenden Stellen ist n^2-1, übereinstimmend mit dem Satze, dass die Anzahl der Nullstellen der der Unendlichkeitsstellen gleich sein muss.

Um die ganze Function von $\wp u$ darzustellen, die für alle $u = \frac{2\tilde{\omega}}{n}$ verschwindet, hat man eine weitere Reduction vorzunehmen, in Folge der Gleichungen

$$\wp(2\omega - u) = \wp u, \quad \wp(2\omega' - u) = \wp u.$$

Es sei zuerst n ungerade. Dann genügt es z. B. für $\nu = 0$, die Zahl μ die Hälfte aller eben genannten Zahlenwerthe durchlaufen zu lassen; und entsprechend für $\mu = 0$. Ist μ von Null verschieden, so reicht es ebenfalls aus, dieser Zahl die Werthe $1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$ zu ertheilen, wenn nur ν alle Werthe von 1 bis $n-1$ annimmt oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Werthe $\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2}$. Bei Vertauschung von μ mit ν ergiebt sich offenbar nichts

Neues. Die Zusammenstellungen

$$\begin{array}{ll} \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}; & \nu = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2} \\ \mu = 0; & \nu = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2} \\ \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}; & \nu = 0 \end{array}$$

geben insgesammt

$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$$

Nullstellen $\frac{2\bar{\omega}}{n}$. Bezeichnet man sie in irgend einer Folge mit v_λ $\left(\lambda = 1, \cdots \frac{n^2-1}{2}\right)$, so kann die Function

$$\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda)$$

von $G(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}}$ nur um einen constanten Factor verschieden sein. Nun beginnt das Product mit $(u^{-2})^{\frac{n^2-1}{2}}$, die Function $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$ mit $nu^{-(n^2-1)}$, also muss

$$G(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}} = n \prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda) \tag{9.}$$

werden.

Zweitens sei n gerade. Unter den Zahlenpaaren (μ, ν) sind drei besonders ausgezeichnet,

$$\left(\frac{n}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \quad \left(0, \frac{n}{2}\right).$$

Sie liefern die Nullstellen

$$\omega, \qquad \omega + \omega', \qquad \omega'$$

der in der Formel (8.) enthaltenen Function $\wp' u$. Zur Darstellung der ausserdem vorkommenden ganzen Function von $\wp u$ hat man zu setzen — unter Berücksichtigung der Gleichungen $\wp(\omega + u) = \wp(\omega - u)$, $\wp(\omega' + u) = \wp(\omega' - u)$:

$$\begin{array}{ll} \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-2}{2}; & \nu = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-2}{2} \\ \mu = 0, \frac{n}{2}; & \nu = 1, 2, \cdots \frac{n-2}{2} \\ \mu = 1, 2, \cdots \frac{n-2}{2}; & \nu = 0, \frac{n}{2}. \end{array}$$

Die Gesammtanzahl der Nullstellen ist:

$$2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 2\frac{n-2}{2} + 2\frac{n-2}{2} = \frac{n^2-4}{2},$$

sodass, wenn jetzt λ die Werthe $1, \cdots \frac{n^2-4}{2}$ durchläuft, das Product

$$\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda)$$

von $\overline{G}(\wp u)_{\frac{n^2-4}{2}}$ nur um einen constanten Factor verschieden ist. $\wp' u$ fängt mit $-2u^{-3}$ an, das Product mit $(u^{-2})^{\frac{n^2-4}{2}}$. Vergleicht man das Product dieser Glieder mit dem Anfangsgliede von $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$, so sieht man, dass

$$\overline{G}(\wp u)_{\frac{n^2-4}{2}} = -\frac{n}{2}\prod_\lambda (\wp u - \wp v_\lambda) \tag{10.}$$

ist.

Der wirkliche Ausdruck der beiden ganzen Functionen wird freilich durch die Formeln (9.) und (10.) nicht geliefert, denn die Werthe $\wp v_\lambda$ können nicht als bekannt gelten. Vielmehr erscheint das Problem der Periodentheilung, nämlich der Aufsuchung der Grössen $\wp\frac{2\bar{\omega}}{n}$, an die Lösung der algebraischen Gleichungen $G = 0$ und $\overline{G} = 0$ geknüpft, deren Coefficienten anderweitig ermittelt werden müssen.

Kiepert hat im 76. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik (1873) ein Verfahren angegeben, durch das zwar nicht unmittelbar die betrachteten Ausdrücke gefunden, aber doch für $\varphi_n(u)$ eine independente Darstellung durch die Function $\wp u$ und ihre Ableitungen, und zwar in Form einer Determinante, geliefert wird.

Eine einfache Abzählung lehrt, dass auf Grund der Formel (6.) in Verbindung mit den Bildungsgesetzen (7.) und (8.) das Multiplicationstheorem der $\wp$-Function die Form hat

$$\wp(nu) = \frac{g(\wp u)_{n^2}}{\overline{g}(\wp u)_{n^2-1}}, \tag{11.}$$

wo die Indices der ganzen Functionen im Zähler und Nenner deren Grade in Bezug auf $\wp u$ bedeuten.

Für den Nenner möge die Bezeichnung $\varphi_n^2(u)$ beibehalten, der Zähler gleich $P_n(\wp u)$ gesetzt werden, sodass

$$\wp(nu) = \frac{P_n}{\varphi_n^2} \tag{12.}$$

ist. Es sollen für P_n und φ_n Recursionsformeln entwickelt werden. Der grösseren Übersichtlichkeit der Rechnung wegen empfiehlt es sich dabei, gleichzeitig $\wp'(nu)$ und $\wp''(nu)$ einzuführen. Setzt man

$$\wp'(nu) = \frac{Q_n}{\varphi_n^3}, \tag{13.}$$

so ist

$$Q_n = \frac{1}{n}(\varphi_n P_n'(\wp u)\wp' u - 2\varphi_n' P_n(\wp u)).$$

Die Striche an $\wp$ und φ_n kennzeichnen hierin die Ableitungen nach u, dagegen die an P_n die Ableitungen nach dem Argument $\wp u$. Bei ungeradem n war φ_n eine ganze Function von $\wp u$, also φ_n' das Product aus einer solchen mit $\wp' u$, und demnach weiter auch Q_n ein ebensolches Product. Für gerades n hatte φ_n die Form $\wp' u . G(\wp u)$, also wird $\varphi_n' = \wp'^2 G' + G\wp''$, eine ganze Function von $\wp u$ allein, und dieselbe Form hat auch Q_n. Wird endlich

$$\wp''(nu) = \frac{2R_n}{\varphi_n^4} \tag{14.}$$

gesetzt, so ist R_n offenbar eine ganze Function von $\wp u$.

Die Benutzung der Formel (12.) hat mit $n = 2$ zu beginnen. Nach S. 37. ist

$$\varphi_2(u) = \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u} = -\wp' u, \tag{15.}$$

also

$$P_2 = (\wp' u)^2 \wp(2u),$$

und da $\wp(2u)$ nach S. 26 (11.) bekannt ist, so gilt dasselbe auch für P_2.

Für das Folgende ist es zweckmässiger, $\wp(2u)$ in eine andere Form zu setzen. Unter Benutzung von (15.) liefert die Gleichung (5.), nämlich

$$\wp(nu) = \wp u + \frac{1}{n^2}\frac{\varphi_n'(u)^2 - \varphi_n(u)\varphi_n''(u)}{\varphi_n(u)^2}, \tag{16.}$$

für $n = 2$:

$$\wp(2u) = \wp u + \frac{1}{4}\frac{(\wp'' u)^2 - \wp' u\, \wp''' u}{(\wp' u)^2}.$$

Wegen

$$\wp''' u = 12 \wp u\, \wp' u$$

kann man auch schreiben

$$\wp(2u) = -2\wp u + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^2. \tag{17.}$$

Die Differentiation ergiebt

$$\wp'(2u) = -\wp' u + 3\frac{\wp u\, \wp'' u}{\wp' u} - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right)^3, \tag{18.}$$

und hieraus könnte Q_2 gebildet werden.

Nun möge in (17.) und (18.) nu statt u geschrieben und dann (12.), (13.) und (14.) hinzugezogen werden. Der Factor 2 in (14.) ist wegen des in (17.) und (18.) auftretenden Factors $\frac{1}{4}$ eingeführt worden. Es ergiebt sich

$$\wp(2nu) = \frac{P_{2n}}{\varphi_{2n}^2} = \frac{-2P_n Q_n^2 + R_n^2}{Q_n^2 \varphi_n^2}, \tag{19.}$$

$$\wp'(2nu) = \frac{Q_{2n}}{\varphi_{2n}^3} = \frac{-Q_n^4 + 6P_n Q_n^2 R_n - 2R_n^3}{Q_n^3 \varphi_n^3}, \tag{20.}$$

und es fragt sich jetzt, ob in diesen Formeln Zähler und Zähler, Nenner und Nenner einander gleichgesetzt werden dürfen. Zunächst soll bewiesen werden, dass in den Quotienten

$$\frac{P_n}{\varphi_n^2} \quad \text{und} \quad \frac{Q_n}{\varphi_n^3}$$

Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Theiler haben können. Die Function $\varphi_n(u)$ verschwindet, wenn $\sigma(nu) = 0$, nu gleich einer Periode ist, Null ausgenommen. Es sei $u_0 = \frac{2\bar{\omega}}{n}$ $(n > 1)$ eine solche Nullstelle. Sie ist von der ersten Ordnung, sodass man setzen kann

$$\varphi_n(u) = (u - u_0)(A + (u - u_0)\mathfrak{P}_0(u - u_0)),$$

für A als eine von Null verschiedene Constante. Daraus folgt weiter

$$\frac{d \log \varphi_n(u)}{du} = \frac{1}{u - u_0} + \mathfrak{P}_1(u - u_0),$$

$$\frac{d^2 \log \varphi_n(u)}{du^2} = -\frac{1}{(u - u_0)^2} + \mathfrak{P}_2(u - u_0),$$

und nach (5.), da $\wp u$ in der Nähe der von Null verschiedenen Stelle u_0 in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelt werden kann,

$$\wp(nu) = \frac{1}{n^2(u-u_0)^2} + \mathfrak{P}(u-u_0).$$

Wenn nun P_n für $u = u_0$ verschwände, so würde $\frac{P_n}{\varphi_n^2}$ nicht, wie es doch der Fall ist, mit $(u-u_0)^{-2}$ beginnen.

Dasselbe folgt für Q_n aus der Vergleichung von $\frac{Q_n}{\varphi_n^3}$ mit

$$\wp'(nu) = \frac{1}{n}\wp' u - \frac{1}{n^3}\frac{d^3 \log \varphi_n(u)}{du^3}$$

vermöge der Darstellung

$$\frac{d^3 \log \varphi_n(u)}{du^3} = \frac{2}{(u-u_0)^3} + \mathfrak{P}_3(u-u_0).$$

Da diese Schlüsse für jeden Werth von n gelten, so erscheint auch $\wp(2nu)$, in der Form $\frac{P_{2n}}{\varphi_{2n}^2}$ geschrieben, als Bruch mit dem kleinsten Nenner. Der in (19.) rechts vorkommende Nenner $Q_n^2\varphi_n^2$ muss also von der Form $S\varphi_{2n}^2$ sein, wo S, ebenso wie $Q_n^2\varphi_n^2$ und φ_{2n}^2, eine ganze Function von $\wp u$ bedeutet. Zur Berechnung von S bestimme man die Anfangsglieder der Entwickelung in der Nähe der Stelle $u = 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= nu^{-(n^2-1)} + \cdots,\\
\wp(nu) &= n^{-2}u^{-2} + \cdots,\\
n\wp'(nu) &= -2n^{-2}u^{-3} + \cdots,
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
Q_n &= \varphi_n^3\wp'(nu) = -2u^{-3n^2} + \cdots,\\
Q_n\varphi_n &= -2nu^{-(4n^2-1)} + \cdots,\\
\varphi_{2n}(u) &= 2nu^{-(4n^2-1)} + \cdots.
\end{aligned}$$

Da die Anfangsglieder von φ_{2n}^2 und $Q_n^2\varphi_n^2$ übereinstimmen, so muss $S = 1$,

$$\varphi_{2n}^2 = Q_n^2\varphi_n^2,$$

und weiter, wie aus den Anfangsgliedern ersichtlich,

$$(21.)\qquad \varphi_{2n} = -Q_n\varphi_n$$

sein.

Hiernach werden in den beiden Ausdrücken (20.) von selbst die Nenner bis auf das Vorzeichen einander gleich, und die Gleichsetzung der Zähler in (19.) und (20.) liefert nun

$$P_{2n} = -2P_n Q_n^2 + R_n^2, \tag{22.}$$

$$Q_{2n} = Q_n^4 - 6P_n Q_n^2 R_n + 2R_n^3. \tag{23.}$$

Zur Berechnung von R_{2n} kann man sich der Gleichung

$$\wp'' u - 6\wp^2 u = -\frac{1}{2} g_2$$

bedienen, nachdem man darin wieder u durch nu ersetzt hat. Es folgt

$$\frac{2R_n}{\varphi_n^4} - 6\frac{P_n^2}{\varphi_n^4} = -\frac{1}{2} g_2,$$

d. h. die linke Seite behält bei Änderung von n ihren Werth. Demnach wird

$$\frac{2R_{2n}}{\varphi_{2n}^4} - 6\frac{P_{2n}^2}{\varphi_{2n}^4} = \frac{2R_n}{\varphi_n^4} - 6\frac{P_n^2}{\varphi_n^4},$$

$$R_{2n} - 3P_{2n}^2 = (R_n - 3P_n^2)\, Q_n^4. \tag{24.}$$

In ähnlicher Weise können die Ausdrücke mit dem Index $2n+1$ aus denen mit den Indices n und $n+1$ zusammengesetzt werden. Man hat dazu in dem Additionstheorem der $\wp$-Function $(n+1)u$ für u, nu für v zu schreiben, den Werth von $\wp'((2n+1)u)$ hinzuzunehmen und wie vorher die Gleichungen (12.), (13.) und (14.) zu benutzen. Von $\varphi_1 = 1$, $P_1 = \wp u$, $Q_1 = \wp' u$, $R_1 = \frac{1}{2}\wp'' u$ und den nach dem Vorhergehenden als bekannt zu betrachtenden Werthen von $\varphi_2, P_2, \dots$ ausgehend kann man dann der Reihe nach $\wp(3u)$ aus $\wp u$ und $\wp(2u)$, $\wp(4u)$ und $\wp(5u)$ aus $\wp(2u)$ und $\wp(3u)$ berechnen, u. s. w. Es könnte einfacher erscheinen, $\wp((n+1)u)$ aus $\wp(nu)$ und $\wp u$ nach dem Additionstheorem zu entwickeln. Dann enthalten aber Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler, dessen Aufsuchung viel schwieriger ist als die Anwendung des eben besprochenen Verfahrens.

Das Studium der Multiplicationsformeln ist für die Theorie der elliptischen Functionen von grosser Bedeutung gewesen, namentlich ist Abel dadurch zu seinen Untersuchungen veranlasst worden. Vor Abel und Jacobi hatte man nur die elliptischen Integrale betrachtet. Wird die Beziehung zwischen u und s ($= \wp u$) in der Form

$$u = -\int_\infty^s \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}}$$

angenommen, und ist $\wp(nu) = s_n$, so hat man

$$nu = -\int_\infty^{s_n} \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}},$$

also

$$n\int_\infty^s \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}} = \int_\infty^{s_n} \frac{ds'}{\sqrt{4s'^3 - g_2 s' - g_3}}.$$

Dass s_n eine rationale Function von s wird, hatten schon Euler und Lagrange gefunden. Wenn nun das Integral mit der Grenze s_n gegeben ist, und sein n^{ter} Theil wieder als Integral dargestellt werden soll, so wird s Wurzel einer algebraischen Gleichung. In der Theorie der trigonometrischen Functionen lautet die entsprechende Aufgabe, x und x_n vermöge der Gleichung

$$n\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \int_0^{x_n} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}$$

zu bestimmen, und wenn speciell die rechte Seite gleich 2π angenommen wird, so ist $\cos\frac{2\pi}{n}$ zu ermitteln. Die Verallgemeinerung dieser functionalen Beziehung ist in Legendrescher Form

$$n\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}} = \int_0^{x_n} \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k^2x'^2)}}.$$

Während man nun in der Theorie der trigonometrischen Functionen auf eine Gleichung n^{ten} Grades kam, wurde die entsprechende in der Theorie der elliptischen Functionen von höherem Grade. n von deren Wurzeln geben eine Function von $\frac{2\omega}{n}, \frac{4\omega}{n}, \frac{6\omega}{n}, \cdots$; durch das Vorhandensein von mehr als n Wurzeln wurde Abel auf die Existenz einer imaginären Periode geführt.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Die Multiplicationstheoreme der σ-Quotienten.

Will man untersuchen, wie die σ-Quotienten sich darstellen, wenn das Argument mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl multiplicirt wird, so kann man sich dazu eines ähnlichen Verfahrens bedienen wie im vorigen Kapitel. Entsprechend der Gleichung S. 212 (4.) kann man nämlich versuchen, eine elliptische Function zu bilden, deren Zähler $\sigma_\alpha(nu)$ ist.

Nach S. 91 (13.) war

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u \tag{1.}$$

und nach S. 92 (14.)

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u; \qquad (\beta \gtrless \alpha) \tag{2.}$$

die wiederholte Anwendung dieser Formeln ergiebt

$$\sigma_\alpha(u+2n\omega_\alpha) = (-1)^n e^{2n\eta_\alpha(u+n\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u, \tag{3.}$$

$$\sigma_\alpha(u+2n\omega_\beta) = e^{2n\eta_\beta(u+n\omega_\beta)}\sigma_\alpha u. \tag{4.}$$

Setzt man nu für u, so wird

$$\sigma_\alpha(n(u+2\omega_\alpha)) = (-1)^n e^{2n^2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha(nu), \tag{5.}$$

$$\sigma_\alpha(n(u+2\omega_\beta)) = e^{2n^2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha(nu). \tag{6.}$$

Um den Exponentialfactor und gleichzeitig das Vorzeichen zum Wegfall zu bringen, dividire man $\sigma_\alpha(nu)$ für ungerades n durch $\sigma_\alpha u.(\sigma u)^{n^2-1}$, für gerades n durch $(\sigma u)^{n^2}$. Die Formeln (1.) und

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

lassen dann erkennen, dass wenn man für ungerades n

$$\frac{\sigma_\alpha(nu)}{\sigma_\alpha u.(\sigma u)^{n^2-1}} = \psi_n(u), \tag{7.}$$

für gerades n

$$\frac{\sigma_\alpha(nu)}{(\sigma u)^{n^2}} = \bar{\psi}_n(u) \tag{8.}$$

setzt, die Eigenschaften

$$\psi_n(u+2\omega_\alpha) = \psi_n(u), \quad \psi_n(u+2\omega_\beta) = \psi_n(u),$$
$$\bar{\psi}_n(u+2\omega_\alpha) = \bar{\psi}_n(u), \quad \bar{\psi}_n(u+2\omega_\beta) = \bar{\psi}_n(u)$$

gelten. $\psi_n(u)$ und $\bar{\psi}_n(u)$ sind also elliptische Functionen, und ausserdem gerade. Die Stelle $u = 0$ ist Unendlichkeitsstelle beider Functionen, und zwar für ψ_n mit der Ordnungszahl n^2-1, für $\bar{\psi}_n$ mit der Ordnungszahl n^2. Die zweite Function wird offenbar im Periodenparallelogramm an keiner weiteren Stelle unendlich gross. Aber auch die erste nicht; denn $\sigma_\alpha u$ verschwindet zwar für $u = \omega_\alpha$, allein da n ungerade ist, so wird $n\omega_\alpha$ der Grösse ω_α congruent, und der Zähler verschwindet ebenfalls mit der Ordnungszahl Eins. Hiernach lassen sich beide Functionen als ganze Functionen von $\wp u$ darstellen; den Gleichungen S. 214 (7.) und (8.) entsprechend ist

$$\psi_n(u) = C_0 + C_1\wp u + \cdots + C_{\frac{n^2-1}{2}}(\wp u)^{\frac{n^2-1}{2}} = G_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}}, \tag{9.}$$

$$\bar{\psi}_n(u) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1\wp u + \cdots + \bar{C}_{\frac{n^2}{2}}(\wp u)^{\frac{n^2}{2}} = \bar{G}_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2}{2}}. \tag{10.}$$

Auch hier mögen die Coefficienten in Beziehung zu den Nullstellen gesetzt werden. Die Werthe, für die der Zähler von $\psi_n(u)$ verschwindet, haben die Form

$$\frac{(2\mu+1)\omega_\alpha + 2\nu\omega_\beta}{n}.$$

Scheidet man zunächst, wie immer, die congruenten Stellen aus, so sieht man, dass höchstens folgende Zahlenwerthe in Betracht kommen können:

$$2\mu+1 = 1, 3, \ldots 2n-1, \quad \text{d. h.} \quad \mu = 0, 1, \ldots n-1,$$
$$2\nu = 0, 2, \ldots 2n-2, \quad \text{d. h.} \quad \nu = 0, 1, \ldots n-1.$$

Aber für ungerades n fällt das Werthepaar

$$\mu = \frac{n-1}{2}, \quad \nu = 0,$$

das ω_α liefert, weg, weil ω_α auch Nullstelle des Nenners ist, und es bleiben, wie es sein muss, n^2-1 Nullstellen für $\psi_n(u)$ übrig.

Dieselben Überlegungen wie auf S. 213—216 zeigen nun, dass für die Darstellung von $\psi_n(u)$ als ganze Function von $\wp u$ folgende Zahlenwerthe in Betracht kommen:

$$\mu = 0, 1, \cdots \frac{n-3}{2}; \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{n-1}{2},$$
$$\mu = \frac{n-1}{2}; \qquad \nu = \quad 1, \quad 2, \cdots \quad \frac{n-1}{2}.$$

Ihre Zusammenstellung ergiebt

$$\frac{n-1}{2}\left(1+2\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$$

Grössen

$$\frac{(2\mu+1)\,\omega_\alpha+2\nu\,\omega_\beta}{n} = \overset{\alpha}{v}_\lambda.$$

Es wird

$$(11.) \qquad G_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2-1}{2}} = \prod_\lambda (\wp u - \wp \overset{\alpha}{v}_\lambda),$$

denn $\psi_n(u)$ und das Product rechts beginnen beide mit $u^{-(n^2-1)}$.

Bei geradem n ist keiner der betrachteten Argumentwerthe auch Nullstelle des Nenners, die Anzahl dieser Werthe also gleich n^2. Für den Ausdruck von $\bar{\psi}_n(u)$ durch $\wp u$ sind beizubehalten

$$\mu = 0, 1, \cdots \frac{n-2}{2}; \qquad \nu = 0, \pm 1, \cdots \pm \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2},$$

insgesammt

$$\frac{n}{2}\left(1+2\frac{n-2}{2}+1\right) = \frac{n^2}{2}$$

Zusammenstellungen. Es wird

(12.) $$\overline{G}_\alpha(\wp u)_{\frac{n^2}{2}} = \prod_\lambda (\wp u - \wp \overset{\alpha}{v}_\lambda),$$

wenn jetzt λ die Werthe $1, 2, \cdots \frac{n^2}{2}$ durchläuft.

Man kann diese Formeln und schon die entsprechenden des vorigen Kapitels anders schreiben, indem man die Relation

$$\wp u - \wp v = (\wp u - e_\alpha) - (\wp v - e_\alpha) = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_\alpha v}{\sigma v}\right)^2$$

benutzt. Wiederum sei zuerst n ungerade. Die Gleichungen S. 214 (7.) und S. 215 (9.) geben

$$\frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{n^2}} = n \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \frac{\sigma_\alpha^2 u\, \sigma^2 v_\lambda - \sigma^2 u\, \sigma_\alpha^2 v_\lambda}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v_\lambda},$$

d. h. bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens

(13.) $$\sigma(nu) = n\, \sigma u\, (\sigma_\alpha u)^{n^2-1} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\alpha^2 v_\lambda\, \sigma^2 u}{\sigma^2 v_\lambda\, \sigma_\alpha^2 u}\right).$$

In gleicher Weise folgt aus S. 223 (7.), (9.) und (11.)

$$\frac{\sigma_\alpha(nu)}{\sigma_\alpha u\, (\sigma u)^{n^2-1}} = \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \frac{\sigma_\alpha^2 u\, \sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda - \sigma^2 u\, \sigma_\alpha^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda},$$

also

(14.) $$\sigma_\alpha(nu) = (\sigma_\alpha u)^{n^2} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\alpha^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma^2 u}{\sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma_\alpha^2 u}\right).$$

Man kann rechts auch noch eine σ-Function mit einem anderen Index einführen, indem man in der oben benutzten Relation β statt α annimmt. Dann wird

(15.) $$\sigma_\alpha(nu) = \sigma_\alpha u\, (\sigma_\beta u)^{n^2-1} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}} \left(1 - \frac{\sigma_\beta^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma^2 u}{\sigma^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda\, \sigma_\beta^2 u}\right).$$

Mittels der Formeln (13.), (14.) und (15.) werden die σ-Functionen des $n$fachen Arguments rational durch σ-Functionen des einfachen Arguments dargestellt. Durch Division erhält man aus (13.) und (14.)

(16.) $$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}(nu) = n\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\,R\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right);$$

ferner aus (14.) und

$$\sigma_\beta(nu) = \sigma_\beta u\,(\sigma_\alpha u)^{n^2-1}\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-1}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\alpha^2\overset{\beta}{v}_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2\overset{\beta}{v}_\lambda\,\sigma_\alpha^2 u}\right):$$

(17.) $$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}(nu) = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u\,R_1\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right) = \overline{R}_1\left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}u\right);$$

endlich durch Vertauschung von β mit γ

(18.) $$\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}(nu) = \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u\,R_2\left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2\right) = \overline{R}_2\left(\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha}u\right).$$

Die mit $R, R_1, \ldots$ bezeichneten Functionen hängen rational von ihren Argumenten ab. Die zweiten Ausdrücke auf den rechten Seiten von (17.) und (18.) rühren daher, dass sich nach der Formel

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\sigma^2 u = 0$$

(S. 96 (2.)) das Quadrat jedes σ-Quotienten rational durch einen beliebigen anderen σ-Quotienten darstellen lässt.

Für gerades n ist von der aus S. 214 (8.) und S. 216 (10.) folgenden Formel

$$\frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{n^2}} = -\frac{n}{2}\wp' u\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-4}{2}}(\wp u - \wp v_\lambda)$$

auszugehen, in der ausser dem Product auch die $\wp'$-Function durch σ-Functionen zu ersetzen ist, vermittelst

$$\wp' u = -2\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u} = -2\frac{\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u}{\sigma^3 u}$$

(S. 90 (9.)). Der Gleichung (13.) entspricht jetzt

(19.) $$\sigma(nu) = n\,\sigma u\,(\sigma_\alpha u)^{n^2-3}\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2-4}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\alpha^2 v_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2 v_\lambda\,\sigma_\alpha^2 u}\right).$$

Aus S. 223 (8.), (10.) und S. 225 (12.) folgt

(20.) $$\sigma_\alpha(nu) = (\sigma_\alpha u)^{n^2}\prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\alpha^2\overset{\alpha}{v}_\lambda\,\sigma^2 u}{\sigma^2\overset{\alpha}{v}_\lambda\,\sigma_\alpha^2 u}\right)$$

oder auch

$$\mathfrak{S}_\alpha(nu) = (\mathfrak{S}_\beta u)^{n^2} \prod_{\lambda=1}^{\frac{n^2}{2}} \left(1 - \frac{\mathfrak{S}_\beta^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda \, \mathfrak{S}^2 u}{\mathfrak{S}^2 \overset{\alpha}{v}_\lambda \, \mathfrak{S}_\beta^2 u}\right). \tag{21.}$$

Die Division liefert

$$\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\alpha}(nu) = n \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\alpha} u \frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}_\alpha} u \frac{\mathfrak{S}_\gamma}{\mathfrak{S}_\alpha} u \, R\left(\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\alpha} u\right)^2\right), \tag{22.}$$

$$\frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}_\alpha}(nu) = R_1\left(\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\alpha} u\right)^2\right) = \overline{R}_1\left(\frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}_\alpha} u\right), \tag{23.}$$

$$\frac{\mathfrak{S}_\gamma}{\mathfrak{S}_\alpha}(nu) = R_2\left(\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\alpha} u\right)^2\right) = \overline{R}_2\left(\frac{\mathfrak{S}_\gamma}{\mathfrak{S}_\alpha} u\right). \tag{24.}$$

Die Gleichungen (16.), (17.), (18.) und (22.), (23.), (24.) geben für ungerades und gerades n die Multiplicationstheoreme der $\mathfrak{S}$-Quotienten. Im Besonderen enthalten sie auch die ganzzahlige Multiplication für die Functionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Die elliptischen Integrale.

Ein beliebiges elliptisches Integral

$$J = \int \overline{F}(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

(S. 2) oder, in anderer Schreibweise,

$$J = \int \overline{F}_0(x, \sqrt{R(x)}) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

kann durch die im ersten Kapitel besprochene rationale Transformation auf die Form

$$J = \int F(s, \sqrt{S}) \frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

gebracht und sodann mittels der Substitution

$$s = \wp u$$

weiter umgewandelt werden. Die zu integrirende Function geht damit in eine rationale Function von $\wp u$ und $\wp' u$ über, und J selbst ist als Integral einer beliebigen elliptischen Function aufzufassen.

Nun ist eine solche Function auf S. 144 in eine für die Integration unmittelbar brauchbare Form gesetzt worden. Aus der Gleichung

$$f(u) = C' + \sum_{\mu=1}^{m} \Big\{ c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u - v_\mu) + c'_\mu \wp(u - v_\mu) - \frac{1}{2} c''_\mu \wp'(u - v_\mu) + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{l_\mu}}{(l_\mu - 1)!} c_\mu^{(l_\mu - 1)} \wp^{(l_\mu - 2)}(u - v_\mu) \Big\}$$

folgt

$$(1.)\quad \int f(u)\,du = C + C''u + \sum_{\mu=1}^{m}\Big\{c_\mu \log \sigma(u-v_\mu) - c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) - \frac{1}{2}c''_\mu \wp(u-v_\mu) + \cdots + \frac{(-1)^{l_\mu}}{(l_\mu-1)!}c_\mu^{(l_\mu-1)}\wp^{(l_\mu-1)}(u-v_\mu)\Big\}.$$

Wird auf den zweiten Bestandtheil der Summe die auch a. a. O. vorgenommene Transformation

$$(2.)\quad \sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) = \frac{\sigma'}{\sigma}u\sum_{\mu=1}^{m}c'_\mu - \sum_{\mu=1}^{m}c'_\mu\frac{\sigma'}{\sigma}v_\mu + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}c'_\mu\frac{\wp'u+\wp'v_\mu}{\wp u - \wp v_\mu}$$

angewendet, die folgenden Bestandtheile nebst der letzten Summe in (2.) zu einer elliptischen Function $f_1(u)$ vereinigt und die Constante $\sum c'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}v_\mu$ mit C zusammengezogen, so ergiebt sich

$$(3.)\quad \int f(u)\,du = f_1(u) + C' + C''u - \frac{\sigma'}{\sigma}u\sum_{\mu=1}^{m}c'_\mu + \sum_{\mu=1}^{m}c_\mu \log\sigma(u-v_\mu).$$

Auf den Integrationsweg, längs dessen das Integral erstreckt wird, ist dabei keine Rücksicht genommen. Die Rechnung hat nur den Zweck, eine Function darzustellen, deren erste Ableitung der gegebenen Function gleich ist.

Die rechte Seite von (3.) entspricht in ihren einzelnen Theilen der aus der Integralrechnung bekannten Zerlegung des Integrals J, betrachtet als Function von s. Das Integral zerfällt nämlich in eine rationale Function von s und $\sqrt{S}$, je ein Integral $\int\frac{ds}{\sqrt{S}}$ und $\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}$ und eine endliche Anzahl von Integralen $\int\frac{ds}{(s-s_\mu)\sqrt{S}}$. Um den Zusammenhang genauer zu untersuchen, hat man vor allem zu beachten, dass die Gesammtheit der Werthe von u, die für ein gegebenes Werthepaar $(s, \sqrt{S})$ durch die Gleichungen

$$\wp u = s, \quad \wp' u = -\sqrt{S}$$

definirt werden, mit den durch das Integral

$$\int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}} \quad \text{oder} \quad \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} = J(s)$$

dargestellten Werthen übereinstimmt, wenn dieses Integral auf beliebigem Wege von dem gegebenen Werthe s in's Unendliche erstreckt wird. Aus irgendeinem Werthe von u gehen alle übrigen durch Addition von $2m\omega + 2n\omega'$

hervor. Die Perioden der zu dem Integral gehörenden $\wp$-Function werden deshalb auch als Perioden des Integrales selbst bezeichnet.

Entwickelt man das elliptische Integral erster Art $J(s)$ für hinreichend grosse Werthe von s nach fallenden Potenzen dieser Grösse (vgl. S. 53), so findet man

$$J(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \frac{1}{3} G_1 s^{-1} + \frac{1}{5} G_2 s^{-2} + \frac{1}{7} G_3 s^{-3} + \cdots\right).$$

Die Coefficienten lassen sich nach dem auf S. 51 und 52 angegebenen Verfahren berechnen, wobei noch von den Formeln auf S. 46 Gebrauch zu machen ist:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{1}{8} g_2, \quad G_3 = \frac{1}{8} g_3, \quad \cdots .$$

Es ergiebt sich danach

$$(4.) \qquad J(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + \frac{g_2}{40}\frac{1}{s^2} + \frac{g_3}{56}\frac{1}{s^3} + \cdots\right).$$

Handelt es sich um das Integral $\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{S}}$, so ist einer von dessen Werthen gleich $J(s_0) - J(s)$.

Für das elliptische Integral zweiter Art $J'(s)$ besteht bei Einführung von u die Beziehung

$$\int \frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \int -\wp u\,du = \int \frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} du = C + \frac{\sigma'}{\sigma} u.$$

Es gilt also die Gleichung

$$(5.) \qquad J'(s) = \frac{\sigma'}{\sigma} u$$

in dem Sinne, dass durch die Function $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ ein Werth der Integralfunction dargestellt wird. Dieser Zusammenhang lässt sich genauer aussprechen. Entwickelt man nämlich auch hier das Integral für grosse Werthe von s, so erhält man unter Weglassung der additiven Constante

$$(6.) \qquad J'(s) = \sqrt{s}\left(1 - \frac{g_2}{24}\frac{1}{s^2} - \frac{g_3}{40}\frac{1}{s^3} - \cdots\right).$$

Dieselbe Darstellung ergiebt sich aber auch für $\frac{\sigma'}{\sigma} u$, wenn in die Reihe S. 33 (7.) $u = J(s)$ aus (4.) eingesetzt wird. Der durch $\frac{\sigma'}{\sigma} u$ bestimmte Werth heisst das Normalintegral zweiter Art.

Bei Änderung des Integrationsweges von $J(s)$ geht u in $u+2m\omega+2n\omega'$ über, und bei entsprechender Änderung des Integrationsweges von $J'(s)$ die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ in $\frac{\sigma'}{\sigma}u+2m\eta+2n\eta'$. Die Grössen 2η, $2\eta'$ können daher als die den Perioden 2ω und $2\omega'$ von $J(s)$ entsprechenden Perioden des Normalintegrales zweiter Art bezeichnet werden.

Als elliptisches Integral dritter Art soll nicht $\int\frac{ds}{(s-s_0)\sqrt{S}}$, sondern

$$(7.)\qquad \int\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} = J(s,s_0)$$

betrachtet werden. Der Übergang zu u und s_0 $(=\wp v)$ liefert

$$(8.)\qquad J(s,s_0) = \int\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}\,du.$$

Benutzt man auf's neue die Beziehung

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}v = -\frac{\sigma'}{\sigma}(v-u)-\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

so findet man

$$J(s,s_0) = \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u}+u\frac{\sigma'}{\sigma}v+C.$$

Die Gleichung (bei passender Wahl der Integrationsconstante C)

$$(9.)\qquad J(s,s_0) = \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u\,\sigma v}+u\frac{\sigma'}{\sigma}v$$

besteht also in demselben Sinne wie vorher die Gleichung (5.). Die rechte Seite definirt das Normalintegral dritter Art.

Der Werth $s=s_0$ ist hier vor den übrigen ausgezeichnet. Entwickelt man in dessen Nähe, so erhält man

$$\begin{aligned}
S &= S_0+\frac{dS_0}{ds_0}(s-s_0)+\frac{1}{2}\,\frac{d^2S_0}{ds_0^2}(s-s_0)^2+\frac{1}{6}\,\frac{d^3S_0}{ds_0^3}(s-s_0)^3\\
&= S_0(1+G(s-s_0)),\\
\frac{1}{\sqrt{S}} &= \frac{1}{\sqrt{S_0}}(1+G(s-s_0))^{-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{S_0}}(1+(s-s_0)\,\mathfrak{P}(s-s_0)),\\
\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} &= \frac{2\sqrt{S_0}}{s-s_0}+\mathfrak{P}_1(s-s_0),
\end{aligned}$$

mithin

$$\int \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} = \int \frac{ds}{s-s_0} + \mathfrak{P}_2(s-s_0),$$

d. h.

$$J(s, s_0) = \log(s-s_0) + \mathfrak{P}_2(s-s_0). \tag{10.}$$

Für grosse Werthe von s wird

$$1+\frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S}} = 1+\frac{\sqrt{S_0}}{2s\sqrt{s}}\left(1+\frac{g_2}{8s^2}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{s-s_0} = \frac{1}{s}\,\frac{1}{1-\frac{s_0}{s}} = \frac{1}{s}\left(1+\frac{s_0}{s}+\cdots\right),$$

folglich

$$\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\,\frac{1}{\sqrt{S}} = \frac{1}{s}\left(1+\frac{s_0}{s}+\frac{\sqrt{S_0}}{2s\sqrt{s}}+\cdots\right)$$

und weiter

$$J(s, s_0) = \frac{1}{2}\left(\log s - \frac{s_0}{s}+\cdots\right), \tag{11.}$$

wieder bei Weglassung einer Integrationsconstante.

Die Entwickelungen (10.) und (11.) lehren, dass das Integral dritter Art für $s = s_0$ und $s = \infty$ logarithmisch unendlich gross wird.

Für kleine Werthe von u, die zu grossen Werthen von s gehören, ist andererseits

$$\log \sigma(v-u) = \log \sigma v - u\frac{d\log\sigma v}{dv} + \frac{u^2}{2}\,\frac{d^2\log\sigma v}{dv^2}+\cdots,$$

mithin nach (9.)

$$J(s, s_0) = -\log\sigma u - \frac{u^2}{2}\wp v + \cdots$$

oder nach S. 32

$$J(s, s_0) = -\log u - \frac{u^2}{2}\wp v + g_2\frac{u^4}{240}+\cdots. \tag{12.}$$

Um die rechte Seite in eine Function von s zu verwandeln, hat man aus (4.)

$$u = s^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{s^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s}\right)\right),$$

also

$$\log u = -\frac{1}{2}\log s + \frac{1}{s^2}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{s}\right)$$

einzusetzen. Aus $-\frac{u^2}{2}\wp v$ ergiebt sich $-\frac{1}{2}s_0\ s^{-1}$ als Anfangsglied, ein constantes Glied kommt nirgends vor, die Darstellung (12.) geht in (11.) über.

Um nun zu dem allgemeinen elliptischen Integral zurückzukehren, so kann man in der Formel (3.) das letzte Glied rechts wegen (9.) schreiben

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log \sigma(v_\mu - u) = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu J(s, s_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log \sigma u + \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \log \sigma v_\mu - u \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \frac{\sigma'}{\sigma} v_\mu.$$

Die zweite Summe fällt wegen $\sum c_\mu = 0$ weg, die dritte ändert nur die Constante C', und die letzte den Coefficienten von u. Es wird also

$$(13.)\quad \int F(s, \sqrt{S}) \frac{-ds}{\sqrt{S}} = C_0 + F_1(s, \sqrt{S}) + C\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} - \int \frac{s\,ds}{\sqrt{S}} \sum_{\mu=1}^{m} c'_\mu$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \int \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S_\mu}}{s - s_\mu} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

d. h. jedes elliptische Integral lässt sich darstellen als Summe einer rationalen Function von s und $\sqrt{S}$, je eines Integrals erster und zweiter Art und einer endlichen Anzahl von Integralen dritter Art in der hier angenommenen Normalform.

Bei der Anwendung dieser Formel treten häufig Vereinfachungen ein. Wird z. B. die zu integrirende elliptische Function an allen Stellen v_μ nur von der ersten Ordnung unendlich gross, so fällt nicht blos das Integral zweiter Art, sondern auch die Function $F_1(s, \sqrt{S})$ weg, wie man aus ihrer Entstehung erkennt. Es bleiben also nur Integrale erster und dritter Art übrig.

Vertauscht man in (9.) u mit v und stellt die beiden Formeln durch Subtraction zusammen, so erhält man, unter k eine ganze Zahl verstehend,

$$(14.)\quad J(s, s_0) - J(s_0, s) = u\frac{\sigma'}{\sigma}v - v\frac{\sigma'}{\sigma}u + (2k+1)\pi i.$$

Diese Gleichung enthält den Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter bei elliptischen Integralen dritter Art.

Das elliptische Integral zweiter Art kann als Entwickelungscoefficient des Integrales dritter Art dargestellt werden. Wird nämlich die rechte Seite von (9.) jetzt nach Potenzen von v entwickelt, indem

$$\mathfrak{S}(v-u) = -\mathfrak{S}(u-v) = -\mathfrak{S}u + v\mathfrak{S}'u + \cdots,$$
$$\mathfrak{S}v = v - \frac{g_2}{2}\frac{v^5}{5!} + \cdots$$

gesetzt wird (S. 32 (4.)), so ergiebt sich

$$\frac{\mathfrak{S}(v-u)}{\mathfrak{S}u\,\mathfrak{S}v} = \frac{-\mathfrak{S}u + v\mathfrak{S}'u + \cdots}{v\,\mathfrak{S}u\left(1 - \frac{g_2}{2}\frac{v^4}{5!} + \cdots\right)} = -v^{-1}\left(1 - v\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u + \cdots\right).$$

Der Logarithmus der Klammergrösse lässt sich als Reihe darstellen, die mit

$$-v\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u$$

beginnt. Aus

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}v = \frac{1}{v} - \frac{g_2}{60}v^3 + \cdots$$

kommt kein Glied mit der ersten Potenz von v. Demnach kann man setzen

$$(15.)\qquad \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u = -\left[\log\frac{\mathfrak{S}(v-u)}{\mathfrak{S}u\,\mathfrak{S}v} + u\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}v\right]_{v^1}.$$

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Die Additionstheoreme der Integrale erster, zweiter und dritter Art.

Es war ein Hauptsatz der Theorie der $\wp$-Function, dass die Function der Summe zweier Argumente mit den Functionswerthen für die einzelnen Argumente durch eine algebraische Gleichung verbunden ist. Meist ist dieses Additionstheorem in der Form

$$\wp(u_1+u_2) = \frac{(\wp u_1+\wp u_2)(2\wp u_1\,\wp u_2-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\wp' u_1\,\wp' u_2}{2(\wp u_1-\wp u_2)^2} \tag{1.}$$

benutzt worden, die aussagt, dass sich $\wp(u_1+u_2)$ rational durch die Werthe der Function selbst und ihrer ersten Ableitung für die Einzelargumente darstellen lässt. Wird

$$u = J(s)$$

gesetzt, so erscheint der Inhalt dieses Satzes in einer anderen Gestalt. Es sei für $u_1+u_2 = u_3$:

$$\wp u_\lambda = s_\lambda, \quad \wp' u_\lambda = -\sqrt{S_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

so besteht die Gleichung

$$J(s_1)+J(s_2) = J(s_3) \tag{2.}$$

oder

$$\int_\infty^{s_1}\frac{-ds}{\sqrt{S}}+\int_\infty^{s_2}\frac{-ds}{\sqrt{S}} = \int_\infty^{s_3}\frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

gleichzeitig mit

$$s_3 = \frac{(s_1+s_2)(2s_1s_2-\frac{1}{2}g_2)-g_3-\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}}{2(s_1-s_2)^2}. \tag{3.}$$

Das heisst: Zwei elliptische Integrale erster Art mit einer Grenze ∞ (Normalintegrale) lassen sich durch Addition zu einem einzigen solchen Integral vereinigen, dessen andere Grenze algebraisch aus den anderen Grenzen der beiden gegebenen Integrale zusammengesetzt ist. Dieser Satz heisst das Additionstheorem der Integrale erster Art. Um ihn auf Normalintegrale zweiter Art auszudehnen, hat man für $J'(s_1)+J'(s_2) = \frac{\sigma'}{\sigma}u_1 + \frac{\sigma'}{\sigma}u$ einen Ausdruck durch $\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_2)$ zu suchen. Ein solcher ergiebt sich aber unmittelbar aus der oft benutzten Formel (S. 37 (15.))

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}u_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}.$$

Es wird

$$J'(s_1)+J'(s_2) = J'(s_3) + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2} \tag{4.}$$

oder

$$\int^{s_1}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} + \int^{s_2}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \int^{s_3}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2},$$

wo die Integrale durch die Festsetzungen auf S. 230 genauer bestimmt sind. Die Summe zweier Normalintegrale zweiter Art lässt sich also durch ein ebensolches Integral darstellen, vermehrt um einen algebraischen Ausdruck. Die obere Grenze s_3 des neuen Integrales wird, wie vorher, durch die Formel (3.) gegeben.

Für die entsprechende Untersuchung beim Integral dritter Art sind einige Vorbereitungen nötig. Es sollen nur Integrale mit demselben Parameter betrachtet werden. Vergleicht man dann

$$J(s_1, s_0) + J(s_2, s_0) = \log\frac{\sigma(v-u_1)}{\sigma u_1\,\sigma v} + u_1\frac{\sigma'}{\sigma}v + \log\frac{\sigma(v-u_2)}{\sigma u_2\,\sigma v} + u_2\frac{\sigma'}{\sigma}v$$

mit

$$J(s_3, s_0) = \log\frac{\sigma(v-u_3)}{\sigma u_3\,\sigma v} + u_3\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

so sieht man, dass aus $J(s_1, s_0)+J(s_2, s_0)-J(s_3, s_0)$ die Glieder mit $\frac{\sigma'}{\sigma}v$ von vornherein wegfallen. Die unter dem Zeichen log stehende Function werde, wenn u statt v geschrieben wird, mit $f(u)$ bezeichnet, sodass

$$\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma^2 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2}\,\frac{\sigma u\,\sigma u_3}{\sigma(u-u_3)} = f(u)$$

ist. Der erste der hierin miteinander multiplicirten Quotienten kann nach dem Hauptsatze auf S. 139 durch Multiplication mit $\frac{\sigma(u+u_3)}{\sigma u}$ in eine elliptische Function verwandelt werden; durch Multiplication mit dem reciproken Factor geht dann zugleich auch aus dem zweiten Quotienten eine elliptische Function hervor. Es sei

$$(5.)\qquad \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_3)}{\sigma^3 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3} = \varphi(u),$$

also

$$f(u) = \varphi(u)\frac{\sigma u\,\sigma u_3}{\sigma(u-u_3)}\,\frac{\sigma u\,\sigma u_3}{\sigma(u+u_3)}.$$

Wird weiter

$$\frac{\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 u_3} = \psi(u)$$

gesetzt, so ist

$$\psi(u) = \wp u_3 - \wp u.$$

Es handelt sich darum, in

$$f(u) = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$$

auch den Zähler durch die $\wp$-Function auszudrücken.

Die Function $\varphi(u)$ hat nur eine einzige Unendlichkeitsstelle, $u = 0$, und es gilt in Folge dessen für sie die Darstellung auf S. 147, die sich hier, wegen der Ordnungszahl 3, auf

$$\varphi(u) = c_0 + c'\wp u - \tfrac{1}{2}c''\wp' u$$

reducirt. Die Coefficienten c' und c'' sind aus der Entwickelung

$$\varphi(u) = c'u^{-2} + c''u^{-3} + \mathfrak{P}(u).$$

zu entnehmen.

Nun geht aus der Definitionsgleichung (5.) hervor, dass der Coefficient von u^{-3} gleich $+1$ ist. Zur Bestimmung von c' hat man den Coefficienten von u^1 im Zähler durch $\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3$ zu dividiren. Es ist

$$\sigma(u-u_1) = -\sigma(u_1-u) = -\sigma u_1 + u\sigma' u_1 + \cdots,$$

und entsprechend für $\sigma(u-u_2)$ und $\sigma(u-u_3)$. Mithin wird

$$\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3\,c' = -\sigma' u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3 - \sigma' u_2\,\sigma u_1\,\sigma u_3 + \sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma' u_3,$$

$$c' = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}u_1 - \frac{\sigma'}{\sigma}u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2},$$

und es muss sein

$$\varphi(u) = c_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\,\wp u - \frac{1}{2}\,\wp' u.$$

Die Constante c_0 kann aus $\varphi(u_1) = 0$, nämlich

$$0 = c_0 + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\,\wp u_1 - \frac{1}{2}\,\wp' u_1$$

bestimmt werden. Der gesuchte Ausdruck lautet

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}(\wp u - \wp u_1) - \frac{1}{2}(\wp' u - \wp' u_1).$$

Nun ist die Function $\varphi(u)$ durch $\psi(u) = \wp u_3 - \wp u$ zu dividiren, dann $u = v$ zu setzen; an Stelle von u_1, u_2, u_3 sind überall die zugehörigen $\wp$-Functionen s_1, s_2, s_3 einzuführen, für s_3 der Ausdruck aus (3.) zu schreiben. Man kann jedoch den Quotienten $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ noch weiter so umformen, dass s_3 darin garnicht enthalten ist. Die algebraische Beziehung zwischen s_1, s_2, s_3 kommt dann nur insoweit in Betracht, als s_3 obere Grenze des Integrales dritter Art ist, mittels dessen die Summe der beiden gegebenen ausgedrückt werden soll.

Als lineare Function von $\wp' u$ werde $\varphi(u)$ mit

$$G - H\wp' u$$

bezeichnet. Hierin ist G eine lineare Function von $\wp u$, H eine Constante, gleich $\frac{1}{2}$. Das Product

$$(G - H\wp' u)(G + H\wp' u) = G^2 - H^2(\wp' u)^2$$

ist eine ganze Function dritten Grades von $\wp u$, die für die Nullstellen von $\varphi(u)$, nämlich $u = u_1, u_2$ und $-u_3$, d. h. für $\wp u = s_1, s_2$ und s_3, zu Null wird. Sie kann sich von

$$(\wp u - s_1)(\wp u - s_2)(\wp u - s_3)$$

nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Nun beginnt dieses Product, in der Nähe von $u = 0$ entwickelt, mit u^{-6}. Das Anfangsglied von $G^2 - H^2(\wp' u)^2$ ist das des zweiten Bestandtheils, also $-u^{-6}$. Mithin wird

$$G^2 - H^2(\wp' u)^2 = -(\wp u - s_1)(\wp u - s_2)(\wp u - s_3)$$

und

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \frac{G - H\wp' u}{s_3 - \wp u} = \frac{(\wp u - s_1)(\wp u - s_2)}{G + H\wp' u}.$$

Für die Darstellung von $J(s_1, s_0) + J(s_2, s_0) - J(s_3, s_0)$ wird

$$\log f(v) = \log \frac{\varphi(v)}{\psi(v)} = -\log \frac{G_0 + H_0 \wp' v}{(\wp v - s_1)(\wp v - s_2)}$$

gebraucht. Dabei ist

$$\begin{aligned} G_0 + H_0 \wp' v &= \frac{1}{2} \frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} (\wp v - \wp u_1) + \frac{1}{2} (\wp' v + \wp' u_1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}{s_1 - s_2} (s_0 - s_1) - \frac{1}{2} (\sqrt{S_0} + \sqrt{S_1}), \end{aligned}$$

und eine einfache Umformung liefert schliesslich

$$(6.) \quad J(s_1, s_0) + J(s_2, s_0) = J(s_3, s_0) - \log\left(\frac{1}{2} \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_0}}{s_1 - s_0} - \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_0}}{s_2 - s_0}\right)\right).$$

Die Summe zweier elliptischen Integrale dritter Art mit demselben Parameter lässt sich also darstellen durch ein Integral derselben Beschaffenheit, vermehrt um den Logarithmus eines algebraischen Ausdrucks.

Auf die Ausdehnung der Additionstheoreme (2.), (4.) und (6.) auf Summen von mehr als zwei Integralen soll hier nicht eingegangen werden, und ebensowenig auf die Herleitung des Additionstheorems der Integrale zweiter Art aus dem der Integrale dritter Art, die mittels der Formel S. 234 (15.) ausgeführt werden kann.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

Formeln zur Berechnung der Perioden.

Im neunten Kapitel sind zwei primitive Perioden der $\wp$-Function für reelle Invarianten durch bestimmte Integrale dargestellt worden, und zwar war bei positiver Discriminante

$$(1.)\qquad \omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

$$(2.)\qquad \omega' = i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}$$

(S. 78 (9.)). Die Ausdrücke können leicht so umgeformt werden, dass sie unter dem Integralzeichen blos eine Constante enthalten, und zwar liegt der Grund hiervon in dem Zusammenhange zwischen der Differentialgleichung der $\wp$-Function mit denen für die σ-Quotienten, wie er durch die Gleichung

$$\wp u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2$$

vermittelt wird. Aus der Form z. B. der Differentialgleichung S. 97 (7.) ist ersichtlich, dass man nur $\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}\,\frac{\sigma}{\sigma_\gamma} u$ gleich einer neuen Grösse zu setzen braucht, um auf eine Normalform eines elliptischen Differentials mit einer einzigen Constanten zu kommen (vgl. S. 99).

Um die Transformation direct an dem bestimmten Integral (1.) durchzuführen, setze man in

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

$$(3.)\qquad s - e_3 = \frac{e_1 - e_3}{t^2},$$

so wird

$$\omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(e_1-e_3-(e_2-e_3)t^2)}}.$$

Gilt, wie auf S. 99, die Definitionsgleichung

(4.) $$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = k^2,$$

wo k^2 unterhalb Eins liegt, und ferner

(5.) $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K,$$

so geht die Gleichung für ω in

(6.) $$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} K$$

über.

Aus dem Integralausdruck für ω folgte der für $\frac{\omega'}{i}$ durch Vertauschung von

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3$$

mit

$$-e_3, \; -e_2, \; -e_1.$$

Macht man diese Vertauschungen auch in der Substitutionsgleichung und dem Resultat, so erhält man, wenn man

(7.) $$\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = k'^2,$$

(8.) $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = K'$$

setzt,

(9.) $$\omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}} K'.$$

Die beiden in K und K' vorkommenden Constanten k und k', die Moduln der elliptischen Integrale, sind durch die Gleichung

(10.) $$k^2 + k'^2 = 1$$

verbunden. Der eine heisst der Complementärmodul des anderen.

Um nun K in eine für die Berechnung zweckmässige Form zu setzen, entwickele man für $k^2 t^2 < 1$

$$(1-k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2} k^2 t^2 + \frac{1.3}{2.4} k^4 t^4 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} t^{2n} + \cdots$$

oder, wenn

$$c_0 = 1, \quad \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} = c_n \qquad (n>0)$$

definirt wird,

$$(11.) \qquad (1-k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n} t^{2n}.$$

Bei der Multiplication mit $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ erscheint im allgemeinen Gliede $\frac{t^{2n} dt}{\sqrt{1-t^2}}$, und man kann nach einer aus der Integralrechnung bekannten Reductionsformel schreiben:

$$(12.) \qquad \frac{t^{2n} dt}{\sqrt{1-t^2}} = c_n \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - c_n d\left(t\, G_n(t) \sqrt{1-t^2}\right), \qquad (n>0)$$

wo

$$G_1(t) = 1, \quad G_2(t) = 1+\frac{2}{3} t^2, \quad \ldots,$$

$$(13.) \qquad G_n(t) = 1+\frac{2}{3} t^2 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} t^{2n-2}.$$

Demnach wird

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n} d\left(t\, G_n(t) \sqrt{1-t^2}\right).$$

Nun werde bleibend

$$(14.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n} = \mathfrak{K}$$

und ausserdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k^{2n} t\, G_n(t) = G(t).$$

gesetzt. Was die Convergenz der Reihen $\mathfrak{K}$ und $G(t)$ angeht, so ist die erste wegen $c_n \leqq 1$ für $k^2 < 1$ convergent, weil ihre Glieder nicht grösser sind als die entsprechenden der geometrischen Reihe

$$1+k^2+k^4+\cdots = \frac{1}{1-k^2} = \frac{1}{k'^2}.$$

Die Reihe $G(t)$ convergirt, wenn die durch Umordnung ihrer Glieder entstandene

$$\begin{aligned} & t\,(c_1^2 k^2 + c_2^2 k^4 + c_3^2 k^6 + \cdots) \\ & + \frac{2}{3}\, t^3 (c_2^2 k^4 + c_3^2 k^6 + \cdots) \\ & + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\, t^5 (c_3^2 k^6 + \cdots) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

convergent ist. Die in den Klammern stehenden Reihen convergiren nun aus demselben Grunde wie vorher die Reihe $\mathfrak{K}$, und ihre Summen sind kleiner als $\frac{k^2}{k'^2}, \frac{k^4}{k'^2}, \frac{k^6}{k'^2}, \cdots$. Die betrachtete Reihe ist demnach Glied für Glied kleiner als

$$\frac{t k^2}{k'^2}\left(1 + \frac{2}{3}\, t^2 k^2 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\, t^4 k^4 + \cdots\right).$$

Durch Vergleichung mit der geometrischen Reihe

$$1 + t^2 k^2 + t^4 k^4 + \cdots$$

erkennt man jetzt, dass ihre Summe und demnach auch $G(t)$ einen endlichen Werth hat, sobald $t^2 k^2 < 1$ ist. Und diese Bedingung ist auch für $t = 1$ erfüllt. Man darf daher die Gleichung

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \mathfrak{K} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - d\left(G(t)\sqrt{1-t^2}\right).$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 integriren. Dabei fällt der zweite Bestandtheil weg, und es wird

$$K = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{K} \tag{15.}$$

und ebenso

$$K' = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{K}'. \tag{16.}$$

Die Reihe $\mathfrak{K}$ convergirt um so stärker, je näher k^2 bei Null liegt. Da nun $\mathfrak{K}'$ die Grösse $1-k^2$ ebenso enthält wie $\mathfrak{K}$ die Grösse k^2, so tritt im Allgemeinen der Übelstand ein, dass von den beiden gleichzeitig gebrauchten Reihen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die eine schwach convergirt, wenn die andere stark convergent ist. Durch eine Transformation kann dem abgeholfen werden.

In der Formel (5.) werde

$$1 - k^2 t^2 = \frac{1}{t_1^2} \tag{17.}$$

gesetzt. Ausserdem soll die Definition der Grösse k', von der bis jetzt nur das Quadrat vorgekommen ist, durch die Bestimmung

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

vervollständigt werden. Dann findet man

$$K = \int_1^{\frac{1}{k'}} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2-1)(1-k'^2 t_1^2)}}.$$

Es werde nun zwischen 1 und $\frac{1}{k'}$ ein beliebiger Werth t_0 eingeschoben. Durch eine weitere Transformation des zweiten Bestandtheils in

$$(18.)\qquad K = \int_1^{t_0} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2-1)(1-k'^2 t_1^2)}} + \int_{t_0}^{\frac{1}{k'}} \frac{dt_1}{\sqrt{(t_1^2-1)(1-k'^2 t_1^2)}}$$

kann bewirkt werden, dass die eine Grenze gleich Eins wird, während die Form des Differentials sich nicht ändert. Dies hat den Vortheil, dass man allein das erste der beiden Integrale weiter zu behandeln braucht und bei der Reihenentwickelung des zweiten nur t_0 durch die noch zu bestimmende obere Grenze des zweiten zu ersetzen hat. Da K von t_0 unabhängig ist, so sind von beiden Entwickelungen schliesslich blos die von t_0 freien Glieder beizubehalten.

Eine Substitution, durch welche die Grenze $\frac{1}{k'}$ in 1 verwandelt wird, ist

$$(19.)\qquad t_1 = \frac{1}{k't'}.$$

Mit der ursprünglichen Grösse t hängt t' durch die Gleichung

$$(20.)\qquad k^2 t^2 + k'^2 t'^2 = 1$$

zusammen. Die andere Grenze wird $\frac{1}{k't_0}$, und es handelt sich demnach, wenn die Integrationsvariable wieder mit t bezeichnet wird, um die Entwickelung von

$$\int_1^{\frac{1}{k't_0}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2 t^2)}}.$$

Man hat für $k'^2 t^2 < 1$ nach (11.)

$$(21.)\qquad (1-k'^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k'^{2n} t^{2n}$$

zu setzen, was dem Integrations-Intervall nach offenbar gestattet ist, und die Formel (12.) in der Gestalt

$$\text{(22.)}\qquad \frac{t^{2n}\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = c_n \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + c_n\, d\left(t\,G_n(t)\sqrt{t^2-1}\right)$$

zu benutzen. Sie gilt nicht für $n = 0$, aber man kann bei der Summation, wie schon vorher, das zu c_0 gehörende Glied in den ersten Theil des bei der Integration entstehenden Ausdruckes aufnehmen. Wird alles dieses zunächst auf das erste in (18.) enthaltene Integral angewendet, so ergiebt sich

$$\int_1^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2 t^2)}} = \mathfrak{K}' \log\left(t_0 + \sqrt{t_0^2-1}\right) + t_0\sqrt{t_0^2-1}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} G_n(t_0).$$

In dem zweiten Integral ist dann also t_0 durch $\frac{1}{k' t_0}$ zu ersetzen:

$$\int_1^{\frac{1}{k't_0}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k'^2 t^2)}} = \mathfrak{K}' \log \frac{1+\sqrt{1-k'^2 t_0^2}}{k' t_0} + \frac{\sqrt{1-k'^2 t_0^2}}{k'^2 t_0^2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} G_n\left(\frac{1}{k' t_0}\right).$$

Beide Ausdrücke sind nach Potenzen von t_0 zu entwickeln und die constanten Glieder beizubehalten. Es wird

$$t_0 + \sqrt{t_0^2-1} = t_0\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{t_0^2}}\right) = t_0\left(2 - \frac{1}{2}\frac{1}{t_0^2} + \cdots\right) = 2t_0\left(1 - \frac{1}{4}\frac{1}{t_0^2} + \cdots\right),$$

$$\log\left(t_0 + \sqrt{t_0^2-1}\right) = \log 2 + \log t_0 + \frac{1}{t_0^2}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{t_0^2}\right),$$

woraus

$$\log \frac{1+\sqrt{1-k'^2 t_0^2}}{k' t_0} = \log 2 - \log k' - \log t_0 + k'^2 t_0^2\, \mathfrak{P}(k'^2 t_0^2).$$

Bei der Addition fällt $\log t_0$ weg; der erste Theil von K wird also

$$\mathfrak{K}' \log \frac{4}{k'}.$$

Dazu tritt noch

$$\left[t_0\sqrt{t_0^2-1}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} G_n(t_0)\right]_{t_0^0},$$

und zwar mit dem Factor 2, weil es für das constante Glied nicht darauf ankommt, ob die Variable in der Potenzreihe mit t_0 oder $\frac{1}{k' t_0}$ bezeichnet wird.

Um $\sqrt{t_0^2-1}$ zu entwickeln, hat man von

$$(t_0^2-1)^{-\frac{1}{2}} = t_0^{-1}\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

auszugehen; nach (11.) sind die Coefficienten der hieraus entstehenden Reihe bereits bekannt. Es ist

$$\frac{d\sqrt{t_0^2-1}}{dt_0} = \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-1}} = \left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t_0^{-2n},$$

also

$$\sqrt{t_0^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t_0^{-2n+1}}{-2n+1},$$

da die hinzutretende Constante, wie der directe Ansatz der Anfangsglieder von $\sqrt{t_0^2-1}$ lehrt, gleich Null ist.

Es sei nun

$$[t_0\sqrt{t_0^2-1}\,G_n(t_0)]_{t_0^0} = a_n,$$

sodass die noch zu berechnende Grösse gleich

$$2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} a_n$$

ist. Man findet a_n durch Multiplication von

$$\sqrt{t_0^2-1} = t_0 - c_1 t_0^{-1} - \frac{1}{3}c_2 t_0^{-3} - \frac{1}{5}c_3 t_0^{-5} - \cdots$$

mit

$$t_0 G_n(t_0) = t_0 + \frac{2}{3}t_0^3 + \frac{2.4}{3.5}t_0^5 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}t_0^{2n-1}$$

und Beibehaltung des constanten Gliedes:

$$\begin{aligned} a_n &= -c_1 - \frac{2}{3}\frac{c_2}{3} - \frac{2.4}{3.5}\frac{c_3}{5} - \cdots - \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{c_n}{2n-1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1.3}{2.4} - \frac{2.4}{3.5}\frac{1}{5}\frac{1.3.5}{2.4.6} - \cdots - \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{1}{2n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \\ &= -\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4} - \frac{1}{5.6} - \cdots - \frac{1}{(2n-1)2n}. \end{aligned}$$

Hiernach wird schliesslich

$$K = \mathfrak{K}'\log\frac{4}{k'} - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k'^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(2\nu-1)2\nu}. \tag{23.}$$

Das zweite Glied der rechten Seite kann noch in anderer Form geschrieben werden. Von dem Factor -2 abgesehen, heissen die Anfangsglieder

$$\frac{1}{1.2}c_1^2k'^2+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}\right)c_2^2k'^4+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}\right)c_3^2k'^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1.2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2k'^{2n}+\frac{1}{3.4}\sum_{n=2}^{\infty}c_n^2k'^{2n}+\frac{1}{5.6}\sum_{n=3}^{\infty}c_n^2k'^{2n}+\cdots.$$

Hierin ist die erste Summe bis auf das Anfangsglied gleich der Reihe $\mathfrak{K}'$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2k'^{2n}=\mathfrak{K}'-1;$$

ebenso

$$\sum_{n=2}^{\infty}c_n^2k'^{2n}=\mathfrak{K}'-1-c_1^2k'^2,$$
$$\sum_{n=3}^{\infty}c_n^2k'^{2n}=\mathfrak{K}'-1-c_1^2k'^2-c_2^2k'^4,\ \ldots.$$

Die n Anfangsglieder zusammen mögen $\mathfrak{K}'_n$ geben, also

$$1+c_1^2k'^2+c_2^2k'^4+\cdots+c_{n-1}^2k'^{2n-2}=\mathfrak{K}'_n \tag{24.}$$

sein, so ist

$$K=\mathfrak{K}'\log\frac{4}{k'}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{K}'-\mathfrak{K}'_n}{(2n-1)2n}. \tag{25.}$$

Wenn nun die Reihe $\mathfrak{K}$ schwach, demnach $\mathfrak{K}'$ stark convergent ist, so benutze man diese Formel, worauf ω und ω' selbst durch (6.) und (9.) bestimmt werden. Dies gilt also, wenn k^2 nahe bei Eins, k'^2 nahe bei Null liegt. Ist dagegen k^2 wenig von Null verschieden, so hat man umgekehrt zu verfahren, nämlich zu setzen

$$K=\frac{\pi}{2}\mathfrak{K},$$

$$K'=\mathfrak{K}\log\frac{4}{k}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_n}{(2n-1)2n}, \tag{26.}$$

wo $\mathfrak{K}_n$ für $\mathfrak{K}$ dieselbe Bedeutung hat wie $\mathfrak{K}'_n$ für $\mathfrak{K}'$.

Achtundzwanzigstes Kapitel.

Bestimmung eines primitiven Periodenpaares der $\wp$-Function für beliebige Grössen e_α.

Die im vorigen Kapitel gewonnenen Formeln können unter allgemeineren Voraussetzungen zur Bestimmung eines primitiven Periodenpaares von $\wp u$ dienen. Es seien e_1, e_2, e_3 beliebige complexe, nur durch die Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

verbundene Grössen, und es sei wie bisher

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2, \quad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2, \tag{1.}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = K'. \tag{2.}$$

Die Functionen unter den Integralzeichen sind jetzt im Allgemeinen complex. Der Integrationsweg sei die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte 0 und 1 in der Ebene der Grösse t, also ein Stück der Axe des Reellen; die zu integrirenden Ausdrücke werden demnach längs des Integrationsweges als complexe Functionen einer reellen Veränderlichen betrachtet. Endlich werde

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega' = \frac{K'i}{\sqrt{e_1 - e_3}} \tag{3.}$$

gesetzt. Alle vorkommenden Quadratwurzeln mögen im reellen Theile positiv sein.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die beiden Grössen ω und ω' den Gleichungen

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp\omega' = e_3$$

genügen müssen. Denn durch Umkehrung der Transformation S. 240 (3.) kann man von K zu der Integraldarstellung S. 240 (1.) für ω zurückkehren, die $\wp\omega = e_1$ nach sich zieht, und für $\wp\omega'$ ergiebt sich das Entsprechende aus S. 76—78. Um zu zeigen, dass $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar ist, brauchte man nur die Legendresche Relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\varepsilon\pi i}{2} \tag{4.}$$

(S. 130 (23.)) als giltig nachzuweisen. Zwar ist diese bis jetzt nur als nothwendig für ein primitives Periodenpaar hingestellt worden; dass sie aber auch hinreichend ist, erkennt man durch folgende Schlüsse.

Ist $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ ein beliebiges Paar halber Perioden, so ergiebt sich durch wörtliche Wiederholung der Überlegung auf S. 72, wenn man von $\sigma(u+2\tilde{\omega})$ (S. 71 unten) und $\sigma(u+2\tilde{\omega}')$ ausgeht, die Gleichung

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\tilde{\eta}' = \frac{l\pi i}{2},$$

also speciell

$$\tilde{\eta}\omega - \tilde{\omega}\eta = \frac{m\pi i}{2},$$

$$\tilde{\eta}\omega' - \tilde{\omega}\eta' = \frac{m'\pi i}{2},$$

bei ganzzahligen l, m, m'. Gilt nun die Gleichung (4.), so folgt durch Auflösung

$$2\tilde{\omega} = 2\varepsilon m'\omega - 2\varepsilon m\omega',$$

d. h. es ist $2\tilde{\omega}$, und weiter jede beliebige Periode, durch 2ω und $2\omega'$ als homogene lineare Function mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar.

Die Relation (4.) möge hier auch in der Form wiedergegeben werden, wie sie bei Legendre selbst vorkommt. Den Integralen K und K' treten dort die entsprechend definirten

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = E, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = E' \tag{5.}$$

an die Seite. Lässt man in dem ersten Ausdruck die obere Grenze zunächst unbestimmt und wendet die Jacobischen Bezeichnungen an, indem man

$$t = \sin\operatorname{am} u', \quad \sqrt{1-k^2t^2} = \Delta\operatorname{am} u'$$

setzt, so erhält man

$$\int_0^t \frac{(1-k^2t^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{u'} (\Delta\,\mathrm{am}\,u')^2\,du'.$$

Nun war (S. 100 (18.))

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u' = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left(\frac{u'}{\sqrt{e_1-e_3}}\right),$$

also wird für $u' = u\sqrt{e_1-e_3}$

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^u \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u\right)^2 du$$

$$= \int_0^u \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3}\,du$$

$$= \int_0^u \left(1 - \frac{e_2-e_3}{\wp u - e_3}\right) du.$$

Aus

$$\sigma_3 u = e^{-\eta' u}\,\frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'}$$

folgt aber

$$\frac{d^2\log\sigma_3 u}{du^2} = \frac{d^2\log\sigma(\omega'+u)}{du^2} = -\wp(\omega'+u) = -e_3 - \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp u - e_3}$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = u + \frac{1}{e_1-e_3}\int_0^u \left(e_3 + \frac{d^2\log\sigma_3 u}{du^2}\right) du,$$

$$(6.)\qquad \int_0^t \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(e_1 u + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u\right).$$

Giebt man jetzt der oberen Grenze t den Werth 1, d. h. lässt man die Integrationsvariable die gerade Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 durchlaufen, so geht u auf directem Wege von Null bis

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}} = \omega,$$

sodass

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(e_1\omega + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}\omega\right)$$

wird. Aus der eben benutzten Formel für $\sigma_3 u$ folgt aber

$$\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u = -\eta' + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega' + u),$$

$$\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}\omega = -\eta' + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega' + \omega) = \eta,$$

und daraus schliesslich

$$E = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}(e_1\omega + \eta). \tag{7.}$$

Durch Vertauschung von e_1 mit e_3 ergiebt sich

$$E' = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}(e_3\omega' + \eta'). \tag{8.}$$

Berechnet man umgekehrt aus (7.) und (8.)

$$\eta = \sqrt{e_1 - e_3}\,E - e_1\omega, \tag{9.}$$

$$\eta' = -i\sqrt{e_1 - e_3}\,E' - e_3\omega' \tag{10.}$$

und setzt diese Werthe zusammen mit denen für ω und ω' in (4.) ein, so erhält man die gesuchte Legendresche Gleichung in der Form

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}; \tag{11.}$$

denn in Folge der auf S. 127 gemachten Festsetzungen wird $\varepsilon = +1$.

Nach dem auf S. 249 Gesagten kommt es also nun auf die Feststellung an, dass die Gleichung

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}$$

wirklich gilt. Für diesen Nachweis bedarf es einer weiteren Umwandlung der Formel (9.). Es ist

$$\eta = \sqrt{e_1 - e_3}\,E - \frac{e_1}{\sqrt{e_1 - e_3}}K = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\int_0^1 \frac{-e_3 - (e_1 - e_3)k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$

oder

$$\eta = -\frac{e_3}{\sqrt{e_1 - e_3}}K - \sqrt{e_1 - e_3}\int_0^1 \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{12.}$$

Die wirkliche Berechnung des rechts stehen gebliebenen Integrals kann nach derselben Methode ausgeführt werden wie die von K. Man setzt unter Voraussetzung der Convergenz

$$k^2t^2(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n+2}t^{2n+2}$$

(vgl. S. 242), multiplicirt mit $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ und integrirt gliedweise unter Benutzung der Formel

$$\frac{t^{2n+2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = c_{n+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - c_{n+1}\,d\left(t\,G_{n+1}(t)\sqrt{1-t^2}\right).$$

Wegen der Grenzen 0 und 1 fällt das zweite Glied weg, und es bleibt

$$\int_0^1 \frac{k^2 t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,c_{n+1}\,k^{2n+2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Aus der Erklärung der Grösse c_n folgt

$$c_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,c_n.$$

Wird demnach

$$(13.)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2}\,c_n^2\,k^{2n+2} = \mathfrak{J}$$

gesetzt, woraus

$$\int_0^1 \frac{k^2 t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{J}$$

hervorgeht, so liefert die Gleichung (12.)

$$(14.)\qquad \eta = -\frac{e_3}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\mathfrak{K}\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{e_1-e_3}\,\mathfrak{J}\,\frac{\pi}{2}.$$

Es bedarf nun noch der Darstellung von η' als Function von k^2. Von den beiden Gliedern der rechten Seite von (10.) ist das zweite wegen (3.) und S. 247 (26.) bekannt. Im ersten kommt das Integral E' vor, das Function von k'^2 ist, und dieses werde durch eine der Substitution S. 243 (17.) entsprechende, nämlich

$$(15.)\qquad 1-k'^2t^2 = \frac{1}{t'^2}$$

umgewandelt:

$$(16.)\qquad E' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt'}{t'^2\sqrt{(t'^2-1)(1-k^2t'^2)}}.$$

Bei der Transformation von K, um die es sich a. a. O. handelte, bestand der zweite Schritt darin, zwischen die Grenzen einen Werth einzuschieben, das Integral zu zerlegen und den zweiten Theil nochmals umzuwandeln, um dann von beiden Theilen die constanten Glieder beizubehalten. Der Substitution

S. 244 (19.) entspricht hier

$$(17.)\qquad t' = \frac{1}{kt_1},$$

und nach deren Anwendung auf das Integral mit den Grenzen t_0 und $\frac{1}{k}$ wird

$$E' = \int_1^{t_0} \frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{kt_0}} \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Aber die beiden Differentiale haben hier nicht, wie dort, dieselbe Form. Um dies zu erreichen, kann man

$$\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}{t} = \frac{1-k^2t^4}{t^2\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

bilden und daraus

$$\frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = d\,\frac{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}{t} + \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

in das erste Integral einsetzen; dann kommt

$$(18.)\qquad E' = \frac{\sqrt{(t_0^2-1)(1-k^2t_0^2)}}{t_0} + \int_1^{t_0} \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{kt_0}} \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Benutzt man jetzt die Formel S. 244 (22.) für $n+1$ statt n, so erhält man für das Integral

$$\int_1^{t_0} \frac{k^2t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

den Ausdruck $\mathfrak{J}\log(t_0+\sqrt{t_0^2-1})$, vermehrt um das Product von $\sqrt{t_0^2-1}$ mit einer nach Potenzen von k^2 und t_0 fortschreitenden Reihe, deren Bildungsgesetz in genau derselben Weise ermittelt werden kann wie dort. Dem Logarithmus ist hier und im Folgenden sein Hauptwerth beizulegen. Der Werth des anderen Integrals folgt aus dem des ersten durch die Einführung von $\frac{1}{kt_0}$ anstatt t_0. Entwickelt man nun nach Potenzen von t_0, so hat das constante Glied aus der Summe der beiden Integrale den Werth

$$\mathfrak{J}\log\frac{4}{k} + k^2\mathfrak{P}_1(k^2)$$

(vgl. S. 245). Aber ausserdem ist hier noch das constante Glied aus dem von Integralzeichen freien Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(t_0^2-1)(1-k^2 t_0^2)}}{t_0} = \sqrt{1-\frac{1}{t_0^2}}\sqrt{1-k^2 t_0^2}$$

hinzuzunehmen. Die Entwickelung beider Factoren ist aus S. 245 abzulesen. Wesentlich ist, dass ein von k freies Glied, nämlich $+1$, auftritt, und dazu ein Potenzreihe von k^2, die gleichzeitig mit k verschwindet. Danach wird

$$E' = \mathfrak{I}\log\frac{4}{k} + 1 + k^2\mathfrak{P}_2(k^2), \tag{19.}$$

$$\eta' = -i\sqrt{e_1-e_3}\left(\mathfrak{I}\log\frac{4}{k}+1\right) - e_3\omega' + k^2\mathfrak{P}_3(k^2). \tag{20.}$$

In Verbindung mit (14.) und

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\mathfrak{K}\frac{\pi}{2}, \tag{21.}$$

$$\omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\mathfrak{K}\log\frac{4}{k} + k^2\mathfrak{P}(k^2) \tag{22.}$$

(nach S. 247 (26.) und S. 242 (14.)) ergiebt sich nun aus dieser Formel

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2} + k^2\overline{\mathfrak{P}}(k^2).$$

Es muss aber

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{l\pi i}{2}$$

sein, für l als ganze Zahl (S. 249). Andererseits erscheint nach der vorhergehenden Gleichung $\eta\omega'-\omega\eta'$ als stetige Function von k. Und da sich l nur sprungweise ändern könnte, so muss es für alle Werthe von k denselben Werth haben. Für $k=0$ folgt

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2},$$

und dies war es, was bewiesen werden sollte.

Neunundzwanzigstes Kapitel.

Bestimmung von u aus der Gleichung $\wp u = s$.

Die Formeln und Entwickelungen des vorigen Kapitels lassen sich in mehreren Richtungen verallgemeinern. Erstens darf man e_1, e_2, e_3 durch $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ ersetzen, wobei nur darauf zu achten ist, dass diese Grössen der Convergenz der vorkommenden Reihen wegen bei der Bildung von k^2 in passender Weise angeordnet werden. Zweitens gelten die Methoden nicht nur für die Berechnung einer halben Periode, also einer Grösse $\tilde{\omega}$, die der Gleichung

$$\wp\tilde{\omega} = e_\alpha$$

genügt, sondern allgemein für die Bestimmung einer Grösse u aus der Gleichung

$$\wp u = s \tag{1.}$$

bei gegebenem s. Zwar ist schon im sechsten Kapitel gezeigt worden, dass man diese Gleichung mittels einer endlichen Anzahl von Reihenentwickelungen lösen kann; aber für die praktische Berechnung sind jene Reihen wenig brauchbar.

Der in den beiden letzten Kapiteln beständig benutzte Zusammenhang zwischen den Differentialen $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ und $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ beruhte auf der Beziehung zwischen der $\wp$-Function und den σ-Quotienten (S. 89). Es ist gleichgiltig, ob man u der Gleichung (1.) oder z. B. der Gleichung

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = s - e_\alpha$$

gemäss zu bestimmen sucht. An Stelle von $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}$ soll jetzt der Quotient $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$

bevorzugt werden. Wird

$$(2.)\qquad \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u = \xi$$

gesetzt, so ist wegen

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2 = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta}$$

ξ mit s durch die Bedingung

$$(3.)\qquad \xi^2 = \frac{s - e_\alpha}{s - e_\beta}$$

verbunden. Die Function $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u$ genügt nach S. 98 (10.) der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{du}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2\right)\left(e_\alpha - e_\gamma - (e_\beta - e_\gamma)\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2\right).$$

Wird also

$$(4.)\qquad \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\gamma} = k^2$$

gesetzt, so ist

$$(5.)\qquad u = \frac{1}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} \int_1^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

ein Ausdruck, der die Gleichung (2.) befriedigt. Verfährt man nun nach der Methode auf S. 244, so findet man

$$(6.)\qquad u = \frac{\mathfrak{K} i}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} \log\left(\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} G(\xi)\sqrt{1-\xi^2},$$

wo der Logarithmus für $\xi = 1$ verschwindet. Der Werth von u ist demnach eindeutig bestimmt, wenn $\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}$ und $\sqrt{1-\xi^2}$ fixirt sind. Aber für die Aufgabe selbst sind diese Wurzelwerthe ohne Bedeutung. Denn ihre Änderung kann höchstens das Vorzeichen von u umkehren, und die Gleichung (2.) bleibt erfüllt, weil $\sigma_\alpha u$ und $\sigma_\beta u$ gerade Functionen von u sind. Denkt man sich nun für ein gegebenes s die Grösse ξ durch die Gleichung (3.) erklärt, und zwar unter der Bedingung, dass $\xi = +1$, $s = \infty$ zusammengehören, so erhält man

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta} u\right)^2 = \frac{s - e_\alpha}{s - e_\beta},$$

d. h.

$$\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - e_\beta} = \frac{s - e_\alpha}{s - e_\beta}$$

oder, weil $e_\alpha \neq e_\beta$,

$$\wp u = s.$$

Giebt man auch dem Logarithmus einen beliebigen seiner Werthe, so ändert sich u um ein positives oder negatives Vielfaches von

$$\frac{2\mathfrak{K}\pi}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}}.$$

Nun darf man nach dem oben zuerst Bemerkten in Verbindung mit S. 254 (21.) als bewiesen betrachten, dass

$$\frac{\mathfrak{K}\pi}{\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} = 2\tilde{\omega}$$

eine Periode der $\wp$-Function ist. Das Doppelte hiervon ist eine Periode des Quotienten $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$ (S. 93). Mithin bleibt auch der geänderte Werth von u eine Lösung der Gleichung (2.).

Die Formel (6.) liefert hiernach eine bestimmte Lösung der Aufgabe, ferner den entgegengesetzten Werth und alle die Werthe, die sich durch Vielfache einer bestimmten Periode von diesen unterscheiden. Die Giltigkeit der Formel ist an die Convergenz der darin vorkommenden Reihen gebunden. Von einer der Bedingungen,

$$\left|\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\gamma}\right| < 1,$$

kann man sich dadurch frei machen, dass man statt k^2 eine andere Grösse in die Reihenentwickelungen einführt.

Aus den Beziehungen zwischen σ- und ϑ-Functionen (S. 171) folgt für die linke Seite der Gleichung (2.)

$$\text{(7.)} \qquad \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\beta - e_\gamma}} \frac{\vartheta_1(v\,|\,\tau)}{\vartheta_2(v\,|\,\tau)},$$

und ebenso

$$\text{(8.)} \qquad \frac{\sigma_\gamma u}{\sigma_\beta u} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}} \frac{\vartheta_3(v\,|\,\tau)}{\vartheta_2(v\,|\,\tau)}.$$

Aus (8.) ergiebt sich

$$\text{(9.)} \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sigma_\beta u - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sigma_\beta u + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = \frac{\vartheta_2(v\,|\,\tau) - \vartheta_3(v\,|\,\tau)}{\vartheta_2(v\,|\,\tau) + \vartheta_3(v\,|\,\tau)}.$$

Nun ist nach S. 171 (19.) und (20.)

$$\vartheta_2(v|\tau)+\vartheta_3(v|\tau) = 2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)h^{n^2}\cos 2nv\pi\right),$$

$$\vartheta_2(v|\tau)-\vartheta_3(v|\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)h^{n^2}\cos 2nv\pi.$$

In der vorletzten Formel wird der Coefficient von $h^{n^2}\cos 2nv\pi$ für ungerades, in der letzten für gerades n zu Null, mithin

$$\vartheta_2(v|\tau)+\vartheta_3(v|\tau) = 2\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}h^{4m^2}\cos 4mv\pi\right),$$

$$\vartheta_2(v|\tau)-\vartheta_3(v|\tau) = 4\sum_{m=0}^{\infty}h^{(2m+1)^2}\cos 2(2m+1)v\pi.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen können, von dem Factor 2 abgesehen, aus den Reihen für $\vartheta_2(v|\tau)$ und $\vartheta_1(v|\tau)$ dadurch hergeleitet werden, dass h durch h^4, v durch $2v$ ersetzt wird. Die erste Annahme kommt darauf hinaus, 4τ für τ zu setzen, d. h. $4\tilde{\omega}'$ für $\tilde{\omega}'$, während $\tilde{\omega}$ ungeändert bleibt. Es wird also

$$\vartheta_2(v|\tau)+\vartheta_3(v|\tau) = 2\vartheta_2(2v|4\tau), \tag{10.}$$

$$\vartheta_2(v|\tau)-\vartheta_3(v|\tau) = 2\vartheta_1(2v|4\tau). \tag{11.}$$

Geht man von dem primitiven Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 8\tilde{\omega}')$ aus, so ändert sich naturgemäss die $\wp$-Function, und damit auch die Grössen e_1, e_2, e_3. Werden die neuen Grössen mit e_1', e_2', e_3' bezeichnet, so entspricht der Gleichung (7.) die folgende:

$$\frac{\sigma_\alpha(u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')}{\sigma_\beta(u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'}}{\sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'}}\,\frac{\vartheta_1(v|4\tau)}{\vartheta_2(v|4\tau)}. \tag{12.}$$

Und da aus (9.), (10.) und (11.)

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u-\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u+\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = \frac{\vartheta_1(2v|4\tau)}{\vartheta_2(2v|4\tau)}$$

hervorgeht, so ergiebt sich schliesslich

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u-\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha-e_\gamma}\,\sigma_\beta u+\sqrt[4]{e_\alpha-e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = \frac{\sqrt[4]{e_\beta'-e_\gamma'}}{\sqrt[4]{e_\alpha'-e_\gamma'}}\,\frac{\sigma_\alpha(2u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')}{\sigma_\beta(2u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}')}. \tag{13.}$$

Nach S. 171, 172 (25.), (26.) und (27.) wird

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e'_\beta - e'_\gamma} = \vartheta_1(0|4\tau),$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\gamma} = \vartheta_2(0|4\tau),$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\beta} = \vartheta_3(0|4\tau).$$

Setzt man also in (10.) und (11.) $v = 0$, so findet man

$$(14.)\qquad \begin{cases} \sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\gamma} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\right) \\ \sqrt[4]{e'_\beta - e'_\gamma} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\right). \end{cases}$$

Zusammen mit

$$e'_\alpha + e'_\beta + e'_\gamma = 0$$

stellen diese Formeln die neuen Grössen e'_1, e'_2, e'_3, die der Multiplication der Periode $2\tilde{\omega}'$ mit 4 entsprechen, algebraisch durch die ursprünglichen dar.

Angenommen nun, es sei ein Werth u ermittelt, für den

$$(15.)\qquad \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(2u|\tilde{\omega}, 4\tilde{\omega}') = \xi'$$

wird, so würde, wenn

$$(16.)\qquad \frac{\sqrt[4]{e'_\beta - e'_\gamma}}{\sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\gamma}} = l$$

gesetzt wird, nach (13.)

$$(17.)\qquad \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sigma_\beta u - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sigma_\gamma u}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\,\sigma_\beta u + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\,\sigma_\gamma u} = l\xi'$$

oder

$$\frac{\sigma_\gamma u}{\sigma_\beta u} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}\,\frac{1 - l\xi'}{1 + l\xi'}$$

werden. Ist nun s mit ξ' durch die Gleichung

$$(18.)\qquad \sqrt{\frac{s - e_\gamma}{s - e_\beta}} = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}\,\frac{1 - l\xi'}{1 + l\xi'}$$

verbunden, in der der Wurzelwerth links beliebig ist, so folgt

$$\frac{\wp u - e_\gamma}{\wp u - e_\beta} = \frac{s - e_\gamma}{s - e_\beta},$$

d. h. wieder

$$\wp u = s.$$

Die Lösung der an die Spitze gestellten Aufgabe kann hiernach auch von der der Gleichung (15.) abhängig gemacht werden.

Verfährt man zu diesem Zweck genau wie vorher, so findet man, dem Ausdruck (5.) als Lösung von (2.) entsprechend,

$$(19.)\qquad 2u = \frac{1}{\sqrt[4]{e'_\alpha - e'_\gamma}} \int_1^{\xi'} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-l^4 t'^2)}}.$$

Die Formeln, die aus den Reihenentwickelungen entspringen, mögen hier zusammengestellt werden.

Es sei

$$(20.)\qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}$$

(aus (16.) und (14.)),

$$(21.)\qquad l\xi' = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt{s - e_\beta} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{s - e_\gamma}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}\sqrt{s - e_\beta} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{s - e_\gamma}}$$

(aus (17.)),

$$(22.)\qquad \mathfrak{L} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\,2n}\right)^2 l^{4n}$$

(der Grösse $\mathfrak{K}$, S. 242 (14.) entsprechend),

$$(23.)\qquad G_n(t) = 1 + \frac{2}{3}t^2 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)} t^{2n-2}$$

(S. 242 (13.)),

$$(24.)\qquad G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\,2n}\right)^2 l^{4n}\, t\, G_n(t),$$

so wird nach S. 256 (6.)

$$(25.)\qquad \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\right)^2 u = i\mathfrak{L}\log\left(\xi' + i\sqrt{1-\xi'^2}\right) - G(\xi')\sqrt{1-\xi'^2}.$$

Die Reihen convergiren für

$$|l| < 1, \quad |l\xi'| < 1$$

(vgl. S. 242).

Es fragt sich noch, ob und aus welchen Gründen diese Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt werden dürfen. Nach (20.) und (21.) sind l und $l\xi'$

von der Form

$$\frac{1-(p+qi)}{1+(p+qi)}.$$

Der absolute Betrag einer solchen Grösse ist kleiner als Eins für

$$p > 0.$$

Der Quotient

$$\frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}}$$

müsste also, wenn die Reihe $\mathfrak{L}$ convergiren soll, im reellen Theile positiv sein. Durch passende Wahl einer der beiden vierten Wurzeln kann man dies zwar stets erreichen; es bleibt dann aber zu untersuchen, ob die oben benutzten Formeln S. 171, 172 (25.), (26.), (27.) und die bei Einführung von e_1', e_2', e_3' ihnen entsprechenden (S. 259), für die die Gleichung

$$\frac{\sqrt[4]{e_\beta' - e_\gamma'}}{\sqrt[4]{e_\alpha' - e_\gamma'}} = \frac{\vartheta_1(0|4\tau)}{\vartheta_2(0|4\tau)},$$

d. h.

$$l = 2\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^{(2n+1)^2}}{1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} h^{4n^2}} \tag{26.}$$

nothwendig ist, bestehen bleiben. Man erreicht dies am einfachsten, indem man bei gegebenem l die Grösse h durch diese Gleichung bestimmt. Dabei ergiebt sich eine Reihe von besonders starker Convergenz, sodass wenige Anfangsglieder praktisch ausreichen:

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots \tag{27.}$$

Die Einzelheiten der hierzu erforderlichen Rechnung, sowie die einfachen Überlegungen über die Folge der Definitionen und die Verkettung der Gleichungen, durch die man schliesslich zu der Formel (25.) zurückgelangt, mögen hier übergangen werden. Das, worauf es im Wesentlichen ankommt, wird bei der Anwendung auf besondere Fälle, im dreissigsten Kapitel, hervortreten.

Was die Bedingung $|l\xi'| < 1$ angeht, so kann sie wegen

$$l\xi' = \frac{1 - \dfrac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \dfrac{\sqrt{s - e_\gamma}}{\sqrt{s - e_\beta}}}{1 + \dfrac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \dfrac{\sqrt{s - e_\gamma}}{\sqrt{s - e_\beta}}}$$

durch passende Wahl eines der beiden Quadratwurzelwerthe immer erfüllt werden. Es könnte höchstens zweifelhaft erscheinen, ob eine solche Annahme nach der Natur der Functionen, aus denen der Ausdruck entstanden war, gestattet ist. Von allgemeinen Erwägungen abgesehen, kann man hier einfach so schliessen: Da nach S. 93

$$\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\beta}(u + 2\omega_\gamma) = -\frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\beta} u$$

war, so braucht man in dem Ausdruck

$$\frac{1 + f(u)}{1 - f(u)},$$

in dem

$$f(u) = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma}} \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\beta} u$$

ist, nur u um $2\omega_\gamma$ zu vermehren, um ihn in die Form

$$\frac{1 - f(u)}{1 + f(u)}$$

überzuführen. Das heisst: Wenn man u eine stetige Reihe von Werthen ertheilt, für die $|l\xi'| > 1$ ist, so kann man durch Veränderung von u in $u + 2\omega_\gamma$ bewirken, dass $|l\xi'| < 1$ wird.

Löst man die Gleichung (18.), nämlich (nach (20.))

$$\frac{s - e_\gamma}{s - e_\beta} = \left(\frac{1 + l}{1 - l}\right)^2 \left(\frac{1 - l\xi'}{1 + l\xi'}\right)^2$$

nach s auf, so findet man die Form

$$s = \frac{P_2(\xi')}{Q_2(\xi')}, \tag{28.}$$

d. h. s ist eine rationale Function von ξ', deren Zähler und Nenner vom zweiten Grade sind.

Diese Vorlesungen sind (S. 4) mit einer linearen Transformation eines elliptischen Differentials erster Art begonnen worden. Die Untersuchungen von Legendre hatten ergeben, dass ein solches Differential in eins von derselben Form übergeht, wenn man eine Transformation zweiten oder dritten Grades anwendet, und Legendre glaubte, dass hiermit die rationalen Transformationen abgeschlossen wären. Aber Jacobi, dessen erste Untersuchungen über elliptische Functionen an die Ergebnisse von Legendre anknüpften, fand durch eine einfache Constanten-Abzählung, dass das Bestehen einer Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R_1(x_1)}} = \frac{dx}{M\sqrt{R(x)}},$$

wo M eine rationale Function von x oder eine Constante bedeutet, auch durch die Substitution

$$x_1 = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

bewirkt werden kann, in der $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ ganze Functionen beliebigen (n^{ten}) Grades bezeichnen. Für unseren Fall wäre die Aufgabe, durch eine Annahme der Form (28.) das Differential $\frac{ds}{\sqrt{S}}$ in die Legendresche Normalform überzuführen und zwar so, dass die dann auftretenden Reihenentwickelungen möglichst stark convergent sind. Offenbar hätte man zu diesem Zweck ziemlich verwickelte Rechnungen durchzuführen. Es ist hier einer der vielen Fälle, in denen sich die besondere Brauchbarkeit der ϑ-Functionen zeigt. Die Formeln, auf die es ankommt, wenn man sich von der Nothwendigkeit einer bestimmten Anordnung der Grössen e_α, e_β, e_γ befreien will, sind ohne die geringste Schwierigkeit aus dem Bildungsgesetz dieser Functionen erschlossen worden.

Die Aufgabe, die nunmehr als gelöst gelten kann, ist für die Anwendungen wichtig. Die dort vorkommenden elliptischen Integrale können durch Integrale der drei Arten dargestellt werden, und die der zweiten und dritten Art mittels der σ-Functionen, deren Argument u ist, also der Werth des Integrales erster Art. Lässt man an die Stelle der σ-Functionen die ϑ-Functionen treten, so wird u durch das Argument v ersetzt, das sich von jenem nur um einen constanten Factor unterscheidet.

Dreissigstes Kapitel.

Anwendung der Formeln des achtzehnten und neunundzwanzigsten Kapitels auf den Fall reeller Invarianten.

Obgleich man die Reihen, die für die Berechnung von u als Function von s gebraucht werden, bei jeder Anordnung der Grössen e_1, e_2, e_3 convergent machen kann, so wird man doch bei den Anwendungen darauf achten, dass die Convergenz möglichst stark werde. Dies soll für reelle Invarianten weiter verfolgt werden.

Es sei

I. $$G > 0,$$

also e_1, e_2, e_3 reell, und es werde dann, wie früher,

$$e_1 > e_2 > e_3$$

vorausgesetzt. Man nehme

a. $$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3$$

und wähle die vierten Wurzeln reell und positiv. Die Formel S. 260 (20.) liefert

(1.) $$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}.$$

Die ursprünglich zur Berechnung benutzte Grösse

$$k^2 = \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\beta}$$

wird gleich der im siebenundzwanzigsten Kapitel definirten (S. 241 (4.)).

Setzt man allgemein

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

also

$$k'^2 = \frac{e_\alpha - e_\beta}{e_\alpha - e_\gamma},$$

so kann man

$$(2.)\qquad l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}$$

schreiben, und diese Formel lässt unmittelbar erkennen, dass l um so kleiner wird, je näher k'^2 bei 1, also k^2 bei Null liegt, d. h. je weniger e_β von e_γ, hier e_2 von e_3 verschieden ist.

Nach S. 172 (26.) und (27.) ist

$$(3.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\left(\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}\right) = 2(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots).$$

Im vorliegenden Falle ist die durch die Formel S. 261 (27.) bestimmte Grösse h gleichzeitig mit l reell und positiv, sodass sich aus (3.) $2\tilde{\omega}$ als reelle Grösse ergiebt. Bezeichnet man sie mit 2ω, so liefert die Gleichung

$$(4.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots)$$

zugleich den Werth der Quadratwurzel als positiv. Der Formel

$$h = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}$$

gemäss definire man nun ω' durch den Ausdruck

$$(5.)\qquad \omega' = \frac{\omega i}{\pi}\log\frac{1}{h},$$

wo dem Logarithmus der reelle Werth beizulegen ist. ω' wird rein imaginär. Zur Darstellung der σ-Functionen durch die ϑ-Reihen fehlt noch die Grösse η, die z. B. nach S. 174 (33.) aus

$$(6.)\qquad 2\omega\eta = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - 7^3h^{12} + \cdots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots}$$

bestimmt werden kann. Die Formeln S. 171 (21.) bis (24.) geben für $\frac{u}{2\omega} = v$, $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$

$$
(7.)\quad \begin{cases}
\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[8]{G}\quad \sigma u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_0(v|\tau) \\
\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_1(v|\tau) \\
\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_2(v|\tau) \\
\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = e^{2\omega\eta v^2}\vartheta_3(v|\tau).
\end{cases}
$$

Ist k^2 wenig von 1, also e_2 wenig von e_1 verschieden, so bekommt man stärker convergente Reihen, wenn man

$$
\text{b.}\qquad \alpha = 3,\quad \beta = 2,\quad \gamma = 1
$$

setzt. In der allgemeinen Formel

$$
l = \frac{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} - \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}{\sqrt[4]{e_\alpha - e_\gamma} + \sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}}
$$

werden dann die Radicanden

$$
e_\alpha - e_\gamma = e_3 - e_1 \quad\text{und}\quad e_\alpha - e_\beta = e_3 - e_2
$$

negativ, und es sei für $e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{i}$

$$
\sqrt[4]{e_3-e_1} = -i\sqrt{i}\sqrt[4]{e_1-e_3},\quad \sqrt[4]{e_3-e_2} = -i\sqrt{i}\sqrt[4]{e_2-e_3},\quad \sqrt[4]{e_2-e_1} = -i\sqrt{i}\sqrt[4]{e_1-e_2},
$$

wo die Wurzelwerthe auf den rechten Seiten reell und positiv sind. Die Grössen l und h mögen hier zur Unterscheidung mit l_1 und h_1 bezeichnet werden, sodass

$$
(8.)\qquad l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_2-e_3}} = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}
$$

und

$$
(9.)\qquad h_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_1}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_1}{2}\right)^{13} + \cdots
$$

wiederum reell, positiv und kleiner als Eins ausfallen. Die aus (3.) hervorgehende Gleichung gilt in der Form

(10.) $$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}}(1+2h_1^4+2h_1^{16}+\cdots),$$

wenn $\tilde{\omega}$ positiv imaginär und der Werth der Quadratwurzel reell und positiv ist. Wird die rein imaginäre Periode, wie vorher, mit $2\omega'$ bezeichnet, so ist jetzt

$$2\tilde{\omega} = 2\omega',$$

und weiter

(11.) $$\tilde{\omega}' = \frac{\omega' i}{\pi}\log\frac{1}{h_1},$$

$\tilde{\omega}'$ also eine reelle negative Grösse; es sei

$$2\tilde{\omega}' = -2\omega.$$

$(2\omega, 2\omega')$ ist dann wieder ein primitives Periodenpaar. Der Unterschied gegen vorher ist nur der, dass man, wenn l eine kleine Grösse ist, zuerst ω berechnen wird, dagegen bei kleinem l_1 zuerst ω'. Ebenso wie unter (6.) wird

(12.) $$2\omega'\eta' = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h_1^2+5^3h_1^6-\cdots}{1-3h_1^2+5h_1^6-\cdots}.$$

Der in der Formel für σu vorkommende Werth der achten Wurzel aus G ist, wie immer, gleich

$$\sqrt[4]{e_3-e_1}\sqrt[4]{e_3-e_2}\sqrt[4]{e_2-e_1} = (-i\sqrt{i})^3\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2},$$

also, wenn jetzt unter $\sqrt[8]{G}$ der reelle positive Werth verstanden wird, gleich

$$-\sqrt{i}\sqrt[8]{G} = \frac{1}{i\sqrt{i}}\sqrt[8]{G}.$$

Es sei noch

$$\frac{ui}{2\tilde{\omega}} = \frac{ui}{2\omega'} = v',$$

sodass v' gleichzeitig mit u reell ist; ferner

$$v = \frac{v'}{i}.$$

Da $\vartheta_0(v)$ eine ungerade Function, so wird

$$\vartheta_0\left(\frac{v'}{i}\right) = \vartheta_0(-v'i) = -\vartheta_0(v'i),$$

und die erste Übergangsformel lautet, wenn

$$\tau_1 = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = -\frac{\omega}{\omega'} = -\frac{1}{\tau}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = \frac{1}{i}e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_0\left(v'i\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right). \tag{13.}$$

Die übrigen werden

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u &= e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_3\left(v'i\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right)\\ \sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u &= e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_2\left(v'i\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right)\\ \sqrt{\frac{2\omega'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u &= e^{-2\omega'\eta' v'^2}\vartheta_1\left(v'i\,\middle|-\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} -i\vartheta_0(v'i|\tau_1) &= h_1^{\frac14}\left(e^{v'\pi}-e^{-v'\pi}\right)-h_1^{\frac94}\left(e^{3v'\pi}-e^{-3v'\pi}\right)+\cdots,\\ \vartheta_1(v'i|\tau_1) &= h_1^{\frac14}\left(e^{v'\pi}+e^{-v'\pi}\right)+h_1^{\frac94}\left(e^{3v'\pi}+e^{-3v'\pi}\right)+\cdots,\\ \vartheta_2(v'i|\tau_1) &= 1+h_1\left(e^{2v'\pi}+e^{-2v'\pi}\right)+h_1^4\left(e^{4v'\pi}+e^{-4v'\pi}\right)+\cdots,\\ \vartheta_3(v'i|\tau_1) &= 1-h_1\left(e^{2v'\pi}+e^{-2v'\pi}\right)+h_1^4\left(e^{4v'\pi}+e^{-4v'\pi}\right)-\cdots. \end{aligned}$$

Es sei

II. $$G < 0,$$

also eine der Grössen e_λ reell, die beiden anderen conjugirt complex. Wie früher werde die reelle Grösse mit e_3 bezeichnet. Von den beiden conjugirten sei e_1 im imaginären Theile positiv, also e_1-e_3 positiv imaginär. Nach dem im achtundzwanzigsten Kapitel Bewiesenen ist $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar, wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{15.}$$

$$\omega' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \tag{16.}$$

gesetzt wird (vgl. S. 248). Nun sind e_2-e_1 und e_2-e_3 conjugirt, ebenso

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

und

$$k'^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1},$$

ferner längs des Integrationsweges $\sqrt{1-k^2t^2}$ und $\sqrt{1-k'^2t^2}$, endlich auch $\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}$ und $\frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}$. Demnach sind ω und ω' ebenfalls conjugirt, und wenn man

$$\omega = A - Bi,$$

mithin

$$\omega' = A + Bi$$

setzt, so ist den damaligen Festsetzungen zufolge

$$A > 0.$$

Es soll auch hier, wie für $G > 0$, zu einem primitiven Periodenpaar übergegangen werden, dessen eine Periode $2\tilde{\omega}$ reell ist, und zwar sei

$$\tilde{\omega} = \omega + \omega' = 2A.$$

Die andere Periode $2\tilde{\omega}'$ ist so zu wählen, dass $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}$ im reellen Theile positiv wird, und wegen

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp\omega' = e_3$$

trifft dies für

$$\tilde{\omega}' = \omega'$$

zu. Daher ist, in Folge von $\wp\tilde{\omega}' = e_\gamma$,

a. $$\gamma = 3;$$

ferner, aus $\wp\tilde{\omega} = e_\alpha$, $\wp(\omega+\omega') = e_2$:

$$\alpha = 2,$$

und sonach

$$\beta = 1.$$

Die Grösse l wird durch die Formel

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3} - \sqrt[4]{e_2-e_1}}{\sqrt[4]{e_2-e_3} + \sqrt[4]{e_2-e_1}}$$

bestimmt.

Man setze nun

$$e_2 - e_3 = re^{\psi i}, \qquad (0 < \psi < \pi)$$

also

$$e_2 - e_1 = re^{-\psi i}.$$

Die vierten Wurzeln können, unter Wahrung der für ihren Quotienten beständig festzuhaltenden Bedingung, ebenfalls als conjugirt angenommen werden, sodass der Nenner von l reell wird. Es sei

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} = \sqrt[4]{r}\, e^{\frac{\psi i}{4}},$$

$$\sqrt[4]{e_2 - e_1} = \sqrt[4]{r}\, e^{-\frac{\psi i}{4}},$$

wo $\sqrt[4]{r}$ reell und positiv ist, so kommt

$$(17.)\qquad l = \frac{e^{\frac{\psi i}{4}} - e^{-\frac{\psi i}{4}}}{e^{\frac{\psi i}{4}} + e^{-\frac{\psi i}{4}}} = i \operatorname{tg} \frac{\psi}{4},$$

also

$$(18.)\qquad l = il_2',$$

wo l_2 reell, positiv und kleiner als Eins. Hieraus folgt weiter

$$(19.)\qquad h = i\left(\frac{l_2}{2} + 2\left(\frac{l_2}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_2}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_2}{2}\right)^{13} + \cdots\right).$$

Zur wirklichen Berechnung von $\tilde{\omega}$ und gleichzeitig zur Fixirung des Werthes von $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ dient die Gleichung

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_2 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_1}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots).$$

Setzt man nach (19.)

$$(20.)\qquad h = ih_2,$$

wo auch h_2 reell und positiv ist, und beachtet, dass $h^{4n} = h_2^{4n}$, so erhält man

$$(21.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[4]{r}\cos\frac{\psi}{4}}(1 + 2h_2^4 + 2h_2^{16} + \cdots).$$

$2\tilde{\omega}$ wird danach, wie es sein muss, reell und positiv. $\tilde{\omega}'$ bestimmt sich dann aus

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{i}{\pi} \log \frac{1}{ih_2},$$

wobei der Logarithmus so gewählt werden muss, dass die zweite Coordinate von $\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ positiv ausfällt. Dies erreicht man, indem man $\left(\text{wegen } \log i = \frac{\pi i}{2}\right)$

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \log \frac{1}{h_2} \tag{22.}$$

setzt, unter $\log \frac{1}{h_2}$ den reellen Werth verstehend.

Es werde jetzt

$$\omega + \omega' = \omega''$$

gesetzt, sodass

$$\tilde{\omega} = \omega''$$

wird; ausserdem sei

$$\omega' - \omega = \omega''',$$

also

$$\tilde{\omega}' = \frac{\omega'' + \omega'''}{2}.$$

Von den beiden Bestandtheilen des nicht primitiven Periodenpaares $(2\omega'', 2\omega''')$ ist der erste reell und positiv, der zweite positiv imaginär. Ist weiter

$$\frac{\omega'''}{\omega''} = \tau',$$

so kommt

$$\tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau',$$

mithin nach (22.)

$$\tau' = \frac{2i}{\pi} \log \frac{1}{h_2};$$

auch τ' ist positiv imaginär. In Folge von (19.) und (20.) bestimmt sich dabei h_2 aus der Formel

$$h_2 = \frac{l_2}{2} + 2\left(\frac{l_2}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_2}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_2}{2}\right)^{13} + \cdots. \tag{23.}$$

In der Gleichung (21.) ist links $\sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}$ für $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ zu schreiben. Hierzu tritt

$$2\omega''\eta'' = \frac{\pi^2}{6} \frac{1 + 3^3 h_2^2 - 5^3 h_2^6 - 7^3 h_2^{12} + \cdots}{1 + 3h_2^2 - 5h_2^6 - 7h_2^{12} + \cdots}. \tag{24.}$$

Für die erste Übergangsformel braucht man

$$\sqrt[8]{G} = \sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{e_2 - e_1}.$$

Da $G < 0$, so ist als reelle positive Grösse $\sqrt[8]{-G}$ einzuführen. Es ist

$$e_1 - e_3 = 2ri\sin\psi,$$

und es werde

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} = e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{2r\sin\psi}$$

gesetzt, die vierte Wurzel rechts als positiv angenommen. Dann kommt

$$\sqrt[8]{G} = e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt[8]{-G}.$$

Die vier Übergangsformeln lauten für $v = \frac{u}{2\omega''}$:

$$(25.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[8]{-G}\,\sigma u = e^{-\frac{\pi i}{8}} e^{2\omega''\eta''v^2}\,\vartheta_0\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right),$$

ferner wegen

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} = e^{\frac{\pi i}{8}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)},$$

wo $i(e_3-e_1)$ eine reelle positive Grösse,

$$(26.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)}\,\sigma_2 u = e^{-\frac{\pi i}{8}} e^{2\omega''\eta''v^2}\,\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right),$$

endlich

$$(27.)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u &= e^{2\omega''\eta''v^2}\,\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right)\\ \sqrt{\frac{2\omega''}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}\,\sigma_3 u &= e^{2\omega''\eta''v^2}\,\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right). \end{aligned}\right.$$

Die Anfangsglieder der ϑ-Reihen sind:

$$e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_0\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right) = 2h_2^{\frac{1}{4}}(\sin v\pi + h_2^2\sin 3v\pi - h_2^6\sin 5v\pi - h_2^{12}\sin 7v\pi + \cdots),$$

wo immer zwei positive und zwei negative Zeichen abwechseln;

$$e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_1\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right) = 2h_2^{\frac{1}{4}}(\cos v\pi - h_2^2\cos 3v\pi - h_2^6\cos 5v\pi + h_2^{12}\cos 7v\pi + \cdots),$$

$$\vartheta_2\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right) = 1 + 2h_2^4\cos 4v\pi + 2h_2^{16}\cos 8v\pi + \cdots + i(2h_2\cos 2v\pi + 2h_2^9\cos 6v\pi + \cdots),$$

$$\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau'\right) = 1 + 2h_2^4\cos 4v\pi + 2h_2^{16}\cos 8v\pi + \cdots - i(2h_2\cos 2v\pi + 2h_2^9\cos 6v\pi + \cdots).$$

Auch in diesem Falle werden also für reelles u σu und $\sigma_2 u$ reell, $\sigma_1 u$ und $\sigma_3 u$ dagegen conjugirt complex.

Die Formeln sind wegen

$$l_2 = \operatorname{tg}\frac{\psi}{4}$$

(aus (17.) und (18.)) besonders brauchbar für $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. Dieser Fall lässt sich von dem, wo ψ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt, durch das Vorzeichen von e_2 unterscheiden. Denn es ist

$$(e_2 - e_3) + (e_2 - e_1) = 3e_2 = 2r\cos\psi.$$

Für die erste Annahme ist $l_2 < \frac{2}{5}$; für die zweite wählt man zweckmässiger ein anderes primitives Periodenpaar, dessen einer Bestandtheil rein imaginär statt, wie vorher, reell ist.

Es sei nämlich

$$\tilde{\omega} = \omega' - \omega = \omega'''$$
$$\tilde{\omega}' = -\omega = \frac{\omega''' - \omega''}{2},$$

d. h. wegen

$$\wp\tilde{\omega} = \wp(\omega' - \omega) = \wp(\omega' + \omega) = e_2,$$
$$\wp\tilde{\omega}' = \wp\omega = e_1:$$

b.
$$\gamma = 1,$$
$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Die vierten Wurzeln aus den Differenzen der Grössen e_λ seien jetzt in folgender Weise fixirt:

$$\sqrt[4]{e_3 - e_1} = e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt[4]{i(e_3 - e_1)},$$
$$\sqrt[4]{e_2 - e_1} = \sqrt[4]{r}\, e^{-\frac{\psi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{r}\, e^{\frac{(\pi - \psi) i}{4}},$$
$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} = e^{-\frac{\pi i}{2}}\sqrt[4]{r}\, e^{\frac{\psi i}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{r}\, e^{-\frac{(\pi - \psi) i}{4}}.$$

Aus

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_1} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_2 - e_1} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}}$$

folgt

(28.)
$$l = i\operatorname{tg}\frac{\pi - \psi}{4} = il_3.$$

l_3 ist also unterhalb $\frac{2}{5}$ gelegen, wenn ψ dem Intervall $\left(\frac{\pi}{2} \cdots \pi\right)$ angehört.

Die weiteren Bestimmungsgleichungen werden

$$(29.)\qquad h = i\left(\frac{l_3}{2} + 2\left(\frac{l_3}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_3}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_3}{2}\right)^{13} + \cdots\right) = ih_3,$$

$$(30.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}} = \frac{1}{\sqrt{r}\cos\frac{\pi-\psi}{4}}(1 + 2h_3^4 + 2h_3^{16} + \cdots),$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega} i}{\pi}\log\frac{1}{ih_3} = \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\tilde{\omega} i}{\pi}\log\frac{1}{h_3} = \frac{\omega'''}{2} - \frac{\omega'''}{\pi i}\log\frac{1}{h_3}.$$

Nachdem also $2\omega'''$ (positiv imaginär) aus (30.) berechnet ist, findet man $2\omega''$ mittels der Formel

$$\omega'' = \frac{2\omega'''}{\pi i}\log\frac{1}{h_3}.$$

Hat τ' denselben Werth $\frac{\omega'''}{\omega''}$ wie vorher, so wird jetzt

$$\tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\omega''}{\omega'''} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}.$$

Die Gleichung für $\tilde{\eta} = \eta'''$ heisst

$$(31.)\qquad 2\omega'''\eta''' = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 + 3^3 h_3^2 - 5^3 h_3^6 - \cdots}{1 + 3h_3^2 - 5h_3^6 - \cdots},$$

und die Bestimmung für $\sqrt[8]{G}$:

$$\sqrt[8]{G} = \frac{1}{i}e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt[8]{-G}.$$

Aus demselben Grunde wie auf S. 267 werde

$$\frac{ui}{2\omega'''} = v', \qquad v = \frac{v'}{i}$$

gesetzt. Dann vermitteln folgende Formeln den Zusammenhang zwischen den σ- und ϑ-Functionen:

$$(32.)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[8]{-G}\qquad \sigma u = \frac{1}{i}e^{-\frac{\pi i}{8}}e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_0\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right)\\
&\sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)}\,\sigma_2 u = e^{-\frac{\pi i}{8}}e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_1\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right)\\
&\sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\quad \sigma_3 u = e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_2\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right)\\
&\sqrt{\frac{2\omega'''}{\pi i}}\sqrt[4]{e_3-e_2}\quad \sigma_1 u = e^{-2\omega'''\eta'''v'^2}\vartheta_3\left(v'i\,\middle|\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau'}\right).
\end{aligned}\right.$$

Für die in den letzten beiden Formeln vorkommenden vierten Wurzeln gelten die Definitionen

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2} = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_2 - e_1},$$

$$\sqrt[4]{e_3 - e_2} = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}.$$

Die ϑ-Reihen haben folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{i} e^{-\frac{\pi i}{8}} \vartheta_0\left(v' i \,\middle|\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}\right) =$$
$$h_3^{\frac{1}{4}} \left\{ \left(e^{v'\pi} - e^{-v'\pi}\right) + h_3^2 \left(e^{3v'\pi} - e^{-3v'\pi}\right) - h_3^6 \left(e^{5v'\pi} - e^{-5v'\pi}\right) - \cdots \right\},$$

$$e^{-\frac{\pi i}{8}} \vartheta_1\left(v' i \,\middle|\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}\right) =$$
$$h_3^{\frac{1}{4}} \left\{ \left(e^{v'\pi} + e^{-v'\pi}\right) - h_3^2 \left(e^{3v'\pi} + e^{-3v'\pi}\right) - h_3^6 \left(e^{5v'\pi} + e^{-5v'\pi}\right) + \cdots \right\},$$

$$\vartheta_2\left(v' i \,\middle|\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}\right) = 1 + h_3^4 \left(e^{4v'\pi} + e^{-4v'\pi}\right) + h_3^{16} \left(e^{8v'\pi} + e^{-8v'\pi}\right) + \cdots$$
$$+ i \left\{ h_3 \left(e^{2v'\pi} + e^{-2v'\pi}\right) + h_3^9 \left(e^{6v'\pi} + e^{-6v'\pi}\right) + \cdots \right\},$$

$$\vartheta_3\left(v' i \,\middle|\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau'}\right) = 1 + h_3^4 \left(e^{4v'\pi} + e^{-4v'\pi}\right) + h_3^{16} \left(e^{8v'\pi} + e^{-8v'\pi}\right) + \cdots$$
$$- i \left\{ h_3 \left(e^{2v'\pi} + e^{-2v'\pi}\right) + h_3^9 \left(e^{6v'\pi} + e^{-6v'\pi}\right) + \cdots \right\}.$$

Sämmtliche Formeln dieses Kapitels beruhen auf der Annahme, dass eine Periode entweder reell oder rein imaginär sei. Da man die primitiven Perioden auf unendlichviele Weisen ändern kann, so giebt es auch unendlichviele Möglichkeiten der Darstellung der σ- durch die ϑ-Functionen. Während die Gesammtheit der σ-Functionen bei einem Übergange von einem primitiven Periodenpaare zu einem beliebigen anderen ungeändert bleibt, ist dies für die ϑ-Functionen nicht der Fall.

Einunddreissigstes Kapitel.

Transformation der elliptischen Functionen.

Im Vorhergehenden sind die elliptischen Functionen fast überall als Functionen von u allein betrachtet worden. Nur an wenigen Stellen, z. B. bei der Untersuchung des Bildungsgesetzes der σ- und damit auch der $\wp$-Reihe, wurden ausser u auch die Invarianten oder die Perioden ausdrücklich als Argumente behandelt. Es kann vorkommen, dass zwischen elliptischen Functionen mit verschiedenen Fundamentalperioden algebraische Beziehungen bestehen. So hat die Function $\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$ mit der zugehörigen $\wp$-Function eine Periode, 2ω, gemein, während die andere primitive Periode $2\omega'$ durch $4\omega'$ vertreten wird (S. 94). Zwischen diesen beiden elliptischen Functionen besteht die Gleichung

$$\left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2 = \wp u - e_1.$$

Nach einem Hauptsatze der Theorie kann man eine Function $\wp_1 u$ mit den Fundamentalperioden des σ-Quotienten bilden, durch die sich dann $\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$ algebraisch darstellen lässt (S. 146). Mithin besteht zwischen $\wp u$ und $\wp_1 u$ eine algebraische Gleichung.

Diese einfachen Überlegungen führen auf die allgemeine Aufgabe, die Bedingungen zu suchen, unter denen zwischen zwei elliptischen Functionen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ eine algebraische Gleichung besteht.

Mit dieser Aufgabe, deren Lösung auf den ersten Anblick sehr schwierig scheint, beginnt Jacobi seine Fundamenta, nachdem schon Legendre einige specielle Fälle entdeckt hatte. Sie hängt mit der Transformation der elliptischen Integrale eng zusammen. Von dem hier eingenommenen Standpunkt aus lässt sich die ganze Theorie ohne Schwierigkeit entwickeln, und namentlich kann man die Aufgabe selbst sogleich sehr vereinfachen.

Da nämlich jede elliptische Function durch eine passend gewählte $\wp$-Function und ihre erste Ableitung rational ausdrückbar ist, so muss eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ auch eine solche zwischen $\wp u$ und $\wp_1 u$ nach sich ziehen. Dies folgt sofort durch ein Eliminationsverfahren, das die beiden Ableitungen $\wp' u$ und $\wp_1' u$ mit umfasst. Umgekehrt ergiebt sich aus einer algebraischen Gleichung zwischen $\wp u$ und $\wp_1 u$ eine ebensolche zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$.

Die Aufgabe wird nicht allgemeiner, wenn man in einer der beiden Functionen das Argument u durch mu ersetzt, unter m eine beliebige Constante verstanden. Denn nach S. 44 ist

$$\wp(mu; g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp(u; m^4 g_2, m^6 g_3).$$

Man kommt also wieder auf eine Beziehung zwischen zwei $\wp$-Functionen von demselben Argument u und verschiedenen Invariantenpaaren.

Trotz der Vereinfachungs-Möglichkeit sollen die Grundbegriffe und einige Hauptergebnisse der Transformationstheorie an die algebraische Gleichung zwischen zwei beliebigen elliptischen Functionen

$$(1.)\qquad G(\varphi(u), \varphi_1(u)) = 0$$

angeschlossen werden, weil sie dort ebenso einfach formulirt werden können wie in dem besonderen Falle der $\wp$-Functionen. Es ist sogar nicht einmal nöthig, in der Gleichung (1.) beide Functionen als elliptische vorauszusetzen es sei vielmehr nur $\varphi(u)$ eine solche, $\varphi_1(u)$ dagegen blos eine eindeutige Function, die überall im Endlichen den Charakter einer rationalen Function hat. Ersetzt man in (1.) das Argument u durch $u+2\nu\omega$, wo 2ω eine Periode von $\varphi(u)$, so erhält man

$$G(\varphi(u), \varphi_1(u+2\nu\omega)) = 0.$$

Die Gleichung (1.) sei in Bezug auf $\varphi_1(u)$ vom n^{ten} Grade. Giebt man dann ν der Reihe nach die Werthe 1, 2, ... n, so erhält man, die Ausgangsgleichung eingerechnet, $n+1$ Gleichungen, alle von derselben Form

$$G(\varphi(u), z) = 0,$$

die durch

$$z = \varphi_1(u),\ \varphi_1(u+2\omega),\ \ldots\ \varphi_1(u+2n\omega)$$

befriedigt werden. Da aber eine Gleichung n^{ten} Grades höchstens n verschiedene Wurzeln haben kann, so müssen in dieser Reihe mindestens zwei Werthe einander gleich sein:

$$\varphi_1(u+2\nu_1\omega) = \varphi_1(u+2\nu_2\omega)$$

oder, wenn $u-2\nu_2\omega$ statt u eingeführt und

$$\nu_1-\nu_2 = m$$

gesetzt wird,

$$\varphi_1(u+2m\omega) = \varphi_1(u).$$

Ebenso findet man

$$\varphi_1(u+2m'\omega') = \varphi_1(u),$$

d. h. $\varphi_1(u)$ ist ebenfalls eine elliptische Function.

$\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ haben das Periodenpaar $(2m\omega,\ 2m'\omega')$ gemein und lassen sich demnach rational durch die Function

$$\wp(u\,|\,m\omega,\ m'\omega')$$

und ihre erste Ableitung darstellen. Solche elliptischen Functionen nun, die durch eine und dieselbe dritte und deren Ableitung rational ausdrückbar sind, werden als verwandt bezeichnet. Man hat also den Satz, dass zwischen zwei Functionen, unter denen eine algebraische Beziehung besteht, Verwandtschaft stattfindet. Dass umgekehrt zwei verwandte elliptische Functionen durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, ist schon oben erwähnt worden. Mithin kann die Verwandtschaft auch durch das Bestehen einer Gleichung der Form (1.) gekennzeichnet werden.

Zwei Functionen, die mit einer dritten verwandt sind, sind unter einander verwandt. Denn sind

$$G_1(\varphi(u),\ \varphi_1(u)) = 0,$$
$$G_2(\varphi(u),\ \varphi_2(u)) = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, so folgt durch Elimination von $\varphi(u)$ wieder eine algebraische Gleichung

$$G(\varphi_1(u),\ \varphi_2(u)) = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen den Perioden zweier verwandten Functionen soll jetzt genauer untersucht werden. Es sei $(2\omega_0, 2\omega_0')$ ein beiden Functionen gemeinsames Periodenpaar, $(2\omega, 2\omega')$ ein beliebiges Periodenpaar von $\varphi(u)$, $(2\omega_1, 2\omega_1')$ ein solches von $\varphi_1(u)$. Ein primitives Periodenpaar von $\varphi(u)$ sei mit $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ bezeichnet, sodass sowohl 2ω, $2\omega'$ wie auch $2\omega_0$, $2\omega_0'$ als homogene lineare Functionen mit ganzzahligen Coefficienten durch $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ dargestellt werden können. Es sei

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha\,\tilde{\omega} + \beta\,\tilde{\omega}', \\ \omega_0' &= \alpha'\tilde{\omega} + \beta'\tilde{\omega}', \\ \omega &= \lambda\,\tilde{\omega} + \mu\,\tilde{\omega}', \\ \omega' &= \lambda'\tilde{\omega} + \mu'\tilde{\omega}'. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Auflösung

$$\begin{aligned} (\lambda\mu' - \mu\lambda')\,\tilde{\omega} &= \mu'\omega - \mu\omega', \\ (\lambda\mu' - \mu\lambda')\,\tilde{\omega}' &= -\lambda'\omega + \lambda\omega'. \end{aligned}$$

Die Determinante $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ ist nicht Null, weil sonst 2ω und $2\omega'$ in einem rationalen Verhältniss stünden. Ebensowenig verschwindet $\alpha\beta' - \beta\alpha'$. Die Einführung der Werthe von $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ in die beiden ersten Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \omega_0 &= p\,\omega + q\,\omega', \\ \omega_0' &= p'\omega + q'\omega', \end{aligned}$$

wo $p, \dots q'$ rationale Zahlen bedeuten. Ihre Determinante ist ebenfalls nicht Null, denn sie ist gleich

$$\frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'}.$$

In der gleichen Weise findet man

$$\begin{aligned} \omega_0 &= p_1\omega_1 + q_1\omega_1', \\ \omega_0' &= p_1'\omega_1 + q_1'\omega_1', \end{aligned}$$

und durch Gleichsetzung beider Werthepaare und Auflösung:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \omega = a\,\omega_1 + b\,\omega_1' \\ \omega' = a'\omega_1 + b'\omega_1'. \end{cases}$$

Auch hier sind $a, \dots b'$ rationale Zahlen von nicht verschwindender Determinante.

Gleichungen der Form (2.) müssen also immer stattfinden, wenn $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ verwandte elliptische Functionen, $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\omega_1, 2\omega_1')$ beliebige Periodenpaare dieser Functionen sind.

Es sei jetzt $\varphi(u)$ eine beliebige elliptische Function. Eines ihrer Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ werde beliebig ausgewählt und vier rationale Zahlen $a, \dots b'$ willkürlich, nur so angenommen, dass $ab'-a'b$ von Null verschieden ist. Alsdann sollen ω_1 und ω_1' durch die Ausdrücke

$$(3.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{b'\omega - b\,\omega'}{ab'-ba'} \\ \omega_1' &= \frac{a\,\omega' - a'\omega}{ab'-ba'} \end{aligned} \right.$$

(wie sie aus (2.) durch Auflösung folgen würden) definirt und unter $\varphi_1(u)$ irgend eine elliptische Function mit den Perioden $2\omega_1, 2\omega_1'$ verstanden werden. Dann sind, so wird behauptet, $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ verwandte Functionen. Es seien nämlich g, g' zwei ganze Zahlen, die so beschaffen sind, dass die Producte $ga, gb, g'a', g'b'$ ganze Zahlen werden. Dann lässt sich in den Gleichungen (2.), die ja mit (3.) identisch sind,

$$\begin{aligned} 2g\,\omega\; &= 2m\,\omega_1 + 2n\,\omega_1', \\ 2g'\omega' &= 2m'\omega_1 + 2n'\omega_1' \end{aligned}$$

setzen, für $m, \dots n'$ als ganze Zahlen. Die Function $\varphi(u)$ hat die Perioden $2g\omega, 2g'\omega'$, und da sich die Grössen als homogene lineare ganzzahlige Functionen von $2\omega_1$ und $2\omega_1'$ darstellen lassen, so müssen sie auch Perioden von $\varphi_1(u)$ sein. Beide Functionen sind demnach rational darstellbar durch die $\wp$-Function mit den primitiven Perioden $2g\omega, 2g'\omega'$,

$$\wp(u\,|\,g\,\omega, g'\omega'),$$

und ihre erste Ableitung.

Dieser Satz ist die Umkehrung des vorher bewiesenen. Beide zusammen geben Veranlassung zu der Frage, in welcher Weise die Verwandtschaft zweier elliptischen Functionen genauer charakterisirt werden kann, wenn die Gleichungen (2.) nicht nur der Form nach, sondern auch in ihren Coefficienten gegeben sind. D. h. es ist zu untersuchen, was sich unter dieser Voraussetzung über die zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ bestehende algebraische

Gleichung oder, nach der ursprünglichen Definition der Verwandtschaft, über die Form der Darstellung dieser beiden Functionen durch eine und dieselbe $\wp$-Function aussagen lässt.

Zuerst sollen die Gleichungen (2.) auf eine möglichst einfache Form gebracht werden.

Die rationalen Zahlen $a, \dots b'$, die nicht etwa sämmtlich positiv zu sein brauchen, können durch Multiplication mit einer und derselben ganzen Zahl in ganze Zahlen verwandelt werden. Unter den unendlichvielen Zahlen, durch die dieser Zweck erreicht werden kann, sei c die kleinste positive. Die ganzen Zahlen ca, cb, ca', cb' können einen gemeinsamen Theiler haben, der ebenfalls als positiv vorausgesetzt werden soll, und zwar sei m der grösste Theiler. Setzt man

$$ca = m\alpha, \quad cb = m\beta, \quad ca' = m\alpha', \quad cb' = m\beta',$$

so enthalten also $\alpha, \dots \beta'$ keinen Theiler mehr, der allen vier Zahlen gemeinsam wäre. Ferner sind offenbar c und m relative Primzahlen.

Werden nun $\alpha, \dots \beta'$ statt $a, \dots b'$ in (3.) eingeführt, so ergiebt sich z. B.

$$\omega_1 = \frac{c}{m}\,\frac{\beta'\omega - \beta\omega'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

c kann mit $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ einen gemeinsamen Theiler haben; der grösste positive heisse n_1, und es sei

$$c = m_1 n_1, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = n n_1.$$

Durch Einsetzen der umgeformten Ausdrücke von $a, \dots b'$ in (2.) und (3.) erhält man

$$(4.) \quad \begin{cases} \omega = \dfrac{m}{m_1 n_1} (\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_1') \\ \omega' = \dfrac{m}{m_1 n_1} (\alpha'\omega_1 + \beta'\omega_1'), \end{cases}$$

$$(5.) \quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{m_1}{mn} (\beta'\omega - \beta\,\omega') \\ \omega_1' = \dfrac{m_1}{mn} (-\alpha'\omega + \alpha\,\omega'). \end{cases}$$

Der in den Gleichungen (4.) vor den Klammern stehende Bruch $\frac{m}{m_1 n_1}$ erscheint in der reducirten Form, weil m mit $c = m_1 n_1$ keinen gemeinsamen Theiler haben konnte. Aus demselben Grunde sind in den Formeln (5.) m_1 und m

relativ prim. Man überblickt aber sofort, dass m_1 auch mit n keinen gemeinsamen Theiler haben kann. Denn wäre

$$m_1 = m'_1 d, \quad n = n'd,$$

so würde

$$c = m'_1 n_1 d, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = n' n_1 d$$

sein. Der Voraussetzung entgegen wäre also n_1 nicht der grösste gemeinsame Theiler der Zahl c und der Determinante.

Was die Vorzeichen der eingeführten ganzen Zahlen angeht, so war

$$c > 0, \quad m > 0, \quad n_1 > 0.$$

Wegen $c = m_1 n_1$ ist also auch

$$m_1 > 0.$$

Nimmt man das Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ so an, dass $\frac{\omega'}{\omega i}$ im reellen Theile positiv ist, und setzt die entsprechende Eigenschaft von $(2\omega_1, 2\omega'_1)$ voraus, so kann man auch über das Zeichen von n noch etwas schliessen. Es findet sich nämlich

$$ab' - ba' > 0,$$

also, wegen

$$ab' - ba' = \frac{m^2}{c^2}(\alpha\beta' - \beta\alpha'):$$

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' > 0,$$

d. h.

$$n n_1 > 0.$$

Hiernach muss auch

$$n > 0$$

sein; die in den Gleichungen (4.) und (5.) vorkommenden Brüche sind unter den gemachten Annahmen positiv.

Die beiden durch (2.), (3.) oder (4.), (5.) verbundenen Periodenpaare seien jetzt primitiv. Dieser Annahme steht nichts entgegen, weil irgend zwei Periodenpaare der beiden verwandten Functionen zwei Relationen von der Form (2.) genügen mussten. Eine weitere Vereinfachung dieser Gleichungen soll durch Übergang zu anderen Paaren ebenfalls primitiver Perioden versucht werden.

Es seien $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ und $(2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_1')$ diese Periodenpaare. Die Bedingungen $\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega} i}\right) > 0$, $\Re\left(\frac{\tilde{\omega}_1'}{\tilde{\omega}_1 i}\right) > 0$ sollen festgehalten werden, sodass die Determinanten der Substitutions-Coefficienten den Werth $+1$ haben. Die Elimination der ursprünglichen Periodenpaare liefert

$$\tilde{\omega} = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha_0 \tilde{\omega}_1 + \beta_0 \tilde{\omega}_1'),$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha_0' \tilde{\omega}_1 + \beta_0' \tilde{\omega}_1'),$$

wo $\alpha_0, \ldots \beta_0'$ wieder ganze Zahlen und

$$\alpha_0 \beta_0' - \beta_0 \alpha_0' = \alpha\beta' - \beta\alpha' = n n_1$$

ist. Man kann beweisen, dass bei passender Wahl der primitiven Periodenpaare jede Periode der einen Function sich mittels einer einzigen Periode der anderen darstellen lässt, dass nämlich

$$\alpha_0' = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_0' = 1$$

und demnach

$$\alpha_0 = n n_1$$

gesetzt werden darf.

Zu dem Ende nehme man, indem man nach wie vor $\alpha, \ldots \beta'$ als gegeben betrachtet, zwei ganze Zahlen α_1 und β_1 so an, dass $\alpha_1\beta - \beta_1\alpha$ und $\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha'$ relative Primzahlen sind. Dies ist möglich, weil $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Wenn z. B. α und β relativ prim sind, so kann man $\alpha_1\beta - \beta_1\alpha = 1$ machen und dann die Determinante $\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha'$ gleich irgend einer anderen Zahl setzen, wie sie sich durch Einführung der Zahlenwerthe α_1 und β_1 ergiebt. Dann mögen weiter α_2 und β_2 so bestimmt werden, dass

$$\alpha_2(\alpha_1\beta - \beta_1\alpha) + \beta_2(\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha') = 1 \tag{6.}$$

ist, und für $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ die Definitionen

$$\begin{cases} \tilde{\omega} = (\alpha_1\beta' - \beta_1\alpha')\omega - (\alpha_1\beta - \beta_1\alpha)\omega' \\ \tilde{\omega}' = \alpha_2\omega + \beta_2\omega' \end{cases} \tag{7.}$$

gelten. Hierin sind also je zwei in einer und derselben Gleichung vorkommende Coefficienten relativ prim, und die Determinante aller vier Coefficienten gleich Eins, wie es unter den gemachten Voraussetzungen für den Übergang von einem primitiven Periodenpaar zu einem anderen erfordert wird.

Die Gleichung (6.) kann auch in der Form

$$\alpha_1(\alpha_2\beta+\beta_2\beta')-\beta_1(\alpha_2\alpha+\beta_2\alpha') = 1 \tag{8.}$$

geschrieben werden. Betrachtet man die linke Seite als Determinante eines Paares linearer Formen, so sieht man, dass man setzen kann:

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_1' \\ \tilde{\omega}_1' &= (\alpha_2\alpha+\beta_2\alpha')\,\omega_1+(\alpha_2\beta+\beta_2\beta')\,\omega_1'. \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

Diese Formeln enthalten für die zweite Function den Übergang von einem primitiven Periodenpaar zu einem anderen.

Eliminirt man jetzt wieder die ursprünglichen Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ und $(2\omega_1, 2\omega_1')$ mittels (4.) oder (5.), so findet man

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{mn}{m_1}\,\tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}' &= \frac{m}{m_1 n_1}\,\tilde{\omega}_1' \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

oder umgekehrt

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{m_1}{mn}\,\tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}_1' &= \frac{m_1 n_1}{m}\,\tilde{\omega}'. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Damit ist die auf S. 283 ausgesprochene Behauptung bewiesen, und es zeigt sich, dass jede Verwandtschaft zwischen zwei elliptischen Functionen durch vier positive ganze Zahlen charakterisirt werden kann.

Die Bedeutung dieser Zahlen lässt sich in folgender Weise noch deutlicher erkennen.

Es sei $2\omega_1$ eine primitive Periode der Function $\varphi_1(u)$, also eine solche, die geeignet ist, mit einer anderen zusammen ein primitives Periodenpaar zu bilden. Sie drückt sich durch die Bestandtheile eines anderen primitiven Periodenpaares in der Form

$$2\omega_1 = 2\lambda_1\tilde{\omega}_1+2\mu_1\tilde{\omega}_1'$$

aus, wo λ_1 und μ_1 relative Primzahlen sind. Nach S. 280 muss bei passender Wahl der ganzen Zahl g_1

$$2g_1\omega_1 = 2g_1\lambda_1\frac{m_1}{mn}\tilde{\omega}+2g_1\mu_1\frac{m_1 n_1}{m}\tilde{\omega}'$$

eine Periode von $\varphi(u)$ sein. Da aber $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$ ein primitives Periodenpaar dieser Function bedeutet, so sind $g_1\lambda_1\frac{m_1}{mn}$ und $g_1\mu_1\frac{m_1 n_1}{m}$ ganze Zahlen; d. h., weil $\frac{m_1}{mn}$ und $\frac{m_1 n_1}{m}$ reducirte Brüche sind, es muss $g_1\lambda_1$ durch mn, $g_1\mu_1$ durch m theilbar sein. Fasst man jetzt irgend einen Primfactor von m in's Auge, so muss er nach der zweiten Bedingung in $g_1\mu_1$ aufgehen. Angenommen, er sei Factor von μ_1, so kann er λ_1 nicht theilen, weil λ_1 und μ_1 überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben. Da aber nach der ersten Bedingung $g_1\lambda_1$ durch m theilbar sein muss, so geht der Factor in g_1 auf. Dies gilt für alle Primfactoren von m, von denen man nicht von vornherein weiss, dass sie in g_1 enthalten sind. Also: Sämmtliche Primfactoren von m müssen auch Theiler von g_1 sein, und zwar ebenso oft, wie sie in m vorkommen; g_1 ist durch m theilbar.

Ist nun

$$g_1 = h_1 m,$$

so muss noch $h_1\lambda_1$ durch n theilbar sein.

Es sei n'' der grösste gemeinsame Theiler von λ_1 und n, und

$$n = n'n''.$$

Dann muss n' in h_1 aufgehen,

$$h_1 = kn',$$

also

$$g_1 = kn'm$$

sein. Es werde im Besonderen

$$k = 1,$$

mithin

$$g_1 = mn'$$

angenommen, sodass

$$2g_1\omega_1 = 2mn'\omega_1 = 2\frac{n'\lambda_1 m_1}{n}\tilde{\omega} + 2n'\mu_1 m_1 n_1\tilde{\omega}'$$

wird. Der Coefficient von $2\tilde{\omega}$ erscheint dann nur als Bruch, denn es war $n = n'n''$ und n'' Theiler von λ_1. Es ist also

$$2mn'\omega_1$$

eine Periode von $\varphi(u)$, d. h. es reicht aus, die Zahl g_1 gleich mn' zu nehmen, ohne noch einen Factor k hinzuzufügen. Dies gilt für irgend eine primitive

Periode $2\omega_1$ der Function $\varphi_1(u)$: wie auch diese Periode beschaffen sein möge, so ist doch stets die ganze Zahl g_1, die bewirkt, dass $2g_1\omega_1$ eine Periode von $\varphi(u)$ wird, ein Vielfaches von m. Der Factor n' bestimmt sich hierauf wie angegeben; ist der Ausdruck von $2\omega_1$ durch $2\tilde{\omega}_1$, $2\tilde{\omega}'_1$ bekannt, so suche man den grössten gemeinsamen Theiler n'' von λ_1 und n, dann ist $n' = \frac{n}{n''}$.

Man gehe nun umgekehrt, anstatt $2\omega_1$ als gegeben anzunehmen, von einem bestimmten Zahlenwerthe n' aus und suche diesem gemäss $2\omega_1$ so zu wählen, wie es die Bedeutung von n' erfordert. Es sei also n' ein beliebiger Theiler von n, diese Zahl selbst und die Einheit eingeschlossen, und

$$\frac{n}{n'} = n''$$

gesetzt. Auf unendlichviele Weisen lässt sich eine Zahl λ_1 so bestimmen, dass n'' der grösste gemeinsame Theiler von n und λ_1 ist, und alsdann noch auf unendlichviele Weisen eine Zahl μ_1, die mit λ_1 keinen gemeinsamen Theiler hat. Setzt man dann

$$2\omega_1 = 2\lambda_1\tilde{\omega}_1 + 2\mu_1\tilde{\omega}'_1,$$

wo $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}'_1$ mit $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ durch die beiden Gleichungen (11.) zusammenhängen, so ist $2\omega_1$ eine Periode von $\varphi_1(u)$, die mit mn' multiplicirt in eine Periode von $\varphi(u)$ übergeht. Die kleinste Zahl, mit der multiplicirt überhaupt eine Grösse $2\omega_1$ eine Periode von $\varphi(u)$ liefert, wird für $n' = 1$ erhalten, ist also gleich m. Alle anderen Zahlen, die dies bewirken, haben die Form mn', sind mithin durch m theilbar.

Geht man von der Gleichungsform (11.) aus, so sieht man, dass m_1 die entsprechende Bedeutung für die Perioden der Function $\varphi(u)$ haben muss. Es ist die kleinste positive ganze Zahl, mit der multiplicirt eine primitive Periode von $\varphi(u)$ eine Periode von $\varphi_1(u)$ ergiebt.

Die beiden Zahlen m und m_1 gewinnen hierdurch für die Theorie der Verwandtschaft eine Bedeutung, die in der Rechnung, durch welche die Zahlen eingeführt wurden, nicht hervortritt.

Was n und n_1 angeht, so nehme man, wenn m und m_1 als bekannt gelten, n beliebig, nur relativ prim zu m_1 an, bestimme vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, die nicht alle einen gemeinsamen Theiler haben, so, dass $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ durch n theilbar wird, und setze

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = nn_1.$$

Dann definiren die Gleichungen zwischen primitiven halben Perioden

$$\omega = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_1'),$$
$$\omega' = \frac{m}{m_1 n_1}(\alpha'\omega_1 + \beta'\omega_1')$$

eine Verwandtschaft, die durch die vier Zahlen m, m_1, n, n_1 charakterisirt wird; in dem Sinne, dass es möglich ist, bei Einführung anderer primitiver Periodenpaare den Inhalt dieser beiden Gleichungen auch durch die Formeln (10.) wiederzugeben.

Durch dieses Ergebniss wird die Theorie der Verwandtschaft auf die sogenannte Transformation der elliptischen Functionen zurückgeführt. Eine elliptische Function heisst nämlich dann durch Transformation aus einer anderen entstanden, wenn eines ihrer primitiven Periodenpaare sich einem primitiven Periodenpaare der anderen so zuordnen lässt, dass jeder Bestandtheil des einen Paares aus einem Bestandtheil des zweiten durch Multiplication mit einer rationalen Zahl hervorgeht.

Zweiunddreissigstes Kapitel.

Transformation specieller Functionen.

Kehrt man zu den $\wp$-Functionen (S. 277) zurück, so hat man nach den allgemeinen Ergebnissen des letzten Kapitels nur nach der Verwandtschaft zwischen solchen Functionen zu fragen, für die zwei primitive Periodenpaare durch die Relationen

$$\tilde{\omega} = \frac{mn}{m_1}\tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}' = \frac{m}{m_1 n_1}\tilde{\omega}_1'$$

verbunden sind.

Wird

$$\frac{\tilde{\omega}}{mn} = \frac{\tilde{\omega}_1}{m_1} = \omega_0, \quad \frac{\tilde{\omega}'}{m} = \frac{\tilde{\omega}_1'}{m_1 n_1} = \omega_0'$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$(1.) \qquad \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{mn}, \frac{\tilde{\omega}'}{m}\right) = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}_1}{m_1}, \frac{\tilde{\omega}_1'}{m_1 n_1}\right) = \wp(u \,|\, \omega_0, \omega_0').$$

Die dritte $\wp$-Function, $\wp(u|\omega_0, \omega_0')$, geht also aus der ersten dadurch hervor, dass die erste Periode durch mn, die zweite durch m getheilt wird; aus der zweiten mittels Theilung der ersten Periode durch m_1, der zweiten durch $m_1 n_1$. Könnte man $\wp(u|\omega_0, \omega_0')$ sowohl durch $\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ wie durch $\wp(u|\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1')$ darstellen, so würde das Transformationsproblem gelöst sein.

Nun folgt aus S. 120 (25.)

$$(2.) \qquad \mu^2 \wp(\mu u \,|\, \omega, \omega') = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{\mu}, \frac{\omega'}{\mu}\right).$$

Die Anwendung dieser Eigenschaft auf (1.) liefert

$$(3.)\qquad m^2\wp\left(mu\,\middle|\,\frac{\tilde\omega}{n},\,\tilde\omega'\right)=m_1^2\wp\left(m_1u\,|\,\tilde\omega_1,\,\frac{\tilde\omega_1'}{n_1}\right),$$

wo die linke und rechte Seite nach wie vor gleich $\wp(u|\omega_0,\omega_0')$ ist.

Man sagt, eine $\wp$-Function entstehe aus einer anderen durch primitive Transformation, wenn eine Periode der neuen Function einer Periode der gegebenen Function gleich ist, während die zweite Periode jener Function aus der zweiten Periode der ursprünglichen durch Division mit einer positiven ganzen Zahl hervorgeht. Diese Zahl heisst die Ordnung der Transformation.

Hiernach enthält die Gleichung (3.) den Satz, dass jede Transformation sich auf zwei Multiplicationen und zwei primitive Transformationen zurückführen lässt.

Die Multiplication ist im dreiundzwanzigsten Kapitel behandelt worden. Es bleibt daher nur übrig, eine primitive Transformation durchzuführen, d. h. weil die beiden Perioden in gleichem Rechte sind, die Function

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde\omega}{n},\,\tilde\omega'\right)$$

für eine beliebige ganze Zahl n durch $\wp(u|\tilde\omega,\tilde\omega')$ darzustellen. Diese Darstellung muss in rationaler Form möglich sein. Denn die transformirte Function, die die primitiven Perioden $\frac{2\tilde\omega}{n}$ und $2\tilde\omega'$ hat, besitzt auch die Perioden $2\tilde\omega$ und $2\tilde\omega'$, und der Satz S. 146 findet Anwendung. Nimmt man das obige Ergebniss hinzu, so erkennt man aus (3.), dass die algebraische Gleichung, die die Verwandtschaft der beiden $\wp$-Functionen kennzeichnet, in der Form

$$R(\wp(u|\tilde\omega,\tilde\omega'))=R_1(\wp(u|\tilde\omega_1,\tilde\omega_1'))$$

geschrieben werden kann, unter R, R_1 rationale Functionen verstanden.

Die Benutzung von l statt k im neunundzwanzigsten Kapitel hängt, wie die Formeln auf S. 258 erkennen lassen, mit einer Transformation vierter Ordnung zusammen.

Zur wirklichen Herstellung des Ausdruckes von $\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde\omega}{n},\tilde\omega'\right)$ durch $\wp(u|\tilde\omega,\tilde\omega')$ braucht man ein vollständiges System von Unendlichkeitsstellen der transformirten Function, die in Bezug auf $2\tilde\omega$, $2\tilde\omega'$ incongruent sind, und ferner die Coefficienten der negativen Potenzen für die Entwickelungen in der Nähe dieser Stellen. Alle Unendlichkeitsstellen sind in der Formel

$$v = 2\lambda\frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\mu\tilde{\omega}'$$

enthalten. Es sei

$$\lambda = \lambda' n + \nu,$$

also

$$v = 2\lambda'\tilde{\omega} + 2\mu\tilde{\omega}' + 2\nu\frac{\tilde{\omega}}{n}.$$

Hierin hat man λ' und μ alle ganzzahligen Werthe, ν aber nur die Reste nach dem Modul n,

$$\nu = 0, 1, \dots n-1,$$

durchlaufen zu lassen. Jede Unendlichkeitsstelle ist demnach einer der Grössen $\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}$ congruent, diese aber sind unter einander incongruent. Und da die elliptische Function $\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$ als $\wp$-Function von der zweiten Ordnung unendlichgross wird, so muss man setzen können:

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = c + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(c_\nu\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) + c'_\nu\wp\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right).$$

Eine $\wp$-Function enthält aber kein Glied mit der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz, und der Coefficient der $(-2)^{\text{ten}}$ ist gleich Eins, mithin wird

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = c + \sum_{\nu=0}^{n-1}\wp\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right).$$

Zur Bestimmung von c entwickele man links und rechts in der Nähe der Stelle $u = 0$. Auf der linken Seite und in dem ersten Gliede der rechten, das gleich $\wp u$ selbst ist, kommt kein constantes Glied vor, also muss

$$c + \sum_{\nu=1}^{n-1}\wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) = 0,$$

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right) = \wp u + \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\wp\left(u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) - \wp\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right) \tag{4.}$$

sein.

Für die weitere Berechnung, die die Wegschaffung des zusammengesetzten Argumentes $u - \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}$ zum Zweck hat, ist ungerades und gerades n zu unterscheiden. Zur Abkürzung sei $\frac{2\tilde{\omega}}{n} = w$.

I. n ungerade.

Man zerlege die Summe in zwei Theile, indem man ν von 1 bis $\frac{n-1}{2}$, dann von $\frac{n+1}{2}$ bis n gehen lässt, und setze in dem zweiten $n-\nu$ statt ν. Wegen

$$\wp(u-(n-\nu)w) = \wp(u-2\tilde{\omega}+\nu w) = \wp(u+\nu w)$$

wird

$$(5.)\qquad \wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = \wp u - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}(\wp(u-\nu w)+\wp(u+\nu w)),$$

wo

$$(6.)\qquad G_1 = \sum_{\nu=1}^{n-1}\wp(\nu w) = 2\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\wp(\nu w)$$

ist. Die Gleichung (5.) ist insofern zweckmässiger als (4.), als sie sofort erkennen lässt, dass, wie es sein muss, bei Anwendung des Additionstheorems die Function $\wp' u$ nicht auftritt. Es kommt

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = \wp u - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{(\wp u+\wp(\nu w))(2\wp u\,\wp(\nu w)-\frac{1}{2}g_2)-g_3}{(\wp u-\wp(\nu w))^2}.$$

Der Ausdruck wird eine rationale Function, deren Nenner das Quadrat der ganzen Function

$$(7.)\qquad \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}(\wp u-\wp(\nu w)) = G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}$$

ist. Der Index kennzeichnet den Grad. Eine leichte Abzählung führt auf die Formel

$$(8.)\qquad \wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = \frac{H(\wp u)_n}{\left(G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}\right)^2}.$$

Die ganze Function im Zähler enthält ausser $\wp u$ auch g_2, g_3 und $\wp w$, $\wp(2w)$, … $\wp\left(\frac{n-1}{2}w\right)$ rational, und zwar diese $\frac{n-1}{2}$ Grössen symmetrisch. Die Coefficienten von $H(\wp u)_n$ hängen also rational von denen der Function $G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}$ ab.

II. n gerade.

Die Summe in der Formel (4.) enthält eine ungerade Anzahl von Gliedern, und unter den Grössen νw kommt jetzt, für $\nu = \frac{n}{2}$, eine halbe Periode vor, nämlich $\tilde{\omega}$. Dem ersten Fall entsprechend findet man

$$(9.)\qquad \wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = \wp u + \wp(u-\tilde{\omega}) - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}(\wp(u-\nu w)+\wp(u+\nu w))$$

für

$$(10.)\qquad G_1 = \wp\tilde{\omega} + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\wp(\nu w).$$

Nun ist (S. 66 (2.))

$$\wp(u-\tilde{\omega}) = \wp(u+\tilde{\omega}) = e_\alpha + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha};$$

ein Ausdruck, der bei Benutzung der ohnedies auftretenden Invarianten oder auch nur einer von ihnen auf e_α allein zurückgeführt werden kann:

$$\wp(u-\tilde{\omega}) = e_\alpha + \frac{3e_\alpha^2 - \frac{1}{4}g_2}{\wp u - e_\alpha}.$$

Es sei jetzt

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}(\wp u - \wp(\nu w)) = \bar{G}(\wp u)_{\frac{n}{2}-1},$$

so wird

$$(11.)\qquad \wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n},\,\tilde{\omega}'\right) = \frac{\bar{H}(\wp u)_n}{(\wp u - e_\alpha)\left(\bar{G}(\wp u)_{\frac{n}{2}-1}\right)^2}.$$

Über das rationale Vorkommen der Grössen g_2, g_3 und $\wp(\nu w)$ gilt dasselbe wie vorher, nur tritt jetzt zu $\wp w, \wp(2w), \cdots \wp\left(\frac{n-2}{2}w\right)$ noch die Grösse e_α hinzu.

In beiden Fällen steht im Zähler eine ganze Function n^{ten}, im Nenner eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Um die Verwandtschaft zwischen zwei $\wp$-Functionen vollständig darzustellen, hat man noch die Multiplication hinzuzunehmen (S. 289 (3.)). Nun war $\wp(mu)$ eine rationale Function des Grades m^2 von $\wp u$, d. h. bei der Darstellung von $\wp(mu)$ durch $\wp u$ tritt als höchster Potenzexponent m^2 auf (S. 216 (11.)),

$$\wp(mu) = R(\wp u)_{m^2}.$$

Hiernach wird die algebraische Gleichung zwischen den beiden $\wp$-Functionen

$$R(\wp(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'))_{m^2 n} = R_1(\wp(u\,|\,\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1'))_{m_1^2 n_1}.$$

Mit der transformirten Function $\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$, die jetzt mit $\bar{\wp}u$ bezeichnet werden soll, hängt eine »transformirte σ-Function« mittels der Gleichung

$$\frac{d^2 \log \bar{\sigma}u}{du^2} = -\bar{\wp}u$$

zusammen. Ihr Ausdruck ergiebt sich, zuerst wieder für ungerades n, aus (5.)

$$\bar{\wp} u = \wp u - G_1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp(u-\nu w) + \wp(u+\nu w))$$

durch Integration. Der erste Schritt liefert

$$\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} u = \frac{\sigma'}{\sigma} u + G_1 u + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\nu w) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\nu w)\right).$$

Eine Constante tritt nicht hinzu, weil

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(-\nu w) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\nu w)\right) = 0$$

ist und in den von dem Summenzeichen freien Gliedern u^0 überhaupt nicht vorkommt. Weiter folgt

$$\bar{\sigma} u = C \sigma u e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma(u-\nu w) \sigma(u+\nu w),$$

und aus dem Coefficienten von u^1 in der Entwickelung nach Potenzen von u:

$$1 = C \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma(-\nu w) \sigma(\nu w).$$

Mithin ist

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma(\nu w - u) \sigma(\nu w + u)}{\sigma^2(\nu w)}. \tag{12.}$$

Für gerades n ist von der Gleichung (9.) auszugehen,

$$\bar{\wp} u = \wp u - G_1 + \wp(u - \tilde{\omega}) + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} (\wp(u-\nu w) + \wp(u+\nu w)).$$

Die erste Integration und Constantenbestimmung ergiebt

$$\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} u = \frac{\sigma'}{\sigma} u + G_1 u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\tilde{\omega}) + \tilde{\eta} + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\nu \omega) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\nu w)\right),$$

und die zweite

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u e^{\tilde{\eta} u} \frac{\sigma(\tilde{\omega} - u)}{\sigma \tilde{\omega}} \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sigma(\nu w - u) \sigma(\nu w + u)}{\sigma^2(\nu w)}$$

oder

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma u \sigma_\alpha u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sigma(\nu w - u) \sigma(\nu w + u)}{\sigma^2(\nu w)}. \tag{13.}$$

Unter Benutzung von

$$\frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2 v \,.\, \sigma^2 u} = \wp u - \wp v$$

können die beiden Formeln durch folgende ersetzt werden:

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^n u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp u - \wp(\nu w)), \tag{14.}$$

$$\bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2} \sigma^{n-1} u \, \sigma_\alpha u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} (\wp u - \wp(\nu w)). \tag{15.}$$

Da man durch Differentiation von $\bar{\sigma} u$ zu $\bar{\wp} u$ zurückkehren kann, so lehren diese Ausdrücke, dass man in jedem Falle, um das Transformationsproblem zu lösen, nur das Product zu kennen braucht, das für ungerades n mit $G(\wp u)_{\frac{n-1}{2}}$, für gerades n mit $\bar{G}(\wp u)_{\frac{n}{2}-1}$ bezeichnet worden ist. Denn auch G_1 lässt sich (nach (6.) und (10.)) durch die Coefficienten dieser Functionen darstellen. Einer besonderen Berechnung von $H(\wp u)_n$ und $\bar{H}(\wp u)_n$ bedarf es nicht.

Während die $\wp$-Function in der Transformationstheorie als von u, $2\tilde{\omega}$ und $2\tilde{\omega}'$ abhängig erscheint, pflegt man σu als Function von u, g_2 und g_3 zu betrachten. Es seien G_2, G_3 die Invarianten von $\bar{\sigma} u$. Um sie darzustellen, gehe man zu den Gleichungen S. 121 (26.)

$$g_2 = 60 \sum_{\mu,\nu}{}'(2\mu\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}')^{-4},$$

$$g_3 = 140 \sum_{\mu,\nu}{}'(2\mu\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}')^{-6}$$

zurück. Bei einer primitiven Transformation n^{ter} Ordnung werden sie durch

$$G_2 = 60 \sum_{\mu,\nu}{}'\left(2\mu\frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\nu\tilde{\omega}'\right)^{-4},$$

$$G_3 = 140 \sum_{\mu,\nu}{}'\left(2\mu\frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\nu\tilde{\omega}'\right)^{-6}$$

vertreten. Setzt man

$$\mu = \lambda n + \varrho,$$

so erhält man alle Zahlen μ und jede nur einmal, wenn man λ alle ganzzahligen Werthe, ϱ die Werthe $0, 1, \ldots n-1$ ertheilt. Die Summen zerlegen sich dann in Gruppen, z. B. wird

$$G_2 = 60 \sum_{\varrho=0}^{n-1} \sum_{\lambda,\nu} \left(\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n} + 2\lambda\tilde{\omega} + 2\nu\tilde{\omega}'\right)^{-4};$$

dabei ist die Annahme $\varrho = \lambda = \nu = 0$ auszuschliessen.

Mittels der Gleichung S. 120 (25.)

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{\mu,\nu}{}'((u-2\mu\tilde{\omega}-2\nu\tilde{\omega}')^{-2} - (2\mu\tilde{\omega}+2\nu\tilde{\omega}')^{-2})$$

lassen sich diese Ausdrücke anders darstellen. Es wird

$$\wp' u = -2\sum_{\mu,\nu}(u-2\mu\tilde{\omega}-2\nu\tilde{\omega}')^{-3},$$

$$\wp'' u = 2.3\sum_{\mu,\nu}(u-2\mu\tilde{\omega}-2\nu\tilde{\omega}')^{-4},$$

$$\wp^{\mathrm{IV}} u = 2.3.4.5\sum_{\mu,\nu}(u-2\mu\tilde{\omega}-2\nu\tilde{\omega}')^{-6}.$$

Setzt man in den beiden letzten Formeln

$$u = -\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n}$$

und schreibt λ für μ, so werden $\wp''\left(\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n}\right)$ und $\wp^{\mathrm{IV}}\left(\frac{2\varrho\tilde{\omega}}{n}\right)$, von Zahlfactoren abgesehen, gleich bestimmten Bestandtheilen von G_2 und G_3. Nur für $\varrho = 0$ ist die Einführung des speciellen Argumentwerthes nicht zulässig, weil für $u = 0$ die $\wp$-Function und alle ihre Ableitungen unendlichgross werden. Aber der Bestandtheil von G_2 für $\varrho = 0$ ist gleich g_2, der entsprechende von G_3 gleich g_3. Hiernach kommt, wenn schliesslich für ϱ wieder ν gesetzt wird,

$$(16.)\quad \begin{cases} G_2 = g_2 + 10\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\wp''(\nu w) \\ G_3 = g_3 + \frac{7}{6}\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\wp^{\mathrm{IV}}(\nu w). \end{cases}$$

Die geraden Ableitungen der $\wp$-Function können als ganze rationale Functionen von $\wp u$ selbst, und demnach die Summen in den Formeln (16.) als ganze rationale symmetrische Functionen der Grössen $\wp\frac{2\tilde{\omega}}{n}, \wp\frac{4\tilde{\omega}}{n}, \cdots \wp\frac{2(n-2)\tilde{\omega}}{n}$, d. h. als rationale Functionen der Coefficienten der oben genannten Gleichungen dargestellt werden.

Für eine beliebige, durch vier Zahlen gekennzeichnete Transformation erledigt sich die Darstellung von G_2 und G_3 in fast ebenso einfacher Weise.

Bevor nun auf die Bildung der Gleichung eingegangen wird, deren Wurzeln die Grössen $\wp(\nu w)$ sind, sollen auch die Functionen $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ transformirt werden. Die neuen Functionen würden bekannt sein, wenn $\bar{\wp} u - \bar{e}_\alpha$ für $\alpha = 1, 2, 3$ bekannt wäre, wo $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ zu $\frac{2\tilde{\omega}}{n}$, $2\tilde{\omega}'$ oder zu G_2, G_3 gehören. Es sei N der Nenner in der Formel für $\bar{\wp} u$, also

$$N = \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (\wp u - \wp(\nu w))^2 \qquad \text{für ungerades } n,$$

$$N = (\wp u - \wp \tilde{\omega}) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} (\wp u - \wp(\nu w))^2 \quad \text{für gerades } n.$$

Setzt man

$$\bar{\wp} u - \bar{\wp} v = \frac{P}{N}, \tag{17.}$$

so verschwindet P für alle Werthe

$$u = \pm v + 2\mu \frac{\tilde{\omega}}{n} + 2\nu \tilde{\omega}',$$

und nach Ausscheidung der congruenten unter diesen für

$$\wp u = \wp\left(v + \frac{2\lambda\tilde{\omega}}{n}\right) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n-1).$$

Demnach muss, da P nach (8.) und (11.) vom n^{ten} Grade ist,

$$P = \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\wp u - \wp\left(v + \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right) \tag{18.}$$

sein; denn die multiplicative Constante ergiebt sich gleich Eins bei der Entwickelung der Formel (17.) und Beibehaltung von u^{-2}.

Für den genannten Zweck werde dieser Ausdruck auf

$$v = \frac{\tilde{\omega}}{n}, \quad \frac{\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}', \quad \tilde{\omega}'$$

angewendet, wegen

$$\bar{\wp} \frac{\tilde{\omega}}{n} = \bar{e}_\alpha, \quad \bar{\wp}\left(\frac{\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right) = \bar{e}_\beta, \quad \bar{\wp} \tilde{\omega}' = \bar{e}_\gamma.$$

Es sei dann

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_\alpha = \frac{P_1}{N},$$

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_\beta = \frac{P_2}{N},$$

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_\gamma = \frac{P_3}{N}.$$

Bei ungeradem n ist

$$N = M^2,$$

wo

$$M = \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right),$$

ferner

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\wp u - \wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n} + \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= \left(\wp u - \wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n} + \frac{(n-1)\tilde{\omega}}{n}\right)\right) \prod_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right) \cdot \prod_{\nu=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right)\\
&= (\wp u - e_\alpha) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right) \cdot \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2n-2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right)\\
&= (\wp u - e_\alpha) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)^2\\
&= (\wp u - e_\alpha) M_1^2,\\
P_2 &= \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\wp u - \wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}' + \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= (\wp u - \wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}')) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp u - \wp\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)\right)^2\\
&= (\wp u - e_\beta) M_2^2,\\
P_3 &= \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\wp u - \wp\left(\tilde{\omega}' + \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= (\wp u - \wp\tilde{\omega}') \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(\wp u - \wp\left(\tilde{\omega}' + \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right)\\
&= (\wp u - e_\gamma) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)\right)^2\\
&= (\wp u - e_\gamma) M_3^2,
\end{aligned}$$

also z. B.

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_\alpha = \left(\frac{\bar{\sigma}_\alpha u}{\bar{\sigma} u}\right)^2 = (\wp u - e_\alpha) \frac{M_1^2}{M^2} = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2 \frac{M_1^2}{M^2}.$$

Zieht man die Quadratwurzel und bestimmt das Vorzeichen aus den Anfangsgliedern, so findet man

$$\frac{\bar{\sigma}_\alpha u}{\bar{\sigma} u} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} \frac{M_1}{M},$$

und ebenso

$$\frac{\overline{\mathfrak{S}}_\beta u}{\overline{\mathfrak{S}} u} = \frac{\mathfrak{S}_\beta u}{\mathfrak{S} u}\,\frac{M_2}{M},$$

$$\frac{\overline{\mathfrak{S}}_\gamma u}{\overline{\mathfrak{S}} u} = \frac{\mathfrak{S}_\gamma u}{\mathfrak{S} u}\,\frac{M_3}{M}.$$

Nun ist nach (14.)

$$\overline{\mathfrak{S}} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}^n u \,.\, M,$$

folglich wird

$$\overline{\mathfrak{S}}_\alpha u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}^{n-1} u\, \mathfrak{S}_\alpha u \,.\, M_1,$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_\beta u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}^{n-1} u\, \mathfrak{S}_\beta u \,.\, M_2,$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_\gamma u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}^{n-1} u\, \mathfrak{S}_\gamma u \,.\, M_3.$$

Die hierin enthaltenen Ausdrücke M, M_1, M_2, M_3 lassen sich in verschiedenen Formen schreiben. Eine besonders wichtige Darstellung erhält man, wenn man aus

$$\wp u - e_\lambda = \left(\frac{\mathfrak{S}_\lambda u}{\mathfrak{S} u}\right)^2, \quad \wp v - e_\lambda = \left(\frac{\mathfrak{S}_\lambda v}{\mathfrak{S} v}\right)^2$$

die Relation

$$\wp u - \wp v = \left(\frac{\mathfrak{S}_\lambda u}{\mathfrak{S} u}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{S}_\lambda v}{\mathfrak{S} v}\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{S}_\lambda u}{\mathfrak{S} u}\right)^2\left(1 - \frac{\mathfrak{S}_\lambda^2 v}{\mathfrak{S}^2 v}\,\frac{\mathfrak{S}^2 u}{\mathfrak{S}_\lambda^2 u}\right)$$

ableitet und auf die in $M, \ldots$ vorkommenden Argumente v anwendet:

$$\overline{\mathfrak{S}} u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S} u\, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1} u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\mathfrak{S}_\lambda^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)}\,\frac{\mathfrak{S}^2 u}{\mathfrak{S}_\lambda^2 u}\right)$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_\alpha u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}_\alpha u\, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1} u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\mathfrak{S}_\lambda^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)}\,\frac{\mathfrak{S}^2 u}{\mathfrak{S}_\lambda^2 u}\right)$$

(19.)

$$\overline{\mathfrak{S}}_\beta u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}_\beta u\, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1} u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\mathfrak{S}_\lambda^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)}{\mathfrak{S}^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)}\,\frac{\mathfrak{S}^2 u}{\mathfrak{S}_\lambda^2 u}\right)$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_\gamma u = e^{\frac{1}{2} G_1 u^2}\mathfrak{S}_\gamma u\, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1} u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\mathfrak{S}_\lambda^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)}{\mathfrak{S}^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)}\,\frac{\mathfrak{S}^2 u}{\mathfrak{S}_\lambda^2 u}\right).$$

Auch hier sieht man unmittelbar, dass die Vorzeichen richtig bestimmt sind.

Für gerades n hat man

$$N = (\wp u - e_\alpha)\,\overline{M}^2,$$

wo

$$\overline{M} = \prod_{\nu=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right).$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\wp u - \wp\left(\frac{\tilde{\omega}}{n} + \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)\right) \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right) \\
&= \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right) \cdot \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2n-2\nu+1)\tilde{\omega}}{n}\right) \\
&= \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(\wp u - \wp \frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)^2 \\
&= \overline{M}_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \left(\wp u - \wp\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)\right)^2 \\
&= \overline{M}_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= (\wp u - \wp\tilde{\omega}')(\wp u - \wp(\tilde{\omega}' + \tilde{\omega})) \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)\right) . \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}+1} \left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)\right) \\
&= (\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma) \prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(\wp u - \wp\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n} + \tilde{\omega}'\right)\right)^2 \\
&= (\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma)\,\overline{M}_3^2.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt jetzt

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\sigma}_\alpha u}{\overline{\sigma} u} &= \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} \frac{\overline{M}_1}{\overline{M}}, \\
\frac{\overline{\sigma}_\beta u}{\overline{\sigma} u} &= \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} \frac{\overline{M}_2}{\overline{M}}, \\
\frac{\overline{\sigma}_\gamma u}{\overline{\sigma} u} &= \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} \frac{\sigma_\beta u}{\sigma u} \frac{\sigma_\gamma u}{\sigma u} \frac{\overline{M}_3}{\overline{M}},
\end{aligned}$$

und da (15.) in der Gestalt

$$\overline{\sigma}u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^{n-1}u\,\sigma_\alpha u.\overline{M}$$

geschrieben werden kann, so ist

$$\overline{\sigma}_\alpha u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^n u.\overline{M}_1,$$
$$\overline{\sigma}_\beta u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^n u.\overline{M}_2,$$
$$\overline{\sigma}_\gamma u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma^{n-2}u\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u.\overline{M}_3.$$

Dieselbe Veränderung wie oben liefert

$$\overline{\sigma}u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\lambda^{n-2}u\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(1-\frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)}\cdot\frac{\sigma^2u}{\sigma_\lambda^2u}\right)$$

(20.)
$$\overline{\sigma}_\alpha u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma_\lambda^n u\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)}{\sigma^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}\right)}\frac{\sigma^2u}{\sigma_\lambda^2u}\right)$$

$$\overline{\sigma}_\beta u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma_\lambda^n u\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)}{\sigma^2\left(\frac{(2\nu-1)\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)}\frac{\sigma^2u}{\sigma_\lambda^2u}\right)$$

$$\overline{\sigma}_\gamma u = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u\,\sigma_\lambda^{n-2}u\prod_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(1-\frac{\sigma_\lambda^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}+\tilde{\omega}'\right)}\cdot\frac{\sigma^2u}{\sigma_\lambda^2u}\right).$$

Aus den Gleichungen (19.) und (20.) kann die Transformation der σ-Quotienten sofort abgeleitet werden; im Besonderen auch die Formeln, die Jacobi für seine Functionen in den Fundamenten, doch nur für ungerades n, entwickelt hat. Der Index λ in den Formeln ist beliebig, gleich α oder β oder γ. Wählt man ihn so, dass er mit dem links vorkommenden übereinstimmt, und stellt dann zuerst die Formeln (19.) durch Division zusammen, so erhält man den wichtigen Satz, dass jeder σ-Quotient $\overline{\varphi}(u)$, der aus einem gegebenen $\varphi(u)$ durch primitive Transformation ungerader Ordnung hervorgeht, sich rational durch $\varphi(u)$ ausdrücken lässt.

Für gerades n ändert sich dies etwas. Man kann dann nicht immer behaupten, dass $\overline{\varphi}(u)$ eine rationale Function von $\varphi(u)$ allein ist. Es werde die letzte Formel (20.) betrachtet und darin etwa $\lambda = \alpha$ gesetzt, ebenso in der ersten, dann die erste durch die letzte dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{\bar{\sigma} u}{\bar{\sigma}_\gamma u} = \frac{\sigma u\, \sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u\, \sigma_\gamma u} R\left(\left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2\right).$$

Die rationale Function R ist auch als rational in $\frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u}$ aufzufassen, weil die Quadrate der σ-Quotienten rational durch einander ausdrückbar sind. Der Factor kann geschrieben werden:

$$\frac{\sigma u\, \sigma_\alpha u}{\sigma_\beta u\, \sigma_\gamma u} = \frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u} \frac{\sigma_\gamma^2 u}{\sigma_\beta^2 u} \frac{\sigma_\alpha u\, \sigma_\beta u}{\sigma_\gamma^2 u}.$$

In Folge von S. 97 (6.) wird dann

$$\frac{\bar{\sigma} u}{\bar{\sigma}_\gamma u} = \bar{R}\left(\frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u}\right) \frac{d}{du} \frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u},$$

d. h. für $\varphi(u) = \frac{\sigma u}{\sigma_\gamma u}$ lässt sich die transformirte Function $\bar{\varphi}(u)$ rational durch $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ darstellen.

Die Formeln (19.) und (20.) können auch dazu benutzt werden, die Werthe der Grössen $\bar{e}_\lambda$ für die transformirten Functionen durch die ursprünglichen auszudrücken. Man bildet zu diesem Zweck die Entwickelungen

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda u &= 1 - \tfrac{1}{2} e_\lambda u^2 + \cdots, \\ \bar{\sigma}_\lambda u &= 1 - \tfrac{1}{2} \bar{e}_\lambda u^2 + \cdots \end{aligned}$$

und behält die Coefficienten von u^2 bei. Die noch auftretende Grösse G_1 kann durch Subtraction eliminirt werden, denn man braucht wegen der Identität

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0$$

nur die Differenzen der Grössen $\bar{e}_\lambda$ zu berechnen.

Dreiunddreissigstes Kapitel.

Zur Transformation der $\wp$-Function.

In der Formel S. 290 (4.) war $2\tilde{\omega}$ eine beliebige primitive Periode. Es scheint daher auf den ersten Anblick, dass die Anzahl der durch Transformation aus einer gegebenen $\wp$-Function hervorgehenden Functionen unendlich gross sein müsste. Allein in der Darstellung von $2\tilde{\omega}$ durch ein spezielles primitives Periodenpaar,

$$2\tilde{\omega} = 2\lambda\omega + 2\mu\omega',$$

dürfen die ganzen Zahlen λ und μ nach dem Modul n reducirt werden, wie die Formel (4.) selbst lehrt. Von den Zahlenpaaren, die dadurch entstehen, dass λ und μ unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \ldots n-1$ durchlaufen, sind ausser $(0, 0)$ alle diejenigen wegzulassen, deren Bestandtheile einen gemeinsamen Factor haben. Denn solche Paare können keine Periode liefern, die mit einer anderen zusammen ein primitives Periodenpaar bildet.

Aber die Anzahl kann noch weiter verringert werden. Wir ersetzen die Annahme, dass λ und μ keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, durch die allgemeinere, dass sie keinen gemeinsamen Theiler mit n haben. Zuerst soll gezeigt werden, dass sich jedem Zahlenpaare (λ', μ') von dieser Beschaffenheit ein anderes (λ, μ) so zuordnen lässt, dass λ und μ relative Primzahlen sind. Es sei

$$\lambda' = \lambda_0 r, \quad \mu' = \mu_0 r,$$

wo also λ_0, μ_0 und r zu n relativ prim sind. An Stelle von

$$w = \frac{2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'}{n}$$

werde

$$w' = w + 2s\omega$$

eingeführt, wo s eine passend zu bestimmende ganze Zahl bedeutet. In

$$w' = \frac{2(\lambda_0 r + ns)\omega + 2\mu_0 r\omega'}{n}$$

kann man s immer so wählen, dass $\lambda_0 r + ns$ und $\mu_0 r$ keinen gemeinsamen Theiler haben. In dem Ausdruck

$$w' = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}$$

sind dann λ und μ Zahlen von der verlangten Beschaffenheit. Die Bestimmung von s ist möglich, weil $\lambda_0 r$, $\mu_0 r$ und n nicht alle drei einen gemeinsamen Theiler haben.

Dass man hierbei sämmtliche Zahlenpaare (λ, μ) erhalten muss, ist klar; denn die Paare, die überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben, sind bereits unter denen enthalten, die keinen Theiler mit n gemein haben. Doch könnte es sein, dass man bei der Reduction nach dem Modul n zwei Zahlen, die relativ prim sind, mehrmals erhielte. Man wird also bei der Anwendung der Grössen w, die zu den Paaren (λ', μ') gehören, darauf zu sehen haben, dass nur von einander verschiedene transformirte $\wp$-Functionen auftreten.

Um eine deutliche Übersicht über die Grössen w dieser Art zu gewinnen hat man vor allem noch zu beachten, dass die transformirte $\wp$-Function ungeändert bleibt, falls man w durch kw ersetzt, wenn nur k irgend eine ganze Zahl bedeutet, die zu n relativ prim ist. Zunächst ist kw wieder von der Form $\frac{2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'}{n}$. Bei der Bildung der Summen $\sum\wp(u - \nu w)$ und $\sum\wp(\nu w)$ nach S. 290 (4.) tritt $k\nu$ an die Stelle von ν. Setzt man nun

$$k\nu = qn + \nu'$$

und nimmt für ν der Reihe nach die Werthe $0, 1, \dots n-1$, so durchläuft ν' dieselben Werthe, abgesehen von der Reihenfolge, während das aus qn herrührende Vielfache von $2\bar{\omega}$ nicht in Betracht kommt. Die Summen ändern sich also durch die Substitution von kw für w nicht. Eine Grösse w_1 soll nun als zu w gehörig bezeichnet werden, wenn w_1 einem solchen kw gleich oder congruent ist. Dann lässt sich beweisen, dass auch umgekehrt w zu w_1 gehört.

Es sei

$$w_1 \equiv k_1 w,$$

sodass

$$k w_1 \equiv k k_1 w$$

ist. Die ganze Zahl k und eine zweite k' können, weil k_1 relativ prim zu n ist, so gewählt werden, dass

$$k k_1 - k' n = 1,$$

also

$$k w_1 \equiv w + k' n w \equiv w + k' . 2 \tilde{\omega},$$

d. h., wie behauptet,

$$k w_1 \equiv w$$

ist. Hiernach kann man w und w_1 als zusammengehörig bezeichnen.

Sind zwei Grössen w_1, w_2 einer dritten zugehörig, so sind sie zusammengehörig. Denn ist

$$w_1 = k_1 w, \quad w_2 = k_2 w$$

und wird nach dem eben Bewiesenen

$$w = k w_1$$

gesetzt, so findet sich

$$w_2 = k_2 k w_1.$$

Fassen wir jetzt die Reihe aller Grössen w in's Auge, wie sie auf S. 302 definirt worden sind, und bezeichnen eine dieser Grössen mit w_1, ferner mit $k_1, k_2, \dots k_r$ alle Zahlen, die kleiner als n und zu n relativ prim sind, so ist $k_\varrho w_1$ ($\varrho = 1, 2, \dots r$) wieder einer Grösse w gleich oder congruent. Unter den Zahlen k_ϱ ist die Eins enthalten, sie sei mit k_r bezeichnet. Dann entspringen also aus einem gegebenen w_1 r Grössen der Art, dass

$$w_1, \; k_1 w_1, \; \dots \; k_{r-1} w_1,$$

in den Ausdruck der transformirten $\wp$-Function eingeführt, sämmtlich dieselbe Function liefern. Diese r Grössen sind auch wirklich von einander verschieden. Denn wäre

$$k_\alpha w_1 \equiv k_\beta w_1, \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

so müsste

$$\frac{(k_\alpha - k_\beta)(2\lambda'\omega + 2\mu'\omega')}{n}$$

eine Periode, d. h. $(k_\alpha - k_\beta)\lambda'$ und $(k_\alpha - k_\beta)\mu'$ durch n theilbar sein. Und da λ' und μ' mit n keinen gemeinsamen Theiler haben, so müsste $k_\alpha - k_\beta$ durch n theilbar sein, was nicht angeht, weil k_α und k_β kleiner als n sind.

Dagegen muss jedes zu w_1 gehörige w einer Grösse der vorstehenden Reihe gleich oder congruent sein. Es sei k irgend eine Zahl, die zu n relativ prim ist, und

$$kw_1 \equiv w'.$$

Man setze

$$k = ln + k',$$

wo k' relativ prim zu n und kleiner als n, so wird

$$w' \equiv (ln + k')w_1 \equiv k'w_1;$$

hier ist k' in der Reihe $1, k_1, \dots k_{r-1}$ enthalten.

Wenn nun w_1 und die hieraus abgeleitete Reihe von $r-1$ Grössen nicht sämmtliche incongruenten Grössen w erschöpfen, so sei w_2 eine neue Grösse dieser Art, die demnach nicht zu w_1 gehört. Es entsteht wie vorher eine neue Reihe zusammengehöriger Grössen

$$w_2,\ k_1 w_2,\ \dots\ k_{r-1} w_2,$$

die sämmtlich mitzuzählen sind. Denn dass keine Grösse $k_\varrho w_2$ zu w_1 gehören kann, ist leicht zu sehen. Wäre dies der Fall, so würde auch w_1 zu $k_\varrho w_2$ gehören; und da für w_2 dasselbe gilt, so würde auch w_2 zu w_1 gehören.

Enthalten auch die beiden aus w_1 und w_2 abgeleiteten Reihen zusammen noch nicht alle Grössen w, so nehme man eine neue w_3 an, die weder zu w_1 noch zu w_2 gehört, und bilde aus ihr $r-1$ andere Grössen, die von einander und von denen der beiden ersten Reihen verschieden sind. Die Gesammtanzahl N der Grössen w zerfällt so in Gruppen von je r und ist demnach durch r theilbar,

$$N = rr'. \tag{1.}$$

Um hieraus schliessen zu können, dass die Anzahl der verschiedenen transformirten $\wp$-Functionen gleich r' ist, muss man sich überzeugen, dass von den Functionen, die aus den r' Grössen $w_1, w_2, \dots$ entstehen, keine zwei einander gleich sind. Die zu w_α und w_β gehörenden $\wp$-Functionen haben die Unendlichkeitsstellen $pw_\alpha + 2q\tilde{\omega}'$ und $p'w_\beta + 2q'\tilde{\omega}'$. Sollen sie übereinstimmen, so muss z. B. w_β einem Vielfachen von w_α congruent sein, und zwar, nach der Definition der Grössen w überhaupt, einem solchen Vielfachen, in dem der Multiplicator relativ prim zu n ist. w_β müsste also dann zu w_α gehören.

Nun ist die Zahl r, die Anzahl der relativen Primzahlen zu n, die kleiner als n sind, aus der Zahlentheorie bekannt. Sind $a, b, c, \ldots$ die verschiedenen in n enthaltenen Primfactoren, und

$$n = a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots,$$

so ist

$$(2.)\quad r = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots = a^\lambda\left(1-\frac{1}{a}\right)b^\mu\left(1-\frac{1}{b}\right)c^\nu\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots.$$

Zu bestimmen bleibt die Zahl N, die Anzahl der Paare von Zahlen λ', μ', die kleiner als n sind und mit n keinen gemeinsamen Theiler haben. Man setze, vorläufig ohne Rücksicht darauf, ob λ' und μ' kleiner als n sind oder nicht,

$$\frac{\lambda'}{n} = \lambda_0 + \left(\frac{a_0}{a^\lambda} + \frac{a_1}{a^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}}{a}\right) + \left(\frac{b_0}{b^\mu} + \frac{b_1}{b^{\mu-1}} + \cdots + \frac{b_{\mu-1}}{b}\right) + \cdots,$$

$$\frac{\mu'}{n} = \mu_0 + \left(\frac{a'_0}{a^\lambda} + \frac{a'_1}{a^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{a'_{\lambda-1}}{a}\right) + \left(\frac{b'_0}{b^\mu} + \frac{b'_1}{b^{\mu-1}} + \cdots + \frac{b'_{\mu-1}}{b}\right) + \cdots,$$

wo $a_0, a_1, \ldots a_{\lambda-1}$ kleiner als a; $b_0, b_1, \ldots b_{\mu-1}$ kleiner als b; u. s. f. Sollten λ und μ' einen gemeinsamen Theiler mit n haben, so müsste das einer der Primfactoren $a, b, c, \ldots$ von n sein oder allgemein ein Product von Potenzen dieser Primfactoren. Aus

$$\lambda' = n\lambda_0 + \frac{n}{a^\lambda}(a_0 + a_1 a + \cdots + a_{\lambda-1}a^{\lambda-1}) + \cdots,$$

$$\mu' = n\mu_0 + \frac{n}{a^\lambda}(a'_0 + a'_1 a + \cdots + a'_{\lambda-1}a^{\lambda-1}) + \cdots$$

sieht man, dass wenn a_0 und a'_0 gleich Null sind, λ' und μ' den Factor a haben. Ist aber z. B. a_0 von Null verschieden, so kann a kein Theiler von λ' sein; denn sämmtliche Glieder bis auf $\frac{n}{a^\lambda}a_0$ sind von vornherein durch a theilbar, $\frac{n}{a^\lambda}$ aber nicht, weil a^λ die höchste in n enthaltene Potenz von a, und a_0 ebensowenig, weil es kleiner als a ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass λ' den Theiler a mit n gemein hat, ist also $a_0 = 0$. Sie ist auszuschliessen, wenn λ', wie gefordert, zu n relativ prim sein soll. Im übrigen können $a_0, a_1, \ldots a_{\lambda-1}$ unabhängig von einander alle Werthe

$0, 1, \dots a$ annehmen, was im ganzen a^{λ} Werthsysteme liefert. Für $a'_0, a'_1, \dots a'_{\lambda-1}$ gilt dasselbe, und da λ' und μ' zu einem Zahlenpaar vereinigt werden sollen, so ist jedes Werthsystem $(a_0, \dots a_{\lambda-1})$ mit jedem Werthsystem $(a'_0, \dots a'_{\lambda-1})$ zusammenzustellen; das sind im Ganzen $a^{2\lambda}$ Möglichkeiten. Von diesen sind alle, die zu $a_0 = 0, a'_0 = 0$ gehören, abzuziehen, also, da $a_1, \dots a_{\lambda-1}, a'_1, \dots a'_{\lambda-1}$ wieder je a Werthe annehmen, $a^{2(\lambda-1)}$ Systeme. Es bleiben

$$a^{2\lambda} - a^{2\lambda-2} = a^{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

Combinationen übrig. Ebenso $b^{2\mu}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)$ Combinationen, wenn λ' und μ' nicht durch b theilbar sein sollen, u. s. w. Die Gesammtheit aller für die Herstellung von Grössen w möglichen Annahmen ist

$$a^{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) b^{2\mu}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) c^{2\nu}\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \cdots.$$

Es fragt sich aber noch, ob diese bei der Reduction nach dem Modul n wirklich verschiedene Zahlenpaare liefern. Wird

$$\lambda' = n\lambda_0 + \frac{nA}{a^{\lambda}} + \frac{nB}{b^{\mu}} + \cdots,$$

$$\bar{\lambda}' = n\bar{\lambda}_0 + \frac{n\bar{A}}{a^{\lambda}} + \frac{n\bar{B}}{b^{\mu}} + \cdots$$

gesetzt, und soll

$$\lambda' \equiv \bar{\lambda}' \mod n$$

sein, so heisst das, es ist

$$(A - \bar{A}) b^{\mu} c^{\nu} \cdots + (B - \bar{B}) a^{\lambda} c^{\nu} \cdots + \cdots$$

durch $a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} \dots$ theilbar. Alle Glieder bis auf das erste sind durch a^{λ} theilbar, folglich muss $A - \bar{A}$ durch a^{λ} theilbar sein. Es ist aber

$$A = a_0 + a_1 a + \cdots + a_{\lambda-1} a^{\lambda-1} < a^{\lambda},$$

und ebenso $\bar{A}$, mithin kann nur $A = \bar{A}$ sein, und ebenso $B = \bar{B}, \dots$. Immer gilt das Gleiche für μ'. Das heisst: Wenn die Coefficientensysteme in den Zahlenpaaren (λ', μ') und $(\bar{\lambda}', \bar{\mu}')$ verschieden sind, wie es angenommen worden ist, so kommt man auch bei der Reduction nach dem Modul n zu verschiedenen Zahlenpaaren. Deren Anzahl ist demnach gleich der eben ermittelten,

$$N = a^{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) b^{2\mu}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) c^{2\nu}\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \cdots. \tag{3.}$$

Die Anzahl der verschiedenen $\wp$-Functionen, die aus einer gegebenen durch primitive Transformation n^{ter} Ordnung entstehen, war

$$r' = \frac{N}{r}.$$

Demnach wird schliesslich

$$r' = a^{\lambda}\left(1+\frac{1}{a}\right)b^{\mu}\left(1+\frac{1}{b}\right)c^{\nu}\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots \tag{4.}$$

Ist die Ordnung n eine Primzahl a, also $\lambda = 1$, $\mu = \nu = \cdots = 0$, so hat man

$$r' = a + 1. \tag{5.}$$

Dass die primitiven Transformationen von zusammengesetzter Ordnung sich auf solche von Primzahlordnung zurückführen lassen, erkennt man unmittelbar. Es sei

$$n = n_1 n_2,$$

so wird

$$\wp\left(u\left|\frac{\tilde{\omega}}{n_1 n_2}, \tilde{\omega}'\right.\right) = R_1\left(\wp\left(u\left|\frac{\tilde{\omega}}{n_2}, \tilde{\omega}'\right.\right)\right),$$
$$\wp\left(u\left|\frac{\tilde{\omega}}{n_2}, \tilde{\omega}'\right.\right) = R_2(\wp(u|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')),$$

also

$$\wp\left(u\left|\frac{\tilde{\omega}}{n_1 n_2}, \tilde{\omega}'\right.\right) = R\,(\wp(u|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')),$$

wo R bekannt ist, sobald R_1 und R_2 bestimmt sind. Zerlegt man nun n_1 und n_2, wenn sie zusammengesetzt sind, weiter, so kann man bis zu den Primfactoren von n hinabsteigen.

Hierbei tritt hinsichtlich der Anzahl der transformirten Functionen eine kleine Schwierigkeit auf. Wenn man bis zu einer Primzahlpotenz gekommen ist, z. B. $n_1 = a^2$, und nun die transformirten Functionen dadurch herstellen will, dass man der Reihe nach zwei Transformationen a^{ter} Ordnung anwendet, so erhält man aus jeder der $a+1$ Functionen, die durch die erste Transformation entstehen, $a+1$ neue, sodass die Gesammtanzahl $(a+1)^2$ wird, während nach der allgemeinen Formel (4.) nur

$$a^2\left(1+\frac{1}{a}\right) = a^2 + a$$

herauskommen können. Es erscheinen also $a+1$ Functionen zuviel. Dies findet seine Erklärung darin, dass nicht alle Functionen, die die zweimalige Transformation a^{ter} Ordnung liefert, als solche zu betrachten sind, die auch durch Transformation der Ordnung a^2 entstehen. Wendet man nämlich die ursprüngliche Definition einer primitiv-transformirten Function — wonach eine beliebige Periode durch a getheilt wird, während die andere ungeändert bleibt — auf eine Function der ersten Reihe

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{a}, \tilde{\omega}'\right)$$

an, für welche $2\tilde{\omega}'$ eine Periode ist, so erhält man u. a.

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{a}, \frac{\tilde{\omega}'}{a}\right).$$

Es ist aber

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{a}, \frac{\tilde{\omega}'}{a}\right) = a^2\wp(au\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'). \tag{6.}$$

Diese Function gehört nicht zu den gesuchten, denn sie entsteht nicht dadurch aus der gegebenen, dass eine Periode durch a^2 getheilt, die andere ungeändert gelassen wird. Vielmehr sind beide Perioden ungeändert geblieben, das Argument aber mit a multiplicirt worden. Bei der ersten Transformation erhält man sicher $a+1$ transformirte Functionen, dann aus jeder von diesen mindestens eine, in der, bei ungeänderten Perioden, das Argument u durch au ersetzt ist. Auf diese Weise würde man

$$(a+1)^2-(a+1) = a^2+a$$

transformirte Functionen der Ordnung a^2 bekommen. Da man aber schon weiss, dass dies die richtige Anzahl ist, so hat man zu schliessen, dass aus jeder Function der ersten Reihe nur eine einzige Function hervorgeht, die nicht zu den gesuchten zu rechnen ist.

Die schon öfters benutzte Gleichung (6.) enthält den Satz, dass zwei primitive Transformationen derselben Ordnung, nacheinander auf jede der Perioden angewendet, zur Multiplication führen.

Sind die Factoren von n relativ prim, so tritt der eben gekennzeichnete Umstand nicht ein, sondern jede transformirte Function der ersten Reihe liefert wirklich eine transformirte Function der zusammengesetzten Ordnung.

Es sei

$$n_1 = a_1^{\lambda_1} b_1^{\mu_1} \ldots,$$
$$n_2 = a_2^{\lambda_2} b_2^{\mu_2} \ldots.$$

Die Anzahl primitiv-transformirter Functionen der Ordnung n_1 ist

$$n_1\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\cdots.$$

Aus jeder gehen durch Transformation der Ordnung n_2

$$n_2\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots$$

Functionen hervor. Das Product liefert, da $a_2, b_2, \ldots$ sämmtlich von $a_1, b_1, \ldots$ verschieden sind,

$$n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots$$

Functionen, also die richtige Anzahl.

Die vollständige Lösung des Transformationsproblems kommt auf die Bildung einer Function

$$\prod_\nu\left(\wp u - \wp\frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}\right)$$

hinaus (S. 291, 292). Verschwindet diese Function, so wird die transformirte $\wp$-Function unendlich gross. Andererseits wird für $u = \frac{2\nu\tilde{\omega}}{n}$ auch $\wp(nu\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ unendlich. Demnach müssen die Werthe $\wp(\nu w)$ unter den Wurzeln der Theilungsgleichung enthalten sein, die man erhält, wenn man in den Formeln des Multiplicationstheorems (S. 215, 216) den Nenner gleich Null setzt.

Bei der Möglichkeit, eine beliebige Transformation auf primitive, eine primitive Transformation von zusammengesetzter Ordnung auf solche von Primzahlordnung zurückzubringen, braucht man die eben genannte Function nur für n gleich 2 und gleich einer beliebigen ungeraden Primzahl zu kennen. Bei der wirklichen Durchführung der Transformation ist darauf zu achten, dass überall die Functionen weggelassen werden, die nicht mit einer Transformation höherer Ordnung, sondern mit der Multiplication zusammenhängen (S. 309).

Für $n = 2$ werden die Formeln sehr einfach, und man kann sich sofort auf die transformirte Function $\bar{\wp} u$ selbst beziehen, ohne erst $\bar{\sigma} u$ zu benutzen.

Nach S. 290 (4.) wird

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\tilde{\omega}}{2},\,\tilde{\omega}'\right) = \wp u + \wp(u-\tilde{\omega}) - \wp\tilde{\omega},$$

d. h.

$$\bar{\wp} u = \wp u + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha}, \tag{7.}$$

eine rationale Function zweiten Grades (vgl. S. 292 (11.)). Setzt man $\alpha = 1, 2, 3$, so erhält man drei transformirte Functionen, wie es nach S. 308 (5.) sein muss.

Für ungerades n, gleichgiltig ob Primzahl oder nicht, sei

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (s - \wp(\nu w)) = \varphi(s). \tag{8.}$$

Die Frage nach der Herstellung dieser Function soll nicht unter der Voraussetzung discutirt werden, dass die Periode, deren n^{ter} Theil gleich w ist, gegeben ist; das Hauptaugenmerk wird vielmehr auf die Ordnung n der Transformation selbst gerichtet, also hier auf die Gesammtheit aller verschiedenen Functionen $\varphi(s)$, die bei der n-Theilung irgend einer Periode entstehen.

Es sei

$$w_1,\; w_2,\; \dots\; w_{r'}$$

(S. 305) ein vollständiges System von Grössen w, deren keine zwei zusammengehören. Multiplicirt man sie mit den Zahlen

$$k_1,\; k_2,\; \dots\; k_r,$$

die relativ prim zu n und kleiner als n sind, so erhält man das System

$$\begin{matrix} k_1 w_1, & k_2 w_1, & \dots & k_r w_1, \\ k_1 w_2, & k_2 w_2, & \dots & k_r w_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 w_{r'}, & k_2 w_{r'}, & \dots & k_r w_{r'} \end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, dass keine darin vorkommende Grösse einer anderen congruent ist, dass aber jedes w, das es überhaupt giebt, einer von ihnen congruent ist. Betrachtet man demnach den Ausdruck $\wp w$, so kann dieser höchstens so viele Werthe haben, wie Grössen w in diesem Systeme enthalten sind. Nun ist, wenn $k_\varrho < n$ und relativ prim zu n, auch $n - k_\varrho$ eine

Zahl derselben Eigenschaft, und man hat

$$\wp((n-k_\varrho)w) = \wp(k_\varrho w),$$

d. h. die in dem System enthaltenen Grössen lassen sich paarweise so zusammenstellen, dass die entsprechenden $\wp$-Functionen einander gleich werden. Bei der Reduction mögen

$$\begin{array}{l} w_1,\ w_1',\ \dots\ w_1^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}, \\ w_2,\ w_2',\ \dots\ w_2^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{r'},\ w_{r'}',\ \dots\ w_{r'}^{\left(\frac{r}{2}-1\right)} \end{array}$$

übrig bleiben; und es sollen die Functionen $\varphi = \varphi(s, \wp w)$ untersucht werden, die durch Einführung aller dieser Grössen für w entstehen. Aus der Definitionsgleichung (8.)

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (s-\wp(\nu w)) = \varphi(s, \wp w)$$

folgt, dass φ sich nicht ändert, wenn w durch $k_\varrho w$ ersetzt wird, denn es ändert sich dann nur die Folge der Factoren (vgl. S. 304). Demnach ist

$$\begin{array}{l} \varphi(s, \wp w_1) = \varphi(s, \wp w_1') = \cdots = \varphi\left(s, \wp w_1^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}\right) = \varphi_1, \\ \varphi(s, \wp w_2) = \varphi(s, \wp w_2') = \cdots = \varphi\left(s, \wp w_2^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}\right) = \varphi_2, \\ \cdot \end{array}$$

Die Anzahl dieser Functionen ist gleich r'. Fasst man sie als Wurzeln einer Gleichung vom Grade r' auf, so werden deren Coefficienten ganze symmetrische Functionen von $\wp w_1, \dots \wp w_{r'}$. Diese Grössen wieder sind Wurzeln einer Gleichung desselben Grades, die mit der Theilungsgleichung in einem leicht erkennbaren Zusammenhange steht. Die Theilungsgleichung entstand durch Nullsetzung des Nenners von $\wp(nu)$ oder des Zählers von $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)}$ (S. 216). Ihre Wurzeln sind

$$\frac{2\alpha\omega + 2\beta\omega'}{n};$$

ausser den Grössen w liefern sie auch solche Argumente, in denen α und β einen gemeinsamen Theiler mit n haben. Diese können als Wurzeln von

Theilungsgleichungen für kleinere Zahlen n gekennzeichnet werden, denn sie haben nach Weglassung des gemeinsamen Factors die Form

$$\frac{2\alpha'\omega + 2\beta'\omega'}{n'}.$$

Hat man also n in Factoren zerlegt, die Theilungsgleichungen für n selbst und für die Factoren aufgestellt, so hat man die Wurzeln der letzteren Gleichungen, soweit sie zugleich Wurzeln der ersten sind, abzutrennen und weiss dann von vornherein, dass die reducirte Theilungsgleichung vom Grade r' sein muss. Diese Absonderung, die auf die Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer rationaler Functionen hinauskommt, ist eine rationale Operation. Und da die Coefficienten der Theilungsgleichungen rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, so werden auch die Coefficienten der reducirten Theilungsgleichung in g_2 und g_3 rational.

Dies festgestellt, werden auch die Coefficienten der Gleichung, durch die die verschiedenen Functionen φ bestimmt werden, rationale Functionen von g_2 und g_3. Es giebt specielle Methoden, die Rechnung, die auf dem beschriebenen Wege sehr umständlich werden würde, zu vereinfachen. Das Hauptergebniss aber ist, dass die Gleichung für $\varphi(s)$ gleichzeitig mit der Theilungsgleichung als bekannt zu betrachten ist.

Vierunddreissigstes Kapitel.

Die Transformation zweiter Ordnung.

Die einfachste besondere Annahme über die Ordnung der Transformation, $n = 2$, giebt zu verschiedenen bemerkenswerthen Folgerungen Veranlassung. Für

$$\wp\left(u \,\middle|\, \frac{\tilde{\omega}}{2}, \tilde{\omega}'\right) = \bar{\wp} u \tag{1.}$$

galt nach S. 311 (7.) die Darstellung

$$\bar{\wp} u = \wp u + \frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha}. \tag{2.}$$

Die Grössen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, die zu $\bar{\wp} u$ gehören, werden wegen

$$(\bar{\wp}' u)^2 = 4(\bar{\wp} u - \bar{e}_1)(\bar{\wp} u - \bar{e}_2)(\bar{\wp} u - \bar{e}_3)$$

durch Nullsetzung von $\bar{\wp}' u$ gefunden. Nun ist nach (2.)

$$\bar{\wp}' u = \frac{\wp' u}{(\wp u - e_\alpha)^2}((\wp u - e_\alpha)^2 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)). \tag{3.}$$

Um also die Gleichung

$$\bar{\wp}' u = 0$$

zu befriedigen, hat man entweder

$$\wp' u = 0,$$

d. h.

$$(\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma) = 0,$$

oder

$$(\wp u - e_\alpha)^2 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) = 0$$

zu setzen. Nach der Form des Ausdruckes von $\bar{\wp}'u$ ist $\wp u = e_\alpha$ auszuscheiden, und die Annahmen $\wp u = e_\beta$, $\wp u = e_\gamma$ liefern übereinstimmend

$$\bar{e}_\lambda = e_\beta + e_\gamma - e_\alpha = -2e_\alpha.$$

Die beiden anderen gesuchten Grössen folgen aus der zweiten Bedingung:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{e}_\mu\\ \bar{e}_\nu\end{array}\right\} = e_\alpha \pm 2\sqrt{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

Es seien insbesondere die Grössen e_1, e_2, e_3 reell, und, wie gewöhnlich,

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Dann sind für $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ auch $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ reell und genügen den Bedingungen

$$\bar{e}_\mu > \bar{e}_\nu > \bar{e}_\lambda,$$

wenn $\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$ den reellen positiven Werth bedeutet. Wird auch

$$\bar{e}_1 > \bar{e}_2 > \bar{e}_3$$

vorausgesetzt, so hat man also

$$\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad \lambda = 3,$$

d. h.

$$(4.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 = e_1 + 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ \bar{e}_2 = e_1 - 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \\ \bar{e}_3 = -2e_1 \end{array}\right.$$

zu nehmen.

Aus diesen Formeln folgt

$$(5.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 - \bar{e}_2 = 4\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_1 - e_2} \\ \bar{e}_1 - \bar{e}_3 = \left(\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2}\right)^2 \\ \bar{e}_2 - \bar{e}_3 = \left(\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}\right)^2, \end{array}\right.$$

also weiter, wenn

$$(6.)\qquad \sqrt{e_1 - e_3} = a, \quad \sqrt{e_1 - e_2} = b,$$

$$(7.)\qquad \tfrac{1}{4}\bar{e}_\alpha = e'_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$(8.)\qquad \sqrt{e'_1 - e'_3} = a', \quad \sqrt{e'_1 - e'_2} = b'$$

gesetzt wird,

$$(9.)\qquad \begin{cases} a' = \frac{1}{2}(a+b) \\ b' = \sqrt{ab}. \end{cases}$$

Es ist demnach a' das arithmetische, b' das geometrische Mittel der beiden entsprechenden Grössen a und b.

Diese einfachen Beziehungen regen die Frage an, zu welcher $\wp$-Function e_1', e_2', e_3' gehören. Multiplicirt man für irgend eine $\wp$-Function die Grössen e_α mit $\frac{1}{n^2}$, so kommt das darauf hinaus, g_2 mit $\frac{1}{n^4}$, g_3 mit $\frac{1}{n^6}$ zu multipliciren. Nun ist (S. 44 (12.))

$$\wp(u;\, g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m};\, m^4 g_2,\, m^6 g_3\right),$$

also für $m = \frac{1}{n}$:

$$(10.)\qquad \wp(u;\, g_2, g_3) = n^2\wp\left(nu;\, \frac{g_2}{n^4}, \frac{g_3}{n^6}\right).$$

Ferner war (S. 288 (2.))

$$\wp\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = n^2\wp(nu\,|\,\omega, \omega')$$

oder, falls ω, ω' durch $n\omega$, $n\omega'$ ersetzt werden,

$$(11.)\qquad \wp(u\,|\,\omega, \omega') = n^2\wp(nu\,|\,n\omega, n\omega').$$

Die Vergleichung von (10.) und (11.) liefert, wenn wieder u für nu, $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ für ω, ω' geschrieben wird:

$$(12.)\qquad \wp\left(u;\, \frac{g_2}{n^4}, \frac{g_3}{n^6}\right) = \wp(u\,|\,n\tilde{\omega}, n\tilde{\omega}').$$

Wendet man diesen Zusammenhang auf die $\wp$-Function mit dem primitiven Periodenpaar $\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}, 2\tilde{\omega}'\right)$, den Invarianten G_2, G_3 (S. 294) und den Grössen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ an, so sieht man, dass zu

$$e_\alpha' = \frac{1}{n^2}\bar{e}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Function

$$\wp(u\,|\,\tilde{\omega}, n\tilde{\omega}')$$

gehört. Diese entsteht also aus der ursprünglichen, $\wp(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, durch Multiplication einer primitiven Periode mit n, während die andere primitive Periode ungeändert bleibt.

Für $n = 2$ hängt die Function $\wp(u|\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ mit der ursprünglichen $\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ in derselben Weise zusammen wie diese mit $\wp\left(u|\tilde{\omega}, \frac{\tilde{\omega}'}{2}\right)$, nur hat man in der aus (2.) bei Vertauschung von α mit γ folgenden Gleichung

$$\wp\left(u|\tilde{\omega}, \frac{\tilde{\omega}'}{2}\right) = \wp u + \frac{(e_\alpha - e_\gamma)(e_\beta - e_\gamma)}{\wp u - e_\gamma}$$

die Grössen e_1, e_2, e_3 durch e_1', e_2', e_3' zu ersetzen, um $\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ als rationale Function von $\wp(u|\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ darzustellen. Es wird also

$$\wp(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \wp(u|\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}') + \frac{(e_\alpha' - e_\gamma')(e_\beta' - e_\gamma')}{\wp(u|\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}') - e_\gamma'}, \tag{13.}$$

und speciell für $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ und wenn noch

$$\wp(u|\omega, 2\omega') = s_1 \tag{14.}$$

gesetzt wird,

$$s = s_1 + \frac{(e_1' - e_3')(e_2' - e_3')}{s_1 - e_3'}. \tag{15.}$$

Da beständig e_1, e_2, e_3 als bekannt gelten sollen, so sind aus dieser Relation noch e_1', e_2', e_3' zu entfernen. Dazu können die Gleichungen (5.) bis (9.) und die aus der letzten Formel (4.) hervorgehende

$$e_3' = -\tfrac{1}{2} e_1$$

dienen. Es ergiebt sich

$$e_2' - e_3' = a'^2 - b'^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$(e_1' - e_3')(e_2' - e_3') = \left(\frac{a^2 - b^2}{4}\right)^2 = \frac{(e_2 - e_3)^2}{16},$$

$$s = s_1 + \frac{1}{16}\,\frac{(e_2 - e_3)^2}{s_1 + \frac{1}{2} e_1}. \tag{16.}$$

Die Gleichung lässt eine andere Deutung zu, wenn auf das Integral erster Art

$$u = \int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

zurückgegriffen wird. Da nämlich gleichzeitig

$$u = \int_\infty^{s_1} \frac{-ds_1}{\sqrt{S_1}}$$

ist, für

$$S_1 = 4(s_1 - e'_1)(s_1 - e'_2)(s_1 - e'_3),$$

und ferner vermöge der Relation (16.) $s = \infty$ und $s_1 = \infty$ zusammengehören, so kann man sagen, dass das Integral $\int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}}$ durch diese Substitution in $\int_\infty^{s_1} \frac{-ds_1}{\sqrt{S_1}}$ übergeführt wird; oder, was dasselbe ist, dass die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}$$

ein Particularlösung der Form (16.) hat.

Die Fortsetzung dieser Transformation kann zur angenäherten Berechnung eines elliptischen Integrals erster Art zweckmässig verwendet werden. Es sei

$$\wp(u \mid \omega, 4\omega') = s_2,$$

so gilt zwischen s_2 und s_1 die Beziehung

$$s_1 = s_2 + \frac{1}{16} \frac{(e'_2 - e'_3)^2}{s_2 + \frac{1}{2} e'_1}, \tag{17.}$$

und wenn e''_1, e''_2, e''_3 zu der $\wp$-Function mit den Perioden 2ω, $8\omega'$ gehören und

$$4(s_2 - e''_1)(s_2 - e''_2)(s_2 - e''_3) = S_2$$

gesetzt wird, so ergiebt sich

$$u = \int_\infty^{s_2} \frac{-ds_2}{\sqrt{S_2}}.$$

Werden noch die Grössen a'' und b'' den Formeln (6.) und (8.) entsprechend definirt, so ist

$$a'' = \tfrac{1}{2}(a' + b'),$$
$$b'' = \sqrt{a'b'}.$$

Wie die Kette von Gleichungen, die mit (16.) und (17.) beginnt, weiterzuführen ist, leuchtet unmittelbar ein. Dabei wird der Unterschied zwischen a''' und b''', $a^{(4)}$ und $b^{(4)}$, ..., kleiner und kleiner; der gemeinsame Grenzwerth heisst nach Gauss das arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Grössen a und b. Wegen

$$a^{(n)} = \sqrt{e_1^{(n)} - e_3^{(n)}},$$
$$b^{(n)} = \sqrt{e_1^{(n)} - e_2^{(n)}}$$

werden beim Übergang zur Grenze die Grössen $e_2^{(n)}$ und $e_3^{(n)}$ einander gleich, das elliptische Integral reducirt sich auf ein elementares, die $\wp$-Functionen, die die Integrationsgrenzen bilden, gehen in trigonometrische Functionen über.

Auf was für Functionen man kommt, wird am deutlichsten, wenn man u durch einen Integralausdruck ersetzt, der die Differenz $e_2 - e_3$ enthält. Es ist der, der am directesten zur Legendreschen Normalform führt,

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2)}}$$

(S. 99). Vermöge dieser Gleichung ist

$$\xi = \frac{\sigma}{\sigma_3} u,$$

und ferner war

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma} u\right)^2 = \wp u - e_3.$$

Dieselben Schlüsse wie vorher leiten demnach zu dem Ergebniss, dass die Gleichung

$$(18.)\quad \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2)}} = \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1-(e_1'-e_3')\xi_1^2)(1-(e_2'-e_3')\xi_1^2)}}$$

in Folge einer Transformation zwischen ξ und ξ_1 stattfindet, die aus (16.) und

$$(19.)\quad \frac{1}{\xi^2} = s - e_3, \quad \frac{1}{\xi_1^2} = s_1 - e_3'$$

durch Elimination von s und s_1 hervorgeht. Anstatt diese rein algebraisch auszuführen, wollen wir einen etwas anderen Weg einschlagen, auf dem sich Gelegenheit bietet, die Ausgangsgleichung (16.) in eine interessante Form zu setzen.

Die Auflösung nach s_1 liefert

$$s_1 = \frac{1}{2} s - \frac{1}{4} e_1 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(s - \frac{1}{2} e_1\right)^2 + \frac{1}{2} e_1 s - \frac{1}{16}(e_2 - e_3)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2} e_1 + \sqrt{\left(s + \frac{1}{2} e_1\right)^2 - \frac{1}{4}(e_2 - e_3)^2}\right).$$

Hier und im unmittelbar Folgenden sollen die Quadratwurzelwerthe zunächst unbestimmt gelassen werden. Der Radicandus lässt sich in zwei Factoren zerlegen,

$$s+\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}(e_2-e_3) = s-e_3,$$

$$s+\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}(e_2-e_3) = s-e_2.$$

Man erhält dann

$$s_1-e_3' = \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{2}e_1+\sqrt{(s-e_2)(s-e_3)}\right),$$

$$4(s_1-e_3') = \left(\sqrt{s-e_2}+\sqrt{s-e_3}\right)^2,$$

$$\sqrt{s_1-e_3'} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s-e_2}+\sqrt{s-e_3}\right).$$

Nunmehr setze man

$$\sqrt{\wp u-e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u$$

und belege die zu s_1 gehörenden σ-Functionen mit einem oberen Index 1; dann folgt schliesslich

$$\frac{\sigma_3^{(1)}}{\sigma^{(1)}}u = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}u+\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right). \tag{20.}$$

In dieser Formel ist das Vorzeichen richtig bestimmt, denn die linke und die rechte Seite beginnen mit u^{-1}.

Werden jetzt ξ und ξ_1 vermöge (19.) eingeführt und die Relation

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}u\right)^2-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right)^2+e_2-e_3 = 0$$

benutzt, so ergiebt sich durch Auflösung nach ξ

$$\xi = \frac{\xi_1}{1+\frac{e_2-e_3}{4}\xi_1^2}. \tag{21.}$$

Dies ist die Substitution, die die Gleichung (18.) nach sich zieht.

Setzt man

$$e_2-e_3 = a^2-b^2 = c^2$$

und entsprechend

$$e_2'-e_3' = a'^2-b'^2 = c'^2,$$

so kann man das Ergebniss dahin aussprechen, dass die Gleichung

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-a^2\xi^2)(1-c^2\xi^2)}} = \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1-a'^2\xi_1^2)(1-c'^2\xi_1^2)}}$$

vermöge der speciellen rationalen Substitution

$$\xi = \frac{\xi_1}{1+\frac{c^2}{4}\xi_1^2}$$

stattfindet. Die Grössen a', c' sind dabei mit den ursprünglichen a, c durch die Relationen

$$a' = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right),$$

$$c' = \frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-c^2}\right)$$

verbunden.

Bei Fortsetzung der Transformation und Übergang zur Grenze tritt schliesslich Null an die Stelle von c, und das elliptische Integral geht in einen Arcussinus über.

Durch eine weitere Veränderung der Bezeichnungen kann man mittels dieser Resultate den von Gauss gefundenen Ausdruck für das arithmetisch-geometrische Mittel ableiten. Einfacher aber gelangt man zu dieser Grösse, wenn man sich der ϑ-Functionen bedient. Es war (S. 172)

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = \vartheta_2(0|\tau),$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \vartheta_3(0|\tau),$$

mithin wird

$$a = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0|\tau),$$

$$b = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0|\tau).$$

Denn dass hierin die linken Seiten die positiven Werthe der Quadratwurzeln aus e_1-e_3 und e_1-e_2 bedeuten, leuchtet ein.

Der Übergang zu den Grössen e_1', e_2', e_3', d. h. zu a' und b' war gleichbedeutend mit der Multiplication der Periode $2\omega'$ mit Zwei. Wegen

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

ist also

$$a' = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0\,|\,2\tau),$$

$$b' = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau),$$

und allgemein

$$a^{(n)} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2(0\,|\,2^n\tau),$$

$$b^{(n)} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2(0\,|\,2^n\tau).$$

Nun gelten für

$$h = e^{\tau\pi i} = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}$$

die Reihenentwickelungen

$$\vartheta_3(0\,|\,\tau) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots,$$
$$\vartheta_3(0\,|\,\tau) = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots.$$

Bei der Multiplication von τ mit 2^n tritt h^{2^n} an die Stelle von h und wird wegen $|h| < 1$ mit unbegrenzt wachsendem n beliebig klein, die beiden Reihen reduciren sich auf ihr Anfangsglied Eins, und es kommt

$$\lim_{n=\infty} a^{(n)} = \lim_{n=\infty} b^{(n)} = \frac{\pi}{2\omega}. \tag{22.}$$

Die Darstellung des arithmetisch-geometrischen Mittels von a und b durch ein elliptisches Integral ist damit gefunden, denn es ist

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(e_1 - e_3 - (e_2 - e_3)\xi^2)}}$$

oder in den hier gebrauchten Bezeichnungen

$$\omega = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(a^2 - (a^2 - b^2)\xi^2)}}. \tag{23.}$$

ALPHABETISCHES INHALTS-VERZEICHNISS.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).