MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

SECHSTER BAND.

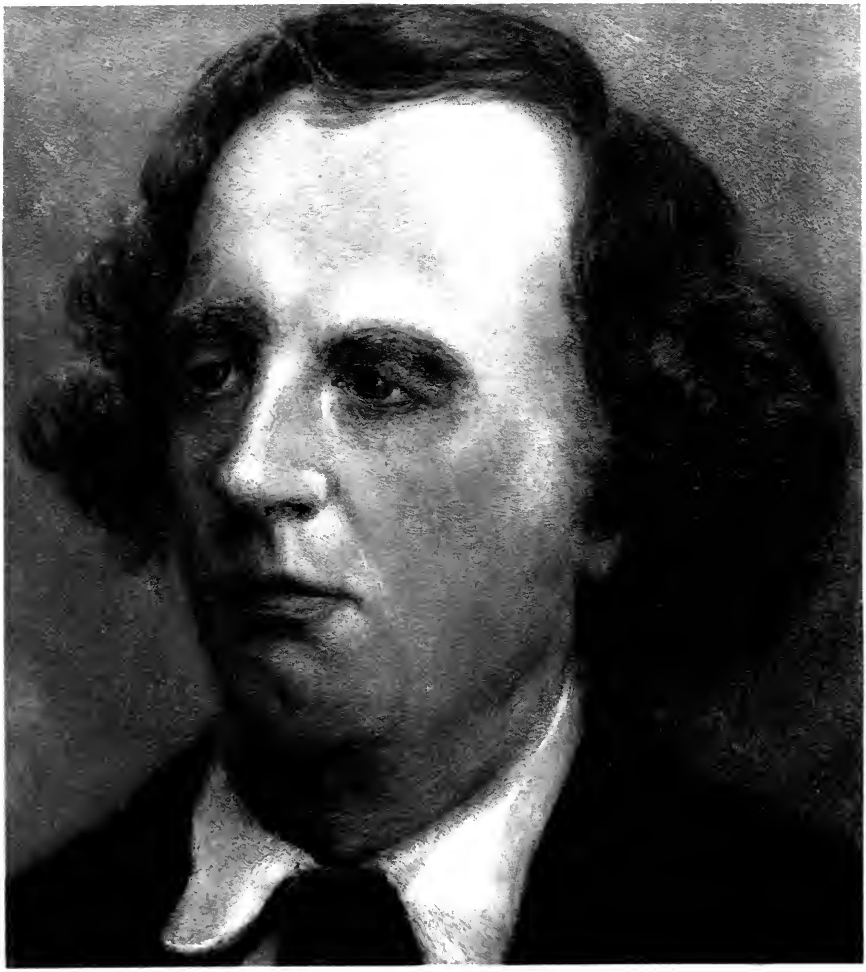
VORLESUNGEN

ÜBER

ANWENDUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

MIT EINEM BILDNISS VON WEIERSTRASS.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1915.



Karl Weitbrecht

VORLESUNGEN

ÜBER

ANWENDUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

VON

KARL WEIERSTRASS.

BEARBEITET

VON

RUDOLF ROTHE.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1915.

VORWORT.

Die vorliegende Bearbeitung der Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Functionen ist aus folgenden Quellen entstanden:

für den grössten Theil, nämlich den ersten, zweiten, dritten und sechsten Abschnitt, sowie das vierundzwanzigste bis siebenundzwanzigste Kapitel ist eine von Georg Hettner angefertigte Ausarbeitung der Vorlesung benutzt worden, die Weierstrass im Sommer 1875 unter dem Titel »Ausgewählte, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen zu lösende Probleme der Geometrie und Mechanik« gehalten hat;

für die drei ersten Abschnitte ferner ein Quartheft mit Aufzeichnungen, die von Weierstrass selbst für Vorlesungszwecke niedergeschrieben worden sind;

für das zehnte Kapitel und den siebenten Abschnitt eine im Besitze des Mathematischen Vereins in Berlin befindliche Ausarbeitung ohne Jahreszahl;

für den fünften Abschnitt eine von Herrn H. A. Schwarz angefertigte Abschrift eines Heftes von Weierstrass aus dem Jahre 1884, sowie eines Manuscriptes von Weierstrass aus dem Jahre 1888, das dieser Sophie v. Kovalevski übergeben hatte;

für das achtundzwanzigste und neunundzwanzigste Kapitel eine von Herrn C. Weltzien verfertigte Nachschrift einer Vorlesung aus dem Sommer 1873;

für den neunten Abschnitt eine Ausarbeitung von Herrn Felix Müller aus dem Sommersemester 1865, zum Theil auch eine Ausarbeitung von Herrn L. Kiepert aus dem Jahre 1869;

das elfte bis dreizehnte Kapitel endlich sind, von redactionellen Änderungen abgesehen, aus Schellbachs Lehre von den elliptischen Integralen und Thetafunctionen (Berlin 1864) übernommen worden, wo der Inhalt als von Weierstrass herrührend bezeichnet ist.

Ausser den erwähnten Aufzeichnungen haben sich in Weierstrass' Nachlass keinerlei Schriften gefunden, die hier hätten benutzt werden können.

Johannes Knoblauch hat bis zu seinem Tode mit derselben Hingebung, die er seit langen Jahren bei der Herausgabe dieser Werke bewiesen hat, und mit der ihm eigenen Sorgfalt auch an dem vorliegenden Bande mitgearbeitet: durch mannigfache Rathschläge bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes, durch sachliche Prüfung des Textes und durch Correcturenlesen (bis zum neunundzwanzigsten Bogen). Es entsprach seinem Wunsche, dass dieser Band zu Weierstrass' hundertstem Geburtstage fertiggestellt werde.

Berlin, den 31. October 1915.

Rudolf Rothe.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Seite

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Neunter Abschnitt.

EINLEITUNG.

In diesen Vorlesungen sollen vorzugsweise Probleme der Geometrie und der analytischen Mechanik behandelt werden, die sich mit Hilfe der elliptischen Transcendenten lösen lassen. Anwendungen auf die Algebra und die Zahlentheorie werden nur soweit zur Sprache kommen, als sie mit den betrachteten geometrischen und mechanischen Aufgaben im Zusammenhange stehen. Schliesslich sollen, meist ebenfalls in Verbindung mit den genannten Aufgaben, einige specielle Fragen aus der Theorie der elliptischen Integrale und Functionen selbst erörtert werden.

Mehrere der hier behandelten Probleme aus der Geometrie und Mechanik kommen in ihren Anfängen schon bei Legendre in seinem classischen Werke Traité des fonctions elliptiques vor. Unter elliptischen Functionen versteht bekanntlich Legendre das, was wir heute als elliptische Integrale bezeichnen, nicht die Umkehrungsfunctionen. Diese sind erst kurz vor dem Erscheinen des Traité von Abel und Jacobi entdeckt worden. Dem Stande der damaligen Kenntnisse entsprechend führt daher Legendre die Aufgaben, um die es sich handelt, in der Regel auf elliptische Integrale zurück. Heute ist es leicht, einzusehen, dass es oft zweckmässiger und in der Natur der Aufgabe besser begründet ist, an Stelle der Integrale die Umkehrungsfunctionen zu benutzen. Wenn man, um ein Beispiel anzuführen, bei dem Problem des gewöhnlichen mathematischen Pendels den Sinus oder Cosinus des Ausschlagswinkels in die Rechnung einführt, so wird die Schwingungszeit durch ein elliptisches Integral erster Art dargestellt. Dadurch beantwortet sich die Frage, zu welcher Zeit sich der bewegliche Punkt an einem gegebenen Orte befindet.

Aber ohne Zweifel entspricht es dem physikalischen Sinne der Aufgabe mehr, nach dem Orte zu fragen, den der bewegliche Punkt einnimmt, wenn die Zeit gegeben ist. Und die Beantwortung dieser Frage geschieht mittels einer einfachen elliptischen Function.

Aber auch da, wo die Zurückführung der Aufgabe auf elliptische Integrale ausreicht, erlaubt uns unsere jetzige genauere Kenntniss der Theorie der elliptischen Integrale, die Lösung vollständiger durchzuführen, als es zu Legendres Zeiten möglich war. Legendre kannte z. B. den Satz noch nicht, dass die Berechnung aller elliptischen Integrale auf die der ersten Art gegründet werden kann, d. h., in der hier benutzten Bezeichnungsweise, auf die Bestimmung von u aus der Gleichung

$$\wp u = s$$

bei gegebenem Werthe von s. Die Einführung des elliptischen Integrals erster Art, u, in die Darstellung der Integrale zweiter und dritter Art rührt ebenfalls von Abel und Jacobi her. In den seltensten Fällen allerdings wird eine Gleichung der vorstehenden Gestalt unmittelbar durch den Ansatz der Aufgabe gegeben sein, vielmehr wird es sich in der Regel zunächst um irgend ein elliptisches Integral der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

unter $R(x)$ eine ganze rationale Function vierten Grades verstanden, und um dessen Umkehrung handeln. Dann hat der Auflösung jener Gleichung die Transformation des Differentials

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in die Normalform

$$\frac{-ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

voranzugehen. Dieses Problem ist im ersten Kapitel der Elliptischen Functionen (Band V dieser Ausgabe, im Folgenden mit E. F. citirt), die Berechnung der elliptischen Integrale erster Art im neunundzwanzigsten Kapitel behandelt worden, worauf hier besonders verwiesen sei.

Erster Abschnitt.

DER FLÄCHENINHALT DES MANTELS EINES SCHIEFEN KEGELS MIT KREISFÖRMIGER GRUNDFLÄCHE.

Erstes Kapitel.

Darstellung des Mantels eines schiefen Kreiskegels durch ein elliptisches Integral dritter Art.

Es seien f, g, h eindeutige reguläre Functionen zweier reeller und von einander unabhängiger Veränderlicher u, v. Man setze

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$

und ertheile u, v alle Werthepaare eines bestimmten Bereiches. Denkt man sich u, v als cartesische Coordinaten eines Punktes einer Ebene, so entspricht jedem Punkte (u, v) dieser Ebene ein Punkt (x, y, z) einer Fläche und jedem begrenzten Theil (E) der Ebene ein begrenztes Stück der Fläche. Wird nun

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

gesetzt, so ist

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

mithin gilt für das Oberflächenelement der Ausdruck

$$\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

und der Inhalt des Theils der Oberfläche, der dem begrenzten Stück (E) der Ebene der Variablen u, v entspricht, wird

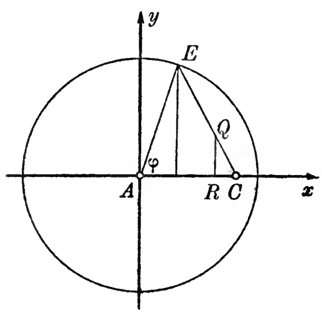
$$J = \int\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

wobei die Integration über den Bereich (E) zu erstrecken und der positive Wurzelwerth zu benutzen ist.

Dies möge nun auf die Berechnung des Mantels eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis angewendet werden.

Die Grundfläche des Kegels sei der Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt A. Die Spitze des Kegels heisse B, das Loth von B auf die Ebene der Grundfläche treffe diese in C; ferner sei die Höhe $BC = c$, und $AC = a$.

Das cartesische Coordinatensystem habe den Anfangspunkt A. Die positive Richtung der x-Axe sei AC, die der y-Axe sei in der Ebene des Grundkreises so gelegen, dass sie, von der Spitze des Kegels aus gesehen, gegen die positive Richtung der x-Axe unter einem rechten Winkel im positiven Sinne, wie ihn die Figur angiebt, gedreht erscheint. Endlich sei die positive Richtung der z-Axe parallel zur Geraden CB. Man nehme nun einen Punkt P auf dem Kegelmantel beliebig an. Die durch ihn und die Spitze gehende Gerade treffe den Grundkreis in E. Man zeichne ferner die



Figur 1.

drei Coordinaten von P so, dass $AR = x$, $RQ = y$, $QP = z$ wird. Dann liegt der Punkt Q auf der Verbindungsgeraden von E mit C.

Die Figur soll die Grundebene des Kegels, von der Spitze aus gesehen, darstellen.

Aus dem Dreieck ACE, in dem der Winkel bei A, im positiven Drehungssinn gemessen, mit φ bezeichnet werden möge, ergiebt sich, nachdem noch von E das Loth auf AC gefällt ist,

$$x = AC - RC = a - \frac{y}{r \sin \varphi}(a - r\cos\varphi),$$

$$\frac{y}{r\sin\varphi} = \frac{QC}{EC} = \frac{c-z}{c},$$

oder

$$x = a - \frac{c-z}{c}(a - r\cos\varphi),$$

$$y = r\sin\varphi\,\frac{c-z}{c}.$$

Setzt man also

$$\frac{c-z}{c} = t,$$

so wird

$$x = a - t(a - r\cos\varphi),$$
$$y = rt\sin\varphi,$$
$$z = c - ct.$$

Diese Gleichungen stellen die Coordinaten eines willkürlichen Punktes der Kegelfläche eindeutig als Functionen der beiden unabhängigen Variablen t und φ dar, falls $c > 0$, wie zunächst angenommen werden soll. Aus den Formeln folgt

$$dx = -(a - r\cos\varphi)\,dt - rt\sin\varphi\,d\varphi,$$
$$dy = r\sin\varphi\,dt + rt\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$dz = -c\,dt,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ((a - r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi + c^2)\,dt^2 + 2art\sin\varphi\,dt\,d\varphi + r^2t^2\,d\varphi^2,$$

mithin

$$E = a^2 + c^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi,$$
$$F = art\sin\varphi,$$
$$G = r^2t^2,$$
$$EG - F^2 = r^2t^2(c^2 + (a\cos\varphi - r)^2).$$

Wenn z stetig wachsend alle Werthe von 0 bis c durchläuft, so geht t stetig abnehmend von 1 bis 0. Der Flächeninhalt des Kegelmantels ist demnach

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{c^2 + (a\cos\varphi - r)^2}\, r\, t\, dt$$

oder

$$J = \frac{1}{2} r \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 + (a\cos\varphi - r)^2}\, d\varphi,$$

worin der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Diesen Ausdruck hätte man auch direct durch Zerlegung des Kegelmantels von der Spitze aus in unendlich schmale Dreiecke mittels einer einfachen geometrischen Überlegung finden können. Wenn man das Integrationsintervall in zwei Theile zerlegt, von 0 bis π und von π bis 2π, und in dem zweiten Integrale statt $2\pi - \varphi$ wieder φ schreibt, so nimmt J die Form

$$(1.)\qquad J = r \int_0^{\pi} \sqrt{c^2 + (a\cos\varphi - r)^2}\, d\varphi$$

an.

Um die Berechnung dieses Integrales mit Hilfe der elliptischen Transscendenten wird es sich im Folgenden handeln.

Man setze

$$\cos\varphi = x;$$

da φ stetig von 0 bis π geht, so durchläuft x stetig abnehmend den Bereich $+1$ bis -1, und es ist $\sqrt{1-x^2} = \sin\varphi$ stets positiv. Das Integral (1.) geht dadurch in

$$J = r \int_{-1}^{+1} \sqrt{c^2 + (ax - r)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder, für

$$R(x) = (1-x^2)(c^2 + (ax-r)^2),$$

in

$$(2.)\qquad J = r \int_{-1}^{+1} \frac{c^2 + (ax-r)^2}{\sqrt{R(x)}}\, dx$$

über. Wenn a von Null verschieden vorausgesetzt wird, so ist $R(x)$ wirklich vom vierten Grade, und man erkennt, dass es sich um ein elliptisches Integral handelt, mit der besonderen Eigenthümlichkeit, dass die ganze Function $R(x)$

an den Integrationsgrenzen -1 und $+1$ verschwindet, während sie dazwischen beständig positiv ist.

Elliptische Integrale dieser Art, deren allgemeinere Form

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}} dx$$

ist, wo a_1 und a_2 zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung $R(x) = 0$, und $F(x)$ eine ganze rationale Function beliebigen Grades bedeuten, kommen bei vielen Aufgaben vor, z. B. bei der Bestimmung der Oberfläche des Ellipsoids (vgl. das vierte Kapitel), des Potentials des Ellipsoids (siebentes Kapitel), ferner bei der Berechnung des Inhalts eines Flächenstücks auf einer Kugel, das von einem sphärischen Kegelschnitt begrenzt wird, bei der Bestimmung des Umfangs eines sphärischen Kegelschnitts. Integrale der genannten Art sollen daher im Folgenden etwas eingehender untersucht werden, als es für die ursprünglich gestellte Aufgabe erforderlich wäre.

Die Coefficienten der ganzen Function vierten Grades $R(x)$ seien als reelle Grössen vorausgesetzt. In der Lehre von der Transformation der elliptischen Differentiale (E. F. Kap. 1) wird gezeigt, dass derartige Integrale durch eine lineare Substitution auf solche zurückführbar sind, in denen

$$\sqrt{S} = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

statt $\sqrt{R(x)}$ auftritt, wobei g_2 und g_3 wieder reelle Werthe haben. Den ursprünglichen Grenzen a_1 und a_2 können in dem transformirten Integral die Grenzen ∞ und e_α entsprechen, wo e_α ($\alpha = 1, 2, 3$) eine der drei Wurzeln der Gleichung $S = 0$ bedeutet. Und zwar kann man die Grenze e_α gleich e_1 nehmen, wenn alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell sind, wobei dann $e_1 > e_2 > e_3$ sein möge, und es ist $e_\alpha = e_2$ zu setzen, wenn nur eine der drei Wurzeln, nämlich e_2, reell, die beiden andern also conjugirt complex sind. Das transformirte Integral ist demnach von der Form

$$\int_{e_1}^{\infty} f(s) \frac{ds}{\sqrt{S}} \quad \text{oder} \quad \int_{e_2}^{\infty} f(s) \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wobei $f(s)$ eine ganze rationale Function ihres Arguments bedeutet.

Man bezeichne mit a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Werthe von x, für die $R(x)$

verschwindet. In der behandelten speciellen Aufgabe sei

$$(3.)\qquad a_1 = -1,\quad a_2 = +1,\quad a_3 = \frac{r-ic}{a},\quad a_4 = \frac{r+ic}{a}.$$

Man benutze jetzt die Transformationsformeln (E. F. S. 15 (VI.))

$$(4.)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{1}{4}\dfrac{R'(a_1)}{x-a_1} + \dfrac{1}{24}R''(a_1) \\ \sqrt{S} = \dfrac{1}{4}\dfrac{R'(a_1)}{(x-a_1)^2}\sqrt{R(x)}, \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Für $x = a_1$ wird $s = \infty$. Ferner bezeichne man die zu x gleich

$$a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \infty$$

gehörenden Werthe von s mit

$$e_2,\quad e_1,\quad e_3,\quad s_0.$$

Wenn x stetig von a_1 bis a_2 geht, so durchläuft s stetig abnehmend alle Werthe von ∞ bis e_2. Es wird daher

$$\int_{a_1}^{a_2} F(x)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{\infty}^{e_2} f(s)\frac{-ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{\infty} f(s)\frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Führt man in der ersten Formel (4.) für x der Reihe nach a_2, a_3, a_4 ein und subtrahirt, so folgt

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{a_2-a_1} - \frac{1}{a_3-a_1}\right),$$

$$e_2 - e_3 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{a_2-a_1} - \frac{1}{a_4-a_1}\right),$$

$$e_1 - e_3 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{a_3-a_1} - \frac{1}{a_4-a_1}\right),$$

oder wenn man

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4),$$

also

$$R'(a_1) = A(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)$$

setzt,

$$(5.)\quad \begin{cases} e_2 - e_1 = -\frac{1}{4} A(a_1 - a_4)(a_2 - a_3) \\ e_2 - e_3 = -\frac{1}{4} A(a_1 - a_3)(a_2 - a_4) \\ e_1 - e_3 = -\frac{1}{4} A(a_2 - a_1)(a_4 - a_3). \end{cases}$$

Ferner ist

$$s_0 = \frac{1}{24} R''(a_1),$$

$$e_2 - s_0 = \frac{1}{4} \frac{R'(a_1)}{a_2 - a_1},$$

d. h.

$$e_2 - s_0 = -\frac{1}{4} A(a_1 - a_3)(a_1 - a_4).$$

Diese Formeln gelten sämmtlich ganz allgemein unter den angegebenen Voraussetzungen. Man zieht aus ihnen unmittelbar die nachstehenden Folgerungen. Sind alle vier Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 reell, so sind auch die drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell. Sind a_1 und a_2 reell, dagegen a_3 und a_4 conjugirt complex, wie das z. B. bei der hier behandelten Aufgabe der Fall ist, dann ist $e_1 - e_3$ rein imaginär, $e_2 - e_1$ und $e_2 - e_3$ aber sind conjugirt complex, demnach e_2 reell und e_1 und e_3 conjugirt complex. Ist keine der vier Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 reell, und sind a_1, a_2 und ebenso a_3, a_4 paarweise conjugirt, so werden $a_1 - a_4$, $a_2 - a_3$ und $a_2 - a_4$, $a_1 - a_3$ paarweise conjugirt complex, demnach ihre Producte und also auch $e_2 - e_1$ und $e_2 - e_3$ reell; weiter werden in diesem Falle $a_2 - a_1$ und $a_4 - a_3$ rein imaginär, demnach ihr Product und $e_1 - e_3$ reell. Dann sind also alle drei Differenzen $e_2 - e_1$, $e_2 - e_3$, $e_1 - e_3$ reell, und wegen der Relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

müssen auch e_1, e_2, e_3 selbst reell sein.

Das Ergebniss ist also: Unter der Voraussetzung reeller Coefficienten der ganzen Function vierten Grades $R(x)$ werden bei der Substitution (4.) die drei Grössen e_α sämmtlich reell, wenn die Gleichung $R(x) = 0$ entweder nur reelle oder nur complexe Wurzeln hat; dagegen wird eine der Grössen e_α reell und die beiden anderen conjugirt complex, wenn $R(x) = 0$ zwei reelle und zwei complexe Wurzeln hat. Dieses Ergebniss bleibt bestehen, wenn in der Substitution (4.) an Stelle von a_1 irgend eine der vier Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ gesetzt wird.

Aus den Transformationsformeln (4.) ergiebt sich weiter

$$s-e_1 = \frac{1}{4}R'(a_1)\left(\frac{1}{x-a_1}-\frac{1}{a_3-a_1}\right)$$

oder

$$s-e_1 = \frac{1}{4}A(a_1-a_2)(a_1-a_4)\frac{x-a_3}{x-a_1},$$

und ebenso

$$s-e_2 = \frac{1}{4}A(a_1-a_3)(a_1-a_4)\frac{x-a_2}{x-a_1},$$

$$s-e_3 = \frac{1}{4}A(a_1-a_2)(a_1-a_3)\frac{x-a_4}{x-a_1},$$

endlich

$$(6.)\qquad s-s_0 = \frac{1}{4}A\frac{R'(a_1)}{x-a_1} = \frac{1}{4}A\frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}{x-a_1}.$$

Daraus folgt

$$(7.)\qquad \frac{(s-e_1)(s-e_3)}{(s-s_0)^2} = \frac{(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}.$$

Von diesen Formeln werde jetzt für die hier vorliegende Aufgabe Gebrauch gemacht. Es ist

$$c^2+(ax-r)^2 = a^2\left(\left(x-\frac{r}{a}\right)^2+\frac{c^2}{a^2}\right) = a^2(x-a_3)(x-a_4).$$

Mit Benutzung der Formel (7.) führt daher die Transformation (4.) das Integral (2.) in die Gestalt

$$(8.)\qquad J = ra^2(a_1-a_3)(a_1-a_4)\int_{e_2}^{\infty}\frac{(s-e_1)(s-e_3)}{(s-s_0)^2}\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

über. Man könnte nun nach dem in der Theorie der elliptischen Functionen (E. F. S. 228—229) auseinandergesetzten Verfahren, indem man

$$s = \wp u, \qquad \sqrt{S} = -\wp' u$$

setzt, die Function unter dem Integralzeichen in eine elliptische Function überführen, und deren Integral mit Hilfe von Sigmafunctionen berechnen. Das Ergebniss würde von der Form

$$J = c_0 u + c'\frac{\sigma'}{\sigma}u + \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \log\sigma(u-v_\lambda) + f(\wp u, \wp' u)$$

sein, wo $c_0, c', c_1, \dots c_m$ gegebene Constanten bedeuten, während $v_1, \dots v_m$ die sämmtlichen nicht congruenten Stellen von u sind, an denen die zu integrirende elliptische Function unendlich gross wird. Unter f ist eine rationale Function ihrer Argumente verstanden, in die zugleich auch die Integrationsconstante aufgenommen worden ist.

Es ist indessen lehrreich, das Integral (8.) ohne Benutzung jener allgemeinen Methoden zu behandeln, und das soll jetzt geschehen.

Man hat

$$\begin{aligned} d\frac{\sqrt{S}}{s-s_0} &= \left(-\frac{S}{(s-s_0)^2}+\frac{1}{2}\frac{S'}{s-s_0}\right)\frac{ds}{\sqrt{S}} \\ &= \left(-\frac{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}{(s-s_0)^2}+\frac{6s^2-\frac{1}{2}g_2}{s-s_0}\right)\frac{ds}{\sqrt{S}} \\ &= \left(-\frac{4(s-e_1)(s_0-e_2)(s-e_3)}{(s-s_0)^2}+\frac{6s^2-\frac{1}{2}g_2-4(s-e_1)(s-e_3)}{s-s_0}\right)\frac{ds}{\sqrt{S}}. \end{aligned}$$

Das zweite Glied in der Klammer nimmt in Folge der Formel

$$g_2 = -4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1) = -4(e_1e_3-e_2^2)$$

den Werth

$$\frac{2s^2-4e_2s-2(e_1e_3+e_2^2)}{s-s_0}$$

an, der für

$$(9.)\qquad 2((s_0-e_2)^2-(e_1e_3+2e_2^2)) = l$$

oder

$$(2s_0-4e_2)s_0-2e_1e_3-2e_2^2 = l$$

in

$$2(s+s_0)-4e_2+\frac{l}{s-s_0}$$

übergeht. Aus der so entstehenden Gleichung kann man den Ausdruck unter dem Integralzeichen in der Formel (8.) berechnen:

$$\frac{(s-e_1)(s-e_3)}{(s-s_0)^2}\frac{ds}{\sqrt{S}} = -\frac{1}{4(s_0-e_2)}\left(d\frac{\sqrt{S}}{s-s_0}-(2(s+s_0)-4e_2)\frac{ds}{\sqrt{S}}-\frac{l}{s-s_0}\frac{ds}{\sqrt{S}}\right),$$

und erhält

$$J = -\frac{a^2r(a_1-a_3)(a_1-a_4)}{4(s_0-e_2)}\int_{e_1}^{\infty}\left(\frac{d}{ds}\frac{\sqrt{S}}{s-s_0}-\frac{2(s+s_0)-4e_2}{\sqrt{S}}-\frac{l}{(s-s_0)\sqrt{S}}\right)ds.$$

Der Factor vor dem Integralzeichen lässt sich noch vereinfachen. Ertheilt man nämlich in (6.) x den Werth a_2, also s den entsprechenden Werth e_2, so kommt entsprechend der Formel auf S. 9, da

$$A = -a^2$$

ist,

$$s_0 - e_2 = -\frac{1}{4} a^2 (a_1 - a_3)(a_1 - a_4). \tag{10.}$$

Daher wird

$$J = r\int_{e_2}^{\infty} \left(\frac{d}{ds} \frac{\sqrt{S}}{s - s_0} - \frac{2s}{\sqrt{S}} \right) ds + r(-2s_0 + 4e_2) \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} - rl \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{(s - s_0)\sqrt{S}}. \tag{11.}$$

Von den drei hier auftretenden Integralen kann man zunächst die beiden ersten sehr einfach berechnen, indem man das elliptische Integral erster Art

$$u = \int_{\infty} \frac{-ds}{\sqrt{S}},$$

d. h.

$$s = \wp u$$

einführt. Dadurch wird nämlich

$$\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = -\wp u\, du = d\left(\frac{\sigma'}{\sigma} u\right);$$

die unbestimmte Integration ist sofort ausführbar und liefert, vom Faktor r abgesehen,

$$\frac{\sqrt{S}}{s - s_0} - 2\frac{\sigma'}{\sigma} u - (-2s_0 + 4e_2) u.$$

Dieser Ausdruck ist nun zwischen den Grenzen $s = e_2$ und $s = \infty$ zu nehmen. Setzt man

$$\int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_2,$$

so ist ω_2 der kleinste positive Werth von u, der zu dem Werthe $s = e_2$ gehört, während dem Werthe $s = \infty$ der kleinste Werth $u = 0$ zukommt, und man erhält für den obigen Ausdruck

$$\left[\frac{\sqrt{S}}{s - s_0} - 2\frac{\sigma'}{\sigma} u \right]_{u = \omega_2}^{u = 0} - 2(s_0 - 2e_2)\,\omega_2.$$

Nun ist

$$\sqrt{S} = -\wp' u = \frac{2}{u^3} + \cdots,$$

$$\frac{1}{s-s_0} = u^2 + \cdots,$$

$$\frac{\sqrt{S}}{s-s_0} = \frac{2}{u} + \cdots,$$

andererseits

$$\frac{\sigma'}{\sigma} u = \frac{1}{u} + \cdots;$$

die nicht hingeschriebenen Glieder enthalten keine Potenzen von u mit negativen Exponenten. Das ist also auch der Fall bei der Function

$$\frac{\sqrt{S}}{s-s_0} - 2\frac{\sigma'}{\sigma} u.$$

Da sie ferner ungerade ist, verschwindet sie für $u = 0$. Für $u = \omega_2$, d. h. $s = e_2$, ist $\sqrt{S}$ gleich Null. Setzt man noch

$$\frac{\sigma'}{\sigma} \omega_2 = \eta_2,$$

so ergiebt sich für den obigen Ausdruck der Werth

$$2\eta_2 - 2(s_0 - 2e_2)\omega_2.$$

Führt man ihn nach Multiplication mit r an Stelle der beiden ersten Integrale in (11.) ein, so kommt

$$J = 2r(\eta_2 - (s_0 - 2e_2)\omega_2) - rl\int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{(s-s_0)\sqrt{S}}. \tag{12.}$$

Die Berechnung des dritten Integrals ist zwar weniger einfach, bietet aber Anlass zu weitergehenden Untersuchungen und ist deswegen von Wichtigkeit. Es empfiehlt sich, statt des in (12.) vorkommenden Integrals das mit $-\sqrt{S_0} = -\sqrt{4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3}$ multiplicirte, also

$$-\int_{e_2}^{\infty} \frac{\sqrt{S_0}\,ds}{(s-s_0)\sqrt{S}}$$

zu betrachten. Es ist ein elliptisches Integral dritter Art von der besonderen Eigenschaft, dass die Function unter dem Integralzeichen an der einen Grenze unendlich gross, an der anderen Null wird.

Zuvor mag noch der Werth des hinzugenommenen Factors $\sqrt{S_0}$ für die spezielle Aufgabe bestimmt werden. Aus den Formeln (5.) folgt, wenn man für a_1, a_2, a_3, a_4 ihre Werthe (3.) und für A, wie schon vorher, den Werth $-a^2$ einsetzt,

$$(13.)\quad \begin{cases} e_2-e_1 = \frac{1}{4}(r^2-a^2+c^2-2iac) \\ e_1-e_3 = iac \\ e_2-e_3 = \frac{1}{4}(r^2-a^2+c^2+2iac), \end{cases}$$

woraus für die in l vorkommende Grösse

$$e_1e_3+2e_2^2 = (e_2-e_1)(e_2-e_3)$$

der Ausdruck

$$e_1e_3+2e_2^2 = \frac{1}{16}((r^2-a^2+c^2)^2+4a^2c^2) = \frac{1}{16}(c^2+(a+r)^2)(c^2+(a-r)^2)$$

folgt. Die Gleichung (10.) ergiebt

$$(14.)\quad s_0-e_2 = -\frac{1}{4}(c^2+(a+r)^2),$$

und dann die Gleichung (9.):

$$l = \frac{1}{2}ar(c^2+(a+r)^2).$$

Dies vorausgeschickt, kann man nun die Grösse $\sqrt{S_0}$ aus dem Ausdruck (4.) für $\sqrt{S}$ durch einen Grenzübergang ermitteln. Dem Werthe s_0 von s entspricht nämlich $x=\infty$, also wird

$$\sqrt{S_0} = \frac{1}{4}R'(a_1).\lim_{x=\infty}\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a_1)^2} = \frac{1}{4}R'(a_1).ai.$$

Aber es ist

$$R'(a_1) = -a^2(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4) = 2(c^2+(a+r)^2)$$

oder

$$\frac{1}{4}R'(a_1) = \frac{l}{ar},$$

somit

$$\sqrt{S_0} = i\frac{l}{r}.$$

Entnimmt man hieraus den Werth von l und führt ihn in (12.) ein, so wird schliesslich

$$(15.)\quad J = 2r(\eta_2-(s_0-2e_2)\omega_2)+ir^2\int_{e_2}^{\infty}\frac{\sqrt{S_0}\,ds}{(s-s_0)\sqrt{S}}.$$

Zweites Kapitel.

Berechnung des elliptischen Integrals $\int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du.$

Um das in der letzten Formel für den Kegelmantel noch stehengebliebene elliptische Integral dritter Art

$$\int_{e_2}^{\infty} \frac{\sqrt{S_0}}{(s-s_0)\sqrt{S}} ds$$

zu berechnen, setze man wieder

$$\begin{aligned} s &= \wp u, & \sqrt{S} &= -\wp' u, \\ s_0 &= \wp u_0, & \sqrt{S_0} &= -\wp' u_0 \end{aligned}$$

und beachte, dass den Grenzwerthen e_2 und ∞ der Variablen s die Werthe ω_2 und 0 der Variablen u entsprechen. Der Werth des Integrals geht, abgesehen vom Vorzeichen, in

$$\int_0^{\omega_2} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du$$

über. Integrale dieser Form treten häufig bei Problemen auf, die sich mittels elliptischer Transcendenten lösen lassen. Wir wollen daher das allgemeinere Integral

$$\int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du,$$

in dem $\tilde{\omega}$ eine beliebige halbe Periode der $\wp$-Function bedeutet, den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen. Die Integrationsvariable u, ebenso wie die Constante u_0, möge dabei als complex betrachtet werden; doch soll u bei der Integration den geraden Weg von 0 nach $\tilde{\omega}$ durchlaufen, was für das Folgende festzuhalten ist. Die Berechnung dieses Integrals ist an sich sehr einfach, nur die Bestimmung einer Constanten erfordert eine besondere Überlegung.

Aus der Formel E. F. S. 37 (15.),

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

und derjenigen, die daraus durch Vertauschung von v mit $-v$ hervorgeht, folgt durch Addition, wenn man noch u_0 für v schreibt:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) + 2\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 = \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0};$$

übrigens ist diese Formel bereits a. a. O. zu finden. Die unbestimmte Integration liefert

$$\int \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du = \log \frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)} + 2u\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 + C.$$

Die Integration hat für das vorgelegte Integral bei $u = 0$ zu beginnen, wobei die Integrationsconstante C sich als ein ungerades Vielfaches von πi ergiebt, und ist bis $\tilde{\omega}$ zu erstrecken. Nun ist nach E. F. S. 71, für

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega} = \tilde{\eta}:$$

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = \pm e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(u-\tilde{\omega}),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $\sigma\tilde{\omega}$ verschwindet oder nicht, d. h. jenachdem $\tilde{\omega}$ selbst schon eine Periode ist oder nicht. Der Einfachheit wegen werde hier angenommen, $\tilde{\omega}$ sei eine primitive Halbperiode; dann gilt in der vorstehenden Formel das untere Vorzeichen. Es folgt:

$$\log \frac{\sigma(u_0-\tilde{\omega})}{\sigma(u_0+\tilde{\omega})} = -2\tilde{\eta}u_0 + (2k+1)\pi i,$$

unter k eine reelle ganze Zahl verstanden. Demnach erhält man, den Werth der Integrationsconstanten in das letzte Glied mit aufnehmend,

$$(1.) \qquad \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du = 2\tilde{\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - 2\tilde{\eta}u_0 + (2k+1)\pi i.$$

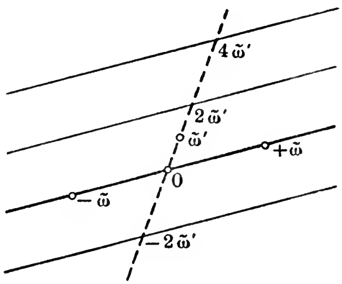
Der Werth der ganzen Zahl k wird von $\tilde{\omega}$ abhängig sein, und es handelt sich nun darum, ihn genauer zu bestimmen.

Der zur complexen Integrationsvariablen u gehörende Punkt in der Ebene dieser Variablen sollte die Strecke von 0 bis $\tilde{\omega}$ durchlaufen. Damit der Nenner unter dem Integralzeichen nicht verschwinde, darf unter den Werthen, die $\wp u$ längs des Integrationsweges annimmt, $\wp u_0$ nicht enthalten sein, d. h. der dem Werthe u_0 entsprechende Punkt darf nicht auf der Integrationsstrecke $0 \ldots \tilde{\omega}$ liegen, ebensowenig auf der entgegengesetzten, $0 \cdots - \tilde{\omega}$, da $\wp u$ eine gerade Function ist. Schliesslich darf u_0 auch keinem der Werthe congruent sein, deren Punkte auf der Strecke $-\tilde{\omega} \cdots + \tilde{\omega}$ gelegen sind.

Es sei $2\tilde{\omega}'$ eine andere primitive Periode von $\wp u$ der Art, dass der Ausdruck

$$2n\tilde{\omega} + 2n'\tilde{\omega}'$$

bei ganzzahligen n, n' geeignet ist, alle Perioden von $\wp u$ darzustellen. Zieht man durch die Punkte $\pm 2\tilde{\omega}', \pm 4\tilde{\omega}', \ldots$ Parallelen zu der Geraden $-\tilde{\omega} \cdots + \tilde{\omega}$, so darf u_0 keinen der Werthe annehmen, die den Punkten dieser Parallelen entsprechen. 'Denn jedem dieser Werthe könnte man einen auf der Strecke $-\tilde{\omega} \cdots + \tilde{\omega}$ gelegenen Werth von u zuordnen, der sich von u_0 nur um eine Periode $2n\tilde{\omega} + 2n'\tilde{\omega}'$ unterscheidet, und das Integral würde auch dann seinen Sinn verlieren. Der u_0 entsprechende Punkt darf daher nur innerhalb eines durch zwei jener Parallelen gebildeten Streifens gelegen sein.



Figur 2.

Es möge zunächst u_0 in dem Streifen liegen, der von den beiden durch 0 und $2\tilde{\omega}'$ gehenden Parallelen begrenzt wird; ändert sich u_0 stetig innerhalb dieses Gebietes, so verändert das Integral ebenfalls stetig seinen Werth, ohne irgendwo unendlich zu werden. Aber auch der Ausdruck

$$2\tilde{\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - 2\tilde{\eta}u_0$$

ist dann eine stetige Function von u_0. Da die ganze Zahl k nur sprungweise veränderlich sein kann, so muss k unabhängig von u_0 denselben Werth behalten. Um ihn zu bestimmen, braucht man also für u_0 nur einen passenden Werth innerhalb des genannten Streifens zu wählen. Lässt man u_0 mit $\tilde{\omega}'$ zusammenfallen, so wird

$$\wp' u_0 = \wp'\tilde{\omega}' = 0,$$

mithin verschwindet das Integral, und es wird wegen

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\tilde{\omega}' = \tilde{\eta}':$$

$$0 = 2\tilde{\omega}\tilde{\eta}' - 2\tilde{\eta}\tilde{\omega}' + (2k+1)\pi i.$$

Nimmt man nun, was stets möglich ist,

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\right) > 0$$

an, so besteht die Relation (E. F. S. 130)

$$\tilde{\eta}\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\tilde{\eta}' = +\frac{1}{2}\pi i,$$

und es ergiebt sich

$$k = 0,$$

mithin

$$(2.)\qquad \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\,du = 2\tilde{\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - 2\tilde{\eta}u_0 + \pi i.$$

Jetzt sei u_0 im Innern eines beliebigen jener Streifen enthalten. Man kann die complexe Zahl u_0 stets in der Form

$$u_0 = 2p\tilde{\omega} + 2p'\tilde{\omega}'$$

schreiben, wo p, p' zwei reelle Zahlen sind, von denen aber wenigstens p' keine ganze Zahl sein darf. Diese bedeuten die Coordinaten des Punktes u_0 in einem Coordinatensystem, dessen Axen und Einheiten durch die Strecken $0\ldots 2\tilde{\omega}$ und $0\ldots 2\tilde{\omega}'$ bestimmt sind. Ist

$$0 < p' < 1,$$

so liegt u_0 in dem vorher betrachteten Streifen. Allgemein sei μ' die grösste in p' enthaltene ganze Zahl der Art, dass für $p'-\mu' = m'$ die Bedingung

$$0 < m' < 1$$

erfüllt ist. Setzt man

$$u_0 = \bar{u}_0 + 2\mu'\tilde{\omega}',$$

so ist $\bar{u}_0$ im Innern jenes Streifens gelegen, und die Gleichung (2.) behält ihre Giltigkeit, wenn man darin u_0 durch $\bar{u}_0$ ersetzt. Versteht man dagegen in der genannten Formel unter u_0 den vorstehenden Werth, so ändert sich dadurch die Function unter dem Integralzeichen nicht, d. h. es ist

$$\int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du = \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' \bar{u}_0}{\wp u - \wp \bar{u}_0}\, du.$$

Für das links stehende Integral gilt die Formel (1.), für das auf der rechten Seite die Gleichung (2.), nachdem man darin u_0 durch $\bar{u}_0$ ersetzt hat. Die entstehende Gleichung

$$2\tilde{\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - 2\tilde{\eta}u_0 + (2k+1)\pi i = 2\tilde{\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}\bar{u}_0 - 2\tilde{\eta}\bar{u}_0 + \pi i$$

dient zur Bestimmung der ganzen Zahl k. Unter Benutzung von E. F. S. 70 (8.),

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u + 2\mu'\tilde{\omega}') = \frac{\sigma'}{\sigma}u + 2\mu'\tilde{\eta}',$$

erhält man leicht

$$k = \mu'.$$

Es gilt demnach allgemein die Formel

$$(3.)\qquad \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du = 2\tilde{\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - 2\tilde{\eta}u_0 + (2\mu'+1)\pi i;$$

hierin bedeutet also, nachdem u_0 auf die Form $2p\tilde{\omega} + 2p'\tilde{\omega}'$ gebracht ist, μ' die grösste ganze in p' enthaltene und einen positiven unterhalb Eins gelegenen Rest m' lassende Zahl.

Für den Fall reeller Invarianten g_2, g_3, der jetzt vorausgesetzt werden möge, giebt es bekanntlich unter den Perioden stets zwei von der Art, dass die eine die kleinste positiv reelle, die zweite die kleinste positiv imaginäre

Periode ist (vgl. E. F. Kap. 9). Wenn alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell sind, und $e_1 > e_2 > e_3$ gewählt wird, gelten für die Hälften dieser Perioden die Werthe

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

$$\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}},$$

wobei die Integrationsvariable alle reellen zwischen den angegebenen Grenzen enthaltenen Werthe durchläuft. Ferner ist

$$\wp\omega_1 = e_1, \quad \wp\omega_3 = e_3.$$

Wenn aber nur eine der drei Wurzeln, e_2, reell, die beiden andern conjugirt complex sind, so hat man für jene Halbperioden

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

$$\omega_2' = i\int_{-\infty}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = i\int_{-e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s + g_3}}$$

zu nehmen, wobei s ebenfalls nur reelle Werthe durchläuft, und es ist

$$\wp\omega_2 = e_2 = \wp\omega_2'.$$

Dies vorausgeschickt, mögen in den oben entwickelten Formeln im ersten Fall für $\tilde{\omega}$ die Werthe ω_1, ω_3, im zweiten Fall die Werthe ω_2, ω_2' gesetzt werden.

I. Fall.

Es seien e_1, e_2, e_3 reell, so bildet $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ein primitives Periodenpaar von der Eigenschaft, dass der reelle Theil von $\omega_3 : \omega_1 i$ positiv ist. Dann wird zunächst

$$(4.) \qquad \int_0^{\omega_1} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du = 2\omega_1 \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} u_0 - 2\eta_1 u_0 + \pi i,$$

wo

$$\eta_1 = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}\omega_1$$

gesetzt und unter den Lösungen der Gleichung $\wp u_0 = s_0$ eine derjenigen gewählt ist, für die in der Darstellung

$$u_0 = 2m\omega_1 + 2m'\omega_3$$

die Bedingung

$$0 < m' < 1$$

erfüllt ist. Da ω_1 reell, ω_3 rein imaginär ist, so besagt die vorstehende Bedingung, dass der imaginäre Theil von u_0 im Innern des Streifens von 0 bis $2\omega_3$ gelegen sein muss. Nun enthält für den vorliegenden Fall die folgende Tabelle (E. F. S. 80) nebeneinander die zusammengehörigen Intervalle des Arguments u und der Function $\wp u$, sowie die entsprechenden Werthe der Grösse $|\wp' u| : \wp' u = \varepsilon$.

u	$\wp u$	ε
$0 \ldots \omega_1$	$+\infty \ldots e_1$	-1
$\omega_1 \ldots \omega_1 + \omega_3$	$e_1 \ldots e_2$	$+i$
$\omega_1 + \omega_3 \ldots \omega_3$	$e_2 \ldots e_3$	$+1$
$\omega_3 \ldots 0$	$e_3 \ldots -\infty$	$-i$

(e_1, e_2, e_3 reell).

Danach entspricht dem Wege $0 \ldots \omega_1$ der reellen Variablen u das Intervall $+\infty \cdots e_1$ der reellen Grösse $s = \wp u$; die obige Formel geht also, wenn man noch

$$\wp' u_0 = -\sqrt{S_0}$$

setzt, unmittelbar über in

$$\text{(5.)} \qquad \int_{e_1}^{\infty} \frac{\sqrt{S_0}}{(s - s_0)\sqrt{S}}\, ds = 2\eta_1 u_0 - 2\omega_1 \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - \pi i,$$

wobei S nur positive Werthe annimmt.

Sodann möge das Integral

$$\int_0^{\omega_3} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du$$

bestimmt werden. Da ω_3 rein imaginär ist, hat auch die Integrationsvariable u nur rein imaginäre Werthe zu durchlaufen. Es sei wieder

$$u_0 = 2m\omega_1 + 2m'\omega_3.$$

Bei der Anwendung der allgemeinen Integrationsformel (3.) hat man zu beachten, dass $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ ein Paar primitiver Perioden bilden müssen, wobei der reelle Theil von $\tilde{\omega}' : \tilde{\omega} i$, wie immer, positiv sein sollte. Setzt man nun, wie das hier erforderlich ist, $\tilde{\omega} = \omega_3$, so hat man $\tilde{\omega}' = -\omega_1$ zu nehmen. In den Formeln ist also die Darstellung

$$u_0 = 2m'\tilde{\omega} + 2(-m)\tilde{\omega}'$$

zu benutzen. Wenn man jetzt, entsprechend der früheren Festsetzung über m', hier für m die Annahme

$$0 < m < 1$$

macht, so ist die grösste ganze in $(-m)$ enthaltene und einen positiven Rest lassende Zahl μ' hier gleich -1. Da $\tilde{\omega}$ rein imaginär, $\tilde{\omega}'$ reell ist, so besagt diese Bedingung, dass der reelle Theil von u_0 im Innern des Streifens von 0 bis $2\omega_1$ liegen muss.

Nun kann man die Gleichung (3.) anwenden und erhält

$$\int_0^{\omega_3} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du = 2\omega_3 \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - 2\eta_3 u_0 - \pi i, \tag{6.}$$

wo

$$\eta_3 = \frac{\sigma'}{\sigma} \omega_3$$

gesetzt ist. Nach der Tabelle entspricht dem Wege $0 \dots \omega_3$ der rein imaginären Variablen u das Intervall $-\infty \cdots e_3$ der reellen Grösse $s = \wp u$; aber $\wp' u$ wird negativ imaginär. Man wird daher, unter $\sqrt{-S}$ eine positive reelle Grösse verstehend, hier

$$du = \frac{-ds}{i\sqrt{-S}}$$

zu setzen haben. Dadurch geht das Integral (6.) in

$$\int_{-\infty}^{e_3} \frac{(-\sqrt{S_0})(-ds)}{(s-s_0)i\sqrt{-S}} = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{e_3} \frac{\sqrt{S_0}}{(s-s_0)\sqrt{-S}} ds$$

über, und man erhält

$$\int_{-\infty}^{e_3} \frac{\sqrt{S_0}}{(s-s_0)\sqrt{-S}} ds = \frac{1}{i}\left(2\eta_3 u_0 - 2\omega_3 \frac{\sigma'}{\sigma} u_0\right) + \pi. \tag{7.}$$

In diesen Formeln könnte man übrigens durch Einführung der Sigmafunctionen mit Index noch das Glied mit π zum Wegfall bringen, indessen soll darauf nicht näher eingegangen werden.

II. Fall.

Nun werde angenommen, e_2 sei reell, dagegen e_1 und e_3 conjugirt complex, und zwar e_3 im imaginären Theile negativ. Es handelt sich jetzt um die Berechnung der Integrale

$$\int_0^{\omega_2} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du$$

und

$$\int_0^{\omega_2'} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du.$$

An Stelle der Tabelle auf S. 21 tritt hier die folgende (E. F. S. 82):

u	$\wp u$	ε
$0 \dots \omega_2$	$+\infty \dots e_2$	-1
$\omega_2' \dots 0$	$e_2 \dots -\infty$	$-i$

(e_2 reell, e_1, e_3 conjugirt complex).

Sie zeigt, dass wenn $s = \wp u$ von e_2 nach $+\infty$ geht, $\wp' u = -\sqrt{S}$ reell und negativ ist, und das erste Integral wird:

$$\int_0^{\omega_2} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du = \int_\infty^{e_2} \frac{\sqrt{S_0}\, ds}{(s - s_0)\sqrt{S}}.$$

Die Integrationsvariable u ist reell. Geht aber $s = \wp u$ von $-\infty$ nach e_2, so ist $\wp' u$ negativ imaginär, und für das zweite Integral erhält man

$$\int_0^{\omega_2'} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{e_2} \frac{(-\sqrt{S_0})(-ds)}{(s - s_0)\sqrt{-S}}.$$

Die Integrationsvariable u ist hier rein imaginär. Ein erheblicher Unterschied gegen den ersten Fall liegt darin begründet, dass $(2\omega_2, 2\omega_2')$ kein primitives Periodenpaar ist (vgl. E. F. S. 82). Dagegen wird ein solches Periodenpaar jetzt von den conjugirt complexen Grössen $2\omega_1$, $2\omega_3$ (E. F. S. 249) gebildet, die den Annahmen über e_1, e_2, e_3 gemäss zu ω_2, ω_2' in den Beziehungen (E. F. S. 85)

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega_2'}{2}, \qquad \omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega_2'}{2}$$

oder

$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_1, \qquad \omega_2' = \omega_3 - \omega_1$$

stehen. Um die zu $2\omega_2$ und die zu $2\omega_2'$ jedesmal gehörige zweite primitive Periode zu finden, hat man zu beachten, dass aus dem primitiven Periodenpaare $(2\omega_1, 2\omega_3)$ ein anderes $(2\Omega, 2\Omega')$ hervorgeht, wenn in der Darstellung

$$\begin{aligned} 2\Omega &= 2\alpha\,\omega_1 + 2\beta\,\omega_3, \\ 2\Omega' &= 2\alpha'\omega_1 + 2\beta'\omega_3 \end{aligned}$$

die Determinante der reellen ganzzahligen Substitutionscoefficienten

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = \pm 1$$

ist (E. F. S. 65). Und zwar ist die Determinante positiv zu nehmen, wenn, wie hier zu fordern, die reellen Theile von $\Omega' : \Omega i$ und $\omega_3 : \omega_1 i$ dasselbe Vorzeichen haben sollen, nämlich das positive. Zur Bestimmung der zu $2\Omega = 2\omega_2$ gehörigen zweiten primitiven Periode hat man daher wegen der obigen Beziehungen zwischen den Halbperioden

$$\alpha = \beta = 1$$

und

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1$$

zu wählen, und erhält

$$2\Omega' = 2\omega_3,$$

in Übereinstimmung mit E. F. S. 85. Ebenso findet man zu $2\omega_2'$ als zugehörige primitive Periode $-2\omega_3$. D. h. es bilden

$$(2\omega_2, 2\omega_3) \text{ und } (2\omega_2', -2\omega_3)$$

oder

$$(2\omega_2, \omega_2 + \omega_2') \text{ und } (2\omega_2', -(\omega_2 + \omega_2'))$$

je ein Paar primitiver Perioden der Art, dass die reellen Theile von $(\omega_2 + \omega_2') : \omega_2 i$ und $(-\omega_2 - \omega_2') : \omega_2' i$ positiv sind.

Um die Integrationsformeln anwenden zu können, hat man die Grösse

$$u_0 = \mu\omega_2 + \mu'\omega_2'$$

auf die Form

$$u_0 = 2m\tilde{\omega} + 2m'\tilde{\omega}'$$

zu bringen, wo $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ der Reihe nach gleich jedem der eben bestimmten Periodenpaare anzunehmen ist. Im ersten Falle ist zu setzen

$$u_0 = (\mu-\mu')\omega_2 + \mu'(\omega_2+\omega_2'),$$

im zweiten

$$u_0 = (\mu'-\mu)\omega_2' + (-\mu)(-\omega_2-\omega_2').$$

Die Integrationsformel (2.) liefert für das erste Integral

$$(8.)\qquad \int_0^{\omega_2} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\,du = 2\omega_2 \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - 2\eta_2 u_0 + \pi i,$$

also

$$(9.)\qquad \int_{e_2}^{\infty} \frac{\sqrt{S_0}}{(s-s_0)\sqrt{S}}\,ds = 2\eta_2 u_0 - 2\omega_2 \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - \pi i,$$

worin

$$\eta_2 = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega_2$$

gesetzt ist, und in

$$u_0 = \mu\omega_2 + \mu'\omega_2'$$
$$0 < \mu' < 1$$

sein muss. Da ω_2 reell, ω_2' rein imaginär ist, sagt diese Bedingung aus, dass der imaginäre Theil von u_0 im Innern des Streifens von 0 bis ω_2' liegen muss.

Für das zweite Integral hat man eine ähnliche Betrachtung wie oben (S. 22) im Falle dreier reeller Wurzeln e_1, e_2, e_3 anzustellen, und es ergiebt sich entsprechend

$$(10.)\qquad \int_0^{\omega_2'} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\,du = 2\omega_2' \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - 2\eta_2' u_0 - \pi i,$$

demnach

$$(11.)\qquad \int_{-\infty}^{e_2} \frac{\sqrt{S_0}}{(s-s_0)\sqrt{-S}}\,ds = \frac{1}{i}\left(2\eta_2' u_0 - 2\omega_2' \frac{\sigma'}{\sigma} u_0\right) + \pi,$$

worin

$$\eta_2' = \frac{\sigma'}{\sigma} \omega_2'$$

gesetzt ist, und in dem Ausdruck von u_0 jetzt

$$0 < \mu < 1$$

sein muss. Der reelle Theil von u_0 muss also im Innern des Streifens von 0 bis ω_2 gelegen sein.

Es bleibt nun noch übrig, die gewonnenen Formeln auf das Ausgangsproblem, die Bestimmung des Kegelmantels, anzuwenden. Es war (S. 14 (15.))

$$J = 2r(\eta_2 - (s_0 - 2e_2)\omega_2) + ir^2 \int_{e_2}^{\infty} \frac{\sqrt{S_0}}{(s-s_0)\sqrt{S}} ds.$$

Von vornherein ist klar, dass nur die Formeln des zweiten Falles in Betracht kommen. Da die Grösse s_0, wie die Gleichung S. 14 (14.),

$$s_0 = e_2 - \frac{1}{4}(c^2 + (a+r)^2),$$

lehrt, zwischen e_2 und $-\infty$ gelegen ist, so muss u_0 nach den Tabellen auf S. 21 und 23 (E. F. S. 80 und 82) zwischen 0 und ω_2' enthalten und rein imaginär sein. Es sei

$$u_0 = v_0 i,$$

wo also v_0 reell, positiv und kleiner als $\frac{\omega_2'}{i}$ ist. Die Formel (9.) liefert

$$J = 2r(\eta_2 - (s_0 - 2e_2)\omega_2) + ir^2\left(2\eta_2 u_0 - 2\omega_2 \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - \pi i\right)$$

oder

$$(12.)\qquad J = \pi r^2 + 2r(1 - rv_0)\eta_2 - 2r\omega_2\left(s_0 - 2e_2 + ri\frac{\sigma'}{\sigma}(v_0 i)\right).$$

Da $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ eine ungerade Function ist, so wird $\frac{\sigma'}{\sigma}(v_0 i)$ rein imaginär, und somit, wie es sein muss, der ganze Ausdruck auf der rechten Seite reell. Dies ist die endgültige Formel für den Inhalt des Mantels eines schiefen Kreiskegels. Zur numerischen Berechnung müsste man zunächst ω_2 durch Reihenentwickelung bestimmen. Im siebenundzwanzigsten Kapitel der Theorie der elliptischen Functionen sind die Methoden dafür angegeben. Ferner hat man $u_0 = v_0 i$ aus der Gleichung $\wp u_0 = s_0$ zu ermitteln, nach den im neunundzwanzigsten Kapitel dafür angegebenen Verfahren. Schliesslich ist noch $\frac{\sigma'}{\sigma}(v_0 i)$ und $\frac{\sigma'}{\sigma}\omega_2 = \eta_2$ nach den dafür bekannten Entwickelungen zu berechnen.

Man kann die erhaltenen Formeln für den Grenzfall prüfen, in dem der Scheitel des Kegels in das Innere des Grundkreises fällt. Der Mantel geht dann in die Fläche des Kreises über, hat also den Inhalt πr^2. Die obige Formel (12.) für J muss sich somit auf ihr erstes Glied reduciren.

In diesem Falle ist $c = 0$ und $r > a$, also (S. 8 (3.))

$$a_3 = a_4 = \frac{r}{a}$$

und den Formeln S. 14 (13.) zufolge

$$e_1 - e_3 = 0,$$
$$e_2 - e_1 = e_2 - e_3 = \frac{1}{4}(r^2 - a^2),$$

d. h.

$$e_1 = e_3 = -\frac{1}{12}(r^2 - a^2),$$
$$e_2 = \frac{1}{6}(r^2 - a^2).$$

Alle drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 sind reell, und zwei einander gleich. Es tritt also der Ausnahmefall ein, dass die Discriminante

$$G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2) = (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2$$

der cubischen Function S verschwindet (E. F. S. 100). Die elliptischen Functionen gehen in trigonometrische über; es wird

$$\wp u = -\frac{1}{2} e_2 + \frac{3}{2} \frac{e_2}{\sin^2\left(u\sqrt{\frac{3}{2} e_2}\right)},$$

$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} e_2}} e^{\frac{1}{4} e_2 u^2} \sin\left(u\sqrt{\frac{3}{2} e_2}\right),$$

unter $\sqrt{\frac{3}{2} e_2}$ der wegen $e_2 > 0$ reelle, positive Wurzelwerth verstanden. Daraus ergiebt sich

$$\frac{\sigma'}{\sigma}u = \frac{1}{2}e_2 u + \sqrt{\frac{3}{2}e_2}\,\mathrm{ctg}\left(u\sqrt{\frac{3}{2}e_2}\right).$$

Da ω_2 der kleinste positive Werth von u ist, für den $\wp u = e_2$ wird, so folgt aus der Gleichung für $\wp u$:

$$\sin^2\left(\omega_2\sqrt{\frac{3}{2}e_2}\right) = 1,$$

$$\omega_2\sqrt{\frac{3}{2}e_2} = \frac{\pi}{2},$$

also

$$\omega_2 = \frac{\pi}{3e_2}\sqrt{\frac{3}{2}e_2}.$$

Ferner hat man

$$\eta_2 = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega_2 = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{3}{2}e_2}.$$

Nach S. 14 (14.) wird

$$s_0 - e_2 = -\frac{1}{4}(a+r)^2,$$

und wegen

$$\wp u - e_2 = \frac{3}{2}e_2\,\mathrm{ctg}^2\left(u\sqrt{\frac{3}{2}e_2}\right)$$

folgt weiter für $u = u_0 = v_0 i$

$$\sqrt{s_0 - e_2} = \sqrt{\frac{3}{2}e_2}\,\mathrm{ctg}\left(v_0 i\sqrt{\frac{3}{2}e_2}\right).$$

Da

$$\mathrm{ctg}\,\varphi i = -i\frac{e^{2\varphi}+1}{e^{2\varphi}-1}$$

negativ imaginär wird, wenn φ positiv ist, so erhält die linke Seite den Werth $-\frac{i}{2}(a+r)$, da v_0 positiv ist. Daher wird

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(v_0 i) = \frac{1}{2}e_2 v_0 i - \frac{i}{2}(a+r).$$

Berechnet man danach die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite der Formel für den Kegelmantel, so erhält man

$$2r(1-rv_0)\eta_2 = \frac{\pi}{3}r\sqrt{\frac{3}{2}e_2}(1-rv_0),$$

$$2r\omega_2\left(s_0-2e_2+ri\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(v_0 i)\right) = \frac{2}{3}\pi\frac{r}{e_2}\sqrt{\frac{3}{2}e_2}\left(-\frac{1}{4}(a+r)^2-e_2-\frac{1}{2}e_2 rv_0+\frac{1}{2}r(a+r)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}r\sqrt{\frac{3}{2}e_2}(1-rv_0).$$

Die Differenz dieser Ausdrücke ergiebt Null, und es wird, unabhängig von a,

$$J = \pi r^2.$$

Ganz anders ist der Fall zu behandeln, wo der Kegel in einen geraden übergeht, d. h. $a = 0$ wird. Die erhaltenen Formeln sind dann nicht mehr unmittelbar zu gebrauchen, weil nach S. 8 (3.) a_3 und a_4 unendlich gross werden. Aber dann ist das Integral S. 6 (1.) von vornherein mit elementaren Mitteln zu bestimmen.

Zweiter Abschnitt.

DIE OBERFLÄCHE EINES DREIAXIGEN ELLIPSOIDS.

Drittes Kapitel.

Elliptische Coordinaten.

Es seien a, b, c drei reelle positive, den Bedingungen

$$a > b > c$$

unterworfene Constanten. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

gilt zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Fläche eines dreiaxigen Ellipsoids, von dem a, b, c die Quadrate der Halbaxen bedeuten. Um die Oberfläche des Ellipsoids oder auch einen Theil davon zu ermitteln, kann man x, y, z als stetige und differentiirbare Functionen zweier reeller Variablen, t_1 und t_2, darstellen, sodann

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E dt_1^2 + 2 F dt_1 dt_2 + G dt_2^2$$

bilden und das Integral

$$J = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dt_1 dt_2$$

berechnen, wobei der Quadratwurzel das positive Vorzeichen zu ertheilen und die Integration über einen bestimmten Bereich der Ebene der beiden unabhängigen Variablen t_1, t_2 zu erstrecken ist.

Für den vorliegenden Fall ist es zweckmässig, x, y, z durch die sogenannten *elliptischen Coordinaten* auszudrücken. Man ordne nämlich einem beliebigen Punkte (x, y, z) des Raumes die drei Werthe t_1, t_2, t_3 zu, die der cubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}+\frac{z^2}{c-t} = 1 \tag{1.}$$

genügen. Sie sind bekanntlich stets reell und werden die elliptischen Coordinaten des Punktes genannt. Die eine der Wurzeln dieser Gleichung liegt zwischen a und b, die andere zwischen b und c, die dritte zwischen c und $-\infty$. Jede von ihnen ist eine eindeutige Function der drei Variablen x, y, z.

Soll der Punkt (x, y, z) der Oberfläche des betrachteten Ellipsoids angehören, so muss eine seiner elliptischen Coordinaten gleich Null sein. Die beiden anderen werden durch eine quadratische Gleichung geliefert. Die eine von diesen muss zwischen a und b, die andere zwischen b und c liegen; denn da c als positiv vorausgesetzt war, so ist die dritte elliptische Coordinate, nämlich Null, zwischen c und $-\infty$ gelegen.

Es verlohnt sich, die Betrachtungen über die elliptischen Coordinaten gleich allgemeiner anzustellen. Man lege, wenn $x_1, x_2, \dots x_n$ reelle Veränderliche, $a_1, a_2, \dots a_n$ reelle Constanten bedeuten, die den Bedingungen

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n$$

genügen, die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{t-a_1}+\frac{x_2^2}{t-a_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{t-a_n}+1 = 0 \tag{2.}$$

zu Grunde. Sie wird durch n stets reelle Werthe von t befriedigt, von denen einer, t_1, im Intervalle $(a_1 \dots a_2)$, ein zweiter, t_2, im Intervalle $(a_2 \dots a_3)$, u. s. w., endlich der n^{te}, t_n, zwischen a_n und $-\infty$ liegt. Setzt man nun für einen unbestimmten Werth von t

$$\left\{\begin{aligned} &(t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n) = \pi(t)\\ &\pi(t)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu^2\,\pi(t)}{t-a_\nu} = \psi(t), \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

so ist $\psi(t)$ eine ganze Function n^{ten} Grades von t, die aus der linken Seite von (2.) durch Multiplication mit $\pi(t)$ hervorgeht. Das Glied mit t^n hat darin den Coefficienten Eins. Die Wurzeln der Gleichungen (2.) und

$$\psi(t) = 0$$

stimmen sämmtlich überein, daher ist

$$\psi(t) = (t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n). \tag{4.}$$

Man hat ferner

$$\psi(a_\nu) = \pi'(a_\nu)\, x_\nu^2, \tag{5.}$$

mithin

$$x_\nu^2 = \frac{(a_\nu - t_1)\,(a_\nu - t_2)\,\dots(a_\nu - t_n)}{(a_\nu - a_1)\,(a_\nu - a_2)\dots(a_\nu - a_n)}, \tag{6.}$$

wo im Nenner auf den Factor $(a_\nu - a_{\nu-1})$ der Factor $(a_\nu - a_{\nu+1})$ folgt. Die Quadrate der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ lassen sich also als ganze rationale Functionen der Argumente $t_1, t_2, \dots t_n$ darstellen. Diese n Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ sind von Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik die elliptischen Coordinaten der Stellen $\pm x_1, \pm x_2, \dots \pm x_n$ genannt worden; jede der 2^n Stellen besitzt also die nämlichen elliptischen Coordinaten.

Den Bedingungen $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ zufolge ist

$$\begin{aligned}
\pi'(a_1) &= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n) > 0,\\
\pi'(a_2) &= (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_n) < 0,\\
\pi'(a_3) &= (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_3 - a_n) > 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad \cdot\ ,
\end{aligned}$$

d. h. $\pi'(a_\nu)$ ist positiv oder negativ, jenachdem ν eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Wegen (5.) bestimmt sich nach denselben Bedingungen auch das Vorzeichen von $\psi(a_\nu)$. Zwischen je zwei aufeinander folgenden Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ liegt also genau eine Wurzel der Gleichung

$$\psi(t) = 0.$$

Ist nun n gerade, so ist $\psi(a_n)$ negativ, und da für $t = -\infty$ das Vorzeichen von $\psi(t)$ positiv ist, so liegt eine Wurzel von $\psi(t) = 0$ zwischen a_n und $-\infty$. Für ungerades n, ist $\psi(a_n)$ positiv, $\psi(-\infty)$ negativ; auch in diesem Falle liegt also eine Wurzel von $\psi(t) = 0$ zwischen a_n und $-\infty$. Unter der gemachten Voraussetzung, dass alle Grössen a_ν und x_ν reell sind, giebt es demnach stets n reelle Wurzeln $t_1, t_2, \dots t_n$ der Gleichung $\psi(t) = 0$, und diese liegen, wenn sie von einander verschieden sind, so, dass

$$a_1 > t_1 > a_2 > t_2 > a_3 > \cdots > a_{n-1} > t_{n-1} > a_n > t_n > -\infty.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{t_\lambda - a_\nu} + 1 &= 0, \\ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{t_\mu - a_\nu} + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$$

folgt durch Subtraction

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{(t_\lambda - a_\nu)(t_\mu - a_\nu)} = 0 \qquad (\lambda \lesseqgtr \mu). \tag{7.}$$

Diese wichtige Formel gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass keine zwei der Werthe $t_1, t_2, \dots t_n$ einander gleich sind. Zusammenfallen könnten sie nur dann, wenn sie zwei aufeinander folgenden Intervallen $(a_{\varrho-1} \dots a_\varrho)$, $(a_\varrho \dots a_{\varrho+1})$ angehörten und also beide gleich a_ϱ wären. Dann würden von den Grössen x_ν einige identisch verschwinden. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass auch in diesem Falle die Formel (7.) ihre Giltigkeit behält. Es seien nämlich unter den Grössen x_ν diejenigen, die den Werth Null haben, durch die Bezeichnung $x_{\nu'}$ von den übrigen, $x_{\nu''}$, unterschieden. In der Gleichung (2.) fallen einige Glieder heraus; die in diesen vorkommenden Grössen a_ν seien durch die entsprechende Bezeichnung $a_{\nu'}$ vor den übrigen, $a_{\nu''}$, hervorgehoben. Dann ist nach (3.)

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \prod_{\nu'} (t - a_{\nu'}) . \prod_{\nu''} (t - a_{\nu''}) &&= \pi_1(t) . \pi_2(t), \\ \psi(t) &= \pi_1(t) \left(\pi_2(t) + \sum_{\nu''} \frac{x_{\nu''}^2 \pi_2(t)}{t - a_{\nu''}} \right) &&= \pi_1(t) . \psi_2(t). \end{aligned}$$

Die Function $\psi_2(t)$ hat jetzt dieselbe Eigenschaft wie vorher $\psi(t)$, nämlich lauter verschiedene reelle Nullstellen zu besitzen. Die Gleichung $\psi(t) = 0$ zerfällt aber in

$$\pi_1(t) = 0$$

und

$$\psi_2(t) = 0;$$

die übrigen Wurzeln von $\psi(t) = 0$ sind also die Grössen $a_{\nu'}$, ebenfalls reell und von einander verschieden. In der Reihe $x_1, x_2, \dots x_n$ sei $x_\varkappa$ eine der von Null verschiedenen Grössen, und $x_{\varkappa+\lambda}$ die nächstfolgende derselben Beschaffenheit; dann gehören $a_{\varkappa+1}, \dots a_{\varkappa+\lambda-1}$ zu den Wurzeln der Gleichung $\psi(t) = 0$. Zwischen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+\lambda}$ liegt noch eine der Wurzeln t. Es sei

$$(a_{\varkappa+\lambda'-1} \dots a_{\varkappa+\lambda'}) \qquad (\lambda' \leqq \lambda)$$

dasjenige engere Intervall, in dem diese Wurzel wirklich enthalten ist. Dann kann man sich die verschiedenen hier in Betracht kommenden Wurzeln der Gleichung $\psi(t) = 0$ folgendermassen auf die Intervalle vertheilt denken:

$a_{\varkappa+1}$	liegt	im	Intervall	$(a_\varkappa \dots a_{\varkappa+1})$,
$a_{\varkappa+2}$	"	"	"	$(a_{\varkappa+1} \dots a_{\varkappa+2})$,
.	.	.	.	. ... .
$a_{\varkappa+\lambda'-1}$	"	"	"	$(a_{\varkappa+\lambda'-2} \dots a_{\varkappa+\lambda'-1})$,
t	"	"	"	$(a_{\varkappa+\lambda'-1} \dots a_{\varkappa+\lambda'})$,
$a_{\varkappa+\lambda'}$	"	"	"	$(a_{\varkappa+\lambda'} \dots a_{\varkappa+\lambda'+1})$,
.	.	.	.	. ... .
$a_{\varkappa+\lambda-1}$	"	"	"	$(a_{\varkappa+\lambda-1} \dots a_{\varkappa+\lambda})$.

Dabei kann nun noch der Fall eintreten, dass jene Wurzel t mit einem der Werthe $a_{\varkappa+\lambda'-1}$ oder $a_{\varkappa+\lambda'}$ zusammenfällt, die selbst zu den Wurzeln von $\psi(t) = 0$ gehören; d. h. es können Doppelwurzeln auftreten. Solange aber die Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ von einander verschieden sind, können keine dreifachen oder mehrfachen Wurzeln vorkommen. Hiernach behalten also die Formeln ihre Giltigkeit, wenn

$$a_1 \geqq t_1 \geqq a_2 \geqq t_2 \geqq a_3 \geqq \dots \geqq a_{n-1} \geqq t_{n-1} \geqq a_n \geqq t_n > -\infty.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{\psi(t)}{\pi(t)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{t - a_\nu}$$

nach t folgt

$$\frac{\psi'(t)}{\pi(t)} - \frac{\pi'(t)}{\pi(t)^2}\psi(t) = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{(t-a_\nu)^2},$$

und daher, wenn man $t = t_\lambda$ setzt,

$$\text{(8.)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{(t_\lambda - a_\nu)^2} = -\frac{\psi'(t_\lambda)}{\pi(t_\lambda)}.$$

Man betrachte nun $t_1, t_2, \dots t_n$ als von einander unabhängige Veränderliche, und $x_1, x_2, \dots x_n$ als deren Functionen. Dann folgt aus (6.) durch Differentiation

$$2x_\nu dx_\nu = \frac{\psi(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{dt_\lambda}{t_\lambda - a_\nu},$$

oder wegen (5.)

$$dx_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\nu dt_\lambda}{t_\lambda - a_\nu},$$

und weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} dx_\nu^2 = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{x_\nu^2 dt_\lambda dt_\mu}{(t_\lambda - a_\nu)(t_\mu - a_\nu)}.$$

Der Gleichung (7.) zufolge verschwinden aber in der Summe auf der rechten Seite alle Glieder, in denen λ von μ verschieden ist. Wendet man auf die übrig bleibenden die Gleichung (8.) an, so ergiebt sich

$$(9.)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} dx_\nu^2 = -\frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\psi'(t_\lambda)}{\pi(t_\lambda)} dt_\lambda^2.$$

Die Formeln (7.), (8.), (9.) sind unter den hier abgeleiteten die wichtigsten für die Theorie der elliptischen Coordinaten in dem allgemeinen Fall von n Variablen. Sie finden mannigfache Anwendung. Insbesondere können sie bei der Transformation des n-fachen Integrals eines Differentials

$$F(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

von Nutzen sein. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei die aus der Formel (9.) zu entnehmende Thatsache, dass sich $\sum dx_\nu^2$ durch Einführung der Variablen $t_1, t_2, \dots t_n$ in eine quadratische Differentialform verwandelt, die wieder nur die Quadrate der Differentiale der Variablen enthält.

Im Falle $n = 3$, wo dann wie vorher x, y, z an Stelle von x_1, x_2, x_3 und a, b, c an Stelle von a_1, a_2, a_3 geschrieben werden möge, bedeuten t_1, t_2, t_3 die oben definirten elliptischen Coordinaten. Die linke Seite der Gleichung (9.) stellt das Quadrat eines Linienelements im Raume dar, und die besondere Form der rechten Seite, auf die soeben hingewiesen worden ist, bringt zum Ausdruck, dass sich die drei Scharen von Flächen, die man erhält, wenn man je eine der drei Grössen t_1, t_2, t_3 constant setzt, während die beiden anderen variabel bleiben, gegenseitig unter rechten Winkeln schneiden.

Von den drei Variablen liegt nun

t_1 in dem Intervall $(a \dots b)$,
t_2 " " " $(b \dots c)$,
t_3 " " " $(c \cdots -\infty)$.

Für einen Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoids ist, wie bereits bemerkt, eine dieser Grössen gleich Null, und zwar muss dies t_3 sein. Man hat daher für jeden solchen Punkt zufolge (6.)

$$x^2 = \frac{a(a-t_1)(a-t_2)}{(a-b)(a-c)},$$
$$y^2 = \frac{b(b-t_1)(b-t_2)}{(b-a)(b-c)},$$
$$z^2 = \frac{c(c-t_1)(c-t_2)}{(c-a)(c-b)},$$

und für das Quadrat eines Linienelements auf dem Ellipsoid nach (9.)

$$dx^2+dy^2+dz^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{(t_1-t_2)t_1}{(t_1-a)(t_1-b)(t_1-c)}dt_1^2+\frac{(t_2-t_1)t_2}{(t_2-a)(t_2-b)(t_2-c)}dt_2^2\right).$$

Daraus ergiebt sich

$$(10.)\qquad EG-F^2 = -\frac{1}{16}\,\frac{(t_1-t_2)^2 t_1 t_2}{(t_1-a)(t_1-b)(t_1-c)(t_2-a)(t_2-b)(t_2-c)}.$$

Durch die drei Coordinatenebenen wird die Oberfläche des Ellipsoids in acht Theile von gleicher Grösse zerlegt. Beschränkt man sich auf einen von ihnen, z. B. auf den, für dessen Punkte keine der Coordinaten x, y, z negativ ist, so entsprechen diesen Punkten alle Werthepaare (t_1, t_2), für die

t_1 in der Strecke $(b \dots a)$,
t_2 " " " $(c \dots b)$

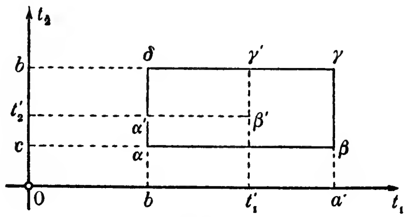
liegt. Man nehme also in der Ebene der beiden Variablen t_1, t_2 ein Rechteck mit den Ecken α, β, γ, δ an, sodass

für den Punkt α: $t_1 = b$, $t_2 = c$,
" " " β: $t_1 = a$, $t_2 = c$,
" " " γ: $t_1 = a$, $t_2 = b$,
" " " δ: $t_1 = b$, $t_2 = b$

ist. Die Figur 3 soll dies veranschaulichen. Alle Punkte des betrachteten Octanten werden dann durch die Formeln

$$(11.)\quad \begin{cases} x = \sqrt{a}\sqrt{\dfrac{a-t_1}{a-b}}\sqrt{\dfrac{a-t_2}{a-c}} \\ y = \sqrt{b}\sqrt{\dfrac{t_1-b}{a-b}}\sqrt{\dfrac{b-t_2}{b-c}} \\ z = \sqrt{c}\sqrt{\dfrac{t_1-c}{a-c}}\sqrt{\dfrac{t_2-c}{b-c}} \end{cases}$$

geliefert, wenn darin die Quadratwurzeln ihre positiven Werthe erhalten und als Ort des Punktes (t_1, t_2) die Fläche des angegebenen Rechtecks gewählt wird.



Figur 3.

Wenn für t_1 irgend ein den Bedingungen

$$a > t_1 > b$$

unterworfener Werth angenommen wird, so liegen die Punkte (x, y, z), die der Gleichung

$$\frac{x^2}{a-t_1} + \frac{y^2}{b-t_1} + \frac{z^2}{c-t_1} - 1 = 0$$

genügen, auf einem zweischaligen Hyperboloid, dessen Mittelpunkt im Coordinatenursprung gelegen ist, und dessen Hauptaxen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Bei stetiger Veränderung von t_1 liefert die vorstehende Gleichung eine Schar von zweischaligen Hyperboloiden, die dem gegebenen Ellipsoid sämmtlich confocal sind. Ist entsprechend

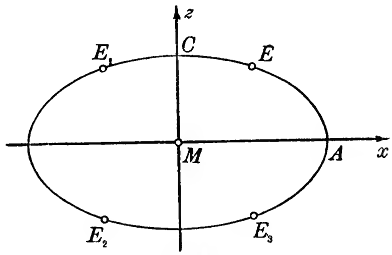
$$b > t_2 > c,$$

so stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a-t_2} + \frac{y^2}{b-t_2} + \frac{z^2}{c-t_2} - 1 = 0$$

eine Schar einschaliger Hyperboloide dar, die ebenfalls dem gegebenen Ellipsoid confocal sind. Jede Durchschnittskurve des Ellipsoids mit einer dieser Flächen ist eine seiner Krümmungslinien.

Es sei M der Mittelpunkt des Ellipsoids, A, B, C seine in den positiven Richtungen der drei Coordinatenaxen gelegenen Scheitel. In der Ebene AMC



Figur 4.

liegen dann die vier Nabelpunkte E, E_1, E_2, E_3 des Ellipsoids, deren Coordinaten man erhält, wenn man sowohl t_1 wie t_2 gleich b annimmt, nämlich

für den Punkt E: $\sqrt{a}\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$, 0, $\sqrt{c}\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$,

" " " E_1: $-\sqrt{a}\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$, 0, $\sqrt{c}\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$,

" " " E_2: $-\sqrt{a}\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$, 0, $-\sqrt{c}\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$,

" " " E_3: $\sqrt{a}\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$, 0, $-\sqrt{c}\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$.

Die drei Ellipsen, in denen die Fläche von den Ebenen MBC, MCA, MAB geschnitten wird, seien $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_2$, so ist $\mathfrak{E}_1$ eine der Krümmungslinien, für die t_1 einen constanten Werth, nämlich a hat; jede Linie dieser Schar schneidet $\mathfrak{E}$ in zwei, den Strecken EE_1, E_2E_3 angehörigen Punkten unter rechten Winkeln. Ebenso schneidet jede Linie der anderen Schar, für die t_2 constant ist, und zu denen $\mathfrak{E}_2$ (für $t_2 = c$) gehört, die Ellipse $\mathfrak{E}$ in zwei, in den Strecken EE_3, E_1E_2 liegenden Punkten. Zwei Krümmungslinien derselben Schar haben keinen gemeinschaftlichen Punkt; dagegen schneiden je zwei, die nicht zu derselben Schar gehören, einander in zwei

Punkten, und zwar unter rechten Winkeln, sowie umgekehrt durch jeden Punkt der Fläche, mit Ausnahme der Nabelpunkte, genau zwei solche Krümmungslinien gehen.

Jede Linie der ersten Schar zerlegt die Fläche in zwei Theile, von denen der eine die Strecke EE_1, der andere die Strecke E_2E_3 enthält. Diese Strecken, jede doppelt gedacht, sind die Grenzen, denen sich die Krümmungslinien dieser Schar nähern, wenn t_1 der Grenze b zustrebt. Ebenso zerlegt jede Linie der anderen Schar die Fläche in zwei Theile, von denen der eine die Strecke EE_3, der andere die Strecke E_1E_2 enthält. Die beiden Strecken sind für die Linien dieser Schar die Grenzen, in die sie für $t_2 = b$ übergehen.

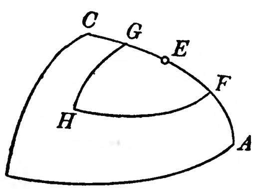
Es seien nun t'_1, t'_2 zwei den Bedingungen

$$b < t'_1 < a,$$
$$c < t'_2 < b$$

genügende Grössen. Man betrachte (vgl. Figur 3) in der Ebene der Variablen t_1, t_2 ein Rechteck $\alpha'\beta'\gamma'\delta$, dessen Eckpunkte folgende Coordinaten haben mögen:

$$\begin{array}{lll}
\text{Punkt } \alpha': & t_1 = b, & t_2 = t'_2, \\
\text{,,} \quad \beta': & t_1 = t'_1, & t_2 = t'_2, \\
\text{,,} \quad \gamma': & t_1 = t'_1, & t_2 = b, \\
\text{,,} \quad \delta: & t_1 = b, & t_2 = b.
\end{array}$$

Dieses Rechteck liegt ganz innerhalb des vorher betrachteten, $\alpha\beta\gamma\delta$, und hat mit ihm die Ecke δ gemeinsam. Auf dem Ellipsoid entspricht ihm ein Viereck (Figur 5), dessen eine Ecke, die dem Punkte δ entsprechende, mit dem



Figur 5.

Nabelpunkt E zusammenfällt. Dem Punkte β' entspricht ein beliebig gelegener Punkt H; der Geraden $\beta'\alpha'$, längs der t_2 einen constanten Werth hat, die Krümmungslinie HF, von der der Punkt F auf der Ellipse $\mathfrak{E}$, und zwar zwischen E und A gelegen ist; der Graden $\beta'\gamma'$, längs der t_1 constant ist, entspricht die Krümmungslinie HG, für die der Punkt G ebenfalls auf der Ellipse $\mathfrak{E}$ und zwar zwischen E und C gelegen ist. Die beiden anderen Seiten des erwähnten Vierecks, FE und GE, sind also Theile der Ellipse $\mathfrak{E}$, d. h. dem Viereck $\alpha'\beta'\gamma'\delta$ entspricht in Wirklichkeit ein Dreieck des Ellipsoids, das aus zwei Krümmungslinien und der Ellipse $\mathfrak{E}$ gebildet ist und den Nabelpunkt E auf seinem Umfang enthält.

Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks soll nun bestimmt werden.

Zunächst erhält man aus (10.):

$$J = \frac{1}{4}\int_{t_2=t_2'}^{t_2=b}\int_{t_1=b}^{t_1=t_1'} \frac{(t_1-t_2)\sqrt{-t_1 t_2}\,dt_1\,dt_2}{\sqrt{(t_1-a)(t_1-b)(t_1-c)}\sqrt{(t_2-a)(t_2-b)(t_2-c)}}.$$

Aber diese Formel vereinfacht sich erheblich. Da die Grenzen des Doppelintegrals constante Werthe haben, so kann es in ein Product zweier einfacher Integrale zerlegt werden. Setzt man noch

$$R(t) = t(t-a)(t-b)(t-c),$$

so ist

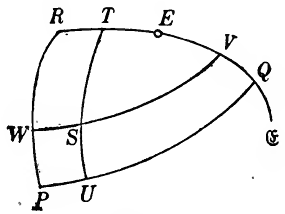
$$R(t) < 0, \quad \text{wenn } b < t < a,$$
$$R(t) > 0, \quad \text{„} \quad c < t < b,$$

und man hat, wenn man die Integrationsvariable, auf deren Bezeichnung es nicht ankommt, beidemal t nennt und die Striche an den Grenzen weglässt:

$$(12.) \qquad J = \frac{1}{4}\int_b^{t_1}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{-R(t)}}\int_{t_2}^{b}\frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} - \frac{1}{4}\int_b^{t_1}\frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}}\int_{t_2}^{b}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Für $t_1 = a$ und $t_2 = c$ giebt die Formel den Flächeninhalt eines Octanten des Ellipsoids an.

Es ist nun leicht einzusehen, wie man durch passende Wahl der Integrationsgrenzen bewirken kann, dass auch ein beliebiges aus je zwei Krümmungslinien der beiden Scharen gebildetes Viereck auf dem betrachteten Octanten des Ellipsoids sich vermittelst der Formel (12.) berechnen lässt, und zwar durch Hinzufügung und Wegnahme von Dreiecken der eben besprochenen Art. Es sei $PUSW$ ein solches zu berechnendes Viereck. Man verlängere seine Seiten bis zum Schnitt mit der Ellipse $\mathfrak{E}$, wie die Figur



Figur 6.

zeigt; Q, R, T, V seien die erhaltenen Schnittpunkte. Dann ist

$$PUSW = PQR - UQT - WVR + SVT,$$

woraus alles Weitere unmittelbar folgt.

Viertes Kapitel.

Bestimmung der Oberfläche eines aus Krümmungslinien des Ellipsoids gebildeten Dreiecks.

Es ist nun die Aufgabe, die elliptischen Integrale, die in der Formel S. 40 (12.)

$$(1.)\qquad J = \frac{1}{4}\int_b^{t_1}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{-R(t)}}\int_{t_2}^b\frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} - \frac{1}{4}\int_b^{t_1}\frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}}\int_{t_2}^b\frac{t^2\,dt}{\sqrt{R(t)}}$$

für den Inhalt eines aus Krümmungslinien eines Ellipsoids gebildeten Dreiecks (S. 40), auftreten, durch Zurückführung auf ihre Normalformen weiter zu behandeln. Dazu wird es nothwendig sein, die unter dem Integralzeichen vorkommenden Functionen von t als elliptische Functionen darzustellen. Zweckmässig führt man zunächst für die Grösse t selbst eine elliptische Function eines passend gewählten Argumentes ein.

Es sei allgemein

$$R(t) = At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4B't + A'$$

eine beliebige ganze Function vierten Grades von t ohne quadratischen Theiler, und a_0 einer der Werthe von t, für die sie verschwindet. Man setze

$$(2.)\qquad \begin{aligned} u &= \int_{a_0}^{t}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \\ u_0 &= \int_{a_0}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \end{aligned}$$

wo beide Integrationen auf beliebigen Wegen in der Ebene der als complex angenommenen Variablen t ausgeführt werden können. Dann ist t eine elliptische Function von u, und es handelt sich darum, einen Ausdruck von t mittels der Sigmafunction herzustellen. Durch die Transformationsformeln E. F. S. 15 (VI.),

$$(3.)\qquad \begin{aligned} s &= \frac{1}{4}\frac{R'(a_0)}{t-a_0}+\frac{1}{24}R''(a_0) \\ \sqrt{S} &= \frac{1}{4}\frac{R'(a_0)}{(t-a_0)^2}\sqrt{R(t)}, \end{aligned}$$

oder, nach t und $\sqrt{R(t)}$ aufgelöst,

$$\begin{aligned} t &= a_0+\frac{R'(a_0)}{4s-\frac{1}{6}R''(a_0)}, \\ \sqrt{R(t)} &= 4\frac{R'(a_0)}{(4s-\frac{1}{6}R''(a_0))^2}\sqrt{S}, \end{aligned}$$

wird wegen $s=\wp u$ die Beziehung zur $\wp$-Function hergestellt. Es giebt entsprechend den vier Wurzeln von $R(t)=0$ vier Functionen s von t der Art, dass s rational von t, und t rational von s abhängt.

Wenn t unendlich gross wird, so nimmt u den Werth u_0 an. Dazu gehört ein bestimmter Werth von s, nämlich

$$s_0=\wp u_0=\frac{1}{24}R''(a_0).$$

Umgekehrt gehören zu diesem Werthe s_0 ausser u_0 nur noch der Werth $-u_0$, weil $\wp u$ eine gerade Function ist, sowie die zu $\pm u_0$ congruenten. Die Grösse t, betrachtet als elliptische Function von u, wird demnach nur an diesen Stellen, und zwar von der ersten Ordnung, unendlich gross.

Nach der Formel E. F. S. 144 (2.) kann man daher

$$(4.)\qquad t=c''+c_1\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)+c_2\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)$$

setzen, wo c'', c_1, c_2 drei noch unbestimmte Constanten sind, von denen aber die beiden letzten der Bedingung

$$c_1+c_2=0$$

genügen müssen.

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die Werthe dieser Constanten aus den gegebenen Coeffizienten von $R(t)$ zu ermitteln. Zu dem Zweck ist es am einfachsten, t nach Potenzen von $u\pm u_0$ zu entwickeln, und zwar einerseits auf Grund der Gleichung (2.), andrerseits nach der Formel (4.), und die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $u \pm u_0$ zu vergleichen.

Setzt man (vgl. E. F. S. 21)

$$t = \frac{1}{z},$$

also

$$dt = -z^{-2}\,dz$$

in

$$(5.)\qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = R(t)$$

ein, so wird

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = A + 4Bz + 6Cz^2 + 4B'z^3 + A'z^4,$$

und daraus weiter

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{du^2} &= 2B + 6Cz + 6B'z^2 + 2A'z^3,\\
\frac{d^3z}{du^3} &= 6(C + 2B'z + A'z^2)\frac{dz}{du},\\
\frac{d^4z}{du^4} &= 12(B' + A'z)\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + 6(C + 2B'z + A'z^2)\frac{d^2z}{du^2},\\
\frac{d^5z}{du^5} &= 12A'\left(\frac{dz}{du}\right)^3 + 36(B' + A'z)\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2} + 6(C + 2B'z + A'z^2)\frac{d^3z}{du^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Für $u = \pm u_0$ wird t von der ersten Ordnung unendlich gross, also z gleich Null. Die Entwickelung von z nach Potenzen von $u \pm u_0$ nach dem Taylorschen Satze beginnt demnach mit der ersten Potenz, und zwar ist

$$z = t^{-1} = \sqrt{A}(u \pm u_0 + C(u \pm u_0)^3 + \cdots) + B(u \pm u_0)^2 + \frac{1}{2}(AB' + BC)(u \pm u_0)^4 + \cdots,$$

wobei aber noch das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt ist. Um es zu fixiren, bilde man durch Differentiation

$$\left(\frac{d(t^{-1})}{du}\right)_{u = \pm u_0} = \sqrt{A}.$$

Setzt man nun fest, u_0 solle der Werth von u sein, für den

$$\left(\frac{d(t^{-1})}{du}\right)_{u = u_0} = -\sqrt{A},$$

also zugleich

$$\left(\frac{d(t^{-1})}{du}\right)_{u=-u_0} = +\sqrt{A}$$

wird, so ist dadurch der Wurzelwerth eindeutig bestimmt, und in der Umgebung von $u-u_0$, auf die man sich jetzt beschränken möge, ist

$$t^{-1} = -\sqrt{A}(u-u_0+C(u-u_0)^3+\cdots)+B(u-u_0)^2+\frac{1}{2}(AB'+BC)(u-u_0)^4+\cdots.$$

Daraus ergiebt sich

$$(6.)\quad t = -\frac{1}{\sqrt{A}(u-u_0)}-\frac{B}{A}-\frac{B^2-AC}{A\sqrt{A}}(u-u_0)-\frac{A^2B'-3ABC+2B^3}{2A^2}(u-u_0)^2+\cdots.$$

Wegen

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) = \frac{1}{u-u_0}+\cdots,$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0+2u_0) = \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)-\wp(2u_0)(u-u_0)+\cdots$$

liefert andrerseits die Entwickelung der rechten Seite von (4.) nach Potenzen von $u-u_0$

$$t = \frac{c_1}{u-u_0}+c''+c_2\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)-c_2\wp(2u_0)(u-u_0)+\cdots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder mindestens die Potenz $(u-u_0)^2$ enthalten. Es muss also

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{A}} = -c_2,$$

$$c'' = -\frac{B}{A}-\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0),$$

ferner

$$(7.)\qquad \wp(2u_0) = \frac{B^2-AC}{A}$$

sein. Die letzte dieser Formeln wird übrigens erst später gebraucht werden. Die in (4.) vorkommenden Constanten sind damit völlig bestimmt, und es wird

$$(8.)\qquad t = -\frac{B}{A}+\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)-\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right).$$

Diese Formel stellt eine elliptische Function zweiten Grades dar, deren Differentialgleichung (5.) gegeben ist, und von der ferner bekannt ist, für welche Werthe des Arguments sie unendlich gross wird. Die rechte Seite zeigt überdies, dass sie eine gerade Function von u ist. Aus der Formel

$$(9.)\qquad \sqrt{R(t)} = \frac{1}{\sqrt{A}}(\wp(u-u_0)-\wp(u+u_0)),$$

die sich aus (5.) und (8.) leicht herleiten lässt, leuchtet schliesslich noch unmittelbar ein, dass t für $u=0$ gleich einer Wurzel der Gleichung

$$R(t) = 0$$

werden muss, entsprechend (2.).

Unter den Integralzeichen in der Formel (1.) kommt noch das Quadrat der Grösse t vor. Eine leichte Rechnung ergiebt zunächst aus (6.)

$$t^2 = \frac{1}{A}\left((u-u_0)^{-2}+2\frac{B}{\sqrt{A}}(u-u_0)^{-1}+\frac{3B^2-2AC}{A}+\frac{4B^3-5ABC+A^2B'}{A\sqrt{A}}(u-u_0)+\cdots\right).$$

Man ersieht aus dieser Formel und aus (6.), dass es sich empfiehlt, den allgemeineren Ausdruck

$$At^2+2Bt+C$$

zu berechnen. Denn er enthält nicht mehr die Potenz $(u-u_0)^{-1}$, und der Coefficient von $(u-u_0)^{-2}$ ist gleich Eins. Man findet

$$At^2+2Bt+C = (u-u_0)^{-2}+\frac{B^2-AC}{A}+\frac{2B^3-3ABC+A^2B'}{A\sqrt{A}}(u-u_0)+\cdots.$$

Der Ausdruck stellt, als Function von u betrachtet, ebenfalls eine elliptische Function dar, die an den Stellen $u=u_0$, $u=-u_0$ und an den dazu congruenten, und zwar von der zweiten Ordnung unendlich gross wird. Die Berechnung dieser Function geschehe auf demselben Wege, der eben zur Ermittelung der Grösse t selbst eingeschlagen worden ist. Der in Rede stehende Ausdruck muss sich in der Form

$$At^2+2Bt+C = c''+c_1\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)+c_2\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)+c_1'\wp(u-u_0)+c_2'\wp(u+u_0)$$

darstellen lassen, worin die Grössen c'', c_1, c_2, c_1', c_2' noch zu bestimmende Constanten bedeuten, unter denen die Beziehung

$$c_1+c_2 = 0$$

stattfindet. Die Entwickelung der rechten Seite nach Potenzen von $u-u_0$ liefert

$$c_1'(u-u_0)^{-2}+c_1(u-u_0)^{-1}+\left(c''+c_2\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)+c_2'\wp(2u_0)\right)$$
$$+(-c_2\wp(2u_0)+c_2'\wp'(2u_0))(u-u_0)+\cdots.$$

Von den Constanten erhalten sonach zunächst c_1, c_2 und c_1' die Werthe

$$c_1'=1,\quad c_1=0,\quad c_2=0,$$

sodass $At^2+2Bt+C$ von der Form

$$c''+\wp(u-u_0)+c_2'\wp(u+u_0)$$

wird. Um c_2' in einfacher Weise zu bestimmen, benutzt man zweckmässig die oben bewiesene Thatsache, dass t eine gerade Function von u ist. Diese Eigenschaft hat auch der Ausdruck $At^2+2Bt+C$ und somit die vorstehende elliptische Function. Bei Vertauschung von u mit $-u$ geht sie aber in

$$c''+\wp(u+u_0)+c_2'\wp(u-u_0)$$

über. Demnach muss c_2' den Werth Eins haben. Um schliesslich c'' zu ermitteln, vergleiche man, unter Einsetzung der gefundenen Werthe, in den obigen Entwickelungen die constanten Glieder, so erhält man

$$\frac{B^2-AC}{A}=c''+\wp(2u_0),$$

also

$$c''=\frac{B^2-AC}{A}-\wp(2u_0).$$

Aber auf Grund der schon bewiesenen Gleichung (7.) muss c'' gleich Null sein. Die endgültige Formel erhält demgemäss die einfache und bemerkenswerthe Gestalt

$$(10.)\qquad At^2+2Bt+C=\wp(u-u_0)+\wp(u+u_0).$$

Der Gleichung (7.),

$$\wp(2u_0)=\frac{B^2-AC}{A},$$

lässt sich noch folgende an die Seite stellen:

$$(11.)\qquad \wp'(2u_0)=\frac{2B^3-3ABC+A^2B'}{A\sqrt{A}}.$$

Man gewinnt sie durch Vergleichung der Coefficienten von $u-u_0$ in den oben benutzten Entwickelungen. Diese beiden Formeln sind deswegen von Wichtigkeit, weil sie gestatten, u_0 unmittelbar aus den Coefficienten der ganzen Function $R(t)$ zu bestimmen. Die ursprünglich dafür aufgestellte Gleichung

$$\wp u_0 = \frac{1}{24} R''(a_0)$$

setzt dagegen zur Berechnung von u_0 die Kenntniss einer Wurzel der Gleichung

$$R(t) = 0$$

voraus.

Durch die Gleichung (7.) ist der Werth von $2u_0$ bis auf eine Periode bestimmt, also der von u_0 bis auf eine halbe Periode. Mittels dieser Gleichung ergeben sich daher die vier incongruenten Werthe

$$u_0, \quad u_0 + \omega, \quad u_0 + \omega + \omega', \quad u_0 + \omega',$$

wo $(2\omega, 2\omega')$ ein Paar primitiver Perioden der $\wp$-Function bedeutet. Dass sich vier Werthe herausstellen, stimmt damit überein, dass auch vier Functionen t existiren, eben die den vier Wurzeln von $R(t) = 0$ entsprechenden (S. 43). Für jede dieser Wurzeln hat man den zugehörigen Werth von u_0 zu bestimmen. Welcher Werth zu wählen ist, muss in jedem Einzelfalle aus der vorgelegten speciellen Aufgabe zu erkennen sein.

Aus den Formeln (8.) und (10.) ergeben sich jetzt unmittelbar die beiden folgenden:

$$(12.) \qquad \int_{a_0}^{t} (At^2 + 2Bt) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - u) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 + u) - Cu,$$

$$(13.) \qquad \int_{a_0}^{t} \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\log \frac{\sigma(u_0 + u)}{\sigma(u_0 - u)} - u \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) \right) - \frac{B}{A} u.$$

Das erste der beiden hierin auftretenden elliptischen Integrale ist von der zweiten, das zweite von der dritten Art. Dabei ist der Integrationsweg, auf dem das Integral erster Art

$$\int_{a_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = u$$

erhalten wird, auch für die beiden vorstehenden Integrale beizubehalten.

Dem Logarithmus ist derjenige seiner Werthe beizulegen, der für $t = a_0$, d. h. für $u = 0$, den Werth Null annimmt.

Diese allgemeinen Formeln, in denen unter $R(t)$ irgend eine biquadratische Function ohne quadratischen Theiler zu verstehen ist, mögen nun auf die Bestimmung der Integrale angewendet werden, mit deren Hilfe der Inhalt des auf S. 40 definirten Dreiecks auf einem Ellipsoid gemessen wird. Es war hier

$$R(t) = t(t-a)(t-b)(t-c),$$

worin a, b, c reelle Grössen bedeuten, und

$$a > b > c$$

ist. Die Coefficienten dieser biquadratischen Function sind

$$(14.)\quad \begin{cases} A \;= 1 \\ B \;= -\frac{1}{4}(a+b+c) \\ C \;= \frac{1}{6}(bc+ca+ab) \\ B' = -\frac{1}{4}abc \\ A' = 0. \end{cases}$$

Die Inhaltsformel (1.) lässt sich nun auch in folgender Weise schreiben:

$$(15.)\quad J = \frac{1}{4}\int_b^{t_1} \frac{At^2+2Bt}{\sqrt{-R(t)}}dt \int_{t_2}^b \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} - \frac{1}{4}\int_b^{t_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}} \int_{t_2}^b \frac{At^2+2Bt}{\sqrt{R(t)}}dt,$$

sodass die Formeln (12.) und (13.) unmittelbar benutzt werden können. Man hat nur überall

$$a_0 = b$$

zu setzen, t_1 oder t_2 an den Grenzen statt t zu schreiben, und überdies den Werth von u_0 passend zu bestimmen.

Wird demgemäss u durch die Gleichung

$$\int_b^t \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = u$$

definirt, und (S. 43)

$$t = b + \frac{1}{4} \frac{R'(b)}{s - \frac{1}{24} R''(b)} \tag{16.}$$

gesetzt, so ist $s = \wp u$ und

$$\sqrt{R(t)} = \frac{dt}{du} = -\frac{1}{4} \frac{R'(b)}{(\wp u - \frac{1}{24} R''(b))^2} \wp' u.$$

Dieser Gleichung gemäss soll das Zeichen der in u vorkommenden Wurzelgrösse bestimmt werden. Es sei ferner, wie zuvor, u_0 irgend ein Werth von u, für den t unendlich gross wird, also

$$u_0 = \int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Zunächst soll der Werth von u berechnet werden, der dem Werthe $t = a$ entspricht, d. h. das Integral

$$\int_b^a \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Aus der Substitutionsformel (16.) folgt, dass s für $t = b$ unendlich gross wird. Nun ist

$$R'(b) = -b(a-b)(b-c)$$

negativ, mithin

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{R'(b)}{(t-b)^2}$$

positiv. Wenn also t stetig wachsend die Strecke $(b \dots a)$ durchläuft, so nimmt auch s, von $-\infty$ an, stetig zu. Aber aus der Gleichung

$$\sqrt{S} = \frac{1}{4} \frac{R'(b)}{(t-b)^2} \sqrt{R(t)}$$

folgt weiter, dass wenn t das Innere der genannten Strecke durchläuft, S nicht verschwindet. Für $t = a$ wird demnach S zum ersten Male Null, d. h. dem Werthe $t = a$ entspricht die kleinste Wurzel e_3 der Gleichung $S = 0$. Folglich ergiebt sich, da $R(t)$ und S im Integrationsintervall negativ sind,

$$\int_b^a \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{-ds}{\sqrt{S}} = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}},$$

d. h. (E. F. S. 78)

$$\int_b^a \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \omega'. \tag{17.}$$

Dieses Integral ist also rein imaginär und liefert eine primitive Halbperiode des Integrals erster Art.

Setzt man nun weiter, den Quadratwurzeln ihre positiven Werthe beilegend und die Integrationen auf direktem Wege ausführend,

$$\int_b^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{-R(t)}} = u_1, \tag{18.}$$

$$\int_{t_2}^{b} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = u_2, \tag{19.}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = w, \tag{20.}$$

so wird

$$u_0 = \int_b^a \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} + \int_a^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

d. h., da im zweiten Integrale $\sqrt{R(t)}$ das positive Vorzeichen hat,

$$u_0 = w + \omega'. \tag{21.}$$

Hierin ist ω', wie erwähnt, rein imaginär, dagegen w offenbar eine reelle und positive Grösse, desgleichen sind u_1 und u_2 reell, und daher

$$\int_b^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = iu_1 \tag{22.}$$

rein imaginär.

Nach (12.) und (13.) erhält man jetzt

$$\begin{aligned} \int_b^{t_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}} &= \frac{1}{i}\int_b^{t_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{1}{i}\left(\log \frac{\sigma(\omega'+w+u_1 i)}{\sigma(\omega'+w-u_1 i)} - u_1 i \frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega'+2w) - Bu_1 i\right) \\ &= \frac{1}{i}\log \frac{\sigma(\omega'+w+u_1 i)}{\sigma(\omega'+w-u_1 i)} - \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega'+2w) + B\right)u_1, \end{aligned} \tag{23.}$$

$$\int_b^{t_1} \frac{At^2+2Bt}{\sqrt{-R(t)}}\,dt = \frac{1}{i}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+w-u_1 i) - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+w+u_1 i)\right) - Cu_1, \tag{24.}$$

ebenso

$$(25.)\qquad \int_{t_2}^{b} \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} = \log \frac{\sigma(\omega'+w+u_2)}{\sigma(\omega'+w-u_2)} - \left(B + \frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega'+2w)\right)u_2,$$

$$(26.)\qquad \int_{t_2}^{b} \frac{At^2+2Bt}{\sqrt{R(t)}}\,dt = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+w-u_2) - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+w+u_2) - Cu_2,$$

wobei wieder den Quadratwurzeln das positive Zeichen beigelegt worden ist.

Wenn man in diesen Formeln statt einer Periode $2\omega'$ des Integrals erster Art die entsprechende Periode $2\eta'$ des Integrals zweiter Art einführt und sich der Sigmafunctionen mit Index bedient, so werden die Formeln überhaupt frei von Perioden. Denn es ist (E. F. S. 88 (4.))

$$\sigma(\omega'+u) = \sigma\omega' e^{\eta' u}\sigma_3 u,$$

daher

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'+u) = \eta' + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u;$$

ferner (E. F. S. 70 (9.))

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega'+u) = 2\eta' + \frac{\sigma'}{\sigma}u.$$

Dadurch wird

$$(27.)\qquad \int_{b}^{t_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}} = \frac{1}{i}\log \frac{\sigma_3(w+u_1 i)}{\sigma_3(w-u_1 i)} - \left(B + \frac{\sigma'}{\sigma}(2w)\right)u_1,$$

$$(28.)\qquad \int_{b}^{t_1} \frac{At^2+2Bt}{\sqrt{-R(t)}}\,dt = \frac{1}{i}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w-u_1 i) - \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w+u_1 i)\right) - Cu_1,$$

$$(29.)\qquad \int_{t_2}^{b} \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} = \log \frac{\sigma_3(w+u_2)}{\sigma_3(w-u_2)} - \left(B + \frac{\sigma'}{\sigma}(2w)\right)u_2,$$

$$(30.)\qquad \int_{t_2}^{b} \frac{At^2+2Bt}{\sqrt{R(t)}}\,dt = \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w-u_2) - \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(w+u_2) - Cu_2.$$

Setzt man nun noch zur Abkürzung

$$(31.)\qquad U_1 = \frac{\mathfrak{S}_3(w+u_1 i)}{\mathfrak{S}_3(w-u_1 i)}\, e^{-\left(B+\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)u_1 i},$$

$$(32.)\qquad U_2 = \frac{\mathfrak{S}_3(w+u_2)}{\mathfrak{S}_3(w-u_2)}\, e^{-\left(B+\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)u_2},$$

$$(33.)\qquad U_1' = \frac{1}{i}\left(\frac{\mathfrak{S}_3'}{\mathfrak{S}_3}(w-u_1 i)-\frac{\mathfrak{S}_3'}{\mathfrak{S}_3}(w+u_1 i)\right)-Cu_1,$$

$$(34.)\qquad U_2' = \frac{\mathfrak{S}_3'}{\mathfrak{S}_3}(w-u_2)-\frac{\mathfrak{S}_3'}{\mathfrak{S}_3}(w+u_2)-Cu_2,$$

so erhält man, unter der Benutzung der Formel (15.), für den Inhalt des betrachteten Dreiecks auf dem Ellipsoid die einfache Formel

$$(35.)\qquad J = \frac{1}{4}U_1'\log U_2 - \frac{1}{4i}U_2'\log U_1.$$

Von den soeben eingeführten Grössen sind U_2, U_2' reell; U_1 und U_1' erscheinen in imaginärer Form, jedoch ist U_1' und namentlich auch $\frac{1}{i}\log U_1$ ebenfalls reell. Das wird im nächsten Kapitel noch genauer dargelegt werden; denn man sieht, dass eine besondere Betrachtung darüber nothwendig ist, welcher Werth jedem der in der vorstehenden Formel auftretenden Logarithmen beizulegen ist.

Zunächst soll aber der Formel (35.) noch dadurch eine andere, ebenfalls sehr einfache Form gegeben werden, dass die zu ω' gehörige reelle primitive Halbperiode ω oder vielmehr eine damit eng zusammenhängende Grösse in die Rechnung eingeführt wird. Das ist besonders zweckmässig, wenn man die Oberfläche des gesammten Ellipsoids bestimmen will.

Statt nämlich in der Transformationsformel (3.) für a_0 den Werth b anzunehmen, wie das bis jetzt geschehen ist (vgl. S. 49), kann man auch

$$a_0 = a$$

setzen, wo a die grösste Wurzel der Gleichung $R(t) = 0$ ist. Dann folgt

$$(36.)\qquad s = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a)}{t-a}+\frac{1}{24}R''(a)$$

und

$$\sqrt{S} = \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{(t-a)^2}\sqrt{R(t)}. \tag{37.}$$

Jetzt wird s für $t=a$ unendlich gross, und da $R'(a)$ positiv ist, so folgt, wie auf S. 50, dass $\frac{ds}{dt}$ negativ ist, dass also, wenn t vom Werthe a ab stetig wächst, s beständig abnimmt. Aber für keinen Werth von t im Intervall $(a\cdots+\infty)$ verschwindet S. Wächst t von $-\infty$ an stetig, so nimmt s wieder beständig ab. Der kleinste Werth von t, für den $R(t)$, also auch S verschwindet, ist $t=0$; ihm entspricht daher der grösste Werth von s, für den S gleich Null wird, d. h. e_1. Weiter entspricht dem nächstgrösseren Werthe $t=c$ der nächstkleinere $s=e_2$, u. s. w. D. h. es entsprechen einander

$$t = \quad 0 \qquad c \qquad b \qquad a \qquad \infty$$

und

$$s = \quad e_1 \qquad e_2 \qquad e_3 \qquad \infty \qquad \frac{1}{24}R''(a).$$

Geht s von $-\infty$ bis e_1, so durchläuft t das Intervall

$$(a\cdots+\infty,\ -\infty\cdots 0)$$

mit einer Unstetigkeit. Man hat daher

$$\int_a^\infty \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} + \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_{+\infty}^{e_1} \frac{-ds}{\sqrt{S}} = \omega.$$

Setzt man also

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = w', \tag{38.}$$

wo die Quadratwurzel positiv sein soll, und die Integration wieder auf directem Wege auszuführen ist, so wird nach (20.)

$$w' = \omega - w.$$

Zur Berechnung der reellen Grösse w' kann man das Integral (38.), das sie definirt, mittels der Substitution

$$s = \frac{1}{4}\frac{R'(0)}{t} + \frac{1}{24}R''(0),$$

d. h.

$$s = \frac{B'}{t} + \frac{1}{2}C$$

auf die Normalform bringen. Das entspricht der Wahl

$$a_0 = 0$$

in der allgemeinen Transformationsformel (3.). Für $t = 0$ ist $s = \infty$, und für $t = -\infty$ ist

$$s = \frac{1}{2}C,$$

also

$$w' = \int_{\frac{1}{2}C}^{\infty} \frac{-ds}{\sqrt{S}} = \int_{\infty}^{\frac{1}{2}C} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

d. h.

(39.) $$\wp(-w') = \wp w' = \frac{1}{2}C.$$

Ferner folgt aus der Gleichung

$$\frac{ds}{du} = -\frac{1}{4}\frac{R'(0)}{t^2}\frac{dt}{du} = -\frac{B'}{t^2}\sqrt{R(t)}$$

für $t = -\infty$: $\wp'(-w') = -B'$ oder

(40.) $$\wp' w' = B'.$$

Da den Gleichungen (14.) zufolge C positiv, B' negativ ist, so liegt entsprechend der Tabelle S. 21 (E. F. S. 80) die Grösse w' zwischen 0 und ω.

Um nun w' bequem in die Inhaltsformel einführen zu können, ist zuerst eine Beziehung zwischen der Grösse $\frac{\sigma'}{\sigma}(2w)$, die in den Exponentialfactoren von U_1 und U_2 auftritt, und der entsprechenden Grösse $\frac{\sigma'}{\sigma}(2w')$ herzustellen. Aus der Formel E. F. S. 37 (15.),

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

folgt für $v = u$, indem man das letzte Glied rechts, das in unbestimmter Form erscheint, in bekannter Weise durch einen Grenzübergang berechnet,

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2u) = 2\frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{1}{2}\frac{\wp'' u}{\wp' u};$$

vgl. E. F. S. 34. Nun ist noch

$$\wp'' u = 2B'\left(\frac{R(t)}{t^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(t)}{t^2}\right),$$

woraus für $t = -\infty$

$$\wp'' w' = 2BB'$$

folgt. Daraus ergiebt sich

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2w') = 2\frac{\sigma'}{\sigma}w' + B. \tag{41.}$$

Ferner ist wegen

$$w = \omega - w':$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2w) + B = -\frac{\sigma'}{\sigma}(2w') + 2\eta + B = -2\frac{\sigma'}{\sigma}w' + 2\eta. \tag{42.}$$

Eine weitere Vereinfachung erzielt man noch dadurch, dass man wieder die Sigmafunctionen mit Index einführt. Nach E. F. S. 88 (4.) ist

$$\sigma_\alpha u = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{43.}$$

Setzt man darin zuerst

$$\alpha = 3, \quad \eta_3 = \eta', \quad \omega_3 = \omega'$$

und zugleich $\omega - u$ an Stelle von u, sodann

$$\alpha = 2, \quad \eta_2 = \eta + \eta', \quad \omega_2 = \omega + \omega'$$

und vereinigt die entstehenden beiden Formeln durch Division, wobei noch die Formel E. F. S. 71,

$$\sigma(\tilde{\omega} + u) = e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega} - u),$$

für $\tilde{\omega} = \omega_2$, $\tilde{\eta} = \eta_2$ zu benutzen ist, so erhält man

$$\frac{\sigma_3(\omega - u)}{\sigma_2 u} = e^{-\eta u - \eta'\omega}\frac{\sigma(\omega+\omega')}{\sigma\omega'}. \tag{44.}$$

Hierin werde jetzt für u der Werth $w' - u_1 i$, also wegen

$$w + w' = \omega$$

für $\omega - u$ der Werth $w + u_1 i$ gesetzt, so kommt

$$\frac{\sigma_3(w + u_1 i)}{\sigma_2(w' - u_1 i)} = e^{-\eta'\omega - \eta w' + \eta u_1 i}\frac{\sigma(\omega+\omega')}{\sigma\omega'}.$$

Stellt man diese Formel mit derjenigen durch Division zusammen, die aus ihr durch Vertauschung von u_1 mit $-u_1$ hervorgeht, so ergiebt sich schliesslich das Resultat

$$(45.)\qquad \frac{\sigma_2(w+u_1 i)}{\sigma_3(w-u_1 i)} = e^{2\eta u_1 i}\frac{\sigma_2(w'-u_1 i)}{\sigma_3(w'+u_1 i)}.$$

Um mit den erhaltenen Ergebnissen die beabsichtigte Umänderung der Inhaltsformel ausführen zu können, hat man zunächst auf die Gleichungen (31.) bis (34.) zurückzugehen. Durch Anwendung von (42.) und (45.), sowie entsprechender, daraus durch einfache Vertauschung der Bezeichnungen hervorgehender Formeln folgt

$$(46.)\qquad U_1 = \frac{\sigma_2(w'-u_1 i)}{\sigma_3(w'+u_1 i)} e^{2u_1 i \frac{\sigma'}{\sigma} w'},$$

$$(47.)\qquad U_2 = \frac{\sigma_2(w'-u_2)}{\sigma_3(w'+u_2)} e^{2u_2 \frac{\sigma'}{\sigma} w'}.$$

Weiter erhält man

$$(48.)\qquad U_1' = \frac{1}{i}\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w'-u_1 i) - \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w'+u_1 i)\right) - Cu_1,$$

$$(49.)\qquad U_2' = \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w'-u_2) - \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(w'+u_2) - Cu_2.$$

Was die beiden letzten Formeln anlangt, so kann man sie aus (45.) durch logarithmische Differentiation nach u_1 ableiten, hat sich aber dann noch der aus (43.) folgenden Gleichung

$$\frac{\sigma_\alpha'}{\sigma_\alpha} u = -\eta_\alpha + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+\omega_\alpha)$$

zu bedienen, um ein aus dem Exponentialfaktor herrührendes additives Glied wegzuschaffen. Unmittelbar kommt man durch logarithmische Differentiation von (45.) nach w' zum Ziel, und zwar auf Grund folgender Überlegung: Da die Sigmafunktionen drei von einander unabhängige Variable, das Argument und etwa die beiden Invarianten g_2, g_3, enthalten, so kann man in den vorstehenden Ausdrücken w', u_1, u_2 als von einander unabhängige Grössen ansehen, indem man diese drei und g_2, g_3 statt a, b, c, t_1, t_2, die ursprünglich auftraten, einführt.

Wegen

$$\frac{d}{dw'}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} w'\right) = -\wp w' = -\frac{1}{2} C$$

(vgl. (39.)) ergiebt sich

$$\frac{1}{i}\frac{d\log U_1}{dw'} = \frac{1}{i}\left(\frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_2}(w'-u_1 i) - \frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_2}(w'+u_1 i)\right) - Cu_1,$$

$$\frac{d\log U_2}{dw'} = \frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_2}(w'-u_2) - \frac{\mathfrak{S}_2'}{\mathfrak{S}_2}(w'+u_2) - Cu_2,$$

und daraus folgt

$$(50.)\qquad U_1' = \frac{1}{i}\frac{d\log U_1}{dw'},$$

$$(51.)\qquad U_2' = \frac{d\log U_2}{dw'}.$$

Damit erhält die Inhaltsformel die einfache Gestalt

$$(52.)\qquad J = \frac{1}{4i}\left(\log U_2 \frac{d\log U_1}{dw'} - \log U_1 \frac{d\log U_2}{dw'}\right).$$

Fünftes Kapitel.

Eindeutige Bestimmung der in der Formel für den Flächeninhalt des Ellipsoids auftretenden Logarithmen.

Zu den Ergebnissen des vorhergehenden Kapitels lassen sich noch eine Reihe Bemerkungen machen. Man kann, wie schon gesagt, die fünf ursprünglichen Daten der Aufgabe, nämlich a, b, c, t_1, t_2, durch die fünf anderen

$$g_2,\; g_3,\; w',\; u_1,\; u_2$$

ersetzen. Von diesen sind die Invarianten g_2, g_3 durch die Coefficienten der biquadratischen Function $R(t)$ bestimmt:

$$(1.)\qquad \begin{cases} g_2 = -4BB' + 3C^2 \\ g_3 = 2BCB' - B'^2 - C^3 \end{cases}$$

(vgl. E. F. S. 12), also in Folge von S. 49 (14.) auch durch a, b, c. Die Grösse w' ist alsdann aus der Formel S. 55 (39.),

$$\wp w' = \frac{1}{2} C,$$

zu ermitteln, und zwar als reelle positive Grösse, die zwischen 0 und ω gelegen sein muss (S. 55). Schliesslich sind u_1, u_2 durch die elliptischen Integrale erster Art nach den Formeln S. 51 (18.) und (19.) gegeben. Man kann sie vermittelst der Substitution S. 49 (16.) auf die Normalform bringen, sodass

$$u_1 = \int_{-\infty}^{s_1} \frac{-ds}{\sqrt{-S}},$$

$$u_2 = \int_{s_2}^{\infty} \frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

wird, unter s_1, s_2 die Werthe von s verstanden, die den Werthen t_1, t_2 der Variablen t entsprechen.

Wenn es sich, wie z. B. in der höheren Geodäsie, um numerische Berechnungen handelt, führt man am besten die ϑ-Reihen in die erhaltenen Formeln ein. Setzt man, um zunächst die Gleichungen S. 53 (31.) bis (34.) umzuformen,

$$w = 2\omega\, v,$$
$$iu_1 = 2\omega' v_1,$$
$$u_2 = 2\omega\, v_2,$$

so sind v, v_1, v_2 reelle Grössen, und wegen der Formeln (E. F. S. 171 (21.), (24.), S. 172 (27.), S. 173 (30.))

$$\mathfrak{S}_3 u = \quad e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_3(0)},$$

$$\mathfrak{S}\, u = 2\omega e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_0(0)}$$

erhält man

$$\frac{\mathfrak{S}_3(u_0+u)}{\mathfrak{S}_3(u_0-u)} e^{-u\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2u_0)} = \frac{\vartheta_3\left(\frac{u_0+u}{2\omega}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{u_0-u}{2\omega}\right)} e^{-\frac{u}{2\omega}\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}\left(\frac{u_0}{\omega}\right)}.$$

Mithin wird, wenn man w statt u_0, ferner $u_1 i$ und u_2 statt u schreibt und

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

setzt,

$$(2.) \qquad U_1 = \frac{\vartheta_3(v+v_1\tau)}{\vartheta_3(v-v_1\tau)} e^{-\left(2B\omega + \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(2v)\right)v_1\tau},$$

$$(3.) \qquad U_2 = \frac{\vartheta_3(v+v_2)}{\vartheta_3(v-v_2)} e^{-\left(2B\omega + \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(2v)\right)v_2},$$

$$(4.) \qquad U_1' = \frac{1}{2\omega i}\left(\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v-v_1\tau) - \frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v+v_1\tau)\right) - 2C\frac{\omega'}{i}v_1 - 4\eta\frac{\tau}{i}v_1,$$

$$(5.) \qquad U_2' = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v-v_2) - \frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v+v_2)\right) - 2C\,\omega\, v_2 - 4\eta v_2.$$

Genau in derselben Weise kann man auch in die Gleichungen S. 57 (46.) bis (49.) die ϑ-Functionen einführen. Man setzt

$$\mathfrak{S}_2 u = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_2(0)},$$

und indem man zu den Grössen v, v_1, v_2 noch eine vierte, v', mittels der Gleichung

$$w' = 2\omega v'$$

hinzunimmt, erhält man an Stelle des Systems der Gleichungen (2.) bis (5.) das folgende:

$$\text{(6.)} \qquad U_1 = \frac{\vartheta_2(v'-v_1\tau)}{\vartheta_2(v'+v_1\tau)} e^{2v_1\tau \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(v')},$$

$$\text{(7.)} \qquad U_2 = \frac{\vartheta_2(v'-v_2)}{\vartheta_2(v'+v_2)} e^{2v_2 \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(v')},$$

$$\text{(8.)} \qquad U_1' = \frac{1}{2\omega i}\left(\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(v'-v_1\tau) - \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(v'+v_1\tau)\right) - 2C\frac{\omega'}{i}v_1 - 4\eta\frac{\tau}{i}v_1,$$

$$\text{(9.)} \qquad U_2' = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(v'-v_2) - \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}(v'+v_2)\right) - 2C\,\omega\, v_2 - 4\eta v_2.$$

Diese Ausdrücke können nun besonders auch dazu dienen, zu entscheiden, welche Werthe der Logarithmen man in der Inhaltsformel S. 53 (35.),

$$\text{(10.)} \qquad 4J = U_1' \log U_2 - \frac{1}{i} U_2' \log U_1,$$

zu nehmen hat. Hierzu ist zu bemerken, dass in Folge der beiden Gleichungen

$$u_1 = \int_b^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{-R(t)}}$$

und

$$\frac{1}{i}\log U_1 = \int_b^{t_1} \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}},$$

von denen die erste mit der Formel S. 51 (18.) übereinstimmt, die zweite aus S. 52 (27.) und S. 53 (31.) hervorgeht, u_1 und $\frac{1}{i}\log U_1$ beständig zunehmen, wenn t_1 stetig wachsend von b zu a übergeht. Für $t_1 = a$ wird aber (S. 51 (17.))

$$u_1 = \frac{\omega'}{i},$$

d. h.

$$v_1 = \frac{1}{2},$$

und daher können u_1 und v_1 nur Werthe der Intervalle

$$0 \leqq u_1 \leqq \frac{\omega'}{i},$$

$$0 \leqq v_1 \leqq \frac{1}{2}$$

annehmen. Wegen $0 < w < \omega$ ist v eine auf das Intervall

$$0 < v < \frac{1}{2}$$

beschränkte Constante.

Nach ihrer geometrischen Bedeutung hängt nun die Grösse J eindeutig und stetig von den Werthen der Grössen t_1 und t_2 ab, und verschwindet, wenn eine dieser Grössen den Werth b annimmt. J ist daher auch eine stetige Function der Variablen v_1 und v_2, und muss verschwinden, wenn eine dieser Grössen gleich Null wird. Von den auf der rechten Seite der Gleichung (10.) auftretenden Grössen hängen in Folge der Formeln (2.) bis (5.) U_1 und U_1' von dem Parameter v_1, U_2 und U_2' aber von v_2 ab. Um zunächst die Abhängigkeit der Function J von v_1 zu prüfen, so ist U_1' eine eindeutige und stetige Function von v_1, die für $v_1 = 0$ verschwindet. Soll nun J die verlangten Eigenschaften haben, so muss es möglich sein, auch dem Logarithmus von U_1 eindeutig einen Werth beizulegen, der im Intervall

$$0 \leqq v_1 \leqq \frac{1}{2}$$

stetig verläuft und für $v_1 = 0$ verschwindet. Das ist zunächst nachzuweisen.

Bei der Festsetzung des Werthes von

$$\frac{1}{i} \log U_1$$

gemäss der Formel (2.) kommt es hauptsächlich auf den Ausdruck

$$\frac{1}{i} \log \frac{\vartheta_3(v + v_1\tau)}{\vartheta_3(v - v_1\tau)}$$

an. Da $v - v_1\tau$ conjugirt zu $v + v_1\tau$, so ist auch $\vartheta_3(v - v_1\tau)$ conjugirt zu

$\vartheta_3(v+v_1\tau)$; das Argument des Logarithmus hat also den absoluten Betrag Eins, und daher ist der vorstehende Ausdruck selbst gleich dem Arcus dieses Arguments. Legt man demnach dem Logarithmus seinen Hauptwerth bei, so hat man zu beweisen, dass der zugehörige Arcus als Function der beiden Parameter v, v_1 für alle zulässigen, d. h. den Bedingungen

$$0 < v < \frac{1}{2},$$

$$0 \leqq v_1 \leqq \frac{1}{2}$$

genügenden Werthe stetig verläuft, nur für $v_1 = 0$ verschwindet, und eindeutig bestimmt, d. h. stets in einem Intervall unterhalb 2π gelegen ist.

Aus der Formel (E. F. S. 171 (24.) und S. 164 (16.))

$$\text{(11.)} \qquad \vartheta_3(v) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-h^{2n}\right)\left(1-h^{2n-1}e^{2v\pi i}\right)\left(1-h^{2n-1}e^{-2v\pi i}\right)$$

folgt für

$$e^{\tau\pi i} = h,$$

wo $\tau\pi i$ reell und negativ, h also kleiner als Eins ist, durch Ausmultipliciren der beiden letzten Klammern unter dem Productzeichen und Ersetzen von v durch $v+v_1\tau$:

$$\vartheta_3(v+v_1\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-h^{2n}\right)h^{2n-1}\Big\{h^{2n-1}+h^{-(2n-1)} \\ -\left(e^{2v\pi i}e^{2v_1\tau\pi i}+e^{-2v\pi i}e^{-2v_1\tau\pi i}\right)\Big\}$$

oder

$$\text{(12.)} \quad \vartheta_3(v+v_1\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-h^{2n}\right)h^{2n-1}\Big\{e^{(2n-1)\tau\pi i}+e^{-(2n-1)\tau\pi i} \\ -\cos 2v\pi\left(e^{2v_1\tau\pi i}+e^{-2v_1\tau\pi i}\right)-i\sin 2v\pi\left(e^{2v_1\tau\pi i}-e^{-2v_1\tau\pi i}\right)\Big\}.$$

Das Aggregat der drei ersten Glieder in der geschweiften Klammer ist reell und möge mit a_n bezeichnet werden, das letzte Glied ist rein imaginär, übrigens vom Multiplicationsbuchstaben n unabhängig, es sei mit bi bezeichnet:

$$\text{(13.)} \quad \begin{cases} e^{(2n-1)\tau\pi i}+e^{-(2n-1)\tau\pi i}-\cos 2v\pi\left(e^{2v_1\tau\pi i}+e^{-2v_1\tau\pi i}\right) = a_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\sin 2v\pi\left(e^{2v_1\tau\pi i}-e^{-2v_1\tau\pi i}\right) = b. \end{cases}$$

Dann kann man zeigen, dass wenn v und v_1 auf die oben angegebenen Intervalle beschränkt werden, a_n stets positiv und von Null verschieden, dagegen b positiv und nur dann Null ist, wenn v_1 selbst den Werth Null hat.

Es ist nämlich

$$-1 < \cos 2v\pi < +1,$$

$$+2 \leqq e^{2v_1\tau\pi i} + e^{-2v_1\tau\pi i} \leqq e^{\tau\pi i} + e^{-\tau\pi i},$$

während $e^{(2n-1)\tau\pi i} + e^{-(2n-1)\tau\pi i}$ mindestens den Werth $e^{\tau\pi i} + e^{-\tau\pi i}$, nämlich für $n = 1$, hat, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung für a_n ergiebt. Und es ist

$$0 < \sin 2v\pi \leqq 1,$$

$$e^{\tau\pi i} - e^{-\tau\pi i} \leqq e^{2v_1\tau\pi i} - e^{-2v_1\tau\pi i} \leqq 0,$$

womit auch für b die Aussage bewiesen ist.

Da $v - v_1\tau$ zu $v + v_1\tau$ conjugirt ist, so folgt, dass sich $\vartheta_3(v - v_1\tau)$ in derselben Weise wie $\vartheta_3(v + v_1\tau)$ darstellen lässt, nur hat man bi durch $-bi$ zu ersetzen. Demnach wird

$$\frac{\vartheta_3(v + v_1\tau)}{\vartheta_3(v - v_1\tau)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib}{a_n - ib}, \tag{14.}$$

und dieser Ausdruck ist eine stetige Function von v_1, die für keinen Werth dieses Arguments verschwindet und für $v_1 = 0$ den Werth Eins annimmt.

Bezeichnet man nun mit log den Hauptwerth des natürlichen Logarithmus, so hat man wegen $a_n > 0$, $b \geqq 0$

$$\frac{1}{i} \log \frac{\vartheta_3(v + v_1\tau)}{\vartheta_3(v - v_1\tau)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{b}{a_n}, \tag{15.}$$

worin jeder der Functionen arctg ihr zwischen Null und $+\frac{\pi}{2}$ gelegener Werth beizulegen ist. Der durch die vorstehende Formel erklärte Werth des Logarithmus verschwindet nur für $v_1 = 0$. Man wäre nun am Ziele, wenn man erstens die Convergenz dieser Reihe für alle zulässigen Werthe von v, v_1 beweisen, und zweitens zeigen könnte, dass ihre Summe stets in einem Intervall gelegen ist, dessen Umfang den Betrag 2π nicht erreicht.

Zu dem Ende betrachte man den Ausdruck

$$\frac{1}{i}\log\frac{\vartheta_3(v+v_1\tau)}{\vartheta_3(v-v_1\tau)}$$

als Function der complexen Variablen v_1 und ermittele die Werthe, die er für

$$v_1 = \frac{1}{2}$$

und für

$$v_1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau}$$

annimmt, wenn unter log wieder der Hauptwerth des Logarithmus verstanden wird.

Hierzu kann man am einfachsten auf die Ausgangsformel (11.) für $\vartheta_3(v)$ zurückgehen, daraus

$$\frac{\vartheta_3(v+v_1\tau)}{\vartheta_3(v-v_1\tau)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-h^{2n-1+2v_1}e^{2v\pi i}}{1-h^{2n-1+2v_1}e^{-2v\pi i}}\cdot\frac{1-h^{2n-1-2v_1}e^{-2v\pi i}}{1-h^{2n-1-2v_1}e^{2v\pi i}}$$

und weiter, indem man von der für beliebige Grössen z, φ giltigen Formel

$$\frac{1}{i}\log\frac{1+ze^{i\varphi}}{1+ze^{-i\varphi}} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}$$

Gebrauch macht,

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\log\frac{\vartheta_3(v+v_1\tau)}{\vartheta_3(v-v_1\tau)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(&\operatorname{arc\,tg}\frac{h^{2n-1-2v_1}\sin 2v\pi}{1-h^{2n-1-2v_1}\cos 2v\pi}\\ &-\operatorname{arc\,tg}\frac{h^{2n-1+2v_1}\sin 2v\pi}{1-h^{2n-1+2v_1}\cos 2v\pi}\Bigg)\end{aligned} \tag{16.}$$

bilden. Die Vereinigung der beiden Glieder unter dem Summenzeichen nach dem Additionstheorem der Function arc tg würde die Gleichung (15.) ergeben, mit den durch (13.) definirten Ausdrücken für a_n und b, in denen jedoch v_1 jetzt eine complexe Grösse bedeutet. Nun erkennt man sogleich, dass sich für

$$v_1 = \frac{1}{2}$$

die Reihe auf der rechten Seite dieser Formel auf das erste Glied der ersten

Summe reducirt, sodass für den Hauptwerth des Logarithmus

$$(17.)\qquad \frac{1}{i}\log\frac{\vartheta_3(v+\frac{1}{2}\tau)}{\vartheta_3(v-\frac{1}{2}\tau)} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sin 2v\pi}{1-\cos 2v\pi} = (1-2v)\pi$$

herauskommt. Diese Grösse ist stets zwischen Null und π gelegen, wenn v auf die zulässigen Werthe $\left(0<v<\frac{1}{2}\right)$ beschränkt wird. Setzt man aber (16.)

$$v_1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau},$$

so reducirt sich die Reihe wegen $h^{\frac{1}{\tau}} = h^{-\frac{1}{\tau}} = -1$ auf das erste Glied der zweiten Summe, und man erhält für den Hauptwerth des Logarithmus

$$(18.)\qquad \frac{1}{i}\log\frac{\vartheta_3(v+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau)}{\vartheta_3(v-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau)} = 2v\pi.$$

Dieser Werth liegt ebenfalls zwischen Null und π, wenn v nur die zulässigen Werthe annimmt.

Dies vorausgeschickt, betrachte man nun wieder die Reihe (15.), um deren Convergenz es sich handelt, wobei v, v_1 auf die zulässigen Werthe (S. 63) zu beschränken sind. Das Intervall

$$0<v<\frac{1}{2}$$

werde in die beiden Theile

$$0<v\leqq\frac{1}{4}$$

und

$$\frac{1}{4}\leqq v<\frac{1}{2}$$

zerlegt.

Für alle Werthe von v, die dem ersten Theilintervall angehören, ist

$$\cos 2v\pi\geqq 0,$$

also, wie sich aus den Definitionsformeln (13.) für a_n und b wegen

$$e^{2v_1\tau\pi i}\pm e^{-2v_1\tau\pi i}\leqq e^{\tau\pi i}\pm e^{-\tau\pi i}$$

ergiebt,

$$a_n\geqq e^{(2n-1)\tau\pi i}+e^{-(2n-1)\tau\pi i}-\cos 2v\pi\left(e^{\tau\pi i}+e^{-\tau\pi i}\right),$$

$$b\leqq \sin 2v\pi\left(e^{-\tau\pi i}-e^{\tau\pi i}\right).$$

Die auf den rechten Seiten stehenden Ausdrücke ergeben sich aber aus a_n und b für $v_1 = \frac{1}{2}$. Also ist $\frac{b}{a_n}$ für beliebige der hier in Betracht kommenden Werthe von v_1 nicht grösser als der entsprechende Werth für $v_1 = \frac{1}{2}$. Das gilt auch für $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a_n}$. Demnach sind die Glieder der Reihe (15.) nicht grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe, die aus ihr hervorgeht, wenn man $v_1 = \frac{1}{2}$ setzt. Für diesen Werth aber convergirt die Reihe nach (17.), und ihre Summe liegt unterhalb π; also convergirt auch die Reihe (15.), und ihre Summe ist kleiner als π.

Für alle dem zweiten Intervall angehörigen Werthe von v ist wegen

$$\cos 2v\pi \leqq 0:$$

$$a_n \geqq e^{(2n-1)\tau\pi i} + e^{-(2n-1)\tau\pi i} + \cos 2v\pi \left(e^{\tau\pi i} + e^{-\tau\pi i}\right),$$

$$b \leqq \sin 2v\pi \left(e^{-\tau\pi i} - e^{\tau\pi i}\right).$$

Die Ausdrücke auf den rechten Seiten der beiden letzteren Ungleichungen ergeben sich jetzt aus a_n und b, wenn man darin für v_1 den complexen Werth $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau}$ einsetzt. Also ist $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a_n}$ für beliebige der hier zu betrachtenden reellen Werthe von v_1 nicht grösser als der entsprechende Werth für $v_1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau}$. Ertheilt man aber v_1 diesen complexen Werth, so convergirt die Reihe nach (18.), und ihre Summe liegt unterhalb π; dasselbe gilt somit auch für die Reihe (15.). Sie convergirt also, wenn v, v_1 beliebige zulässige Werthe annehmen.

Damit ist bewiesen: Durch die Formel (15.) wird eindeutig ein Werth von

$$\frac{1}{i} \log \frac{\vartheta_3(v + v_1\tau)}{\vartheta_3(v - v_1\tau)}$$

definirt; er ist für alle den Ungleichungen

$$0 < v < \frac{1}{2},$$

$$0 \leqq v_1 \leqq \frac{1}{2}$$

genügenden Werthe von v und v_1 stetig, stets unterhalb π gelegen und verschwindet, wenn v_1 gleich Null ist. Von allen Werthen, die man diesem Logarithmus beilegen kann, besitzt der durch die Reihe (15.) definirte allein diese Eigenschaften.

In dem Ausdruck (vgl. (2.))

$$\frac{1}{i}\log U_1 = \frac{1}{i}\log\frac{\vartheta_3(v+v_1\tau)}{\vartheta_3(v-v_1\tau)} - \left(2B\omega + \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(2v)\right)\frac{\tau}{i}v_1 \tag{19.}$$

ist somit dem Logarithmus auf der rechten Seite sein Hauptwerth beizulegen, dann wird die rechte Seite eine für alle zulässigen Werthe von v und v_1 eindeutige und stetige reelle Function, die für $v_1 = 0$ verschwindet.

Eine entsprechende Untersuchung, wie eben über die Functionen U_1 und U_1' in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter v_1, hat man nun auch über die Grössen U_2 und U_2' als Functionen von v_2 anzustellen. U_2' ist eine stetige Function von v_2, die für $v_2 = 0$ verschwindet. Aber auch den Werth von $\log U_2$ zu bestimmen macht keine Schwierigkeit; denn U_2 ist, wie die Formel S. 53 (32.) zeigt, beständig positiv, da $\sigma_3 u$ für reelle Werthe von u nicht verschwinden kann (vgl. E. F. S. 172), für $u = 0$ den positiven Werth Eins hat und demnach beständig positiv ist.

Damit ist der durch die Formel (10.) gelieferte Werth für den Inhalt des auf dem Ellipsoid gelegenen Dreiecks eindeutig bestimmt.

Sechstes Kapitel.

Berechnung der Gesammtoberfläche des Ellipsoids.

Um die gesammte Oberfläche des Ellipsoids zu bestimmen, hat man in der Formel für den Inhalt eines aus Krümmungslinien gebildeten Dreiecks, S. 49 (15.), $t_1 = a$ und $t_2 = b$ zu setzen. Der entstehende Werth von J ist dann gleich dem achten Theile der gesuchten Oberfläche. Will man die Formel S. 61 (10.),

$$4J = U_1' \log U_2 - \frac{1}{i} U_2' \log U_1, \tag{1.}$$

benutzen, so hat man zuerst die Werthe zu ermitteln, die die vier Grössen

$$\frac{1}{i} \log U_1, \quad \log U_2, \quad U_1', \quad U_2'$$

für die obigen Werthe von t_1, t_2 annehmen.

Für $t_1 = a$ wird (S. 61 und 62)

$$u_1 = \frac{\omega'}{i},$$

$$v_1 = \frac{1}{2};$$

unter Berücksichtigung der Gleichung S. 65 (17.) ergiebt sich daher aus S. 67 (19.)

$$\frac{1}{i} \log U_1 = (1-2v)\pi - \left(2B\omega + \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(2v)\right)\frac{\omega'}{2\omega i}.$$

Da

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2w) = 2\eta\frac{w}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}(2v)$$

ist, wie aus der schon auf S. 60 benutzten Formel für ϑ_0 folgt, so wird

$$\text{(2.)} \qquad \frac{1}{i}\log U_1 = (1-2v)\pi + 2\eta\frac{\omega' w}{\omega i} - \frac{\omega'}{i}\left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right).$$

Nimmt man die Relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}$$

hinzu, so erhält man das Ergebniss: Für $t_1 = a$ wird

$$\text{(3.)} \qquad \frac{1}{i}\log U_1 = \pi + 2\frac{\eta' w}{i} - \frac{\omega'}{i}\left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right).$$

Dieser Ausdruck hat nach dem im vorhergehenden Kapitel Bemerkten einen reellen positiven Werth.

Für $t_2 = c$ nimmt u_2 nach S. 51 (19.) den Werth

$$\int_c^b \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

an; durch die Substitution S. 50 (16.) wird dieses Integral, in dem unter $\sqrt{R(t)}$ der positive Wurzelwerth zu verstehen ist (S. 51), in

$$\text{(4.)} \qquad \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega$$

übergeführt. Nach S. 53 (32.) geht daher U_2 über in

$$\frac{\mathfrak{S}_3(w+\omega)}{\mathfrak{S}_3(w-\omega)} e^{-\left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)\omega}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\mathfrak{S}_3(w+\omega)}{\mathfrak{S}_3(w-\omega)} = e^{2\eta w},$$

wie sich z. B. leicht aus S. 56 (44.) herleiten lässt, und demnach wird, immer unter der Voraussetzung $t_2 = c$,

$$\text{(5.)} \qquad \log U_2 = 2\eta w - \left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)\omega.$$

Behandelt man in derselben Weise die Gleichungen S. 53 (33.), (34.) und beachtet dabei die Formel

$$\frac{\mathfrak{S}_3'}{\mathfrak{S}_3}u = -\eta' + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega'+u) = \eta' - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega'-u),$$

so findet man

(6.) $$U_1' = -2\frac{\eta'}{i} - C\frac{\omega'}{i}$$

und

(7.) $$U_2' = -2\eta \; - C\omega.$$

Die erhaltenen Werthe für $\frac{1}{i}\log U_1$, $\log U_2$, U_1', U_2' sind nun in die Formel (1.) einzutragen. Es ist dann $4J$ gleich $\pi(2\eta + C\omega)$, vermehrt um einen durch i zu dividirenden Ausdruck, der sich in folgender Weise vereinfachen lässt:

$$-(2\eta' + C\omega')\left(2\eta w - \left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)\omega\right) + (2\eta + C\omega)\left(2\eta' w - \left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)\omega'\right)$$
$$= \left(B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right)(2\omega\eta' - 2\eta\omega') - 2Cw(\eta\omega' - \omega\eta')$$
$$= -i\pi\left(Cw + B + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w)\right).$$

Die in Rede stehende gesammte Oberfläche des Ellipsoids, die mit O bezeichnet werden möge, ist also durch die Formel

(8.) $$O = 2\pi\left(2\eta - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w) - C(w-\omega) - B\right),$$

oder wegen

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u + 2\omega) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}u + 2\eta$$

durch

(9.) $$O = 2\pi\left(\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}2(\omega - w) + C(\omega - w) - B\right)$$

zu bestimmen.

Bei Einführung von w' (S. 54 (38.)) wird

(10.) $$O = 2\pi\left(\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(2w') + Cw' - B\right),$$

oder (S. 56 (41.))

(11.) $$O = 4\pi\left(\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}w' + \frac{1}{2}Cw'\right).$$

Schliesslich ergiebt sich nach S. 55 (39.)

(12.) $$O = 4\pi\left(\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}w' + w'\wp w'\right).$$

Die letzte Formel ist wegen ihrer besonderen Einfachheit bemerkenswerth. Die darin vorkommenden Functionen $\mathfrak{S}u$ und $\wp u$ sind ausser von w' noch von den Invarianten g_2, g_3 oder von den Grössen e_1, e_2, e_3 abhängig, die sich in einer sogleich zu erörternden Weise durch die gegebenen Constanten des Ellipsoids, a, b, c, ausdrücken lassen. Auch w' selbst ist nach der dafür abgeleiteten Formel durch a, b, c bestimmt. Die Gleichung (12.) ist für numerische Rechnungen sehr geeignet, wenn man sich der ϑ-Reihen bedient.

Giebt man übrigens, auf die Formel (1.) noch einmal zurückgreifend, t_1 oder u_1 einen bestimmten Werth, und setzt zugleich $t_2 = c$, d. h. $u_2 = \omega$, so stellt $4J$ den Inhalt der von der Krümmungslinie der ersten Schar, die den Parameter t_1 hat, umschlossenen, die Punkte E, E_3 enthaltenden Fläche dar. Ebenso bekommt man, wenn man $t_1 = a$, $u_1 i = \omega'$ setzt, die Fläche, die von der Krümmungslinie der anderen, zu t_2 gehörenden Schar begrenzt wird und die Punkte E_1, E_3 enthält.

Die schon auf S. 54 angewendete Substitution

$$s = \frac{B'}{t} + \frac{1}{2}C$$

lässt in Verbindung mit der Thatsache, dass nach S. 49 (14.)

$$B' = -\frac{1}{4}abc < 0,$$

$$C = \frac{1}{6}(bc+ca+ab) > 0$$

ist, erkennen, dass die Wurzeln der cubischen Gleichung $S = 0$ die Werthe

$$(13.)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 &= \frac{C}{2} + \frac{B'}{a} \\ e_2 &= \frac{C}{2} + \frac{B'}{b} \\ e_3 &= \frac{C}{2} + \frac{B'}{c} \end{aligned}\right.$$

haben, woraus

$$(14.)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 - e_3 &= \frac{1}{4}b(a-c) \\ e_2 - e_3 &= \frac{1}{4}a(b-c) \\ e_1 - e_2 &= \frac{1}{4}c(a-b) \end{aligned}\right.$$

folgt.

Ist nun

$$a = b = c = r^2,$$

so geht das Ellipsoid in eine Kugel vom Radius r über. Wie die vorstehenden Formeln zeigen, werden in diesem Falle alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 gleich Null. Ferner gilt (E. F. S. 102)

$$\wp u = \frac{1}{u^2},$$
$$\sigma u = u.$$

Man hat demnach wegen S. 55 (39.)

$$\wp w' = \frac{1}{2} C = \frac{1}{4} r^4,$$
$$w' = \frac{2}{r^2},$$
$$\frac{\sigma'}{\sigma} w' + w' \wp w' = \frac{2}{w'} = r^2,$$

und somit nach der Formel (12.)

$$O = 4\pi r^2,$$

wie es sein muss.

Wir kehren noch einmal zu der Formel (12.) für die Gesammtoberfläche des Ellipsoids zurück, um sie auf einem anderen und directeren Wege abzuleiten. Bei der Bestimmung der Grösse J nach der Gleichung (1.) und demnach auch der gesammten Oberfläche war eine besondere Erörterung darüber nöthig, welche Werthe man den in der Formel auftretenden Logarithmen zu ertheilen habe. Dazu hatte man die Darstellung der ϑ-Functionen durch unendliche Producte zu Hilfe zu nehmen. Man kann diese etwas weitläufige Rechnung vermeiden, wenn man unmittelbar von der Integraldarstellung der gesammten Oberfläche,

$$O = 2\int_c^b \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} \int_b^a \frac{t^2 + 2Bt}{\sqrt{-R(t)}}\,dt - 2\int_c^b \frac{t^2+2Bt}{\sqrt{R(t)}}\,dt \int_b^a \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}}$$

ausgeht, wie sie aus der Formel S. 40 (12.) für $t_1 = a$, $t_2 = c$ und nach Multiplication mit dem Faktor 8 entspringt, und sich die im zweiten Kapitel erhaltenen Ergebnisse zu Nutze macht, die die Berechnung eines elliptischen

Integrals von der Form

$$\int_0^{\tilde{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du$$

betreffen.

Zunächst ist nach den Formeln S. 45 (8.) und S. 47 (10.) für $A = 1$

$$t + B = \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0),$$

$$t^2 + 2Bt = \wp(u+u_0) + \wp(u-u_0) - C.$$

Zufolge E. F. S. 37 (15.),

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

kann man für die erste auch

$$t + B = 2\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) - \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}$$

schreiben.

Um die in dem Ausdrucke für O auftretenden Integrale auf die Normalform zu bringen, führe man wieder die Substitution S. 50 (16.),

$$s = \frac{1}{4}\frac{R'(b)}{t-b} + \frac{1}{24}R''(b),$$

$$u = \int_b^t \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

ein, wodurch (S. 70 (4.))

$$\int_c^b \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega$$

wird. Wenn t die Strecke $(c \dots b)$ stetig durchläuft, so geht u von ω bis 0. In den Integralen, die in der Formel für O vorkommen, sind aber ebenso, wie in dem vorstehenden für ω, den Wurzeln $\sqrt{R(t)}$ und $\sqrt{-R(t)}$ ihre positiven Werthe zu ertheilen. Demgemäss wird

$$\int_c^b \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_0^{\omega}\left(2\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) - B - \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\right)du$$

$$= 2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}u_0 - \omega\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) - B\omega - \int_0^{\omega}\frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}du.$$

In allen diesen Formeln bedeutet, wie im vierten Kapitel (S. 51 (21.)), u_0 die complexe Constante $\omega - w' + \omega'$, wobei w' eine reelle zwischen 0 und ω gelegene Grösse ist (S. 55). Das noch übrig bleibende Integral ist im zweiten Kapitel berechnet worden (S. 20 (4.)); es gilt die Formel

$$\int_0^{\omega} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du = 2\omega \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - 2\eta u_0 + \pi i,$$

falls in der Darstellung

$$u_0 = 2m\omega + 2m'\omega'$$

m' zwischen 0 und 1 liegt. Diese Bedingung ist hier erfüllt, denn der Werth von u_0 zeigt unmittelbar, dass

$$m' = \frac{1}{2}$$

zu nehmen ist. Setzt man den Werth für das Integral ein und berücksichtigt, dass wegen E. F. S. 70 (8.)

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) = \frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega + 2\omega' - 2w') = 2\eta + 2\eta' - \frac{\sigma'}{\sigma}(2w'),$$

also nach S. 56 (41.)

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) = 2\eta + 2\eta' - 2\frac{\sigma'}{\sigma} w' - B$$

ist, so folgt nach einer einfachen Rechnung mit Rücksicht auf $\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{\pi i}{2}$

$$\int_c^b \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}} = 2\omega \frac{\sigma'}{\sigma} w' - 2\eta\omega'.$$

Das entsprechende Integral

$$\int_b^a \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}} = i\int_b^a \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}}$$

geht durch dieselbe Substitution, wobei jetzt dem Intervall $(b \ldots a)$ für t das Intervall $(-\infty \ldots e_3)$ für s, also das Intervall $(0 \ldots \omega')$ für u entspricht, in

$$-i\int_0^{\omega'} \left(2\frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) - B - \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\right) du$$
$$= -2i\omega' \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 + i\omega' \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0) + i\omega' B + i\int_0^{\omega'} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du$$

über. Das Vorzeichen ist richtig bestimmt, denn in dem vorgelegten Integral sollte der Quadratwurzel ihr positiver Werth beigelegt werden. Indem man nun die Formel S. 22 (6.),

$$\int_0^{\omega'} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} du = 2\omega' \frac{\sigma'}{\sigma} u_0 - 2\eta' u_0 - \pi i,$$

benutzt und dieselben Vereinfachungen ausführt, wie oben, erhält man

$$\int_b^a \frac{t\,dt}{\sqrt{-R(t)}} = 2\frac{\omega'}{i}\frac{\sigma'}{\sigma} w' - 2\frac{\eta'}{i} w'.$$

Die beiden noch fehlenden Integrale berechnen sich nach dem Vorhergehenden ohne Schwierigkeit. Es wird

$$\begin{aligned}
\int_c^b \frac{t^2 + 2Bt}{\sqrt{R(t)}} dt &= \int_0^{\omega} (\wp(u+u_0) + \wp(u-u_0))\, du - C\omega \\
&= -\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)\right]_0^{\omega} - C\omega \\
&= -\frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega + \omega' - w') + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega' - w') - C\omega \\
&= -2\eta - C\omega, \\
\int_b^a \frac{t^2 + 2Bt}{\sqrt{-R(t)}} dt &= -i\int_0^{\omega'} (\wp(u+u_0) + \wp(u-u_0))\, du + i\omega' C \\
&= \quad i(2\eta' + C\omega').
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt die vier erhaltenen Integrale in O ein, so ergiebt sich nach Ausführung der Rechnung

$$O = 4\pi\left(\frac{\sigma'}{\sigma} w' + w' \wp w'\right),$$

derselbe Werth, wie in der Formel S. 71 (12.).

Die Bestimmung der Oberfläche des Ellipsoids kann man auch, wie es Borchardt im 19. Bande des Journal de Mathématiques pures et appliquées (S. 369—394; 1854) gethan hat, mit einer Volumenbestimmung in Beziehung bringen, d. h. man kann das Doppelintegral durch ein dreifaches ersetzen. Die Doppelintegrale, mittels deren der Inhalt einer Fläche ausgedrückt wird, haben meistens keine symmetrische Gestalt, wenn in ihnen eine der drei cartesischen Coordinaten durch die beiden anderen dargestellt wird. Dieser Nachtheil fällt bei den dreifachen Integralen weg. In seiner Abhandlung hat Borchardt auf diesem Wege einen merkwürdigen Zusammenhang aufgedeckt, der zwischen den beiden Problemen der Bestimmung der Oberfläche und des Potentials eines homogenen Ellipsoids besteht. Darauf wird im folgenden Kapitel noch zurückzukommen sein.

Dritter Abschnitt.

DAS POTENTIAL EINES HOMOGENEN ELLIPSOIDS UND EINER HOMOGENEN ELLIPSE.

Siebentes Kapitel.

Das Potential eines homogenen, von einer ellipsoidischen Oberfläche begrenzten Körpers.

Wie in der Mechanik gezeigt wird, hat das Potential eines homogenen Ellipsoids für einen im Innern oder auf der Oberfläche liegenden Punkt, dessen Coordinaten, bezogen auf die Hauptaxen des Ellipsoids, x, y, z sind, den Werth

$$V = \int_0^\infty \pi\alpha\beta\gamma\left(1 - \frac{x^2}{t+\alpha^2} - \frac{y^2}{t+\beta^2} - \frac{z^2}{t+\gamma^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{1.}$$

Darin ist

$$R(t) = (t+\alpha^2)(t+\beta^2)(t+\gamma^2)$$

gesetzt, und die Dichtigkeit des Körpers gleich Eins angenommen worden, während

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \tag{2.}$$

die Gleichung der Ellipsoidfläche ist.

Eine ähnliche Formel gilt, wenn der Punkt ausserhalb des Ellipsoids liegt, nur tritt dann an Stelle der unteren Grenze Null des Integrals die kleinste positive Wurzel ϱ der Gleichung

$$1 - \frac{x^2}{t+\alpha^2} - \frac{y^2}{t+\beta^2} - \frac{z^2}{t+\gamma^2} = 0.$$

Setzt man aber in dem Integral $t+\varrho$ statt t, so kann man ϱ zu $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ hinzunehmen, und dann hat das Integral auch für einen äusseren Punkt die obige Form (1.).

Da x, y, z von t unabhängig sind, so zerfällt das Integral in die Summe von vieren, deren erstes das Potential für den Mittelpunkt des Ellipsoids darstellt. Sie sind sämmtlich elliptische Integrale, deren Berechnung sich deswegen ziemlich einfach gestaltet, weil $R(t)$ nur vom dritten Grade ist, und die Functionen unter den Integralzeichen nur dann unendlich gross werden, wenn $R(t)$ verschwindet.

Setzt man, wie in den vorhergehenden Kapiteln,

$$R(t) = At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4B't + A',$$

so haben die Coefficienten folgende Werthe:

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= \frac{1}{4}, \\ C &= \frac{1}{6}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2), \\ B' &= \frac{1}{4}(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2), \\ A' &= \alpha^2\beta^2\gamma^2. \end{aligned}$$

Um die Integrale auf die Normalform zu bringen, hat man sich der Substitution

$$s = Bt + \frac{1}{2}C,$$
$$\sqrt{S} = -B\sqrt{R(t)}$$

(E. F. S. 16 (IX.)) zu bedienen, wobei zu dem Werthe $s=\infty$ der Werth $t=\infty$ gehört. Statt dessen ist es hier aber zweckmässiger,

$$(3.)\quad \begin{aligned} s &= Bt+\frac{1}{2}C = \frac{1}{4}t+\frac{1}{12}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ \sqrt{S} &= +B\sqrt{R(t)} = +\frac{1}{4}\sqrt{R(t)} \end{aligned}$$

zu setzen und den Wurzeln die positiven Zeichen zu ertheilen, dann wird

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Wenn
$$\alpha > \beta > \gamma$$
vorausgesetzt wird, so entspricht dem Werthe $t = 0$ ein Werth s_0 von s, der grösser ist als die grösste Wurzel e_1 der Gleichung $S = 0$. Denn bei wachsenden Werthen von t verschwindet $R(t)$ zum ersten Male für den kleinsten der drei möglichen Werthe von t, nämlich $t = -\alpha^2$, sodann für $t = -\beta^2$ und schliesslich für $t = -\gamma^2$. Wegen
$$e_1 > e_2 > e_3$$
entsprechen diesen Werthen also der Reihe nach $s = e_3$, $s = e_2$, $s = e_1$. Da jene Werthe von t sämmtlich unterhalb Null gelegen sind, so muss dem Werthe $t = 0$ ein oberhalb e_1 gelegener Werth s_0 von s entsprechen, und zwar ist
$$s_0 = \frac{1}{2}C = \frac{1}{12}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$
$$s = s_0 + \frac{1}{4}t.$$
Es wird ferner
$$(4.)\qquad \begin{cases} e_1 = s_0 - \frac{1}{4}\gamma^2 \\ e_2 = s_0 - \frac{1}{4}\beta^2 \\ e_3 = s_0 - \frac{1}{4}\alpha^2, \end{cases}$$
mithin
$$(5.)\qquad \begin{cases} e_1 - e_2 = \frac{1}{4}(\beta^2-\gamma^2) \\ e_1 - e_3 = \frac{1}{4}(\alpha^2-\gamma^2) \\ e_2 - e_3 = \frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2). \end{cases}$$
Daraus folgt
$$t + \alpha^2 = 4(s - s_0) + \alpha^2,$$
also
$$t + \alpha^2 = 4(s - e_3),$$
$$t + \beta^2 = 4(s - e_2),$$
$$t + \gamma^2 = 4(s - e_1).$$

Durch die Substitution (3.) wird das Integral

$$\int_\infty F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

worin $F(t)$ eine rationale Function ihres Argumentes sein soll, in

$$\int_\infty F_1(s) \frac{ds}{\sqrt{S}}$$

verwandelt, wobei $F_1(s)$ dieselbe Bedeutung hat. Nach dem Vorhergehenden ist somit

$$\int_0^\infty F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_{s_0}^\infty F_1(s) \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

und hierin hat man für den vorliegenden Fall

$$F(t) = 1 - \frac{x^2}{t+\alpha^2} - \frac{y^2}{t+\beta^2} - \frac{z^2}{t+\gamma^2},$$

also

$$F_1(s) = 1 - \frac{1}{4}\frac{x^2}{s-e_3} - \frac{1}{4}\frac{y^2}{s-e_2} - \frac{1}{4}\frac{z^2}{s-e_1}$$

zu setzen. Das Potential des Ellipsoids für einen inneren Punkt wird demnach

$$V = \pi\alpha\beta\gamma \int_{s_0}^\infty \left(1 - \frac{1}{4}\frac{x^2}{s-e_3} - \frac{1}{4}\frac{y^2}{s-e_2} - \frac{1}{4}\frac{z^2}{s-e_1}\right) \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Nimmt man jetzt

$$u = \int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_\infty^s \frac{-ds}{\sqrt{S}},$$

$$v = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_\infty^{s_0} \frac{-ds}{\sqrt{S}},$$

d. h.

$$s = \wp u,$$
$$s_0 = \wp v,$$

so folgt

$$t = 4(\wp u - \wp v)$$

und daher

$$(6.) \qquad V = \pi\alpha\beta\gamma \int_0^v \left(1 - \frac{x^2}{4(\wp u - e_3)} - \frac{y^2}{4(\wp u - e_2)} - \frac{z^2}{4(\wp u - e_1)}\right) du.$$

Von den vier Integralen, in die das vorliegende zerfällt, hat das erste, von dem constanten Factor abgesehen, den Werth v, und es handelt sich nun um die Berechnung der drei anderen. Dazu hat man die oft benutzte Formel

$$\wp(u+\omega_\alpha)-e_\alpha = \frac{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}{\wp u - e_\alpha} \qquad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3;\ \alpha \lesseqgtr \beta \lesseqgtr \gamma)$$

heranzuziehen und erhält

$$\int_0^v \frac{1}{4}\frac{du}{\wp u - e_\alpha} = \frac{1}{4(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}\left(-\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega_\alpha+v)-e_\alpha v+\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\omega_\alpha\right).$$

Es ist aber (E. F. S. 88 (4.))

$$\mathfrak{S}(\omega_\alpha+u) = \mathfrak{S}\omega_\alpha . e^{\eta_\alpha u}\mathfrak{S}_\alpha u, \tag{7.}$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(\omega_\alpha+u) = \eta_\alpha + \frac{\mathfrak{S}'_\alpha}{\mathfrak{S}_\alpha}u, \tag{8.}$$

und daher

$$-\int_0^v \frac{1}{4}\frac{du}{\wp u - e_\alpha} = \frac{1}{4(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}\left(\frac{\mathfrak{S}'_\alpha}{\mathfrak{S}_\alpha}v+e_\alpha v\right).$$

Hiernach nimmt V folgende Gestalt an:

$$V = \pi\alpha\beta\gamma\left(v+\frac{\mathfrak{A}x^2}{4(e_3-e_1)(e_3-e_2)}+\frac{\mathfrak{B}y^2}{4(e_2-e_3)(e_2-e_1)}+\frac{\mathfrak{C}z^2}{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\right). \tag{9.}$$

Zur Abkürzung ist darin

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{S}'_3}{\mathfrak{S}_3}v+e_3 v &= \mathfrak{A}\\ \frac{\mathfrak{S}'_2}{\mathfrak{S}_2}v+e_2 v &= \mathfrak{B}\\ \frac{\mathfrak{S}'_1}{\mathfrak{S}_1}v+e_1 v &= \mathfrak{C}\end{aligned}\right. \tag{10.}$$

gesetzt worden.

Damit ist die vorgelegte Aufgabe der Potentialbestimmung an sich gelöst. Es soll aber der erhaltene Ausdruck noch umgeformt werden, wodurch der im vorhergehenden Kapitel erwähnte Zusammenhang zwischen den Formeln für das Potential und für die Oberfläche des Ellipsoids zu Tage treten wird.

Aus der Formel

$$\left(\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}v\right)^2 = \wp v - e_\alpha$$

folgt

$$\frac{\mathfrak{G}'_\alpha}{\mathfrak{G}_\alpha} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v + \frac{1}{2} \frac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha},$$

und wenn man jene Formel noch einmal benutzt und die Gleichung E. F. S. 90 (9.),

$$\wp' v = -2 \frac{\mathfrak{G}_1 v\, \mathfrak{G}_2 v\, \mathfrak{G}_3 v}{\mathfrak{G}^3 v},$$

hinzunimmt,

$$\frac{\mathfrak{G}'_\alpha}{\mathfrak{G}_\alpha} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{\mathfrak{G}_1 v\, \mathfrak{G}_2 v\, \mathfrak{G}_3 v}{\mathfrak{G}^2_\alpha v\, \mathfrak{G} v},$$

d. h.

$$\frac{\mathfrak{G}'_1}{\mathfrak{G}_1} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{\mathfrak{G}_2 v\, \mathfrak{G}_3 v}{\mathfrak{G}_1 v\, \mathfrak{G} v},$$

$$\frac{\mathfrak{G}'_2}{\mathfrak{G}_2} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{\mathfrak{G}_3 v\, \mathfrak{G}_1 v}{\mathfrak{G}_2 v\, \mathfrak{G} v},$$

$$\frac{\mathfrak{G}'_3}{\mathfrak{G}_3} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{\mathfrak{G}_1 v\, \mathfrak{G}_2 v}{\mathfrak{G}_3 v\, \mathfrak{G} v}.$$

Im vorliegenden Falle vereinfachen sich diese Formeln erheblich; mit Rücksicht auf (4.) ist nämlich

$$\frac{\mathfrak{G}_1 v}{\mathfrak{G} v} = \sqrt{s_0 - e_1} = \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{\mathfrak{G}_2 v}{\mathfrak{G} v} = \sqrt{s_0 - e_2} = \frac{1}{2}\beta,$$

$$\frac{\mathfrak{G}_3 v}{\mathfrak{G} v} = \sqrt{s_0 - e_3} = \frac{1}{2}\alpha,$$

also

$$\frac{\mathfrak{G}'_1}{\mathfrak{G}_1} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

$$\frac{\mathfrak{G}'_2}{\mathfrak{G}_2} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{1}{2} \frac{\gamma\alpha}{\beta},$$

$$\frac{\mathfrak{G}'_3}{\mathfrak{G}_3} v = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v - \frac{1}{2} \frac{\beta\gamma}{\alpha},$$

und es ergiebt sich demnach

$$(11.) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v + \left(s_0 - \frac{1}{4}\alpha^2\right) v - \frac{1}{2} \frac{\beta\gamma}{\alpha} \\ \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v + \left(s_0 - \frac{1}{4}\beta^2\right) v - \frac{1}{2} \frac{\gamma\alpha}{\beta} \\ \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}} v + \left(s_0 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) v - \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta}{\gamma}. \end{cases}$$

Zur Berechnung des Potentials hat man also zunächst

$$s_0 = \frac{1}{12}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

sodann

$$e_1 = s_0 - \frac{1}{4}\gamma^2 = \frac{1}{12}(\alpha^2+\beta^2-2\gamma^2),$$

$$e_2 = s_0 - \frac{1}{4}\beta^2 = \frac{1}{12}(\gamma^2+\alpha^2-2\beta^2),$$

$$e_3 = s_0 - \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{12}(\beta^2+\gamma^2-2\alpha^2),$$

danach v aus der Gleichung

$$\wp v = s_0$$

zu bestimmen, und zwar muss man den kleinsten positiven reellen Werth von v nehmen, der diese Gleichung befriedigt. Da nämlich s_0 zwischen e_1 und ∞ gelegen und $\sqrt{S}$ positiv ist, so muss v zwischen 0 und ω liegen (vgl. die Tabelle auf S. 21). Aus den so erhaltenen Grössen berechnet man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach (11.), wodurch das Potential nach (9.) bestimmt ist.

Jeder der Ausdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und somit auch das Potential selbst ist von der Form

$$c_1 \frac{\sigma'}{\sigma} v + c_2 v + c_3,$$

wo c_1, c_2, c_3 von v unabhängige Grössen bedeuten. Ein Blick auf die Formel S. 71 (11.) lehrt, dass auch die Oberfläche des Ellipsoids sich in dieser Form darstellen lässt.

Man betrachte neben dem ursprünglichen Ellipsoid dasjenige, das durch die Gleichung

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 1$$

definirt wird, und bestimme dessen Oberfläche nach den Ergebnissen des zweiten Abschnitts. Es sei

$$w = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{\sqrt{t\left(t-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(t-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(t-\frac{1}{\gamma^2}\right)}},$$

oder wenn die Integrationsvariable t durch $-\frac{1}{t}$ ersetzt wird,

$$w = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\left(1+\frac{t}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{t}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{t}{\gamma^2}\right)}};$$

w entspricht der auf S. 54 mit w' bezeichneten Grösse. Ferner seien $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ die Grössen, die aus den im zweiten Abschnitt mit e_1, e_2, e_3, g_2, g_3 bezeichneten hervorgehen, wenn man, den Bedingungen (S. 30)

$$a > b > c$$

entsprechend,

$$\frac{1}{\gamma^2}, \quad \frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{1}{\alpha^2}$$

an die Stelle von

$$a, \quad b, \quad c$$

treten lässt. Schliesslich sei noch

$$\bar{\sigma} w = \sigma(w;\, \bar{g}_2, \bar{g}_3).$$

Nach S. 72 (14.) ist

$$\bar{e}_1 - \bar{e}_3 = \frac{1}{4\beta^2}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{e_1 - e_3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2},$$
$$\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = \frac{1}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) = \frac{e_1 - e_2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2},$$
$$\bar{e}_2 - \bar{e}_3 = \frac{1}{4\gamma^2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{e_2 - e_3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2},$$

woraus

$$\bar{e}_\lambda = \frac{e_\lambda}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

und weiter

$$\bar{g}_2 = \frac{g_2}{(\alpha\beta\gamma)^4},$$
$$\bar{g}_3 = \frac{g_3}{(\alpha\beta\gamma)^6}$$

folgt. Zwischen den Grössen w und v besteht der Zusammenhang

$$(12.) \qquad w = \alpha\beta\gamma\, v,$$

wie sich sofort aus einer Vergleichung der beiden Integrale ergiebt, durch die diese Grössen definirt werden. Ferner ist nach E. F. S. 44 (13.), wenn m eine beliebige Constante bedeutet,

$$\sigma(v;\, g_2, g_3) = m\sigma\left(\frac{v}{m};\, m^4 g_2,\, m^6 g_3\right),$$

mithin, wenn man

$$m = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

nimmt,

$$\sigma v = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\bar{\sigma} w,$$

daher

$$\sigma' v = \bar{\sigma}' w$$

und

$$\frac{\sigma'}{\sigma} v = \alpha\beta\gamma \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} w.$$

Dies vorausgeschickt, bezeichne man die Oberfläche des durch die Gleichung

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 1$$

definirten Ellipsoids, das mit dem gegebenen in der bekannten geometrischen Beziehung der Reciprocität steht, mit $\bar{O}$, so ist nach S. 71 (11.)

$$\bar{O} = 4\pi\left(\frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} w + \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{12\alpha^2\beta^2\gamma^2} w\right), \tag{13.}$$

also

$$\frac{\sigma'}{\sigma} v + s_0 v = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\pi} \bar{O}.$$

Das Potential des ursprünglich gegebenen Ellipsoids hat demnach die Form

$$\begin{aligned} V = \pi w &+ \frac{\bar{O}\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \pi w\alpha^2 - 2\pi\beta^2\gamma^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)} x^2 \\ &+ \frac{\bar{O}\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \pi w\beta^2 - 2\pi\gamma^2\alpha^2}{(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)} y^2 \\ &+ \frac{\bar{O}\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \pi w\gamma^2 - 2\pi\alpha^2\beta^2}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)} z^2. \end{aligned} \tag{14.}$$

Es ist also in einfacher Weise zu bestimmen, wenn man den Werth w des elliptischen Integrals erster Art, sowie die Oberfläche des reciproken Ellipsoids kennt.

Liegt der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Körpers, so hat man, wenn ϱ die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\varrho}+\frac{y^2}{\beta^2+\varrho}+\frac{z^2}{\gamma^2+\varrho} = 1$$

bedeutet,

$$(15.)\quad V = \pi\alpha\beta\gamma\int_\varrho^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+t}-\frac{y^2}{\beta^2+t}-\frac{z^2}{\gamma^2+t}\right)\frac{dt}{\sqrt{(t+\alpha^2)(t+\beta^2)(t+\gamma^2)}},$$

entsprechend der am Anfang des Kapitels gemachten Bemerkung. Dann ist, wenn t durch $t+\varrho$ ersetzt wird,

$$V = \pi\alpha\beta\gamma\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2+\varrho+t}-\frac{y^2}{\beta^2+\varrho+t}-\frac{z^2}{\gamma^2+\varrho+t}\right)\frac{dt}{\sqrt{\mathfrak{R}(t)}},$$

wo

$$\mathfrak{R}(t) = (t+\alpha^2+\varrho)(t+\beta^2+\varrho)(t+\gamma^2+\varrho).$$

Man erhält also in diesem Falle den Werth von V durch die Formel (9.), wenn man in dem Ausdrucke innerhalb der Klammern

$$\alpha^2+\varrho,\quad \beta^2+\varrho,\quad \gamma^2+\varrho$$

für

$$\alpha^2,\qquad \beta^2,\qquad \gamma^2$$

setzt. Dadurch ändern sich die Grössen e_1, e_2, e_3 nicht, s_0 aber geht in $s_0+\frac{1}{4}\varrho$ über. Es bleiben also die Gleichungen (10.) bestehen, wenn man in ihnen jetzt

$$v = \int_\varrho^\infty\frac{dt}{\sqrt{(t+\alpha^2)(t+\beta^2)(t+\gamma^2)}}$$
$$= \int_{s_0+\frac{1}{4}\varrho}^\infty\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

annimmt. In den Ausdrücken (11.) der Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ hat man ferner

$$\sqrt{\alpha^2+\varrho},\quad \sqrt{\beta^2+\varrho},\quad \sqrt{\gamma^2+\varrho}$$

an Stelle von

$$\alpha,\qquad \beta,\qquad \gamma$$

zu nehmen, wobei die Grössen

$$s_0 - \frac{1}{4}\alpha^2, \quad s_0 - \frac{1}{4}\beta^2, \quad s_0 - \frac{1}{4}\gamma^2$$

ungeändert bleiben.

Bezeichnet man mit X, Y, Z die den Coordinatenaxen parallelen Anziehungscomponenten, so hat man, mag der angezogene Punkt ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegen,

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{8\mathfrak{A}x}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{8\mathfrak{B}y}{(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)},$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{8\mathfrak{C}z}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)}.$$

Für das Rotationsellipsoid und die Kugel gehen die elliptischen Functionen in elementare Functionen über, denn dann werden entweder zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 oder alle drei einander gleich.

Achtes Kapitel.

Bestimmung des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi + c + 2a'\sin\psi + 2b'\cos\psi + 2c'\cos\psi\sin\psi}}.$$

In den Anwendungen treten nicht selten Integrale von der Form

$$(1.)\qquad \int \frac{H(\cos\psi, \sin\psi)}{\sqrt{G(\cos\psi, \sin\psi)}}\, d\psi$$

auf, in denen H eine rationale Function der Argumente $\cos\psi$, $\sin\psi$, und G eine ganze Function zweiten Grades derselben Argumente bedeutet. Auf ein solches Integral kam z. B. Gauss in der Determinatio attractionis etc. (Werke, Band 3, Seite 331) bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Säcularstörungen der Planeten. Unter den Integralen der Form (1.) ist das einfachste und wichtigste von der Gestalt

$$(2.)\qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi + c + 2a'\sin\psi + 2b'\cos\psi + 2c'\cos\psi\sin\psi}},$$

wobei die Constanten a, b, c, a', b', c' reell, die Function unter dem Wurzelzeichen, die mit $F(\psi)$ bezeichnet werde, bei reellen Werthen von ψ stets positiv sei, und der Wurzel $\sqrt{F(\psi)}$ ihr positiver Werth beigelegt werde.

Setzt man

$$(3.)\qquad -\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2} = t,$$

so durchläuft t stetig wachsend alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn ψ, ebenfalls beständig wachsend, das Intervall $(0 \dots 2\pi)$ durchläuft. Es ist dann

$$\cos\psi = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$\sin\psi = \frac{-2t}{t^2+1}$$

und

$$d\psi = \frac{2\,dt}{t^2+1}.$$

Das Integral (1.) geht dadurch in ein anderes von der Form

$$\int \frac{\mathfrak{H}(t)\,dt}{\sqrt{\mathfrak{G}(t)}}$$

über, worin $\mathfrak{H}(t)$ eine rationale Function und $\mathfrak{G}(t)$ eine ganze Function vierten Grades von t ist. Das Integral ist demnach ein elliptisches.

In dem speciellen Falle des Integrals (2.) wird durch die angegebene Substitution

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,dt}{\sqrt{R(t)}}$$

erhalten, wo

$$R(t) = At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4B't + A'$$

gesetzt ist, und den Coefficienten die Werthe

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= a + c + 2b' \\ B &= -(a' + c') \\ C &= \frac{1}{3}(c - a + 2b) \\ B' &= -(a' - c') \\ A' &= a + c - 2b' \end{aligned}\right.$$

zu ertheilen sind. $\sqrt{R(t)}$ ist ebenfalls positiv zu nehmen, und nach der über die Function $F(\psi)$ gemachten Annahme kann $R(t)$ für keinen reellen Werth von t verschwinden. Das Integral ist durch die Substitution (3.) auf ein elliptisches erster Art zurückgeführt.

Um es auf die Normalform zu bringen, benutzt man zweckmässig eine Transformation, bei der dem Werthe $t = \infty$ auch ein unendlich grosser Werth der neuen Variablen s entspricht. Nach E. F. S. 16 (VII.) ist dann

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(t)} + \frac{1}{2}At^2 + Bt + \frac{1}{2}C,$$

d. h.

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{a+c+2b'}\sqrt{R(t)} + \frac{1}{2}(a+c+2b')t^2 - (a'+c')t + \frac{1}{6}(c-a+2b)$$

zu setzen. Dadurch wird das Differential

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

in

$$\frac{-ds}{\sqrt{S}}$$

verwandelt, wobei (E. F. S. 13 (22.))

$$S = -\begin{vmatrix} A, & B, & C-2s \\ B, & C+s, & B' \\ C-2s, & B', & A' \end{vmatrix} \tag{5.}$$

wird, und der Werth von $\sqrt{S}$ der Bestimmung

$$\sqrt{S} = -\frac{1}{4}R'(t)\sqrt{a+c+2b'} - \sqrt{R(t)}((a+c+2b')t - a' - c')$$

gemäss zu wählen ist (E. F. S. 16 (VIII.)).

Da, wie oben bemerkt, $R(t)$ für keinen reellen Werth von t verschwindet, so hat die cubische Gleichung

$$S = 0$$

drei reelle Wurzeln e_1, e_2, e_3 (vgl. Kap. 1, S. 9), deren grösste, wie immer, mit e_1 bezeichnet werden möge. Ferner hat s einen positiven unendlich grossen Werth sowohl für einen positiven, als auch für einen negativen unendlich grossen Werth von t. Da ausserdem für reelle Werthe von t nicht nur $\sqrt{R(t)}$, sondern auch $\sqrt{S}$ beständig reell sein muss, S also nicht negativ werden darf, so liegt s stets in dem Intervalle $(e_1 \cdots +\infty)$. Geht nun t stetig wachsend, wie das im Integral J gefordert wird, von der Grenze $-\infty$ zur Grenze $+\infty$ über, so wird s anfänglich abnehmen und für einen gewissen

Werth t_0 von t ein Minimum erreichen. Für den entsprechenden Werth von s muss

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{R(t)}} \tag{6.}$$

verschwinden, d. h. $S = 0$, also $s = e_1$ sein. Bewegt sich t weiter von t_0 bis zur Grenze $+\infty$ hin, so muss s jedenfalls anfangs wachsen; es kann aber s für keinen endlichen Werth von t ein Maximum erreichen, weil für dieses $\sqrt{S}$ verschwinden müsste, während doch S für keinen zwischen e_1 und $+\infty$ gelegenen Werth von s gleich Null ist. So ergiebt sich, dass die Grösse s stetig abnehmend von $+\infty$ zu e_1 übergeht, wenn t stetig wachsend das Intervall $(-\infty \dots t_0)$ durchläuft, und dann wieder stetig wachsend zur Grenze $+\infty$ zurückkehrt, wenn sich t von t_0 zu $+\infty$ bewegt. Aus der Differentialgleichung (6.) folgt, dass für das erste Intervall von t die Wurzel $\sqrt{S}$ positiv, für das andere aber negativ zu nehmen ist.

Somit ergiebt sich, dass man bei Ausführung der Integration von J das Integrationsintervall in zwei Theile zu theilen hat:

$$J = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{2\,dt}{\sqrt{R(t)}} + \int_{t_0}^{+\infty} \frac{2\,dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Es wird also

$$J = \int_{\infty}^{e_1} \frac{-2\,ds}{\sqrt{S}} + \int_{e_1}^{\infty} \frac{2\,ds}{\sqrt{S}},$$

wenn man unter $\sqrt{S}$ in beiden Integralen den positiven Werth versteht. Daraus folgt

$$J = 4\int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = 4\omega, \tag{7.}$$

d. h. $\frac{1}{2}J$ ist die kleinste reelle positive Periode der elliptischen Function

$$\wp(u;\, g_2, g_3),$$

deren Invarianten nach E. F. S. 12 die Werthe

$$\begin{aligned} g_2 &= AA' - 4BB' + 3C^2 \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3 \end{aligned} \tag{8.}$$

haben. Führt man in die Determinante (5.) für A, B, C, B', A' ihre

Werthe (4.) ein, formt die Determinante durch Subtraction der Elemente der dritten Zeile von denen der ersten um und wiederholt dasselbe mit der ersten und dritten Spalte, so erhält man

$$S = -\begin{vmatrix} 2a+2c-\frac{2c-2a+4b}{3}+4s, & -2c', & \frac{c-a+2b}{3}-2s-a-c+2b' \\ -2c', & \frac{c-a+2b}{3}+s, & -a'+c' \\ \frac{c-a+2b}{3}-2s-a-c+2b', & -a'+c', & a+c-2b' \end{vmatrix}.$$

Setzt man darin

$$\frac{a+b-c}{3} = g,$$

so wird

$$S = -4\begin{vmatrix} a-g+s, & c', & a-g+s-b' \\ c', & b-g+s, & -a'+c' \\ a-g+s-b', & -a'+c', & a+c-2b' \end{vmatrix},$$

oder wenn man nochmals ähnlich wie eben angegeben umformt,

$$S = -4\begin{vmatrix} a-g+s, & c', & -b' \\ c', & b-g+s, & -a' \\ -b', & -a', & c+g-s \end{vmatrix}.$$

Die Entwickelung dieser Determinante ergiebt

$$(9.)\quad S = 4((s+a-g)(s+b-g)(s-c-g)+a'^2(s+a-g)+b'^2(s+b-g) \\ -c'^2(s-c-g)-2a'b'c').$$

Für die Invarianten g_2, g_3 folgen daraus die Werthe

$$(10.)\quad \begin{cases} g_2 = -4(a-g)(b-g)+4(a-g)(c+g)+4(b-g)(c+g)-4a'^2-4b'^2+4c'^2 \\ g_3 = 4(a-g)(b-g)(c+g)-4a'^2(a-g)-4b'^2(b-g)-4c'^2(c+g)+8a'b'c'. \end{cases}$$

Man kann zu dem durch die Gleichung (7.) ausgedrückten Ergebniss auch dadurch gelangen, dass man auf die im ersten Theile des vierten Kapitels gewonnenen Formeln zurückgreift. Es war dort, S. 42 bis S. 45, gezeigt worden, dass ein Integral der Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \left(\frac{dt}{du}\right)^2 = R(t),$$

wo $R(t)$ irgend eine ganze Function vierten Grades mit reellen Coefficienten bedeutet, sich in der Form (S. 45 (8.))

$$t = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right) \tag{12.}$$

darstellen lässt, unter der Bedingung, dass für $u = 0$ der Werth von t gleich einer beliebigen Wurzel a_0 der Gleichung

$$R(t) = 0$$

wird. Die Constante u_0 stellt den Werth von u dar, für den t unendlich gross wird, und ist durch die Formeln S. 45 (7.) und S. 47 (11.),

$$\begin{aligned} \wp(2u_0) &= \frac{B^2 - AC}{A} \\ \wp'(2u_0) &= \frac{2B^3 - 3ABC + A^2B'}{A\sqrt{A}}, \end{aligned} \tag{13.}$$

bestimmt, oder auch durch

$$\begin{aligned} \wp u_0 &= \frac{1}{24} R''(a_0) \\ \wp' u_0 &= -\frac{1}{4} R'(a_0)\sqrt{A}, \end{aligned} \tag{14.}$$

wie sich aus den Gleichungen S. 43 (3.) durch eine leichte Überlegung ergiebt.

Aus der Formel (12.) findet man das allgemeine Integral der Differentialgleichung (11.), wenn man u um eine Constante vermehrt. Fragt man daher nach demjenigen Integrale der Differentialgleichung, das für $u = 0$ unendlich gross wird, so hat man diese Constante gleich u_0 zu nehmen und erhält

$$t = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2u_0) - \frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}(2u_0)\right). \tag{15.}$$

Nun setze man

$$R(t) = A(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4).$$

Da diese Function, wie es die vorliegende Aufgabe verlangt, für keinen reellen Werth von t verschwinden soll, so müssen, weil die Coefficienten A, B, C, B', A' reelle Grössen sind, die vier Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 paarweise conjugirt complex sein. Es seien a_1 und a_2, sowie a_3 und a_4 conjugirt. Ferner wähle man die beliebige Wurzel a_0 gleich a_1. Dann kann man zeigen, dass auch die Grösse u_0 weder selbst reell, noch auch gleich der Summe aus einer reellen Zahl und einer halben Periode sein kann. Die Bestimmung der drei Grössen e_1, e_2, e_3 ergiebt nämlich, wie im ersten Kapitel S. 8 und 9,

$$(16.)\quad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{24} R''(a_1) - \frac{1}{4} A(a_1-a_3)(a_1-a_4) \\ e_2 = \frac{1}{24} R''(a_1) - \frac{1}{4} A(a_1-a_3)(a_1-a_4) \\ e_3 = \frac{1}{24} R''(a_1) - \frac{1}{4} A(a_1-a_2)(a_1-a_3). \end{cases}$$

Nach S. 9 sind aber diese drei Grössen reell. Den Voraussetzungen über a_1, a_2, a_3, a_4 zufolge ist ferner

$$(a_1-a_2)(a_1-a_4)$$

eine complexe Grösse. Die erste Formel (16.) zeigt also, dass auch

$$\frac{1}{24} R''(a_1) = \wp u_0$$

complex ist. Da aber die Invarianten der $\wp$-Function im vorliegenden Falle reelle Grössen sein müssen, und daher reellen Werthen des Arguments u nur reelle Werthe der Function $\wp u$ entsprechen können, so kann u_0 nicht reell sein. Wegen (13.) ist nun sowohl $\wp(2u_0)$ wie auch $\wp'(2u_0)$ reell. Nach der Tabelle S. 21 muss also $\pm 2u_0$, da diese Grösse nicht selbst reell sein kann, zwischen $\omega+\omega'$ und ω' gelegen sein. Bezeichnet man demnach mit w eine der Bedingung

$$0 \leqq w \leqq \omega$$

genügende reelle Grösse, so ist

$$(17.)\qquad \pm 2u_0 = \omega' + w.$$

Wegen E. F. S. 66 (2.),

$$\wp(w+\omega') = e_3 + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp w - e_3},$$

und

$$\wp'(w+\omega') = -\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{(\wp w - e_3)^2}\wp' w$$

ist der Werth von w durch die Formeln

$$\frac{B^2 - AC}{A} = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp w - e_3} + e_3,$$
$$\frac{2B^3 + A^2 B' - 3ABC}{A\sqrt{A}} = -\frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{(\wp w - e_3)^2}\wp' w$$

eindeutig bestimmt.

Führt man, in der Formel (17.) das positive Zeichen wählend, die Grösse w an Stelle von u_0 in die Gleichung (15.) ein, so erhält man wegen

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u + \omega') = \eta' + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u:$$

$$t = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u + w) - \frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}w\right). \tag{18.}$$

Diese Formel liefert somit unter den für die Function $R(t)$ gemachten Voraussetzungen diejenige Lösung der Differentialgleichung (11.), die für $u = 0$ unendlich gross, und zwar negativ unendlich wird.

Aus der Formel (18.) folgt, dass wenn u stetig wachsend alle reellen Werthe von 0 bis 2ω durchläuft, t alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig annimmt. Denn in diesem Intervalle verhält sich $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ jedenfalls stetig, $\sigma_3 u$ verschwindet nirgends (S. 68), und für $u = 2\omega$ wird $t = +\infty$, wie man sofort einsieht, wenn man sich an die Formel E. F. S. 69 (2.),

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(2\omega - u) = 2\eta - \frac{\sigma'}{\sigma}u,$$

erinnert. Weil ferner

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{R(t)}$$

für keinen reellen Werth verschwinden kann, hat auch t weder ein Maximum noch ein Minimum. Es ist demnach

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_0^{2\omega} du = 2\omega,$$

also hat das vorgelegte Integral den Werth

$$J = 4\omega,$$

in Übereinstimmung mit (7.).

Dass die Bestimmung von J eine Periode ergiebt, kann man von vornherein daraus schliessen, dass die Integration in Bezug auf die Variable t auf einem geschlossenen Wege, nämlich von $-\infty$ bis $+\infty$ auszuführen ist. Um das noch deutlicher einzusehen, ersetze man t durch eine andere Variable x vermöge der Substitution

$$x = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe Constanten sein mögen. Wenn t das Integrationsintervall $(-\infty \cdots +\infty)$ durchläuft, so beschreibt der Punkt x in der Ebene dieser complexen Grösse einen Kreis. Man kann ihn so bestimmen, dass wenn der Punkt x von einer Anfangslage x_0 ausgehend nach einem Umlauf wieder nach x_0 zurückkehrt, der Werth der Quadratwurzel unter dem Integralzeichen ungeändert bleibt. Durch die genannte Substitution wird

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

wo $R_1(x)$ wieder eine biquadratische Function ihres Arguments bedeutet. Mithin geht das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

über in

$$\overline{\int} \frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

und dieses Integral ist in der Ebene der complexen Variablen x über einen im Endlichen geschlossenen Integrationsweg zu erstrecken.

Das von Gauss in der Determinatio attractionis behandelte Integral hat die Gestalt

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(A - a\cos\psi)^2 + (B - b\sin\psi)^2 + C^2}},$$

wo a, b, A, B, C Constanten sind. Wendet man auf dieses Integral die vorher entwickelten Formeln an, so hat man

$$a^2, \quad b^2, \quad A^2 + B^2 + C^2, \quad -bB, \quad -aA, \quad 0$$

an die Stelle von

$$a, \quad b, \quad c, \quad a', \quad b', \quad c'$$

zu setzen; es wird daher

$$g = \frac{a^2 + b^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}{3}$$

und

$$S = 4(s + a^2 - g)(s + b^2 - g)(s - g - A^2 - B^2 - C^2) + 4(s + a^2 - g)b^2 B^2 + 4(s + b^2 - g)a^2 A^2$$

oder

$$\begin{aligned} S = 4((s-g)(s-g+a^2)(s-g+b^2) - A^2(s-g)(s-g+b^2) \\ - B^2(s-g)(s-g+a^2) - C^2(s-g+a^2)(s-g+b^2)). \end{aligned}$$

Führt man ferner statt s eine Variable ϱ mittels der Formel

$$s - g = \varrho$$

ein und setzt fest, dem Werthe $s = e_1$ solle der Werth $\varrho = \varrho_0$ entsprechen, so wird

$$J_1 = 4\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{d\varrho}{\sqrt{\mathfrak{R}(\varrho)}},$$

worin

$$\mathfrak{R}(\varrho) = 4(\varrho(\varrho + a^2)(\varrho + b^2) - A^2\varrho(\varrho + b^2) - B^2\varrho(\varrho + a^2) - C^2(\varrho + a^2)(\varrho + b^2))$$

und für ϱ_0 die grösste Wurzel der Gleichung

$$\mathfrak{R}(\varrho) = 0$$

zu nehmen ist. Durch Division mit $\varrho(\varrho + a^2)(\varrho + b^2)$ kann man ihr die Gestalt

$$\frac{A^2}{\varrho + a^2} + \frac{B^2}{\varrho + b^2} + \frac{C^2}{\varrho} = 1$$

geben. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass ihre sämmtlichen Wurzeln reell und in den Intervallen

$$(-a^2 \cdots - b^2), \quad (-b^2 \cdots 0), \quad (0 \cdots + \infty)$$

gelegen sind, falls $a > b$ vorausgesetzt wird.

Gauss selbst wendet statt der hier üblichen die Legendresche Normalform an, nämlich

$$J_1 = \frac{4}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

für

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Setzt man

$$e_1 - e_3 = m^2,$$
$$e_1 - e_2 = n^2,$$

so kann man dem Integral die Form

$$J_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}$$

geben. Diese Form ist es, an der Gauss die ihm bereits damals bekannte Berechnung der elliptischen Integrale erster Art zeigt. Die Methode, die er anwendet, ist im Wesentlichen dieselbe wie die Landensche Transformation und beruht darauf, statt m, n eine Folge von neuen Grössen

$$m' = \frac{m+n}{2}, \qquad n' = \sqrt{mn},$$
$$m'' = \frac{m'+n'}{2}, \qquad n'' = \sqrt{m'n'},$$
$$m''' = \frac{m''+n''}{2}, \qquad n''' = \sqrt{m''n''},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

einzuführen, die bekanntlich einen gemeinsamen Grenzwerth haben, den Gauss das arithmetisch-geometrische Mittel genannt hat (E. F. S. 318). Auch Jacobi hat das hier in Rede stehende Integral behandelt und es mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen in Zusammenhang gebracht.

Neuntes Kapitel.

Bestimmung des Potentials der gleichmässig mit Masse belegten Fläche einer Ellipse.

Auf das im vorhergehenden Kapitel behandelte Gausssche Integral führt auch die Aufgabe, das Potential einer homogenen Ellipsenfläche für einen ausserhalb der Fläche gelegenen Punkt zu bestimmen.

In der $(x'y')$-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems x', y', z' befinde sich eine Ellipse mit den Halbaxen α, β, ihre Gleichung sei

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} = 1.$$

Ihre Fläche denke man sich gleichmässig mit Masse von der Dichtigkeit Eins belegt. Ferner mögen x, y, z die Coordinaten eines Punktes im Raume sein, in dem ebenfalls die Masse Eins vereinigt zu denken ist. Dann ist das Potential jener Ellipse in Bezug auf den Punkt (x, y, z) durch das Doppelintegral

$$V = \int\int \frac{dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}$$

gegeben, wenn die Integration über alle Punkte $(x', y', 0)$ ausgedehnt wird, für die

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \leqq 1$$

ist. Setzt man

$$x' = \lambda\alpha \cos\psi,$$
$$y' = \lambda\beta \sin\psi,$$

so lässt sich an Stelle der vorstehenden Ungleichheit die Bedingung

$$0 < \lambda \leqq 1$$

schreiben. Bezeichnet man mit r' die Länge des Radiusvectors, der vom Mittelpunkte der Ellipse nach irgend einem Punkte $(x', y', 0)$ in der Ebene der Ellipse gezogen werden kann, mit r dagegen die Länge des durch jenen Punkt nach dem Umfang der Ellipse gezogenen Radiusvectors, so ist

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \lambda\sqrt{\alpha^2\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi} \\ &= \lambda\sqrt{x^2 + y^2} = \lambda r, \end{aligned}$$

d. h. λ ist gleich dem Längenverhältniss der beiden Radienvectoren. Wenn λ alle Werthe von 0 bis 1 annimmt, während ψ alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so durchwandert der Punkt $(x', y', 0)$ das gesammte Innere und die Begrenzung der Ellipsenfläche. Führt man statt x', y' die beiden Grössen λ, ψ als Variable in das Integral ein, so hat man das Flächenelement $dx'dy'$ durch den Ausdruck

$$\sqrt{EG - F^2}\, d\lambda\, d\psi$$

zu ersetzen, wo E, F, G die Coefficienten in dem Quadrat eines Linienelements der $(x'y')$-Ebene,

$$dx'^2 + dy'^2 = E\,d\lambda^2 + 2F\,d\lambda\,d\psi + G\,d\psi^2$$

bedeuten, und der Wurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Nun ist

$$\begin{aligned} dx'^2 + dy'^2 = {} & (\alpha^2\cos^2\psi + \beta^2\sin^2\psi)\,d\lambda^2 - 2\lambda(\alpha^2 - \beta^2)\sin\psi\cos\psi\,d\lambda\,d\psi \\ & + \lambda^2(\alpha^2\sin^2\psi + \beta^2\cos^2\psi)\,d\psi^2, \end{aligned}$$

folglich

$$EG - F^2 = \lambda^2\alpha^2\beta^2,$$

und somit

$$V = \alpha\beta\int_{\lambda=0}^{\lambda=1}\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi}\frac{\lambda\,d\lambda\,d\psi}{\sqrt{(x-\alpha\lambda\cos\psi)^2 + (y-\beta\lambda\sin\psi)^2 + z^2}}.$$

Hier würde es nun offenbar keine Mühe machen, die Integration nach der Variablen λ auf elementarem Wege auszuführen. Indessen bietet dieser Weg keine Vereinfachung der eigentlichen Schwierigkeit, die in der Integration nach ψ besteht. Schreibt man aber

$$V = \alpha\beta\int_0^1\lambda\,d\lambda\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{(x-\alpha\lambda\cos\psi)^2 + (y-\beta\lambda\sin\psi)^2 + z^2}}, \tag{1.}$$

so sieht man, dass das Integral in Bezug auf ψ dieselbe Gestalt hat, wie das im vorigen Kapitel (S. 97) behandelte Gausssche Integral

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(A-a\cos\psi)^2+(B-b\sin\psi)^2+C^2}}.$$

Man braucht nur

$$a, \quad b, \quad A, \quad B, \quad C$$

durch

$$\alpha\lambda, \quad \beta\lambda, \quad x, \quad y, \quad z$$

zu ersetzen, um, abgesehen von den constanten Factoren und der Integration nach λ, das eine Integral in das andere überzuführen. Benutzt man die auf S. 79 und S. 98 angegebenen Substitutionen, so kann man entsprechend der Formel für J_1 auf S. 98

$$V = \alpha\beta\int_0^1 \lambda\,d\lambda \int_{\varrho_0'}^{+\infty} \frac{4\,d\varrho'}{\sqrt{\Re(\varrho')}} \tag{2.}$$

schreiben, wo

$$\Re(\varrho') = 4(\varrho'(\varrho'+\alpha^2\lambda^2)(\varrho'+\beta^2\lambda^2)-x^2\varrho'(\varrho'+\beta^2\lambda^2)-y^2\varrho'(\varrho'+\alpha^2\lambda^2)-z^2(\varrho'+\alpha^2\lambda^2)(\varrho'+\beta^2\lambda^2)) \tag{3.}$$

gesetzt ist, und ϱ_0' die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho'+\alpha^2\lambda^2}+\frac{y^2}{\varrho'+\beta^2\lambda^2}+\frac{z^2}{\varrho'} = 1 \tag{4.}$$

bedeutet. Diese Wurzel liegt zwischen 0 und $+\infty$ und ändert sich stetig mit λ. Führt man nun eine Variable ϱ mittels der Gleichung

$$\varrho' = \lambda^2\varrho \tag{5.}$$

ein, so ergiebt sich

$$V = 4\alpha\beta\int_0^1 \lambda\,d\lambda \int_{\varrho_\lambda}^{+\infty} \frac{d\varrho}{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}}, \tag{6.}$$

wo

$$\Re(\varrho,\lambda) = 4(\lambda^2\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)-x^2\varrho(\varrho+\beta^2)-y^2\varrho(\varrho+\alpha^2)-z^2(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)) \tag{7.}$$

zu nehmen ist, und ϱ_λ den grössten Werth von ϱ bedeutet, für den, bei einem gegebenen Werth von λ, $\Re(\varrho,\lambda)$ verschwindet; ϱ_λ ist zugleich die grösste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho+\alpha^2}+\frac{y^2}{\varrho+\beta^2}+\frac{z^2}{\varrho} = \lambda^2. \tag{8.}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)} = \frac{4\lambda}{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}} \tag{9.}$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\varrho_\lambda}^{+\infty}\frac{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}d\varrho = \int_{\varrho_\lambda}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}d\varrho - \frac{\Re(\varrho_\lambda,\lambda)}{\varrho_\lambda(\varrho_\lambda+\alpha^2)(\varrho_\lambda+\beta^2)}\frac{d\varrho_\lambda}{d\lambda}.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite verschwindet wegen

$$\Re(\varrho_\lambda,\lambda) = 0;$$

demnach wird mit Benutzung der vorhergehenden Formel

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{\varrho_\lambda}^{+\infty}\frac{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}d\varrho = 4\lambda\int_{\varrho_\lambda}^{+\infty}\frac{d\varrho}{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}}. \tag{10.}$$

Es sei jetzt ε eine zwischen 0 und 1 gelegene Constante, und ϱ_ε, ϱ_1 die grössten Wurzeln der Gleichungen, die sich aus

$$\Re(\varrho,\lambda) = 0$$

für

$$\lambda = \varepsilon \quad \text{und} \quad \lambda = 1$$

ergeben. Integrirt man die Formel (10.) nach λ zwischen den Grenzen ε und 1, so erhält man

$$\int_\varepsilon^1 4\lambda\,d\lambda\int_{\varrho_\lambda}^{+\infty}\frac{d\varrho}{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}} = \int_{\varrho_1}^{+\infty}\frac{\sqrt{\Re(\varrho,1)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}d\varrho - \int_{\varrho_\varepsilon}^{+\infty}\frac{\sqrt{\Re(\varrho,\varepsilon)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}d\varrho.$$

Nun ist aber, wie die Gleichung (8.) zeigt, der Werth von ϱ_λ um so grösser, je kleiner der Werth von λ angenommen wird, d. h. es ist

$$\lim_{\varepsilon=0}\varrho_\varepsilon = +\infty;$$

wenn also ε der Null zustrebt, so verschwindet das zweite Integral rechts in der vorhergehenden Formel, und man erhält

$$\int_0^1 4\lambda\,d\lambda \int_{\varrho_\lambda}^{+\infty} \frac{d\varrho}{\sqrt{\Re(\varrho,\lambda)}} = \int_{\varrho_1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\Re(\varrho,1)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}\,d\varrho,$$

wo, wie bereits bemerkt, ϱ_1 die grösste Wurzel der Gleichung

$$\Re(\varrho,1) = 4(\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2) - x^2\varrho(\varrho+\beta^2) - y^2\varrho(\varrho+\alpha^2) - z^2(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)) = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{\varrho+\alpha^2} + \frac{y^2}{\varrho+\beta^2} + \frac{z^2}{\varrho} = 1$$

ist.

Für das Potential der Ellipsenfläche hat man also nach (6.)

$$V = \alpha\beta \int_{\varrho_1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\Re(\varrho,1)}}{\varrho(\varrho+\alpha^2)(\varrho+\beta^2)}\,d\varrho \tag{11.}$$

oder

$$V = 4\alpha\beta \int_{\varrho_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\varrho+\alpha^2} - \frac{y^2}{\varrho+\beta^2} - \frac{z^2}{\varrho}\right) \frac{d\varrho}{\sqrt{\Re(\varrho,1)}}. \tag{12.}$$

Diese Formel hat Ähnlichkeit mit der im siebenten Kapitel (S. 87) gewonnenen für das Potential eines Ellipsoids. Indessen ist doch ein wesentlicher Unterschied vorhanden; er besteht darin, dass die Nenner der Brüche in der Klammer nicht, wie dort, mit den Linearfactoren übereinstimmen, in die sich die Function unter dem Wurzelzeichen zerlegen lässt. Das ist auch der Grund, weswegen hier die weitere Ausführung der Integration auf elliptische Integrale dritter Art führt. Darauf soll jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Vierter Abschnitt.

BESTIMMUNG DES INTERVALLS FÜR DEN WERTH DES INTEGRALS $\int_{x_0}^{x_1} dx/\sqrt{R(x)}$ UND TRANSFORMATION DES ELLIPTISCHEN DIFFERENTIALS IN DIE LEGENDRE-JACOBISCHE NORMALFORM.

Zehntes Kapitel.

Bestimmung des Intervalls, in dem der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} dx/\sqrt{R(x)}$ gelegen ist.

Bei den bisher behandelten Aufgaben war man öfters vor die Nothwendigkeit gestellt, den Integrationsweg für s oder u anzugeben, wenn er für das auf die Normalform zu bringende Integral

$$(1.) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

vorgeschrieben war. Auch bei der Lösung der Aufgabe im achten Kapitel, wo es sich um ein Integral der vorliegenden Form zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ handelte, war eine dahin gehende Betrachtung die Hauptsache. Dieser Gegenstand soll daher im Folgenden näher untersucht werden.

Von der ganzen Function $R(x)$ werde angenommen, dass sie keinen quadratischen Theiler habe — dies ist auch im Vorhergehenden stets ausdrücklich oder stillschweigend vorausgesetzt worden —, sowie dass ihre Coefficienten sämmtlich reell seien, wie das in den Anwendungen gewöhnlich der Fall ist. Ferner soll, wenn $R(x)$ positiv ist, unter $\sqrt{R(x)}$, und wenn $R(x)$ negativ ist, unter $\sqrt{-R(x)}$ immer der positive Werth der Quadratwurzel verstanden werden; das gleiche gilt von den Wurzeln $\sqrt{S}$, wenn S positiv, und $\sqrt{-S}$, wenn S negativ ist.

Zunächst werde $R(x)$ vom vierten Grade angenommen. Die vier Wurzeln der Gleichung

$$R(x) = 0$$

seien mit a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnet, und

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) \tag{2.}$$

gesetzt. Dann sind drei Fälle möglich: Entweder sind alle vier Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 reell, oder es sind zwei reell und zwei conjugirt complex, oder drittens, es ist keine reell. Diese drei Fälle sollen nach einander behandelt werden.

I. Fall.

Es seien alle vier Wurzeln von $R(x) = 0$ reell und so bezeichnet, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Falls $A > 0$, ist

$$R(x) \text{ positiv in den Intervallen } (-\infty \cdots a_1),\ (a_2 \cdots a_3),\ (a_4 \cdots +\infty),$$

dagegen

$$R(x) \text{ negativ in den Intervallen } (a_1 \ldots a_2) \text{ und } (a_3 \ldots a_4).$$

Wie auf S. 9 gezeigt, sind in diesem Falle alle drei Wurzeln der Gleichung

$$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) = 0$$

reell, also ist

$$S \text{ positiv in den Intervallen } (+\infty \cdots e_1) \text{ und } (e_2 \cdots e_3),$$
$$S \text{ negativ in den Intervallen } (e_1 \cdots e_2) \text{ und } (e_3 \cdots -\infty).$$

Ferner können die primitiven Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ der Function

$$s = \wp u$$

so gewählt werden, dass ω_1 und $\frac{\omega_3}{i}$ reelle und positive Grössen sind. Die Halbperioden sind alsdann durch die beiden Formeln

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \tag{3.}$$

und

$$\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}} \tag{4.}$$

gegeben. Man kann für sie auch noch andere Ausdrücke herleiten.

Zu dem Zwecke greife man auf die Tabelle S. 21 zurück. Wenn sich u von ω_3 bis $\omega_1 + \omega_3$ bewegt, so durchläuft s die Werthe von e_3 bis e_2 auf directem Wege, und es ist $\wp' u$ reell und positiv, also $\sqrt{S}$ reell und negativ zu nehmen. Mithin folgt

$$\int_{\omega_3}^{\omega_1+\omega_3} du = \int_{e_3}^{e_2} \frac{-ds}{-\sqrt{S}},$$

d. h.

$$\omega_1 = \int_{e_3}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}}. \tag{5.}$$

Durchläuft zweitens u das Intervall $(\omega_1 \ldots \omega_1 + \omega_3)$, so geht s auf directem Wege von e_1 bis e_2. Hierbei ist S negativ, also, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\sqrt{S} = i\sqrt{-S}$$

zu nehmen. Ausserdem ist $\wp' u$ positiv und rein imaginär, also hat man für $\sqrt{S}$ den Werth $-i\sqrt{-S}$ zu wählen und erhält

$$\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_3} du = \int_{e_1}^{e_2} \frac{-ds}{-i\sqrt{-S}},$$

d. h.

$$\omega_3 = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{-S}}. \tag{6.}$$

Dies vorausgeschickt, gehe man nun zur Berechnung des Integrals (1.) zurück und setze (E. F. S. 15 (VI.))

$$s = \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{x-a} + \frac{1}{24}R''(a), \tag{7.}$$

worin a irgend eine der Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 bedeute. Dem Werthe $x = a$ entspricht $s = \infty$, den drei anderen Wurzeln von $R(x) = 0$ die Werthe e_1, e_2, e_3 von s, wobei

$$e_1 > e_2 > e_3$$

zu nehmen ist; zu dem Werthe $x = \infty$ gehört

$$s_0 = \frac{1}{24} R''(a). \tag{8.}$$

Um die Grössen e_1, e_2, e_3 zu bestimmen, kann man allgemein folgendermassen verfahren. Es seien $a, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$ die vier Wurzeln von $R(x) = 0$, wobei also α, β, γ drei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4 bedeuten sollen; e_λ, e_μ, e_ν seien die Wurzeln der Gleichung $S = 0$, wo unter λ, μ, ν die drei Zahlen 1, 2, 3, abgesehen von der Reihenfolge, zu verstehen sind. Wenn die Werthe

$$x = \quad a \quad a_\alpha \quad a_\beta \quad a_\gamma \quad \infty$$

den Werthen

$$s = \quad \infty \quad e_\lambda \quad e_\mu \quad e_\nu \quad s_0$$

entsprechen, so ist

$$\left\{\begin{aligned} e_\lambda - e_\mu &= \frac{1}{4} A(a - a_\gamma)(a_\beta - a_\alpha) \\ e_\mu - e_\nu &= \frac{1}{4} A(a - a_\alpha)(a_\gamma - a_\beta) \\ e_\nu - e_\lambda &= \frac{1}{4} A(a - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma), \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

wie sogleich nach dem auf S. 8 und 9 angedeuteten Verfahren einleuchtet. Unter Hinzunahme von

$$e_\lambda + e_\mu + e_\nu = 0$$

sind daraus die drei Grössen e_λ, e_μ, e_ν zu bestimmen.

Man nehme nun zunächst $A > 0$. Wählt man

$$a = a_4,$$

so entsprechen einander

$$x = \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \infty$$

und

$$s = \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad \infty \quad s_0.$$

Daher wird jedenfalls

$$\int_{a_4}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Ferner ist

$$\int_{-\infty}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_1}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

somit

$$(10.)\qquad \int_{a_4}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_1.$$

Weiter erhält man

$$(11.)\qquad \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_3}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_1,$$

der Formel (5.) zufolge. Nach (6.) wird

$$(12.)\qquad \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = \frac{\omega_3}{i},$$

und endlich nach (4.)

$$(13.)\qquad \int_{a_3}^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = \frac{\omega_3}{i}.$$

Es ist klar, dass dieselben Ergebnisse erhalten werden, wenn für a irgend eine andere der Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 angenommen wird. Es sei z. B. noch

$$a = a_2$$

gesetzt, so entsprechen einander

$$x = \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \infty$$

und

$$s = \quad e_3 \quad \infty \quad e_1 \quad e_2 \quad s_0.$$

Demnach wird

$$\int_{a_4}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{s_0}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{e_3}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_3}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_1,$$

$$\int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_1,$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = \frac{\omega_3}{i},$$

$$\int_{a_3}^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = \frac{\omega_3}{i}.$$

Wie man sieht, sind dabei nur die Integrale, durch die die Perioden dargestellt werden, vertauscht worden.

Ist nun also ein Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

vorgelegt, dessen Grenzen innerhalb eines dieser Intervalle liegen, so ist sein Werth in den beiden ersten Fällen zwischen 0 und ω_1, in den beiden letzten zwischen 0 und $\frac{\omega_3}{i}$ gelegen.

Wenn $A < 0$ ist, so ergiebt sich bei denselben Substitutionen umgekehrt, da dann

$$e_1 \quad e_2 \quad e_3$$

mit

$$-e_3 \quad -e_2 \quad -e_1$$

zu vertauschen sind,

$$\int_{a_4}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{a_2}^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \frac{\omega_3}{i} \tag{14.}$$

und

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{a_3}^{a_4} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \omega_1. \tag{15.}$$

II. Fall.

Es seien a_1, a_2 reell, und zwar

$$a_1 < a_2,$$

dagegen a_3, a_4 conjugirt complex. Dann ist, falls $A > 0$,

$R(x)$ positiv in den Intervallen $(-\infty \cdots a_1)$ und $(a_2 \cdots +\infty)$,
$R(x)$ negativ im Intervall $(a_1 \ldots a_2)$.

Mit e_2 möge die einzige reelle Wurzel von $S = 0$ bezeichnet werden, so ist

S positiv im Intervall $(+\infty \cdots e_2)$,
S negativ im Intervall $(e_2 \cdots -\infty)$.

Es seien ω_2 und ω_2' die beiden Halbperioden von $s = \wp u$, die durch die beiden Formeln (S. 20)

(16.) $$\omega_2 = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

(17.) $$\omega_2' = i\int_{-\infty}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{-S}}$$

definirt sind. Wie im Fall I sind ω_2 und $\frac{\omega_2'}{i}$ reelle und positive Grössen, aber das Periodenpaar $(2\omega_2, 2\omega_2')$ ist nicht primitiv.

Macht man auch hier eine Substitution der Form (7.), wobei wie vorher

$$x = \quad a \quad a_\alpha \quad a_\beta \quad a_\gamma \quad \infty$$

und

$$s = \quad \infty \quad e_\lambda \quad e_\mu \quad e_\nu \quad s_0$$

einander entsprechen sollen, so gelten wieder die Formeln (9.). Sind weiter a und a_α die reellen Wurzeln, a_β und a_γ die conjugirt complexen, so folgt, dass $e_\mu - e_\nu$ rein imaginär, $e_\lambda - e_\mu$ und $e_\nu - e_\lambda$ conjugirt complex, also e_λ reell, e_μ und e_ν conjugirt complex sind. Nimmt man insbesondere

$$a = a_1,$$

also $a_\alpha = a_2$, so entsprechen einander

$$x = \quad a_1 \quad a_2 \quad \infty$$

und

$$s = \quad \infty \quad e_2 \quad s_0.$$

Man erhält demnach, wenn $A > 0$, unter Berücksichtigung der Tabelle S. 23

(18.) $$\int_{a_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_2$$

und

(19.) $$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{-\infty}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = \frac{\omega_2'}{i}.$$

Für $A < 0$ dagegen wird

(20.) $$\int_{a_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} + \int_{-\infty}^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{-\infty}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{-S}} = \frac{\omega_2'}{i}$$

und

(21.) $$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega_2.$$

III. Fall.

Die Wurzeln von $R(x) = 0$ seien sämmtlich complex. Dann sind wie im ersten Fall alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 reell (S. 9). Bezeichnet man mit $2\omega_1$ die reelle primitive Periode von $s = \wp u$, so ist für $A > 0$

$$(22.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 2\omega_1,$$

wie im achten Kapitel (S. 96) gezeigt worden ist. Wenn dagegen $A < 0$, so erhält man nach denselben Überlegungen

$$(23.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = 2\frac{\omega_3}{i}.$$

Nunmehr betrachte man das Integral

$$(24.)\qquad J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

worin x_0, x_1 zwei reelle, innerhalb der angegebenen Intervalle gelegene Grössen sein mögen. Es sei ferner $x_1 > x_0$ angenommen. Macht man die Substitution (E. F. S. 15 (IV.) und (V.))

$$(25.)\qquad s = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(x_0)}}{x-x_0}\right)^2 - \frac{1}{4}A(x+x_0)^2 - B(x+x_0) - C$$

oder

$$(26.)\quad s = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)}}{(x-x_0)^2} + \frac{1}{2}C + \frac{Ax^2x_0^2 + 2B(x+x_0)xx_0 + 6Cxx_0 + 2B'(x+x_0) + A'}{2(x-x_0)^2},$$

so wird (E. F. S. 14 (II.))

$$(27.)\quad \sqrt{S} = \left(\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right)\sqrt{R(x)}$$

und

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Wenn das Zeichen von $\sqrt{R(x_0)}$ fixirt ist, so entspricht dem Werthe $x = x_0$ der Werth $s = \infty$. Bezeichnet man den zu $x = x_1$ gehörigen Werth von s

mit s_1, so erhält man

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{s_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}. \tag{28.}$$

In der Umgebung von $x = x_0$ wird

$$s = \frac{R(x_0)}{(x-x_0)^2} + \cdots.$$

Es hat also s zu Anfang des Integrationsintervalls dasselbe Vorzeichen wie $R(x_0)$. Ferner ist

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{2R(x_0)}{(x-x_0)^3} + \cdots.$$

Für positives $R(x_0)$ wird daher

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{R(x)}}$$

negativ, d. h. s nimmt innerhalb des betrachteten Intervalls beständig ab, falls $\sqrt{S}$ sein Zeichen beibehält. Ist aber $R(x_0)$ negativ, so wird

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{i\sqrt{S}}{\sqrt{-R(x)}}$$

im ganzen Intervall positiv, also nimmt s beständig zu. Dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{s_1}^{-\infty} \frac{ds}{\sqrt{-S}}. \tag{29.}$$

Diese Bemerkungen genügen, um jedesmal zu entscheiden, in welchem Intervall der Werth des gegebenen Integrals gelegen ist, falls $\sqrt{S}$ im Integrationsintervall nicht das Zeichen wechselt.

Ein Verschwinden von S und somit auch eine Änderung des Vorzeichens von $\sqrt{S}$ ist im dritten Falle möglich, da innerhalb des Intervalls von $-\infty$ bis $+\infty$ die drei dann reellen Grössen e_1, e_2, e_3 gelegen sind. Im achten Kapitel (S. 96) war aber gerade für diesen Fall bewiesen worden, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 2\omega_1$$

ist, und somit der Werth des Integrals

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

stets zwischen 0 und $2\omega_1$ liegt. Dies gilt für $A > 0$. Bei entgegengesetztem Vorzeichen von A tritt $\frac{\omega_3}{i}$ an die Stelle von ω_1.

Jetzt werde noch die Annahme besprochen, dass $R(x)$ nur vom dritten Grade ist:

$$R(x) = 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'.$$

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$R(x) = 0$$

seien mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet. Man kann hier ausser (7.) auch die einfache Substitution E. F. S. 16 (IX.) anwenden:

$$s = Bx + \frac{1}{2}C, \tag{30.}$$

wobei

$$\sqrt{S} = -B\sqrt{R(x)} \tag{31.}$$

zu nehmen ist. Was die Realität der Grössen a_1, a_2, a_3 betrifft, so sind diesmal zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder sind alle drei Grössen reell, oder nur eine ist reell, die beiden anderen conjugirt complex.

I. Fall.

Es seien alle drei Grössen a_1, a_2, a_3 reell und

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

Dann ist, wenn $B > 0$,

$R(x)$ positiv in den Intervallen $(a_1 \cdots a_2)$ und $(a_3 \cdots +\infty)$,
$R(x)$ negativ in den Intervallen $(-\infty \cdots a_1)$ und $(a_2 \cdots a_3)$.

Die drei Wurzeln der Gleichung $S = 0$ sind ebenfalls reell, und es entsprechen bei der Substitution (30.)

$$x = a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \infty$$

und

$$s = e_3 \quad e_2 \quad e_1 \quad \infty$$

einander, wobei

$$(32.)\qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{3}B(2a_3-a_1-a_2) \\ e_2 = \dfrac{1}{3}B(2a_2-a_3-a_1) \\ e_3 = \dfrac{1}{3}B(2a_1-a_2-a_3). \end{cases}$$

Es wird

$$(33.)\qquad \int_{a_3}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \omega_1$$

und

$$(34.)\qquad \int_{-\infty}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \frac{\omega_3}{i}.$$

Ist dagegen B negativ, so verändern sich die Ergebnisse wie folgt:

$$(35.)\qquad \int_{a_3}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \frac{\omega_3}{i},$$

$$(36.)\qquad \int_{-\infty}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \omega_1.$$

Wollte man die Substitution (7.) benutzen und z. B.

$$a = a_1$$

setzen, so entsprächen einander, wenn B positiv ist,

$$x = \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \infty$$

und

$$s = \quad \infty \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3.$$

Die übrigen Ergebnisse bleiben ungeändert.

II. Fall.

Es sei nur eine der drei Grössen a_1, a_2, a_3 reell, und zwar a_2. Dann ist, wenn B positiv,

$R(x)$ positiv im Intervall $(+\infty \cdots a_2)$,
$R(x)$ negativ im Intervall $(a_2 \cdots -\infty)$.

Von den Grössen e_1, e_2, e_3 wird ebenfalls nur eine reell, sie sei mit e_2 bezeichnet. Es ist

S positiv im Intervall $(+\infty \cdots e_2)$,
S negativ im Intervall $(e_2 \cdots -\infty)$.

Durch die den früheren entsprechenden Substitutionen erhält man, wenn $B > 0$ ist,

$$\int_{a_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \omega_2 \tag{37.}$$

und

$$\int_{-\infty}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \frac{\omega_2'}{i}, \tag{38.}$$

dagegen, wenn $B < 0$,

$$\int_{a_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \frac{\omega_2'}{i} \tag{39.}$$

und

$$\int_{-\infty}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \omega_2. \tag{40.}$$

Elftes Kapitel.

Lineare Transformation des elliptischen Differentials $dx/\sqrt{R(x)}$ in die Legendre-Jacobische Normalform.

Im ersten Kapitel der Elliptischen Functionen sind die Verfahren angegeben, nach denen man das Differential

$$(1.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

worin $R(x)$ eine ganze Function dritten oder vierten Grades ohne quadratischen Theiler bedeutet, mittels einer linearen Transformation

$$x = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}$$

auf die Normalform

$$(2.)\qquad \frac{-ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

bringen kann. Um von hier aus zu der Legendre-Jacobischen Normalform

$$(3.)\qquad \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

überzugehen, kann man, wie im elften Kapitel der Elliptischen Functionen gezeigt worden ist, den Zusammenhang der Function $s = \wp u$ mit den Sigmaquotienten,

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u\right)^2 = \frac{1}{\wp u - e_\alpha},$$

benutzen,

$$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}u = \xi$$

und dann weiter (E. F. S. 99)

$$\sqrt{e_1 - e_3}\,\xi = t = \sin\varphi$$

setzen. Hierbei besteht, wie man sogleich übersieht, zwischen den Variablen s und t, demnach auch zwischen x und t eine rationale Beziehung, die t im zweiten Grade enthält.

Um das gegebene Differential (1.) in die Legendre-Jacobische Normalform (3.) überzuführen, kann man sich auch einer linearen Transformation zwischen x und t bedienen.

Es sei zunächst $R(x)$ vom vierten Grade:

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4).$$

Unter t verstehe man eine rationale Function ersten Grades von x. Die drei Constanten, die sie enthält, lassen sich so bestimmen, dass den Werthen a_1, a_2, a_3, a_4 von x, in irgend einer Reihenfolge genommen, die Werthe $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ von t entsprechen, wo k eine noch zu ermittelnde Grösse bedeutet. Nimmt man z. B. an, es sollen den Werthen

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4$$

der Variablen x die Werthe

$$-\frac{1}{k} \qquad -1 \qquad +1 \qquad +\frac{1}{k}$$

von t zugeordnet sein, so kann man

$$\begin{aligned} x - a_1 &= \lambda_1 \frac{1+kt}{1-nt}, \\ x - a_2 &= \lambda_2 \frac{1+t}{1-nt}, \\ x - a_3 &= \lambda_3 \frac{1-t}{1-nt}, \\ x - a_4 &= \lambda_4 \frac{1-kt}{1-nt} \end{aligned}$$

setzen und von den Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ und n die vier ersten dadurch bestimmen, dass man in der ersten Gleichung $x = a_4$, $t = +\frac{1}{k}$, in der zweiten $x = a_3$, $t = +1$, in der dritten $x = a_2$, $t = -1$ und in der vierten $x = a_1$,

$t = -\frac{1}{k}$ nimmt. Dadurch ergiebt sich

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_4-a_1} = \dfrac{k-n}{2k}\,\dfrac{1+kt}{1-nt} \\ \dfrac{x-a_2}{a_3-a_2} = \dfrac{1-n}{2}\,\dfrac{1+t}{1-nt} \\ \dfrac{x-a_3}{a_2-a_3} = \dfrac{1+n}{2}\,\dfrac{1-t}{1-nt} \\ \dfrac{x-a_4}{a_1-a_4} = \dfrac{k+n}{2k}\,\dfrac{1-kt}{1-nt}. \end{cases}$$

Vereinigt man die zweite und dritte dieser Gleichungen durch Division und setzt alsdann $x = a_4$, $t = +\frac{1}{k}$, sowie auch $x = a_1$, $t = -\frac{1}{k}$, so kommt

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{1-n}{1+n}\,\dfrac{1+k}{1-k} = \dfrac{a_4-a_2}{a_4-a_3} \\ \dfrac{1-n}{1+n}\,\dfrac{1-k}{1+k} = \dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1}, \end{cases}$$

mithin

$$(6.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^2 = \dfrac{(a_2-a_1)(a_4-a_3)}{(a_3-a_1)(a_4-a_2)} \\ \left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^2 = \dfrac{(a_2-a_1)(a_4-a_2)}{(a_3-a_1)(a_4-a_3)}. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich für die Quotienten $\frac{1-k}{1+k}$ und $\frac{1-n}{1+n}$ je zwei Werthe, die jedoch den Gleichungen (5.) zufolge paarweise zusammengehören. Daraus erhellt, dass sobald feststeht, in welcher Reihenfolge die Werthe ± 1, $\pm\frac{1}{k}$ von t den Wurzeln der Gleichung

$$R(x) = 0$$

entsprechen, x noch auf doppelte Weise als lineare gebrochene Function von t dargestellt werden kann. Aus (6.) folgt aber, dass wenn a_1 und a_4 mit einander vertauscht werden, k in $-k$ übergeht, n dagegen seinen Werth beibehält; x bleibt, der ersten und letzten Formel (4.) zufolge, dabei ungeändert. Von den achtundvierzig Ausdrücken, die sich für x ergeben, wenn man a_1, a_2, a_3, a_4 auf alle möglichen Weisen vertauscht, sind demnach nur vierundzwanzig von einander verschieden.

Da die Gleichungen (6.) reciprok in Bezug auf die Unbekannten k und n sind, so kann man in jedem Falle einen bestimmten Werth von k ermitteln, dessen absoluter Betrag kleiner als Eins ist. Aus der zweiten und dritten Gleichung (4.) folgt durch Subtraction

$$x = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) + \frac{1}{2}(a_3 - a_2)\frac{t-n}{1-nt}, \tag{7.}$$

und durch Division mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (6.)

$$\sqrt{\frac{(a_3-a_1)(a_4-a_3)}{(a_2-a_1)(a_4-a_2)}}\,\frac{x-a_2}{a_3-x} = \frac{1+t}{1-t}. \tag{8.}$$

Ferner liefern die Formeln (4.) durch Multiplication

$$\frac{R(x)}{(a_4-a_1)^2(a_3-a_2)^2} = A\,\frac{k^2-n^2}{4k^2}\,\frac{1-n^2}{4}\,\frac{(1-t^2)(1-k^2t^2)}{(1-nt)^4},$$

und die erste und zweite dieser Gleichungen durch Differentiation

$$\frac{dx}{dt} = (a_3-a_2)\frac{1-n^2}{2}\,\frac{1}{(1-nt)^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = (a_4-a_1)\frac{k^2-n^2}{2k}\,\frac{1}{(1-nt)^2}.$$

Setzt man, der Quadratwurzel ein bestimmtes Vorzeichen ertheilend,

$$\frac{1}{2}\sqrt{A\,\frac{(a_4-a_1)(a_3-a_2)}{k}} = m, \tag{9.}$$

so folgt

$$R(x) = m^2(1-t^2)(1-k^2t^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \tag{10.}$$

also

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{m}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{11.}$$

und hierin ist das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ für jeden Werth von t eindeutig durch das von $\sqrt{R(x)}$ und von m bestimmt, weil

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = m\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}m(a_3-a_2)\frac{1-n^2}{(1-nt)^2} \tag{12.}$$

ist. Deshalb ist es auch gleichgiltig, welches Zeichen man der Wurzelgrösse m beilegt. Durch die Formeln (7.), (11.) und (12.) ist die gewünschte Transformation vollständig bestimmt.

Setzt man

$$(13.)\quad \begin{cases} A(a_3-a_1)(a_4-a_2) = g \\ A(a_4-a_1)(a_3-a_2) = g' \\ A(a_2-a_1)(a_4-a_3) = g'', \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} (a_3-a_1)(a_4-a_3) = h' \\ (a_2-a_1)(a_4-a_2) = h'', \end{cases}$$

wo dann

$$(15.)\quad g = g'+g''$$

ist, so erhält man aus (6.)

$$(16.)\quad k = \frac{\sqrt{g}-\sqrt{g''}}{\sqrt{g}+\sqrt{g''}},$$

$$(17.)\quad n = \frac{\sqrt{h'}-\sqrt{h''}}{\sqrt{h'}+\sqrt{h''}}.$$

Von den in diesen beiden Formeln auftretenden Wurzeln können drei mit beliebigen Vorzeichen versehen werden, das der vierten ist alsdann durch eine der Formeln (5.) bestimmt. Die erste der Gleichungen (5.) ergiebt z. B.

$$\frac{\sqrt{h''}}{\sqrt{h'}}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g''}} = \frac{a_4-a_2}{a_4-a_3}.$$

Diese Relation besteht aber, wenn man in

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \sqrt{A}\sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_4-a_2}, \\ \sqrt{g''} &= \sqrt{A}\sqrt{a_2-a_1}\sqrt{a_4-a_3}, \\ \sqrt{h'} &= \sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_4-a_3}, \\ \sqrt{h''} &= \sqrt{a_2-a_1}\sqrt{a_4-a_2} \end{aligned}$$

jeder Wurzelgrösse von den beiden Werthen, die sie haben kann, einen beliebigen, aber stets denselben Werth beilegt.

Ferner ist nach (9.)

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g'}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g-g''}{k}},$$

d. h.

$$(18.)\quad m = \frac{1}{2}(\sqrt{g}+\sqrt{g''}).$$

Setzt man schliesslich noch

$$(19.)\qquad m' = \frac{1}{2}(\sqrt{g} - \sqrt{g''}),$$

so kann man wegen

$$k = \frac{m'}{m}$$

die Gleichung (11.) auch in der Form

$$(20.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(m^2-m'^2t^2)}}$$

schreiben.

Für den Fall, dass $R(x)$ vom dritten Grade ist, lassen sich die Transformationsformeln aus den abgeleiteten durch einen Grenzübergang ermitteln. Denn die ganze Function dritten Grades

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

geht aus der ganzen Function vierten Grades

$$-\frac{A}{a_4}(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

dadurch hervor, dass a_4 unendlich gross wird. Es ist also nur erforderlich, in den erhaltenen Formeln $-\frac{A}{a_4}$ an Stelle von A zu setzen und sodann die Grenzwerthe für $a_4 = \infty$ zu bestimmen. Auf diese Weise erhält man aus (5.) und (6.)

$$n = k,$$

$$(21.)\qquad \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1},$$

während die Substitutionsformel (7.) die Gestalt

$$(22.)\qquad x = \frac{1}{2}(a_2+a_3) + \frac{1}{2}(a_3-a_2)\frac{t-k}{1-kt}$$

annimmt. Aus (9.) folgt

$$(23.)\qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{A\frac{a_3-a_2}{k}},$$

und aus (13.)

$$(24.)\qquad \begin{cases} g \;= A(a_3-a_1) \\ g' = A(a_3-a_2) \\ g'' = A(a_2-a_1). \end{cases}$$

Demgemäss ist nach (18.)

$$(25.)\qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{A}\left(\sqrt{a_3-a_1}+\sqrt{a_2-a_1}\right),$$

und nach (16.)

$$(26.)\qquad k = \frac{\sqrt{a_3-a_1}-\sqrt{a_2-a_1}}{\sqrt{a_3-a_1}+\sqrt{a_2-a_1}}.$$

Diese Formeln sind z. B. ohne weiteres brauchbar, um von der Normalform

$$\frac{-ds}{\sqrt{S}} = \frac{-ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

zur Legendre-Jacobischen Normalform überzugehen.

Zwölftes Kapitel.

Specielle Fälle der linearen Transformation des elliptischen Differentials in die Legendre-Jacobische Normalform.

Es werde jetzt angenommen, die Coefficienten der ganzen Function

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

seien sämmtlich reell und $A \lesseqgtr 0$. Dann sind, wie bekannt, die drei Fälle zu unterscheiden, dass entweder sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

reell, oder dass zwei reell, die beiden anderen conjugirt complex, oder endlich, dass sie sämmtlich nicht reell und dann paarweise conjugirt complex sind. Diese drei Fälle sollen nach einander besprochen werden. Ausserdem gelte die Voraussetzung, dass die Variable x nur solche Werthe annehme, für die $\sqrt{R(x)}$ beständig reell bleibt.

I. Fall.

Die Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 seien sämmtlich reell, und es sei

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Damit $\sqrt{R(x)}$ beständig reell bleibe, muss x im Intervall $(a_2 \dots a_3)$ oder ausserhalb des Intervalls $(a_1 \dots a_4)$ gelegen sein, wenn A positiv ist; dagegen muss x zwischen a_1 und a_2 oder zwischen a_3 und a_4 liegen, wenn A negativ ist. In jedem dieser vier Fälle giebt es unter den auf S. 119 angeführten linearen Transformationen des elliptischen Differentials

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in die Legendre-Jacobische Normalform eine von folgenden Eigenschaften: Die Grössen k, n, m (S. 121) erhalten reelle Werthe, k wird positiv und kleiner als Eins, die Variable t ist beständig zwischen -1 und $+1$ enthalten, endlich nehmen x und t gleichzeitig zu oder ab, sodass, wenn m positiv gewählt wird, das Vorzeichen von $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ mit dem von $\sqrt{R(x)}$ übereinstimmt. Setzt man dann

$$t = \sin\varphi,$$

so erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{m}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

worin φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen und $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ positiv ist, wenn $\sqrt{R(x)}$ das positive Zeichen hat.

In der folgenden Formelzusammenstellung ist allen Quadratwurzeln der positive Werth zu ertheilen.

1) Es sei A positiv, und x zwischen a_2 und a_3 gelegen. Dann hat man

$$k = \frac{\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)} - \sqrt{A(a_2-a_1)(a_4-a_3)}}{\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)} + \sqrt{A(a_2-a_1)(a_4-a_3)}}, \tag{1.}$$

$$n = \frac{\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_3)} - \sqrt{(a_2-a_1)(a_4-a_2)}}{\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_3)} + \sqrt{(a_2-a_1)(a_4-a_2)}}, \tag{2.}$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)} + \frac{1}{2}\sqrt{A(a_2-a_1)(a_4-a_3)}, \tag{3.}$$

$$\sqrt{\frac{(a_3-a_1)(a_4-a_3)}{(a_2-a_1)(a_4-a_2)}\,\frac{x-a_2}{a_3-x}} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}, \tag{4.}$$

$$x = \frac{1}{2}(a_2+a_3) + \frac{1}{2}(a_3-a_2)\frac{\sin\varphi - n}{1-n\sin\varphi}. \tag{5.}$$

2) Es sei A positiv, x ausserhalb des Intervalls $(a_1 \dots a_4)$ gelegen. Dann ist

$$k = \frac{\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)} - \sqrt{A(a_2-a_1)(a_4-a_3)}}{\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)} + \sqrt{A(a_2-a_1)(a_4-a_3)}}, \tag{6.}$$

$$n = \frac{\sqrt{(a_3-a_1)(a_2-a_1)} + \sqrt{(a_4-a_3)(a_4-a_2)}}{\sqrt{(a_3-a_1)(a_2-a_1)} - \sqrt{(a_4-a_3)(a_4-a_2)}}, \tag{7.}$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)} + \frac{1}{2}\sqrt{A(a_2-a_1)(a_4-a_3)}, \tag{8.}$$

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{(a_3-a_1)(a_2-a_1)}{(a_4-a_3)(a_4-a_2)}}\,\frac{x-a_4}{x-a_1} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$(10.)\qquad x = \frac{1}{2}(a_1+a_4)+\frac{1}{2}(a_4-a_1)\frac{n-\sin\varphi}{1-n\sin\varphi}.$$

Diese Formeln erhält man aus denen des vorigen Kapitels, indem man

$$a_3 \quad a_4 \quad a_1 \quad a_2$$

an die Stelle von

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

treten lässt.

3) Es sei A negativ, x im Intervall $(a_1 \dots a_2)$ gelegen. Dann hat man

$$(11.)\qquad k = \frac{\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}-\sqrt{-A(a_3-a_2)(a_4-a_1)}}{\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}+\sqrt{-A(a_3-a_2)(a_4-a_1)}},$$

$$(12.)\qquad n = \frac{\sqrt{(a_4-a_2)(a_3-a_2)}-\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_1)}}{\sqrt{(a_4-a_2)(a_3-a_2)}+\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_1)}},$$

$$(13.)\qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}+\frac{1}{2}\sqrt{-A(a_3-a_2)(a_4-a_1)},$$

$$(14.)\qquad \sqrt{\frac{(a_4-a_2)(a_3-a_2)}{(a_4-a_1)(a_3-a_1)}}\,\frac{x-a_1}{a_2-x} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$(15.)\qquad x = \frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2-a_1)\frac{\sin\varphi-n}{1-n\sin\varphi}.$$

Diese Formeln ergeben sich aus den ursprünglichen, wenn

$$a_4 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

statt

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

gesetzt wird.

4) Es sei A negativ, x zwischen a_3 und a_4 gelegen. Dann ist

$$(16.)\qquad k = \frac{\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}-\sqrt{-A(a_3-a_2)(a_4-a_1)}}{\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}+\sqrt{-A(a_3-a_2)(a_4-a_1)}},$$

$$(17.)\qquad n = \frac{\sqrt{(a_4-a_2)(a_4-a_1)}-\sqrt{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}}{\sqrt{(a_4-a_2)(a_4-a_1)}+\sqrt{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}},$$

$$(18.)\qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}+\frac{1}{2}\sqrt{-A(a_3-a_2)(a_4-a_1)},$$

$$(19.)\qquad \sqrt{\frac{(a_4-a_2)(a_4-a_1)}{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}}\,\frac{x-a_3}{a_4-x} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$(20.)\qquad x = \frac{1}{2}(a_3+a_4)+\frac{1}{2}(a_4-a_3)\frac{\sin\varphi-n}{1-n\sin\varphi}.$$

Um diese Formeln zu erhalten, hat man in den ursprünglichen

$$a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_1$$

an die Stelle von

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

zu setzen.

II. Fall.

Von den vier Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ seien a_1 und a_2 reell, und zwar

$$a_1 < a_2,$$

dagegen a_3 und a_4 conjugirt complex, wobei der reelle Theil von $\frac{a_4}{i}$ positiv sein möge. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem A negativ und demnach x zwischen a_1 und a_2 enthalten, oder A positiv und x ausserhalb des Intervalls $(a_1 \dots a_2)$ gelegen ist.

1) Es sei $A < 0$, $a_1 < x < a_2$. Man setze in den Formeln des vorigen Kapitels

$$a_3 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_4$$

an die Stelle von

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4,$$

so erhält man (S. 121 (13.) und (14.))

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} &= \sqrt{A}\,\sqrt{a_2-a_3}\,\sqrt{a_4-a_1},\\
\sqrt{g''} &= \sqrt{A}\,\sqrt{a_1-a_3}\,\sqrt{a_4-a_2},\\
\sqrt{h'} &= \sqrt{a_2-a_3}\,\sqrt{a_4-a_2},\\
\sqrt{h''} &= \sqrt{a_1-a_3}\,\sqrt{a_4-a_1}.
\end{aligned}$$

Nimmt man nun

$$\sqrt{A} = i\sqrt{-A}, \quad \sqrt{a_4-a_1} = i\sqrt{a_1-a_4}, \quad \sqrt{a_4-a_2} = i\sqrt{a_2-a_4}$$

und setzt fest, dass der reelle Theil jeder Quadratwurzel positiv sein soll, so findet man

$$\begin{aligned}
\sqrt{g} &= \sqrt{-A}\,\sqrt{a_2-a_3}\,\sqrt{a_1-a_4},\\
\sqrt{g''} &= \sqrt{-A}\,\sqrt{a_1-a_3}\,\sqrt{a_2-a_4},\\
\sqrt{h'} &= -i\,\sqrt{a_2-a_3}\,\sqrt{a_2-a_4},\\
\sqrt{h''} &= -i\,\sqrt{a_1-a_3}\,\sqrt{a_1-a_4},
\end{aligned}$$

daher

$$n = \frac{\sqrt{a_2-a_3}\,\sqrt{a_2-a_4}\;-\sqrt{a_1-a_3}\,\sqrt{a_1-a_4}}{\sqrt{a_2-a_3}\,\sqrt{a_2-a_4}\;+\sqrt{a_1-a_3}\,\sqrt{a_1-a_4}}$$

oder

$$n = \frac{\sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}-\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}}{\sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}+\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}}. \tag{21.}$$

Hiernach ist die Grösse n reell und dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins. Wegen

$$x = \frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2-a_1)\frac{t-n}{1-nt}$$

gehören zu reellen Werthen von x auch reelle Werthe von t. Da ferner

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(a_2-a_1)\frac{1-n^2}{(1-nt)^2}$$

positiv ist, so geht t stetig wachsend von -1 zu $+1$ über, wenn x das Intervall $(a_1 \dots a_2)$ stetig wachsend durchläuft. Setzt man daher

$$t = -\cos\varphi,$$

also

$$\sqrt{\frac{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\,\frac{x-a_1}{a_2-x}} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \tag{22.}$$

$$x = \frac{1}{2}(a_1+a_2)-\frac{1}{2}(a_2-a_1)\frac{\cos\varphi+n}{1+n\cos\varphi}, \tag{23.}$$

so ergiebt sich nach S. 122 (20.)

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2-m'^2\cos^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(m^2-m'^2)+m'^2\sin^2\varphi}},$$

worin

$$\begin{aligned}
m^2 &= \frac{1}{4}\left(g+g''+2\sqrt{g}\,\sqrt{g''}\right),\\
m'^2 &= \frac{1}{4}\left(g+g''-2\sqrt{g}\,\sqrt{g''}\right)
\end{aligned}$$

zu setzen ist. Da g und g'' conjugirt complexe Grössen sind, so wird

$$m^2 - m'^2 = \sqrt{g}\sqrt{g''} = -A\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

eine positive Grösse, während

$$m'^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{g}-\sqrt{g''})^2$$

negativ ist. Setzt man also

$$k^2 = \frac{-m'^2}{m^2-m'^2},$$

d. h.

$$(24.)\qquad k = \frac{\sqrt{a_2-a_3}\sqrt{a_1-a_4}-\sqrt{a_1-a_3}\sqrt{a_2-a_4}}{2i\sqrt[4]{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}},$$

so ist k^2 positiv und kleiner als Eins, und man hat

$$(25.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

worin

$$(26.)\qquad \mu = \sqrt{-A}\sqrt[4]{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}.$$

Damit x das Intervall $(a_1 \dots a_2)$ durchlaufe, hat φ alle Werthe von 0 bis π anzunehmen.

2) Es sei $A > 0$, und x ausserhalb des Intervalls $(a_1 \dots a_2)$ gelegen. Man kann in diesem Falle dieselben Formeln wie im vorhergehenden anwenden, wenn man nur die Zeichen der Wurzelgrössen so bestimmt, dass der absolute Betrag von n grösser als Eins wird. Denn aus der zweiten und dritten Formel S. 119 (4.) folgt, nachdem man darin, wie es sein muss, a_1, a_2 an die Stelle von a_2, a_3 gesetzt hat,

$$\frac{1+n}{1-n}\,\frac{x-a_1}{a_2-x} = \frac{1+t}{1-t};$$

soll aber x für alle zwischen -1 und $+1$ enthaltenen Werthe von t ausserhalb des Intervalls $(a_1 \dots a_2)$ liegen, so muss

$$\frac{1+n}{1-n} < 0$$

sein. Um dies zu erreichen, setze man in den ursprünglichen Ausdrücken von $\sqrt{g}$, $\sqrt{g''}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{h''}$

$$\sqrt{a_4-a_2} = i\sqrt{a_2-a_4}, \qquad \sqrt{a_1-a_3} = -i\sqrt{a_3-a_1},$$

so ergiebt sich

$$n = \frac{\sqrt{a_2-a_3}\sqrt{a_2-a_4} + \sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_4-a_1}}{\sqrt{a_2-a_3}\sqrt{a_2-a_4} - \sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_4-a_1}}$$

oder

$$(27.) \qquad n = \frac{\sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)} + \sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_1)}}{\sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)} - \sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_1)}},$$

wo wieder die reellen Theile aller Wurzeln positiv sein müssen. Ferner sind die beiden Grössen

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{a_2-a_3}\sqrt{a_4-a_1} + \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{a_2-a_4}\sqrt{a_3-a_1}$$

und

$$\frac{m'}{i} = \frac{1}{2i}\sqrt{A}\sqrt{a_2-a_3}\sqrt{a_4-a_1} - \frac{1}{2i}\sqrt{A}\sqrt{a_2-a_4}\sqrt{a_3-a_1}$$

reell. Setzt man also

$$k^2 = \frac{-m'^2}{m^2-m'^2},$$

$$\mu = m^2 - m'^2$$

oder

$$(28.) \qquad k = \frac{\sqrt{a_2-a_3}\sqrt{a_4-a_1} - \sqrt{a_2-a_4}\sqrt{a_3-a_1}}{2i\sqrt[4]{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}},$$

$$(29.) \qquad \mu = \sqrt{A}\sqrt[4]{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

und nimmt

$$t = \cos\varphi,$$

also

$$(30.) \qquad \sqrt{\frac{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\,\frac{x-a_1}{x-a_2}} = \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi},$$

$$(31.) \qquad x = \frac{1}{2}(a_1+a_2) + \frac{1}{2}(a_2-a_1)\frac{\cos\varphi - n}{1-n\cos\varphi},$$

so wird

$$(32.) \qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Hierin geht, wenn φ das Intervall $(0 \ldots \pi)$ stetig wachsend durchläuft, x von a_2 bis $+\infty$ und dann von $-\infty$ bis a_1. Es ist daher $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ ebenso wie im vorhergehenden Falle gleichzeitig mit $\sqrt{R(x)}$ positiv.

Setzt man übrigens, unter ϱ eine positive und unter ϑ eine zwischen 0 und 2π liegende Grösse verstehend,

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} = \varrho e^{i\vartheta},$$

also

$$\frac{a_1-a_4}{a_2-a_4} = \varrho e^{-i\vartheta},$$

so ist

$$\text{im Falle 1)} \qquad k = \sin\frac{\vartheta}{2}, \qquad n = \frac{1-\varrho}{1+\varrho},$$

$$\text{im Falle 2)} \qquad k = \cos\frac{\vartheta}{2}, \qquad n = \frac{1+\varrho}{1-\varrho}.$$

III. Fall.

Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 sämmtlich nicht reell. Damit $\sqrt{R(x)}$ für reelle Werthe von x reell sei, muss der Coefficient A positiv sein. Die Grössen a_1 und a_2, sowie a_3 und a_4 seien conjugirt complex, und zwar mögen die reellen Theile von $\frac{a_3}{i}$ und $\frac{a_4}{i}$ positiv sein. Nimmt man dann

$$\sqrt{a_2-a_3} = i\sqrt{a_3-a_2} \quad \text{und} \quad \sqrt{a_2-a_4} = i\sqrt{a_4-a_2}$$

an, trifft über die Vorzeichen der Wurzeln dieselben Festsetzungen wie oben und setzt in den Formeln des vorigen Kapitels

$$a_1 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_2$$

an die Stelle von

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4,$$

so erhält man

$$\sqrt{g} = i\sqrt{A}\sqrt{a_4-a_1}\sqrt{a_3-a_2} = i\sqrt{A}\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_2)},$$

$$\sqrt{g''} = i\sqrt{A}\sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_4-a_2} = i\sqrt{A}\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)},$$

$$(33.) \qquad n = \frac{\sqrt{a_4-a_1}\sqrt{a_4-a_2}-\sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_3-a_2}}{\sqrt{a_4-a_1}\sqrt{a_4-a_2}+\sqrt{a_3-a_1}\sqrt{a_3-a_2}},$$

$$(34.) \qquad m = \frac{i}{2}\sqrt{A}\left(\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_2)}+\sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}\right);$$

diese Grössen sind sämmtlich rein imaginär, dagegen ist

$$k = \frac{\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_2)} - \sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}{\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_2)} + \sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}} \tag{35.}$$

reell und dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins. Setzt man nun $\frac{t}{i}$ für t, ferner

$$-\frac{n}{i} = \nu, \quad -\frac{m}{i} = \mu,$$

so sind μ, ν reelle Grössen, und durch die Substitution S. 120 (7.),

$$x = \frac{1}{2}(a_3+a_4) + \frac{1}{2i}(a_4-a_3)\frac{t-\nu}{1+\nu t},$$

geht das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}$$

über. Nimmt man jetzt

$$t = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{2\sqrt[4]{(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}{\sqrt{(a_4-a_1)(a_3-a_2)} + \sqrt{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}, \tag{36.}$$

so wird

$$x = \frac{1}{2}(a_3+a_4) + \frac{1}{2i}(a_4-a_3)\frac{\operatorname{tg}\varphi-\nu}{1+\nu\operatorname{tg}\varphi} \tag{37.}$$

und

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}. \tag{38.}$$

Dabei durchläuft x wachsend alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn φ stetig von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ übergeht. Die Quadratwurzel $\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}$ hat dasselbe Vorzeichen wie $\sqrt{R(x)}$.

Für

$$\frac{a_2-a_3}{a_2-a_4} = \varrho e^{i\vartheta}$$

wird

$$k = \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1},$$

$$k' = \frac{2\sqrt{\varrho}}{\varrho + 1},$$

$$\nu = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

Wenn die ganze Function $R(x)$ vom dritten Grade ist,

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

und reelle Coefficienten hat, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem alle drei Wurzeln a_1, a_2, a_3 reell sind, oder nur eine, die beiden andern dagegen conjugirt complex.

I. Fall.

Es seien a_1, a_2, a_3 alle drei reell, und

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

Auch hier sind, wie im Falle einer biquadratischen Function, vier Möglichkeiten vorhanden, und die zugehörigen Formeln ergeben sich aus den entsprechenden durch den Grenzübergang für $a_4 = \infty$, wie auf S. 122 angegeben worden ist.

1) Wenn A positiv und x im Intervall $(a_2 \dots a_3)$ gelegen ist, so hat man nach S. 122, 123 ((21.) bis (26.))

$$k = \frac{\sqrt{a_3 - a_1} - \sqrt{a_2 - a_1}}{\sqrt{a_3 - a_1} + \sqrt{a_2 - a_1}}, \tag{39.}$$

$$n = k, \tag{40.}$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{A}\left(\sqrt{a_3 - a_1} + \sqrt{a_2 - a_1}\right) \tag{41.}$$

und, für $t = \sin\varphi$,

$$\sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}\,\frac{x - a_2}{a_3 - x}} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}, \tag{42.}$$

$$x = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) + \frac{1}{2}(a_3 - a_2)\frac{\sin\varphi - k}{1 - k\sin\varphi}. \tag{43.}$$

Für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ wird x gleich a_2, für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ gleich a_3. Ferner ist

$$(44.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{m}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

2) Es sei A positiv, und x in dem Intervalle $(-\infty \ldots a_1)$ enthalten. Dann gelten die Formeln (39.) bis (41.) unverändert, aber an die Stelle von (43.) tritt

$$(45.)\qquad x = a_1 - \sqrt{(a_3-a_1)(a_2-a_1)}\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi},$$

wodurch die Gleichung (44.) erhalten wird. Für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ wird x gleich $-\infty$, für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ gleich a_1.

3) Es sei A negativ, und x in dem Intervalle $(a_1 \ldots a_2)$ gelegen. Dann wird

$$(46.)\qquad k = \frac{\sqrt{a_3-a_1}-\sqrt{a_3-a_2}}{\sqrt{a_3-a_1}+\sqrt{a_3-a_2}},$$

$$(47.)\qquad n = -k,$$

$$(48.)\qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{-A}\left(\sqrt{a_3-a_1}+\sqrt{a_3-a_2}\right),$$

$$(49.)\qquad \sqrt{\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}\,\frac{x-a_1}{a_2-x}} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$(50.)\qquad x = \frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2-a_1)\frac{\sin\varphi+k}{1+k\sin\varphi},$$

wodurch die Gleichung (44.) befriedigt wird. Für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ wird x gleich a_1, für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ dagegen gleich a_2.

4) Es sei A negativ, und x im Intervalle $(a_3 \cdots +\infty)$ gelegen. Es wird

$$(51.)\qquad k = \frac{\sqrt{a_3-a_1}-\sqrt{a_3-a_2}}{\sqrt{a_3-a_1}+\sqrt{a_3-a_2}},$$

$$(52.)\qquad m = \frac{1}{2}\sqrt{-A}\left(\sqrt{a_3-a_1}+\sqrt{a_3-a_2}\right),$$

$$(53.)\qquad x = a_3 + \sqrt{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

und die Gleichung (44.) ist erfüllt. Für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ wird x gleich a_3, und für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ unendlich gross.

II. Fall.

Die reelle Wurzel der cubischen Gleichung $R(x) = 0$ sei a_1, und a_2 und a_3 seien conjugirt complex. Es sind folgende zwei Möglichkeiten vorhanden, unter denen $\sqrt{R(x)}$ für reelle Werthe von x reell ist.

1) Es ist A negativ, und x zwischen a_1 und $+\infty$ gelegen. Dann gelten die Formeln

$$k = \frac{\sqrt{a_1 - a_3} - \sqrt{a_1 - a_2}}{2i\sqrt[4]{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}}, \tag{54.}$$

$$\mu = \sqrt{-A}\sqrt[4]{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \tag{55.}$$

$$x = a_1 + \sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}, \tag{56.}$$

womit

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{57.}$$

wird. Für $\varphi = 0$ ist x gleich a_1, und für $\varphi = \pi$ wird x positiv unendlich gross. Diese Formeln erhält man aus den entsprechenden für eine biquadratische Function, S. 128 und 129 ((21.) bis (26.)), indem man in ihnen a_2 unendlich gross werden lässt und sodann a_2, a_3 statt a_3, a_4 setzt.

2) Wenn A positiv und x zwischen $-\infty$ und a_1 gelegen ist, so hat man

$$k = \frac{\sqrt{a_3 - a_1} - \sqrt{a_2 - a_1}}{2i\sqrt[4]{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)}}, \tag{58.}$$

$$\mu = \sqrt{A}\sqrt[4]{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)}, \tag{59.}$$

$$x = a_1 - \sqrt{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)}\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}, \tag{60.}$$

wodurch die Gleichung (57.) erfüllt wird. Für $\varphi = 0$ wird x negativ unendlich gross, für $\varphi = \pi$ aber gleich a_1. Diese Formeln erhält man aus den entsprechenden, S. 130 ((27.) bis (32.)), indem man a_2 unendlich gross werden lässt und sodann a_2, a_3 statt a_3, a_4 schreibt.

Dreizehntes Kapitel.

Transformation zweiten Grades des elliptischen Differentials in die Legendresche Normalform.

Das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

lässt sich auch dadurch auf die Form

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

bringen, dass für x eine rationale Function zweiten Grades von $\sin\varphi$ gesetzt wird (vgl. S. 118). Die einfachsten hierzu dienenden Formeln sind die folgenden. Es sei wieder

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4).$$

Setzt man

$$\text{(1.)} \qquad \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}\,\frac{x-a_2}{x-a_1} = z,$$

so entsprechen einander die Werthe

$$x = \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

und

$$z = \quad \infty \quad 0 \quad 1.$$

Ferner hat man

$$\text{(2.)} \qquad \frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}\,\frac{a_3-x}{x-a_1} = 1-z,$$

$$\text{(3.)} \qquad \frac{a_2-a_1}{a_4-a_2}\,\frac{a_4-x}{x-a_1} = 1-\frac{(a_3-a_2)(a_4-a_1)}{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}\,z.$$

Daher ist

$$R(x) = A\frac{a_4-a_2}{a_3-a_1}\frac{(a_3-a_2)^2}{(a_2-a_1)^2}(x-a_1)^4 . z(1-z)(1-k^2 z),$$

worin

$$(4.)\qquad k^2 = \frac{(a_3-a_2)(a_4-a_1)}{(a_3-a_1)(a_4-a_2)},$$

also

$$(5.)\qquad 1-k^2 = \frac{(a_2-a_1)(a_4-a_3)}{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}$$

gesetzt ist. Wegen

$$(6.)\qquad \frac{dx}{dz} = \frac{a_3-a_2}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)}(x-a_1)^2$$

ist

$$(7.)\qquad R(x) = A(a_3-a_1)(a_4-a_2) . z(1-z)(1-k^2 z)\cdot\left(\frac{dx}{dz}\right)^2,$$

also

$$(8.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}\,\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}.$$

Diese Transformation gilt ganz allgemein für eine beliebige ganze Function $R(x)$ vom vierten Grade ohne quadratischen Theiler. Wenn man aber für k^2 einen reellen positiven Werth, der kleiner als Eins ist, erhalten will, und wenn zugleich zu reellen Werthen von x auch reelle Werthe von z gehören sollen, so kann man die Transformation nur in dem Falle anwenden, dass a_1, a_2, a_3, a_4 sämmtlich reell sind. Unter dieser Voraussetzung sind, wie im vorhergehenden Kapitel, vier Fälle zu unterscheiden, wobei wieder

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

angenommen werden möge.

1) Es sei A positiv, und x in dem Intervalle $(a_2 \ldots a_3)$ gelegen. Den vorstehenden Formeln zufolge durchläuft z, wenn x stetig wachsend von a_2 nach a_3 geht, ebenfalls stetig wachsend alle Werthe von 0 bis 1. Man kann also

$$(9.)\qquad z = \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}\,\frac{x-a_2}{x-a_1} = \sin^2\varphi,$$

d. h.

$$(10.)\qquad x = \frac{a_2(a_3-a_1)-a_1(a_3-a_2)\sin^2\varphi}{a_3-a_1-(a_3-a_2)\sin^2\varphi}$$

setzen, wo φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Nach (2.) ist dann

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}\,\frac{a_3-x}{x-a_1}=\cos^2\varphi. \tag{11.}$$

Damit wird

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{2}{\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{12.}$$

worin k^2 den durch die Formel (4.) gegebenen Werth besitzt. Nimmt man das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}$ positiv, so ist $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ positiv, wenn $\sqrt{R(x)}$ es ist.

2) Es sei A positiv, und x ausserhalb des Intervalles $(a_1\ldots a_4)$ gelegen. Man nehme

$$a_3 \quad a_4 \quad a_1 \quad a_2$$

an Stelle von

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4.$$

Setzt man

$$\frac{a_3-a_1}{a_4-a_1}\,\frac{x-a_4}{x-a_3}=\sin^2\varphi, \tag{13.}$$

mithin

$$\frac{a_4-a_3}{a_4-a_1}\,\frac{x-a_1}{x-a_3}=\cos^2\varphi, \tag{14.}$$

so durchläuft, während φ stetig von 0 nach $\frac{\pi}{2}$ geht, x wachsend alle Werthe von a_4 bis $+\infty$ und von $-\infty$ bis a_1, man hat

$$x=\frac{a_4(a_3-a_1)-a_3(a_4-a_1)\sin^2\varphi}{a_3-a_1-(a_4-a_1)\sin^2\varphi}, \tag{15.}$$

und die Formeln (4.), (5.) und (12.) gelten unverändert.

3) Es sei A negativ, und x im Intervalle $(a_1\ldots a_2)$ enthalten. Man setze jetzt

$$a_4 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

an die Stelle von

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4,$$

also

$$\frac{a_4-a_2}{a_2-a_1}\,\frac{x-a_1}{a_4-x}=\sin^2\varphi, \tag{16.}$$

$$\frac{a_4-a_1}{a_2-a_1}\,\frac{a_2-x}{a_4-x}=\cos^2\varphi, \tag{17.}$$

$$x=\frac{a_1(a_2-a_4)-a_4(a_2-a_1)\sin^2\varphi}{a_2-a_4-(a_2-a_1)\sin^2\varphi}, \tag{18.}$$

so durchläuft x stetig wachsend das Intervall $(a_1 \dots a_2)$, wenn φ stetig wachsend von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht. Es ist

$$(19.)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{2}{\sqrt{-A(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

worin jetzt

$$(20.)\qquad k^2 = \frac{(a_2-a_1)(a_4-a_3)}{(a_3-a_1)(a_4-a_2)},$$

$$(21.)\qquad 1-k^2 = \frac{(a_3-a_2)(a_4-a_1)}{(a_3-a_1)(a_4-a_2)}$$

zu nehmen ist.

4) Schliesslich sei A negativ, und x im Intervall $(a_3 \dots a_4)$ gelegen. Dann hat man

$$a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_1$$

für

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

zu setzen. Es wird

$$(22.)\qquad \frac{a_4-a_2}{a_4-a_3}\,\frac{x-a_3}{x-a_2} = \sin^2\varphi,$$

$$(23.)\qquad \frac{a_3-a_2}{a_4-a_3}\,\frac{a_4-x}{x-a_2} = \cos^2\varphi,$$

$$(24.)\qquad x = \frac{a_3(a_4-a_2)-a_2(a_4-a_3)\sin^2\varphi}{a_4-a_2-(a_4-a_3)\sin^2\varphi}.$$

Wenn φ stetig wachsend von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht, so durchwandert x stetig wachsend das Intervall $(a_3 \dots a_4)$, und die Formeln (19.), (20.) und (21.) gelten unverändert.

Wenn die Function $R(x)$ vom dritten Grade ist,

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3),$$

so kommt hier auch nur der Fall dreier reeller Wurzeln a_1, a_2, a_3 in Frage, falls k^2 einen positiven reellen Werth unterhalb Eins hat, und reellen Werthen von x auch reelle Werthe von φ entsprechen sollen. Es sei wieder

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

Dann sind wie zuvor vier Möglichkeiten zu unterscheiden, und alle Formeln gehen unmittelbar aus den entsprechenden für $a_4 = \infty$ hervor.

1) Wenn A positiv, und x in dem Intervalle $(a_2 \dots a_3)$ enthalten ist, so gilt

$$k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \tag{25.}$$

$$1 - k^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \tag{26.}$$

$$\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}\,\frac{x - a_2}{x - a_1} = \sin^2\varphi, \tag{27.}$$

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2}\,\frac{a_3 - x}{x - a_1} = \cos^2\varphi, \tag{28.}$$

$$x = \frac{a_2(a_3 - a_1) - a_1(a_3 - a_2)\sin^2\varphi}{a_3 - a_1 - (a_3 - a_2)\sin^2\varphi}, \tag{29.}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{2}{\sqrt{A(a_3 - a_1)}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \tag{30.}$$

Für $\varphi = 0$ wird x gleich a_2, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gleich a_3.

2) Es sei A positiv, x zwischen $-\infty$ und a_1 gelegen. Dann gelten die Formeln (25.) und (26.), und es ist

$$\frac{a_3 - a_1}{a_3 - x} = \sin^2\varphi, \tag{31.}$$

$$\frac{a_1 - x}{a_3 - x} = \cos^2\varphi, \tag{32.}$$

$$x = a_3 - \frac{a_3 - a_1}{\sin^2\varphi}, \tag{33.}$$

wodurch die Gleichung (30.) erfüllt ist. Für $\varphi = 0$ wird x negativ unendlich gross, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gleich a_1.

3) Wenn A negativ, und x im Intervalle $(a_1 \dots a_2)$ enthalten ist, so wird

$$k^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \tag{34.}$$

$$1 - k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \tag{35.}$$

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \sin^2\varphi, \tag{36.}$$

$$\frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} = \cos^2\varphi, \tag{37.}$$

$$x = a_1 + (a_2 - a_1)\sin^2\varphi, \tag{38.}$$

(39.) $$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{-A(a_3-a_1)}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Für $\varphi = 0$ wird x gleich a_1, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dagegen gleich a_2.

4) Ist A negativ, und x zwischen a_3 und $+\infty$ enthalten, so gelten die Formeln (34.) und (35.), und es ist

(40.) $$\frac{x-a_3}{x-a_2} = \sin^2\varphi,$$

(41.) $$\frac{a_3-a_2}{x-a_2} = \cos^2\varphi,$$

(42.) $$x = \frac{a_3 - a_2\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi},$$

und man erhält wieder die Gleichung (39.). Für $\varphi = 0$ wird x gleich a_3, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dagegen positiv unendlich gross.

Es sei allgemein ein Differential der Form

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gegeben, wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, und es werde angenommen, dass der Variablen x nur solche Werthe ertheilt werden, für die die Quadratwurzel $\sqrt{R(x)}$ reell ist. Dann kann man für x eine rationale Function ersten oder zweiten Grades einer neuen Variablen t einführen und mittels der im Vorstehenden entwickelten Formeln das Differential zunächst auf die Form

$$\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{g(t)}}$$

bringen, wo $f(t)$ eine rationale Function von t bedeutet, und die ganze Function $g(t)$ eine der drei folgenden Formen hat:

$$(1-t^2)(1-k^2t^2),\quad (1-t^2)(k'^2+k^2t^2),\quad (1+t^2)(1+k'^2t^2).$$

Wie in der Integralrechnung gezeigt wird, lässt sich das elliptische Integral

$$\int\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{g(t)}}$$

nach Absonderung eines algebraisch-logarithmischen Theils aus anderen zusammensetzen, die folgende Formen haben:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{g(t)}}, \quad \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{g(t)}}, \quad \int \frac{dt}{(l-t^2)\sqrt{g(t)}},$$

unter l eine Constante verstanden. Setzt man nun der Reihe nach in diesen Integralen

$$t = \sin\varphi, \quad t = -\cos\varphi, \quad t = \operatorname{tg}\varphi,$$

so werden sie auf die folgenden von Legendre aufgestellten Normalformen zurückgeführt:

$$\int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0 \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad \int_0 \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

worin n eine Constante bedeutet.

Fünfter Abschnitt.

INTEGRATION DER ELLIPTISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG.

Vierzehntes Kapitel.

Allgemeine Integration der elliptischen Differentialgleichung.

In den behandelten Aufgaben ist wiederholt von der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = R(x)$$

und ihrer Integration die Rede gewesen. Im Besondern ist im vierten Kapitel (S. 45) eine elliptische Function zweiten Grades bestimmt worden, die der gegebenen Differentialgleichung genügt, und von der man die Werthe des Arguments kennt, für die sie unendlich gross wird. Die Wichtigkeit dieser Differentialgleichung rechtfertigt es, darüber im Folgenden weitergehende Untersuchungen anzustellen. Einige Ergebnisse sind schon im vierten Kapitel zu finden.

Bezeichnet man in der Formel (E. F. S. 37 (15.))

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

die rechte und linke Seite mit $\wp(u, v)$ und setzt

$$\wp(u, v) = x,$$
$$\wp u = s,$$
$$\wp v = t,$$

so ist

$$(2.)\qquad \left(2(s-t)x-\frac{dt}{dv}\right)^2 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3-g_2 s-g_3$$

oder

$$4(s-t)^2x^2-4(s-t)x\frac{dt}{dv} = \left(\frac{ds}{du}\right)^2-\left(\frac{dt}{dv}\right)^2 = 4(s^3-t^3)-g_2(s-t),$$

also

$$(3.)\qquad 4(t-s)x^2+4\frac{dt}{dv}x+4(s^2+st+t^2)-g_2 = 0$$

oder

$$(4.)\qquad 4s^2+4(t-x^2)s+4tx^2+4\frac{dt}{dv}x+4t^2-g_2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned}(2s+t-x^2)^2 &= (x^2-t)^2-4tx^2-4\frac{dt}{dv}x+g_2-4t^2\\ &= x^4-6tx^2-4\frac{dt}{dv}x+g_2-4t^2.\end{aligned}$$

Man erhält aber weiter durch Differentiation nach u:

$$(5.)\qquad (2s+t-x^2)\frac{ds}{du} = \left(2(s-t)x-\frac{dt}{dv}\right)\frac{dx}{du},$$

und wenn man zum Quadrat erhebt und die Gleichungen (2.) und (3.) hinzunimmt,

$$(6.)\qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = x^4-6\wp v\,x^2-4\wp' v\,x+g_2-3\wp^2 v.$$

Ist nun die Differentialgleichung (1.), in der A, B, C, B', A' gegebene Constanten bedeuten, vorgelegt, und ist

$$A \neq 0,$$

so lässt sie sich durch die Substitution

$$x = -\frac{B}{A}+\frac{x_1}{\sqrt{A}}$$

auf eine andere von der Form

$$(7.)\qquad \left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 = x_1^4+6C_1x_1^2+4B_1'x_1+A_1'$$

zurückführen, in der das Glied mit der dritten Potenz fehlt. Es lassen sich aber die drei Grössen g_2, g_3, v in der Weise bestimmen, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \wp(v;\, g_2, g_3) &= -C_1, \\ \wp'(v;\, g_2, g_3) &= -B_1', \\ g_2 - 3\wp^2(v;\, g_2, g_3) &= \quad A_1' \end{aligned}$$

befriedigt werden, und somit die Differentialgleichung für x_1 identisch mit derjenigen wird, der $x = \wp(u, v)$, als Function von u betrachtet, genügt.

Setzt man nämlich

$$(8.)\quad \begin{cases} R_1(x) = \dfrac{1}{4}R'(x) = Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + B' \\[2mm] R_2(x) = \dfrac{1}{3}R_1'(x) = Ax^2 + 2Bx + C \\[2mm] R_3(x) = \dfrac{1}{2}R_2'(x) = Ax + B, \end{cases}$$

so wird, wenn a irgend ein bestimmter Werth von x ist,

$$R(x) = A(x-a)^4 + 4R_3(a)(x-a)^3 + 6R_2(a)(x-a)^2 + 4R_1(a)(x-a) + R(a),$$

und durch die Substitution

$$(9.)\quad x = a + \frac{x_1}{\sqrt{A}},$$

worin der Werth der Quadratwurzel beliebig fixirt werden kann, geht die vorgelegte Differentialgleichung (1.) in die folgende über:

$$(10.)\quad \left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 = x_1^4 + 4\frac{R_3(a)}{\sqrt{A}}x_1^3 + 6R_2(a)x_1^2 + 4R_1(a)\sqrt{A}\,x_1 + AR(a).$$

Nimmt man nun

$$a = -\frac{B}{A},$$

so wird

$$(11.)\quad \left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 = x_1^4 + 6R_2(a)x_1^2 + 4R_1(a)\sqrt{A}\,x_1 + AR(a).$$

Es sind also g_2, g_3, v so zu bestimmen, dass die drei Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \wp(v;\, g_2, g_3) = -R_2(a) = \dfrac{B^2 - AC}{A} \\[2mm] \wp'(v;\, g_2, g_3) = -R_1(a)\sqrt{A} = -\dfrac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^2}\sqrt{A} \\[2mm] g_2 - 3\wp^2(v;\, g_2, g_3) = AR(a) \end{cases}$$

befriedigt werden.

Hieraus ergiebt sich

$$g_2 = AR(a) + 3R_2^2(a)$$

und, in Folge der Gleichung

$$(\wp' v)^2 = 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3,$$

$$g_3 = -4R_2^3(a) + g_2 R_2(a) + AR_1^2(a)$$

oder

$$g_3 = AR_2(a)\, R(a) + AR_1^2(a) - R_2^3(a).$$

Nun sind aber die beiden Ausdrücke

$$AR(x) - 4R_1(x)\, R_3(x) + 3R_2^2(x)$$

und

$$AR(x)\, R_2(x) + 2R_1(x)\, R_2(x)\, R_3(x) - AR_1^2(x) - R(x)\, R_3^2(x) - R_2^3(x),$$

die für $x = a$ die vorstehenden Werthe von g_2, g_3 ergeben, von der Veränderlichen x unabhängig. Denn ihre ersten Ableitungen verschwinden identisch wegen der Formeln (8.). Man erhält daher die Werthe von g_2, g_3, wenn man in diesen Ausdrücken der Grösse x irgend einen bestimmten Werth beilegt. Für $x = 0$ findet sich (vgl. E. F. S. 12)

$$(13.)\qquad \begin{cases} g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2 \\ g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3. \end{cases}$$

Nimmt man diese Werthe von g_2, g_3 als Invarianten der Functionen $\wp u$, σu an, so ist für jeden, die erste der Gleichungen (12.) befriedigenden Werth v

$$(\wp' v)^2 = 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3 = AR_1^2(a);$$

man kann also v so bestimmen, dass die beiden Gleichungen

$$(14.)\qquad \begin{cases} \wp v = \dfrac{B^2 - AC}{A} \\ \wp' v = -\dfrac{A^2 B' - 3ABC + 2B^3}{A^2}\sqrt{A} \end{cases}$$

bestehen, und somit die Gleichung (11.) befriedigt wird, wenn man

$$x_1 = \wp(u, v)$$

setzt. Der Gleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

geschieht also Genüge, wenn man

$$(15.)\qquad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp(u, v)$$

nimmt.

Es ist aber

$$\lim_{u=0} \wp(u, v) = \infty,$$

$$\lim_{u=0} \frac{\wp'(u, v)}{\wp^2(u, v)} = 1,$$

wo

$$\wp'(u, v) = \frac{\partial \wp(u, v)}{\partial u}$$

gesetzt ist. Durch die Gleichung (15.) wird also diejenige Function x des Argumentes u dargestellt, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt und so beschaffen ist, dass für $u = 0$

$$x = \infty$$

und

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du} = \sqrt{A}$$

wird. Wenn der Werth der Grösse $\sqrt{A}$ fixirt ist, so ist die Function eindeutig bestimmt.

Die verschiedenen Werthe von v, die den beiden Gleichungen (14.) genügen, unterscheiden sich nur um Perioden der Function $\wp u$ von einander. Ist $2\bar{\omega}$ eine solche Periode, so hat man

$$\wp(u, v + 2\bar{\omega}) = \wp(u, v);$$

es ist also gleichgültig, welchen von den unendlich vielen, die beiden Gleichungen (14.) befriedigenden Werthen der Grösse v man nehmen will.

Setzt man auf der rechten Seite der Gleichung

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp'u + \wp'v}{\wp u - \wp v}$$

für $\wp v$, $\wp' v$ die ermittelten Werthe ein, so ergiebt sich

$$(16.)\qquad x = \frac{1}{2}\frac{-\sqrt{A}\,\wp' u + 2B\wp u - BC + AB'}{B^2 - AC - A\wp u}.$$

Aus der durch die Gleichungen (15.) und (16.) definirten Function erhält man nun, wenn man in ihr zu dem Argumente u eine beliebige Constante, $-u_0$, addirt, die allgemeinste Function von u, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt:

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \wp(u-u_0, v), \tag{17.}$$

d. h.

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) + \frac{\sigma'}{\sigma} v \right) \tag{17a.}$$

oder

$$x = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A}\, \wp'(u-u_0) - 2B\wp(u-u_0) + BC - AB'}{A\wp(u-u_0) - B^2 + AC}. \tag{17b.}$$

Diese Function wird unendlich gross für $u = u_0$, während

$$\left(\frac{1}{x^2} \frac{dx}{du} \right)_{u=u_0} = \sqrt{A}$$

ist.

Im Vorstehenden ist vorausgesetzt worden, dass die Grösse A nicht gleich Null sei. Setzt man nun in (11.)

$$A = 0,$$

so wird

$$x = \frac{1}{B} \left(\wp(u-u_0) - \frac{1}{2} C \right). \tag{18.}$$

Man findet aber in der That, dass die Gleichung

$$\left(\frac{dx}{du} \right)^2 = 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' \tag{19.}$$

befriedigt wird, wenn man für x den vorstehenden Ausdruck nimmt und die Invarianten von $\wp u$ durch die Formeln (13.) bestimmt, die in diesem Falle

$$\left\{ \begin{aligned} g_2 &= -4BB' + 3C^2 \\ g_3 &= 2BCB' - A'B^2 - C^3 \end{aligned} \right. \tag{20.}$$

ergeben. Der unter (17.) aufgestellte Ausdruck von x bleibt also anwendbar, selbst wenn A verschwindet, vorausgesetzt, dass dann nicht auch B gleich Null ist. Die Fälle, wo A und B beide gleich Null sind, führen aber nicht zu eigentlichen elliptischen Functionen und sind leicht zu erledigen.

Aus den Gleichungen (5.) ergiebt sich, wenn man noch einmal auf die Definitionsgleichung für $\wp(u,v)$ zurückgeht,

$$2\wp u + \wp v - \wp^2(u,v) = \frac{\partial \wp(u,v)}{\partial u}$$

oder

$$(21.) \qquad \wp u = \frac{1}{2}\wp^2(u,v) - \frac{1}{2}\wp v + \frac{1}{2}\frac{\partial \wp(u,v)}{\partial u}.$$

Setzt man nun $u-u_0$ statt u, und der Gleichung (17.) entsprechend

$$\wp(u-u_0, v) = \frac{Ax+B}{\sqrt{A}},$$

so wird nach der ersten Gleichung (14.)

$$\wp^2(u,v) - \wp v = \frac{(Ax+B)^2}{A} - \frac{B^2 - AC}{A}$$
$$= Ax^2 + 2Bx + C.$$

Man hat daher

$$(22.) \qquad \wp(u-u_0) = \frac{1}{2}(Ax^2+2Bx+C) + \frac{1}{2}\sqrt{A}\,\frac{dx}{du},$$

woraus weiter

$$(23.) \qquad \wp'(u-u_0) = (Ax+B)\frac{dx}{du} + \sqrt{A}\,(Ax^3+3Bx^2+3Cx+B')$$

folgt.

Aus der Formel (17a.) ergiebt sich noch

$$(24.) \qquad \sqrt{A}\,\frac{dx}{du} = \wp(u-u_0) - \wp(u-u_0-v),$$

und hieraus nach (22.)

$$(25.) \qquad Ax^2+2Bx+C = \wp(u-u_0-v) + \wp(u-u_0).$$

Aus der Gleichung (18.) erhellt, dass die vorstehenden Ergebnisse (22.) bis (25.) auch in den Fällen, wo A gleich Null ist, gültig bleiben, wenn, den Gleichungen (14.) entsprechend, v gleich Null gesetzt wird.

Mittels der Formeln (22.) und (23.) wird die Aufgabe, zu einer der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

genügenden elliptischen Function das Argument zu berechnen, für das die Function einen beliebig vorgeschriebenen Werth und zugleich ihre Ableitung von den beiden Werthen, die sie dann haben kann, einen bestimmten erhalte, auf dieselbe Aufgabe für die Function $\wp u$ zurückgeführt.

Dies geschieht in allgemeinerer Weise folgendermassen.

Es sei x irgend eine der vorgelegten Differentialgleichung genügende Function von u, und x_1 der zu einem bestimmten Werthe u_1 des Arguments gehörige Werth von x; ferner werde

$$\frac{dx}{du} = y,$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_1} = y_1$$

gesetzt. Substituirt man

$$z = \frac{1}{x-x_1},$$

so genügt z der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(x_1)z^4 + 4R_1(x_1)z^3 + 6R_2(x_1)z^2 + 4R_3(x_1)z + A.$$

Für die durch diese Gleichung definirte Function, die für $u = u_1$ unendlich gross wird, während

$$\left(\frac{1}{z^2}\frac{dz}{du}\right)_{u=u_1} = -y_1$$

ist, gelten die Gleichungen (17b.), (22.) und (23.), wenn man in ihnen

$$R(x_1) \qquad R_1(x_1) \qquad R_2(x_1) \qquad R_3(x_1) \qquad A$$

an Stelle von

$$A \qquad B \qquad C \qquad B' \qquad A',$$

ferner u_1 für u_0 und $-y_1$ für $\sqrt{A}$ setzt. Dadurch werden nach dem Obigen die Grössen g_2, g_3 nicht geändert. Man erhält also, da

$$\frac{dz}{du} = -\frac{y}{(x-x_1)^2}$$

ist, aus (17b.)

$$(26.)\quad \frac{1}{x-x_1} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R(x_1)}\,\wp'(u-u_1) + 2R_1(x_1)\,\wp(u-u_1) - R_1(x_1)\,R_2(x_1) + R(x_1)\,R_3(x_1)}{R_1^2(x_1) - R(x_1)\,R_2(x_1) - R(x_1)\,\wp(u-u_1)}.$$

Ferner ergiebt sich aus (22.) und (23.)

$$\wp(u-u_1) = \frac{1}{2}(R(x_1)z^2+2R_1(x_1)z+R_2(x_1))+\frac{1}{2}\frac{y_1 y}{(x-x_1)^2},$$

$$\wp'(u-u_1) = -(R(x_1)z+R_1(x_1))\frac{y}{(x-x_1)^2}-y_1(R(x_1)z^3+3R_1(x_1)z^2+3R_2(x_1)z+R_3(x_1)).$$

Es ist aber

$$R(x_1)z^2+R_1(x_1)z+R_2(x_1) = \frac{1}{(x-x_1)^2}(R(x_1)+2R_1(x_1)(x-x_1)+R_2(x_1)(x-x_1)^2)$$

$$= \frac{R(x, x_1)}{(x-x_1)^2},$$

wenn

$$(27.)\quad R(x, x_1) = Ax_1^2x^2+2B(x_1+x)x_1x+6Cx_1x+2B(x_1+x)+A'+C(x-x_1)^2$$

gesetzt wird. Ferner folgt aus der Gleichung

$$z^4 R(x) = R(x_1)z^4+4R_1(x_1)z^3+6R_2(x_1)z^2+4R_3(x_1)z+A',$$

wenn man beiderseits die Ableitung nach x bestimmt,

$$R(x_1)z^3+3R_1(x_1)z^2+3R_2(x_1)z+R_3(x_1) = \frac{R(x)}{(x-x_1)^3}-\frac{R_1(x)}{(x-x_1)^2}.$$

So ergiebt sich

$$(28.)\quad \begin{cases} \wp(u-u_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{y_1y+R(x, x_1)}{(x-x_1)^2} \\[2ex] \wp'(u-u_1) = \left(\dfrac{R(x_1)}{(x_1-x)^3}-\dfrac{R_1(x_1)}{(x_1-x)^2}\right)y-\left(\dfrac{R(x)}{(x-x_1)^3}-\dfrac{R_1(x)}{(x-x_1)^2}\right)y_1, \end{cases}$$

wo

$$R_1(x) = \frac{1}{4}\frac{dR(x)}{dx}$$

ist.

Wenn also für irgend einen Werth u_1 des Arguments das zugehörige Werthepaar (x_1, y_1) von x, y gegeben ist, so dienen die vorstehenden Formeln dazu, für jedes andere Werthepaar die zugehörigen Argumente, die sich nur um Perioden der Function $\wp u$ von einander unterscheiden, nach den im neunundzwanzigsten Kapitel der Elliptischen Functionen gegebenen Regeln zu bestimmen.

Fünfzehntes Kapitel.

Specielle Integrale der elliptischen Differentialgleichung.

Nimmt man insbesondere für x_1 einen derjenigen Werthe a_0 von x, für die $R(x)$ verschwindet, und bezeichnet mit u' einen der Werthe von u, für die die betrachtete Function den Werth a_0 annimmt, so ergeben die Gleichungen (28.) des vorhergehenden Kapitels

$$(1.)\qquad \begin{cases} \wp(u-u') = \dfrac{R_1(a_0)}{x-a_0} + \dfrac{1}{2} R_2(a_0) \\ \wp'(u-u') = -\dfrac{R_1(a_0)}{(x-a_0)^2}\, y. \end{cases}$$

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass a_0 eine einfache Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ sei.

Daraus folgt

$$(2.)\qquad x = a_0 + \frac{R_1(a_0)}{\wp(u-u') - \frac{1}{2} R_2(a_0)}.$$

Nimmt man jetzt an, die Function $R(x)$ sei vom vierten Grade, und die vier Werthe, für die sie verschwindet, von einander verschieden, so lehrt die zweite der Gleichungen S. 151 (28.), dass für u gleich $u'+\omega_1$, $u'+\omega_2$, $u'+\omega_3$

$$\left(\frac{y}{x-a_0}\right)^2 = \frac{R(x)}{(x-a_0)^2}$$

verschwindet, also die den genannten Werthen von u entsprechenden Werthe von x, die der ersten Gleichung zufolge von einander verschieden sind, die drei von a_0 verschiedenen Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sind. Diese mögen mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet werden.

Für

$$\wp\omega_1 = e_1, \quad \wp\omega_2 = e_2, \quad \wp\omega_3 = e_3$$

ergiebt sich aus der ersten der Gleichungen (1.)

$$(3.)\quad \begin{cases} e_1 = -\frac{1}{4}A(a_0-a_2)(a_0-a_3)+\frac{1}{2}R_2(a_0) \\ e_2 = -\frac{1}{4}A(a_0-a_3)(a_0-a_1)+\frac{1}{2}R_2(a_0) \\ e_3 = -\frac{1}{4}A(a_0-a_1)(a_0-a_2)+\frac{1}{2}R_2(a_0) \end{cases}$$

und hieraus

$$(4.)\quad \begin{cases} e_1-e_2 = -\frac{1}{4}A(a_0-a_3)(a_1-a_2) \\ e_1-e_3 = -\frac{1}{4}A(a_0-a_2)(a_1-a_3) \\ e_2-e_3 = -\frac{1}{4}A(a_0-a_1)(a_2-a_3). \end{cases}$$

Es werde nun mit $\varphi(u, a_0)$ diejenige specielle, der betrachteten Differentialgleichung genügende Function bezeichnet, die für $u = 0$ den Werth a_0 annimmt. Dann hat man

$$(5.)\quad \varphi(u, a_0) = \frac{R_1(a_0)}{\wp u - \frac{1}{2}R_2(a_0)} + a_0.$$

Es ist also $\varphi(u, a_0)$ eine gerade Function von u.

Umgekehrt hat jede der in Rede stehenden Differentialgleichung genügende gerade Function von u für $u = 0$ einen der Werthe, für die $R(x)$ verschwindet. Denn diejenigen beiden der Differentialgleichung genügenden Functionen, die für $u = 0$ einen unendlich grossen Werth erhalten, sind keine geraden Functionen, weil in ihren Entwickelungen nach Potenzen von u die Anfangsglieder

$$-\frac{u^{-1}}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad +\frac{u^{-1}}{\sqrt{A}}$$

lauten. Jede gerade Function hat also für $u = 0$ einen endlichen Werth, und dieser ist der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ wegen einer der Werthe, für die $R(x)$ verschwindet. Es giebt also unter den durch die Differentialgleichung definirten Functionen nur vier gerade, nämlich

$$\varphi(u, a_0), \quad \varphi(u, a_1), \quad \varphi(u, a_2), \quad \varphi(u, a_3).$$

Nun wird aber der im vorigen Kapitel gefundene allgemeine Ausdruck einer die Differentialgleichung befriedigenden Function (S. 148 (17.), (17a.)),

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp(u-u_0, v) \tag{6.}$$

oder

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}v\right), \tag{6a.}$$

eine gerade Function von u, wenn darin

$$u_0 = -\frac{1}{2}v$$

gesetzt wird. Denn dann hat man

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(u+\frac{1}{2}v, v\right)$$

oder

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{1}{2}v\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{1}{2}v\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}v\right).$$

Von den unendlich vielen Werthen, die man der Grösse v geben kann, denke man sich einen fixirt und setze

$$a_0 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(\frac{1}{2}v, v\right), \tag{7.}$$

so ist a_0 eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$, und man hat

$$\varphi(u, a_0) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(u+\frac{1}{2}v, v\right) \tag{8.}$$

oder

$$\varphi(u, a_0) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{1}{2}v\right) - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{1}{2}v\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}v\right). \tag{8a.}$$

Schreibt man in dieser Gleichung $u+\omega_1$ für u, so ergiebt sich, da (E. F. S. 69 (1.), (2.))

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\omega_1-\frac{1}{2}v\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}v = \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\omega_1-\frac{1}{2}v\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v+2\omega_1)$$

ist,

$$\varphi(u+\omega_1, a_0) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(u+\frac{v+2\omega_1}{2}, v+2\omega_1\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist nun wieder eine gerade Function von u, die für $u = 0$ den Werth

$$\varphi(\omega_1, a_0) = a_1$$

hat; es ist also

$$\varphi(u, a_1) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(u + \frac{v + 2\omega_1}{2}, v + 2\omega_1\right). \tag{9.}$$

Ebenso findet man

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(u, a_2) &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(u + \frac{v + 2\omega_2}{2}, v + 2\omega_2\right) \\ \varphi(u, a_3) &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\wp\left(u + \frac{v + 2\omega_3}{2}, v + 2\omega_3\right). \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

Man erhält also eine von den vier, der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ genügenden geraden Functionen durch den Ausdruck

$$-\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - \frac{1}{2}v\right) - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u + \frac{1}{2}v\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}v\right)$$

und aus diesem die drei anderen, wenn man in ihm

$$v + 2\omega_1, \quad v + 2\omega_2, \quad v + 2\omega_3$$

für v setzt.

Da

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - \frac{1}{2}v\right) = \frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{v}{2}\right)},$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u + \frac{1}{2}v\right) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + \frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{v}{2}\right)},$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}v = 2\frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}$$

ist, so ergiebt sich für $\varphi(u, a_0)$ ein zweiter Ausdruck:

$$\varphi(u, a_0) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{v}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}\right). \tag{11.}$$

Daraus erhält man, u gleich $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ setzend,

$$a_0 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)} \tag{12.}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} a_1 - a_0 &= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{e_1 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)} \\ a_2 - a_0 &= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{e_2 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)} \\ a_3 - a_0 &= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{e_3 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)}, \end{aligned}\right. \tag{13.}$$

mithin

$$\left\{\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{\sqrt{A}} \frac{e_1 - e_2}{\left(e_1 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)\right)\left(e_2 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)\right)} \\ a_3 - a_2 &= \frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{\sqrt{A}} \frac{e_2 - e_3}{\left(e_2 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)\right)\left(e_3 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)\right)} \\ a_1 - a_3 &= \frac{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}{\sqrt{A}} \frac{e_3 - e_1}{\left(e_3 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)\right)\left(e_1 - \wp\left(\frac{v}{2}\right)\right)}. \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

Endlich ergiebt sich noch durch Vergleichung des Ausdrucks (11.) mit dem unter (5.) aufgestellten

$$\left\{\begin{aligned} \wp\left(\frac{v}{2}\right) &= \frac{1}{2} R_2(a_0) &&= \frac{1}{2}(A a_0^2 + 2 B a_0 + C) \\ \wp'\left(\frac{v}{2}\right) &= R_1(a_0)\sqrt{A} &&= \frac{1}{4} A \sqrt{A}(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3). \end{aligned}\right. \tag{15.}$$

Die Formeln (8.) bis (10.) und die daraus abgeleiteten Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ lassen sich noch in eine andere Gestalt bringen. In jenen Formeln treten nämlich die Functionen des halben Arguments, $\frac{v}{2}$, auf. Man kann diese durch Functionen des Arguments v mittels folgender Formeln darstellen:

$$\wp\left(\frac{v}{2}\right) = -\frac{(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v + (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v + (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}, \tag{16.}$$

$$\wp'\left(\frac{v}{2}\right) = -\frac{2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)\,\sigma v}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}, \tag{17.}$$

$$\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)} = -2\,\frac{\sigma_1 v + \sigma_2 v + \sigma_3 v}{\sigma v}. \tag{18.}$$

Diese Gleichungen sollen zunächst hergeleitet werden.

Um einen Ausdruck für $\wp\left(\frac{v}{2}\right)$ durch die Functionen des Arguments v zu finden, könnte man daran denken, vom Additionstheorem der $\wp$-Function auszugehen, in der algebraischen Gleichung, die zwischen $\wp(u+v)$, $\wp u$, $\wp v$ besteht, $u = v$ zu setzen, v statt $2v$ zu schreiben und die Gleichung nach $\wp\left(\frac{v}{2}\right)$ aufzulösen. Allein dabei käme man auf nicht sehr übersichtliche Rechnungen. Mehr empfiehlt es sich, die Additionstheoreme der Sigmaquotienten als Ausgangspunkt zu nehmen. Setzt man, wie im zweiundzwanzigsten Kapitel (S. 207) der Elliptischen Functionen,

$$\frac{\sigma}{\sigma_\alpha} u = \varphi(u), \qquad \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} u = \varphi_1(u), \qquad \frac{\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha} u = \varphi_2(u), \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \\ \alpha \lessgtr \beta \lessgtr \gamma \end{pmatrix}$$

so bestehen die Formeln

$$\begin{cases} 1 + (e_\alpha - e_\beta)\,\varphi^2(u) = \varphi_1^2(u) \\ 1 + (e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^2(u) = \varphi_2^2(u), \end{cases} \tag{19.}$$

und es gelten folgende Additionstheoreme (E. F. S. 208 (16.) und (17.))

$$\varphi_1(u+v) = \frac{\varphi_1(u)\,\varphi_1(v) + (e_\alpha - e_\beta)\,\varphi(u)\,\varphi(v)\,\varphi_2(u)\,\varphi_2(v)}{1 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^2(u)\,\varphi^2(v)},$$

$$\varphi_2(u+v) = \frac{\varphi_2(u)\,\varphi_2(v) + (e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi(u)\,\varphi(v)\,\varphi_1(u)\,\varphi_1(v)}{1 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^2(u)\,\varphi^2(v)}.$$

Nimmt man hierin $u = v$ und schreibt dann $\frac{v}{2}$ statt v, so erhält man

$$(20.)\quad \begin{cases} \varphi_1(v) = \dfrac{1}{N}\left(\varphi_1^2\left(\dfrac{v}{2}\right) + (e_\alpha - e_\beta)\,\varphi^2\left(\dfrac{v}{2}\right)\varphi_2^2\left(\dfrac{v}{2}\right)\right) \\ \varphi_2(v) = \dfrac{1}{N}\left(\varphi_2^2\left(\dfrac{v}{2}\right) + (e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^2\left(\dfrac{v}{2}\right)\varphi_1^2\left(\dfrac{v}{2}\right)\right), \end{cases}$$

worin zur Abkürzung

$$N = 1 - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)\,\varphi^4\left(\frac{v}{2}\right)$$

gesetzt ist. Durch eine einfache Rechnung ergiebt sich daraus unter Benutzung der Formeln (19.)

$$1 + \varphi_1(v) = \frac{2}{N}\varphi_1^2\left(\frac{v}{2}\right),$$

$$1 - \varphi_2(v) = (e_\gamma - e_\alpha)\,\varphi^2\left(\frac{v}{2}\right)\cdot\frac{2}{N}\varphi_1^2\left(\frac{v}{2}\right),$$

mithin

$$(21.)\quad (e_\gamma - e_\alpha)\,\varphi^2\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1 - \varphi_2(v)}{1 + \varphi_1(v)}.$$

Führt man hierin für die Functionen φ, φ_1, φ_2 ihre ursprünglichen Definitionen ein und berücksichtigt die Formel

$$\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2 = \wp u - e_\alpha,$$

so ergiebt sich

$$(22.)\quad \frac{e_\gamma - e_\alpha}{\wp\left(\dfrac{v}{2}\right) - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha v - \sigma_\gamma v}{\sigma_\alpha v + \sigma_\beta v}.$$

Indem man nun für α, β, γ alle möglichen verschiedenen Zahlencombinationen 1, 2, 3 einsetzt, erhält man das Gleichungssystem

$$(23.)\quad \begin{cases} \wp\left(\dfrac{v}{2}\right)(\sigma_3 v - \sigma_2 v) = (e_2 - e_3)\,\sigma_1 v - e_3\,\sigma_2 v + e_2\,\sigma_3 v \\ \wp\left(\dfrac{v}{2}\right)(\sigma_1 v - \sigma_3 v) = e_3\,\sigma_1 v + (e_3 - e_1)\,\sigma_2 v - e_1\,\sigma_3 v \\ \wp\left(\dfrac{v}{2}\right)(\sigma_2 v - \sigma_1 v) = -e_2\,\sigma_1 v + e_1\,\sigma_2 v + (e_1 - e_2)\,\sigma_3 v. \end{cases}$$

Durch Multiplication mit e_1, e_2, e_3 und Addition folgt daraus

$$\wp\left(\frac{v}{2}\right)\left((e_2 - e_3)\,\sigma_1 v + (e_3 - e_1)\,\sigma_2 v + (e_1 - e_2)\,\sigma_3 v\right) = e_1(e_2 - e_3)\,\sigma_1 v + e_2(e_3 - e_1)\,\sigma_2 v + e_3(e_1 - e_2)\,\sigma_3 v$$

oder wegen $e_1+e_2+e_3=0$

$$\wp\left(\frac{v}{2}\right) = -\frac{(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v + (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v + (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v},$$

womit die Formel (16.) bewiesen ist.

Um $\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$ zu erhalten, bildet man am einfachsten

$$\wp'\left(\frac{v}{2}\right) = 2\sqrt{\left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_1\right)\left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_2\right)\left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_3\right)}.$$

Nach (22.) wird

$$\left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_\alpha\right)(\sigma_\alpha v-\sigma_\gamma v) = (e_\gamma-e_\alpha)(\sigma_\alpha v+\sigma_\beta v).$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\sigma_\alpha v - \sigma_\beta v$, so erhält man mit Rücksicht auf (19.), d. h. auf

$$\sigma_\alpha^2 v - \sigma_\beta^2 v = (e_\beta - e_\alpha)\,\sigma^2 v \tag{24.}$$

folgendes System:

$$\left\{\begin{aligned} \left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_1\right)(\sigma_1 v-\sigma_2 v)(\sigma_1 v-\sigma_3 v) &= (e_1-e_2)(e_1-e_3)\,\sigma^2 v \\ \left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_2\right)(\sigma_2 v-\sigma_3 v)(\sigma_2 v-\sigma_1 v) &= (e_2-e_3)(e_2-e_1)\,\sigma^2 v \\ \left(\wp\left(\frac{v}{2}\right)-e_3\right)(\sigma_3 v-\sigma_1 v)(\sigma_3 v-\sigma_2 v) &= (e_3-e_1)(e_3-e_2)\,\sigma^2 v, \end{aligned}\right. \tag{25.}$$

woraus sich durch Multiplication und Ausziehung der Quadratwurzel zunächst

$$\frac{1}{2}\,\wp'\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)\,\sigma^3 v}{(\sigma_2 v-\sigma_3 v)(\sigma_3 v-\sigma_1 v)(\sigma_1 v-\sigma_2 v)} \tag{26.}$$

ergiebt. Multiplicirt man die Factoren im Nenner aus und wendet wieder die Formel (24.) an, so findet man die gewünschte Gleichung (17.)

$$\wp'\left(\frac{v}{2}\right) = -2\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)\,\sigma v}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}.$$

Durch logarithmische Differentiation folgt hieraus

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{\sigma'}{\sigma}\,v - \frac{(e_2-e_3)\,\sigma_1' v + (e_3-e_1)\,\sigma_2' v + (e_1-e_2)\,\sigma_3' v}{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}.$$

Bringt man die rechte Seite auf denselben Nenner und bedenkt, dass (E. F. S. 97 (6.))

$$\sigma_\alpha v\, \sigma' v - \sigma v\, \sigma'_\alpha v = \sigma_\beta v\, \sigma_\gamma v$$

ist, so erhält man

$$(27.)\quad \frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)} = -\frac{(e_2-e_3)\sigma_2 v\,\sigma_3 v + (e_3-e_1)\sigma_3 v\,\sigma_1 v + (e_1-e_2)\sigma_1 v\,\sigma_2 v}{(e_2-e_3)\sigma v\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\sigma v\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\sigma v\,\sigma_3 v}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes lässt sich noch auf eine andere Form bringen. Bezeichnet man ihn zur Abkürzung mit $\sigma v\, \psi(v)$, so ist

$$\begin{aligned}
\sigma_1 v\, \psi(v) &= (e_2-e_3)\sigma_1^2 v + (e_3-e_1)\sigma_2 v\,\sigma_1 v + (e_1-e_2)\sigma_3 v\,\sigma_1 v,\\
\sigma_2 v\, \psi(v) &= (e_2-e_3)\sigma_1 v\,\sigma_2 v + (e_3-e_1)\sigma_2^2 v + (e_1-e_2)\sigma_3 v\,\sigma_2 v,\\
\sigma_3 v\, \psi(v) &= (e_2-e_3)\sigma_1 v\,\sigma_3 v + (e_3-e_1)\sigma_2 v\,\sigma_3 v + (e_1-e_2)\sigma_3^2 v;
\end{aligned}$$

und daraus folgt durch Addition wegen

$$(e_2-e_3)\sigma_1^2 v + (e_3-e_1)\sigma_2^2 v + (e_1-e_2)\sigma_3^2 v = 0:$$

$$\psi(v)(\sigma_1 v + \sigma_2 v + \sigma_3 v) = (e_2-e_3)\sigma_2 v\,\sigma_3 v + (e_3-e_1)\sigma_3 v\,\sigma_1 v + (e_1-e_2)\sigma_1 v\,\sigma_2 v.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt aber mit dem Zähler auf der rechten Seite der Formel (27.) überein, sodass schliesslich

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)} = -\frac{\sigma_1 v + \sigma_2 v + \sigma_3 v}{\sigma v},$$

d. h. die Gleichung (18.) erhalten wird.

Mit Hilfe der Gleichungen (16.) bis (18.) erkennt man nun zunächst, dass die Formel (12.) zu der bekannten Auflösung der biquadratischen Gleichung $R(x) = 0$ führt, bei der ihre Wurzeln durch Quadratwurzeln von Grössen ausgedrückt werden, die aus den Coefficienten von $R(x)$ und den drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 der Hilfsgleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

rational zusammengesetzt sind.

Setzt man nämlich

$$(28.)\qquad \begin{cases} \dfrac{B^2-AC}{A} = D \\ \dfrac{A^2B'-3ABC+2B^3}{A^3} = E \end{cases}$$

und berücksichtigt die Formel (E. F. S. 89 (6.))

$$\wp u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u\right)^2, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

so erhält man aus den Gleichungen S. 146 (14.) oder

$$(29.)\qquad \begin{cases} \wp v = D \\ \wp' v = -E\sqrt{A} \end{cases}$$

zunächst

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}v = \sqrt{D-e_1}, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma}v = \sqrt{D-e_2}, \quad \frac{\sigma_3}{\sigma}v = \sqrt{D-e_3},$$

wo jede der Wurzeln für einen bestimmten Werth der Grösse v einen ebenfalls bestimmten Werth besitzt, und hat dann weiter

$$\sqrt{D-e_1}\sqrt{D-e_2}\sqrt{D-e_3} = -\frac{1}{2}\wp' v = \frac{1}{2}E\sqrt{A}.$$

Nach den Formeln (16.), (17.), (18.) für die Functionen des halben Arguments ergiebt sich nun aber

$$(30.)\qquad -\wp\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sqrt{D-e_1}+(e_3^2-e_1^2)\sqrt{D-e_2}+(e_1^2-e_2^2)\sqrt{D-e_3}}{(e_2-e_3)\sqrt{D-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{D-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{D-e_3}},$$

$$(31.)\qquad -\wp'\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{(e_2-e_3)\sqrt{D-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{D-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{D-e_3}},$$

$$(32.)\qquad \frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)} = -2\left(\sqrt{D-e_1}+\sqrt{D-e_2}+\sqrt{D-e_3}\right).$$

Folglich wird die zu dem betrachteten Werth v gehörige mit a_0 bezeichnete Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ nach (12.) gegeben durch die Formel

$$(33.)\qquad a_0 = -\frac{B}{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\sqrt{D-e_1}+\sqrt{D-e_2}+\sqrt{D-e_3}\right).$$

Setzt man also

$$\frac{\sigma_1 v + \sigma_2 v + \sigma_3 v}{\sigma v} = l_0, \tag{34.}$$

$$\frac{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} = l_1, \tag{35.}$$

$$\frac{(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v + (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v + (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} = l_2, \tag{36.}$$

d. h.

$$\sqrt{D-e_1} + \sqrt{D-e_2} + \sqrt{D-e_3} = l_0, \tag{37.}$$

$$(e_2-e_3)\sqrt{D-e_1} + (e_3-e_1)\sqrt{D-e_2} + (e_1-e_2)\sqrt{D-e_3} = l_1, \tag{38.}$$

$$(e_2^2-e_3^2)\sqrt{D-e_1} + (e_3^2-e_1^2)\sqrt{D-e_2} + (e_1^2-e_2^2)\sqrt{D-e_3} = l_2, \tag{39.}$$

so hat man die gesuchte Darstellung

$$a_0 = -\frac{B}{A} - \frac{l_0}{\sqrt{A}} \tag{40.}$$

und nach (11.)

$$\varphi(u, a_0) = -\frac{B}{A} - \frac{l_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{l_1\wp u + l_2}. \tag{41.}$$

Die drei anderen Wurzeln a_1, a_2, a_3 der Gleichung $R(x) = 0$ und die zugeordneten, der gegebenen Differentialgleichung genügenden Functionen ergeben sich daraus, indem man, wie auf S. 155 gezeigt, v durch $v+2\omega_1$, $v+2\omega_2$, $v+2\omega_3$ ersetzt. Mit Berücksichtigung der Formeln E. F. S. 92 (18.) und S. 93 (19.),

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\omega_\alpha) &= \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u, \\ \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u+2\omega_\beta) &= -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u, \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \alpha \lessgtr \beta)$$

gehen die Grössen l_0, l_1, l_2 in je drei andere über, die mit l_0', l_1', l_2'; l_0'', l_1'', l_2''; l_0''', l_1''', l_2''' bezeichnet werden mögen. Die Ergebnisse sind in folgender Zusammenstellung vereinigt. Setzt man

$$\text{(A.)} \quad \left\{ \begin{aligned} l_0 &= \frac{\sigma_1 v + \sigma_2 v + \sigma_3 v}{\sigma v} \\ l_0' &= \frac{\sigma_1 v - \sigma_2 v - \sigma_3 v}{\sigma v} \\ l_0'' &= \frac{-\sigma_1 v + \sigma_2 v - \sigma_3 v}{\sigma v} \\ l_0''' &= \frac{-\sigma_1 v - \sigma_2 v + \sigma_3 v}{\sigma v}, \end{aligned} \right.$$

$$(A_1.)\quad \begin{cases} l_1 = \dfrac{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} \\[2ex] l'_1 = \dfrac{(e_2-e_3)\,\sigma_1 v - (e_3-e_1)\,\sigma_2 v - (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} \\[2ex] l''_1 = \dfrac{-(e_2-e_3)\,\sigma_1 v + (e_3-e_1)\,\sigma_2 v - (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} \\[2ex] l'''_1 = \dfrac{-(e_2-e_3)\,\sigma_1 v - (e_3-e_1)\,\sigma_2 v + (e_1-e_2)\,\sigma_3 v}{\sigma v}, \end{cases}$$

$$(A_2.)\quad \begin{cases} l_2 = \dfrac{(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v + (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v + (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} \\[2ex] l'_2 = \dfrac{(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v - (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v - (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} \\[2ex] l''_2 = \dfrac{-(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v + (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v - (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{\sigma v} \\[2ex] l'''_2 = \dfrac{-(e_2^2-e_3^2)\,\sigma_1 v - (e_3^2-e_1^2)\,\sigma_2 v + (e_1^2-e_2^2)\,\sigma_3 v}{\sigma v}, \end{cases}$$

so wird

$$(B.)\quad \begin{cases} a_0 = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l_0}{\sqrt{A}} \\[2ex] a_1 = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l'_0}{\sqrt{A}} \\[2ex] a_2 = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l''_0}{\sqrt{A}} \\[2ex] a_3 = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l'''_0}{\sqrt{A}}, \end{cases}$$

$$(C.)\quad \begin{cases} \varphi(u, a_0) = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l_0}{\sqrt{A}} - \dfrac{2}{\sqrt{A}}\,\dfrac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{l_1\wp u + l_2} \\[2ex] \varphi(u, a_1) = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l'_0}{\sqrt{A}} - \dfrac{2}{\sqrt{A}}\,\dfrac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{l'_1\wp u + l'_2} \\[2ex] \varphi(u, a_2) = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l''_0}{\sqrt{A}} - \dfrac{2}{\sqrt{A}}\,\dfrac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{l''_1\wp u + l''_2} \\[2ex] \varphi(u, a_3) = -\dfrac{B}{A} - \dfrac{l'''_0}{\sqrt{A}} - \dfrac{2}{\sqrt{A}}\,\dfrac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{l'''_1\wp u + l'''_2}. \end{cases}$$

Auf diese Weise sind die vier, der gegebenen Differentialgleichung genügenden geraden Functionen von u und die vier zugehörigen Wurzeln der

Gleichung $R(x) = 0$, d. h. die Werthe, die jene Functionen für $u = 0$ annehmen, rational ausgedrückt durch $\wp u$ und die Constanten

$$\frac{B}{A}, \quad \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma}v = \sqrt{D-e_1}, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma}v = \sqrt{D-e_2}, \quad \frac{\sigma_3}{\sigma}v = \sqrt{D-e_3}.$$

In dem Falle, wo A gleich Null ist, B aber nicht, giebt die Formel S. 148 (18.),

$$x = \frac{1}{B}\left(\wp(u-u_0) - \frac{1}{2}C\right),$$

eine der vorgelegten Differentialgleichung genügende gerade Function von u, wenn man $u_0 = 0$ setzt, nämlich

$$\varphi_0(u) = \frac{1}{B}\left(\wp u - \frac{1}{2}C\right). \tag{42.}$$

Die Ableitung dieser Function verschwindet für u gleich $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, und diesen Argumentwerthen müssen also die drei Werthe von x entsprechen, für die $R(x)$ verschwindet. Diese mögen mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet werden und von einander verschieden sein. Die drei Functionen

$$\varphi_0(u+\omega_1), \quad \varphi_0(u+\omega_2), \quad \varphi_0(u+\omega_3)$$

haben demnach für $u = 0$ der Reihe nach die Werthe

$$a_1, \qquad a_2, \qquad a_3,$$

und sie sind gerade Functionen von u, weil z. B.

$$\wp(u+\omega_1) = \wp(u-\omega_1) = \wp(\omega_1-u)$$

ist. Auch ergiebt sich wie vorher, dass ausser den angegebenen vier keine der betrachteten Differentialgleichung genügenden geraden Functionen von u vorhanden sind. Übrigens bleiben für jede der Differentialgleichung genügende Function x die Gleichungen (1.) und (2.) giltig, wenn unter u' einer der Werthe von u verstanden wird, für die x den Werth a_0, d. h. jetzt einen der drei Werthe a_1, a_2, a_3 hat. Ist also insbesondere

$$x = \varphi(u+\omega_\lambda), \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

so hat man

$$(43.)\quad \begin{cases} \wp u = \dfrac{R_1(a_\lambda)}{x-a_\lambda} + \dfrac{1}{2} R_2(a_\lambda) \\[2ex] x = a_\lambda + \dfrac{R_1(a_\lambda)}{\wp u - \frac{1}{2} R_2(a_\lambda)}, \end{cases}$$

d. h. es gelten für $\lambda = 1, 2, 3$ dieselben Gleichungen, die in dem Falle, wo A nicht gleich Null ist, für $\lambda = 0, 1, 2, 3$ bestehen. Aus S. 148 (18.) erhält man

$$(44.)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{B}\left(e_1 - \dfrac{1}{2} C\right) \\[2ex] a_2 = \dfrac{1}{B}\left(e_2 - \dfrac{1}{2} C\right) \\[2ex] a_3 = \dfrac{1}{B}\left(e_3 - \dfrac{1}{2} C\right) \end{cases}$$

und hieraus

$$(45.)\quad \begin{cases} e_1 - e_2 = B(a_1 - a_2) \\ e_1 - e_3 = B(a_1 - a_3) \\ e_2 - e_3 = B(a_2 - a_3). \end{cases}$$

Jetzt werde wieder unter x die allgemeine, durch die Formel (6.) definirte Function verstanden, so wird sie, wenn A nicht gleich Null ist, unendlich gross für die beiden nicht congruenten Werthe u_0, $u_0 + v$, sowie für jeden Werth von u, der sich von diesen um Perioden unterscheidet. Wenn nun u_1 ein beliebiges Argument ist, für das der zugehörige Werth x_1 von x nicht unendlich gross wird, so ist $x - x_1$ eine elliptische Function zweiten Grades, die für dieselben Werthe von u wie x unendlich gross wird, während u_1 einer der Werthe von u ist, für die sie verschwindet. Den anderen findet man nach der Regel, dass die Summe der Unendlichkeitsstellen gleich der der Nullstellen sein muss. Man hat demnach (E. F. S. 135)

$$x - x_1 = C \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1-2u_0-v)}{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u-u_0-v)}.$$

Der constante Factor C wird bestimmt, indem man beiderseits nach Potenzen von $u - u_0$ entwickelt und die Coeffizienten von $(u-u_0)^{-1}$ vergleicht. So ergiebt sich

$$(46.)\quad x - x_1 = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\sigma v\, \sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1-2u_0-v)}{\sigma(u_0-u_1)\,\sigma(u_1-u_0-v)\,\sigma(u-u_0)\,\sigma(u-u_0-v)}.$$

Wenn A gleich Null ist, B aber nicht, so gilt die Gleichung S. 148 (18.), aus der man

$$x - x_1 = \frac{1}{B}(\wp(u-u_0) - \wp(u_1-u_0))$$

oder (E. F. S. 37 (14.))

$$(47.)\qquad x - x_1 = \frac{1}{B}\,\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u+u_1-2u_0)}{\sigma^2(u_1-u_0)\,\sigma^2(u-u_0)}$$

erhält.

Aus (46.) ergiebt sich

$$(48.)\qquad \frac{y}{x-x_1} = \frac{d\log(x-x_1)}{du}$$
$$= \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_1-2u_0-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0-v).$$

Diese Gleichung gilt auch, wie aus (47.) ersichtlich, in dem Falle, wo A gleich Null ist, wenn man dann v gleich Null setzt.

Vertauscht man u und u_1 mit einander und zieht die so entstehende Gleichung von der vorstehenden ab, so findet man

$$(49.)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{y+y_1}{x-x_1} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0-v)$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_0) + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_0-v).$$

Nun sei u_2 ein drittes beliebiges Argument, und x_2, y_2 die dazugehörigen Werthe von x, y, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen

$$(50.)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{y+y_1}{x-x_1} + \frac{1}{2}\,\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2} + \frac{1}{2}\,\frac{y_2+y}{x_2-x} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_2) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_2-u)$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x_1-x_2)\,y}{(x-x_1)(x-x_2)} + \frac{1}{2}\,\frac{(x_2-x)\,y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x)} + \frac{1}{2}\,\frac{(x-x_1)\,y_2}{(x_2-x)(x_2-x_1)}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung $u_2 = u_0$ und $u_2 = u_0 + v$, so kommt wegen

$$\lim_{u=u_0} \frac{y}{x^2} = \sqrt{A} \qquad \text{und} \qquad \lim_{u=u_0+v} \frac{y}{x^2} = -\sqrt{A}:$$

$$(51.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{y+y_1}{x-x_1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{A}(x-x_1) = \dfrac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \dfrac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0) + \dfrac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_0) \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{y+y_1}{x-x_1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{A}(x-x_1) = \dfrac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \dfrac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0-v) + \dfrac{\sigma'}{\sigma}(u_1-u_0+v). \end{cases}$$

Der Ausdruck auf der Linken der Gleichung (50.) ist, als Function von u betrachtet, eine elliptische Function zweiten Grades mit den beiden nicht-congruenten Unendlichkeitsstellen u_1, u_2. Ist nun u_3 ein weiterer Argumentwerth, der mit u_1, u_2 nicht congruent ist, und sind x_3, y_3 die zu $u = u_3$ gehörigen Werthe von x, y, so hat der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\frac{y+y_1}{x-x_1}-\frac{1}{2}\frac{y+y_2}{x-x_2}-\frac{1}{2}\frac{y_3+y_1}{x_3-x_1}+\frac{1}{2}\frac{y_3+y_2}{x_3-x_2}\,.$$

dieselben Unendlichkeitsstellen, wird aber gleich Null für $u = u_3$ und lässt sich deshalb in der Form

$$C\,\frac{\sigma(u-u_3)\,\sigma(u-u_4)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}$$

darstellen, wo

$$u_1+u_2 = u_3+u$$

ist. Die Constante C wird bestimmt, indem man beide Ausdrücke nach Potenzen von $u-u_0$ entwickelt und die Coefficienten von $(u-u_0)^{-1}$ vergleicht. So ergiebt sich

$$(52.)\quad \frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u+u_3-u_1-u_2)}{\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_3-u_2)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)} = \frac{1}{2}\,\frac{(x_1-x_2)\,y}{(x-x_1)(x-x_2)}-\frac{1}{2}\,\frac{(x-x_3)\,y_1}{(x_1-x)(x_1-x_3)}$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{(x-x_3)\,y_2}{(x_2-x)(x_2-x_3)}-\frac{1}{2}\,\frac{(x_1-x_2)\,y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\,\frac{y+y_1}{x-x_1}-\frac{1}{2}\,\frac{y+y_2}{x-x_2}\right)-\left(\frac{1}{2}\,\frac{y_3+y_1}{x_3-x_1}-\frac{1}{2}\,\frac{y_3+y_2}{x_3-x_2}\right).$$

Sechzehntes Kapitel.

Integration der elliptischen Differentialgleichung, wenn ihre Coefficienten sämmtlich reell sind.

Es soll jetzt unter der Annahme, dass die Coefficienten der Function $R(x)$ sämmtlich reelle Grössen seien, noch näher auf die Bestimmung der Grösse v eingegangen werden, die in dem allgemeinsten Ausdruck S. 148 (17.) einer die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

befriedigenden Function x vorkommt. Vorausgesetzt wird dabei, dass der Coefficient A nicht gleich Null sei, sowie dass sich unter den Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ keine zwei gleiche finden.

Dann sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Fall.

$$g_2^3 - 27g_3^2 > 0.$$

Die Grössen e_1, e_2, e_3 sind alle drei reell. Bezeichnet man mit ω_1 den kleinsten positiven reellen Werth, für den $\wp'(u;\, g_2, g_3)$ verschwindet, und mit $\frac{\omega_3}{i}$ den kleinsten positiven reellen Werth, für den $\wp'(u;\, g_2, -g_3)$ gleich Null wird, so ist

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Da man nur einen Werth von v zu kennen braucht, so kann man annehmen, dass

$$v = 2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_3$$

sei, wo μ, μ' den Bedingungen

$$0 \leqq \mu < 1,$$
$$0 \leqq \mu' < 1$$

zu genügen haben.

Aus den zur Bestimmung der Grösse v dienenden Gleichungen S. 146 (14.),

$$\wp v = \frac{B^2 - AC}{A},$$
$$\wp' v = -\frac{A^2 B' - 3ABC + 2B^3}{A^2}\sqrt{A},$$

geht hervor, dass v nothwendig eine der Formen

$$2\varepsilon\omega_1, \ \omega_1 + 2\varepsilon\omega_3, \ 2\varepsilon\omega_1 + \omega_3, \ 2\varepsilon\omega_3$$

hat, wo

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

ist; denn der Werth von $\wp(2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_3)$ ist, wie sich aus dem Additionstheorem der $\wp$-Function ergiebt, nur dann reell, wenn entweder

$$\mu' = 0, \ \frac{1}{2}$$

oder

$$\mu = 0, \ \frac{1}{2}$$

ist. Ferner erhellt aus der Gleichung

$$(\wp' v)^2 = 4(\wp v - e_1)(\wp v - e_2)(\wp v - e_3),$$

dass wenn A positiv ist, die Grösse

$$\frac{B^2 - AC}{A}$$

nothwendig entweder der Strecke $(+\infty \ldots e_1)$ oder der Strecke $(e_2 \ldots e_3)$ angehört, dagegen wenn A negativ ist, entweder der Strecke $(e_1 \ldots e_2)$ oder der Strecke $(e_3 \cdots -\infty)$ (vgl. die Tabelle S. 21, E. F. S. 80).

Nun ist aber, wenn mit (+) eine positive, mit (–) eine negative reelle Grösse angedeutet wird, für jeden reellen, den Bedingungen $0 \leqq \varepsilon < 1$ unterworfenen Werth ε:

$$1)\quad +\infty \geqq \wp(2\varepsilon\omega_1) \qquad \geqq e_1, \quad \wp'(2\varepsilon\omega_1) \qquad = \begin{cases} (-) \\ 0 \\ (+) \end{cases}, \quad \text{jenachdem } \varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2},$$

$$2)\quad e_1 \geqq \wp(\omega_1 + 2\varepsilon\omega_3) \geqq e_2, \quad \wp'(\omega_1 + 2\varepsilon\omega_3) = \begin{cases} (+)i \\ 0 \\ (-)i \end{cases}, \quad \text{jenachdem } \varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2},$$

$$3)\quad e_2 \geqq \wp(2\varepsilon\omega_1 + \omega_3) \geqq e_3, \quad \wp'(2\varepsilon\omega_1 + \omega_3) = \begin{cases} (+) \\ 0 \\ (-) \end{cases}, \quad \text{jenachdem } \varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2},$$

$$4)\quad e_3 \geqq \wp(2\varepsilon\omega_3) \qquad \geqq -\infty, \quad \wp'(2\varepsilon\omega_3) \qquad = \begin{cases} (-)i \\ 0 \\ (+)i \end{cases}, \quad \text{jenachdem } \varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}.$$

In jedem dieser vier Fälle durchläuft, wenn ε stetig wachsend vom Werthe Null zum Werthe $\frac{1}{2}$ übergeht, der Werth der Function $\wp$ beständig zunehmend oder beständig abnehmend die angegebene Strecke; geht dann ε vom Werthe $\frac{1}{2}$ zum Werthe 1 über, so durchläuft $\wp$ dieselbe Strecke im entgegengesetzten Sinne. Den Werthen von ε, die gleichweit von $\frac{1}{2}$ abstehen, entsprechen dieselben Werthe der Function, aber einander entgegengesetzte Werthe ihrer Ableitung.

Hiernach gilt für die Bestimmung der Grösse v Folgendes.

Man gebe der Quadratwurzel $\sqrt{A}$ ihren positiven Werth, wenn A positiv, und nehme sie gleich $(+)i$, wenn A negativ ist. Ferner sei, wie S. 161 (28.),

$$D = -R_2\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{B^2 - AC}{A},$$
$$E = \quad R_1\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3};$$

so sind vier Fälle möglich.

Erstens. A ist positiv und D liegt in der Strecke $(+\infty \ldots e_1)$. Dann giebt es einen den Gleichungen

$$\wp v = \quad D,$$
$$\wp' v = -E\sqrt{A}$$

genügenden Werth v von der Form

$$v = 2\varepsilon\omega_1, \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

und es ist

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem} \quad E \gtreqless 0,$$
$$v = \omega_1, \quad \text{wenn} \quad E = 0.$$

Zweitens. A ist negativ und D liegt in der Strecke $(e_3 \cdots -\infty)$; so kann man

$$v = 2\varepsilon\omega_3 \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

setzen, und es ist dann ebenfalls

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem} \quad E \gtreqless 0,$$
$$v = \omega_3, \quad \text{wenn} \quad E = 0.$$

Drittens. A ist positiv und D liegt in der Strecke $(e_2 \ldots e_3)$; so kann man

$$v = 2\varepsilon\omega_1 + \omega_3 \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1)$$

setzen, und es ist in diesem Falle

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem} \quad E \lesseqgtr 0,$$

und wenn E gleich Null ist, so kann v sowohl den Werth ω_3 als auch den Werth $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ erhalten, für $\varepsilon = 0$ den ersten, für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ den zweiten.

Viertens. A ist negativ und D liegt in der Strecke $(e_1 \ldots e_2)$. Dann kann man

$$v = \omega_1 + 2\varepsilon\omega_3 \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1)$$

setzen, und es ist wie im dritten Falle

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem} \quad E \lesseqgtr 0;$$

ferner kann, wenn E gleich Null ist, v die beiden Werthe ω_1, ω_2 erhalten, den ersten für $\varepsilon = 0$, den zweiten für $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Man überzeugt sich leicht, dass diese vier Fälle auch wirklich vorkommen. Denn setzt man (S. 147 (15.))

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\,\wp(u, v),$$

und giebt den Grössen A, B, g_2, g_3 beliebige reelle Werthe, so genügt x, wie oben gezeigt, stets einer elliptischen Differentialgleichung, in der die Coefficienten sämmtlich reell sind, wofern man v so annimmt, dass $\wp v$ und $\sqrt{A}\,\wp' v$ reelle Werthe erhalten.

Nach der Gleichung S. 156 (12.) ist nun in allen Fällen die Grösse

$$a_0 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{v}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{v}{2}\right)}$$

eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$. Im ersten Falle sind $\wp\left(\frac{v}{2}\right)$, $\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$, $\wp''\left(\frac{v}{2}\right)$ alle drei reell; es ist also a_0 eine reelle Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$. Die drei Formeln S. 156 (13.) lehren dann, dass alle drei Wurzeln dieser Gleichung reell sind.

Im zweiten Falle sind $\wp\left(\frac{v}{2}\right)$, $\wp''\left(\frac{v}{2}\right)$ reell, $\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$ aber hat die Form $(-)i$ oder $(+)i$, die Grösse $\sqrt{A}\,\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$ ist also reell, folglich auch a_0 und somit auch a_1, a_2, a_3. Dieses folgt übrigens daraus, dass wenn $g_2^3 - 27g_3^2$ positiv ist, die Gleichung $R(x) = 0$ nur reelle oder nur imaginäre Wurzeln hat.

Im dritten und vierten Falle ist $\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$ weder eine reelle noch eine rein imaginäre Grösse; aus der obigen Formel geht hervor, dass a_0 auch nicht reell ist. Daraus folgt, dass in diesem Falle alle Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ imaginär sind. Damit ist bewiesen:

Von den im Vorstehenden unterschiedenen vier Fällen tritt der erste ein, wenn A positiv ist und die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ alle vier reell sind; der zweite, wenn A negativ ist, und die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ ebenfalls sämmtlich reell sind; der dritte und vierte, wenn die Gleichung keine reellen Wurzeln hat.

Im ersten und zweiten Falle ist $\sqrt{A}\,\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$ eine negative oder positive reelle Grösse, jenachdem E positiv oder negativ ist. Die Formel S. 156 (12.) lehrt also, dass die Wurzel a_0 der Gleichung $R(x) = 0$, d. h. der Werth, den die gerade Function

$$-\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\,\wp\left(u + \frac{1}{2}v, v\right)$$

für $u = 0$ annimmt, im ersten Falle die kleinste ist, dagegen im zweiten Falle die grösste. Es hat nämlich im ersten Falle $\frac{1}{2}v$ die Form $\varepsilon\omega_1$, und im zweiten $\varepsilon\omega_3$, wo $0 < \varepsilon < 1$, und es ist deshalb $\frac{1}{\sqrt{A}}\wp'\left(\frac{v}{2}\right)$ in beiden Fällen eine negative reelle Grösse. In beiden Fällen ist ferner

$$a_1 > a_2 > a_3,$$

wie die Formeln S. 156 (14.) lehren.

II. Fall.

$$g_2^3 - 27g_3^2 < 0.$$

Bezeichnet man in diesem Falle mit ω_2, $\frac{\omega_2'}{i}$ die kleinsten positiven reellen Werthe von u, für die

$$\wp'(\omega_2;\, g_2,\quad g_3) = 0,$$
$$\wp'\left(\frac{\omega_2'}{i};\, g_2, -g_3\right) = 0,$$

und setzt

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_2'), \qquad \omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_2')$$

und

$$\wp\omega_1 = e_1, \quad \wp\omega_2 = \wp\omega_2' = e_2, \quad \wp\omega_3 = e_3,$$

so sind e_1, e_2, e_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0,$$

und es ist e_2 reell, während e_1, e_3 conjugirt complexe Grössen sind, und $\frac{e_1 - e_3}{i}$ positiv reell.

Dann hat man, wenn der Grösse E dieselbe Bedeutung wie im ersten Falle beigelegt wird,

$$+\infty > \wp(2\varepsilon\omega_2) \geqq e_2, \quad \wp'(2\varepsilon\omega_2) = \left\{\begin{matrix}(-)\\0\\(+)\end{matrix}\right., \text{ jenachdem } \varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2},$$

$$-\infty < \wp(2\varepsilon\omega_2') \leqq e_2, \quad \wp'(2\varepsilon\omega_2') = \left\{\begin{matrix}(-)\,i\\0\\(+)\,i\end{matrix}\right., \text{ jenachdem } \varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}.$$

Es liegt aber, wenn die beiden Gleichungen

$$\wp v = \quad D,$$
$$\wp' v = -E\sqrt{A}$$

bestehen, D nothwendig in der Strecke $(+\infty \ldots e_2)$, wenn A positiv, und in der Strecke $(-\infty \ldots e_2)$, wenn A negativ ist (vgl. die Tabelle S. 23, E. F. S. 82).

Für die Bestimmung der Grösse v ergiebt sich also in dem jetzt betrachteten Falle Folgendes.

Erstens. Es sei A positiv, und D in der Strecke $(+\infty \ldots e_2)$ gelegen. Dann kann man der Grösse v die Form

$$v = 2\varepsilon\omega_2 \qquad (0<\varepsilon<1)$$

geben, und es ist

$$\varepsilon \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem} \quad E \gtreqqless 0.$$

Zweitens. Es sei A negativ und D in der Strecke $(-\infty \ldots e_2)$ gelegen. Dann kann man der Grösse v die Form

$$v = 2\varepsilon\omega_2' \qquad (0<\varepsilon<1)$$

geben, und es ist

$$\varepsilon \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem} \quad E \gtreqqless 0.$$

Die Gleichung $R(x) = 0$ hat in diesem Falle zwei reelle und zwei complexe Wurzeln, und es sind den Formeln S. 156 (13.) zufolge die ersteren die dort mit a_0, a_2 bezeichneten. Ferner ist

$$a_0 \lessgtr a_2, \quad \text{jenachdem} \quad A \lessgtr 0.$$

Aus einem Werthe von v findet man durch Hinzufügung von Perioden alle übrigen.

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich folgendermassen zusammenfassen.

Man verstehe unter $\omega, \overline{\omega}$ die kleinsten positiven reellen Werthe der Art, dass $\wp'(\omega; g_2, g_3)$, $\wp'(\overline{\omega}; g_2, -g_3)$ verschwinden.

Wenn dann die Gleichung $R(x) = 0$ reelle Wurzeln hat, mögen es nun vier oder zwei sein, so hat die im Vorstehenden definirte, den beiden Gleichungen

$$\wp v = \quad D \quad = -R_2\left(-\frac{B}{A}\right),$$

$$\wp' v = -E\sqrt{A} = -R_1\left(-\frac{B}{A}\right)\sqrt{A}$$

genügende Grösse v die Form

$$\begin{aligned} v &= 2\varepsilon\omega, && \text{wenn } A > 0, \\ v &= 2\varepsilon\bar{\omega}i, && \text{wenn } A < 0, \end{aligned} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

und es ist in beiden Fällen

$$\varepsilon \lesseqqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem } E \gtreqqless 0.$$

Wenn dagegen die Gleichung $R(x) = 0$ keine reellen Wurzeln besitzt, so hat v die Form

$$\begin{aligned} v &= 2\varepsilon\omega + \bar{\omega}i, && \text{wenn } A > 0, \\ v &= \omega + 2\varepsilon\bar{\omega}i, && \text{wenn } A < 0, \end{aligned} \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1)$$

und es ist in beiden Fällen

$$\varepsilon \lessgtr \frac{1}{2}, \quad \text{jenachdem } E \lessgtr 0.$$

Wenn E gleich Null, so kann v im ersten Falle die Werthe $\bar{\omega}i$, $\omega + \bar{\omega}i$, und im zweiten die Werthe ω, $\omega + \bar{\omega}i$ haben.

Siebzehntes Kapitel.

Reellwerthige Integrale der elliptischen Differentialgleichung mit reellen Coefficienten.

Durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$$

wird eine bestimmte elliptische Function definirt, wenn für irgend einen bestimmten Werth u_1 von u der zugehörige Werth x_1 von x vorgeschrieben und zugleich derjenige Werth von $\sqrt{R(x)}$ fixirt wird, den $\frac{dx}{du}$ für $u = u_1$ annehmen soll.

Die Gleichungen S. 149 (22.), (23.) dienen dann zur Bestimmung des Werthes, den man der Constanten u_0 in dem Ausdrucke S. 148 (17.) zu geben hat, damit die durch ihn dargestellte Function den vorgeschriebenen Bedingungen genüge. Man erhält aus den genannten Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \wp\,(u_0 - u_1) = \frac{1}{2} R_2(x_1) + \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x_1)} \\ \wp'(u_0 - u_1) = -R_3(x_1)\sqrt{R(x_1)} - R_1(x_1)\sqrt{A}. \end{cases}$$

Es soll jetzt untersucht werden, wie die Constante u_0 beschaffen sein muss, damit die ihr entsprechende Function unter der Voraussetzung, dass die Coeffizienten von $R(x)$ sämmtlich reell seien, für jeden reellen Werth von u ebenfalls einen reellen Werth hat.

Nimmt man u_1 als reell an, so muss x_1 einen reellen Werth haben, für den $R(x_1)$ positiv ist. Der Fall, wo A negativ ist, und die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sämmtlich complex sind, ist also ausgeschlossen. Ist aber $R(x)$ positiv, so giebt es stets eine den gestellten Bedingungen entsprechende Function, deren Ausdruck durch die Formel S. 150 (26.),

$$\frac{1}{x-x_1} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R(x_1)}\,\wp'(u-u_1)+2R_1(x_1)\wp(u-u_1)-R_1(x_1)R_2(x_1)+R(x_1)R_3(x_1)}{R_1^2(x_1)-R(x_1)R_2(x_1)-R(x_1)\wp(u-u_1)},$$

gegeben ist.

Nun sei $\sqrt{A}$ so fixirt, wie auf S. 170 angegeben, und v die auf S. 169 definirte Grösse. Dann hat man folgende Fälle zu unterscheiden.

Erstens. A ist positiv, und die Gleichung $R(x) = 0$ hat vier reelle Wurzeln. Da dann $\wp(u_0-u_1)$, $\wp'(u_0-u_1)$ beide reell sind, so ist nach der Tabelle S. 21, wenn mit u' eine reelle Grösse bezeichnet wird,

$$u_0 \equiv u' \quad \text{oder} \quad u_0 \equiv \omega_3 + u'.$$

In der That giebt aber die Gleichung S. 148 (17.) eine Function von der verlangten Beschaffenheit, sowohl wenn man $u_0 \equiv u'$, als auch wenn man $u_0 \equiv u'+\omega_3$ nimmt; das Letztere ist aus dem Ausdruck S. 148 (17a.) sofort zu erkennen, da

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u'-\omega_3) = \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u-u')-\eta_3$$

ist. Weil nun $\wp(u-u_0, v)$ sich nicht ändert, wenn u_0 um eine Periode verändert wird, so sieht man, dass in diesem Falle sämmtliche Functionen von der verlangten Beschaffenheit geliefert werden, wenn man, unter u' eine beliebig anzunehmende reelle Grösse verstehend,

$$1)\quad x = -\frac{B}{A}+\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u'-v)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u')+\frac{\sigma'}{\sigma}v\right),$$

$$2)\quad x = -\frac{B}{A}+\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u-u'-v)-\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u-u')+\frac{\sigma'}{\sigma}v\right)$$

setzt. Die Grösse v ist reell.

Zweitens. A ist positiv, und die Gleichung $R(x) = 0$ hat zwei reelle und zwei complexe Wurzeln. Aus den Gleichungen (1.) ist wieder ersichtlich, dass $\wp(u_0-u_1)$, $\wp'(u_0-u_1)$ beide reell sein müssen. Nach der Tabelle S. 23 ist also

$$u_0 \equiv u'.$$

Somit giebt in diesem Falle die Formel S. 148 (17a.),

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u'-v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u') + \frac{\sigma'}{\sigma}v\right),$$

alle Functionen der in Rede stehenden Beschaffenheit. Die Grösse v ist reell.

Drittens. A ist positiv, und die Gleichung $R(x) = 0$ hat keine reellen Wurzeln. Da wieder $\wp(u_0 - u_1)$, $\wp'(u_0 - u_1)$ beide reell sind, so muss

$$u_0 \equiv u' \quad \text{oder} \quad u_0 \equiv u' + \omega_3$$

sein. Aus der Formel S. 148 (17a.) ist wie im ersten Falle zu ersehen, dass man in der That Functionen von der verlangten Beschaffenheit erhält, wenn man $u_0 \equiv u'$ oder wenn man $u_0 \equiv u' + \omega_3$ nimmt. Es ist aber in diesem Falle

$$v = \omega_3 + v',$$

wo auch v' eine reelle Grösse bezeichnen soll. Wenn man das eine Mal $u_0 = u'$, das andere Mal $u_0 = u' + \omega_3$ setzt, so findet man

$$1)\quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u-u'-v') - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u') + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}v'\right),$$

$$2)\quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u'-v') - \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u-u') + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}v'\right).$$

Die beiden Functionen unterscheiden sich dadurch, dass für die erste

$$\left(\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du}\right)_{u=u'} = \sqrt{A},$$

und für die zweite

$$\left(\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du}\right)_{u=u'+v'} = -\sqrt{A}$$

ist. Daraus folgt, dass für die erste die Gleichung

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$

und für die zweite die Gleichung

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{R(x)}$$

gilt, wenn in beiden Fällen $\sqrt{R(x)}$ positiv genommen wird.

Viertens. Es sei A negativ, und die Gleichung $R(x) = 0$ habe vier reelle Wurzeln. In diesem Falle ergiebt sich, wenn unter u_0' die mit u_0 conjugirte complexe Grösse verstanden wird, aus den Gleichungen (1.)

$$\wp(u_0'-u_1) = \frac{1}{2}R_2(x_1) - \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x_1)},$$
$$\wp'(u_0'-u_1) = -R_3(x_1)\sqrt{R(x_1)} + R_1(x_1)\sqrt{A},$$

da die Werthe von $\wp(u_0'-u_1)$, $\wp'(u_0'-u_1)$ mit denen von $\wp(u_0-u_1)$, $\wp'(u_0-u_1)$ conjugirt sein müssen. Die Formeln S. 146 (14.) zur Bestimmung von v bleiben nun aber ungeändert, wenn man darin zugleich v durch $-v$ und $\sqrt{A}$ durch $-\sqrt{A}$ ersetzt. Infolgedessen gelten auch die Formeln S. 148 (17.), (17a.), wenn darin u_0+v für u_0, $-v$ für v, $-\sqrt{A}$ für $\sqrt{A}$ geschrieben wird; also ist

$$\wp(u_0+v-u_1) = \frac{1}{2}R_2(x_1) - \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x_1)},$$
$$\wp'(u_0+v-u_1) = -R_3(x_1)\sqrt{R(x_1)} + R_1(x_1)\sqrt{A}.$$

Daraus folgt

$$u_0' \equiv u_0 + v.$$

Setzt man also

$$u_0 = u' + iu'',$$

wo auch u'' reell sein soll, so findet sich

$$2u''i \equiv -v.$$

Es ist aber in diesem Falle v eine rein imaginäre Grösse, also muss

$$2u''i = -v + 2\mu'\omega_3$$

sein, wo μ' eine ganze Zahl ist. Daraus folgt, dass entweder

$$u''i \equiv -\frac{1}{2}v$$

oder

$$u''i \equiv -\frac{1}{2}v + \omega_3,$$

also

$$u_0 \equiv u' - \frac{1}{2}v$$

oder

$$u_0 \equiv u' - \frac{1}{2}v + \omega_3$$

sein muss. Es wird aber, wenn man der Grösse u_0 die erste Form giebt und

$$v = v'i$$

setzt,

$$1)\quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{i\sqrt{-A}}\left(\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}\left(u-u'-\frac{1}{2}v'i\right) - \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}\left(u-u'+\frac{1}{2}v'i\right) + \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}(v'i)\right),$$

und wenn man für u_0 die zweite Form nimmt,

$$2)\quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{i\sqrt{-A}}\left(\frac{\mathfrak{G}_3'}{\mathfrak{G}_3}\left(u-u'-\frac{1}{2}v'i\right) - \frac{\mathfrak{G}_3'}{\mathfrak{G}_3}\left(u-u'+\frac{1}{2}v'i\right) + \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}(v'i)\right).$$

In beiden Fällen erhält man also, wie man auch die reelle Grösse u' annehmen möge, eine Function, die für reelle Werthe von u stets ebenfalls reell ist.

Fünftens. A ist negativ, und die Gleichung $R(x) = 0$ hat zwei reelle und zwei complexe Wurzeln. Man findet in diesem Falle ganz so wie im vorhergehenden, dass

$$u_0' \equiv u_0 + v$$

sein muss, also

$$u_0 - u_0' \equiv -v,$$

d. h.

$$\begin{aligned} u_0 - u_0' &= -v + 2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_3 \\ &= -v + (\mu+\mu')\,\omega_2 + (\mu'-\mu)\,\omega_2', \end{aligned}$$

wo μ, μ' ganze Zahlen sind. Da aber v die Form $2\varepsilon\omega_2'$ hat, so muss $\mu' = -\mu$, also

$$\frac{u_0 - u_0'}{2} = -\frac{1}{2}v + \mu'\omega_2'$$

oder

$$iu'' = -\frac{1}{2}v + \mu'\omega_2'$$

sein. Es ist daher entweder

$$iu'' \equiv -\frac{1}{2}v$$

oder

$$iu'' \equiv -\frac{1}{2}v + \omega_2'.$$

Setzt man wieder $v = v'i$, so wird entweder

$$u_0 \equiv u' - \frac{1}{2}v'i$$

oder

$$u_0 \equiv u' - \frac{1}{2}v'i + \omega_2'.$$

Da jedoch wegen

$$\omega_2' = \omega_2 - 2\omega_1$$

aus der letzten dieser beiden Congruenzen

$$u_0 \equiv u' + \omega_2 - \frac{1}{2}v'i$$

folgt, und für die reelle Grösse $u' + \omega_2$ wieder u' geschrieben werden kann, so genügt es, die erste Congruenz zu Grunde zu legen. Danach erhält man

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{i\sqrt{-A}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - u' - \frac{1}{2}v'i\right) - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - u' + \frac{1}{2}v'i\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v'i)\right).$$

Hiernach sind alle Fälle erledigt, in denen A nicht gleich Null ist.

Wenn

$$A = 0,$$

während B von Null verschieden ist, so wird die allgemeinste der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = R(x)$$

genügende Function durch die Gleichung S. 148 (18.),

$$x = \frac{1}{B}\left(\wp(u - u_0) - \frac{1}{2}C\right)$$

definirt, und man erhält aus ihr, wenn für einen bestimmten Werth u_1 von u nicht nur die Function, sondern auch ihre Ableitung einen reellen Werth haben soll, der für die erstere wieder mit x_1, für die andere mit $\sqrt{R(x_1)}$ bezeichnet werde,

$$\wp(u_0 - u_1) = Bx_1 + \frac{1}{2}C,$$

$$\wp'(u_0 - u_1) = -B\sqrt{R(x_1)}.$$

Hiernach müssen $\wp(u_0 - u_1)$ und $\wp'(u_0 - u_1)$ reelle Werthe haben. Es ist also

erstens, wenn die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ und somit auch die Grössen e_1, e_2, e_3 alle drei reell sind,

$$u_0 - u_1 \equiv 2\varepsilon\omega_1$$

oder

$$u_0 - u_1 \equiv 2\varepsilon\omega_1 + \omega_3.$$

Mithin hat man, unter u' wieder eine reelle Grösse verstehend, entweder

$$u_0 \equiv u'$$

oder

$$u_0 \equiv u' + \omega_3,$$

also

$$1)\quad x = \frac{1}{B}\left(\wp(u-u') - \frac{1}{2}C\right) \quad = -\frac{1}{B}\,\frac{d^2 \log \sigma(u-u')}{du^2} - \frac{1}{2}\,\frac{C}{B},$$

$$2)\quad x = \frac{1}{B}\left(\wp(u-u'-\omega_3) - \frac{1}{2}C\right) = -\frac{1}{B}\,\frac{d^2 \log \sigma_3(u-u')}{du^2} - \frac{1}{2}\,\frac{C}{B}.$$

In der That wird in beiden Fällen durch diese Gleichungen eine Function von der verlangten Beschaffenheit definirt.

Wenn ferner

zweitens die Gleichung $R(x) = 0$ nur eine reelle Wurzel hat, so muss

$$u_0 - u_1 \equiv 2\varepsilon\omega_2,$$

also

$$u_0 \equiv u'$$

sein, und demgemäss wird

$$x = \frac{1}{B}\left(\wp(u-u') - \frac{1}{2}C\right) = -\frac{1}{B}\,\frac{d^2 \log \sigma(u-u')}{du^2} - \frac{1}{2}\,\frac{C}{B},$$

wie in der ersten der vorher angegebenen Formeln.

Sechster Abschnitt.

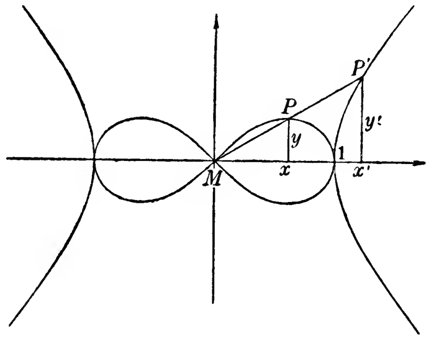
DIE THEILUNG DER LEMNISCATE UND DIE COMPLEXE MULTIPLICATION DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

Achtzehntes Kapitel.

Die lemniscatischen Functionen und die Theilungsgleichung der Lemniscate.

Die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Lemniscate ist für die Entwickelung der Lehre von den elliptischen Functionen von grosser Bedeutung gewesen. Schon vor Euler hatte der italienische Mathematiker Fagnano gefunden, dass der Bogen einer Lemniscate sich durch ein Integral bestimmen lässt, das man jetzt als ein elliptisches Integral erster Art bezeichnet. Fagnano hatte daraus eine Anzahl geometrischer Sätze über die Lemniscate abgeleitet, die mit dem Additionstheorem der elliptischen Integrale zusammenhängen. Aber erst nach den Entdeckungen Abels und Jacobis wurde die Bedeutung dieser Untersuchungen über die Eigenschaften der Lemniscate, besonders über die Theilbarkeit, klarer erkannt. Es erscheint daher nützlich, darauf etwas ausführlicher einzugehen, besonders auch aus dem Grunde, weil dabei eine Reihe von Ergänzungen der Theorie der elliptischen Functionen zur Sprache gebracht werden kann.

Eine Lemniscate lässt sich aus einer gleichseitigen Hyperbel durch Transformation mittels reciproker Radien erzeugen, deren Pol im Mittelpunkt der Hyperbel liegt. Ist P' mit den Coordinaten x', y' ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt M im Ursprung des Coordinaten-



Figur 7.

systems gelegen ist, und deren Hauptaxen in die Coordinatenaxen fallen, ausserdem die Länge Eins haben, so lautet die Gleichung der Hyperbel

$$x'^2 - y'^2 = 1.$$

Sind x, y die Coordinaten des entsprechenden Punktes P der Lemniscate, und ist

$$MP = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so gelten die Transformationsformeln

$$x' = \frac{x}{r^2}, \quad y' = \frac{y}{r^2};$$

daher ist

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2 = r^4$$

die Gleichung der Lemniscate. Man macht sich leicht klar, dass dem unendlich fernen Punkte der Hyperbel der Punkt M als Doppelpunkt der Lemniscate entspricht.

Wegen

$$(1.) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r^4) \\ y^2 = \frac{1}{2}(r^2 - r^4) \end{cases}$$

folgt für das Quadrat eines Linienelements der Lemniscate

$$dx^2 + dy^2 = du^2 = \frac{dr^2}{1 - r^4},$$

mithin

$$\frac{dr}{du} = \sqrt{1-r^4}. \tag{2.}$$

Es ist also r eine elliptische Function des Arguments u.

Setzt man

$$\frac{1}{r^2} = s, \tag{3.}$$

so ergiebt sich

$$\frac{ds}{du} = -\frac{2}{r^3}\frac{dr}{du}$$

und

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s^3-s).$$

Also ist auch s eine elliptische Function des Arguments u, und zwar die $\wp$-Function

$$s = \wp(u;\, 4, 0) \tag{4.}$$

mit den Invarianten

$$g_2 = 4, \quad g_3 = 0.$$

Das Hauptmerkmal dieser $\wp$-Function ist, dass

$$g_3 = 0 \tag{5.}$$

ist; diese Bedingung würde auch bestehen bleiben, wenn an Stelle der ursprünglichen gleichseitigen Hyperbel, deren Halbaxen die Länge Eins hatten, eine andere mit beliebigen Halbaxen träte; denn dadurch würde sich nur der Werth von g_2 ändern. Elliptische Functionen, bei denen die Invariante g_3 den Werth Null hat, heissen lemniscatische Functionen.

Der Function $s = \wp u$ ist noch die Bedingung auferlegt, es soll

$$s = \infty \quad \text{für} \quad u = 0$$

sein. Das bedeutet der Gleichung (3.) zufolge dasselbe wie

$$r = 0 \quad \text{für} \quad u = 0,$$

d. h. der Bogen u der Lemniscate ist von ihrem Doppelpunkte M aus zu zählen. Es soll ferner festgesetzt werden, dass der Bogen positiv gerechnet werde, der sich von M aus in den ersten Quadranten hinein erstreckt, sodass also die beiden Coordinaten x, y für kleine Werthe von u positive Zeichen erhalten.

Die Gleichung

$$4(s^3 - s) = 0$$

hat die Lösungen 0, 1 und -1; es ist demnach entsprechend der Forderung

$$e_1 > e_2 > e_3$$

$$\text{(6.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= 1 \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= -1 \end{aligned} \right.$$

zu setzen. Wegen

$$\wp u - e_\alpha = \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma} u\right)^2 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ist ferner

$$\text{(7.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r^2} - 1 &= \wp u - 1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} u\right)^2 \\ \frac{1}{r^2} &= \wp u = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} u\right)^2 \\ \frac{1}{r^2} + 1 &= \wp u + 1 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma} u\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Bestimmt man nun, der Radiusvector solle für Punkte mit positiven Abscissen positive Werthe haben, für Punkte mit negativen Abscissen dagegen negative, so muss

$$r = \frac{\sigma}{\sigma_2} u$$

sein. Für kleine Werthe von u ist

$$\sigma u = u, \quad \sigma_\alpha u = 1,$$

mithin

$$r = u.$$

Die Festsetzung über das Vorzeichen von r stimmt also mit der oben gemachten Annahme über das Vorzeichen der Bogenlänge u überein. Wenn u stetig wachsend von 0 nach ω geht, so durchläuft r stetig wachsend alle Werthe von 0 bis $+1$, und der entsprechende Punkt der Lemniscate wandert, von M beginnend, durch den ersten Quadranten bis zu dem auf der positiven Abscissenaxe gelegenen Scheitel der Lemniscate. Wächst u stetig weiter von ω bis 2ω, so nimmt r stetig ab von Eins zum Werthe Null; der zugehörige Punkt der Lemniscate läuft, von dem eben erwähnten Scheitel beginnend, durch den vierten Quadranten des Coordinatensystems nach M zurück. Bei $u = 2\omega$ wechselt wegen der Relation

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u + 2\omega_\beta) = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u \qquad (\alpha \lesseqgtr \beta)$$

(E. F. S. 93 (19.)) die Grösse r das Zeichen; wenn u von 2ω nach 3ω geht, durchläuft der zugehörige Punkt den zweiten Quadranten und erreicht für $u = 3\omega$ den auf der negativen Abscissenaxe gelegenen Scheitel der Lemniscate. Für $3\omega < u < 4\omega$ ergiebt sich schliesslich der dritte Quadrant. Wächst u über 4ω oder nimmt u unter Null ab, so wiederholt sich dasselbe Spiel, weil wegen (E. F. S. 93 (20.))

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u + 4\omega_\beta) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u \qquad (\alpha \lesseqgtr \beta)$$

die Function

$$r = \frac{\sigma}{\sigma_2}u$$

die Periode 4ω hat.

Weiter ergiebt sich aus (7.)

$$(9.) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} &= \frac{\sigma_1}{\sigma}u \\ \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} &= \frac{\sigma_3}{\sigma}u \end{aligned}\right.$$

und daher

$$(10.) \qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{1-r^2} &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}u \\ \sqrt{1+r^2} &= \frac{\sigma_3}{\sigma_2}u. \end{aligned}\right.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen bestimmen zugleich das Vorzeichen der Wurzeln. Die Functionen $\sigma_2 u$ und $\sigma_3 u$ ändern für reelle Argumentwerthe niemals ihr Vorzeichen (vgl. E. F. S. 172; die dort für $\sigma_3 u$ gemachte Bemerkung überträgt sich auch auf $\sigma_2 u$), und da

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2}(0) = +1$$

positiv ist, so hat die Wurzelgrösse

$$\sqrt{1+r^2}$$

stets das positive Vorzeichen. Dagegen wechselt entsprechend ihrer Definition,

$$\sigma_1 u = e^{\eta u}\frac{\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega} = e^{-\eta u}\frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega},$$

die Function $\sigma_1 u$ zweimal das Vorzeichen, wenn u das Intervall $(0\ldots 4\omega)$ durchläuft. Dasselbe ist also nach (10.) auch für $\sqrt{1-r^2}$ der Fall, und zwar ist

$$\begin{array}{lll}\sqrt{1-r^2}>0, & \text{wenn} & 0<u<\omega,\\ \sqrt{1-r^2}<0, & \text{„} & \omega<u<2\omega,\\ \sqrt{1-r^2}<0, & \text{„} & 2\omega<u<3\omega,\\ \sqrt{1-r^2}>0, & \text{„} & 3\omega<u<4\omega;\end{array}$$

d. h. das Wurzelzeichen ist im ersten und vierten Quadranten des Coordinatensystems positiv, im zweiten und dritten negativ zu nehmen.

Nach (1.) gelten noch die Gleichungen

$$(11.)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\sigma_2}u\frac{\sigma_3}{\sigma_2}u\\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma}{\sigma_2}u\frac{\sigma_1}{\sigma_2}u;\end{aligned}\right.$$

sie zeigen, dass sich die Cartesischen Coordinaten eines Punktes der Lemniscate als lemniscatische Functionen des Parameters u der Bogenlänge der Curve darstellen lassen. Die Sigmaquotienten haben sämmtlich die reelle primitive Periode 4ω; innerhalb dieser Periode ist

$$\begin{array}{llll} x\geqq 0, & y\geqq 0, & \text{wenn} & 0\leqq u<\omega,\\ x>0, & y\leqq 0, & \text{„} & \omega\leqq u<2\omega,\\ x\leqq 0, & y\geqq 0, & \text{„} & 2\omega\leqq u<3\omega,\\ x<0, & y\leqq 0, & \text{„} & 3\omega\leqq u<4\omega.\end{array}$$

Wenn u über 4ω wächst, so wiederholen sich die Werthe von x, y in derselben Reihenfolge.

Alle ebenen Curven, bei denen sich die Cartesischen Coordinaten als elliptische Functionen des Parameters der Bogenlänge darstellen lassen, haben in Folge des Additionstheorems der elliptischen Functionen folgende gemeinsame Eigenschaft. Es seien (0), (1) und (2) irgend drei Punkte einer Curve der betrachteten Art. Dann ist es immer möglich, durch algebraische Constructionen allein einen vierten Punkt (3) der Art zu finden, dass die beiden Bögen $\widehat{01}$ und $\widehat{23}$ dieselbe Länge haben. Bedeuten nämlich in den Gleichungen

$$x = \varphi(u),$$
$$y = \psi(u)$$

φ und ψ elliptische Functionen ihres Arguments, ist u der Parameter der Bogenlänge, und sind u_0, u_1, u_2, u_3 die den genannten vier Punkten entsprechenden Argumentwerthe, so muss wegen der angenommenen Gleichheit der Bögen

$$u_1 - u_0 = u_3 - u_2,$$

mithin

$$u_3 = u_1 + u_2 - u_0$$

sein. Für die Coordinaten des Punktes (3) ergiebt sich demnach

$$x_3 = \varphi(u_1 + u_2 - u_0),$$
$$y_3 = \psi(u_1 + u_2 - u_0).$$

Da sich aber nach dem Additionstheorem $\varphi(u_1 + u_2 - u_0)$ durch $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(u_0)$ und die Ableitungen dieser Functionen rational ausdrücken lässt, und das Entsprechende auch für die Function ψ gilt, da ferner zwischen den Functionen und ihren ersten Ableitungen algebraische Beziehungen bestehen, so folgt, dass x_3, y_3 sich aus x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2 in algebraischer Weise berechnen lassen.

Diese Thatsache kann man nun bei der Lemniscate noch weiter verfolgen. Man betrachte einen gegebenen, von ihrem Doppelpunkte M ausgehenden Bogen $\widehat{M1}$ der Lemniscate. Von irgend einem Punkte (2) der Kurve soll ein Bogen $\widehat{23}$ construirt werden, der an Länge gleich $\widehat{M1}$ ist. Es sei r_3 der zum Punkte (3) gehörige Radiusvector. Wegen $u_0 = 0$ ist

$$u_3 = u_1 + u_2,$$

und nach (7.)

$$\frac{1}{r_3^2} = \wp u_3 = \wp(u_1 + u_2).$$

Nun ist aber $\wp(u_1 + u_2)$ rational durch

$$\wp u_1 = \frac{1}{r_1^2}, \quad \wp u_2 = \frac{1}{r_2^2}$$

und durch

$$\wp' u_1 = \sqrt{4\wp^3 u_1 - 4\wp u_1},$$
$$\wp' u_2 = \sqrt{4\wp^3 u_2 - 4\wp u_2}$$

ausdrückbar, d. h. $\frac{1}{r_3^2}$ ist algebraisch durch $\frac{1}{r_1^2}$ und $\frac{1}{r_2^2}$ in der Weise darstellbar, dass dabei nur Quadratwurzeln in endlicher Anzahl auftreten. r_3 lässt sich also mittels r_1 und r_2 sogar auf elementargeometrischem Wege construiren.

Ebenso kann man die Aufgabe lösen, zu einem beliebigen Bogen der Lemniscate den ihm gleichen von M ausgehenden zu construiren. Und durch Verbindung beider Aufgaben erledigt sich auch die allgemeinere, zu einem beliebigen Bogen der Lemniscate den ihm gleichen zu finden, der von einem beliebig gegebenen Punkte ausgeht. Endlich ist es durch Wiederholung der Construction möglich, zu einem beliebig gegebenen Bogen der Lemniscate irgend ein Vielfaches herzustellen. Alle diese Constructionen sind mit den Mitteln der Elementargeometrie ausführbar.

Das ist aber im Allgemeinen nicht möglich, wenn es sich darum handelt, einen gegebenen Lemniscatenbogen in eine gegebene Anzahl, n, gleicher Theile zu zerlegen. Man kann hier stets statt des gegebenen einen ihm gleichen, aber von M ausgehenden Bogen construiren, an diesem die Theilung vornehmen und sodann nach dem eben Gesagten die Theilstrecken auf den gegebenen Bogen wieder übertragen. Die Theilung selbst kommt dann auf die analytische Aufgabe hinaus, die Functionswerthe $\wp\left(\frac{u}{n}\right)$ aus $\wp u$, oder $\sigma_\alpha\left(\frac{u}{n}\right)$ aus $\sigma_\alpha u$ zu berechnen. Das ist zwar stets auf algebraischem Wege möglich; aber die Auflösung der dabei auftretenden algebraischen Gleichungen ist im Allgemeinen nicht durch eine endliche Kette von Quadratwurzeln ausführbar. Die Verhältnisse entsprechen genau denen am Kreise.

Besonders klar tritt das zu Tage bei der Theilung des ganzen Lemniscaten-Umfangs in gleiche Theile. Diese Aufgabe soll im Folgenden näher untersucht werden. Sie ist seit langer Zeit behandelt worden und der Gegenstand zahlreicher Forschungen gewesen.

Der gesammte Umfang der Lemniscate hat die Länge 4ω, wo 2ω die kleinste positive reelle Periode der lemniscatischen Function

$$\wp(u;\, 4,\, 0)$$

ist. Wird die Theilung in n gleiche Theile verlangt, so handelt es sich darum, den Werth von

$$\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)$$

zu bestimmen, woraus sich der Radiusvector des ersten der n gesuchten Theilpunkte ermitteln lässt. Für $n=2$ ist dieses der Doppelpunkt M selbst; für $n=3$ liegt er im vierten Quadranten des Coordinatensystems, für $n=4$ fällt er mit dem auf der positiven Abscissenaxe gelegenen Scheitel zusammen, und er liegt stets im ersten Quadranten, wenn n grösser als vier ist. Er ist also dann zu finden als Schnittpunkt des Kreises vom Radius

$$r = \sqrt{\frac{1}{\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)}} \tag{12.}$$

mit dem ersten Quadranten der Lemniscate. Den zweiten und jeden folgenden Theilpunkt kann man sodann durch Vervielfältigung des Bogens nach den im Vorhergehenden gemachten Bemerkungen bestimmen. Dem λ^{ten} Theilpunkt $(\lambda = 1, 2, \dots n-1)$ entspricht der Werth

$$\wp\left(\frac{4\lambda\omega}{n}\right),$$

und die Aufgabe der Lemniscatentheilung ist somit darauf zurückgeführt, diesen Werth aus $\wp(4\omega)$ zu berechnen.

Für die Theilung des Kreises in n gleiche Theile hat bekanntlich Gauss entdeckt, dass sie elementargeometrisch mit Lineal und Zirkel stets und nur dann ausgeführt werden kann, wenn n eine Potenz von 2, oder eine Primzahl der Form

$$2^{\varkappa}+1,$$

unter $\varkappa$ eine positive ganze Zahl verstanden, oder ein Product derartiger Factoren ist. Dasselbe Ergebniss stellt sich auch bei der Lemniscatentheilung heraus; es beruht auf den besonderen Eigenschaften der lemniscatischen Functionen.

Im dreiundzwanzigsten Kapitel der Elliptischen Functionen ist bewiesen worden, dass sich $\wp(nu)$ durch $\wp u$ in der Gestalt (E. F. S. 216 (11.))

$$\wp(nu) = \frac{g(\wp u)_{n^2}}{\bar{g}(\wp u)_{n^2-1}} \tag{13.}$$

darstellen lässt, d. h. als Quotient zweier ganzen rationalen Functionen des Arguments $\wp u$, von denen die im Zähler vom Grade n^2, die im Nenner vom Grade n^2-1 ist. Bei ungeradem n besteht der Nenner aus dem Quadrat einer ganzen Function vom Grade $\frac{1}{2}(n^2-1)$, bei geradem n hat der Nenner die Form

$$(\wp' u)^2 . G^2,$$

wo G eine ganze Function des Arguments $\wp u$ vom Grade $\frac{1}{2}(n^2-4)$ ist. Wenn nun

$$u = \frac{4\omega}{n},$$

so ist nu eine Unendlichkeitsstelle der $\wp$-Function, und es muss

$$\bar{g}\left(\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)\right)_{n^2-1} = 0 \tag{14.}$$

sein. Zur Bestimmung von $\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)$ ergiebt sich also eine algebraische Gleichung vom Grade n^2-1. Dieselbe Gleichung findet sich auch zur Bestimmung von

$$\wp\left(\frac{4\lambda\omega}{n}\right) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n-1).$$

Der Grad dieser Gleichung ist stets grösser als n. Da nur n Theilpunkte vorhanden sind, denen n reelle Wurzeln der Gleichung entsprechen, so muss die Gleichung noch complexe Wurzeln haben. Diese merkwürdige Thatsache hängt offensichtlich mit der Existenz imaginärer Perioden zusammen, und Abel ist dadurch auch auf die doppelte Periodicität der elliptischen Functionen geführt worden. Wenn nämlich

$$2\bar{\omega} = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

eine beliebige Periode der Function $\wp u$ bedeutet, so ist auch $\frac{4\bar{\omega}}{n}$ eine Unendlichkeitsstelle der Function $\wp(nu)$, und demnach genügt auch $\wp\left(\frac{4\bar{\omega}}{n}\right)$ der Gleichung

$$\bar{g}\left(\wp\left(\frac{4\bar{\omega}}{n}\right)\right)_{n^2-1} = 0. \tag{15.}$$

Wenn n eine Primzahl ist, so lässt sich der Grad der Gleichung erniedrigen, und auf diesen Fall kann der allgemeine stets zurückgeführt werden. Die in Rede stehende Gleichung heisst die Theilungsgleichung der lemniscatischen Function. Aus ihr sind alle weiteren Folgerungen über das Theilungsproblem der Lemiscate zu ziehen.

Zunächst mögen einige Haupteigenschaften der lemniscatischen Functionen hergeleitet werden. Wie auf S. 185 angegeben, ist

$$g_3 = 0,$$

und man kann weiter

$$g_2 = 4$$

annehmen, was für das Folgende vorausgesetzt werden soll.

Aus den Transformationsformeln (E. F. S. 44 (12.), (13.))

$$\wp(u;\, g_2, g_3) = m^2\wp\left(mu;\, \frac{g_2}{m^4}, \frac{g_3}{m^6}\right),$$

$$\sigma(u;\, g_2, g_3) = \frac{1}{m}\sigma\left(mu;\, \frac{g_2}{m^4}, \frac{g_3}{m^6}\right)$$

folgt dann für $m = i$:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \wp(ui) = -\wp u \\ \sigma(ui) = \ i\sigma u. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(17.)\qquad \wp'(ui) = \ i\wp' u.$$

Aus (16.) ergiebt sich offenbar, dass für die lemniscatische $\wp$- und σ-Function die Entwickelungen

$$(18.)\qquad \begin{cases} \wp u = \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{u^2}{5} + \dfrac{u^6}{75} + \cdots \\ \sigma u = u - \dfrac{u^5}{60} - \dfrac{u^9}{10080} - \cdots \end{cases}$$

gelten.

Es seien nun μ, ν reelle ganze Zahlen, dann ist die Function

$$\wp((\mu+\nu i)u) = \wp(\mu u + i\nu u)$$

nach dem Additionstheorem eine rationale Function von $\wp(\mu u)$, $\wp(\nu i u)$, $\wp'(\mu u)$, $\wp'(\nu i u)$; nämlich (E. F. S. 25 (3.))

$$\wp((\mu+\nu i)u) = \frac{2(\wp(\mu u)+\wp(\nu i u))(\wp(\mu u)\wp(\nu i u)-1) - \wp'(\mu u)\wp'(\nu i u)}{2(\wp(\mu u)-\wp(\nu i u))^2}.$$

Die beiden Functionen $\wp(\nu i u)$ und $\wp'(\nu i u)$ lassen sich aber nach (16.) und (17.)

durch $-\wp(\nu u)$ und $i\wp'(\nu u)$ ersetzen, ferner sind $\wp(\mu u)$, $\wp(\nu u)$ rationale Functionen von $\wp u$, und es sind $\wp'(\mu u)$ und $\wp'(\nu u)$ rationale Functionen von $\wp' u$. Da aber in der Formel des Additionstheorems nur das Product der ersten Ableitungen auftritt, so erscheint nach dem Einsetzen der Ausdrücke für $\wp'(\mu u)$, $\wp'(\nu u)$ nur das Quadrat von $\wp' u$; mithin ist die rechte Seite der vorstehenden Gleichung eine rationale Function allein von $\wp u$:

$$\wp((\mu + \nu i)u) = R(\wp u). \tag{19.}$$

Man pflegt dieses Ergebniss so auszusprechen, dass man sagt: die lemniscatische Function

$$\wp(u;\, 4,\, 0)$$

lässt eine complexe Multiplication zu.

Es wird eine besondere, später zu behandelnde Aufgabe sein, alle $\wp$-Functionen zu finden, die eine complexe Multiplication zulassen.

Es sei $(2\omega, 2\omega')$ das primitive Periodenpaar, dessen erster Bestandtheil die kleinste positive reelle Periode der $\wp$-Function ist, und für das die Bedingung

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$$

erfüllt ist. Es sei ferner

$$\wp\omega = e_1 = 1,$$
$$\wp\omega' = e_3 = -1.$$

Nun ist nach (16.)

$$\wp(\omega i) = -\wp\omega = -1,$$

also

$$\left\{\begin{aligned} \wp(\omega i) &= \wp\omega' \\ \wp\omega &= \wp\frac{\omega'}{i}. \end{aligned}\right. \tag{20.}$$

Da aber $2\omega'$ eine primitive Periode ist, so muss

$$\omega' = \omega i \tag{21.}$$

sein. Wegen $|\omega'| = \omega$ ist also das Periodenparallelogramm der lemniscatischen Function ein Quadrat, und ihre sämmtlichen Perioden lassen sich in der Form

$$2\tilde{\omega} = 2(\alpha + \alpha' i)\omega \tag{22.}$$

darstellen, wo α, α' reelle ganze Zahlen bedeuten; alle ihre Perioden entstehen also aus der primitiven reellen, 2ω, durch Multiplication mit einer ganzen complexen Zahl.

Geht man nun auf die Theilungsgleichung (15.) zurück, so folgt aus dem eben Gesagten, dass ihr die Grössen

$$\wp\left(4\,\frac{\alpha+\alpha' i}{n}\,\omega\right)$$

genügen müssen.

In der Theorie dieser Gleichung spielen die ganzen complexen Zahlen, insbesondere die complexen Primzahlen eine Rolle, und zwar eine ähnliche, wie die reellen Primzahlen in der Theorie der Kreistheilungsgleichung. Nun sind nicht alle reellen Primzahlen auch Primzahlen im Bereiche der complexen Zahlen. Eine jede reelle ungerade Primzahl ist entweder von der Form

$$4m+1,$$

wo m eine ganze reelle Zahl ist; dann lässt sie sich auch als Summe zweier Quadrate reeller ganzer Zahlen darstellen. Oder sie ist von der Form

$$4m+3,$$

dann ist eine solche Darstellung als Quadratsumme nicht möglich. Aber aus

$$4m+1 = \mu^2+\nu^2 = (\mu+\nu i)(\mu-\nu i)$$

folgt, dass keine reelle Primzahl von der Form $4m+1$ auch eine complexe Primzahl ist, sondern sich in ein Product zweier complexer ganzer Factoren zerlegen lässt. Diese beiden complexen Factoren sind jedoch wirklich complexe Primzahlen. Denn wäre $\mu+\nu i$ weiter in zwei complexe ganzzahlige Factoren zerspaltbar,

$$\mu+\nu i = (\mu_1+\nu_1 i)(\mu_2+\nu_2 i),$$

so müsste

$$\mu-\nu i = (\mu_1-\nu_1 i)(\mu_2-\nu_2 i),$$

also

$$4m+1 = (\mu_1^2+\nu_1^2)\ (\mu_2^2+\nu_2^2)$$

sein. Da $4m+1$ eine reelle Primzahl sein soll, so folgt daraus, dass entweder

$$\mu_1^2+\nu_1^2 = 1,\quad \mu_2^2+\nu_2^2 = 4m+1$$

oder

$$\mu_1^2 + \nu_1^2 = 4m + 1, \quad \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1$$

ist. Im ersten Falle wäre entweder

$$\mu_1 = \pm 1, \quad \nu_1 = 0,$$

oder

$$\mu_1 = 0, \quad \nu_1 = \pm 1;$$

entsprechend im zweiten Falle. Die complexen Factoren von $\mu + \nu i$ wären also Einheiten $(+1, -1, +i, -i)$; d. h. $\mu + \nu i$ ist eine complexe Primzahl. Jede reelle Primzahl von der Form $4m+1$ lässt sich also in genau zwei complexe Primfactoren zerlegen. Dagegen sind reelle Primzahlen der Form $4m+3$ auch im complexen Sinne Primzahlen. Denn wären sie in zwei ganzzahlige complexe Factoren zerlegbar, so müssten diese conjugirt, ihr Product also eine Summe zweier reellen Quadrate sein, was nach dem bereits oben Bemerkten für Primzahlen der Form $4m+3$ ausgeschlossen ist.

Es sei $n = 3$. Die Dreitheilung der Lemniscate bietet keine Schwierigkeit. Wie auf S. 192 erwähnt, ist die Theilungsgleichung vom Grade

$$\frac{n^2-1}{2} = 4.$$

Sie sei

$$\wp^4 + c_1\wp^3 + c_2\wp^2 + c_3\wp + c_4 = 0,$$

wo das Argument u weggelassen worden ist, und die Coefficienten c_1, c_2, c_3, c_4 rational von den Invarianten g_2, g_3 abhängen, also im vorliegenden Falle rationale Zahlen sind. Wegen $\omega' = \omega i$ muss nun die Theilungsgleichung nicht nur für

$$u = 4\frac{\alpha + \alpha' i}{n}\omega,$$

sondern auch für

$$4\frac{\alpha + \alpha' i}{n}\omega' = 4i\frac{\alpha + \alpha' i}{n}\omega = ui$$

erfüllt sein, und daher muss nach (16.) auch die Gleichung

$$\wp^4 - c_1\wp^3 + c_2\wp^2 - c_3\wp + c_4 = 0$$

bestehen. Mithin ist

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0,$$

und die Theilungsgleichung lautet

$$\wp^4 + c_2 \wp^2 + c_4 = 0.$$

Sie lässt sich durch eine Kette von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen auflösen. Daraus folgt, dass die Dreitheilung der Lemniscate elementargeometrisch mit Zirkel und Lineal möglich ist. Auf die wirkliche Ausführung dieser Construction soll hier nicht eingegangen werden.

Nunmehr möge der Fall behandelt werden, wo n eine reelle Primzahl von der Form

$$n = 4\varrho + 1$$

ist. Es kommt darauf an, die Werthe von

$$\wp\left(\frac{4\varkappa\omega}{4\varrho+1}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots \varrho)$$

zu ermitteln. Nach dem vorher Bemerkten ist die reelle Primzahl $4\varrho+1$ in zwei complexe Primfactoren zerlegbar:

$$4\varrho + 1 = (\mu + \nu i)(\mu - \nu i).$$

Daher wird

$$\frac{4\mu\lambda\omega}{4\varrho+1} = \frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i} + \frac{2\lambda\omega}{\mu-\nu i},$$

wo λ, μ, ν ganze reelle Zahlen bedeuten. Daraus folgt, dass sich

$$\wp\left(\frac{4\mu\lambda\omega}{4\varrho+1}\right)$$

nach dem Additionstheorem rational durch

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right), \quad \wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu-\nu i}\right)$$

und die Ableitungen dieser Functionen darstellen lässt. Würde man umgekehrt nur einen dieser Werthe kennen, etwa $\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right)$, so wäre auch der andere, weil zum ersten conjugirt complex, bekannt; daraus liessen sich dann auch die Werthe der Ableitungen und damit auch der gesuchte Werth $\wp\left(\frac{4\mu\lambda\omega}{4\varrho+1}\right)$ berechnen. Der Vortheil dieses Weges besteht darin, dass, wie sich herausstellen wird, die Theilungsgleichung für den Functionswerth $\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right)$

nur vom $2\varrho^{\text{ten}}$ Grade ist, während die ursprüngliche, der $\wp\left(\frac{4\mu\lambda\omega}{4\varrho+1}\right)$ zu genügen hat, den Grad

$$\frac{n^2-1}{2} = 4\varrho(2\varrho+1)$$

besitzt. Es ist nur noch zu zeigen, dass sich die ganze Zahl λ stets so bestimmen lässt, dass

$$\wp\left(\frac{4\mu\lambda\omega}{n}\right) = \wp\left(\frac{4\varkappa\omega}{n}\right)$$

wird. Dazu genügt es aber, λ gemäss der Congruenz

$$\mu\lambda \equiv \varkappa \mod n$$

zu ermitteln. Und diese Congruenz ist stets lösbar, weil μ kleiner als n, n eine Primzahl, und demnach μ und n theilerfremd sind.

Nach dem soeben Auseinandergesetzten hängt also die Aufgabe, den Umfang der Lemniscate in n gleiche Theile zu theilen, falls n eine reelle Primzahl der Form $4\varrho+1$ ist, davon ab, die Grössen

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right)$$

zu bestimmen, wo λ eine ganze reelle Zahl und $\mu+\nu i$ einen complexen Primfactor von n bedeuten.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist ein dreifaches. Erstens soll die algebraische Gleichung aufgestellt werden, deren Wurzeln die Grössen

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right)$$

sind. Zweitens soll gezeigt werden, dass die Gleichung eine Abelsche, ihre Auflösung also durch blosses Wurzelziehen möglich ist. Und drittens wird bewiesen werden, dass wenn n eine reelle Primzahl der Form $2^{\varkappa}+1$ ist, die Theilung der Lemniscate in n gleiche Theile elementargeometrisch mit Lineal und Zirkel ausgeführt werden kann.

Aus der zweiten Gleichung (16.) folgt

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(ui) = -i\frac{\sigma'}{\sigma}u$$

und daher für $u = \omega$ wegen $\omega i = \omega'$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\omega' = -i\frac{\sigma'}{\sigma}\omega$$

oder

$$\eta' = -i\eta. \tag{23.}$$

Nun ist (E. F. S. 72 (12.))

$$\sigma(u+2\alpha\omega+2\alpha'\omega') = (-1)^{\alpha\alpha'+\alpha+\alpha'} e^{2(\alpha\eta+\alpha'\eta')(u+\alpha\omega+\alpha'\omega')}\sigma u, \tag{24.}$$

wenn α, α' ganze reelle Zahlen bedeuten. Für die lemniscatische σ-Function wird diese Gleichung wegen (21.) und (23.)

$$\sigma(u+2(\alpha+i\alpha')\omega) = (-1)^{\alpha\alpha'+\alpha+\alpha'} e^{2(\alpha-i\alpha')\eta(u+(\alpha+i\alpha')\omega)}\sigma u. \tag{25.}$$

Dies vorausgeschickt, sei nun n eine reelle Primzahl von der Form

$$n = 4\varrho+1, \tag{26.}$$

sodass man

$$4\varrho+1 = (\mu+\nu i)(\mu-\nu i) \tag{27.}$$

setzen kann; ferner sei noch

$$\mu+\nu i = m. \tag{28.}$$

Dann handelt es sich darum, die algebraische Gleichung für die Grössen

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right)$$

herzustellen. Das Verfahren ist hier ähnlich dem, wie es zur Herleitung des Multiplicationstheorems der $\wp$-Function eingeschlagen worden ist (E. F. S. 212). Aber statt wie dort von der Function

$$\frac{\sigma(mu)}{(\sigma u)^{m^2}}$$

auszugehen, bilde man hier, wo m eine complexe Zahl ist, die Function

$$\psi(u) = \frac{\sigma(mu)}{(\sigma u)^{|m|^2}}, \tag{29.}$$

d. h. wegen

$$|m|^2 = \mu^2+\nu^2 = 4\varrho+1 = n,$$

$$\psi(u) = \frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u}. \tag{30.}$$

$\psi(u)$ ist eine elliptische Function mit den Perioden 2ω, $2\omega'$. Denn es ist

$$\psi(u+2\omega) = \frac{\sigma(mu+2m\omega)}{(\sigma(u+2\omega))^n}$$
$$= \frac{\sigma(mu+2(\mu+\nu i)\omega)}{(\sigma(u+2\omega))^n},$$

also nach (25.)

$$\psi(u+2\omega) = \frac{(-1)^{\mu\nu+\mu+\nu}}{(-1)^n}\,\frac{e^{2(\mu-\nu i)\eta(u+\omega)(\mu+\nu i)}}{e^{2\eta n(u+\omega)}}\,\frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u},$$

d. h.

$$\psi(u+2\omega) = (-1)^{\mu\nu+\mu+\nu-n}\,\frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u}.$$

Da $\mu^2+\nu^2 = n$ eine ungerade Zahl ist, so muss eine der Zahlen μ, ν gerade, die andere ungerade, also der vorkommende Exponent von (-1) gerade sein, sodass

$$\psi(u+2\omega) = \psi(u)$$

wird. Ebenso zeigt man

$$\psi(u+2\omega') = \psi(u),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Da ferner der Zähler und der Nenner von $\psi(u)$ zugleich das Zeichen wechseln, wenn man u mit $-u$ vertauscht, so ist $\psi(u)$ auch eine gerade Function ihres Arguments. Sie wird unendlich gross nur an der Stelle $u=0$ und den congruenten, und zwar von der Ordnung

$$n-1 = 4\varrho.$$

Die Function $\psi(u)$ lässt sich also nach einem grundlegenden Satze der Theorie (E. F. S. 148) als ganze rationale Function $(2\varrho)^{\text{ten}}$ Grades von $\wp u$ darstellen:

$$\psi(u) = C_0\wp^{2\varrho}u + C_1\wp^{2\varrho-1}u + \cdots + C_{2\varrho}. \tag{31.}$$

Aus der Definition von $\psi(u)$ folgt aber nach (16.)

$$\psi(ui) = \frac{i\,\sigma(mu)}{i^n\,\sigma^n u} = \frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u} = \psi(u). \tag{32.}$$

Mithin müssen auf der rechten Seite der Gleichung (31.) alle Potenzen von $\wp u$ mit ungeraden Exponenten wegfallen:

$$\psi(u) = C_0\wp^{2\varrho}u + C_2\wp^{2\varrho-2}u + \cdots + C_{2\varrho}. \tag{33.}$$

Hieraus ergiebt sich nun sofort die gewünschte Gleichung für $\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right)$, wenn man bedenkt, dass für diesen Argumentwerth $\sigma(mu)$ verschwindet, während σu von Null verschieden ist, also

$$(34.)\qquad \psi\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right) = 0$$

wird. Man erhält demnach das Ergebniss: 'Die Grössen

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right)$$

genügen der algebraischen Gleichung $(2\varrho)^{\text{ten}}$ Grades

$$(35.)\qquad C_0\wp^{2\varrho}u + C_2\wp^{2\varrho-2}u + \cdots + C_{2\varrho} = 0.$$

Die nächste Aufgabe besteht jetzt darin, die Werthe der Coeffizienten C_0, C_2, ... $C_{2\varrho}$ zu ermitteln. Der erste von ihnen, C_0, ist sehr einfach zu bestimmen. Die Entwickelung von $\psi(u)$ nach Potenzen von u beginnt nämlich auf der rechten Seite der Formel (30.) mit dem Gliede

$$mu^{-n+1} = mu^{-4\varrho},$$

auf der rechten Seite von (33.) mit

$$C_0 u^{-4\varrho},$$

sodass

$$(36.)\qquad C_0 = m$$

wird.

Von den übrigen Coefficienten kann man leicht zeigen, dass sie ganze rationale Functionen von m mit rationalen Zahlencoefficienten sein müssen. Nach E. F. S. 33 ist die Function $\sigma(u; g_2, g_3)$ in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe entwickelbar, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2 und g_3, also im Falle der lemniscatischen Function rationale Zahlen sind. Daher werden in der Entwickelung von

$$\psi(u) = \frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u}$$

nach Potenzen von u die Coefficienten ganze rationale Functionen von m mit rationalen Zahlencoefficienten sein. Dasselbe muss also auch von C_2, C_4, ... $C_{2\varrho}$ gelten.

Um die Ausdrücke für diese Grössen wirklich herzustellen, empfiehlt es sich, nach dem auf S. 147 der Elliptischen Functionen bewiesenen Hauptsatze die Function $\psi(u)$ als lineare Function von $\wp u, \wp' u, \wp'' u, \ldots \wp^{(n-3)} u$ darzustellen:

$$\psi(u) = A_0 + A_1 \wp u + A_2 \wp' u + \cdots + A_{n-2} \wp^{(n-3)} u.$$

Weil $\psi(u)$ gerade ist, können nur Ableitungen gerader Ordnung vorkommen, und wegen

$$\begin{aligned} \wp(ui) &= -\wp u, \\ \wp''(ui) &= \wp'' u, \\ \wp^{(4)}(ui) &= -\wp^{(4)} u, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

fallen weiter alle Ableitungen der vierten, achten, ... Ordnung heraus, sodass $\psi(u)$ von der Form

$$\psi(u) = B_0 + B_1 \wp'' u + B_2 \wp^{(6)} u + \cdots + B_\varrho \wp^{(4\varrho-2)} u$$

wird. In den Entwickelungen der Ableitungen von $\wp u$ nach Potenzen von u,

$$\begin{aligned} \wp'' u &= \frac{2.3}{u^4} + \cdots, \\ \wp^{(6)} u &= \frac{2.3.4.5.6.7}{u^8} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

in denen die nicht hingeschriebenen Glieder nur Potenzen von u mit positiven Exponenten enthalten, kommt jedesmal nur eine einzige Potenz mit negativem Exponenten vor. Entwickelt man auch die linke Seite, nämlich $\frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u}$, nach Potenzen von u, so lassen sich durch Vergleichung die Grössen $B_0, B_1, \ldots B_\varrho$ und weiter dadurch, dass man $\wp'' u, \wp^{(6)} u, \ldots \wp^{(4\varrho-2)} u$ als ganze Functionen von $\wp u$ darstellt, auch $C_2, C_4, \ldots C_{2\varrho}$ bestimmen. Es mag indessen hier bei dem Ergebniss bleiben, dass in der Gleichung

$$m \wp^{2\varrho} u + C_2 \wp^{2\varrho-2} u + \cdots + C_{2\varrho} = 0,$$

der die Grössen

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right)$$

genügen, die Coefficienten ganze rationale Functionen von

$$m = \mu + \nu i$$

mit rationalen Zahlencoefficienten sind.

Neunzehntes Kapitel.

Die Wurzeln der lemniscatischen Theilungsgleichung und die Fünftheilung der Lemniscate.

Da λ eine beliebige ganze Zahl sein kann, so müssen unter den unzählig vielen Grössen $\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right)$, die der lemniscatischen Theilungsgleichung

$$(1.) \qquad m\wp^{2\varrho}u + C_2\wp^{2\varrho-2}u + \cdots + C_{2\varrho} = 0$$

Genüge leisten, nothwendigerweise gleiche vorkommen, und zwar so viele, dass die Anzahl der verschiedenen unter ihnen höchstens gleich dem Grade der Theilungsgleichung, d. h. gleich 2ϱ ist. Es wird sich nun zeigen, dass es auch nicht weniger sind. Die Theilungsgleichung hat also genau 2ϱ verschiedene Wurzeln, und alle sind von der Form

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right) = \wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right).$$

Um das zu beweisen, sollen zwei Hilfsbetrachtungen vorausgeschickt werden.

Zuerst ist zu untersuchen, unter welcher Bedingung bei verschiedenen reellen Werthen von λ und λ' die Gleichung

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right) = \wp\left(\frac{2\lambda'\omega}{m}\right)$$

bestehen kann. Das ist nur möglich, wenn die Differenz oder die Summe der beiden Argumentwerthe eine Periode der $\wp$-Function ist:

$$\frac{2\lambda\omega}{m} - \frac{2\lambda'\omega}{m} = 2(\alpha + i\alpha')\omega,$$

$$\frac{2\lambda\omega}{m} + \frac{2\lambda'\omega}{m} = 2(\beta + i\beta')\omega,$$

worin $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ reelle ganze Zahlen bedeuten. Es also entweder $\lambda - \lambda'$ oder $\lambda + \lambda'$ durch m theilbar sein. Mithin ist es auch ihr Product; es sei

$$(\lambda - \lambda')(\lambda + \lambda') = (\gamma + i\gamma')m,$$

d. h.

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = (\gamma + i\gamma')(\mu + i\nu),$$

wobei auch γ, γ' reelle ganze Zahlen sein sollen. Vertauscht man darin i mit $-i$, so folgt

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = (\gamma - i\gamma')(\mu - i\nu)$$

d. h. es muss $\lambda^2 - \lambda'^2$ auch durch

$$\mu - i\nu = m'$$

theilbar sein. Da nun (S. 199 (27.)) m, m' complexe Primzahlen sind, so ist $\lambda^2 - \lambda'^2$ auch durch ihr Product theilbar, d. h. es ist

$$\lambda^2 - \lambda'^2 \equiv 0 \mod n. \tag{2.}$$

Offenbar gelten diese Schlüsse auch in umgekehrter Reihenfolge.

Man hat also das Ergebniss: Es ist stets und nur dann

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right) = \wp\left(\frac{2\lambda'\omega}{m}\right),$$

wenn $\lambda^2 - \lambda'^2$ durch die reelle Primzahl n theilbar ist.

Zweitens ist zu zeigen, dass die Theilungsgleichung keine anderen Wurzeln haben kann als solche der Form

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right).$$

In Folge der Formel S. 200 (33.) ist die linke Seite der Theilungsgleichung identisch mit

$$\psi(u) = \frac{\sigma(mu)}{\sigma^n u}.$$

$\psi(u)$ verschwindet aber nur für solche Werthe des Arguments u, für die $\sigma(mu) = 0$, aber $\sigma u \neq 0$ ist, d. h. für die Argumentwerthe

$$w = \frac{2\alpha\omega + 2\alpha'\omega'}{m} = \frac{2(\alpha + i\alpha')\omega}{m}.$$

Man kann diesem Ausdruck stets die Gestalt

$$(3.)\qquad w = \frac{2\lambda\omega}{m} + 2\tilde{\omega}$$

geben, wo λ eine reelle ganze Zahl und $2\tilde{\omega}$ eine Periode bedeutet; denn dazu wäre es nur nöthig, für $\beta + i\beta'$ als ganze complexe Zahl

$$\frac{\alpha + i\alpha'}{m} = \frac{\lambda}{m} + \beta + i\beta'$$

d. h.

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda + \beta\mu - \beta'\nu, \\ \alpha' &= \qquad \beta\nu + \beta'\mu \end{aligned}$$

zu setzen. Bei gegebenen Werthen von α, α', μ, ν kann man aber zunächst aus der zweiten dieser Gleichungen stets β und β' als ganze Zahlen bestimmen, da μ, ν relative Primzahlen sind, und danach λ aus der ersten. Es sind somit, wie behauptet, die sämmtlichen Wurzeln der Theilungsgleichung in der Form

$$\wp w = \wp\left(\frac{2\lambda\omega}{m}\right)$$

enthalten.

Nach diesen Vorbemerkungen ist der Nachweis nicht mehr schwierig, dass die Anzahl der verschiedenen Wurzeln der Theilungsgleichung genau 2ϱ ist, woraus dann in Verbindung mit dem eben Bewiesenen folgt, dass ihre Wurzeln auch sämmtlich von einander verschieden sind.

Es sei w irgend ein Werth von u, der der Gleichung

$$\psi(u) = 0$$

genügt. Der Formel (3.) zufolge ist dann auch $\varkappa w$ eine Lösung der Gleichung, unter $\varkappa$ irgend eine ganze Zahl verstanden. Wenn daher die Theilungsgleichung (1.) die Lösung $\wp w$ hat, so sind die 2ϱ Grössen

$$(4.)\qquad \wp w,\ \wp(\varkappa w),\ \wp(\varkappa^2 w),\ \ldots\ \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w)$$

sämmtlich Lösungen der Gleichung. Könnte man nun zeigen, dass sie alle von einander verschieden sind, so wäre damit die oben ausgesprochene Behauptung nachgewiesen. Irgend zwei Grössen des Systems (4.) seien

$$\wp(\varkappa^p w) \quad \text{und} \quad \wp(\varkappa^q w),$$

und es sei $p < q$. Da $\wp\left(\frac{2\omega}{m}\right)$ eine Lösung der Theilungsgleichung ist, sei zunächst

$$w = \frac{2\omega}{m}$$

gesetzt. Sollen die beiden Werthe $\wp(\varkappa^p w)$ und $\wp(\varkappa^q w)$ von einander verschieden sein, so darf nach dem oben (S. 204 (2.)) Bewiesenen die Grösse

$$\varkappa^{2q} - \varkappa^{2p} = \varkappa^{2p}(\varkappa^{2(q-p)} - 1)$$

nicht durch $n = 4\varrho + 1$ theilbar sein. Daher darf weder $\varkappa$ noch $\varkappa^{2(q-p)} - 1$ durch n theilbar sein. Nach dem Fermatschen Satze ist, wenn n eine Primzahl und $\varkappa$ kein Vielfaches von n ist, stets

$$\varkappa^{n-1} \equiv 1 \mod n.$$

Es werde angenommen, $\varkappa$ sei eine primitive Congruenzwurzel von n, d. h. es gebe keine Zahl $n' < n$ derart, dass

$$\varkappa^{n'-1} \equiv 1 \mod n.$$

Unter dieser Annahme ist wegen

$$0 < q - p \leqq 2\varrho - 1,$$

also

$$0 < 2(q-p) < 4\varrho - 1$$

die Grösse

$$\varkappa^{2(q-p)} - 1$$

nicht durch n theilbar, weil dies erst für $\varkappa^{n-1} - 1 = \varkappa^{4\varrho} - 1$ eintritt. Wenn somit $\varkappa$ eine primitive, nicht durch n theilbare Congruenzwurzel von n ist, so sind keine zwei Grössen des Systems (4.) einander gleich, und diese stellen daher alle 2ϱ verschiedenen Wurzeln der Theilungsgleichung (1.) dar.

Dieses Ergebniss ist zunächst unter der Annahme

$$w = \frac{2\omega}{m}$$

abgeleitet worden. Aber diese Annahme ist nicht wesentlich. Denn ist w' irgend ein Argumentwerth, der bewirkt, dass $\wp w'$ eine Wurzel der Theilungsgleichung ist, so muss $\wp w'$ mit einer der 2ϱ Grössen des Systems (4.) übereinstimmen, also $\pm w'$ einer der Grössen $\varkappa^r w$ $(r = 0, 1, \dots 2\varrho - 1)$ congruent sein.

Nun sollte $\varkappa$ eine primitive Wurzel der Congruenz

$$\varkappa^{4\varrho} \equiv 1 \mod n$$

sein. Daher ist

$$\varkappa^{2\varrho} \equiv \pm 1 \mod n,$$

demnach

$$\begin{aligned} \varkappa^{r+2\varrho-1} w &\equiv \pm \varkappa^{r-1} w \mod n, \\ \varkappa^{r+2\varrho-2} w &\equiv \pm \varkappa^{r-2} w \mod n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varkappa^{r+2\varrho-r} w &\equiv \pm w \mod n. \end{aligned}$$

Betrachtet man also das System der Grössen

$$\wp w', \ \wp(\varkappa w'), \ \wp(\varkappa^2 w'), \ \ldots \ \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w'),$$

das mit dem System

$$\wp(\varkappa^r w), \ \wp(\varkappa^{r+1} w), \ \wp(\varkappa^{r+2} w), \ \ldots \ \wp(\varkappa^{r+2\varrho-1} w)$$

identisch ist, so folgt aus den vorstehenden Congruenzen, dass es mit dem System

$$\wp(\varkappa^r w), \ \wp(\varkappa^{r+1} w), \ \wp(\varkappa^{r+2} w), \ \ldots \ \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w), \quad \wp w, \ \wp(\varkappa w), \ \ldots \ \wp(\varkappa^{r-2} w), \ \wp(\varkappa^{r-1} w)$$

übereinstimmt, d. h. aus dem System (4.) durch eine cyclische Vertauschung hervorgeht.

Das Ergebniss der Untersuchung ist also folgendes: Es sei w irgend eine Nullstelle der Function $\sigma(mu)$, und $\varkappa$ eine primitive Congruenzwurzel von $4\varrho+1$. Dann sind

$$\wp w, \ \wp(\varkappa w), \ \wp(\varkappa^2 w), \ \ldots \ \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w)$$

die 2ϱ Wurzeln der Theilungsgleichung

$$m \wp^{2\varrho} u + C_2 \wp^{2\varrho-2} u + \cdots + C_{2\varrho} = 0,$$

und sie sind alle von einander verschieden.

Diese Wurzeln seien in der obigen Reihenfolge mit

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ \ldots \ x_{2\varrho-1}$$

bezeichnet. Nach dem Additionstheorem ist $\wp(\varkappa w)$ eine rationale Function von $\wp w$ mit rationalen Zahlencoefficienten, und $\wp(\varkappa^2 w)$ ist dieselbe rationale

Function von $\wp(\varkappa w)$, u. s. w. Es ist demnach

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) &&= f_1(x_0),\\
x_2 &= f(x_1) &&= f_2(x_0),\\
x_3 &= f(x_2) &&= f_3(x_0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{2\varrho-1} &= f(x_{2\varrho-2}) &&= f_{2\varrho-1}(x_0),
\end{aligned}$$

wo unter den Zeichen $f, f_1, f_2, \ldots f_{2\varrho-1}$ rationale Functionen ihrer Argumente mit rationalen Zahlencoefficienten verstanden werden. Die Wurzeln lassen sich demnach alle rational durch eine von ihnen ausdrücken. Ferner ist offenbar

$$f_k(x_l) = f_l(x_k),$$

wo k, l irgend zwei Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots 2\varrho-1$ bedeuten. Algebraische Gleichungen, deren Wurzeln die eben hervorgehobenen beiden Eigenschaften besitzen, heissen bekanntlich Abelsche Gleichungen. Die Theilungsgleichung ist also eine Abelsche, und da ihre Coefficienten rational aus $m = \mu + \nu i$ zusammengesetzt, also rationale Zahlen sind, so kann die Auflösung der Gleichung durch Wurzelausziehen allein bewirkt werden. Um den Nachweis dafür zu erbringen, ist es nöthig, die rationale Function $f(x)$ wirklich herzustellen.

Zur Erläuterung des Vorhergehenden und zur Vorbereitung auf die folgenden allgemeineren Untersuchungen wird es zweckmässig sein, zuvor einen speciellen Fall, die Fünftheilung der Lemniscate, vollständig durchzuführen. Es sei also

$$n = 4\varrho + 1 = 5.$$

Man hat

$$\varrho = 1$$

und wegen $5 = (1+2i)(1-2i)$

$$m = 1 + 2i.$$

Der Grad der Theilungsgleichung ist

$$2\varrho = 2,$$

und sonach hat diese Gleichung selbst die Form

$$\frac{\sigma(mu)}{\sigma^5 u} = m\wp^2 u + C_2 = 0.$$

Zur Bestimmung von C_2 hat man die Reihenentwickelungen S. 193 (18.) anzusetzen:

$$\sigma u = u - \frac{u^5}{60} - \cdots,$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{u^2}{5} + \cdots,$$

also

$$\sigma^{-5} u = u^{-5} + \frac{5}{60} u^{-1} + \cdots,$$

$$\wp^2 u = u^{-4} + \frac{2}{5} + \cdots,$$

und demnach

$$\frac{\sigma(mu)}{\sigma^5 u} = mu^{-4} + \frac{m}{60}(5 - m^4) - \frac{5m^5}{60^2} u^4 + \cdots.$$

Die Vergleichung der von u freien Glieder auf beiden Seiten ergiebt

$$\frac{m}{60}(5 - m^4) = \frac{2}{5} m + C_2,$$

woraus mit Rücksicht auf den Werth von m

$$C_2 = -1$$

folgt. Die Theilungsgleichung lautet also

$$(1 + 2i)\wp^2 u - 1 = 0$$

oder

$$\wp^2 u = \frac{1}{5}(1 - 2i);$$

sie liefert als Wurzel

$$\wp w = \wp\left(\frac{2\omega}{1 + 2i}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2i}}.$$

Der zum Argument w conjugirte Werth ist

$$w_1 = \frac{2\omega}{1 - 2i},$$

und es ist auch $\wp w_1$ conjugirt zu $\wp w$, also

$$\wp w_1 = \wp\left(\frac{2\omega}{1 - 2i}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2i}}.$$

Nun ist

$$u = w + w_1 = \frac{4\omega}{5};$$

der Radiusvector, dessen zugehöriger Kreis mit dem ersten Quadranten der Lemniscate den ersten Theilpunkt der Fünftheilung ergiebt, wird also durch die Formel

$$\frac{1}{r^2} = \wp u$$

oder durch

$$r = \frac{1}{\sqrt{\wp u}} = \frac{\sigma}{\sigma_2} u = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{4\omega}{5}\right) = \varphi(w + w_1)$$

geliefert. Für die lemniscatische Function $\varphi(u)$ gilt aber das Additionstheorem

$$\varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi(v)\varphi'(u)}{1 + \varphi^2(u)\varphi^2(v)}. \tag{5.}$$

Nach E. F. S. 207 (15.) ist nämlich für

$$\varphi(u) = \frac{\sigma}{\sigma_2} u, \quad \varphi_1(u) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} u, \quad \varphi_2(u) = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} u:$$

$$\varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\varphi_1(v)\varphi_2(v) + \varphi(v)\varphi_1(u)\varphi_2(u)}{1 - (e_2 - e_1)(e_2 - e_3)\varphi^2(u)\varphi^2(v)},$$

woraus die obige Formel unmittelbar entspringt, wenn man auf die Differentialgleichung der Sigmaquotienten (E. F. S. 97 (6.)),

$$\varphi'(u) = \varphi_1(u)\varphi_2(u),$$

zurückgeht, und für den hier vorliegenden lemniscatischen Fall (S. 186 (6.))

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -1$$

setzt. Für $u = w$, $v = w_1$ ergiebt sich also, da nach S. 185 (2.)

$$\frac{dr}{du} = \sqrt{1 - r^4},$$

d. h.

$$\varphi'(u) = \sqrt{1 - \varphi^4(u)}$$

ist,

$$r = \frac{\varphi(w)\sqrt{1 - \varphi^4(w_1)} + \varphi(w_1)\sqrt{1 - \varphi^4(w)}}{1 + \varphi^2(w)\varphi^2(w_1)}.$$

Den Quadratwurzeln ist darin das gleiche Zeichen beizulegen, weil sie zu einander conjugirt complex sein müssen. Aus der Theilungsgleichung folgt

$$\varphi(w) = \frac{1}{\sqrt{\wp w}} = \sqrt[4]{1+2i}, \quad \varphi'(w) = \sqrt{-2i},$$

$$\varphi(w_1) = \frac{1}{\sqrt{\wp w_1}} = \sqrt[4]{1-2i}, \quad \varphi'(w_1) = \sqrt{2i},$$

sodass schliesslich

$$r = \frac{\sqrt[4]{1+2i}\sqrt{2i} + \sqrt[4]{1-2i}\sqrt{-2i}}{1+\sqrt{5}},$$

oder

$$r = \frac{\sqrt[4]{-4-8i} + \sqrt[4]{-4+8i}}{1+\sqrt{5}}$$

wird. Die Grösse r ist, weil sie nur Quadratwurzeln enthält, elementargeometrisch construirbar. Indem man den vierten Wurzeln ihre vier verschiedenen Werthe ertheilt, die jedoch nach dem vorher Bemerkten paarweise conjugirt sein müssen, erhält man vier verschiedene Werthe von r, zwei reelle entgegengesetzt gleiche, und zwei rein imaginäre, ebenfalls entgegengesetzt gleiche. Ihre absoluten Beträge sind gleich den Radien der beiden Kreise, die die Lemniscate in den gesuchten Theilpunkten schneiden, nämlich, die Wurzeln als positiv reell genommen,

$$2\frac{\sqrt[8]{80}}{1+\sqrt{5}}\cos\frac{\psi}{4}$$

und

$$2\frac{\sqrt[8]{80}}{1+\sqrt{5}}\sin\frac{\psi}{4},$$

wo ψ den überstumpfen Winkel bedeutet, für den

$$\operatorname{tg}\psi = 2.$$

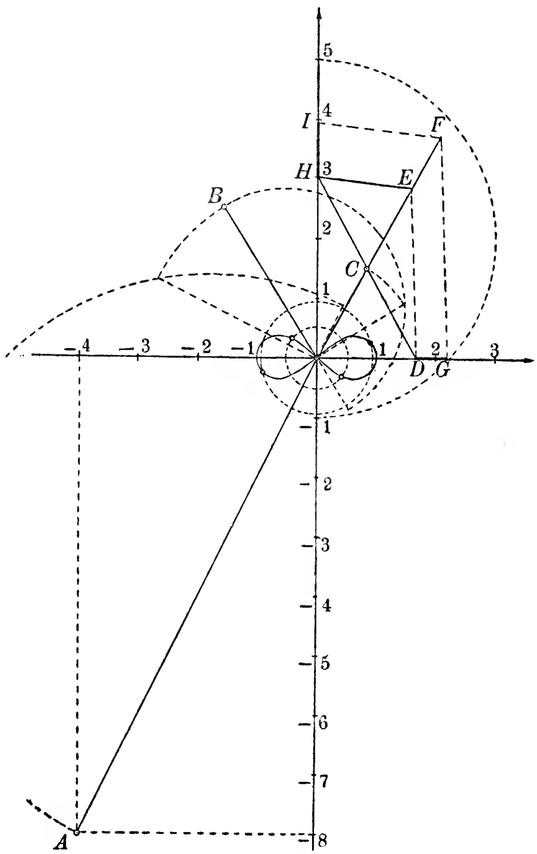
Die Construction ist in der umstehenden Figur 8 ausgeführt. Man sucht zunächst den Punkt

$$-4-8i = A,$$

halbirt den Winkel zwischen dem Strahl $0A$ und der positiven Halbaxe des Reellen, und trägt auf der Halbirenden von 0 aus die Strecke

$$\overline{0B} = \sqrt{0A\,.\,01}$$

ab, d. h. die mittlere Proportionale zwischen $0A$ und der Einheitsstrecke. Diese mittlere Proportionale ist als Loth auf $0A$ im Nullpunkte, gemessen bis



Figur 8.

zum Schnittpunkte mit dem Halbkreise über der um die Einheitsstrecke vermehrten Strecke $0A$, construirt worden. So erhält man den Punkt

$$\sqrt{-4-8i} = B.$$

Man halbirt weiter den Winkel zwischen dem Strahle $0B$ und der positiven

Halbaxe des Reellen, construirt

$$\overline{0C} = \sqrt{\overline{0B}.\overline{01}},$$

wodurch der Punkt

$$\sqrt[4]{-4-8i} = C$$

erhalten wird. Die geometrische Summe des Strahles $0C$ und des dazu conjugirten ergiebt den auf der Axe des Reellen gelegenen Punkt

$$\sqrt[4]{-4-8i} + \sqrt[4]{-4+8i} = D;$$

man findet ihn, indem man

$$\overline{CD} = \overline{0C}$$

macht. Der Ausdruck $\sqrt{5}$ ist als Schnitt des Halbkreises über der Strecke $(-i \cdots + 5i)$ mit der Axe des Reellen construirt worden. Macht man also

$$\overline{0E} = 1 + \sqrt{5},$$
$$\overline{EF} = 1,$$

zieht ED und dazu parallel FG, so ist

$$\overline{DG} = \frac{\sqrt[4]{-4-8i} + \sqrt[4]{-4+8i}}{1+\sqrt{5}}.$$

Entsprechend findet man den Punkt

$$\sqrt[4]{-4-8i} - \sqrt[4]{-4+8i} = H$$

dadurch, dass man

$$\overline{CH} = \overline{0C}$$

macht; und indem man die Parallele FI zu HE zieht, erhält man

$$\overline{HI} = \frac{\sqrt[4]{-4-8i} - \sqrt[4]{-4+8i}}{1+\sqrt{5}}.$$

Die Längen der gefundenen Strecken $\overline{DG}$ und $\overline{HI}$ sind, wie oben bemerkt worden und in der Figur zu erkennen ist, die Radien der beiden Kreise, die, um den Nullpunkt als Mittelpunkt gezeichnet, die gesuchten Theilpunkte der Lemniscate ergeben.

Zwanzigstes Kapitel.

Die Auflösung der lemniscatischen Theilungsgleichung.

Es bleibt nun noch der Nachweis übrig, dass die Theilungsgleichung der Lemniscate

$$(1.)\qquad m\wp^{2\varrho}(w) + C_2\wp^{2\varrho-2}(w) + \cdots + C_{2\varrho} = 0$$

durch eine Kette von Wurzelausziehungen auflösbar ist. Von den Coefficienten $C_2, C_4, \ldots C_{2\varrho}$ war (S. 201) gezeigt worden, dass sie sämmtlich ganze Functionen der complexen Primzahl

$$m = \mu + \nu i$$

mit rationalen Zahlencofficienten sind. Die Lösungen der Theilungsgleichung sind alle von einander verschieden und von der Form (S. 207)

$$\wp w = \wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu+\nu i}\right),$$

unter λ eine ganze reelle Zahl verstanden. Endlich war bewiesen worden, dass wenn $\wp w$ irgend eine Wurzel der Theilungsgleichung bedeutet, alle 2ϱ Wurzeln durch das System

$$(2.)\qquad \wp w,\ \wp(\varkappa w),\ \wp(\varkappa^2 w),\ \ldots\ \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w)$$

angegeben werden, wo $\varkappa$ eine primitive Congruenzwurzel von $4\varrho+1$ ist.

Nun sei ε eine primitive $2\varrho^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit, d. h. es sei

$$(3.)\qquad \varepsilon^{2\varrho} = 1,$$

während keine Potenz mit niedrigerem Exponenten als 2ϱ gleich Eins sei. Man bilde aus den 2ϱ Wurzeln der Theilungsgleichung die lineare Function

$$(4.)\qquad F(w,\varepsilon) = \wp w + \varepsilon\wp(\varkappa w) + \varepsilon^2\wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \varepsilon^{2\varrho-1}\wp(\varkappa^{2\varrho-1} w).$$

Dieser Ausdruck hat folgende Eigenschaften. Nach (3.) ist zunächst

$$F(w, \varepsilon) = \varepsilon F(\varkappa w, \varepsilon) = \varepsilon^2 F(\varkappa^2 w, \varepsilon) = \cdots = \varepsilon^{2\varrho-1} F(\varkappa^{2\varrho-1} w, \varepsilon)$$

und demnach

$$\text{(I.)} \qquad F^{2\varrho}(w, \varepsilon) = F^{2\varrho}(\varkappa w, \varepsilon) = F^{2\varrho}(\varkappa^2 w, \varepsilon) = \cdots = F^{2\varrho}(\varkappa^{2\varrho-1} w, \varepsilon),$$

d. h. $F^{2\varrho}(w, \varepsilon)$ ändert seinen Werth nicht, wenn das Argument w durch irgend eine der Grössen $\varkappa^p w$ $(p = 1, 2, \ldots 2\varrho-1)$ ersetzt wird. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
F(w, \varepsilon^0) &= \wp w + \wp(\varkappa w) + \wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w),\\
F(w, \varepsilon) &= \wp w + \varepsilon \wp(\varkappa w) + \varepsilon^2 \wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \varepsilon^{2\varrho-1} \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w),\\
F(w, \varepsilon^2) &= \wp w + \varepsilon^2 \wp(\varkappa w) + \varepsilon^4 \wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \varepsilon^{2(2\varrho-1)} \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F(w, \varepsilon^{2\varrho-1}) &= \wp w + \varepsilon^{2\varrho-1} \wp(\varkappa w) + \varepsilon^{2(2\varrho-1)} \wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \varepsilon^{(2\varrho-1)^2} \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w)
\end{aligned}$$

folgt ferner durch Summation

$$\text{(II.)} \qquad 2\varrho\wp w = F(w, \varepsilon^0) + F(w, \varepsilon) + F(w, \varepsilon^2) + \cdots + F(w, \varepsilon^{\varrho-1}),$$

weil $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{2\varrho-1}$ sämmtlich der Gleichung

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{2\varrho-1} = 0$$

genügen.

Wenn endlich λ irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots 2\varrho-1$ bedeutet, so hat man

$$\text{(III.)} \qquad \varepsilon^\lambda F(\varkappa w, \varepsilon^\lambda) = F(w, \varepsilon^\lambda).$$

Denn es ist

$$F(w, \varepsilon^\lambda) = \wp w + \varepsilon^\lambda \wp(\varkappa w) + \cdots + \varepsilon^{(2\varrho-2)\lambda} \wp(\varkappa^{2\varrho-2} w) + \varepsilon^{(2\varrho-1)\lambda} \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w),$$

mithin

$$\begin{aligned}
F(\varkappa w, \varepsilon^\lambda) &= \wp(\varkappa w) + \varepsilon^\lambda \wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \varepsilon^{(2\varrho-2)\lambda} \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w) + \varepsilon^{(2\varrho-1)\lambda} \wp w\\
&= \varepsilon^{-\lambda}(\wp w + \varepsilon^\lambda \wp(\varkappa w) + \varepsilon^{2\lambda} \wp(\varkappa^2 w) + \cdots + \varepsilon^{(2\varrho-1)\lambda} \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w))\\
&= \varepsilon^{-\lambda} F(w, \varepsilon^\lambda).
\end{aligned}$$

Dies vorausgeschickt, sei

$$\wp w = x$$

eine Wurzel der Theilungsgleichung

$$f(x) = mx^{2\varrho} + C_2 x^{2\varrho-2} + \cdots + C_{2\varrho} = 0.$$

Weil $\varkappa, \varkappa^2, \dots$ ganze Zahlen sind, so ist $\wp(\varkappa^\lambda w)$ nach dem Multiplicationstheorem der $\wp$-Function (S. 191) eine rationale Function von $\wp w = x$; daher ist es auch $F(w, \varepsilon)$. Es werde

$$F(w, \varepsilon) = \frac{G(x)}{H(x)}$$

gesetzt, wo $G(x)$, $H(x)$ ganze rationale Functionen ihres Arguments ohne gemeinsamen Theiler sein mögen. Es lässt sich aber beweisen, dass $F(w, \varepsilon)$ eine ganze Function von x sein muss. Zunächst können $f(x)$ und $H(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben; denn sonst müsste $F(w, \varepsilon)$ unendlich gross werden, wenn x gleich einer Wurzel der Theilungsgleichung wird, und das ist unmöglich, weil $F(w, \varepsilon)$ nach (4.) eine lineare Function dieser Wurzeln ist. Es giebt demnach zwei ganze Functionen $\overline{G}(x)$, $\overline{H}(x)$ derart, dass

$$H(x)\,\overline{G}(x) - f(x)\,\overline{H}(x) = 1,$$

oder nach Multiplication mit $G(x)$,

$$H(x)\,G_1(x) - f(x)\,H_1(x) = G(x)$$

ist, wo $G_1(x)$, $H_1(x)$ wiederum ganze rationale Functionen bedeuten. Wenn nun aber x eine Wurzel der Theilungsgleichung

$$f(x) = 0$$

ist, so muss

$$\frac{G(x)}{H(x)} = G_1(x)$$

sein, d. h. $F(w, \varepsilon)$ ist eine ganze Function von $x = \wp w$, wie behauptet.

Es ist daher auch

$$F^{2\varrho}(w, \varepsilon) = g(x)$$

eine ganze Function von x; ihre Coefficienten setzen sich rational aus den Coefficienten von $f(x)$ und den $2\varrho^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln zusammen. Der Grad von $g(x)$ kann aber höchstens gleich $2\varrho-1$ sein, weil x einer Gleichung vom Grade 2ϱ genügt; denn mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich jede ganze Function $2\varrho^{\text{ten}}$ und höheren Grades in eine solche verwandeln, deren Grad höchstens gleich $2\varrho-1$ ist. Nach (I.) bleibt nun die linke Seite der vorstehenden Formel ungeändert, wenn w irgend einen der 2ϱ verschiedenen Werthe

$$w,\ \varkappa w,\ \varkappa^2 w,\ \dots\ \varkappa^{2\varrho-1} w$$

annimmt; es muss also auch $g(x)$ ungeändert bleiben, wenn x einen der 2ϱ verschiedenen Werthe

$$\wp(w),\ \wp(\varkappa w),\ \wp(\varkappa^2 w),\ \ldots\ \wp(\varkappa^{2\varrho-1} w)$$

annimmt. Da aber die Function $g(x)$ höchstens vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann, so muss sie sich auf eine Constante reduciren. $F^{2\varrho}(w, \varepsilon)$ ist also eine von w unabhängige Grösse. Nach dem eben Bemerkten kann diese nur eine rationale Function von m und ε mit rationalen Zahlencoefficienten sein:

$$(5.)\qquad F^{2\varrho}(w, \varepsilon) = R(m, \varepsilon).$$

Demnach ist

$$(6.)\qquad F(w, \varepsilon) = \sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon)},$$

und aus der Formel (II.) ergiebt sich

$$(7.)\qquad \wp w = \frac{1}{2\varrho} \sum_{\lambda=0}^{2\varrho-1} \sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon^\lambda)}.$$

Damit ist bewiesen, dass sich $\wp w$ allein durch Wurzelausziehungen berechnen lässt, und zwar durch Wurzelausziehungen aus Grössen, die rational aus den Coefficienten der Theilungsgleichung, also auch rational aus der complexen Primzahl m und den $2\varrho^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit, $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{2\varrho-1}$, zusammengesetzt sind.

Würde man für die in (7.) auftretenden $2\varrho^{\text{ten}}$ Wurzeln ihre sämmtlichen Werthe einsetzen, so erhielte man mehr als 2ϱ verschiedene Werthe von $\wp w$. Es fragt sich also noch, welche Werthe der $2\varrho^{\text{ten}}$ Wurzeln zu nehmen sind, um genau die 2ϱ verschiedenen Lösungen der Theilungsgleichung zu erhalten. Betrachtet man den Ausdruck

$$F(w, \varepsilon^\lambda)\, F^{2\varrho-\lambda}(w, \varepsilon),$$

so ist auf Grund der Formel (III.)

$$F(\varkappa w, \varepsilon^\lambda)\, F^{2\varrho-\lambda}(\varkappa w, \varepsilon) = \varepsilon^{-\lambda} F(w, \varepsilon^\lambda)\, \varepsilon^{-2\varrho+\lambda} F^{2\varrho-\lambda}(w, \varepsilon),$$

oder

$$(8.)\qquad F(\varkappa w, \varepsilon^\lambda)\, F^{2\varrho-\lambda}(\varkappa w, \varepsilon) = F(w, \varepsilon^\lambda)\, F^{2\varrho-\lambda}(w, \varepsilon),$$

d. h. der betrachtete Ausdruck hat dieselbe Eigenschaft (I.) wie $F^{2\varrho}(w, \varepsilon)$, nämlich ungeändert zu bleiben, wenn w durch $\varkappa^p w$ $(p = 1, 2, \ldots 2\varrho-1)$ ersetzt wird. Aus denselben Gründen wie vorher für $F^{2\varrho}(w, \varepsilon)$ ist er auch eine rationale Function von m und ε mit rationalen Zahlencoefficienten:

$$F(w, \varepsilon^{\lambda}) F^{2\varrho-\lambda}(w, \varepsilon) = R(m, \varepsilon)_{\lambda}. \tag{9.}$$

Daraus folgt wegen (6.)

$$\sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon^{\lambda})} \left(\sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon)}\right)^{2\varrho-\lambda} = R(m, \varepsilon)_{\lambda},$$

d. h.

$$\sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon^{\lambda})} = \frac{R(m, \varepsilon)_{\lambda}}{R(m, \varepsilon)} \left(\sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon)}\right)^{\lambda}. \tag{10.}$$

Dadurch sind die in der Formel (7.) auftretenden $2\varrho^{\text{ten}}$ Wurzeln völlig bestimmt; man hat in dem vorstehenden Ausdruck für die $2\varrho^{\text{te}}$ Wurzel auf der rechten Seite jeden ihrer 2ϱ Werthe einzusetzen, um für

$$\wp w = \frac{1}{2\varrho R(m, \varepsilon)} \sum_{\lambda=0}^{2\varrho-1} R(m, \varepsilon)_{\lambda} \left(\sqrt[2\varrho]{R(m, \varepsilon)}\right)^{\lambda} \tag{11.}$$

genau 2ϱ verschiedene Werthe zu bekommen. In der That würde die Rechnung, mit $\wp(\varkappa w)$ statt mit $\wp w$ durchgeführt, zu einem Ergebniss führen, das sich von dem vorstehenden Ausdruck nur dadurch unterscheidet, dass vor der $2\varrho^{\text{ten}}$ Wurzel noch eine der $2\varrho^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln als Factor auftritt.

Nach dem auf S. 189 Bemerkten sind die Schritte, die man von der Auflösung der Theilungsgleichung zur Berechnung der Radienvectoren der Theilungspunkte auszuführen hat, sehr einfach anzugeben. Ist $\wp w$ eine Wurzel der Theilungsgleichung, und $\wp w'$ die zu ihr conjugirt complexe Zahl, so hat man

$$\wp(w + w') = \wp\left(\frac{2\lambda\omega}{\mu + \nu i} + \frac{2\lambda\omega}{\mu - \nu i}\right) = \wp\left(\frac{4\lambda\mu\omega}{\mu^2 + \nu^2}\right) = \wp\left(\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho + 1}\right)$$

für $\lambda' = 1, 2, \dots \varrho$ zu bestimmen. Nach dem Additionstheorem der $\wp$-Function ist $\wp(w + w')$ eine symmetrische Function einerseits von $\wp w, \wp w'$, andererseits von $\wp' w, \wp' w'$. Da aber diese Paare conjugirt complexe Grössen sind, so ist $\wp(w + w')$ stets reell. Der Radiusvector für den λ'^{ten} Theilpunkt der Lemniscate bei der Theilung in $4\varrho + 1$ Theile war aber nach S. 191 gegeben durch

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\wp\left(\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho + 1}\right)}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich also ebenfalls stets durch Wurzelausziehungen beberechnen.

Jetzt nehme man an, die Primzahl $4\varrho+1$ sei von der Form

$$2^g+1,$$

so ist

$$2\varrho = 2^{g-1}.$$

Die Berechnung der $2\varrho^{\text{ten}}$ Wurzel, die in dem Ausdruck (11.) für $\wp w$ gefordert wird, kann also in diesem Falle immer durch wiederholtes Quadratwurzelziehen geleistet werden. D. h. die Theilung der Lemniscate in

$$2^g+1$$

gleiche Theile kann, wenn diese Zahl eine Primzahl ist, stets elementargeometrisch allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden.

Auch die Theilung der Lemniscate von einem beliebigen Punkte, statt wie bisher angenommen, vom Anfangspunkte aus, ist in diesen Fällen elementargeometrisch ausführbar. Denn aus dem Additionstheorem (S. 210 (5.))

$$\varphi\left(u+\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho+1}\right) = \frac{\varphi(u)\,\varphi'\left(\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho+1}\right)+\varphi'(u)\,\varphi\left(\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho+1}\right)}{1+\varphi^2(u)\,\varphi^2\left(\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho+1}\right)}$$

für die Function $r=\varphi(u)$ folgt, dass die Grösse

$$\varphi\left(u+\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho+1}\right)$$

rational durch $\varphi(u)$ und den durch die Theilungsgleichung gelieferten Werth von $\varphi\left(\frac{4\lambda'\omega}{4\varrho+1}\right)$ ausdrückbar ist, also elementargeometrisch construirt werden kann.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Im achtzehnten Kapitel (S. 194 (19.)) ist von der lemniscatischen $\wp$-Function

$$\wp(u;\,4,0)$$

bewiesen worden, dass wenn m eine ganze complexe Zahl bedeutet, die Gleichung

$$\wp(mu) = R(\wp u)$$

gilt, worin R eine rationale Function des Arguments $\wp u$ bedeutet; die lemniscatische $\wp$-Function lässt also eine complexe Multiplication zu. Dieses Ergebniss führt auf folgende allgemeinere Fragestellung.

Unter welchen Bedingungen ist es möglich, $\wp(mu;\,g_2, g_3)$ als rationale Function von $\wp(u;\,g_2, g_3)$ darzustellen?

Das Multiplicationstheorem der $\wp$-Function (E. F. S. 26 und 27) zeigt, dass wenn m eine ganze reelle Zahl bedeutet, $\wp(mu)$ stets eine rationale Function von $\wp u$ ist, und zwar bei beliebigen Werthen der Invarianten g_2, g_3. Man kann zunächst leicht nachweisen, dass umgekehrt, wenn $\wp(mu)$ eine rationale Function von $\wp u$ ist, welches auch die Werthe der Invarianten g_2, g_3, oder was auf dasselbe hinauskommt, die der primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ sein mögen, dann m eine ganze reelle Zahl sein muss. Angenommen nämlich, es sei

$$\wp(mu\,|\,\omega, \omega') = R(\wp(u\,|\,\omega, \omega')), \tag{1.}$$

so bleibt die rechte Seite, also auch die linke, ungeändert, wenn u um 2ω oder $2\omega'$ vermehrt wird; es müssen also $2m\omega$ und $2m\omega'$ Perioden der $\wp$-Function sein, d. h. es muss

$$(2.)\qquad \begin{cases} m\omega = \alpha\,\omega + \beta\,\omega' \\ m\omega' = \alpha'\omega + \beta'\omega' \end{cases}$$

sein, unter $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze reelle Zahlen verstanden, deren Determinante

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' \lesseqgtr 0$$

ist. Nimmt man der Einfachheit wegen

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$$

an, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit zulässig ist, so können die Gleichungen (2.) bei sonst willkürlichen Werthen von ω, ω' nur bestehen, wenn

$$\begin{aligned} \alpha' &= \beta = 0, \\ \alpha &= \beta' = m, \end{aligned}$$

also jedenfalls wenn m eine reelle ganze Zahl ist. Dieser Fall sei als erledigt von jetzt an ausgeschlossen.

In allen anderen Fällen, wo die Gleichung (1.) gilt, kann, wie sich zeigen wird, die Zahl m überhaupt nicht reell sein. Das ist der Grund, weswegen man von complexer Multiplication spricht; m heisst der Multiplicator.

Die Gleichungen (2.), die sich als nothwendige Folge von (1.) erwiesen haben, sind auch hinreichend dafür, dass $\wp(mu)$ sich als rationale Function von $\wp u$ darstellen lasse. Denn die Function

$$\varphi(u) = \wp(mu)$$

hat die Perioden 2ω, $2\omega'$, aber auch die Perioden

$$2\Omega = \frac{2\omega}{m}, \quad 2\Omega' = \frac{2\omega'}{m},$$

und diese bilden ein primitives Periodenpaar der elliptischen Function $\varphi(u)$. Diese lässt sich rational durch die Function

$$\wp(u\,|\,\Omega, \Omega')$$

mit den primitiven Perioden 2Ω, $2\Omega'$ darstellen. Wenn weiter zwischen den primitiven Perioden zweier $\wp$-Functionen die Relationen

$$\omega = \alpha\,\Omega + \beta\,\Omega',$$
$$\omega' = \alpha'\,\Omega + \beta'\,\Omega'$$

mit ganzzahligen Coefficienten und nicht verschwindender Determinante bestehen, so ändert sich die Function $\wp(u|\Omega,\Omega')$ nicht, wenn u um 2ω oder $2\omega'$ vermehrt wird; sie ist also eine elliptische Function mit den Perioden 2ω, $2\omega'$, und daher eine rationale Function von $\wp(u|\omega,\omega')$. Diese Relationen zwischen den Perioden finden aber hier auf Grund der Gleichungen (2.) statt. Daher ist $\varphi(u)$ eine rationale Function von $\wp(u|\omega,\omega')$, womit das Bestehen der Gleichung (1.) bewiesen ist.

Aus den Gleichungen (2.) folgt durch Elimination von m, wenn man

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau$$

setzt:

$$\beta\tau^2 + (\alpha-\beta')\tau - \alpha' = 0. \tag{3.}$$

Das Periodenverhältniss einer $\wp$-Function, die eine complexe Multiplication zulässt, genügt daher einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten reelle ganze Zahlen sind. Von den beiden Wurzeln dieser Gleichung ist als Periodenverhältniss τ diejenige zu nehmen, für die $\Re\left(\frac{\tau}{i}\right)$ positiv ist.

Bei den lemniscatischen Functionen ist (S. 194 (21.))

$$\omega' = \omega i,$$

also reducirt sich die quadratische Gleichung auf

$$\tau^2 + 1 = 0,$$

und es ist

$$\tau = i.$$

Nach Bestimmung von τ aus der Gleichung (3.) ergiebt sich für m:

$$m = \alpha + \beta\tau = \beta' + \frac{\alpha'}{\tau}. \tag{4.}$$

Dass es bei den Fragen über die complexe Multiplication der $\wp$-Functionen thatsächlich nur auf das Periodenverhältniss ankommt, leuchtet ein; denn wegen

$$\wp(mu|\omega,\omega') = \lambda^2\wp(m\lambda u|\lambda\omega,\lambda\omega'),$$
$$\wp(\;u\;|\omega,\omega') = \lambda^2\wp(\;\lambda u\;|\lambda\omega,\lambda\omega')$$

lässt sich $\wp(mu|\lambda\omega, \lambda\omega')$ rational durch $\wp(u|\lambda\omega, \lambda\omega')$ ausdrücken, wenn dies für $\wp(mu|\omega, \omega')$ und $\wp(u|\omega, \omega')$ der Fall ist.

Die beiden Voraussetzungen, dass m keine reelle ganze Zahl und das Periodenverhältniss τ keine reelle Zahl sein sollen, ziehen gewisse Einschränkungen nach sich, denen die vier reellen ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ zu unterwerfen sind. In Folge der ersten Voraussetzung muss wegen (4.)

$$\beta \lesseqgtr 0 \text{ und } \alpha' \lesseqgtr 0,$$

und wegen der zweiten die Discriminante der quadratischen Gleichung (3.)

$$(\alpha-\beta')^2+4\alpha'\beta < 0$$

sein.

Die drei Zahlen $\alpha', \beta, \alpha-\beta'$, die nicht sämmtlich verschwinden dürfen, können einen grössten gemeinsamen Theiler haben. Vom Vorzeichen abgesehen habe er den Werth ϱ, und sein Zeichen werde so bestimmt, dass

$$\alpha' = -\varrho a, \tag{5.}$$

wo a eine positive Zahl sein soll, d. h. das Zeichen von ϱ ist dem von α' entgegengesetzt. Ferner sei

$$\alpha-\beta' = \varrho b, \tag{6.}$$

$$\beta = \varrho c. \tag{7.}$$

Die quadratische Gleichung (3.) geht damit über in

$$c\tau^2+b\tau+a = 0, \tag{8.}$$

und nach dem oben Bemerkten muss

$$4ac-b^2 > 0 \tag{9.}$$

sein. Daraus folgt, dass weil a positiv, auch c positiv sein muss.

Offenbar kann man,

$$\text{wenn } b \text{ gerade,} \quad 4ac-b^2 = 4n,$$

$$\text{wenn } b \text{ ungerade,} \quad 4ac-b^2 = 4n-1$$

setzen, unter n eine positive ganze Zahl verstanden. Es sei daher

$$4ac-b^2 = 4n-\varepsilon, \tag{10.}$$

worin,

$$(11.)\qquad \begin{cases} \text{wenn } b \text{ gerade,} & \varepsilon = 0, \\ \text{wenn } b \text{ ungerade,} & \varepsilon = 1 \end{cases}$$

zu nehmen ist.

Die Auflösung der quadratischen Gleichung (8.) giebt das Periodenverhältniss

$$(12.)\qquad \tau = \frac{-b+i\sqrt{4n-\varepsilon}}{2c},$$

wobei der Quadratwurzel wegen $\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0$ das positive Zeichen zu ertheilen ist. Aus (10.) folgt

$$(13.)\qquad ac = n + \frac{b^2-\varepsilon}{4}.$$

Betrachtet man n als gegebene positive ganze Zahl, b als beliebige ganze Zahl, so ist durch letztere nach (11.) ε mitbestimmt, daher auch die rechte Seite der vorstehenden Formel; a und c sind alsdann irgend zwei conjugirte Factoren der Zahl $n+\frac{b^2-\varepsilon}{4}$. Es giebt also zu jedem gegebenen Werthe von n unzählige Werthe des Periodenverhältnisses τ. Jedem Werth von τ entspricht ein Werth der absoluten Invariante

$$\frac{g_2^3}{g_3^2},$$

denn ihr Werth hängt eindeutig von dem Verhältniss der Perioden ab. Das folgt unmittelbar aus den Formeln E. F. S. 121 (26.),

$$g_2 = 60 \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}{}' \frac{1}{(2\mathfrak{m}\omega+2\mathfrak{m}'\omega')^4},$$

$$g_3 = 140 \sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}{}' \frac{1}{(2\mathfrak{m}\omega+2\mathfrak{m}'\omega')^6},$$

in denen die Summation über alle Paare $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ ganzer Zahlen mit Ausnahme des Paares $\mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{m}' = 0$, zu erstrecken ist. Was aber bewiesen werden soll, ist, dass zu einem beliebig gegebenen Werthe von n nicht unzählig viele, sondern nur eine endliche Anzahl von Werthen der absoluten Invariante gehören. Zuvor mögen noch einige Eigenschaften des Multiplicators hergeleitet werden.

Aus (4.) und (12.) folgt mit Benutzung von (7.)

$$(14.)\qquad m = \alpha + \frac{1}{2}\varrho(-b+i\sqrt{4n-\varepsilon}).$$

Man kann diese Gleichung auch auf die Form

$$m = \alpha - \frac{b-\varepsilon}{2}\varrho + \varrho\mu \tag{15.}$$

bringen, wo

$$\mu = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{4n-\varepsilon}}{2} \tag{16.}$$

ist, d. h. nach der Bedeutung von ε gemäss den Formeln (11.),

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{wenn } b \text{ gerade,} & \mu = i\sqrt{n}, \\ \text{wenn } b \text{ ungerade,} & \mu = \dfrac{-1+i\sqrt{4n-1}}{2}. \end{array}\right. \tag{17.}$$

Setzt man noch

$$\alpha - \frac{b-\varepsilon}{2}\varrho = \varrho', \tag{18.}$$

so ist nach (15.)

$$m = \varrho' + \varrho\mu. \tag{19.}$$

Wenn die complexe Zahl μ entsprechend den Bedingungen (17.), sonst aber willkürlich angenommen wird, so ist dadurch auch n (>0) und ε (gleich 0 oder gleich 1) gegeben. Nach weiterer willkürlicher Annahme der ganzen Zahl b, die nur gerade oder ungerade sein muss, jenachdem ε den Werth Null oder Eins hat, ist nach (13.) auch das Product ac bestimmt und damit auch mindestens ein Paar von Zahlen a (>0) und c. Wird ferner ϱ beliebig gewählt, so ist dadurch nach (5.) und (7.) auch α' und β festgelegt; wird endlich noch ϱ' beliebig angenommen, so ist nach (18.) die Grösse α und alsdann nach (6.) die Grösse β' bestimmt. Die Determinante $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ wird dabei niemals gleich Null; denn aus

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\varrho a, \\ \beta &= \varrho c, \\ \alpha &= \varrho' + \frac{b-\varepsilon}{2}\varrho, \\ \beta' &= \varrho' - \frac{b+\varepsilon}{2}\varrho \end{aligned}$$

folgt in Verbindung mit (10.)

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = \varrho'^2 - \varepsilon\varrho\varrho' + n\varrho^2.$$

Man kann diese Gleichung auf die Form

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = \left(\varrho' - \frac{1}{2}\varepsilon\varrho\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 (4n - \varepsilon) \tag{20.}$$

bringen und erkennt, dass der Werth der rechten Seite stets positiv und nicht Null ist.

Hieraus folgt, dass durch die Formel (19.),

$$m = \varrho' + \varrho\mu,$$

der allgemeinste Ausdruck für den Multiplicator m dargestellt wird, wenn ϱ und ϱ' zwei beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten, von denen ϱ von Null verschieden ist.

Aber die Grösse μ selbst ist ein Multiplicator. Denn sie geht aus m hervor, wenn man $\varrho' = 0$, $\varrho = 1$ annimmt. Die obige Rechnung gestaltet sich hier folgendermassen. Es wird

$$\begin{aligned} \alpha' &= -a, \\ \beta &= c, \\ \alpha &= \frac{b - \varepsilon}{2}, \\ \beta' &= -\frac{b + \varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

und die Formeln (2.) gehen über in

$$\begin{aligned} \mu\omega &= \frac{b - \varepsilon}{2}\omega + c\omega', \\ \mu\omega' &= -a\omega - \frac{b + \varepsilon}{2}\omega'. \end{aligned}$$

Die Elimination von μ liefert, wie es sein muss, die ursprüngliche Gleichung für das Periodenverhältniss:

$$a\omega^2 + b\omega\omega' + c\omega'^2 = 0.$$

Sie hat nur eine Wurzel $\frac{\omega'}{\omega}$, deren imaginärer Bestandtheil positiv ist. Für die zugehörigen $\wp$-Functionen besteht alsdann die Gleichung

$$\wp(\mu u \mid \omega, \omega') = R(\wp(u \mid \omega, \omega')),$$

wo R eine rationale Function ihres Arguments ist.

Der Multiplicator μ ist übrigens vor allen anderen durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass der Grad dieser rationalen Function, d. h. der Exponent der höchsten Potenz von $\wp u$, die in ihr auftritt, am niedrigsten ist. Aus den im einunddreissigsten und zweiunddreissigsten Kapitel der Elliptischen Functionen bewiesenen allgemeinen Sätzen der Transformationstheorie (vgl. insbesondere E. F. S. 292) lässt sich nämlich durch eine leichte Betrachtung folgern, dass dieser Grad mit der Substitutionsdeterminante der Perioden, d. h. mit

$$\alpha\beta' - \beta\alpha',$$

übereinstimmt. Dann aber zeigt die Formel (20.) unmittelbar, dass die Determinante ihren kleinsten Werth, nämlich n, erhält, wenn

$$\varrho' = 0, \quad \varrho = 1$$

genommen wird, da $\varrho = 0$ ausgeschlossen war, d. h. wenn der Multiplicator den Werth μ hat.

Dass wenn umgekehrt μ ein Multiplicator der complexen Multiplication ist, dies auch für die Grösse

$$m = \varrho' + \varrho\mu$$

gilt, wo ϱ ($\lesseqgtr 0$) und ϱ' zwei beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten, leuchtet folgendermassen ein. Nach dem Additionstheorem ist zunächst

$$\wp(mu) = R_1(\wp(\varrho' u), \wp(\varrho\mu u), \wp'(\varrho' u), \wp'(\varrho\mu u)),$$

nach dem Multiplicationstheorem

$$\begin{aligned} \wp(\varrho' u) &= R_2(\wp u), \\ \wp(\varrho\mu u) &= R_3(\wp(\mu u)), \end{aligned}$$

und nach der gemachten Voraussetzung

$$\wp(\mu u) = R\,(\wp u),$$

also auch

$$\wp(\varrho\mu u) = R_4(\wp u).$$

Auf der rechten Seite von $\wp(mu)$ kommen aber die Ableitungen $\wp'(\varrho' u)$ und $\wp'(\varrho\mu u)$ nur mit einander multiplicirt vor. Weil nun allgemein aus

$$\wp(\lambda u) = R_5(\wp u)$$

folgt, dass

$$\wp'(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}\wp' u . R_5'(\wp u),$$

so ist das Product zweier solcher Ableitungen ebenfalls eine rationale Function von $\wp u$. Alles zusammen ergiebt also, dass $\wp(mu)$ rational von $\wp u$ abhängt, d. h. es ist m wirklich ein Multiplicator.

Der soeben erwähnte Zusammenhang zwischen der complexen Multiplication und der Transformation der elliptischen Functionen tritt noch deutlicher durch folgende Betrachtungen hervor. Zwei $\wp$-Functionen desselben Arguments u heissen durch eine primitive Transformation mit einander verbunden, wenn zwischen einem Paare primitiver Perioden $(2\omega, 2\omega')$ der einen Function und einem ebensolchen Paare $(2\Omega, 2\Omega')$ der anderen lineare Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha\,\Omega + \beta\,\Omega', \\ \omega' &= \alpha'\Omega + \beta'\Omega' \end{aligned}$$

bestehen, in denen die Coefficienten $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ reelle ganze und theilerfremde Zahlen sind. In diesem Falle kann man stets Periodenpaare der Art finden, dass

$$\begin{aligned} \omega &= n\Omega, \\ \omega' &= \Omega' \end{aligned}$$

ist (vgl. E. F. S. 281 u. f.).

Versteht man nun unter $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ die durch die Gleichungen S. 226 definirten Grössen, so können sie keinen Theiler gemeinsam haben, denn sonst müsste dies auch für

$$-\alpha' = a, \quad \alpha - \beta' = b, \quad \beta = c$$

der Fall sein, entgegen der über a, b, c getroffenen Festsetzung (S. 223 (5.), (6.), (7.)). Den genannten Werthen von $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entspricht der Multiplicator μ. Die Function

$$\mu^2\wp(\mu u;\, g_2, g_3) = \wp(u;\, \mu^4 g_2, \mu^6 g_3)$$

entsteht also aus $\wp(u; g_2, g_3)$ durch eine primitive Transformation. Diese Transformation ist vom Grade

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = n$$

(S. 227), d. h. $\wp(\mu u)$ ist eine rationale Function n^{ten} Grades von $\wp u$. Die complexe Multiplication ist also nur eine besondere Art der Transformation.

Es mögen noch zwei besonders einfache Fälle erwähnt werden.

Es sei erstens

$$\mu = i,$$

also nach (17.)

$$n = 1, \quad \varepsilon = 0.$$

Es ist mithin b als gerade anzunehmen. Der einfachste Werth ist

$$b = 0,$$

woraus nach (13.)

$$ac = 1$$

folgt, demnach, da a positiv ist,

$$a = 1, \quad c = 1$$

und nach (12.)

$$\tau = i.$$

Man kommt also hier auf den Fall der lemniscatischen Functionen (S. 222).

Es sei zweitens

$$\mu = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

also μ gleich einer primitiven dritten Einheitswurzel. Hier ist

$$n = 1, \quad \varepsilon = 1,$$

mithin b ungerade zu nehmen. Der einfachste Werth ist

$$b = 1,$$

woraus

$$ac = 1,$$

also

$$a = 1, \quad c = 1$$

und weiter

$$\tau = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

folgt.

Die beiden betrachteten Fälle sind, wie die Formeln (17.) lehren, diejenigen, die sich für

$$n = 1$$

ergeben. Der Grad der rationalen Function von $\wp u$, durch die $\wp(\mu u)$ dargestellt wird, ist also gleich Eins. In Folge davon lassen sich die $\wp$-Functionen, die eine der beiden angeführten complexen Multiplicationen zulassen, sehr einfach bestimmen, denn es muss

$$\wp(\mu u) = C \wp u$$

sein, wo C eine Constante bedeutet. Ein von u unabhängiges Glied kann nicht vorkommen, weil $\wp(\mu u)$ ein solches nicht enthält. Zur Bestimmung von C benutzt man die Formel

$$\wp(\mu u; g_2, g_3) = \frac{1}{\mu^2} \wp(u; \mu^4 g_2, \mu^6 g_3),$$

wonach

$$\wp(u; \mu^4 g_2, \mu^6 g_3) = C\mu^2 \wp(u; g_2, g_3)$$

sein muss. Die Entwickelung nach Potenzen von u und Coefficientenvergleichung liefert

$$\begin{aligned} 1 &= C\mu^2, \\ \mu^4 g_2 &= C\mu^2 g_2, \\ \mu^6 g_3 &= C\mu^2 g_3. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\mu^2}, \\ \mu^4 g_2 &= g_2, \\ \mu^6 g_3 &= g_3, \end{aligned}$$

also entweder

$$\mu^4 = 1$$

oder

$$g_2 = 0,$$

und

$$\mu^6 = 1$$

oder

$$g_3 = 0.$$

Im ersten der vorher betrachteten Fälle ist μ^4 gleich Eins, und μ^6 nicht gleich Eins, also

$$g_3 = 0,$$

und man erhält die lemniscatischen Functionen, $\wp(u; g_2, 0)$, mit dem Multiplicationstheorem

$$\wp(iu;\, g_2, 0) = -\wp(u;\, g_2, 0)$$

wieder.

Im zweiten Falle ist μ^4 nicht gleich Eins, aber μ^6 gleich Eins, mithin

$$g_2 = 0;$$

man wird hier also auf die Functionen $\wp(u;\, 0, g_3)$ geführt, die das Multiplicationstheorem

$$\wp\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}u;\, 0, g_3\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\wp(u;\, 0, g_3)$$

besitzen.

Dieselbe Rolle wie im ersten der eben betrachteten Fälle die Lemniscate, deren Gleichung in Polarcoordinaten

$$r^2 = \cos 2\varphi$$

lautet, spielt im zweiten Falle die Curve mit der Gleichung

$$r^3 = \cos 3\varphi,$$

wie von Kiepert gefunden worden ist. Sie besteht aus drei Blättern, deren Symmetrieaxen Winkel von 120° mit einander bilden. Bezeichnet man wieder mit u den Parameter der Bogenlänge, so erhält man für diese Curve

$$u = \int\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr = \int\frac{dr}{\sqrt{1-r^6}},$$

und wenn man

$$\frac{1}{r^2} = s$$

setzt,

$$u = -\int\frac{ds}{\sqrt{4s^3-4}}.$$

Die zugehörige elliptische Function ist demnach

$$s = \wp(u;\, 0, 4).$$

Sie hat also die Invariante

$$g_2 = 0.$$

Die complexe Multiplication, deren Multiplicator gleich einer dritten Einheitswurzel ist, leistet für die Bogentheilung der genannten Curve dasselbe wie die complexe Multiplication mit dem Multiplicator i bei der Lemniscate.

Wir wenden uns nun der bereits S. 224 berührten Frage zu, wieviele verschiedene Werthe der absoluten Invariante

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = \gamma$$

zu einem gegebenen Werthe der ganzen positiven Zahl n (S. 223), oder was auf dasselbe hinauskommt, zu einem gegebenen Werthe des Multiplicators μ gehören.

Der Werth der absoluten Invariante

$$(21.)\qquad \gamma = \frac{\left(60 \sum\limits_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}{}'(2\mathfrak{m}\omega + 2\mathfrak{m}'\omega')^{-4}\right)^3}{\left(140 \sum\limits_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}{}'(2\mathfrak{m}\omega + 2\mathfrak{m}'\omega')^{-6}\right)^2} \qquad \left(\begin{array}{c}\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ \text{ausgenommen} \\ \mathfrak{m} = \mathfrak{m}' = 0\end{array}\right)$$

bleibt dann und nur dann ungeändert, wenn das primitive Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ durch irgend ein anderes primitives Periodenpaar $(2\omega_1, 2\omega_1')$ ersetzt wird. Zwischen den Halbperioden bestehen alsdann lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten,

$$(22.)\qquad \left\{\begin{array}{l}\omega_1 = \lambda\omega + \lambda'\omega' \\ \omega_1' = \nu\omega + \nu'\omega',\end{array}\right.$$

deren Determinante $\lambda\nu' - \lambda'\nu$ den Werth ± 1 hat. Soll sowohl $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ wie auch $\Re\left(\frac{\omega_1'}{\omega_1 i}\right)$ positiv sein, wie für das Folgende angenommen werden möge, so ist

$$(23.)\qquad \lambda\nu' - \lambda'\nu = 1.$$

Da die absolute Invariante allein von dem Periodenverhältniss

$$(24.)\qquad \frac{\omega'}{\omega} = \tau$$

abhängig ist, so bedeutet dies, dass sie ihren Werth nicht ändert, wenn τ durch

$$(25.)\qquad \tau_1 = \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\nu + \nu'\tau}{\lambda + \lambda'\tau}$$

ersetzt wird. Macht man nun von den abgeleiteten Ergebnissen Gebrauch und bestimmt aus dem gegebenen Werthe von μ drei ganze reelle Zahlen a, b, c so, dass a, c und $4ac - b^2$ positiv sind (S. 225), so erhält nach (12.)

das Periodenverhältniss τ den Werth

$$(26.)\qquad \tau = \frac{-b + i\sqrt{4n-\varepsilon}}{2c},$$

und damit wird

$$\tau_1 = \frac{2c\nu - b\nu' + i\nu'\sqrt{4n-\varepsilon}}{2c\lambda - b\lambda' + i\lambda'\sqrt{4n-\varepsilon}}$$

oder wegen (10.) mit Rücksicht auf (23.)

$$(27.)\qquad \tau_1 = \frac{2c\lambda\nu - b(\lambda\nu' + \nu\lambda') + 2a\lambda'\nu' + i\sqrt{4n-\varepsilon}}{2(c\lambda^2 - b\lambda\lambda' + a\lambda'^2)}.$$

Setzt man also

$$(28.)\qquad \begin{cases} a\nu'^2 - b\nu\nu' + c\nu^2 & = \quad A \\ 2a\lambda'\nu' - b(\lambda\nu' + \nu\lambda') + 2c\lambda\nu & = -B \\ a\lambda'^2 - b\lambda\lambda' + c\lambda^2 & = \quad C, \end{cases}$$

so wird

$$(29.)\qquad 4AC - B^2 = (\lambda\nu' - \lambda'\nu)^2(4ac - b^2) = 4ac - b^2 = 4n - \varepsilon,$$

also

$$(30.)\qquad \tau_1 = \frac{-B + i\sqrt{4n-\varepsilon}}{2C},$$

d. h., durch die Zahlen A, B, C ausgedrückt, erhält τ_1 dieselbe Form, wie τ, durch a, b, c dargestellt.

Führt man in (21.) den Werth (26.) von τ ein, so wird die absolute Invariante eine Function der drei ganzen Zahlen a, b, c:

$$(31.)\qquad \gamma = (a, b, c).$$

Diese drei ganzen Zahlen waren (S. 223) folgenden Bedingungen zu unterwerfen: a, b, c mussten theilerfremd, a, c und $4ac - b^2$ überdies positiv sein.

An die Stelle der drei Zahlen a, b, c mögen dadurch, dass in die absolute Invariante andere primitive Perioden eingeführt werden, die drei Zahlen a_1, b_1, c_1 treten, sodass

$$(32.)\qquad (a_1, b_1, c_1) = (a, b, c);$$

a_1, b_1, c_1 haben denselben Bedingungen zu gehorchen, wie a, b, c. Da das Periodenverhältniss τ_1 in derselben Weise aus a_1, b_1, c_1 gebildet sein muss, wie τ aus a, b, c, so folgt

$$\tau_1 = \frac{-b_1 + i\sqrt{4a_1c_1 - b_1^2}}{2c_1}. \tag{33.}$$

Aus der Vergleichung mit (30.) ergiebt sich aber

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{B}{C}, \quad \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{C} = \frac{\sqrt{4a_1c_1 - b_1^2}}{c_1},$$

d. h.

$$A = \varkappa a_1, \quad B = \varkappa b_1, \quad C = \varkappa c_1,$$

wo $\varkappa$ ein Proportionalitätsfactor ist. Soll nun (a_1, b_1, c_1) zu demselben Multiplicator, also auch zu denselben Zahlen n, ε gehören, so muss

$$\sqrt{4a_1c_1 - b_1^2} = \sqrt{4n - \varepsilon},$$

d. h.

$$\sqrt{4a_1c_1 - b_1^2} = \sqrt{4AC - B^2}$$

sein, wobei den Wurzeln ihre positiven Werthe zu ertheilen sind. Es muss also

$$\varkappa = 1,$$

sein, d. h. es ist

$$a_1 = A, \quad b_1 = B, \quad c_1 = C.$$

Damit ist bewiesen: Wenn die absolute Invariante (a, b, c), wo $a, c, 4ac - b^2$ positive Zahlen sind, durch Einführung eines neuen Periodenverhältnisses τ_1, das mit dem ursprünglichen durch die Relation (25.) verbunden ist, in (A, B, C), wo $A, B, 4AC - B^2$ wieder positive Zahlen sind, übergeht, so ergeben sich die drei Zahlen A, B, C aus den Gleichungen (28.), und es ist

$$4ac - b^2 = 4AC - B^2.$$

Wenn umgekehrt aus den drei ganzen Zahlen a, b, c, die den Bedingungen $a > 0, b > 0, 4ac - b^2 > 0$ unterworfen sind, mittels vierer unbestimmter ganzer Zahlen $\lambda, \lambda', \nu, \nu'$ die drei ebenfalls ganzen Zahlen A, B, C gemäss den Formeln (28.) so gebildet werden, dass

$$\sqrt{4AC - B^2} = \sqrt{4ac - b^2},$$

so ist auch

$$(a, b, c) = (A, B, C).$$

Denn aus (29.) folgt alsdann

$$\lambda\nu' - \nu\lambda' = \pm 1,$$

es lässt sich also zwischen einem primitiven Periodenpaar $(2\omega, 2\omega')$ von (a, b, c) und einem primitiven Periodenpaar $(2\omega_1, 2\omega_1')$ von (A, B, C) eine Relation von der Form (22.) herstellen, durch die (a, b, c) in (A, B, C) übergeführt wird.

Die Formeln (28.) sind dieselben, wie sie auftreten, wenn die quadratische Form

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

in die quadratische Form

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2$$

mittels der Substitution

$$x = \lambda x_1 + \lambda' y_1,$$
$$y = \nu x_1 + \nu' y_1$$

übergeführt wird; und die Gleichung

$$\lambda\nu' - \nu\lambda' = 1$$

zeigt an, dass die beiden Formen äquivalent sind. Ihre gemeinsame Determinante hat den Werth $4n - \varepsilon$. Zu äquivalenten Formen derselben Determinante gehört somit eine und dieselbe absolute Invariante; dagegen gehören zu nicht äquivalenten Formen verschiedene absolute Invarianten.

Wenn der Multiplicator μ der complexen Multiplication gegeben ist, so sind damit, wie auf S. 225 bemerkt, auch die Zahlen n und ε, demnach auch die Determinante der quadratischen Form $ax^2 + bxy + cy^2$,

$$4ac - b^2 = 4n - \varepsilon,$$

bestimmt. Da zu jeder gegebenen Determinante nur eine endliche Anzahl quadratischer Formen gehört, von denen keine der anderen äquivalent ist, so gehört dazu auch eine endliche Anzahl absoluter Invarianten. Demnach ist auch jedem Multiplicator μ nur eine endliche Anzahl absoluter Invarianten zugeordnet, also auch nur eine endliche Anzahl von $\wp$-Functionen, deren Perioden sich nicht um einen constanten Factor unterscheiden. Diese Anzahl ist gleich der Klassenzahl der nicht äquivalenten quadratischen Formen gegebener Determinante.

Dieser merkwürdige Satz rührt von Kronecker her und hat sich für den Ausbau der Zahlentheorie sehr fruchtbar gezeigt. Es ist Kronecker gelungen, damit eine Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Formen auszuführen, für die die Determinante b^2-4ac negativ ist.

Es entsteht die Frage, wie der Werth der absoluten Invariante bestimmt werden kann, die zu einer gegebenen quadratischen Form $ax^2+bxy+cy^2$ und den dazu äquivalenten gehört. Die Bestimmung ist ziemlich schwierig und erfordert ein weiteres Eindringen in die Zahlentheorie. Es mag hier genügen, darauf hinzuweisen, dass die absolute Invariante stets eine algebraische Zahl ist, d. h. Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Es ist sehr merkwürdig, dass eine durch den Quotienten zweier convergenter unendlicher Reihen gegebene Grösse sich als eine algebraische Zahl herausstellt. Abel hat angegeben und Kronecker zuerst bewiesen, dass diese algebraische Gleichung immer algebraisch auflösbar ist.

Man kann übrigens stets eine gegebene $\wp$-Function mit den beiden von Null verschiedenen Invarianten g_2, g_3 in eine solche verwandeln, deren Invarianten den gemeinsamen Werth γ haben. Denn aus der Gleichung

$$\wp(mu;\, g_2, g_3) = \frac{1}{m^2}\wp(u;\, m^4 g_2, m^6 g_3)$$

folgt, wenn man

$$m^4 g_2 = m^6 g_3 = \gamma,$$

also

$$m = \sqrt{\frac{g_2}{g_3}}$$

setzt,

$$\wp\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_3}}\,u;\, g_2, g_3\right) = \frac{g_3}{g_2}\wp(u;\, \gamma, \gamma)$$

oder

$$\wp(u;\, g_2, g_3) = \frac{g_3}{g_2}\wp\left(\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\,u;\, \gamma, \gamma\right). \tag{34.}$$

Dabei ist

$$\gamma = \frac{g_2^3}{g_3^2},$$

d. h. γ ist gleich der absoluten Invariante.

Wenn die $\wp$-Function mit den gleichen Invarianten γ, γ die complexe Multiplication mit dem Multiplicator μ zulässt, so gilt dies auch für die

$\wp$-Function mit den verschiedenen Invarianten g_2, g_3. Denn weil $\wp(u; \gamma, \gamma)$ die complexe Multiplication zulässt, so ist

$$\wp(\mu u; \gamma, \gamma) = R(\wp(u; \gamma, \gamma)),$$

wo R eine rationale Function bedeutet, mithin auch

$$\wp\left(\mu\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}u; \gamma, \gamma\right) = R\left(\wp\left(\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}u; \gamma, \gamma\right)\right)$$

oder

$$\frac{g_3}{g_2}\wp\left(\mu\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}u; \gamma, \gamma\right) = R\left(\frac{g_3}{g_2}\wp\left(\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}u; \gamma, \gamma\right)\right),$$

also der Gleichung (34.) zufolge

$$\wp(\mu u; g_2, g_3) = R(\wp(u; g_2, g_3)).$$

Umgekehrt, lässt $\wp(u; g_2, g_3)$ eine complexe Multiplication mit dem Multiplicator μ zu, so gilt dies auch von $\wp(u; \gamma, \gamma)$. Denn es ist

$$\wp(\mu u; g_2, g_3) = R(\wp(u; g_2, g_3)),$$

also auch

$$\frac{g_2}{g_3}\wp\left(\mu\sqrt{\frac{g_2}{g_3}}u; g_2, g_3\right) = R\left(\frac{g_2}{g_3}\wp\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_3}}u; g_2, g_3\right)\right)$$

und

$$\wp(\mu u; \gamma, \gamma) = R(\wp(u; \gamma, \gamma)).$$

Man kann demnach die vorherigen Betrachtungen ohne weiteres auf die specielle Function $\wp(u; \gamma, \gamma)$ übertragen, d. h. in den erhaltenen Formeln einfach

$$g_2 = g_3 = \gamma$$

setzen.

Siebenter Abschnitt.

DAS SPHÄRISCHE UND DAS EBENE PENDEL.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Bestimmung der Coordinaten des sphärischen Pendels.

Unter einem sphärischen Pendel wird eine mechanische Vorrichtung verstanden, bei der ein Punkt von gegebener Masse einer constanten Kraft, der Schwerkraft, unterworfen und zugleich gezwungen ist, sich beständig auf der Oberfläche einer festen Kugel zu bewegen. Man kann sich den beweglichen Punkt mit dem festen Mittelpunkte der Kugel durch einen starren masselosen unausdehnbaren Stab verbunden denken.

Die Masse des beweglichen Punktes P werde gleich Eins angenommen, die Schwerkraft ertheile ihm die Beschleunigung $2g$, und die Kugel habe den Radius l. Der Mittelpunkt O der Kugel werde zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems genommen, dessen positive z-Axe in die Richtung der Schwerkraft fallen möge. Bedeuten x, y, z die Coordinaten des Punktes P zur Zeit t, ferner ϱ die Grösse der auf den Stab wirkenden Spannkraft, auf deren Ermittelung es übrigens nicht ankommt, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\varrho\dfrac{x}{l} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\varrho\dfrac{y}{l} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\varrho\dfrac{z}{l} + 2g, \end{cases}$$

und es besteht ausserdem die Bedingung

$$x^2+y^2+z^2 = l^2. \tag{2.}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Coordinaten x, y, z als Functionen der Variablen t zu bestimmen. Zunächst folgt sogleich

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

und daraus durch Integration

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt} = k, \tag{3.}$$

wo k eine von der Zeit unabhängige Constante bedeutet. Diese Gleichung besagt, dass die Projection des Pendels auf die xy-Ebene in einer Zeit T eine Fläche überstreicht, deren Inhalt proportional zu T ist. Ist die Constante k gleich Null, so schwingt das Pendel in einer verticalen Ebene. Es sei k jedoch zunächst als von Null verschieden vorausgesetzt.

Aus der Gleichung (2.) folgt durch Differentiation

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt} = 0, \tag{4.}$$

infolgedessen aus (1.)

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 2g\frac{dz}{dt}$$

und daraus weiter durch Integration

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4gz+h, \tag{5.}$$

wo auch h eine von der Zeit unabhängige Constante bedeutet. In dieser Gleichung ist der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft enthalten. Bezeichnet man nämlich mit v die Grösse der Geschwindigkeit des Punktes P zur Zeit t, mit v_0 diejenige, die der Punkt besitzt, wenn z den Werth z_0 hat, so erhält man aus (5.)

$$v^2-v_0^2 = 4g(z-z_0).$$

Für das Folgende werde von der Identität

$$(x^2+y^2)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = \left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Gebrauch gemacht. Man leitet daraus unter Benutzung der Gleichungen (1.) bis (4.) ohne Schwierigkeit die Formel

$$(l^2-z^2)\left(4gz+h-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+k^2$$

oder

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)(4gz+h)-\frac{k^2}{l^2} \tag{6.}$$

her. Aus ihr geht hervor, dass z eine elliptische Function von t ist und zwar vom zweiten Grade.

Um auch x und y als Functionen der Zeit t zu bestimmen, empfiehlt es sich, die Grösse $x+iy$ als abhängige Variable in die Rechnung einzuführen. Es wird sich zeigen, dass auch diese Grösse in einfacher Weise durch elliptische Functionen dargestellt werden kann. Und damit ist dann die Bewegung des Pendels vollständig beschrieben.

Zuvor soll jedoch die Integration der Differentialgleichung (6.) durchgeführt werden. Ist $z = \varphi(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, so gilt dies auch für die Function $\varphi(t+\tau)$, wo τ eine Constante bedeutet. Da man nun τ immer so wählen kann, dass $\varphi(t+\tau)$ für $t = 0$ einen gegebenen Werth und die Ableitung ein gegebenes Vorzeichen erhält, so ist $\varphi(t+\tau)$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung (6.).

Für irgend einen Zeitpunkt t_0 seien die Anfangsbedingungen gegeben, d. h. die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P und die Geschwindigkeitskomponenten $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$. Durch diese Angaben sind die Constanten k und h vollständig bestimmt. Die auf der rechten Seite der Differentialgleichung (6.) stehende ganze Function dritten Grades,

$$R(z) = \left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)(4gz+h)-\frac{k^2}{l^2},$$

muss für $t = t_0$, d. h. für $z = z_0$ einen positiven Werth haben, weil die linke Seite das Quadrat einer reellen Grösse, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$, ist, und aus der Gleichung (5.) folgt dieselbe Eigenschaft für

$$4gl+h,$$

die Grösse der Geschwindigkeit des Pendels in seiner tiefsten Lage. Dies vorausgeschickt, kann man nun weiter schliessen, dass die Gleichung

$$R(z) = 0$$

drei reelle Wurzeln besitzen muss, die sämmtlich unterhalb der Grösse l gelegen sind. Der Ausdruck

$$l^2 R(l+h') = -h'(2l+h')(4gl+4gh'+h)-k^2$$

kann nämlich nach dem eben Bemerkten weder für $h'=0$ noch für einen positiven Werth von h' verschwinden. Also kann keine reelle Wurzel der Gleichung $R(z)=0$ die Grösse l erreichen. Da z_0, der Bedeutung dieser Grösse gemäss, zwischen $-l$ und $+l$ gelegen ist, und $R(z)$ für $z=z_0$ positiv, für $z=\pm l$ aber gleich

$$R(+l) = R(-l) = -\frac{k^2}{l^2},$$

also negativ wird, so liegt eine reelle Wurzel zwischen $-l$ und z_0, und eine zweite zwischen z_0 und $+l$. Dann aber sind alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung $R(z)=0$ reell; die dritte ist zwischen $-l$ und $-\infty$ gelegen, weil $R(z)$ für $z=-\infty$ wieder positiv wird.

Man bezeichne die drei Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ in solcher Reihenfolge mit α, β, γ, dass

$$-\infty < \gamma \leqq -l \leqq \beta \leqq z_0 \leqq \alpha < +l,$$

und setze

$$R(z) = -\frac{4g}{l^2}(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma). \tag{7.}$$

Da $\frac{dz}{dt}$ eine reelle Grösse bedeuten soll, so muss für alle möglichen Lagen des Punktes P die Coordinate z zwischen α und β gelegen sein. Die drei Wurzeln α, β, γ mögen als von einander verschieden angenommen werden.

Nun werde unter z_1 dasjenige Integral der Differentialgleichung (6.) verstanden, das für $t=0$ den Werth β annimmt. Setzt man (E. F. S. 15 (IV.))

$$\frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{z_1-\beta}+\frac{1}{24}R''(\beta) = s,$$

wobei

$$R'(\beta) = \frac{4g}{l^2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$$

eine positive Grösse ist, so geht die Differentialgleichung in diejenige über, der die Function

$$s = \wp(t)$$

genügt. Die Werthe e_1, e_2, e_3 von s, für die $\frac{ds}{dt}$ verschwindet, und die den Bedingungen

$$e_1 > e_2 > e_3$$

gemäss bezeichnet seien, ergeben sich aus den Formeln

$$(8.)\quad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{24}R''(\beta) + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{\alpha-\beta} = \frac{1}{24}R''(\beta) + \frac{g}{l^2}(\beta-\gamma) = e_2 + \frac{g}{l^2}(\beta-\gamma) \\ e_2 = \frac{1}{24}R''(\beta) \\ e_3 = \frac{1}{24}R''(\beta) + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{\gamma-\beta} = \frac{1}{24}R''(\beta) + \frac{g}{l^2}(\beta-\alpha) = e_2 + \frac{g}{l^2}(\beta-\alpha). \end{cases}$$

Ferner ist

$$(9.)\quad \begin{cases} s-e_1 = \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{z_1-\beta} - \frac{g}{l^2}(\beta-\gamma) = \frac{g}{l^2}(\beta-\gamma)\frac{\alpha-z_1}{z_1-\beta} \\ s-e_2 = \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{z_1-\beta} = \frac{g}{l^2}\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{z_1-\beta} \\ s-e_3 = \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{z_1-\beta} - \frac{g}{l^2}(\beta-\alpha) = \frac{g}{l^2}(\alpha-\beta)\frac{z_1-\gamma}{z_1-\beta}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln lassen sich nun umgekehrt die Grössen $z_1-\alpha$, $z_1-\beta$, $z_1-\gamma$ als elliptische Functionen von t ausdrücken. Setzt man $t+\tau$ statt t, unter τ wiederum eine willkürliche Constante verstehend, so erhält man die entsprechenden Formeln für $z-\alpha$, $z-\beta$, $z-\gamma$, wo jetzt z die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6.) bedeutet:

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{\alpha-z}{\alpha-\beta} = \frac{\wp(t+\tau)-e_1}{\wp(t+\tau)-e_2} \\ \frac{z-\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{\wp(t+\tau)-e_3}{\wp(t+\tau)-e_2} \\ z-\beta = \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{\wp(t+\tau)-e_2}. \end{cases}$$

Will man die Constante τ den gegebenen Anfangsbedingungen gemäss bestimmen, so kann man die dritte dieser Gleichungen zunächst in der Form

$$\wp(t+\tau) = e_2 + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{z-\beta}$$

schreiben und hat sodann τ nach den Bedingungen

$$\wp(t_0+\tau) = e_2 + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{z_0-\beta},$$

$$\wp'(t_0+\tau) = -\frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{(z_0-\beta)^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$$

zu ermitteln. Wegen

$$\beta \leqq z_0 \leqq \alpha$$

ergiebt sich aus der ersten Formel (9.), nachdem man darin t durch $t+\tau$ und z_1 durch z ersetzt hat, für $t = t_0$

$$\wp(t_0+\tau) > e_1.$$

Da ferner $\wp'(t_0+\tau)$ eine reelle negative Grösse ist, so zeigt die Tabelle S. 21 dass der Werth von $t_0+\tau$ zwischen 0 und ω_1 gelegen ist. Nach diesen Festsetzungen ist die Coordinate z des Punktes P durch irgend eine der Gleichungen (10.) vollständig bestimmt.

Um nun auch die beiden anderen Coordinaten, x und y, als Functionen von t zu bestimmen, soll, wie schon oben bemerkt, die Grösse $x+iy$ eingeführt werden. Es besteht die Identität

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}}{x+iy} = \frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+i\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)}{x^2+y^2},$$

aus der mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) bis (4.)

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = \frac{-z\frac{dz}{dt}+ik}{l^2-z^2} \tag{11.}$$

folgt. Man kann diese Formel in die Gestalt

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = \frac{-z\frac{dz}{dt}+ik}{2l(l-z)} + \frac{-z\frac{dz}{dt}+ik}{2l(l+z)}$$

bringen. Die rechte Seite ist wieder eine elliptische Function von t. Zur Integration dieser Differentialgleichung verfährt man am einfachsten so, dass man die Stellen aufsucht, an denen die rechte Seite unendlich gross wird.

Das tritt dann und nur dann ein, wenn

$$(12.)\quad \begin{cases} z = \infty \\ z = +l \text{ und } \left(\frac{dz}{dt}\right)_{z=+l} = -\frac{ik}{l}, \\ z = -l \text{ und } \left(\frac{dz}{dt}\right)_{z=-l} = +\frac{ik}{l} \end{cases}$$

ist; denn für den ersten Werth wird, der Gleichung (6.) zufolge, $\frac{dz}{dt}$ unendlich gross. Setzt man zur Abkürzung

$$t + \tau = u,$$

so ist nach der dritten Gleichung (10.)

$$(13.)\quad z = \beta + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{\wp u - e_2}.$$

Dem Werthe $z = \infty$ entspricht daher der Werth $u = \omega_2$, während zu $z = +l$ und $z = -l$ zwei Argumentwerthe u_1 und u_2 gehören, die sich wegen (12.) aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$(14.)\quad \begin{cases} \wp u_1 = e_2 + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{l-\beta}, & \wp' u_1 = \frac{i}{4}\frac{R'(\beta)}{(l-\beta)^2}\cdot\frac{k}{l} \\ \wp u_2 = e_2 - \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{l+\beta}, & \wp' u_2 = -\frac{i}{4}\frac{R'(\beta)}{(l+\beta)^2}\cdot\frac{k}{l}. \end{cases}$$

In der Umgebung der genannten Unendlichkeitsstellen gelten nun Entwickelungen von folgender Form:

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = -2(u-\omega_2)^{-1} + (u-\omega_2)\,\mathfrak{P}(u-\omega_2),$$

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = (u-u_1)^{-1} + \mathfrak{P}_1(u-u_1),$$

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = (u-u_2)^{-1} + \mathfrak{P}_2(u-u_2),$$

wobei unter $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen verstanden sind. Für die letzten beiden Entwickelungen folgt diese Behauptung aus (11.) in Verbindung mit (12.) unmittelbar; für die erste leuchtet sie ein, wenn man bedenkt, dass die Entwickelung von $\wp u$ in der Umgebung von $u = \omega_2$ mit den Gliedern

$$e_2 + \frac{1}{2}\wp''\omega_2(u-\omega_2)^2 + c_4(u-\omega_2)^4 + \cdots$$

beginnt, woraus für z nach (13.) die Reihe

$$z = \frac{1}{2}\frac{R'(\beta)}{\wp''\omega_2}(u-\omega_2)^{-2} + \overline{\mathfrak{P}}(u-\omega_2),$$

also für $\frac{dz}{dt}$ die Entwickelung

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{R'(\beta)}{\wp''\omega_2}(u-\omega_2)^{-3} + \overline{\mathfrak{P}}'(u-\omega_2)$$

folgt.

Nun ist $\frac{d\log(x+iy)}{dt}$ eine elliptische Function derselben Perioden wie $\wp u$, und da sie an den erwähnten drei Stellen von erster Ordnung unendlich gross wird, so gilt nach den im fünfzehnten Kapitel der Elliptischen Functionen gegebenen Sätzen die Formel

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = C_1 - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega_2) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_2),$$

wobei C_1 eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. Um ihren Werth zu finden, hat man nur zu beachten, dass in der Entwickelung nach Potenzen von $u-\omega_2$ kein constantes Glied vorkommt. Daher ist

$$C_1 = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-\omega_2) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_2-\omega_2)$$

oder

$$C_1 = \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_1 + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_2 - 2\eta_2.$$

Demnach wird nach einer einfachen Umformung

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = -2\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_2) + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_1 + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_2.$$

Die Integration ergiebt

$$x+iy = C\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma_2^2 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2}e^{u\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_1 + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_2\right)},$$

worin unter C eine Constante zu verstehen ist, deren Werth aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden kann. Sind nämlich x_1, y_1 die Werthe, die x, y für $u = 0$ annehmen, so folgt wegen $\sigma_2(0) = 1$

$$\frac{x+iy}{x_1+iy_1} = \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma_2^2 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2}e^{u\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_1 + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_2\right)}. \tag{15.}$$

Führt man die Sigmafunctionen durch die Formeln

$$\wp u - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda}{\sigma} u\right)^2 \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

in die Gleichungen (10.) ein, so lauten sie

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha - z}{\alpha - \beta} = \left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(t+\tau)\right)^2 \\ \dfrac{z - \gamma}{\beta - \gamma} = \left(\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2}(t+\tau)\right)^2 \\ z - \beta = \dfrac{1}{4} R'(\beta)\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_2}(t+\tau)\right)^2. \end{cases}$$

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Fortsetzung. — Das ebene Pendel.

In der Formel (15.) des vorhergehenden Kapitels,

$$(1.)\qquad \frac{x+iy}{x_1+iy_1} = \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma_2^2 u\,\sigma u_1\,\sigma u_2}\, e^{u\left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_1+\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_2\right)},$$

treten zwei Argumentwerthe u_1 und u_2 auf, die sich noch näher bestimmen lassen. Den Gleichungen S. 242 (8.) und S. 244 (14.) zufolge ist

$$e_2 < \wp u_1 < e_1, \qquad \wp' u_1 = (+)\,i,$$
$$-\infty < \wp u_2 < e_3, \qquad \wp' u_2 = (-)\,i,$$

unter (+) eine positive und unter (−) eine negative reelle Grösse verstanden. Nach der Tabelle auf S. 21 kann man daher

$$u_1 = \omega_1 + iv_1,$$
$$u_2 = \qquad iv_2$$

setzen, wobei die reellen Grössen v_1 und v_2 zwischen 0 und $\frac{\omega_3}{i}$ gelegen sein müssen. Führt man diese Werthe in die Formel (1.) ein, so erhält man (E. F. S. 88)

$$\frac{x+iy}{x_1+iy_1} = -\frac{\sigma_1(u-iv_1)\,\sigma(u-iv_2)}{\sigma_1(iv_1)\,\sigma(iv_2)\,\sigma_2^2 u}\, e^{u\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(iv_1)+\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(iv_2)\right)}.$$

Durch Verwendung der ϑ-Functionen lässt sich dieser Gleichung noch eine andere Fassung geben. Es ist (E. F. S. 171 bis 173)

$$\sigma u = 2\omega_1 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_0'(0)},$$

$$\sigma_\lambda u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_\lambda\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_\lambda(0)} \qquad (\lambda = 1, 2, 3);$$

dadurch wird

$$(2.)\quad \frac{x+iy}{x_1+iy_1} = -\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-iv_1}{2\omega_1}\right)\vartheta_0\left(\frac{u-iv_2}{2\omega_1}\right)\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_1\left(\frac{iv_1}{2\omega_1}\right)\quad\vartheta_0\left(\frac{iv_2}{2\omega_1}\right)\quad\vartheta_2^2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}\, e^{\frac{u}{2\omega_1}\left(\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}\left(\frac{iv_1}{2\omega_1}\right)+\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}\left(\frac{iv_2}{2\omega_1}\right)\right)}.$$

Zur Abkürzung werde jetzt

$$\frac{1}{2\omega_1}\left(\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}\left(\frac{iv_1}{2\omega_1}\right)+\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}\left(\frac{iv_2}{2\omega_1}\right)\right) = im$$

gesetzt, so ist m eine reelle Grösse, weil die Functionen ϑ_2 und ϑ_3 für rein imaginäre Argumentwerthe reell, ihre Ableitungen aber rein imaginär sind, wie aus der Darstellung dieser Functionen durch Reihen, die nach Cosinus der Vielfachen des Arguments $2v\pi = \frac{u\pi}{\omega_1}$ fortschreiten (E. F. S. 171 (19.), (20.)), unmittelbar ersichtlich ist.

Mit Benutzung der Grösse m lässt die Gleichung (2.) eine einfache geometrische Deutung zu. Man denke sich in der xy-Ebene an Stelle des Coordinatensystems x, y ein neues dem ursprünglichen congruentes, ξ, η, eingeführt, dessen Anfangspunkt derselbe ist, während die ξ-Axe mit der x-Axe den mit der Zeit veränderlichen Winkel mu bildet. Dann ist

$$x = \xi\cos mu - \eta\sin mu,$$
$$y = \xi\sin mu + \eta\cos mu$$

oder

$$x+iy = (\xi+i\eta)e^{imu}.$$

Aus der Gleichung (2.) folgt

$$\frac{\xi+i\eta}{x_1+iy_1} = -\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-iv_1}{2\omega_1}\right)\vartheta_0\left(\frac{u-iv_2}{2\omega_1}\right)\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_1\left(\frac{iv_1}{2\omega_1}\right)\quad\vartheta_0\left(\frac{iv_2}{2\omega_1}\right)\quad\vartheta_2^2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}.$$

Die rechte Seite der vorstehenden Formel ist eine reell periodische Function der Variablen u, mithin auch der Zeit $t = u-\tau$. Die Bewegung des materiellen Punktes P ist daher in Bezug auf das rechtwinklige System ξ, η mit dem Anfangspunkte O eine periodische, während dieses System selbst mit der constanten Winkelgeschwindigkeit m um die nach unten gerichtete und durch den festen Punkt O gehende z-Axe rotirt. Hierdurch ist die Bewegung des sphärischen Pendels vollständig beschrieben. —

Die Formel S. 244 (13.),

$$z = \beta + \frac{1}{4}\,\frac{R'(\beta)}{\wp u - e_2}, \tag{3.}$$

durch die die z-Coordinate des Punktes P als Function von u, also auch der Zeit t dargestellt wird, ist für die numerische Berechnung wenig brauchbar. Es soll daher eine dafür geeignetere Formel aufgestellt werden. Die Grösse $z+l$ ist eine elliptische Function von u, die für $u = \pm u_2$, der Definition dieses Argumentwerthes zufolge (S. 244), verschwindet, für $u = \pm\omega_2$ dagegen unendlich gross wird, und zwar mit den Ordnungszahlen Eins. Mithin kann man (E. F. S. 136)

$$z + l = C\,\frac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u+\omega_2)}$$

setzen. Die Constante C ergiebt sich durch die Bestimmung, dass z für $u = u_1$ den Werth l annimmt. Es wird also

$$2l = C\,\frac{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1+u_2)}{\sigma(u_1-\omega_2)\,\sigma(u_1+\omega_2)}$$

und weiter

$$1 + \frac{z}{l} = 2\,\frac{\sigma(u_1-\omega_2)\,\sigma(u_1+\omega_2)}{\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1+u_2)}\cdot\frac{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u+\omega_2)}. \tag{4.}$$

Wenn man hierin noch für u_1, u_2 die obigen Werthe $\omega_1 + iv_1$, iv_2 einführt, so erhält man eine zur Berechnung von z sehr brauchbare Formel.

Besonders bemerkenswerth ist der Fall, wenn die Bewegung in einer Ebene vor sich geht. Da diese Ebene vertical sein muss, so ist nach dem auf S. 239 Bemerkten

$$k = 0.$$

Es sei jetzt

$$\frac{y}{x} = c$$

die Gleichung der Geraden der xy-Ebene, die mit der z-Axe zusammen die Lage der Schwingungsebene bestimmt. Die Constante c sei so gewählt, dass auch die dem Werthe $z = \beta$ entsprechende Lage des Pendels in die Schwingungsebene fällt. Die Function $R(z)$ (S. 240) nimmt in diesem Falle die Gestalt

$$R(z) = \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)(4gz + h)$$

an und hat die Nullstellen

$$z = +l, \quad z = -l, \quad z = -\frac{h}{4g}.$$

Durch passende Wahl der Anfangsgeschwindigkeit kann man die Constante h stets so annehmen, dass

$$-l < -\frac{h}{4g}$$

wird, und hat dann (S. 241) hier

$$\alpha = l, \quad \beta = -\frac{h}{4g}, \quad \gamma = -l$$

zu setzen. Da z stets zwischen α und β gelegen ist (S. 241), so kann diese Grösse bei der gemachten Annahme niemals den Werth $-l$ erreichen, d. h. der Punkt P kann niemals zum höchsten Punkte der Kugel aufsteigen. Die erste der Gleichungen S. 246 (16.) geht dann über in

$$\text{(5.)} \qquad \frac{l-z}{l+\frac{h}{4g}} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}u\right)^2,$$

während aus den Gleichungen S. 244 (14.)

$$\wp' u_1 = \wp' u_2 = 0$$

folgt. Nach den Formeln S. 242 (8.) ergiebt sich aber

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 + \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{l-\beta} = e_2 + \frac{g}{l^2}\left(l - \frac{h}{4g}\right), \\ e_2 &= \frac{h}{6l^2}, \\ e_3 &= e_2 - \frac{1}{4}\frac{R'(\beta)}{l+\beta} = e_2 - \frac{g}{l^2}\left(l + \frac{h}{4g}\right); \end{aligned}$$

mithin liefern die Gleichungen S. 244 (14.) weiter

$$\wp u_1 = e_1, \quad \wp u_2 = e_3;$$

es ist also

$$u_1 = \omega_1, \quad u_2 = \omega_3$$

zu setzen. Die Formel (1.) nimmt in diesem Falle wegen

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\omega_1 = \eta_1, \quad \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\omega_3 = \eta_3$$

nach einer einfachen Rechnung die bemerkenswerthe Form

$$\frac{x+iy}{x_1+iy_1} = \frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u} \tag{6.}$$

an.

Man ertheile nun der Constanten y_1 den Werth Null, so zeigt die vorstehende Formel, dass $x+iy$ für alle reellen Werthe von u selbst reell, somit y beständig Null sein muss. Unter dieser Annahme schwingt also das Pendel in der xy-Ebene, und es ist

$$x = x_1 \frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u}. \tag{7.}$$

Darin bedeutet x_1 wie zuvor (S. 245) den Werth von x, den diese Grösse für $u = 0$ annimmt. Der Formel (3.) gemäss entsprechen einander die Werthe $u = 0$ und $z = \beta$. Es muss also (S. 239 (2.))

$$x_1 = \sqrt{l^2 - \beta^2}$$

sein; daher wird schliesslich

$$x = \sqrt{l^2-\beta^2}\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u}{\sigma_2^2 u}. \tag{8.}$$

Diese Formel giebt in Verbindung mit der Gleichung (5.) die vollständige Lösung der Aufgabe für das gewöhnliche ebene Pendel.

Achter Abschnitt.

DIE BEWEGUNG EINES STARREN KÖRPERS UM EINEN FESTEN PUNKT.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Vorbereitende Untersuchungen und Aufstellung der Eulerschen Differentialgleichungen.

In den folgenden Kapiteln soll ein umfassenderes Problem der analytischen Mechanik, die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, behandelt werden, das schon von Euler in Angriff genommen worden ist.

Wenn von einem starren Körper oder auch nur von einem Körper schlechtweg die Rede ist, so soll hier darunter immer ein System von materiellen Punkten in endlicher Anzahl verstanden werden, deren Entfernungen von einander unveränderlich sind, welche Bewegungen das System auch ausführen möge. Es ist zunächst die Aufgabe, für einen solchen Körper die Bewegungen zu untersuchen, die er um einen mit ihm fest verbundenen Punkt ausführt, wenn keine äussere Kraft vorhanden ist, oder — was im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt — die er um seinen Schwerpunkt ausführt, wenn auf diesen eine äussere Kraft, etwa die Schwerkraft, wirkt.

Der mit dem betrachteten Körper fest verbundene Punkt O werde zum Anfangspunkte zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme genommen, von denen das eine im Raume unveränderlich, das andere aber mit dem sich bewegenden Körper verbunden sein soll. Es sei P ein von O verschiedener Punkt des Körpers, und zu irgend einer Zeit t seien x, y, z die Coordinaten von P in

Bezug auf das feste System, dagegen x_1, y_1, z_1 in Bezug auf das mit ihm beweglich System. Diese drei Grössen sind also von der Zeit unabhängig. Mit ihnen sind x, y, z zu jeder Zeit durch die drei linearen homogenen Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} x = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1 \\ y = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1 \\ z = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1 \end{cases}$$

verbunden, in denen die neun Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma';\ \alpha'', \beta'', \gamma''$ mit der Zeit veränderlich sind. Die Aufgabe, um die es sich handelt, besteht nun darin, diese Coefficienten als Functionen der Zeit t zu bestimmen. Sie bedeuten bekanntlich die Richtungscosinus der Axen des beweglichen Systems gegen das feste. Sie sind nicht unabhängig von einander, vielmehr bestehen sechs ihrerseits von einander unabhängige wohlbekannte Relationen zwischen ihnen. Man kann die Richtungscosinus nach Eulers Vorgang durch drei unabhängige Grössen, φ, ψ, ϑ, die jene Relationen identisch befriedigen, ausdrücken. Jacobi hat diese Eulerschen Winkel bei der Lösung des vorliegenden Problems benutzt. Indessen wird dadurch nicht nur die Symmetrie der Gleichungen gestört, sondern es ergeben sich auch φ, ψ, ϑ nicht als so einfache Functionen der Zeit, wie wenn man die neun Richtungscosinus beibehält und dafür auf die zwischen ihnen bestehenden Relationen Rücksicht nimmt.

Diese Relationen sind

$$(2.)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \end{cases}$$

$$(3.)\qquad \begin{cases} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0. \end{cases}$$

Die Determinante der neun Richtungscosinus,

$$(4.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

hat den Werth $+1$ oder -1, jenachdem das Coordinatensystem (x, y, z) mit dem System x_1, y_1, z_1 zur Deckung gebracht werden kann oder nicht. Hier soll das erstere, also

$$\Delta = +1 \tag{5.}$$

angenommen werden. Die obigen Relationen sind die Folgerungen aus der identischen Gleichung

$$x^2+y^2+z^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2. \tag{6.}$$

Diese Gleichung zusammen mit der Angabe über die Congruenz der Coordinatensysteme vertritt daher alle vorhergehenden Relationen.

Durch Auflösung des Systems (1.) ergiebt sich

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha\, x+\beta\, y+\gamma\, z \\ y_1 &= \alpha' x+\beta' y+\gamma' z \\ z_1 &= \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z, \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

demnach ist auch

$$\left\{\begin{aligned} \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2 &= 1 \\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2 &= 1 \\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2 &= 1, \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'' &= 0 \\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' &= 0 \\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'' &= 0, \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

endlich noch

$$\left\{\begin{aligned} \beta'\gamma''-\gamma'\beta'' &= \alpha \qquad & \beta''\gamma-\gamma''\beta &= \alpha' \qquad & \beta\gamma'-\gamma\beta' &= \alpha'' \\ \gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'' &= \beta & \gamma''\alpha-\alpha''\gamma &= \beta' & \gamma\alpha'-\alpha\gamma' &= \beta'' \\ \alpha'\beta''-\beta'\alpha'' &= \gamma & \alpha''\beta-\beta''\alpha &= \gamma' & \alpha\beta'-\beta\alpha' &= \gamma''. \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

Man kann alle diese Ergebnisse analytisch-geometrisch deuten, zweckmässig mittels der von Grassmann eingeführten Begriffe des inneren und äusseren Products zweier Strecken. Sind $O\xi$ und $O\xi'$ zwei von O ausgehende Strecken, deren Endpunkte die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben, und ist $O\eta$ die Projection von $O\xi$ auf $O\xi'$, so ist

$$\overline{O\xi'}.\overline{O\eta} = xx'+yy'+zz' \tag{11.}$$

das innere Product der beiden Strecken $O\xi$ und $O\xi'$, wobei das Vorzeichen der rechten Seite positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem die beiden

Strecken $O\xi'$ und $O\eta$ den gleichen oder den entgegengesetzten Richtungssinn haben. Wenn zwei Strecken auf einander senkrecht stehen, so verschwindet ihr inneres Product.

Dagegen heisst

$$\overline{O\xi'}.\overline{\eta\xi}$$

das äussere Product der beiden Strecken $O\xi$ und $O\xi'$. Es ist an Grösse gleich dem Inhalt des aus $\overline{O\xi}$ und $\overline{O\xi'}$ und dem zwischen ihnen eingeschlossenen Winkel zu bildenden Parallelogramms. Man pflegt ihm eine von O ausgehende, auf der Ebene von $O\xi$ und $O\xi'$ senkrechte Strecke zuzuordnen, deren Maasszahl der Länge ebensogross ist wie das äussere Product. Man hat noch festzusetzen, auf welcher Seite der Ebene die Strecke zu errichten ist: man drehe das Coordinatensystem so um O, dass $O\xi$ in die positive Richtung der x-Axe, die Ebene $\xi O\xi'$ in die xy-Ebene und $O\xi'$ nicht ausserhalb des von den beiden positiven Richtungen der x- und y-Axe gebildeten rechten Winkels fällt, dann soll die positive Richtung der z-Axe die gesuchte Richtung der Strecke angeben. Sind x'', y'', z'' die Coordinaten des Endpunktes dieser Strecke, so ist z'' positiv, und nach dem oben über das innere Product Bemerkten ist

$$\begin{aligned} x x'' + y y'' + z z'' &= 0, \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' &= 0, \end{aligned}$$

woraus, für k als Proportionalitätsfactor,

$$\text{(12.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} kx'' &= yz' - zy' \\ ky'' &= zx' - xz' \\ kz'' &= xy' - yx' \end{aligned} \right.$$

folgt. Setzt man nun

$$\begin{aligned} \overline{O\xi} &= r, \\ \overline{O\eta} &= s, \\ \overline{O\xi'} &= r', \end{aligned}$$

so ist

$$\overline{O\xi'}^2.\overline{\eta\xi}^2 = r'^2(r^2 - s^2).$$

Das Quadrat des äusseren Products, das auf der linken Seite steht, ist aber gleich dem Quadrat der Länge der gesuchten Strecke, d. h. gleich $x''^2 + y''^2 + z''^2$, während

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$r's = xx' + yy' + zz',$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist. Setzt man dies in die vorhergehende Gleichung ein und multiplicirt auf der rechten Seite aus, so findet man

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2,$$

also, den Gleichungen (12.) zufolge,

$$k^2 = 1;$$

k ist also unabhängig von der Lage des Axensystems. Bringt man dieses in die oben angegebene besondere Lage, so ist y gleich Null, x positiv, y' positiv, also auch kz'' positiv, mithin, da z'' selbst positiv,

$$k = +1;$$

sonach ist

$$(13.) \quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= yz' - zy' \\ y'' &= zx' - xz' \\ z'' &= xy' - yx'. \end{aligned} \right.$$

Denkt man sich nun drei Punkte 1; 2; 3 mit den Coordinaten α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, so haben sie alle vom Ursprung den Abstand Eins, die drei Strecken $O1$, $O2$, $O3$ stehen auf einander senkrecht, d. h. die inneren Producte dieser Strecken verschwinden, und jede ist das äussere Product der beiden anderen. Das sind die geometrischen Bedeutungen der Gleichungen (2.), (3.) und (10.), und in ähnlicher Weise lassen sich auch die übrigen Relationen deuten.

Durch Differentiation ergeben sich aus (1.) die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes x, y, z in Bezug auf das im Raume feste Axensystem:

$$(14.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 \frac{d\alpha}{dt} + y_1 \frac{d\alpha'}{dt} + z_1 \frac{d\alpha''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= x_1 \frac{d\beta}{dt} + y_1 \frac{d\beta'}{dt} + z_1 \frac{d\beta''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= x_1 \frac{d\gamma}{dt} + y_1 \frac{d\gamma'}{dt} + z_1 \frac{d\gamma''}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Dagegen erhält man die Geschwindigkeitscomponenten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ für denselben Punkt in Bezug auf das bewegliche System, indem man die eben ermittelte Geschwindigkeit auf die drei Axen dieses Systems projicirt:

$$
(15.)\quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha \dfrac{dx}{dt} + \beta \dfrac{dy}{dt} + \gamma \dfrac{dz}{dt} \\ \bar{y} = \alpha' \dfrac{dx}{dt} + \beta' \dfrac{dy}{dt} + \gamma' \dfrac{dz}{dt} \\ \bar{z} = \alpha'' \dfrac{dx}{dt} + \beta'' \dfrac{dy}{dt} + \gamma'' \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}
$$

Eliminirt man nun $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ vermöge (14.), berücksichtigt, dass nach (2.)

$$
\begin{aligned}
\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} &= 0, \\
\alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} &= 0, \\
\alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta'' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} &= 0
\end{aligned}
$$

ist, und setzt, wie es schon Euler gethan hat,

$$
(16.)\quad \begin{cases} \alpha'' \dfrac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \dfrac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \dfrac{d\gamma'}{dt} = -\left(\alpha' \dfrac{d\alpha''}{dt} + \beta' \dfrac{d\beta''}{dt} + \gamma' \dfrac{d\gamma''}{dt}\right) = p \\ \alpha \dfrac{d\alpha''}{dt} + \beta \dfrac{d\beta''}{dt} + \gamma \dfrac{d\gamma''}{dt} = -\left(\alpha'' \dfrac{d\alpha}{dt} + \beta'' \dfrac{d\beta}{dt} + \gamma'' \dfrac{d\gamma}{dt}\right) = q \\ \alpha' \dfrac{d\alpha}{dt} + \beta' \dfrac{d\beta}{dt} + \gamma' \dfrac{d\gamma}{dt} = -\left(\alpha \dfrac{d\alpha'}{dt} + \beta \dfrac{d\beta'}{dt} + \gamma \dfrac{d\gamma'}{dt}\right) = r, \end{cases}
$$

so erhält man

$$
(17.)\quad \begin{cases} \bar{x} = qz_1 - ry_1 \\ \bar{y} = rx_1 - pz_1 \\ \bar{z} = py_1 - qx_1. \end{cases}
$$

Die Geschwindigkeitscomponenten nach den im Körper festen Axen sind also durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 in Bezug auf das bewegliche System und durch drei veränderliche Grössen p, q, r ausgedrückt. Ein Vergleich mit den Formeln (13.) zeigt, dass man $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ in Verbindung mit einem äusseren Product bringen kann. Es sei $\mathfrak{x}$ der Punkt mit den Coordinaten p, q, r, und P_1 der Punkt mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1, sämmtlich bezogen auf das mit dem

Körper bewegliche System; dann sind $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten des Endpunktes $\bar{P}$ der von O ausgehenden Strecke, deren Länge das äussere Product von $O\xi$ und OP_1 darstellt; $O\bar{P}$ steht senkrecht auf der Ebene $P_1 O\xi$ und zwar auf der Seite dieser Ebene, dass $O\xi$, OP_1, $O\bar{P}$ in dieser Reihenfolge ein System derselben Art bilden wie das Coordinatensystem Ox, Oy, Oz in dem oben auseinandergesetzten Sinne. Da p, q, r von x_1, y_1, z_1 unabhängig sind, so ist auch die Lage der Strecke $O\xi$ von der Wahl des Punktes P_1 unabhängig, d. h. sie ist für alle Punkte des Körpers die gleiche. Selbstverständlich ändert sie mit der Zeit ihre Lage im Raume. Jeder ihrer Punkte hat zu der betreffenden Zeit die relative Geschwindigkeit Null, denn $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ verschwinden, wenn x_1, y_1, z_1 zu p, q, r proportional angenommen werden. Daraus erklärt sich die Bezeichnung der Geraden $O\xi$ als augenblickliche Drehungsaxe des Körpers. Man kann sie sich mit dem Körper fest verbunden denken, wobei Punkte des Körpers auf ihr liegen können oder nicht. Jeder ausserhalb dieser Drehungsaxe gelegene Punkt des Körpers hat eine augenblickliche Geschwindigkeit, deren Richtung senkrecht auf der Ebene $O\xi P_1$ steht, und deren Grösse gleich dem Product aus dem Abstand des Punktes von der Drehungsaxe mit der Grösse

$$\overline{O\xi} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \tag{18.}$$

ist. Die Punkte im Abstande Eins von der augenblicklichen Drehungsaxe haben also die Geschwindigkeit $O\xi$, und diese heisst die augenblickliche Umdrehungsgeschwindigkeit des Körpers; ihre Componenten sind p, q, r. Aus dieser Bedeutung ist die wichtige Rolle zu erklären, die diese Grössen in dem hier behandelten Problem spielen.

Die Auflösung des Gleichungssystems (15.) ergiebt für die Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das feste Coordinatensystem

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha\bar{x} + \alpha'\bar{y} + \alpha''\bar{z} \\ \frac{dy}{dt} &= \beta\bar{x} + \beta'\bar{y} + \beta''\bar{z} \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma\bar{x} + \gamma'\bar{y} + \gamma''\bar{z}. \end{aligned}\right. \tag{19.}$$

Daraus folgt mit Einführung der Werthe (17.)

$$
(20.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (\alpha' r - \alpha'' q)\, x_1 + (\alpha'' p - \alpha r)\, y_1 + (\alpha q - \alpha' p)\, z_1 \\
\frac{dy}{dt} &= (\beta' r - \beta'' q)\, x_1 + (\beta'' p - \beta r)\, y_1 + (\beta q - \beta' p)\, z_1 \\
\frac{dz}{dt} &= (\gamma' r - \gamma'' q)\, x_1 + (\gamma'' p - \gamma r)\, y_1 + (\gamma q - \gamma' p)\, z_1 .
\end{aligned}\right.
$$

Setzt man hierin speciell der Reihe nach folgende Werthsysteme ein:

für	x_1	y_1	z_1,	mithin für	x	y	z
	1	0	0		α	β	γ
	0	1	0		α'	β'	γ'
	0	0	1		α''	β''	γ'',

so erhält man die wichtigen Gleichungssysteme:

$$
(21.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \alpha' r - \alpha'' q \\
\frac{d\beta}{dt} &= \beta' r - \beta'' q \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \gamma' r - \gamma'' q ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(22.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dt} &= \alpha'' p - \alpha\, r \\
\frac{d\beta'}{dt} &= \beta'' p - \beta\, r \\
\frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma'' p - \gamma\, r ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(23.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha''}{dt} &= \alpha\, q - \alpha' p \\
\frac{d\beta''}{dt} &= \beta\, q - \beta' p \\
\frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma\, q - \gamma' p .
\end{aligned}\right.
$$

Die Masse des betrachteten Punktes P, dessen Coordinaten zur Zeit t mit x, y, z bezeichnet worden sind, sei m. Die Componenten der beschleunigenden Kraft, die zur Zeit t auf sie wirkt, seien X, Y, Z. Dann ist die Bewegung von P durch drei simultane Differentialgleichungen bestimmt, die nach dem d'Alembertschen Princip folgendermassen lauten:

$$(24.)\quad \begin{cases} d\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right) = \sum m(yZ-zY)\,dt \\ d\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right) = \sum m(zX-xZ)\,dt \\ d\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right) = \sum m(xY-yX)\,dt. \end{cases}$$

Die Summation ist darin über alle vorhandenen Massenpunkte des Körpers zu erstrecken. Führt man für $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ihre Werthe aus den Formeln (20.) ein, so entstehen für p, q, r drei Differentialgleichungen erster Ordnung, während diese Grössen mit den neun Richtungscosinus durch die drei Differentialgleichungen (16.) zusammenhängen.

Es handelt sich nun zunächst darum, die Differentialgleichungen (24.) so umzuformen, dass darin ausser den Richtungscosinus des beweglichen Systems in Bezug auf das feste nur noch solche Grössen auftreten, die auf das bewegliche System bezogen sind.

Zu dem Ende ist es zweckmässig, die drei Grössen

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt},\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt},\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$$

durch

$$y_1\bar{z}-z_1\bar{y},\quad z_1\bar{x}-x_1\bar{z},\quad x_1\bar{y}-y_1\bar{x}$$

auszudrücken. Dazu gelangt man am schnellsten durch folgende einfache geometrische Überlegung. In einem bestimmten Coordinatensystem (x, y, z) habe

der Punkt ζ die Coordinaten	x,	y,	z,
„ „ ζ' „ „	$\dfrac{dx}{dt}$,	$\dfrac{dy}{dt}$,	$\dfrac{dz}{dt}$,
„ „ ζ'' „ „	$y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}$,	$z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}$,	$x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}$,

so ist, wie oben bei den Betrachtungen über das äussere Product gezeigt, die Lage des Punktes ζ'' allein von der Lage der Punkte ζ und ζ' abhängig, dagegen von der Wahl des Coordinatensystems mit dem Anfangspunkte O gänzlich unabhängig. Legt man daher das Coordinatensystem (x_1, y_1, z_1) zu Grunde, in dem

der Punkt ζ die Coordinaten	x_1,	y_1,	z_1,
" " ζ' " "	$\bar{x}$,	$\bar{y}$,	$\bar{z}$,
" " ζ'' " "	$y_1\bar{z} - z_1\bar{y}$,	$z_1\bar{x} - x_1\bar{z}$,	$x_1\bar{y} - y_1\bar{x}$

habe, so sieht man, dass zwischen den Coordinaten des Punktes ζ'' in den beiden Systemen dieselben Transformationsgleichungen bestehen müssen, wie zwischen den Coordinaten des Punktes ζ, d. h. die Gleichungen (1.). Es muss also

$$(25.)\quad \begin{cases} y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \alpha(y_1\bar{z} - z_1\bar{y}) + \alpha'(z_1\bar{x} - x_1\bar{z}) + \alpha''(x_1\bar{y} - y_1\bar{x}) \\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \beta(y_1\bar{z} - z_1\bar{y}) + \beta'(z_1\bar{x} - x_1\bar{z}) + \beta''(x_1\bar{y} - y_1\bar{x}) \\ x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \gamma(y_1\bar{z} - z_1\bar{y}) + \gamma'(z_1\bar{x} - x_1\bar{z}) + \gamma''(x_1\bar{y} - y_1\bar{x}) \end{cases}$$

und umgekehrt, den Gleichungen (7.) zufolge,

$$(26.)\quad \begin{cases} y_1\bar{z} - z_1\bar{y} = \alpha\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) + \beta\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) + \gamma\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) \\ z_1\bar{x} - x_1\bar{z} = \alpha'\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) + \beta'\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) + \gamma'\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) \\ x_1\bar{y} - y_1\bar{x} = \alpha''\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) + \beta''\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) + \gamma''\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) \end{cases}$$

sein.

Nun mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(27.)\quad \begin{cases} \sum m(y_1^2 + z_1^2) = A & \sum m y_1 z_1 = A' \\ \sum m(z_1^2 + x_1^2) = B & \sum m z_1 x_1 = B' \\ \sum m(x_1^2 + y_1^2) = C & \sum m x_1 y_1 = C', \end{cases}$$

so sind die Grössen A, B, C positiv. Wegen (17.) wird

$$(28.)\quad \begin{cases} \sum m(y_1\bar{z}-z_1\bar{y}) = \sum m(y_1(py_1-qx_1)-z_1(rx_1-pz_1)) = Ap-C'q-B'r \\ \sum m(z_1\bar{x}-x_1\bar{z}) = \sum m(z_1(qz_1-ry_1)-x_1(py_1-qx_1)) = Bq-A'r-C'p \\ \sum m(x_1\bar{y}-y_1\bar{x}) = \sum m(x_1(rx_1-pz_1)-y_1(qz_1-ry_1)) = Cr-B'p-A'q, \end{cases}$$

und daher nach (26.)

$$(29.)\quad \begin{cases} Ap-C'q-B'r = \alpha\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)+\beta\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)+\gamma\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right) \\ Bq-A'r-C'p = \alpha'\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)+\beta'\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)+\gamma'\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right) \\ Cr-B'p-A'q = \alpha''\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)+\beta''\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)+\gamma''\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right). \end{cases}$$

Wird nun weiter

$$(30.)\quad \frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-A'qr-B'rp-C'pq = T$$

gesetzt, so gehen die Gleichungen (28.) in folgende über:

$$(31.)\quad \begin{cases} \sum m(y_1\bar{z}-z_1\bar{y}) = \dfrac{\partial T}{\partial p} \\ \sum m(z_1\bar{x}-x_1\bar{z}) = \dfrac{\partial T}{\partial q} \\ \sum m(x_1\bar{y}-y_1\bar{x}) = \dfrac{\partial T}{\partial r}; \end{cases}$$

daher ist wegen (25.)

$$(32.)\quad \sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right) = \alpha\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha'\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha''\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Führt man diesen Werth in die erste der Differentialgleichungen (24.) ein, so findet man

$$(33.)\quad \sum m(yZ-zY) = \frac{d}{dt}\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha'\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha''\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

Bezeichnet man daher mit X_1, Y_1, Z_1 die Componenten der beschleunigenden Kraft in Bezug auf das bewegliche System und wendet auf die Transformation der Grösse $yZ-zY$ dieselben geometrischen Überlegungen an wie oben, so erhält man, den Gleichungen (21.) bis (23.) zufolge,

$$\alpha \sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + \alpha' \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) + \alpha'' \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$
$$= \alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha'' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + (\alpha' r - \alpha'' q)\frac{\partial T}{\partial p} + (\alpha'' p - \alpha r)\frac{\partial T}{\partial q} + (\alpha q - \alpha' p)\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Entsprechende Betrachtungen führen auf die beiden zugehörigen Formeln

$$\beta \sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + \beta' \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) + \beta'' \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$
$$= \beta \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \beta' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + \beta'' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + (\beta' r - \beta'' q)\frac{\partial T}{\partial p} + (\beta'' p - \beta r)\frac{\partial T}{\partial q} + (\beta q - \beta' p)\frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\gamma \sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + \gamma' \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) + \gamma'' \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$
$$= \gamma \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma'' \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + (\gamma' r - \gamma'' q)\frac{\partial T}{\partial p} + (\gamma'' p - \gamma r)\frac{\partial T}{\partial q} + (\gamma q - \gamma' p)\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen beiderseits der Reihe nach mit α, β, γ, sodann mit α', β', γ', endlich mit $\alpha'', \beta'', \gamma''$, und vereinigt jedesmal die entstehenden Formeln durch Addition, so folgt mit Rücksicht auf die Relationen, die unter den Richtungscosinus bestehen,

$$(34.)\quad \begin{cases} \sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} \\[2ex] \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} \\[2ex] \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} + p\dfrac{\partial T}{\partial q}. \end{cases}$$

Dies sind die gewünschten Umformungen der Differentialgleichungen (24.); sie werden im Folgenden von besonderer Wichtigkeit sein.

Um die mechanische Bedeutung der Grösse T zu erkennen, setze man in dem Ausdruck (30.) an Stelle von p, q, r drei unbestimmte Grössen u, v, w, so geht T über in

$$(35.)\quad T(u,v,w) = \frac{1}{2}\sum m(y_1^2 + z_1^2)u^2 + \frac{1}{2}\sum m(z_1^2 + x_1^2)v^2 + \frac{1}{2}\sum m(x_1^2 + y_1^2)w^2$$
$$- \sum m y_1 z_1 vw \quad - \quad \sum m z_1 x_1 wu \quad - \quad \sum m x_1 y_1 uv,$$

wofür man auch

$$(36.)\quad T(u,v,w) = \frac{1}{2}\sum m\left((x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (x_1 u + y_1 v + z_1 w)^2\right)$$

schreiben kann. Dieser Ausdruck lässt eine geometrische Erklärung folgender

Art zu. Man construire von O aus zwei Radienvectoren nach den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (u, v, w), deren Längen r und s seien. Von dem Punkte (x_1, y_1, z_1) fälle man auf s das Loth, dessen Länge mit R bezeichnet werden möge, und dessen Fusspunkt vom Punkte O den Abstand S habe. Dann ist, wie auf S. 254 auseinandergesetzt worden, $x_1 u + y_1 v + z_1 w$ das innere Product von r und s, mithin

$$x_1 u + y_1 v + z_1 w = sS,$$

daher

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (x_1 u + y_1 v + z_1 w)^2 = r^2 s^2 - s^2 S^2 = s^2 R^2.$$

Es wird also

$$T(u, v, w) = \frac{1}{2} s^2 \sum m R^2. \tag{37.}$$

Da R der Abstand des Punktes mit der Masse m von der durch den Punkt (u, v, w) und den Nullpunkt gehenden Geraden ist, so bedeutet

$$\sum m R^2$$

das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Gerade. Setzt man nun wieder p, q, r statt u, v, w, so wird

$$2T = (p^2 + q^2 + r^2) \sum m R^2, \tag{38.}$$

d. h. $2T$ ist das Product aus dem Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die augenblickliche Drehungsaxe und dem Quadrate der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit.

Man kann die Grösse $2T$ noch auf eine andere Weise mechanisch erklären. Es ist nämlich auch

$$2T(u, v, w) = \sum m((y_1 w - z_1 v)^2 + (z_1 u - x_1 w)^2 + (x_1 v - y_1 u)^2),$$

mithin

$$2T = \sum m((y_1 r - z_1 q)^2 + (z_1 p - x_1 r)^2 + (x_1 q - y_1 p)^2)$$

oder wegen (17.)

$$2T = \sum m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2), \tag{39.}$$

d. h. nach der Bedeutung von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ als Geschwindigkeitscomponenten, es ist $2T$ gleich der lebendigen Kraft des Körpers.

Nimmt man speciell an, der Körper sei in gleichförmiger Bewegung um eine feste Axe begriffen, so haben p, q, r constante Werthe, und wenn weiter die Drehungsgeschwindigkeit gleich Eins, d. h.

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

ist, so folgt, dass in diesem Falle das Trägheitsmoment des Körpers und die lebendige Kraft denselben Werth haben.

Man wähle ferner die drei Grössen u, v, w so, dass die Gleichung

$$2T(u, v, w) = \sum m\left((x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (x_1 u + y_1 v + z_1 w)^2\right) = 1 \tag{40.}$$

erfüllt ist. Deutet man u, v, w als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so stellt diese Gleichung ein Ellipsoid dar, das Trägheitsellipsoid. Eine durch seinen Mittelpunkt gehende Gerade habe die Richtungscosinus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und schneide die Fläche im Punkte (u, v, w), so ist, falls ϱ den Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte des Ellipsoids bedeutet,

$$u = \varrho\mathfrak{a}, \quad v = \varrho\mathfrak{b}, \quad w = \varrho\mathfrak{c},$$

demnach

$$\sum m\left((x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2) - (x_1\mathfrak{a} + y_1\mathfrak{b} + z_1\mathfrak{c})^2\right) = \frac{1}{\varrho^2}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite, in dem übrigens $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2$ den Werth Eins hat, stellt das Trägheitsmoment Θ des Körpers in Bezug auf die Axe mit den Richtungscosinus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ dar. Es ist also

$$\Theta = \frac{1}{\varrho^2}. \tag{41.}$$

Nach Construction des Trägheitsellipsoids lässt sich somit das Trägheitsmoment des Körpers für jede durch den Nullpunkt gehende Axe durch das reciproke Quadrat des Radiusvectors bestimmen, der durch den Schnitt des Trägheitsellipsoids mit dieser Axe entsteht.

Bei den bisherigen Betrachtungen waren die beiden Coordinatensysteme, das im Raume feste und das mit dem Körper bewegliche, vollständig willkürlich geblieben. Man kann aber über sie in geeigneter Weise so verfügen, dass die Bewegungsgleichungen (34.) erheblich vereinfacht werden; zum Beispiel kann man, wie auch aus der Mechanik bekannt ist, das im Körper feste Axensystem Ox_1, Oy_1, Oz_1 so wählen, dass die drei Grössen A', B', C' sämmtlich verschwinden. Um das einzusehen, braucht man nur die Gleichung des

Trägheitsellipsoids (40.) unter Benutzung der Formeln (35.) und (27.) in die Gestalt

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - 2A'vw - 2B'wu - 2C'uv = 1$$

zu bringen und das Coordinatensystem so zu wählen, dass seine Axen mit den Hauptaxen des Ellipsoids, den Hauptträgheitsaxen, zusammenfallen. Denn dann kommen in der vorstehenden Gleichung die Glieder mit den Producten der Coordinaten nicht mehr vor, d. h. es ist

$$A' = B' = C' = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung, die für das Folgende aufrecht erhalten werden soll, ist sonach

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

und die Differentialgleichungen der Bewegung (34.) nehmen die von Euler aufgestellte Form an:

$$(42.)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = \sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp = \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1). \end{cases}$$

Die Grössen auf den rechten Seiten dieser Differentialgleichungen stellen, wie in der Mechanik gezeigt wird, die Componenten des resultirenden Drehmoments dar, das die beschleunigende Kraft auf die Punkte des Körpers ausübt. Die weiteren Untersuchungen werden sich nun zunächst auf den Fall beschränken, wo diese Componenten verschwinden. Das tritt zum Beispiel ein, wenn keine beschleunigende Kraft vorhanden ist, wo dann als fester Punkt ein beliebiger Punkt des Körpers genommen werden kann; oder auch dann, wenn der feste Punkt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt, und die beschleunigende Kraft in ihm angreift. Um das zu zeigen, mögen die Ausdrücke auf den rechten Seiten der vorstehenden Differentialgleichungen noch umgeformt werden.

Es sei K die Grösse der beschleunigenden Kraft, und λ, μ, ν seien ihre Richtungscosinus in Bezug auf das feste System, so sind ihre Componenten in Bezug auf dasselbe System

$$X = K\lambda, \quad Y = K\mu, \quad Z = K\nu.$$

Nun ist aber (S. 262)

$$y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = \alpha(yZ - zY) + \beta(zX - xZ) + \gamma(xY - yX),$$

mithin

$$y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = K(\lambda(\beta z - \gamma y) + \mu(\gamma x - \alpha z) + \nu(\alpha y - \beta x)).$$

Aus (7.) folgt in Verbindung mit (10.)

$$\begin{aligned} \alpha'' y_1 - \alpha' z_1 &= \beta z - \gamma y, \\ \beta'' y_1 - \beta' z_1 &= \gamma x - \alpha z, \\ \gamma'' y_1 - \gamma' z_1 &= \alpha y - \beta x, \end{aligned}$$

somit wird

$$y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = K(y_1(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'') - z_1(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma')).$$

Bezeichnet man weiter mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Schwerpunktes in Bezug auf das mit dem Körper verbundene System, und mit M die Gesammtmasse des Körpers, sodass

$$\sum m x_1 = M x_0, \quad \sum m y_1 = M y_0, \quad \sum m z_1 = M z_0,$$

so erhält man aus der vorhergehenden Formel

$$\sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = KM(y_0(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'') - z_0(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'))$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1) &= KM(z_0(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) - x_0(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'')), \\ \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) &= KM(x_0(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma') - y_0(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)). \end{aligned}$$

Wie man sieht, verschwinden die rechten Seiten, wenn K gleich Null ist, wo dann x_0, y_0, z_0 beliebige Werthe haben können, ferner wenn x_0, y_0, z_0 alle drei gleich Null sind, wobei dann aber über K keine Einschränkung zu treffen ist.

Die Bewegungsgleichungen lauten in diesen Fällen einfach

$$(43.) \quad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq. \end{aligned} \right.$$

Wenn als beschleunigende Kraft die Schwerkraft wirkt, und das im Raume feste Coordinatensystem so gewählt wird, dass die z-Axe in die Richtung der Schwerkraft fällt, so hat man in den vorhergehenden Formeln

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1$$

zu nehmen. Setzt man noch

$$K = 2g,$$

wo also diese Grösse die Intensität der Schwerkraft bedeuten soll, so erhält man

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 2g,$$

mithin

$$X_1 = 2g\gamma, \quad Y_1 = 2g\gamma', \quad Z_1 = 2g\gamma''.$$

Die Bewegungsgleichungen nehmen in diesem Falle folgende Gestalt an:

$$(44.) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)\,qr + 2gM(\gamma''y_0 - \gamma' z_0) \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)\,rp + 2gM(\gamma\, z_0 - \gamma'' x_0) \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)\,pq + 2gM(\gamma' x_0 - \gamma\, y_0). \end{cases}$$

Hierauf soll jedoch erst im neunundzwanzigsten Kapitel eingegangen werden.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

Bestimmung dreier Richtungscosinus mittels Sigmaquotienten.

Die jetzt folgenden Untersuchungen sollen sich auf den im vorhergehenden Kapitel erwähnten Fall erstrecken, wo die drei Grössen

$$\sum m(y_1 Z_1 - z_1 Y_1), \quad \sum m(z_1 X_1 - x_1 Z_1), \quad \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$

verschwinden. Nach dem auf S. 262 Bemerkten tritt das dann auch für die Grössen

$$\sum m(yZ - zY), \qquad \sum m(zX - xZ), \qquad \sum m(xY - yX)$$

ein. Dadurch gehen die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung (S. 260 (24.)), wie sie das d'Alembertsche Princip geliefert hat, in die einfache Form

$$(1.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

über. Durch Integration folgt daraus unmittelbar, wenn mit l_1, l_2, l_3 drei Constanten bezeichnet werden, die nicht sämmtlich verschwinden mögen,

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= l_1 \\ \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= l_2 \\ \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= l_3. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist das zu Grunde gelegte im Raume feste Coordinatensystem keinerlei Beschränkung unterworfen. Man kann es nun so wählen, dass von den drei Integrationsconstanten zwei gleich Null, aber die dritte von Null verschieden wird. Zu dem Zwecke mögen mit u, v, w die Coordinaten des Punktes (x, y, z) in Bezug auf ein neues Coordinatensystem bezeichnet werden, das mit dem ursprünglichen durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} u &= a\,x + b\,y + c\,z, \\ v &= a'x + b'y + c'z, \\ w &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

verbunden ist, wobei natürlich zwischen den neun Richtungscosinus $a, \ldots c''$ die im vorhergehenden Kapitel angeführten Relationen bestehen müssen. Dann ist (vgl. S. 261 (26.))

$$\sum m\left(v\frac{dw}{dt} - w\frac{dv}{dt}\right) = a\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + b\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + c\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

d. h. es gilt wegen (2.)

$$\sum m\left(v\frac{dw}{dt} - w\frac{dv}{dt}\right) = a\,l_1 + b\,l_2 + c\,l_3$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \sum m\left(w\frac{du}{dt} - u\frac{dw}{dt}\right) &= a'\,l_1 + b'\,l_2 + c'\,l_3, \\ \sum m\left(u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right) &= a''l_1 + b''l_2 + c''l_3. \end{aligned}$$

Man kann nun aber die neun Coefficienten $a, \ldots c''$ so bestimmen, dass in den beiden ersten der vorstehenden Gleichungen die Grössen auf der rechten Seite verschwinden. Denn setzt man

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned} a\,l_1 + b\,l_2 + c\,l_3 &= 0 \\ a'\,l_1 + b'\,l_2 + c'\,l_3 &= 0 \\ a''l_1 + b''l_2 + c''l_3 &= l, \end{aligned}\right.$$

so erhält man durch Auflösung nach l_1, l_2, l_3

$$(4.)\qquad l_1 = a''l, \quad l_2 = b''l, \quad l_3 = c''l,$$

es muss also wegen $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l^2$$

sein. Ist aber l dieser Bedingung gemäss gewählt, so lassen sich nach den Gleichungen (4.) die Grössen a'', b'', c'' und weiter noch auf unzählig viele Weisen a, b, c; a', b', c' so bestimmen, dass die unter den neun Coefficienten bestehenden Relationen und zugleich die Gleichungen (3.) befriedigt werden. Der Grösse l soll ihr positiver Werth beigelegt werden.

Wählt man von vornherein das Coordinatensystem x, y, z so, wie es soeben für das System u, v, w festgesetzt worden ist, so lauten nunmehr die Integrale der Bewegungsgleichungen (2.)

$$\text{(5.)}\qquad \begin{cases} \sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right) = 0 \\ \sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right) = 0 \\ \sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right) = l. \end{cases}$$

Man hat nun weiter auf die Gleichungen S. 262 (29),

$$Ap-C'q-B'r = \alpha \sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\beta \sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\gamma \sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$Bq-A'r-C'p = \alpha' \sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\beta' \sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\gamma' \sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$Cr-B'p-A'q = \alpha'' \sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\beta'' \sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\gamma'' \sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),$$

zurückzugehen. Wegen (S. 266)

$$A' = B' = C' = 0$$

und nach (5.) erhalten sie die einfache Gestalt

$$\text{(6.)}\qquad \begin{cases} Ap = \gamma\, l \\ Bq = \gamma'\, l \\ Cr = \gamma'' l. \end{cases}$$

Den Formeln S. 259 (21.), (22.), (23.) zufolge ist aber

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma' r-\gamma'' q,$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' p-\gamma\, r,$$

$$\frac{d\gamma''}{dt} = \gamma\, q-\gamma' p.$$

Daher wird

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{B-C}{BC} l\gamma'\gamma'' \\ \dfrac{d\gamma'}{dt} = \dfrac{C-A}{CA} l\gamma''\gamma \\ \dfrac{d\gamma''}{dt} = \dfrac{A-B}{AB} l\gamma\gamma'. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen enthalten als unbekannte Functionen die drei Richtungscosinus $\gamma, \gamma', \gamma''$; denn die Grössen A, B, C sind durch die Dimensionen und die Massenvertheilung des Körpers gegeben, während l eine durch die erste Integration in die Rechnung eingeführte Constante bedeutet, die als positiv angenommen worden ist. Es ist die Aufgabe, das System diese Differentialgleichungen mit Hilfe elliptischer Functionen zu integriren.

Zwei seiner Integrale erhält man sehr einfach auf folgendem Wege. Multiplicirt man die drei Gleichungen (7.) beiderseits der Reihe nach zuerst mit $\gamma, \gamma', \gamma''$, danach mit $\frac{\gamma}{A}, \frac{\gamma'}{B}, \frac{\gamma''}{C}$ und vereinigt jedesmal die Ergebnisse durch Addition, so erhält man

$$\gamma d\gamma + \gamma' d\gamma' + \gamma'' d\gamma'' = 0,$$

$$\frac{\gamma d\gamma}{A} + \frac{\gamma' d\gamma'}{B} + \frac{\gamma'' d\gamma''}{C} = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen liefert, integrirt, nichts weiter als die Relation

$$(8.)\qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

die andere ergibt

$$\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} = c,$$

wo c eine von t unabhängige Grösse bedeutet. Nun ist nach den hier geltenden Voraussetzungen (S. 266)

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

die lebendige Kraft des Körpers. Den Gleichungen (6.) zufolge geht aber dieser Ausdruck in

$$2T = \left(\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C}\right) l^2$$

über; mithin ist

$$c = \frac{2T}{l^2}.$$

Setzt man noch

$$(9.)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2 = 2T = l_1^2,$$

so folgt

$$(10.)\qquad \frac{\gamma^2}{A}+\frac{\gamma'^2}{B}+\frac{\gamma''^2}{C} = \frac{l_1^2}{l^2}.$$

Es werde für das Folgende vorausgesetzt, dass die drei positiven Grössen A, B, C sämmtlich von einander verschieden seien, dass ferner A die grösste, B die mittlere dieser Grössen sein soll. Aus der Gleichung (10.) ergiebt sich

$$\gamma^2+\frac{A}{B}\gamma'^2+\frac{A}{C}\gamma''^2 = A\frac{l_1^2}{l^2}.$$

Es muss, da schon $\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2$ den Werth Eins hat, die linke Seite grösser als Eins, d. h.

$$A\frac{l_1^2}{l^2} > 1$$

sein. Ebenso findet man

$$C\frac{l_1^2}{l^2} < 1.$$

Also sind die Grössen $Al_1^2-l^2$ und $l^2-Cl_1^2$ beide positiv. Würden A und C ihre Rollen vertauschen, so wären die beiden eben genannten Grössen negativ. Sie haben aber in jedem Falle dasselbe Vorzeichen, wenn A, B, C von einander verschieden sind, und B zwischen A und C gelegen ist.

Mittels der beiden Formeln (8.) und (10.) lassen sich γ und γ'' durch γ' ausdrücken. Denn es ist

$$\gamma^2\frac{A-C}{A} = \frac{l^2-Cl_1^2}{l^2}-\frac{B-C}{B}\gamma'^2$$

oder

$$(11.)\qquad \gamma^2 = \frac{A(l^2-Cl_1^2)}{(A-C)l^2}\left(1-\frac{(B-C)l^2}{l^2-Cl_1^2}\frac{\gamma'^2}{B}\right)$$

und ebenso

$$(12.)\qquad \gamma''^2 = \frac{C(Al_1^2-l^2)}{(A-C)l^2}\left(1-\frac{(A-B)l^2}{Al_1^2-l^2}\frac{\gamma'^2}{B}\right).$$

Führt man diese Werthe in die zweite der Differentialgleichungen (7.),

$$\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{C-A}{CA} l\gamma\gamma'',$$

ein, so erhält man, nachdem man beide Seiten ins Quadrat erhoben hat,

$$\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)^2 = \frac{(Al_1^2-l^2)(l^2-Cl_1^2)}{ACl^2}\left(1-\frac{(B-C)l^2}{l^2-Cl_1^2}\frac{\gamma'^2}{B}\right)\left(1-\frac{(A-B)l^2}{Al_1^2-l^2}\frac{\gamma'^2}{B}\right).$$

Die Grösse γ' befriedigt daher eine elliptische Differentialgleichung. Es ist nicht schwer, diese mit einer solchen in Übereinstimmung zu bringen, der die Sigmaquotienten zu genügen haben. Hierzu setze man

$$\gamma' = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{(Al_1^2-l^2)(l^2-Cl_1^2)}{AC}}\cdot\xi,$$

wobei die Quadratwurzel reell ist und als positiv fixirt sein möge. Dann erhält man

$$(13.)\qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{(B-C)(Al_1^2-l^2)}{ABC}\xi^2\right)\left(1-\frac{(A-B)(l^2-Cl_1^2)}{ABC}\xi^2\right).$$

Für die Function

$$\xi = \frac{\sigma}{\sigma_3}(t)$$

besteht aber die Differentialgleichung (E. F. S. 97 (7.))

$$(14.)\qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = (1-(e_1-e_3)\xi^2)(1-(e_2-e_3)\xi^2).$$

Um sie mit der vorhergehenden (13.) in Einklang zu bringen, hat man also nur

$$(15.)\qquad \begin{cases} e_1-e_3 = \dfrac{(B-C)(Al_1^2-l^2)}{ABC} \\[2ex] e_2-e_3 = \dfrac{(A-B)(l^2-Cl_1^2)}{ABC} \end{cases}$$

zu setzen. Hieraus folgt zunächst, dass die drei Grössen e_1, e_2, e_3 sämmtlich reell sind, sowie dass

$$e_1 > e_3 \quad\text{und}\quad e_2 > e_3$$

ist, und das tritt nach dem oben Bemerkten sowohl ein, wenn A, wie auch, wenn C die grösste der drei positiven Grössen A, B, C ist. Man hat nun noch zu bewirken, dass auch e_1 grösser als e_2 werde. Es ergiebt sich aber aus (15.) durch Subtraction

$$e_1 - e_2 = \frac{(A-C)(Bl_1^2 - l^2)}{ABC}; \tag{16.}$$

soll diese Grösse positiv sein, so müssen $A-C$ und $Bl_1^2 - l^2$ dasselbe Vorzeichen haben. Auch darf die letztere Grösse nicht verschwinden, wenn es sich um eigentliche elliptische Functionen handeln soll, wie im Folgenden vorausgesetzt werden möge. Man hat daher

$$\begin{array}{lll} A > C, & \text{wenn} & Bl_1^2 - l^2 > 0, \\ A < C, & \text{„} & Bl_1^2 - l^2 < 0, \end{array}$$

zu nehmen. Nach der Bedeutung der drei Grössen A, B, C als Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf die drei mit ihm fest verbundenen Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 kommt die eben gemachte Annahme darauf hinaus, die Hauptträgheitsaxe des grössten oder die des kleinsten Hauptträgheitsmoments als x-Axe zu bezeichnen. Durch diese Festsetzungen ist es also stets möglich, die drei Grössen e_1, e_2, e_3 durch die Formeln (15.) in Verbindung mit der Relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ so zu bestimmen, dass sie alle drei reell sind und die Bedingungen

$$e_1 > e_2 > e_3$$

erfüllen.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (14.) ist

$$\xi = \frac{\sigma}{\sigma_3}(t - t_0),$$

wo t_0 eine willkürliche Constante bedeutet, und man erhält weiter

$$\gamma' = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{(Al_1^2 - l^2)(l^2 - Cl_1^2)}{AC}}\,\frac{\sigma}{\sigma_3}(t - t_0). \tag{17.}$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel kann man stets als positiv betrachten; denn sollte γ' zur Zeit $t = t_0$ negativ sein, so würde es wegen der Formel (E. F. S. 93 (19.))

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}(u + 2\omega_\beta) = -\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}u \qquad (\alpha \lesseqgtr \beta)$$

genügen, t_0 um die Periode $2\omega_1$ zu vermehren, um für γ' einen positiven Werth zu erhalten.

Aus den Formeln (11.) und (12.) folgt

$$\gamma^2 = \frac{A(l^2 - Cl_1^2)}{(A-C)l^2}(1-(e_1-e_3)\xi^2),$$

$$\gamma''^2 = \frac{C(Al_1^2 - l^2)}{(A-C)l^2}(1-(e_2-e_3)\xi^2).$$

Nach den Gleichungen E. F. S. 89 (7.),

$$\mathfrak{S}_\alpha^2 u - \mathfrak{S}_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\mathfrak{S}^2 u = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \alpha \lesseqgtr \beta)$$

ergiebt sich aber

$$1-(e_1-e_3)\xi^2 = \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0)\right)^2,$$

$$1-(e_2-e_3)\xi^2 = \left(\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0)\right)^2;$$

mithin erhält man, unter ε, ε'' die Einheiten ± 1 verstehend,

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Cl_1^2)}{A-C}}\,\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0), \tag{18.}$$

$$\gamma'' = \frac{\varepsilon''}{l}\sqrt{\frac{C(Al_1^2-l^2)}{A-C}}\,\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0). \tag{19.}$$

Diese Werthe würden sich auch aus den Differentialgleichungen für γ, γ'' ergeben haben, die auf ebendieselbe Weise aufgestellt werden können, wie dies für die Grösse γ' geschehen ist. Es sind nun noch in den Formeln (18.) und (19.) die Vorzeichen zu bestimmen, da γ und γ'' ihrer Bedeutung nach eindeutige Functionen von t sein müssen. Es muss aber wegen der Formel E. F. S. 97 (6.),

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_\gamma}u\right) = \frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}_\gamma}u\,\frac{\mathfrak{S}_\beta}{\mathfrak{S}_\gamma}u,$$

durch die die Sigmaquotienten mit einander verknüpft sind, eine Beziehung zwischen den Grössen ε und ε'' bestehen. Setzt man in der That

$$\gamma = \varepsilon\, w\,\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0),$$

$$\gamma' = w'\,\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0),$$

$$\gamma'' = \varepsilon'' w''\,\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0),$$

wo w, w', w'' zur Abkürzung für die positiven Werthe der auf den rechten Seiten der Formeln (18.), (17.) und (19.) auftretenden constanten Wurzelgrössen, dividirt durch l, geschrieben worden sind, so folgt aus der vorhergehenden Formel für $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$:

$$\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{w'}{ww''}\frac{\gamma\gamma''}{\varepsilon\varepsilon''}.$$

Andererseits soll aber nach der zweiten Gleichung (7.)

$$\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{C-A}{CA} l\gamma\gamma''$$

sein. Es ergiebt sich daher

$$\frac{w'}{ww''} = \frac{C-A}{CA} l\varepsilon\varepsilon''.$$

Die Grösse auf der linken Seite dieser Gleichung ist beständig positiv, es muss also auch die rechte positiv sein; d. h. es ist

$$\varepsilon\varepsilon'' = -1, \quad \text{wenn } A > C,$$
$$\varepsilon\varepsilon'' = +1, \quad \text{„} \quad A < C.$$

Wird also das Zeichen von γ fixirt, so ist nach diesem Ergebniss das Vorzeichen von γ'' mitbestimmt.

Man kann aber stets bewirken, dass γ das negative Vorzeichen erhält, wenn man nur den Richtungssinn der z-Axe in geeigneter Weise festlegt. Aus der dritten Formel (6.),

$$\gamma'' = \frac{Cr}{l},$$

folgt, dass γ'' und r dasselbe Vorzeichen haben. Man denke sich nun vom Ursprung des Coordinatensystems die Strecke nach dem Punkte gezogen, dessen Coordinaten in Bezug auf das im Raume feste System p, q, r sind. Diese Strecke, deren Länge $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ gleich der Grösse der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit des Körpers ist (S. 258), schliesst mit der positiven Richtung der z-Axe einen Winkel ein, dessen Cosinus den Werth

$$\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

hat. Demnach wird r positiv oder negativ, jenachdem diese Strecke die positive z-Axe unter einem spitzen oder unter einem stumpfen Winkel schneidet. Es sei erstens $A > C$. Wählt man dann die positive Richtung der z-Axe so, dass der Winkel, den sie mit der genannten Strecke einschliesst, ein spitzer ist, so sind r, mithin auch γ'' positive Grössen, während nach dem vorher Bemerkten dann γ negativ ist. Ist zweitens $A < C$, so haben γ und γ'' dasselbe Vorzeichen; man hat daher, um zu bewirken, dass γ wieder negativ werde, jenen Winkel stumpf zu nehmen.

Aus diesen Darlegungen folgt, dass

$$(20.)\quad \left\{ \begin{aligned} \gamma\ &= -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Cl_1^2)}{A-C}} \cdot \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0) \\ \gamma'\ &= \frac{1}{l}\sqrt{\frac{(Al_1^2-l^2)(l^2-Cl_1^2)}{AC}} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0) \\ \gamma'' &= \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{C(Al_1^2-l^2)}{A-C}} \cdot \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3}(t-t_0) \end{aligned} \right.$$

gesetzt werden kann, wobei in der dritten Formel das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $A > C$ oder $A < C$; ferner soll die positive Richtung der z-Axe so gewählt sein, dass der Winkel, den sie mit der vom Ursprung nach dem Punkte (p, q, r) gezogenen Geraden einschliesst, im ersten Falle ein spitzer, im zweiten ein stumpfer ist. Bei dieser Wahl der z-Axe gilt, wie oben (S. 275) gezeigt, in dem Ausdrucke für γ'' das obere oder das untere Zeichen, jenachdem

$$l_1^2 B - l^2 \gtrless 0$$

ist.

Durch die Formeln (20.) werden $\gamma, \gamma', \gamma''$ als elliptische Functionen der Zeit t eindeutig dargestellt. Man kann diese Formeln noch dadurch in eine andere Gestalt bringen, dass man die darin vorkommenden Constanten selbst durch Sigmafunctionen eines bestimmten Argumentwerthes ausdrückt. Weil γ eine elliptische Function ist, so kann man stets ein Argument t_1 so bestimmen, dass diese Function einen beliebig vorgeschriebenen Werth annimmt, während zugleich ihre Ableitung ein vorgeschriebenes Zeichen hat. Es sei t_1 ein Argumentwerth derart, dass für $t = t_1$

$$\gamma = -1$$

wird. Dann ist der ersten Gleichung (20.) zufolge

$$\text{(21.)}\qquad \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(t_1-t_0) = l\sqrt{\frac{A-C}{A(l^2-Cl_1^2)}}.$$

Es ist stets möglich, t_1 so zu wählen, dass das Vorzeichen von $\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(t_1-t_0)$ positiv wird; sollte das nämlich nicht der Fall sein, so wäre es wegen E. F. S. 93 (21.),

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}(u+2\omega_1) = -\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}u,$$

nur nöthig, t_1 um die Periode $2\omega_1$ zu vermehren.

Wegen der Relation $\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2 = 1$ ist aber weiter für $t = t_1$

$$\gamma''^2 = -\gamma'^2,$$

und aus der Gleichung (10.), nämlich

$$\frac{\gamma^2}{A}+\frac{\gamma'^2}{B}+\frac{\gamma''^2}{C} = \frac{l_1^2}{l^2},$$

ergiebt sich

$$\gamma'^2\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right) = \frac{l_1^2}{l^2}-\frac{1}{A},$$

mithin weiter

$$\text{(22.)}\qquad \begin{cases} \gamma'^2 = \dfrac{(Al_1^2-l^2)BC}{Al^2(C-B)} \\[2ex] \gamma''^2 = \dfrac{(Al_1^2-l^2)BC}{Al^2(B-C)}. \end{cases}$$

Daraus folgt, wenn ε', ε'' den Werth $+1$ oder -1 bezeichnet,

$$\gamma' = \varepsilon'\frac{i}{l}\sqrt{\frac{(Al_1^2-l^2)BC}{A(B-C)}},$$

$$\gamma'' = \varepsilon''\frac{1}{l}\sqrt{\frac{(Al_1^2-l^2)BC}{A(B-C)}}.$$

Der ersten Gleichung (7.),

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{B-C}{BC}l\gamma'\gamma'',$$

zufolge ist aber für $t = t_1$ nach den vorstehenden Formeln

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t=t_1} = \varepsilon'\varepsilon''\frac{i}{l}\,\frac{Al_1^2-l^2}{A}.$$

Wie oben bemerkt, kann das Vorzeichen der linken Seite willkürlich angenommen werden. Es sei so bestimmt, dass

$$\varepsilon'\varepsilon'' = +1$$

wird, also γ' und γ'' für $t = t_1$ dasselbe Vorzeichen erhalten.

Mittels der zweiten und dritten Gleichung (20.) folgt alsdann für den Argumentwerth t_1:

$$(23.)\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sigma_3}(t_1-t_0) = \varepsilon' i C\sqrt{\dfrac{B}{(B-C)(l^2-Cl_1^2)}} \\[2ex] \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}(t_1-t_0) = \pm\,\varepsilon''\sqrt{\dfrac{B(A-C)}{A(B-C)}}. \end{cases}$$

In Verbindung mit der Gleichung (21.) ergiebt sich hieraus

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(t_1-t_0) = \pm\frac{\varepsilon''}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Cl_1^2)}{B-C}},$$
$$\frac{\sigma}{\sigma_1}(t_1-t_0) = \varepsilon' i\frac{C}{l}\sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}.$$

Man kann jetzt ε' so wählen, dass sein Werth ± 1 übereinstimmt mit dem Vorzeichen von γ'' in der dritten der Formeln (20.), d. h. es soll

$$\varepsilon' = +1,\quad \text{wenn } A > C,$$
$$\varepsilon' = -1,\quad\ \text{„}\quad A < C$$

sein. Sollte nämlich $\frac{\sigma}{\sigma_1}(t_1-t_0)$ das dieser Bestimmung entgegengesetzte Vorzeichen zeigen, so brauchte man wegen (E. F. S. 93 (19.))

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}(u+2\omega_3) = -\frac{\sigma}{\sigma_1}u$$

nur t_1 um die Periode $2\omega_3$ zu vermehren, um das gewünschte Vorzeichen zu erhalten. Dabei bleibt in Folge der Formel (E. F. S. 93 (23.))

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(u+2\omega_3) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}u$$

das Vorzeichen von $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(t_1-t_0)$ ungeändert. Wählt man ε' auf die angegebene Weise, so wird jenes Vorzeichen stets positiv.

Nimmt man noch die erste Formel (15.) hinzu, d. h.

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{\frac{(B-C)(Al_1^2 - l^2)}{ABC}},$$

worin der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist, so kann man schliesslich die Formeln (20.) in folgende Gestalt setzen:

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma &= \qquad\qquad -\frac{\sigma_3}{\sigma_1}(t_1 - t_0)\,\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t - t_0) \\ \gamma' &= \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(t_1 - t_0)\,\frac{\sigma}{\sigma_3}(t - t_0) \\ \gamma'' &= \frac{1}{i}\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma}{\sigma_1}(t_1 - t_0)\,\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t - t_0), \end{aligned}\right.$$

wofern man nur den eben getroffenen Festsetzungen entsprechend den Argumentwerth t_1 so bestimmt, dass

$$(25.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sigma_3}{\sigma_1}(t_1 - t_0) &= \frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2 - Cl_1^2)}{A-C}} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(t_1 - t_0) &= \frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2 - Cl_1^2)}{B-C}} \\ \frac{\sigma}{\sigma_1}(t_1 - t_0) &= \pm i\frac{C}{l}\sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}} \end{aligned}\right.$$

wird, und man darin den beiden ersten Wurzelgrössen das positive Vorzeichen, der dritten aber das positive oder negative beilegt, jenachdem $A > C$ oder $A < C$.

Die vorstehenden Formeln (24.) und (25.) geben die vollständige Bestimmung der drei Richtungscosinus $\gamma, \gamma', \gamma''$. Es treten in ihnen ausser dem Argument t noch die Grössen $e_1 - e_3$, t_1 und die Integrationsconstante t_0 auf Man überzeugt sich leicht, dass die Grösse $t_1 - t_0$ rein imaginär sein mus Wegen

$$\wp u - e_3 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma}u\right)^2$$

ist nämlich der ersten Gleichung (23.) zufolge für $u = t_1 - t_0$

$$\wp(t_1 - t_0) - e_3 = -\frac{(B-C)(l^2 - Cl_1^2)}{BC^2}.$$

Die rechte Seite ist stets negativ (S. 273), daher $\wp(t_1 - t_0)$ zwischen $-\infty$ und e_3 gelegen. Weiter ist nach der Formel E. F. S. 90 (9.),

$$\wp' u = -2 \frac{\sigma_1}{\sigma} u \frac{\sigma_2}{\sigma} u \frac{\sigma_3}{\sigma} u$$

oder

$$\wp' u = -2 \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u \frac{\sigma_2}{\sigma_1} u \frac{\sigma_1}{\sigma} u \left(\frac{\sigma_3}{\sigma} u\right)^2,$$

unter Benutzung der Gleichungen (25.) und (23.):

$$\wp'(t_1 - t_0) = \pm \frac{2l}{iC^3} \frac{(A-C)(B-C)(l^2 - Cl_1^2)}{AB};$$

der Werth der rechten Seite ist negativ imaginär, da $\pm(A-C)$ immer positiv ist. Nach der Tabelle S. 21 ist mithin die Grösse $t_1 - t_0$ stets im Intervall von 0 bis ω_3 gelegen, also rein imaginär.

Sechsundzwanzigstes Kapitel.

Fortsetzung. Bestimmung der übrigen Richtungscosinus.

Schon wiederholt hat es sich bei der Lösung der hier behandelten Aufgaben als nützlich erwiesen, complexe Verbindungen der Unbekannten als neue zu bestimmende Functionen in die Rechnung einzuführen. So empfiehlt es sich auch hier, zur Ermittelung der noch übrigen Richtungscosinus α, α', α''; β, β', β'' die Grössen $\alpha+i\beta$, $\alpha'+i\beta'$, $\alpha''+i\beta''$ zu benutzen.

Aus den Gleichungen S. 259 (21.), (22.), (23.) folgt

$$\frac{d}{dt}(\alpha''+i\beta'') = q(\alpha+i\beta)-p(\alpha'+i\beta').$$

Nun ist

$$(1.)\qquad \begin{aligned}(\alpha+i\beta)(\alpha''-i\beta'') &= \alpha\alpha''+\beta\beta''+i(\beta\alpha''-\alpha\beta'')\\ &= -\gamma\gamma''+i\gamma'\end{aligned}$$

und

$$(2.)\qquad \begin{aligned}(\alpha'+i\beta')(\alpha''-i\beta'') &= \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+i(\beta'\alpha''-\alpha'\beta'')\\ &= -\gamma'\gamma''-i\gamma;\end{aligned}$$

ferner

$$(3.)\qquad \frac{1}{\alpha''+i\beta''} = \frac{\alpha''-i\beta''}{1-\gamma''^2}.$$

Demgemäss wird

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha''+i\beta'') = q\frac{(\alpha+i\beta)(\alpha''-i\beta'')}{1-\gamma''^2}-p\frac{(\alpha'+i\beta')(\alpha''-i\beta'')}{1-\gamma''^2},$$

d. h. den Formeln (1.), (2.) und S. 271 (6.) zufolge

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log(\alpha''+i\beta'') &= \frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\frac{\gamma' l}{B}(-\gamma\gamma''+i\gamma')-\frac{\gamma l}{A}(-\gamma'\gamma''-i\gamma)\right)\\ &= \frac{1}{1-\gamma''^2}\left(\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)l\gamma\gamma'\gamma''+il\left(\frac{\gamma^2}{A}+\frac{\gamma'^2}{B}\right)\right)\end{aligned}$$

und weiter in Folge der dritten Gleichung S. 272 (7.)

$$\text{(4.)} \qquad \frac{d}{dt}\log(\alpha''+i\beta'') = \frac{1}{1-\gamma''^2}\left(-\gamma''\frac{d\gamma''}{dt}+il\left(\frac{\gamma^2}{A}+\frac{\gamma'^2}{B}\right)\right).$$

Entsprechend erhält man

$$\text{(5.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\log(\alpha\ +i\beta) = \dfrac{1}{1-\gamma^2}\left(-\gamma\ \dfrac{d\gamma}{dt}+il\left(\dfrac{\gamma'^2}{B}+\dfrac{\gamma''^2}{C}\right)\right) \\ \dfrac{d}{dt}\log(\alpha'+i\beta') = \dfrac{1}{1-\gamma'^2}\left(-\gamma'\dfrac{d\gamma'}{dt}+il\left(\dfrac{\gamma''^2}{C}+\dfrac{\gamma^2}{A}\right)\right). \end{cases}$$

Wenn also $\gamma, \gamma', \gamma''$ aus den drei Differentialgleichungen S. 272 (7.) ermittelt sind, wie im vorhergehenden Kapitel auseinandergesetzt worden ist, so bedarf es nur noch je einer Quadratur, um auch $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' zu erhalten. Am einfachsten geschieht dies, indem man zuerst α'' und β'' gemäss der Formel (4.) bestimmt und danach α, β; α', β' mittels der unter diesen Grössen bestehenden Relationen berechnet, wozu auch die Formeln (1.) und (2.) dienen können.

Die erste Gleichung (5.) lässt sich wegen S. 273 (10.) oder

$$\text{(6.)} \qquad \frac{\gamma'^2}{B}+\frac{\gamma''^2}{C} = \frac{l_1^2}{l^2}-\frac{\gamma^2}{A} = \frac{l_1^2}{l^2}-\frac{1}{A}+\frac{1-\gamma^2}{A}$$

noch auf die Form

$$\text{(7.)} \qquad \frac{d}{dt}\log(\alpha+i\beta) = \frac{\gamma\dfrac{d\gamma}{dt}+il\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{l_1^2}{l^2}\right)}{\gamma^2-1}+i\frac{l}{A}$$

bringen.

Man setze nun

$$\gamma^2 = \varphi(t),$$

so wird, da γ für $t=t_1$ den Werth -1 annehmen soll (S. 278),

$$1 = \varphi(t_1).$$

Ferner ergiebt sich durch Differentiation wegen der ersten Differentialgleichung S. 272 (7.)

$$\varphi'(t) = 2\gamma\frac{d\gamma}{dt} = 2\frac{B-C}{BC}l\gamma\gamma'\gamma''.$$

Nach S. 278 und S. 279 ist aber für $t = t_1$

$$\gamma \;\; = -1,$$

$$\gamma' \;\; = \varepsilon' \frac{i}{l} \sqrt{\frac{BC(Al_1^2 - l^2)}{A(B-C)}},$$

$$\gamma'' = \varepsilon'' \frac{1}{l} \sqrt{\frac{BC(Al_1^2 - l^2)}{A(B-C)}},$$

wobei $\varepsilon'\varepsilon'' = +1$ zu nehmen war. Daraus folgt

$$\gamma\gamma'\gamma'' = -i \frac{BC(Al_1^2 - l^2)}{Al^2(B-C)},$$

mithin

$$\varphi'(t_1) = -\frac{2i}{Al}(Al_1^2 - l^2) = 2il\left(\frac{1}{A} - \frac{l_1^2}{l^2}\right).$$

Mit diesen Relationen lässt sich die Gleichung (7.) in die Form

$$\text{(8.)} \qquad \frac{d}{dt} \log(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_1)}{\varphi(t) - \varphi(t_1)} + i \frac{l}{A}$$

setzen. Da die rechte Seite ungeändert bleibt, wenn $\varphi(t)$ mit einer beliebigen Constanten multiplicirt wird, so gilt die vorstehende Formel, wenn $\varphi(t)$ der Grösse γ^2 proportional genommen wird, d. h. es ist, wenn man die Sigmaquotienten einführt, der ersten Gleichung S. 281 (24.) zufolge

$$\text{(9.)} \qquad \varphi(t) = c\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t - t_0)\right)^2$$

zu setzen, wo c eine Constante bedeutet.

Um aus der Formel (8.) die Grösse $\log(\alpha + i\beta)$ zu finden, hat man das elliptische Integral

$$\int \frac{1}{2} \frac{\varphi'(t) + \varphi'(t_1)}{\varphi(t) - \varphi(t_1)} dt$$

zu bestimmen.

Man betrachte nun, noch etwas verallgemeinernd, den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi'(u) + \varphi'(u_1)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)},$$

worin unter $\varphi(u)$ das Quadrat irgend eines der zwölf Sigmaquotienten verstanden werden soll,

$$\varphi(u) = \left(\frac{\mathfrak{S}_\lambda}{\mathfrak{S}_\mu} u\right)^2, \tag{10.}$$

und u_1 eine willkürliche Constante bedeuten möge. Jener Ausdruck wird an zwei Stellen unendlich gross. Erstens für $u = u_1$, und zwar von der ersten Ordnung. Denn die Entwickelung nach Potenzen von $u - u_1$ beginnt mit der Potenz $(u-u_1)^{-1}$. Zweitens wird der Ausdruck unendlich, wenn $\varphi(u)$ selbst unendlich gross wird, d. h. wenn $\mathfrak{S}_\mu u$ verschwindet, also für $u = \omega_\mu$. Die Ordnung des Unendlichwerdens ist hier ebenfalls die erste. Denn es ist, wenn unter c_0 eine von u unabhängige Grösse verstanden wird,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{c_0}{(u-\omega_\mu)^2} + \cdots, \\ \varphi'(u) &= -\frac{2c_0}{(u-\omega_\mu)^3} + \cdots; \end{aligned}$$

mithin beginnt die Entwickelung des Ausdruckes nach Potenzen von $u-\omega_\mu$ mit dem Gliede $-(u-\omega_\mu)^{-1}$.

Nach den im fünfzehnten Kapitel der Elliptischen Functionen gefundenen Ergebnissen ist somit

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)} = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u-u_1) - \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u-\omega_\mu) + C \tag{11.}$$

zu setzen, wo C eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. Um sie zu ermitteln, setze man

$$u - \omega_\mu = h$$

und entwickele nach Potenzen von h. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= h^{-2}(c_0 + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \cdots), \\ \varphi(u) - \varphi(u_1) &= h^{-2}(c_0 + (c_1 - \varphi(u_1))\,h^2 + \cdots), \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(u)-\varphi(u_1)} &= \frac{h^2}{c_0 + (c_1-\varphi(u_1))\,h^2 + \cdots} \\ &= \frac{h^2}{c_0}\left(1 - \frac{c_1 - \varphi(u_1)}{c_0}\,h^2 + \cdots\right); \end{aligned}$$

weiter ist

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= h^{-3}(-2c_0 + 2c_2 h^4 + \cdots), \\ \varphi'(u) + \varphi'(u_1) &= h^{-3}(-2c_0 + \varphi'(u_1)\,h^3 + 2c_2 h^4 + \cdots). \end{aligned}$$

Man erhält also

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)} = \frac{1}{2}\frac{h^{-1}}{c_0}\left(1-\frac{c_1-\varphi(u_1)}{c_0}h^2+\cdots\right)(-2c_0+\varphi'(u_1)h^3+\cdots)$$
$$= h^{-1}\left(-1+\frac{c_1-\varphi(u_1)}{c_0}h^2+\cdots\right).$$

Auf der linken Seite der Gleichung (11.) kommt mithin kein constantes Glied vor; es muss also auch auf der rechten Seite fehlen. Diese wird aber für $u = \omega_\mu + h$ gleich

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_\mu - u_1 + h) - \frac{\sigma'}{\sigma}h + C = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_\mu - u_1) - \frac{1}{h} + c'h + c''h^3 + \cdots + C,$$

also muss

$$C = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1 - \omega_\mu)$$

sein. Auf diese Weise entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega_\mu) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u_1-\omega_\mu)$$

oder, der Relation

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega_\mu) = \frac{\sigma'_\mu}{\sigma_\mu}u - \eta_\mu$$

zufolge,

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{\sigma'_\mu}{\sigma_\mu}u + \frac{\sigma'_\mu}{\sigma_\mu}u_1.$$

Dieselbe Formel bleibt ersichtlich bestehen, wenn man $\varphi(u)$ mit einer beliebigen Constanten multiplicirt, also

$$\varphi(u) = c\left(\frac{\sigma_\lambda}{\sigma_\mu}u\right)^2$$

setzt. Schreibt man noch, unter u_0 ebenfalls eine Constante verstehend, $u-u_0$ statt u und u_1-u_0 statt u_1, so gilt die Formel

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi'(u-u_0)+\varphi'(u_1-u_0)}{\varphi(u-u_0)-\varphi(u_1-u_0)} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_1) - \frac{\sigma'_\mu}{\sigma_\mu}(u-u_0) + \frac{\sigma'_\mu}{\sigma_\mu}(u_1-u_0)$$

für

$$\varphi(u-u_0) = c\left(\frac{\sigma_\lambda}{\sigma_\mu}(u-u_0)\right)^2 \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3;\ \lambda \lessgtr \mu).$$

Nunmehr ergiebt sich

$$(12.)\quad \int \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u-u_0)+\varphi'(u_1-u_0)}{\varphi(u-u_0)-\varphi(u_1-u_0)}\,du = \log\left(\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma_\mu(u-u_0)}\,e^{(u-u_0)\frac{\sigma'_\mu}{\sigma_\mu}(u_1-u_0)}\right),$$

abgesehen von einer Integrationsconstanten.

Jetzt kehre man wieder zur Bestimmung der Grösse $\alpha+i\beta$ zurück. Aus der Formel (8.) in Verbindung mit (9.) folgt nach der vorstehenden Gleichung (12.)

$$\alpha+i\beta = \frac{\sigma(t-t_1)}{\sigma_3(t-t_0)}\cdot C_0\, e^{i\left(\frac{l}{A}+\frac{1}{i}\frac{\sigma'_3}{\sigma_3}(t_1-t_0)\right)(t-t_0)}.$$

Die Constante C_0 hängt von der Lage des rotirenden Körpers zur Zeit $t=t_0$ ab. Die im Exponenten auftretende Grösse $\frac{1}{i}\frac{\sigma'_3}{\sigma_3}(t_1-t_0)$ ist reell; denn da $\sigma_3 u$ eine gerade, mithin $\sigma'_3 u$ eine ungerade Function ist, so ist der Quotient $\frac{\sigma'_3}{\sigma_3}u$ rein imaginär, wenn das Argument u es ist. Von der Grösse t_1-t_0 ist aber im vorhergehenden Kapitel (S. 282) gezeigt worden, dass sie einen rein imaginären Werth haben muss.

Durch ähnliche Betrachtungen könnte man die entsprechenden Formeln für $\alpha'+i\beta'$ und $\alpha''+i\beta''$ herleiten. Es empfiehlt sich jedoch hierzu ein anderer Weg. Nach den oft benutzten Relationen ist

$$\frac{\alpha'+i\beta'}{\alpha+i\beta} = \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+i(\alpha\beta'-\beta\alpha')}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{-\gamma\gamma'+i\gamma''}{1-\gamma^2},$$

und

$$\frac{\alpha''+i\beta''}{\alpha+i\beta} = \frac{-\gamma\gamma''-i\gamma'}{1-\gamma^2}.$$

Führt man an Stelle von $\gamma, \gamma', \gamma''$ die Werthe S. 281 (24.) in die rechten Seiten dieser Gleichungen ein und setzt zur Abkürzung

$$t-t_0 = u,$$
$$t_1-t_0 = u_1,$$

so folgt

$$\frac{\alpha'+i\beta'}{\alpha+i\beta} = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u_1\,\sigma_3 u_1+\sigma_2 u\,\sigma_3 u\,\sigma u_1\,\sigma_1 u_1}{\sigma_3^2 u\,\sigma_1^2 u_1-\sigma_1^2 u\,\sigma_3^2 u_1},$$

oder wenn man die Formeln

$$(e_\alpha-e_\beta)\,\sigma(u-v)\,\sigma(u+v) = \sigma_\alpha^2 v\,\sigma_\beta^2 u-\sigma_\alpha^2 u\,\sigma_\beta^2 v$$

und (E. F. S. 207 (13.))

$$\sigma_\alpha(u-v)\,\sigma(u+v) = \sigma u\,\sigma_\alpha u\,\sigma_\beta v\,\sigma_\gamma v + \sigma v\,\sigma_\alpha v\,\sigma_\beta u\,\sigma_\gamma u$$

benutzt,

$$\frac{\alpha'+i\beta'}{\alpha+i\beta} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{(e_1-e_3)}\,\frac{\sigma_1(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)}{\sigma\,(u-u_1)\,\sigma(u+u_1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_1}{\sigma}(u-u_1);$$

und ebenso findet man

$$\frac{\alpha''+i\beta''}{\alpha+i\beta} = \frac{1}{i\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_3}{\sigma}(u-u_1).$$

Wird noch zur Abkürzung

$$\text{(13.)}\qquad \frac{l}{A}+\frac{1}{i}\,\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u_1 = n$$

gesetzt, so ergeben sich die Formeln

$$\text{(14.)}\qquad \begin{cases} \alpha+i\beta = C_0\,\dfrac{\sigma(u-u_1)}{\sigma_3 u}\,e^{inu} \\[2ex] \alpha'+i\beta' = \dfrac{C_0}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1(u-u_1)}{\sigma_3 u}\,e^{inu} \\[2ex] \alpha''+i\beta'' = \dfrac{C_0}{i\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3(u-u_1)}{\sigma_3 u}\,e^{inu}. \end{cases}$$

Um die Constante C_0 aus der Anfangslage des Körpers zu bestimmen, werde speziell angenommen, zur Zeit $t=t_0$, d. h. für $u=0$ sollen α', β', γ' die Werthe

$$\alpha_0', \qquad \beta_0', \qquad \gamma_0' = 0$$

haben. Diese Annahme stimmt mit der Festsetzung überein, dass die mittlere Trägheitsaxe zur Zeit $t=t_0$ in der xy-Ebene gelegen sei. Dann ist $\alpha_0'+i\beta_0'$ eine complexe Grösse vom absoluten Betrage Eins, denn es ist

$$(\alpha_0'+i\beta_0')(\alpha_0'-i\beta_0') = \alpha_0'^2+\beta_0'^2 = 1-\gamma_0'^2 = 1.$$

Man kann also

$$\alpha_0'+i\beta_0' = e^{i\lambda}$$

setzen, wo λ einen reellen Winkel bedeutet, nämlich denjenigen, den die mittlere Trägheitsaxe zur Zeit $t=t_0$ mit der positiven Richtung der x-Axe einschliesst. Aus der zweiten Formel (14.) ergiebt sich für $t = t_0$, d. h. für $u = 0$

$$C_0 = \frac{e^{i\lambda}}{\mathfrak{S}_1 u_1}\sqrt{e_1 - e_3}.$$

Es sei noch

$$t_1 - t_0 = u_1 = wi$$

gesetzt, so ist w eine reelle Grösse, und man erhält an Stelle der Formeln (14.) und S. 281 (24.) die folgenden:

$$(15.)\quad \begin{cases} \alpha + i\beta = \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\mathfrak{S}(u - wi)}{\mathfrak{S}_1(wi)\,\mathfrak{S}_3 u}\, e^{i(\lambda + nu)} \\[2ex] \alpha' + i\beta' = \dfrac{\mathfrak{S}_1(u - wi)}{\mathfrak{S}_1(wi)\,\mathfrak{S}_3 u}\, e^{i(\lambda + nu)} \\[2ex] \alpha'' + i\beta'' = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\mathfrak{S}_3(u - wi)}{\mathfrak{S}_1(wi)\,\mathfrak{S}_3 u}\, e^{i(\lambda + nu)}, \end{cases}$$

$$(16.)\quad \begin{cases} \gamma = -\dfrac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1}(wi)\,\dfrac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3}u \\[2ex] \gamma' = \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}(wi)\,\dfrac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_3}u \\[2ex] \gamma'' = \dfrac{1}{i}\sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}(wi)\,\dfrac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3}u. \end{cases}$$

Vermittelst dieser Formeln kann man jedem der zwölf Sigmaquotienten eine geometrische oder mechanische Bedeutung beilegen. Während die Grössen $\gamma, \gamma', \gamma''$ periodische Functionen sind, treten jedoch in den rechten Seiten der Formeln (15.) noch Exponentialfactoren auf.

Es ist nützlich, an dieser Stelle noch einmal die hauptsächlichen Voraussetzungen kurz zusammenzufassen, unter denen die vorstehenden Formeln Gültigkeit haben. Der feste Punkt des Körpers war zum gemeinsamen Anfangspunkt der beiden Coordinatensysteme gewählt worden, von denen das eine im Raume fest, das andere im Raume beweglich, aber mit dem Körper fest verbunden war; die Axen dieses beweglichen Systems sollten mit den Richtungen der drei Hauptträgheitsaxen des Körpers übereinstimmen. Construirt man den Punkt $\mathfrak{x}$, dessen Coordinaten in Bezug auf das mit dem Körper bewegliche Coordinatensystem die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit p, q, r sind, so stellt die Gerade $O\mathfrak{x}$ die augenblickliche Drehungsaxe dar, und $\gamma, \gamma', \gamma''$ sind, den Gleichungen S. 271 (6.) zufolge, diesen Componenten proportional. Mit t_0 ist der Zeitpunkt bezeichnet worden, in dem γ' gleich Null oder q gleich Null wird, d. h. die augenblickliche Drehungsaxe in die $x_1 z_1$-Ebene fällt.

Durch Einführung der Thetafunctionen kann man den gefundenen Formeln eine andere Gestalt geben. Es ist (E. F. S. 171)

$$
(17.)\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma u &= e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega_1}\middle|\tau\right)\\
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u &= e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\middle|\tau\right)\\
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u &= e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\middle|\tau\right)\\
\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u &= e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\,\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\middle|\tau\right).
\end{aligned}\right.
$$

Ferner werde

$$
\frac{u}{2\omega_1} = \frac{t-t_0}{2\omega_1} = v,
$$

$$
\frac{u_1}{2\omega_1} = \frac{t_1-t_0}{2\omega_1} = \frac{wi}{2\omega_1} = v'i
$$

und

$$
(18.)\quad 2\frac{l}{A}\omega_1 + \frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v'i) = \nu
$$

gesetzt, so sind sowohl v' wie auch ν nach dem vorher Bemerkten reelle Grössen. Aus diesen Formeln ergiebt sich

$$
\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)
$$

und

$$
(19.)\quad \frac{e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u-wi)^2}\,e^{i(\lambda+nu)}}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3 u} = \frac{\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}\cdot e^{W},
$$

worin

$$
W = (-4\eta_1\omega_1 v v' + \lambda + nu)\,i
$$

zu setzen ist. Der Factor vor der Exponentialfunction wird nach den Formeln (17.) gleich

$$
\frac{\vartheta_1(0)\;\vartheta_3(0)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)},
$$

während sich die Grösse W mit Benutzung von (13.) in folgender Weise umformen lässt:

$$W = -4\eta_1\omega_1 vv'i + i\lambda + 2i\omega_1 v\left(\frac{l}{A} + 2\eta_1 v' + \frac{1}{2i\omega_1}\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v'i)\right)$$

$$= i\lambda + iv\left(2\frac{l}{A}\omega_1 + \frac{1}{i}\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}(v'i)\right),$$

d. h. wegen (18.)

$$W = i(\lambda + \nu v).$$

Hiernach wird

$$\frac{e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u-wi)^2} e^{i(\lambda+nu)}}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3 u} = \frac{\vartheta_1(0)\;\vartheta_3(0)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} e^{i(\lambda+\nu v)}$$

und daher weiter nach (15.)

$$\alpha + i\beta = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\, e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u-wi)^2}}{\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt[4]{e_1-e_2}}\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt[4]{e_2-e_3}}}\cdot\frac{\vartheta_0(v-v'i)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3 u} e^{i(\lambda+nu)}$$

oder wegen (19.)

$$(20.)\qquad \alpha + i\beta = \frac{\vartheta_2(0)\;\vartheta_0(v-v'i)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} e^{i(\lambda+\nu v)};$$

entsprechend erhält man

$$\alpha' + i\beta' = \frac{e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u-wi)^2}}{\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt[4]{e_2-e_3}}}\cdot\frac{\vartheta_1(v-v'i)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3 u} e^{i(\lambda+nu)}$$

oder

$$(21.)\qquad \alpha' + i\beta' = \frac{\vartheta_3(0)\;\vartheta_1(v-v'i)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} e^{i(\lambda+\nu v)},$$

und schliesslich

$$\alpha'' + i\beta'' = \frac{1}{i}\frac{e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u-wi)^2}}{\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt[4]{e_1-e_2}}}\cdot\frac{\vartheta_3(v-v'i)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3 u} e^{i(\lambda+nu)}$$

oder

$$(22.)\qquad \alpha'' + i\beta'' = \frac{1}{i}\frac{\vartheta_1(0)\;\vartheta_3(v-v'i)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} e^{i(\lambda+\nu v)}.$$

In ähnlicher Weise verwandeln sich die Formeln (16.) in:

$$\gamma = -\frac{\vartheta_3(v'i)\,\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}, \tag{23.}$$

$$\gamma' = \frac{\vartheta_2(v'i)\,\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}, \tag{24.}$$

$$\gamma'' = \frac{1}{i}\,\frac{\vartheta_0(v'i)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}. \tag{25.}$$

Vermittelst der vorstehenden Formeln sind die neun Richtungscosinus durch die Thetafunctionen des Arguments

$$v = \frac{t-t_0}{2\omega_1}$$

dargestellt.

Wie schon vorher bemerkt worden ist, sind γ, γ', γ'' wirkliche periodische Functionen der Zeit, während bei den übrigen Richtungscosinus noch Exponentialfactoren hinzutreten. Es ist demnach zweckmässig, die Bewegung des Körpers als aus zwei Einzelbewegungen zusammengesetzt aufzufassen.

Zu dem Zwecke mögen die Ausdrücke vor den Exponentialfactoren von $\alpha+i\beta$, $\alpha'+i\beta'$, $\alpha''+i\beta''$ der Reihe nach mit $\alpha_1+i\beta_1$, $\alpha_1'+i\beta_1'$, $\alpha_1''+i\beta_1''$ bezeichnet werden, und es sei ferner

$$\lambda + \nu v = \psi$$

gesetzt, so sind α_1, α_1', α_1''; β_1, β_1', β_1'' periodische Functionen der Zeit t, während ψ eine reelle Grösse ist, die, von einer additiven Constanten abgesehen, sich mit der Zeit proportional ändert. Der in ψ auftretende Factor von t ist $\frac{\nu}{2\omega_1}$ und stellt die Geschwindigkeit dieser Änderung dar. Aus

$$\begin{aligned}
\alpha + i\beta &= (\alpha_1 + i\beta_1)\,e^{i\psi},\\
\alpha' + i\beta' &= (\alpha_1' + i\beta_1')\,e^{i\psi},\\
\alpha'' + i\beta'' &= (\alpha_1'' + i\beta_1'')\,e^{i\psi}
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 \cos\psi - \beta_1 \sin\psi,\\
\alpha' &= \alpha_1' \cos\psi - \beta_1' \sin\psi,\\
\alpha'' &= \alpha_1'' \cos\psi - \beta_1'' \sin\psi,\\
\beta &= \alpha_1 \sin\psi + \beta_1 \cos\psi,\\
\beta' &= \alpha_1' \sin\psi + \beta_1' \cos\psi,\\
\beta'' &= \alpha_1'' \sin\psi + \beta_1'' \cos\psi.
\end{aligned}$$

Denkt man sich also neben dem im Raume festen Coordinatensystem (x, y, z) ein zweites (X, Y, Z) der Art, dass es mit dem ersten denselben Anfangspunkt gemeinsam habe, dass die Z-Axe mit der z-Axe zusammenfalle, während die X-Axe mit der x-Axe den Winkel ψ bilde, sowie dass für ψ gleich Null die beiden Systeme zur Deckung gebracht werden können, so zeigen die vorstehenden Formeln, dass wenn α, β, γ die Coordinaten irgend eines Punktes in Bezug auf das System (x, y, z) bedeuten, sie in $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in Bezug auf das System (X, Y, Z) übergehen, falls nur

$$\gamma_1 = \gamma$$

angenommen wird. Da der Winkel ψ sich mit der Zeit proportional ändert, so dreht sich das zweite System um die z-Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit $\frac{\nu}{2\omega_1}$.

In Bezug auf dieses rotirende System (X, Y, Z) sind nun aber die Coordinaten eines jeden Punktes des beweglichen Körpers periodische Functionen der Zeit. Man kann sich demnach die Gesammtbewegung des Körpers in folgender Weise veranschaulichen. Denkt man sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem (X, Y, Z), das dem im Raume festen System (x, y, z) congruent ist, dessen Z-Axe mit der z-Axe zusammenfällt, dessen X-Axe mit der x-Axe zur Zeit $t = t_0$ den Winkel $\psi_0 = \lambda$ bildet, und das um die z-Axe mit constanter Geschwindigkeit $\frac{\nu}{2\omega_1}$ rotirt, so ist die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf dieses rotirende System periodisch. Im Allgemeinen kann man daraus nicht schliessen, dass auch die absolute Bewegung des Körpers, d. h. seine Bewegung gegen das im Raume feste System, periodisch verlaufe. Das ist vielmehr nur der Fall, wenn die beiden Grössen ν und $2\omega_1$ mit einander commensurabel sind. Diese Ergebnisse hat, wenn auch auf anderem Wege, zuerst Jacobi hergeleitet.

Siebenundzwanzigstes Kapitel.

Die Bewegung der augenblicklichen Drehungsaxe.

Es sei $\mathfrak{x}$ der Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf das mit dem Körper bewegliche System die Grössen p, q, r sind. Nach S. 271 (6.) stehen sie mit den Hauptträgheitsmomenten A, B, C und den Richtungscosinus γ, γ', γ'' in der Beziehung

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} Ap &= \gamma\, l \\ Bq &= \gamma' l \\ Cr &= \gamma'' l, \end{aligned}\right.$$

wobei l eine Constante bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgt

$$(2.)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2 = l^2.$$

Ferner gilt die Formel S. 273 (9.)

$$(3.)\qquad A\,p^2+B\,q^2+C\,r^2 = l_1^2,$$

worin l_1 ebenfalls eine Constante darstellt. Die Bahn, die der Punkt $\mathfrak{x}$ bei der Bewegung des Körpers beschreibt, wird daher in Bezug auf das mit dem Körper fest verbundene Coordinatensystem durch den Schnitt der beiden concentrischen Ellipsoide dargestellt, die durch die Gleichungen (2.) und (3.) definirt werden; sie ist also im Allgemeinen eine Raumcurve vierter Ordnung. Aus den Formeln (2.) und (3.) folgt

$$(4.)\qquad A(Al_1^2-l^2)p^2+B(Bl_1^2-l^2)q^2+C(Cl_1^2-l^2)r^2 = 0;$$

die betrachtete Curve ist mithin auf einem Kegel zweiten Grades gelegen, und dieser ist stets reell, da A, B, C positiv sind, und die beiden Grössen $Al_1^2-l^2$ und $l^2-Cl_1^2$ dasselbe Vorzeichen haben (S. 273).

Die Coordinaten des betrachteten Punktes ξ seien in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem mit P, Q, R bezeichnet, dann gelten die Formeln

$$(5.)\qquad \begin{cases} P = \alpha p + \alpha' q + \alpha'' r \\ Q = \beta p + \beta' q + \beta'' r \\ R = \gamma p + \gamma' q + \gamma'' r. \end{cases}$$

Setzt man für $\gamma, \gamma', \gamma''$ in den letzten Ausdruck die aus (1.) sich ergebenden Werthe ein, so erhält man

$$R = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{l},$$

d. h. nach (3.)

$$(6.)\qquad R = \frac{l_1^2}{l}.$$

Die Grösse R ist also von der Zeit unabhängig. Der Punkt ξ bewegt sich mithin in einer zur xy-Ebene parallelen unveränderlichen Ebene im Abstande $\frac{l_1^2}{l}$ von jener; sie ist die invariable Ebene genannt worden.

Die ebene Curve, die der Punkt ξ hiernach in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem beschreibt, lässt sich jedoch im Allgemeinen nicht so einfach erklären, wie die soeben betrachtete, die er in Bezug auf das mit dem Körper bewegliche zurücklegt. Die augenblickliche Drehungsaxe durchläuft im Raume einen Kegel, der auf dem vorher erwähnten Kegel zweiten Grades abrollt. Auf diese Weise hat Poinsot die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt zu veranschaulichen gesucht.

Um die Bewegung des Punktes ξ in der invariablen Ebene zu verfolgen, ist es nöthig, P und Q als Functionen der Zeit zu bestimmen. Zu dem Zwecke bilde man

$$\frac{P+iQ}{\alpha+i\beta} = \frac{(P+iQ)(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{P\alpha+Q\beta+i(Q\alpha-P\beta)}{1-\gamma^2}.$$

Aus den Formeln (5.) folgt aber mit Hilfe der zwischen den Richtungscosinus bestehenden Relationen

$$P\alpha + Q\beta = (1-\gamma^2)p - \gamma\gamma' q - \gamma\gamma'' r,$$

d. h. wegen (1.)

$$P\alpha + Q\beta = l\left((1-\gamma^2)\frac{\gamma}{A} - \gamma\gamma'\frac{\gamma'}{B} - \gamma\gamma''\frac{\gamma''}{C}\right)$$

und wegen S. 273 (10.)

$$P\alpha + Q\beta = -\frac{\gamma}{Al}(Al_1^2 - l^2).$$

Entsprechend findet man

$$Q\alpha - P\beta = -l\gamma'\gamma''\frac{B-C}{BC}.$$

Demnach ist

$$\frac{P+iQ}{\alpha+i\beta} = -\frac{1}{1-\gamma^2}\frac{Al_1^2-l^2}{Al}\left(\gamma + i\frac{Al^2(B-C)}{BC(Al_1^2-l^2)}\gamma'\gamma''\right).$$

Führt man in den Klammerausdruck auf der rechten Seite die Sigmafunctionen ein, indem man für γ, γ', γ'' ihre Ausdrücke S. 290 (16.) setzt, und benutzt ferner die erste Formel S. 274 (15.), so erhält man

$$\frac{P+iQ}{\alpha+i\beta} = \frac{e_1-e_3}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u\,\sigma_1(wi)\,\sigma_3(wi)\dfrac{BC}{l(B-C)} - \sigma u\,\sigma_2 u\,\sigma(wi)\,\sigma_2(wi)\dfrac{l(B-C)}{BC}}{\sigma_3^2 u\,\sigma_1^2(wi)}.$$

Den Gleichungen S. 281 (25.) zufolge ist aber

$$\frac{\sigma(wi)\,\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(wi)} = \frac{i}{l}\,\frac{BC}{B-C},$$

und damit wird

$$\frac{P+iQ}{\alpha+i\beta} = \frac{1}{i}\,\frac{e_1-e_3}{1-\gamma^2}\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u\,\sigma(wi)\,\sigma_2(wi) + \sigma u\,\sigma_2 u\,\sigma_1(wi)\,\sigma_3(wi)}{\sigma_3^2 u\,\sigma_1^2(wi)}.$$

Diese Formel lässt noch weitere Vereinfachungen zu. Zunächst ist nach der ersten Gleichung S. 290 (15.)

$$\alpha^2+\beta^2 = 1-\gamma^2 = (e_1-e_3)\frac{\sigma(u-wi)\,\sigma(u+wi)}{\sigma_3^2 u\,\sigma_1^2(wi)},$$

mithin

$$\frac{P+iQ}{\alpha+i\beta} = \frac{1}{i}\,\frac{\sigma_1 u\,\sigma_3 u\,\sigma(wi)\,\sigma_2(wi) + \sigma u\,\sigma_2 u\,\sigma_1(wi)\,\sigma_3(wi)}{\sigma(u+wi)\,\sigma(u-wi)};$$

macht man ferner von der Gleichung (E. F. S. 207 (13.))

$$\sigma_2(u-v)\,\sigma(u+v) = \sigma_1 u\,\sigma_3 u\,\sigma v\,\sigma_2 v + \sigma u\,\sigma_2 u\,\sigma_1 v\,\sigma_3 v$$

Gebrauch, so erhält man das einfache Ergebniss

$$\frac{P+iQ}{\alpha+i\beta} = \frac{1}{i}\,\frac{\sigma_2}{\sigma}(u-wi).$$

Es ist also mit Benutzung der ersten Formel S. 290 (15.)

$$P+iQ = \frac{1}{i}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2(u-wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3 u}\,e^{i(\lambda+nu)}. \tag{7.}$$

Diese Gleichung ist deswegen bemerkenswerth, weil sie sich vollständig in das System S. 290 (15.) einordnet. Hierdurch erhält die Function σ_2 des complexen Arguments $u-wi$ in derselben Weise eine geometrische und mechanische Deutung, wie dies die genannten Formeln für die übrigen Sigmafunctionen ermöglichen. Durch die Formel (7.) ist die Bewegung des Punktes $\mathfrak{x}$ in Verbindung mit der Angabe (6.), dass er stets in der invariablen Ebene gelegen sein muss, völlig bestimmt, d. h. es ist der Kegel bestimmt, den die augenblickliche Drehungsaxe während der Bewegung des Körpers im Raume beschreibt.

Die vorstehenden Formeln sind von Jacobi, wenn auch in anderer Form, entwickelt worden. Die ersten Untersuchungen über das behandelte Problem rühren von Euler her; von ihm stammt die Einführung der Hauptträgheitsaxen und der augenblicklichen Drehungsaxe. Auch Lagrange, Legendre und Laplace haben sich mit der Aufgabe beschäftigt, ohne sie indessen wesentlich weiter zu führen als Euler. Man begnügte sich damit, eine Differentialgleichung der Form

$$dt = \frac{dp}{\sqrt{R(p)}}$$

aufzustellen, der die Grösse p und entsprechend q und r als Functionen der Zeit zu genügen haben. Legendre führte einen Hilfswinkel φ ein, durch den sich p, q, r in elementarer Weise ausdrücken lassen, und fand alsdann

$$at+b = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo a, b Constanten bedeuten. Aber gerade in der Umkehrung des elliptischen Integrals liegt die hauptsächliche Schwierigkeit der Aufgabe. Man konnte jedoch zeigen, dass p, q, r reell periodische Functionen von t sind.

Euler hat statt der Grössen α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die nach ihm benannten Winkel eingeführt, wie bereits in der Einleitung dieses Abschnitts gesagt worden ist. Für den Eulerschen Winkel ψ findet sich

$$\psi-\psi_0 = C\int \frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

d. h. ein elliptisches Integral dritter Art. Dadurch dass Jacobi den Nachweis erbrachte, dass sich das elliptische Integral dritter Art durch Thetafunctionen darstellen lässt, gelang es ihm, die Grösse ψ durch einen Ausdruck der Form

$$e^{\psi i} = e^{Cvi} \frac{\vartheta_3(v - v'i)}{\vartheta_3(v + v'i)}$$

zu bestimmen, sodass also $\cos\psi$ und $\sin\psi$ durch ϑ-Functionen und eine Exponentialgrösse ausgedrückt werden.

Wir kommen noch einmal auf die Bestimmung der drei Componenten p, q, r der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit zurück. Anstatt sie aus den Formeln (1.) zu berechnen, nachdem man darin für $\gamma, \gamma', \gamma''$ die Werthe eingesetzt hat, wie sie etwa im fünfundzwanzigsten Kapitel (S. 281 (24.)) gefunden worden sind, kann man auch auf die Eulerschen Differentialgleichungen S. 267 (43.)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} qr,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} rp,$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} pq,$$

zurückgreifen und daraus durch Integration die Componenten p, q, r unmittelbar bestimmen. In den dadurch entstehenden Formeln tritt zugleich die Bedeutung der drei Grössen e_1, e_2, e_3, von denen die elliptischen Functionen abhängen, deutlicher zu Tage als zuvor.

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{B-C}{A} = a, \quad \frac{C-A}{B} = b, \quad \frac{A-B}{C} = c, \tag{8.}$$

so lauten diese Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= aqr \\ \frac{dq}{dt} &= brp \\ \frac{dr}{dt} &= cpq. \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

Es sei ferner

$$(10.)\qquad s = \frac{1}{3}(bcp^2 + caq^2 + abr^2),$$

dann wird

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\left(bcp\frac{dp}{dt} + caq\frac{dq}{dt} + abr\frac{dr}{dt}\right),$$

d. h. nach (9.)

$$(11.)\qquad \frac{ds}{dt} = 2abcpqr$$

oder

$$\frac{ds}{dt} = bc\frac{d(p^2)}{dt}.$$

Daraus ergiebt sich, wenn mit e_1 die Integrationsconstante bezeichnet wird,

$$(12.)\qquad s - bcp^2 = e_1;$$

entsprechend findet man

$$(13.)\qquad s - caq^2 = e_3,$$

$$(14.)\qquad s - abr^2 = e_2.$$

Durch Addition folgt daraus wegen (10.)

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

es können demnach e_1, e_2, e_3 willkürliche reelle Werthe erhalten, wenn sie nur mit der vorstehenden Bedingung verträglich sind.

Von den Grössen A, B, C ist angenommen worden, sie sollen von einander verschieden sein. Wenn

$$A > B > C,$$

so ist nach (8.)

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0;$$

wenn dagegen

$$A < B < C,$$

so ist

$$a < 0, \quad b > 0, \quad c < 0.$$

Aus den Gleichungen

$$e_1 - e_2 = -bcp^2 + abr^2,$$
$$e_1 - e_3 = -bcp^2 + acq^2,$$
$$e_2 - e_3 = -abr^2 + acq^2$$

folgt sodann, dass in jedem der eben betrachteten beiden Fälle

$$e_1 > e_3 \quad \text{und} \quad e_2 > e_3$$

sein muss. Wegen der Relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist daher nothwendig

$$e_3 < 0,$$

während eine der beiden Grössen e_1, e_2 positiv ist. Nun folgt aus (12.), (13.) und (14.)

$$(abcpqr)^2 = (s-e_1)(s-e_2)(s-e_3), \tag{15.}$$

mithin ist, der Gleichung (11.) zufolge,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

Die drei Integrationsconstanten sind also diejenigen Werthe von s, für die $\frac{ds}{dt}$ verschwindet, und es ist weiter

$$s = \wp(t-t_1), \tag{16.}$$

wo t_1 ebenfalls eine Integrationsconstante bedeutet.

Es sei nun e_1 die grösste der drei Zahlen e_1, e_2, e_3. Aus der Gleichung (15.) folgt, dass s entweder in dem Intervalle $(+\infty \dots e_1)$ oder in dem Intervalle $(e_2 \dots e_3)$ liegen muss, und aus der Gleichung (14.), da $-ab$ stets positiv ist, dass s kleiner als e_2 sein muss. Daher ist s in dem Intervalle $(e_2 \dots e_3)$ gelegen. Aus der Tabelle S. 21 folgt also, dass das Argument $t-t_1$ von der Form

$$\alpha + \omega_3$$

ist, wo α eine reelle Grösse und $2\omega_3$ die rein imaginäre Periode der $\wp$-Function bedeutet.

Aus den drei Gleichungen (12.), (13.), (14.) ergiebt sich unmittelbar

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{bc}} \frac{\sigma_1}{\sigma}(t-t_1) \\ q &= \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{ca}} \frac{\sigma_3}{\sigma}(t-t_1) \\ r &= \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{ab}} \frac{\sigma_2}{\sigma}(t-t_1), \end{aligned}\right. \tag{17.}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ den Werth ± 1 haben. Hierin zeigt sich klar, dass die auftretenden elliptischen Functionen nur von den Integrationsconstanten e_1, e_2, e_3 abhängen, während die durch die Abmessungen und die Massenvertheilung des Körpers gegebenen Grössen a, b, c als gesonderte Factoren auftreten.

Die Grösse t_1 lässt sich bestimmen, wenn zu irgend einer Zeit t_0 die Lage des beweglichen Körpers, d. h. die Werthe von p, q, r, somit auch von s bekannt sind, und es ist $t_1 - t_0$ gleich einem bestimmten elliptischen Integral erster Art. Zufolge (11.) ist alsdann auch der Werth von $\frac{ds}{dt}$ bekannt, und sein Vorzeichen fixirt. Demnach ist der Werth von $t_1 - t_0$ nur bis auf eine Periode eindeutig bestimmt. Die Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sind nicht willkürlich zu wählen, denn aus den Gleichungen

$$\frac{dp}{dt} = aqr$$

und (E. F. S. 96 (3.))

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}(t-t_1) = -\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}}(t-t_1)\frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}}(t-t_1)$$

folgt

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1.$$

Man kann also zwei der Quadratwurzeln $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$, $\sqrt{ab}$ mit beliebigen Vorzeichen annehmen, das der dritten ist dadurch mitbestimmt. Schreibt man die Gleichungen (17.) in der Form

$$(18.)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{\sqrt{b}\sqrt{c}}\dfrac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}(t-t_1) \\ q = \dfrac{1}{\sqrt{c}\sqrt{a}}\dfrac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}}(t-t_1) \\ r = \dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\dfrac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}}(t-t_1), \end{cases}$$

so können zwei der Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ beliebig fixirt werden, das der dritten ist dadurch bestimmt. Da indessen die Integrationsconstante t_1 nach dem soeben Bemerkten um eine Periode verändert werden kann, so ist wegen der Formeln

$$\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}(u+2\omega_\alpha) = \frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}u,$$
$$\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}(u+2\omega_\beta) = -\frac{\mathfrak{S}_\alpha}{\mathfrak{S}}u \qquad (\alpha \lesseqgtr \beta)$$

jede beliebige Zeichenbestimmung der Quadratwurzeln zulässig.

Die im Vorstehenden abgeleiteten Formeln gelten sämmtlich unter der Voraussetzung, dass keine zwei der Grössen A, B, C einander gleich sind. Es ist leicht zu übersehen, was im andern Falle eintritt. Ist z. B.

$$B = C,$$

so ist p constant, die Differentialgleichungen für q und r lassen sich unmittelbar integriren und ergeben diese Grössen als trigonometrische Functionen von $t-t_1$. Wenn

$$A = B = C,$$

so sind p, q, r alle drei constant, die augenblickliche Drehungsaxe bleibt im Raume unverändert, und die Umdrehungsgeschwindigkeit des Körpers um sie, $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, ist ebenfalls constant.

Die allgemeinen Formeln erleiden ferner besondere Abänderungen, wenn zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich werden. Die Ausnahmefälle, in denen dies eintritt, sollen jetzt besonders untersucht werden. Es war S. 274 (15.), S. 275 (16.)

$$\begin{aligned} ABC(e_1-e_3) &= (B-C)(Al_1^2-l^2), \\ ABC(e_2-e_3) &= (A-B)(l^2-Cl_1^2), \\ ABC(e_1-e_2) &= (A-C)(Bl_1^2-l^2). \end{aligned}$$

Da A, B, C wieder als sämmtlich von einander verschieden anzunehmen sind, so können nicht alle drei Grössen e_1, e_2, e_3 denselben Werth haben, und zwei dieser Grössen nur dann einander gleich werden, wenn die entsprechenden zweiten Factoren auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen verschwinden. Ist $e_1 \geqq e_2 \geqq e_3$, so kann e_1 nicht gleich e_3 werden, und es ist daher nur entweder $e_2 = e_3$ oder $e_1 = e_2$.

In der Theorie der Elliptischen Functionen (E. F. S. 101) ist gezeigt worden, dass wenn zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich werden, die Sigmafunctionen in Exponential- und trigonometrische Functionen übergehen. Ist

$$e_\alpha = e_\beta = -\frac{1}{2}e_\gamma,$$

so wird

$$\sigma u = e^{\frac{1}{4}e_\gamma u^2} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{3e_\gamma}{2}}\,u\right)}{\sqrt{\frac{3e_\gamma}{2}}},$$

$$\sigma_\alpha u = \sigma_\beta u = e^{\frac{1}{4}e_\gamma u^2},$$

$$\sigma_\gamma u = e^{\frac{1}{4}e_\gamma u^2} \cos\left(\sqrt{\frac{3e_\gamma}{2}}\,u\right).$$

Für $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$ folgt aus diesen Formeln

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_2(u-wi)}{\sigma_3 u} &= e^{\frac{1}{4}e_1((u-wi)^2-u^2)}\\ &= e^{-\frac{1}{4}e_1(w^2+2uwi)}.\end{aligned}$$

Da e_1 positiv ist (S. 301), so ist ferner

$$\sigma_1(wi) = e^{-\frac{1}{4}e_1 w^2} \frac{e^{\sqrt{\frac{3e_1}{2}}w} + e^{-\sqrt{\frac{3e_1}{2}}w}}{2},$$

und es wird (S. 289 (13.))

$$n = \frac{l}{A} + \frac{1}{i}\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(wi) = \frac{l}{A} + \frac{e_1}{2}w.$$

Setzt man diese Werthe in die Formel (7.) für $P+iQ$ ein, so erhält man

$$P+iQ = \frac{1}{i}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{e^{-\frac{1}{4}e_1(w^2+2uwi)}}{e^{-\frac{1}{4}e_1 w^2}} \cdot \frac{2}{e^{\sqrt{\frac{3e_1}{2}}w} + e^{-\sqrt{\frac{3e_1}{2}}w}}\, e^{i\left(\lambda + \frac{l}{A}u + \frac{e_1}{2}wu\right)}$$

oder

$$P+iQ = \frac{2}{i}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{e^{i\left(\lambda+\frac{l}{A}u\right)}}{e^{\sqrt{\frac{3e_1}{2}}w} + e^{-\sqrt{\frac{3e_1}{2}}w}}.$$

Diese Formel gilt also für $e_2 = e_3$ oder für

$$l^2 - l_1^2 C = 0.$$

Aus den Gleichungen S. 278 (20.) und dann weiter aus (1.) folgt sogleich

$$\begin{aligned}\gamma &= 0, & \gamma' &= 0, & \gamma'' &= 1;\\ p &= 0, & q &= 0, & r &= \text{const.}\end{aligned}$$

Wenn dagegen

$$e_1 = e_2$$

oder

$$l^2 - l_1^2 B = 0$$

ist, so hat man in den obigen Formeln $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ zu nehmen, und da e_3 negativ ist, erhält man

$$\sigma u = e^{\frac{1}{4} e_3 u^2} \frac{e^{\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u} - e^{-\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u}}{2\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}}},$$

$$\sigma_1 u = \sigma_2 u = e^{\frac{1}{4} e_3 u^2},$$

$$\sigma_3 u = e^{\frac{1}{4} e_3 u^2} \frac{e^{\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u} + e^{-\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u}}{2}.$$

Damit ergiebt sich aus den Gleichungen (1.) und S. 290 (16.)

$$Ap = g \frac{1}{e^{\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u} + e^{-\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u}},$$

$$Bq = g' \frac{e^{\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u} - e^{-\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u}}{e^{\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u} + e^{-\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u}},$$

$$Cr = g'' \frac{1}{e^{\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u} + e^{-\sqrt{-\frac{3 e_3}{2}} u}},$$

wo g, g', g'' drei von Null verschiedene Constanten bedeuten. Aus diesen Ausdrücken geht hervor, dass sich mit unbeschränkt wachsender Zeit die Grössen p und r der Grenze Null, q dagegen einer von Null verschiedenen Constanten nähern. Die augenblickliche Drehungsaxe strebt also mit fortschreitender Zeit einer festen Grenzlage zu, nämlich der mittleren Trägheitsaxe. Wird dagegen $u = t - t_0$ negativ unendlich gross, so werden zwar p und r wiederum gleich Null, q aber nimmt einen dem erwähnten entgegengesetzt gleichen Werth an.

Wenn daher u stetig alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so verändert die augenblickliche Drehungsaxe, von einer mit der mittleren Trägheitsaxe zusammenfallenden Richtung beginnend, stetig ihre Lage, bis sie in die entgegengesetzte Richtung übergeht.

Die beiden Ausnahmefälle $e_2 = e_3$ und $e_1 = e_2$ unterscheiden sich darin wesentlich, dass im ersten Falle die imaginäre Periode, im zweiten die reelle Periode unendlich gross wird. In jenem Falle liegt also immer noch eine reell periodische Bewegung vor, in diesem dagegen nicht. Die augenblickliche Drehungsaxe nähert sich vielmehr asymptotisch einer festen Lage im Raume, und die Drehungsgeschwindigkeit einer constanten Grösse.

Achtundzwanzigstes Kapitel.

Darstellung der neun Richtungscosinus durch vier Parameter.

Wir gehen jetzt noch einmal auf die schon im vierundzwanzigsten Kapitel betrachteten Beziehungen zwischen zwei räumlichen rechtwinkligen Coordinatensystemen mit demselben Anfangspunkte zurück. Euler hat die neun Richtungscosinus, durch die die Lage der Axen des einen Systems gegenüber dem anderen fixirt wird, ausser durch die bekannten drei Winkel φ, ψ, ϑ noch durch drei damit zusammenhängende Parameter λ, μ, ν so dargestellt, dass die zwischen den neun Richtungscosinus bestehenden, im vierundzwanzigsten Kapitel (S. 253 und S. 254) angegebenen Relationen identisch befriedigt werden. Die Richtungscosinus ergeben sich hierbei als rationale Functionen der drei Parameter. Im Folgenden werden zur Darstellung der Richtungscosinus vier Grössen benutzt werden, die mit den Eulerschen in einem leicht erkennbaren Zusammenhange stehen.

Man betrachte zwei rechtwinklige räumliche und mit einander congruente Coordinatensysteme mit demselben Nullpunkte O. Es sei P ein von O verschiedener Punkt, und x, y, z seien seine Coordinaten in Bezug auf das eine, x_1, y_1, z_1 in Bezug auf das andere System.

Es giebt bekanntlich eine von O ausgehende Grade OS der Art, dass jeder ihrer Punkte die gleichen Coordinaten sowohl in Bezug auf das erste, wie auch auf das zweite der beiden Coordinatensysteme hat. Beide Systeme können durch eine einfache Drehung um diese Gerade zur Deckung gebracht werden.

Es seien α'', β'', γ'' die Richtungscosinus der erwähnten Geraden OS und ferner u der Winkel, um den das System Ox_1, Oy_1, Oz_1 um die Gerade als Axe gedreht werden muss, damit es in die Lage des Systems Ox, Oy, Oz gelange. Dann handelt es sich zunächst darum, die zwischen den Coordinaten x_1, y_1, z_1, den Coordinaten x, y, z und den Constanten α'', β'', γ'' und u bestehenden Transformationsformeln aufzustellen.

Zu dem Zwecke werde für einen Augenblick angenommen, dass die beiden Systeme die z-Axe gemeinsam haben. Dann ist sie auch die Axe der Drehung, und man hat

$$(1.)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x\cos u - y\sin u \\ y_1 &= x\sin u + y\cos u \\ z_1 &= z. \end{aligned}\right.$$

Nunmehr werde die Gerade OS, um die die Drehung stattfinden soll, in beliebiger Lage angenommen. Man wähle ein drittes rechtwinkliges Coordinatensystem Ox', Oy', Oz', das ebenfalls den Punkt O zum Ursprung habe und mit dem System Ox, Oy, Oz congruent sei, dessen z'-Axe aber mit der Geraden OS zusammenfallen möge. Sind α, β, γ; α', β', γ' und, dem oben Gesagten entsprechend, α'', β'', γ'' die neun Richtungscosinus dieses Systems Ox', Oy', Oz' in Bezug auf das ursprüngliche Ox, Oy, Oz, so gelten die Formeln

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned}\right.$$

Dreht man dieses Coordinatensystem um seine z'-Axe, die Gerade OS, um den Winkel u, so wird es nach der Drehung in ein System $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$ übergehen, für das die Gleichungen

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{x} &= x'\cos u - y'\sin u \\ \bar{y} &= x'\sin u + y'\cos u \\ \bar{z} &= z' \end{aligned}\right.$$

gelten müssen. Soll nun, der Voraussetzung zufolge, das System Ox, Oy, Oz durch dieselbe Drehung um OS in das System Ox_1, Oy_1, Oz_1 übergeführt werden, so müssen zwischen diesem und dem System $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$ dieselben Transformationsformeln gelten, wie zwischen Ox, Oy, Oz und Ox', Oy', Oz', d. h. die Formeln

$$(4.)\quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 + \gamma\, z_1 \\ \bar{y} = \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1 \\ \bar{z} = \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1. \end{cases}$$

Durch Auflösung nach x_1, y_1, z_1 ergiebt sich hieraus

$$(5.)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha\bar{x} + \alpha'\bar{y} + \alpha''\bar{z} \\ y_1 = \beta\bar{x} + \beta'\bar{y} + \beta''\bar{z} \\ z_1 = \gamma\bar{x} + \gamma'\bar{y} + \gamma''\bar{z}, \end{cases}$$

und es ist nach (3.)

$$x_1 = \alpha(x'\cos u - y'\sin u) + \alpha'(x'\sin u + y'\cos u) + \alpha'' z'$$

oder

$$(6.)\quad x_1 = (\alpha x' + \alpha' y')\cos u - (\alpha y' - \alpha' x')\sin u + \alpha'' z'.$$

Aus (2.) folgt aber

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$

also

$$\alpha x' + \alpha' y' = x - \alpha'' z',$$

und ferner

$$\begin{aligned} \alpha y' - \alpha' x' &= \alpha(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) - \alpha'(\alpha x + \beta y + \gamma z) \\ &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')\,y - (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\,z \\ &= \gamma'' y - \beta'' z. \end{aligned}$$

Trägt man diese Werthe in die Formel (6.) ein und führt dieselbe Rechnung auch für die Coordinaten y_1 und z_1 durch, so erhält man die gesuchten Transformationsformeln in der Gestalt

$$(7.)\quad \begin{cases} x_1 = x\cos u + (\beta'' z - \gamma'' y)\sin u + \alpha''(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)(1 - \cos u) \\ y_1 = y\cos u + (\gamma'' x - \alpha'' z)\sin u + \beta''(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)(1 - \cos u) \\ z_1 = z\cos u + (\alpha'' y - \beta'' x)\sin u + \gamma''(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)(1 - \cos u). \end{cases}$$

Sie enthalten, wie verlangt, auf den rechten Seiten ausser den Coordinaten x, y, z nur noch den Drehungswinkel u und die drei Richtungscosinus, die die Lage der Drehungsaxe OS bestimmen. Die in den gewöhnlichen Transformationsformeln auftretenden neun Richtungscosinus sind also hier durch die vier Grössen $\alpha'', \beta'', \gamma'', u$ vertreten, und es besteht zwischen ihnen nur die eine Relation

$$\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 = 1. \tag{8.}$$

Man kann nun die neun Richtungscosinus der allgemeinen Coordinatentransformation noch in einer anderen Weise darstellen. Die Gleichung (8.) lässt sich dadurch identisch befriedigen, dass man

$$\left\{\begin{aligned} \alpha'' &= \cos\omega\sin\eta \\ \beta'' &= \sin\omega\sin\eta \\ \gamma'' &= \cos\eta, \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

und die Relation

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2 = 1$$

dadurch, dass man ferner

$$\left\{\begin{aligned} \gamma &= \cos\omega'\sin\eta \\ \gamma' &= \sin\omega'\sin\eta \end{aligned}\right. \tag{10.}$$

setzt. Die noch übrigen Richtungscosinus lassen sich aber vermöge der zwischen ihnen bestehenden Relationen

$$\alpha\beta'-\beta\alpha' = \gamma'', \quad \text{u. s. w.},$$

wie sie im vierundzwanzigsten Kapitel (S. 254) zusammengestellt worden sind, durch die Winkel ω, ω' und η ausdrücken. Man kann drei dieser Relationen in eine Gleichung zusammenziehen:

$$(\alpha+i\beta)^2+(\alpha'+i\beta')^2+(\alpha''+i\beta'')^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch befriedigt, wenn

$$\left\{\begin{aligned} \alpha+i\beta &= g^2-h^2 \\ \alpha'+i\beta' &= -i(g^2+h^2) \\ \alpha''+i\beta'' &= 2gh \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

gesetzt wird. Dabei kann man das Vorzeichen von g beliebig wählen, das von h ist dann aber vermöge der letzten Formel dadurch mitbestimmt.

Die beiden Grössen g und h sind complex; es seien g_1 und h_1 die zu g und h conjugirten Grössen. Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} \alpha-i\beta &= g_1^2-h_1^2 \\ \alpha'-i\beta' &= i(g_1^2+h_1^2) \\ \alpha''-i\beta'' &= 2g_1h_1, \end{aligned}\right. \tag{12.}$$

und aus der Relation

$$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)+(\alpha'+i\beta')(\alpha'-i\beta')+(\alpha''+i\beta'')(\alpha''-i\beta'') = \alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2+\alpha''^2+\beta''^2 = 2$$

folgt weiter

$$(g^2-h^2)(g_1^2-h_1^2)+(g^2+h^2)(g_1^2+h_1^2)+4ghg_1h_1 = 2$$

oder

$$(gg_1+hh_1)^2 = 1;$$

da die beiden Producte gg_1 und hh_1 positive Grössen sind, so ergiebt sich daraus

$$gg_1+hh_1 = 1. \tag{13.}$$

Um nun die Ausdrücke für $\gamma, \gamma', \gamma''$ zu berechnen, bilde man

$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha &= g^2-h^2+g_1^2-h_1^2 \\ 2i\beta &= g^2-h^2-g_1^2+h_1^2 \\ 2i\alpha' &= g^2+h^2-g_1^2-h_1^2 \\ -2\beta' &= g^2+h^2+g_1^2+h_1^2 \\ \alpha'' &= gh+g_1h_1 \\ i\beta'' &= gh-g_1h_1 \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

und hieraus $\alpha'\beta''-\beta'\alpha'' = \gamma$ u. s. w., so erhält man nach einer einfachen Rechnung mit Rücksicht auf (13.)

$$\left\{\begin{aligned} \gamma &= gh_1+hg_1 \\ i\gamma' &= gh_1-hg_1 \\ \gamma'' &= hh_1-gg_1. \end{aligned}\right. \tag{15.}$$

Man setze jetzt

$$\left\{\begin{aligned} g &= \lambda+i\mu \\ h &= \nu+i\varrho, \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

also

$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= \lambda-i\mu \\ h_1 &= \nu-i\varrho, \end{aligned}\right. \tag{17.}$$

so besteht nach (13.) die Relation

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2 = 1. \tag{18.}$$

Dadurch entstehen aus den Gleichungen (14.) die symmetrisch gebauten Formeln

$$(19.)\qquad \begin{cases} \alpha \;\;= \lambda^2+\varrho^2-\mu^2-\nu^2 \\ \alpha' \;= 2(\lambda\mu+\nu\varrho) \\ \alpha'' = 2(\lambda\nu-\mu\varrho), \end{cases}$$

$$(20.)\qquad \begin{cases} \beta \;\;= 2(\lambda\mu-\nu\varrho) \\ \beta' \;= \varrho^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 \\ \beta'' = 2(\mu\nu+\lambda\varrho), \end{cases}$$

$$(21.)\qquad \begin{cases} \gamma \;\;= 2(\lambda\nu+\mu\varrho) \\ \gamma' \;= 2(\mu\nu-\lambda\varrho) \\ \gamma'' = \nu^2+\varrho^2-\lambda^2-\mu^2. \end{cases}$$

Durch Division mit $\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2$ erhält man hieraus homogene Ausdrücke für die neun Richtungscosinus, und wenn man dann $\frac{\lambda}{\varrho}, \frac{\mu}{\varrho}, \frac{\nu}{\varrho}$ einführte, so würde man daraus die erwähnten von Euler herrührenden rationalen Formeln für die Transformation eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems herleiten können.

Aus diesen Gleichungen folgt noch wegen (18.)

$$(22.)\qquad \alpha+\beta'+\gamma''+1 = 4\varrho^2$$

und

$$(23.)\qquad \begin{cases} \alpha'-\beta \;= 4\nu\varrho \\ \beta''-\gamma' = 4\lambda\varrho \\ \gamma\;-\alpha'' = 4\mu\varrho; \end{cases}$$

man sieht ferner, dass die neun Richtungscosinus sämmtlich ungeändert bleiben, wenn alle vier Grössen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ das Zeichen wechseln, sowie dass die Vorzeichen der Grössen λ, μ, ν bestimmt sind, wenn das von ϱ willkürlich angenommen worden ist.

Man kann $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ auch durch die vorher eingeführten Winkel ω, ω', η darstellen. Nach (9.) und (10.) ist nämlich

$$(24.)\qquad \begin{cases} \alpha''+i\beta'' = \sin\eta\, e^{i\omega} \\ \gamma\;+i\gamma' = \sin\eta\, e^{i\omega'} \\ \qquad\;\; \gamma'' = \cos\eta, \end{cases}$$

oder nach (19.), (20.), (21.)

$$(25.)\qquad \begin{cases} 2(\lambda+i\mu)(\nu+i\varrho) = \sin\eta\, e^{i\omega} \\ 2(\lambda+i\mu)(\nu-i\varrho) = \sin\eta\, e^{i\omega'} \\ \nu^2+\varrho^2-\lambda^2-\mu^2 = \cos\eta. \end{cases}$$

Aus der dritten dieser Gleichungen ergiebt sich wegen (18.)

$$\lambda^2+\mu^2 = \sin^2\frac{\eta}{2},$$

$$\nu^2+\varrho^2 = \cos^2\frac{\eta}{2}$$

und aus den beiden ersten

$$\frac{\lambda+i\mu}{\lambda-i\mu} = e^{i(\omega+\omega')},$$

$$\frac{\nu+i\varrho}{\nu-i\varrho} = e^{i(\omega-\omega')},$$

mithin

$$\lambda\sin\frac{\omega+\omega'}{2} = \mu\cos\frac{\omega+\omega'}{2},$$

$$\nu\sin\frac{\omega-\omega'}{2} = \varrho\cos\frac{\omega-\omega'}{2}.$$

Demnach folgt schliesslich, wenn man überall die positiven Vorzeichen bevorzugt,

$$(26.)\qquad \begin{cases} \lambda = \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\omega+\omega'}{2} \\ \mu = \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\omega+\omega'}{2} \\ \nu = \cos\frac{\eta}{2}\cos\frac{\omega-\omega'}{2} \\ \varrho = \cos\frac{\eta}{2}\sin\frac{\omega-\omega'}{2}. \end{cases}$$

Ist nun ein Punkt mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 gegeben, und sind x, y, z seine Coordinaten in Bezug auf ein neues System, das mit dem ursprünglichen denselben Anfangspunkt O hat, ihm congruent ist, und dessen Lage durch die neun Richtungscosinus bestimmt ist, so gelten die Gleichungen

$$x_1 = \alpha x+\alpha' y+\alpha'' z,\quad \text{u. s. w.},$$

d. h. nach Einführung der Ausdrücke (19.)

$$x_1 = (\lambda^2+\varrho^2-\mu^2-\nu^2)x + 2(\lambda\mu+\nu\varrho)y + 2(\lambda\nu-\mu\varrho)z$$

oder

$$x_1 = (\varrho^2-\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x - 2\varrho(\mu z-\nu y) + 2\lambda(\lambda x+\mu y+\nu z).$$

Man betrachte nun λ, μ, ν als die Coordinaten eines Punktes S und denke sich die Gerade OS gezogen; ihre Richtungscosinus seien ξ, η, ζ. Setzt man

$$(27.)\qquad \lambda = \varkappa\xi,\quad \mu = \varkappa\eta,\quad \nu = \varkappa\zeta,$$

so muss wegen

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$$

nach (18.)

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = \varkappa^2 = 1-\varrho^2$$

sein. Damit wird

$$(28.)\qquad x_1 = (1-2\varkappa^2)x - 2\varkappa\varrho(\eta z-\zeta y) + 2\varkappa^2\xi(\xi x+\eta y+\zeta z).$$

Vergleicht man diese Formel mit der ersten Gleichung (7.), so findet man

$$1-2\varkappa^2 = 2\varrho^2-1 = \cos u,$$

daher

$$\varkappa^2 = 1-\varrho^2 = \frac{1-\cos u}{2} = \sin^2\frac{u}{2},$$

und man kann

$$(29.)\qquad \begin{cases} \varkappa = -\sin\dfrac{u}{2} \\ \varrho = -\cos\dfrac{u}{2}, \end{cases}$$

also

$$2\varkappa\varrho = \sin u$$

setzen. Dadurch erhält man

$$(30.)\qquad \begin{cases} \lambda = -\sin\dfrac{u}{2}\cdot\xi \\ \mu = -\sin\dfrac{u}{2}\cdot\eta \\ \nu = -\sin\dfrac{u}{2}\cdot\zeta. \end{cases}$$

Nun lässt sich leicht einsehen, dass die Gerade OS mit den Richtungscosinus ξ, η, ζ diejenige Axe ist, um die das Coordinatensystem Ox, Oy, Oz um den Winkel u gedreht werden muss, wenn es mit dem System Ox_1, Oy_1, Oz_1 zusammenfallen soll. Denn setzt man für x, y, z die Coordinaten des Punktes S, nämlich λ, μ, ν, so findet man für x_1 aus (28.) den Werth λ; und in entsprechender Weise würde man für y_1 und z_1 die Werthe μ und ν erhalten. Der Punkt S, und somit alle Punkte der Geraden OS behalten also bei der Transformation des Coordinatensystems ihre Coordinaten ungeändert bei.

Die im Vorstehenden entwickelten Formeln mögen nun dazu benutzt werden, die Ausdrücke für die Componenten p, q, r der Drehungsgeschwindigkeit eines starren Körpers um die augenblickliche Drehungsaxe in eine andere Gestalt zu bringen. Diese Componenten waren durch die Gleichungen S. 257 (16.)

$$(31.)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} \\ q &= \alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt} \\ r &= \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned}\right.$$

gegeben. Führt man darin für die Richtungscosinus die Ausdrücke (19.), (20.), (21.) ein und berücksichtigt die Gleichung (18.), so erhält man nach einer einfachen Rechnung folgende Formeln:

$$(32.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}p &= -\varrho \frac{d\lambda}{dt} + \nu \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{d\nu}{dt} + \lambda \frac{d\varrho}{dt} \\ \frac{1}{2}q &= -\nu \frac{d\lambda}{dt} - \varrho \frac{d\mu}{dt} + \lambda \frac{d\nu}{dt} + \mu \frac{d\varrho}{dt} \\ \frac{1}{2}r &= +\mu \frac{d\lambda}{dt} - \lambda \frac{d\mu}{dt} - \varrho \frac{d\nu}{dt} + \nu \frac{d\varrho}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ferner besteht wegen (18.) die Relation

$$(33.)\quad 0 = \lambda \frac{d\lambda}{dt} + \mu \frac{d\mu}{dt} + \nu \frac{d\nu}{dt} + \varrho \frac{d\varrho}{dt}.$$

Löst man diese vier Gleichungen nach den Differentialquotienten auf, so findet man

$$
(34.)\quad \begin{cases}
2\dfrac{d\lambda}{dt} = -\varrho p - \nu q + \mu r \\
2\dfrac{d\mu}{dt} = +\nu p - \varrho q - \lambda r \\
2\dfrac{d\nu}{dt} = -\mu p + \lambda q - \varrho r \\
2\dfrac{d\varrho}{dt} = +\lambda p + \mu q + \nu r.
\end{cases}
$$

Diese vier Formeln ersetzen die neun Gleichungen S. 259 (21.), (22.), (23.). Man kann sie ebenfalls durch Sigmafunctionen auflösen und erhält Ergebnisse, die sich durch Transformation in diejenigen verwandeln lassen, die in den vorhergehenden Kapiteln gefunden worden sind.

Neunundzwanzigstes Kapitel.

Über die Bewegung eines starren der Schwere unterworfenen Körpers um einen festen Punkt.

Die im vorhergehenden Kapitel gefundenen Darstellungen der neun Richtungscosinus der drei Axen eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems und der drei Componenten der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit durch die vier Parameter λ, μ, ν, ϱ mögen nun auf einen speciellen Fall der Aufgabe angewendet werden, die Bewegung eines starren um einen festen Punkt O drehbaren Körpers zu bestimmen, der der Schwerkraft unterworfen ist. Der Schwerpunkt des Körpers soll aber nicht mit dem Punkte O zusammenfallen; denn dann würde, wie auf S. 266 auseinandergesetzt worden ist, die Aufgabe dieselbe sein wie in dem Falle, wo überhaupt keine äussere Kraft auf den Körper einwirkt.

Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Schwerpunktes des starren Körpers, bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen, M seine Gesammtmasse, ferner möge die z-Axe des im Raume festen Coordinatensystems mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfallen, endlich soll die Schwerkraft die Grösse $2g$ haben; so gelten die Differentialgleichungen S. 268 (44.):

$$(1.)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)qr + 2gM(y_0\gamma'' - z_0\gamma') \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)rp + 2gM(z_0\gamma\ - x_0\gamma'') \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)pq + 2gM(x_0\gamma' - y_0\gamma), \end{cases}$$

worin A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente des Körpers und p, q, r die Componenten der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit in Bezug auf die

Hauptträgheitsaxen bedeuten. Die hier vorgelegte Aufgabe ist in vollständiger Allgemeinheit noch nicht gelöst worden. Die folgenden Untersuchungen mögen auf den speciellen Fall beschränkt werden, dass zwei von den Hauptträgheitsmomenten einander gleich sind, und der Schwerpunkt auf der dritten Hauptträgheitsaxe gelegen ist.

Es werde demzufolge

$$A = B \tag{2.}$$

und

$$x_0 = y_0 = 0 \tag{3.}$$

angenommen und weiter

$$2gMz_0 = D \tag{4.}$$

gesetzt. Dann lauten die Differentialgleichungen (1.)

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)qr - D\gamma' \\ A\frac{dq}{dt} &= -(A-C)rp + D\gamma \\ \frac{dr}{dt} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

und wenn man für γ und γ' ihre Werthe S. 312 (21.),

$$\begin{aligned} \gamma &= 2(\lambda\nu + \mu\varrho), \\ \gamma' &= 2(\mu\nu - \lambda\varrho), \end{aligned}$$

einführt, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)qr - 2D(\mu\nu - \lambda\varrho) \\ A\frac{dq}{dt} &= -(A-C)rp + 2D(\lambda\nu + \mu\varrho). \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

Aus der dritten Gleichung (5.) ist ersichtlich, dass r von der Zeit unabhängig ist; man kann ferner den Richtungssinn der Hauptträgheitsaxen stets so wählen, dass der constante Werth von r, der von Null verschieden vorausgesetzt werden möge, ein positives Vorzeichen erhält.

Zu den vorstehenden Differentialgleichungen treten nun noch die Formeln S. 316 (34.) hinzu, denen die Ableitungen der vier Grössen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ zu genügen haben. Man kann diese Formeln in folgende zwei zusammenfassen:

$$(7.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{d(\lambda+i\mu)}{dt} = i(p+iq)(\nu+i\varrho)-ir(\lambda+i\mu) \\ 2\dfrac{d(\nu+i\varrho)}{dt} = i(p-iq)(\lambda+i\mu)+ir(\nu+i\varrho). \end{cases}$$

Aus (6.) erhält man weiter die Gleichung

$$(8.)\quad A\frac{d(p+iq)}{dt} = -i(A-C)(p+iq)r+2Di(\lambda+i\mu)(\nu-i\varrho).$$

Nimmt man noch die Relation S. 311 (18.),

$$(9.)\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2 = 1,$$

hinzu, so ersetzen die Formeln (7.), (8.) und (9.) zusammen mit der Angabe, dass r eine positive Constante sein soll, alle vorhergehenden Relationen zwischen den sieben Grössen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ und p, q, r.

Zum Zwecke der Integration der Differentialgleichungen (7.) und (8.) setze man, unter ξ, ξ_1 reelle Grössen verstehend,

$$(10.)\quad (\lambda+i\mu)(\nu-i\varrho)(p-iq) = \xi+i\xi_1.$$

Dann wird

$$(11.)\quad (\lambda-i\mu)(\nu+i\varrho)(p+iq) = \xi-i\xi_1,$$

und man erhält aus (7.) und (8.)

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\log(\lambda+i\mu)}{dt} = -\dfrac{ir}{2}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\xi-i\xi_1}{\lambda^2+\mu^2} \\ \dfrac{d\log(\nu+i\varrho)}{dt} = \dfrac{ir}{2}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\xi+i\xi_1}{\nu^2+\varrho^2} \\ \dfrac{d\log(p+iq)}{dt} = -ir\dfrac{A-C}{A}+2i\dfrac{D}{A}\dfrac{\xi+i\xi_1}{p^2+q^2}. \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen i mit $-i$ und vereinigt sodann die erhaltenen Formeln mit den vorstehenden durch Addition, so findet man

$$\frac{d\log(\lambda^2+\mu^2)}{dt} = \frac{\xi_1}{\lambda^2+\mu^2},$$
$$\frac{d\log(\nu^2+\varrho^2)}{dt} = -\frac{\xi_1}{\nu^2+\varrho^2},$$
$$\frac{d\log(p^2+q^2)}{dt} = -4\frac{D}{A}\frac{\xi_1}{p^2+q^2},$$

oder

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{d(\lambda^2+\mu^2)}{dt} = \xi_1 \\ \dfrac{d(\nu^2+\varrho^2)}{dt} = -\xi_1 \\ \dfrac{d(p^2+q^2)}{dt} = -4\dfrac{D}{A}\xi_1. \end{cases}$$

Die logarithmische Differentiation der Gleichung (10.) ergiebt ferner mit Rücksicht auf die soeben gefundenen Formeln

$$\frac{d\log(\xi+i\xi_1)}{dt} = -ir\frac{C}{A}+\frac{i}{2}(\xi-i\xi_1)\left(\frac{1}{\lambda^2+\mu^2}-\frac{1}{\nu^2+\varrho^2}-4\frac{D}{A}\frac{1}{p^2+q^2}\right);$$

wegen

$$(14.)\quad \xi^2+\xi_1^2 = (\lambda^2+\mu^2)(\nu^2+\varrho^2)(p^2+q^2)$$

folgt daraus

$$\frac{d(\xi+i\xi_1)}{dt} = -ir\frac{C}{A}(\xi+i\xi_1)+\frac{i}{2}\Big((\nu^2+\varrho^2)(p^2+q^2)-(\lambda^2+\mu^2)(p^2+q^2)-4\frac{D}{A}(\lambda^2+\mu^2)(\nu^2+\varrho^2)\Big).$$

Vergleicht man in dieser Formel beiderseits die reellen und die imaginären Bestandtheile mit einander, so erhält man

$$(15.)\quad \frac{d\xi}{dt} = r\frac{C}{A}\xi_1,$$

$$(16.)\quad \frac{d\xi_1}{dt} = -r\frac{C}{A}\xi+\frac{1}{2}\Big((\nu^2+\varrho^2)(p^2+q^2)-(\lambda^2+\mu^2)(p^2+q^2)-4\frac{D}{A}(\lambda^2+\mu^2)(\nu^2+\varrho^2)\Big).$$

Die Gleichung (15.) zeigt, dass ξ_1 der Ableitung von ξ mit einem constanten Factor proportional ist. Die drei Formeln (13.) verwandeln sich dadurch in die folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{d(\lambda^2+\mu^2)}{dt} &= \frac{A}{rC}\frac{d\xi}{dt}, \\ \frac{d(\nu^2+\varrho^2)}{dt} &= -\frac{A}{rC}\frac{d\xi}{dt}, \\ \frac{d(p^2+q^2)}{dt} &= -4\frac{D}{rC}\frac{d\xi}{dt}. \end{aligned}$$

Ihre Integration ergiebt, wenn unter c_1, c_2, c_3 drei reelle Constanten verstanden werden,

$$(17.)\quad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2 = \dfrac{A}{rC}(\xi-c_1) \\ \nu^2+\varrho^2 = -\dfrac{A}{rC}(\xi-c_2) \\ p^2+q^2 = -4\dfrac{D}{rC}(\xi-c_3). \end{cases}$$

Nach der Formel (14.) wird also

$$(18.)\quad \xi^2+\xi_1^2 = 4\frac{A^2D}{r^3C^3}(\xi-c_1)(\xi-c_2)(\xi-c_3).$$

Eliminirt man nun aus (15.) und (18.) die Grösse ξ_1, so erhält man folgende Differentialgleichung, der die Grösse ξ als Function von t zu genügen hat:

$$(19.)\quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\frac{D}{rC}(\xi-c_1)(\xi-c_2)(\xi-c_3)-\frac{r^2C^2}{A^2}\xi^2.$$

Diese Differentialgleichung zeigt, dass ξ eine elliptische Function des Arguments t ist. Nachdem ξ aus ihr bestimmt ist, sind auch die Grössen $\lambda^2+\mu^2$, $\nu^2+\varrho^2$, p^2+q^2 den Formeln (17.) gemäss als bekannt anzusehen. Da weiter auch ξ_1 nach (15.) gegeben ist, so lassen sich $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ und p, q aus den Gleichungen (12.) durch Quadraturen berechnen.

Wegen (9.) besteht noch die Beziehung

$$(20.)\quad \frac{A}{rC}(c_2-c_1) = 1.$$

Wenn man also die Werthe der Integrationsconstanten vorschreibt, so ist damit auch der Werth von r bestimmt, und es ist weiter

$$(21.)\quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = 4\frac{D}{A(c_2-c_1)}(\xi-c_1)(\xi-c_2)(\xi-c_3)-(c_2-c_1)^2\xi^2.$$

Aus der Gleichung (20.) folgt, dass

$$c_2 > c_1$$

sein muss, da r als positive Grösse vorausgesetzt worden war. Die beiden ersten Gleichungen (17.) sagen ferner aus, dass

$$c_1 < \xi < c_2,$$

und die dritte jener Gleichungen, dass auch ξ kleiner als c_3 sein muss; es ist somit c_1 die kleinste der drei Grössen c_1, c_2, c_3.

Ertheilt man nun ξ irgend einen zwischen c_1 und c_2 gelegenen Werth ξ_0, so muss der Gleichung (21.) zufolge die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende ganze Function dritten Grades von ξ,

$$R(\xi) = 4\frac{D}{A(c_2-c_1)}(\xi-c_1)(\xi-c_2)(\xi-c_3)-(c_2-c_1)^2\xi^2, \tag{22.}$$

einen positiven Werth haben. Für $\xi = c_1$ wird aber

$$R(c_1) = -(c_2-c_1)^2 c_1^2$$

negativ. Somit liegt eine reelle Wurzel der Gleichung

$$R(\xi) = 0$$

zwischen c_1 und dem betrachteten Werthe ξ_0 von ξ, der kleiner als c_2 ist. Setzt man $\xi = c_2$, so wird $R(c_2)$ wiederum negativ; demnach liegt eine zweite reelle Wurzel zwischen ξ_0 und c_2. Es sind also zwei und demnach alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung reell. Sie seien mit a_1, a_2, a_3 in solcher Reihenfolge bezeichnet, dass

$$a_1 > a_2 > a_3;$$

dann ist a_3 grösser als c_1, kleiner als c_2 und auch kleiner als c_3. Damit $R(\xi)$ einen positiven Werth erhalte, muss also ξ in dem Intervall $(a_3 \ldots a_2)$ gelegen sein.

Man setze

$$\xi = \varphi(t)$$

und bezeichne mit t_1, t_2, t_3 solche Werthe von t, für die

$$\varphi(t_1) = c_1, \quad \varphi(t_2) = c_2, \quad \varphi(t_3) = c_3$$

wird. Dann kann man für die entsprechenden Werthe der Ableitungen

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'(t_1) &= i(c_2-c_1)c_1 \\ \varphi'(t_2) &= -i(c_2-c_1)c_2 \\ \varphi'(t_3) &= -i(c_2-c_1)c_3 \end{aligned}\right. \tag{23.}$$

nehmen. Nach (15.) wird ferner

$$\xi_1 = \frac{A}{rC}\varphi'(t).$$

Die erste Differentialgleichung (12.) lässt sich mit Hilfe von (17.) in folgende Form bringen:

$$\frac{d\log(\lambda+i\mu)}{dt} = -\frac{ir}{2}+\frac{ir}{2}\frac{C}{A}+\frac{1}{2}\frac{\xi_1+ic_1}{\frac{A}{rC}(\xi-c_1)}$$

oder wegen (20.) und (23.)

$$(24.)\qquad \frac{d\log(\lambda+i\mu)}{dt} = \frac{ir}{2}\frac{C-A}{A}+\frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_1)}{\varphi(t)-\varphi(t_1)}.$$

In derselben Weise findet man für die zweite der Differentialgleichungen (12.):

$$(25.)\qquad \frac{d\log(\nu+i\varrho)}{dt} = -\frac{ir}{2}\frac{C-A}{A}+\frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_2)}{\varphi(t)-\varphi(t_2)},$$

und schliesslich für die dritte:

$$(26.)\qquad \frac{d\log(p+iq)}{dt} = -\frac{ir}{2}\frac{2A-C}{A}+\frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_3)}{\varphi(t)-\varphi(t_3)}.$$

Um nun die elliptische Differentialgleichung (21.) oder

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{R(\xi)}$$

auf die Normalform für die $\wp$-Function zu bringen, setze man (E. F. S. 15 (VI.))

$$(27.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{4}\dfrac{R'(a_3)}{\xi-a_3}+\dfrac{1}{24}R''(a_3) = s \\[2ex] \dfrac{1}{4}\dfrac{R'(a_3)}{(\xi-a_3)^2}\sqrt{R(\xi)} = \sqrt{S}, \end{cases}$$

so entsteht

$$(28.)\qquad \frac{ds}{dt} = -\sqrt{S}.$$

Sind e_1, e_2, e_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) = 0,$$

und ist die Bezeichnung den Bedingungen

$$e_1 > e_2 > e_3$$

gemäss gewählt, so entsprechen den Werthen

$$\xi = \quad \infty \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

die Werthe

$$s = \quad e_3 \quad e_2 \quad e_1 \quad \infty.$$

Aus (22.) folgt

$$\begin{aligned} R(\xi) &= \quad 4\frac{D}{A(c_2-c_1)}(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3), \\ \frac{1}{4}R'(a_3) &= \quad \frac{D}{A(c_2-c_1)}(a_1-a_3)(a_2-a_3), \\ \frac{1}{24}R''(a_3) &= -\frac{1}{3}\frac{D}{A(c_2-c_1)}(a_1+a_2-2a_3), \end{aligned}$$

somit aus (27.)

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{24}R''(a_3)+\frac{D}{A}\frac{a_1-a_3}{c_2-c_1}, \\ e_2 &= \frac{1}{24}R''(a_3)+\frac{D}{A}\frac{a_2-a_3}{c_2-c_1}, \\ e_3 &= \frac{1}{24}R''(a_3). \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich

$$(29.)\qquad \begin{cases} e_1-e_3 = \dfrac{D}{A}\dfrac{a_1-a_3}{c_2-c_1} \\ e_2-e_3 = \dfrac{D}{A}\dfrac{a_2-a_3}{c_2-c_1}, \end{cases}$$

und man sieht, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen positive Werthe haben.

Die Integration der Differentialgleichung (28.) liefert

$$s = \wp(t-t_0),$$

wo t_0 die Integrationsconstante ist. Nach den Formeln (27.) bedeutet t_0 einen Zeitpunkt, an dem ξ den Werth a_3 annimmt. Weiter wird

$$\wp(t-t_0)-e_3 = \frac{1}{4}\frac{R'(a_3)}{\xi-a_3}$$

oder

$$(30.)\qquad \wp(t-t_0)-e_3 = \frac{A(c_2-c_1)}{D}\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\xi-a_3}.$$

Wendet man hierauf die Formel (E. F. S. 66 (2.))

$$\wp(u+\omega_3)-e_3 = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp u - e_3}$$

an, so erhält man für $u = t-t_0$

$$(31.)\qquad \wp(t-t_0+\omega_3)-e_3 = \frac{D}{A}\,\frac{\xi-a_3}{c_2-c_1}.$$

Man kann diese Formeln zunächst dazu benutzen, um die Constanten c_1, c_2, c_3 durch die zugehörigen Argumentwerthe t_1, t_2, t_3 zu bestimmen. Setzt man in der vorstehenden Formel (31.)

$$t = t_1,\quad \xi = c_1,$$

so wird, da c_1 kleiner als a_3 ist (S. 322), der Ausdruck auf der rechten Seite negativ, mithin ist

$$\wp(t_1-t_0+\omega_3) < e_3.$$

Wegen

$$\wp'(t-t_0+\omega_3) = \frac{D}{A}\,\frac{\frac{d\xi}{dt}}{c_2-c_1} = \frac{D}{A}\,\frac{\sqrt{R(\xi)}}{c_2-c_1}$$

wird ferner

$$\wp'(t_1-t_0+\omega_3) = \frac{D}{A}\,\frac{\sqrt{R(c_1)}}{c_2-c_1},$$

also nach (23.)

$$\wp'(t_1-t_0+\omega_3) = i\frac{D}{A}c_1,$$

und dieser Werth ist positiv imaginär. Aus der Tabelle S. 21 folgt daher, dass der Argumentwerth $t_1-t_0+\omega_3$ zwischen $-\omega_3$ und 0 gelegen ist. Man kann also

$$(32.)\qquad t_1-t_0+\omega_3 = -w_1 i$$

setzen, wo w_1 eine reelle positive, den Bedingungen

$$0 < w_1 < \frac{\omega_3}{i}$$

genügende Grösse ist, und hat

$$(33.)\qquad \begin{cases} \wp(w_1 i)-e_3 = \dfrac{D}{A}\,\dfrac{c_1-a_3}{c_2-c_1} \\[2ex] \wp'(w_1 i) \quad = -i\dfrac{D}{A}c_1. \end{cases}$$

Nimmt man in der Formel (31.)

$$t = t_2, \quad \xi = c_2,$$

so findet man ebenso, dass $\wp(t_2 - t_0 + \omega_3)$ grösser als e_3, die Ableitung $\wp'(t_2 - t_0 + \omega_3)$ dagegen negativ imaginär ist. Nach der Tabelle ist also $\wp(t_2 - t_0 + \omega_3)$ zwischen e_1 und e_2 gelegen, und man kann

$$t_2 - t_0 + \omega_3 = -\omega_1 - w_2 i \tag{34.}$$

setzen, wo auch w_2 eine den Bedingungen

$$0 < w_2 < \frac{\omega_3}{i}$$

genügende reelle positive Grösse bedeutet. Man hat ferner

$$\left\{\begin{aligned} \wp(\omega_1 + w_2 i) - e_3 &= \frac{D}{A}\,\frac{c_2 - a_3}{c_2 - c_1} \\ \wp'(\omega_1 + w_2 i) &= i\frac{D}{A}\,c_2. \end{aligned}\right. \tag{35.}$$

Setzt man endlich

$$t = t_3, \quad \xi = c_3,$$

so wird $\wp(t_3 - t_0 + \omega_3)$ grösser als e_3, die Ableitung $\wp'(t_3 - t_0 + \omega_3)$ negativ imaginär, mithin ist

$$t_3 - t_0 + \omega_3 = -\omega_1 - w_3 i, \tag{36.}$$

wo die Grösse w_3 dieselbe Beschaffenheit hat wie w_1 und w_2. Demnach wird

$$\left\{\begin{aligned} \wp(\omega_1 + w_3 i) - e_3 &= \frac{D}{A}\,\frac{c_3 - a_3}{c_2 - c_1} \\ \wp'(\omega_1 + w_3 i) &= i\frac{D}{A}\,c_3. \end{aligned}\right. \tag{37.}$$

Indem man nun noch in die Formel (30.) die Sigmafunctionen einführt, erhält man

$$\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}(t - t_0)\right)^2 = \frac{A(c_2 - c_1)}{D}\,\frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\xi - a_3},$$

also

$$\xi = \varphi(t) = \frac{A(c_2 - c_1)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{D}\left(\frac{\sigma}{\sigma_3}(t - t_0)\right)^2 + a_3. \tag{38.}$$

Zur Bestimmung der Grössen $\lambda, \mu, \nu, \varrho, p, q$ hat man auf die Gleichungen (24.), (25.), (26.) zurückzugreifen. Bei der Integration der zweiten Glieder auf den rechten Seiten dieser Gleichungen kann man von dem im sechsundzwanzigsten Kapitel angewandten Verfahren Gebrauch machen und sich der Formel S. 288 (12.),

$$\int \frac{1}{2} \frac{\varphi'(u-u_0)+\varphi'(u_1-u_0)}{\varphi(u-u_0)-\varphi(u_1-u_0)}\, du = \log\left(\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma_\beta(u-u_0)}\, e^{(u-u_0)\frac{\sigma'_\beta}{\sigma_\beta}(u_1-u_0)}\right)$$

bedienen, in der

$$\varphi(u-u_0) = c\left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}(u-u_0)\right)^2 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ \alpha \lesseqgtr \beta)$$

zu setzen war, ferner c, u_0, u_1 irgend welche Constanten bedeuteten, und auf der rechten Seite der Integralformel noch eine Integrationsconstante hinzuzufügen ist. In dem vorliegenden Falle hat man für $\varphi(u)$ die in (38.) vorkommende Function zu wählen, also u_0 gleich t_0, α gleich Null, β gleich 3 und

$$c = \frac{A(c_2-c_1)(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{D}$$

zu nehmen und für u_1 der Reihe nach die Werthe t_1, t_2, t_3 zu setzen; auf die in (38.) vorkommende additive Constante a_3 kommt es, wie man sieht, nicht an. Dann erhält man zunächst aus (24.)

$$\lambda + i\mu = \mathrm{C}\frac{\sigma(t-t_0+\omega_3+w_1 i)}{\sigma_3(t-t_0)}\, e^{(t-t_0)\left(-\frac{\sigma'_3}{\sigma_3}(\omega_3+w_1 i)+\frac{ir}{2}\frac{C-A}{A}\right)},$$

wo C eine Constante bedeutet. Wendet man hierauf die Formeln

$$\sigma(u+\omega_3) = e^{\eta_3 u}\,\sigma\omega_3\,\sigma_3 u$$

und

$$\frac{\sigma'_3}{\sigma_3}(u+\omega_3) = \frac{\sigma'}{\sigma}u + \eta_3$$

an, so findet man

$$\lambda + i\mu = \mathrm{C}\frac{\sigma_3(t-t_0+w_1 i)\,\sigma\omega_3}{\sigma_3(t-t_0)}\, e^{\eta_3 w_1 i + i(t-t_0)\left(\frac{r}{2}\frac{C-A}{A}-\frac{1}{i}\frac{\sigma'}{\sigma}(w_1 i)\right)}.$$

Bestimmt man die Constante C durch die Festsetzung, es solle $\lambda_0 + i\mu_0$ der Werth von $\lambda + i\mu$ für $t = t_0$ sein, so erhält man

$$\lambda_0 + i\mu_0 = \mathrm{C}\,\sigma_3(w_1 i)\,\sigma\omega_3\, e^{\eta_3 w_1 i},$$

mithin

$$\lambda + i\mu = (\lambda_0 + i\mu_0)\frac{\mathfrak{S}_3(t-t_0+w_1 i)}{\mathfrak{S}_3(t-t_0)\,\mathfrak{S}_3(w_1 i)}\,e^{i(t-t_0)l_1}, \tag{39.}$$

wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{r}{2}\,\frac{C-A}{A} - \frac{1}{i}\,\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(w_1 i) = l_1\,. \tag{40.}$$

setzt. Auf ähnlichem Wege findet man

$$\nu + i\varrho = (\nu_0 + i\varrho_0)\frac{\mathfrak{S}_2(t-t_0+w_2 i)}{\mathfrak{S}_3(t-t_0)\,\mathfrak{S}_2(w_2 i)}\,e^{i(t-t_0)l_2}, \tag{41.}$$

worin

$$-\frac{r}{2}\,\frac{C-A}{A} - \frac{1}{i}\,\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(w_2 i) = l_2 \tag{42.}$$

gesetzt worden ist, endlich

$$p + iq = (p_0 + iq_0)\frac{\mathfrak{S}_2(t-t_0+w_3 i)}{\mathfrak{S}_3(t-t_0)\,\mathfrak{S}_2(w_3 i)}\,e^{i(t-t_0)l_3}, \tag{43.}$$

worin

$$-\frac{r}{2}\,\frac{2A-C}{A} - \frac{1}{i}\,\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(w_3 i) = l_3 \tag{44.}$$

genommen worden ist. Die mit dem Index 0 versehenen Werthe bedeuten wie vorher diejenigen, die zu $t = t_0$ gehören. Die Constanten l_1, l_2, l_3 haben reelle Werthe.

Die in den Formeln (39.), (41.), (43.) auftretenden Constanten w_1, w_2, w_3; l_1, l_2, l_3 sind nicht unabhängig von einander. Um die zwischen ihnen bestehenden Relationen auf einfache Weise zu bestimmen, gehe man auf die Gleichung (11.)

$$(\lambda - i\mu)(\nu + i\varrho)(p + iq) = \xi - i\xi_1$$

zurück. Da ξ eine doppeltperiodische Function ist, und die Grösse ξ_1, die nach (15.) mit der Ableitung von ξ bis auf einen constanten Factor übereinstimmt, dieselbe Eigenschaft hat, so muss auch das Product auf der linken Seite der vorstehenden Formel eine doppeltperiodische Function des Arguments t oder des Arguments

$$t - t_0 = u$$

sein. Bildet man dieses Product mittelst der Formeln (39.), (41.), (43.), so erhält man, abgesehen von einem constanten Factor, den Ausdruck

$$\frac{\sigma_3(u-w_1 i)\,\sigma_2(u+w_2 i)\,\sigma_2(u+w_3 i)}{\sigma_3^3 u}\, e^{iu(-l_1+l_2+l_3)}.$$

Vermehrt man nun u um eine beliebige Periode $2\tilde{\omega}$ und bedenkt, dass (E. F. S. 91 (13.))

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u$$

und (E. F. S. 92 (14.))

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u \qquad (\alpha \lessgtr \beta)$$

ist, so findet man den obigen Ausdruck wieder, aber multiplicirt mit dem Exponentialfactor

$$e^{2i\tilde{\eta}(-w_1+w_2+w_3)+2i\tilde{\omega}(-l_1+l_2+l_3)}.$$

Dieser muss also den Werth Eins haben, wie man auch die Periode $2\tilde{\omega}$ wählen mag. Daher ist

$$(45.)\qquad \begin{cases} w_1 = w_2 + w_3 \\ l_1 = l_2 + l_3. \end{cases}$$

Die Constanten $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \varrho_0, p_0, q_0$ kann man übrigens auf ähnliche Art durch specielle Werthe der Sigmaquotienten darstellen, wie in den vorhergehenden Kapiteln bei der Bestimmung der Richtungscosinus gezeigt worden ist.

Die Formeln (39.) bis (45.) geben somit eine vollständige Lösung der behandelten Aufgabe der Drehung eines starren Körpers unter dem Einfluss der Schwere, wenn die zu Eingang dieses Kapitels gemachten speciellen Annahmen gelten. Die Herleitung der Formeln mag hier genügen, dagegen soll auf ihre geometrische und mechanische Deutung nicht weiter eingegangen werden.

Neunter Abschnitt.

BESTIMMUNG DER GEODÄTISCHEN LINIEN AUF EINEM ROTATIONSELLIPSOIDE.

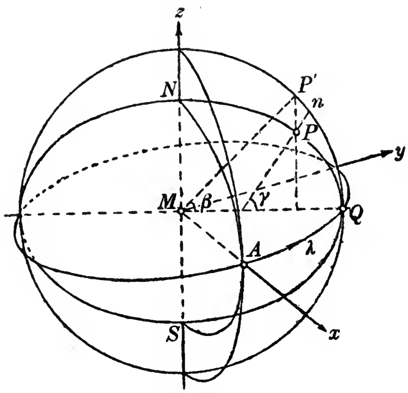
Dreissigstes Kapitel.

Darstellung der Cartesischen Coordinaten eines Punktes einer geodätischen Linie auf einem Rotationsellipsoide durch elliptische Functionen.

Es sei M der Mittelpunkt, N der Nordpol, S der Südpol eines Rotationsellipsoides und P ein beliebiger anderer Punkt auf seiner Oberfläche. Die durch N, S und P gehende Halbellipse, die der Meridian von P heissen möge, schneide den Äquator des Ellipsoides im Punkte Q. Fixirt man nun irgend eine der durch N und S gehenden auf der Oberfläche des Ellipsoids gelegenen Halbellipsen als den Anfangsmeridian und bezeichnet seinen Schnittpunkt mit dem Äquator durch A, so heisst der in östlicher Richtung fortschreitend gemessene Bogen AQ des Äquators die Länge des Punktes P. Unter der wahren Breite von P versteht man den spitzen Winkel, den die Normale der Fläche in P mit der Ebene des Äquators bildet. Für die Punkte des nördlichen Halbellipsoids soll sie positiv, für die des südlichen negativ genommen werden.

Man denke sich ferner mit dem Radius des Äquators um M als Mittelpunkt die Kugel construirt. Das von P auf die Ebene des Äquators gefällte Loth schneide, nöthigenfalls verlängert, diese Kugel im Punkte P'; dann wird, wie es in der Geodäsie üblich ist, der Winkel, unter dem MP' gegen die

Äquatorebene geneigt ist, als die reducirte Breite von P bezeichnet. Diese stimmt also mit der auf der Kugel gemessenen geographischen Breite von P'



Figur 9.

überein. Über das Vorzeichen der reducirten Breite soll dieselbe Festsetzung gelten, wie sie oben für die wahre Breite getroffen worden ist.

Wenn a der Radius des Äquators, $2c$ der Abstand der beiden Pole ist, und ferner ein Cartesisches Coordinatensystem so gewählt wird, dass sein Ursprung in M liegt und die z-Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, so ist

$$\text{(1.)}\qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

die Gleichung des Ellipsoids. Schliesslich sei das Coordinatensystem noch so gelegt, dass der Punkt A die positive Richtung der x-Axe, der Punkt des Äquators mit der Länge $+\frac{\pi}{2}$ die positive Richtung der y-Axe und der Punkt N die der z-Axe bestimmt. Sind x, y, z die Coordinaten von P, λ seine Länge, β seine reducirte Breite, und bedeuten x', y', z' die Coordinaten von P', so ist

$$\text{(2.)}\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x' = a\cos\beta\cos\lambda \\ y &= y' = a\cos\beta\sin\lambda \\ z &= \frac{c}{a}z' = c\sin\beta. \end{aligned}\right.$$

Der Einfachheit wegen werde das Ellipsoid als an den Polen abgeplattet, also

$$c < a$$

vorausgesetzt. Führt man dann die Excentricität ε der Meridianellipse, mittels der Formel

$$(3.)\qquad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

ein, wo also ε zwischen Null und Eins liegt, so ist, die Quadratwurzel positiv genommen,

$$\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{c}{a},$$

und daher kann man an Stelle der letzten der Gleichungen (2.) auch

$$(4.)\qquad z = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,z' = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\beta$$

schreiben.

Um noch den Zusammenhang mit der wahren Breite von P, die mit γ bezeichnet werden möge, herzustellen, verstehe man unter n die Flächennormale in P; dann ist

$$(5.)\qquad \begin{cases} \cos(n, x) = \cos\gamma\cos\lambda \\ \cos(n, y) = \cos\gamma\sin\lambda \\ \cos(n, z) = \sin\gamma. \end{cases}$$

Das sieht man sogleich durch die Überlegung ein, dass die drei Richtungscosinus der Flächennormale mit den Coordinaten eines Punktes übereinstimmen müssen, der auf einer Kugel vom Radius Eins gelegen ist und die geographische Breite γ, die Länge λ hat; die Gleichungen (5.) folgen also aus den Formeln (2.) für x', y', z', wenn man darin für a den Werth Eins und γ statt β setzt. Andererseits sind aber die drei Richtungscosinus den drei partiellen Ableitungen der linken Seite der Gleichung (1.) proportional, d. h. es ist

$$(6.)\qquad \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{a^2} : \frac{z}{c^2}.$$

Daraus folgt

$$(7.)\qquad \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \cos\beta\cos\lambda : \cos\beta\sin\lambda : \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

In Verbindung mit (5.) ergiebt sich aus (7.) die gesuchte Relation:

$$(8.)\qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Dies vorausgeschickt, betrachte man nun eine durch den Punkt P gehende geodätische Linie des Ellipsoids. Sie ist vollständig bestimmt, wenn man noch ihre Richtung im Punkte P kennt. Da in jedem Punkte einer geodätischen Linie die Flächennormale in der Schmiegungsebene der Kurve gelegen ist, so gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2} = \cos(n,x):\cos(n,y):\cos(n,z),$$

in denen unter ds die Länge eines Linienelements der geodätischen Linie verstanden wird. Für das Ellipsoid ist also zufolge (6.) und mit Rücksicht auf (3.)

$$\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{d^2z}{ds^2} = x:y:\frac{z}{1-\varepsilon^2}.$$

Daraus ergiebt sich sofort

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

oder wenn unter $\varkappa$ eine Integrationsconstante, d. h. eine von s, dem Parameter der Bogenlänge der geodätischen Linie, unabhängige Grösse verstanden wird,

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \varkappa. \tag{9.}$$

Aus (1.) aber folgt durch Differentiation

$$x\,dx + y\,dy = -\frac{a^2}{c^2}z\,dz. \tag{10.}$$

Macht man daher von der Identität

$$(x\,dx+y\,dy)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2 = (x^2+y^2)(dx^2+dy^2)$$

Gebrauch, so erhält man aus (9.) und (10.)

$$ds^2\left(1-\frac{\varkappa^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right) = dz^2\left(1+\frac{\varepsilon^2 a^2}{c^4}z^2\right),$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\left(1-\frac{\varkappa^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z^2\right) = Z \tag{11.}$$

setzt und die Quadratwurzel zieht,

$$ds = \left(1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z^2\right)\frac{dz}{\sqrt{Z}}. \tag{12.}$$

Der auf der rechten Seite stehende Klammerausdruck ist positiv; das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{Z}$ bestimmt sich also in der Weise, dass man den positiven oder negativen Werth zu nehmen hat, jenachdem z mit wachsender Bogenlänge zu oder abnimmt.

Die Constante $\varkappa$ hängt nun in einfacher Weise mit dem Winkel zusammen, unter dem die betrachtete geodätische Linie gegen den Meridian geneigt ist. Aus (2.) ergiebt sich nämlich zunächst

$$(13.)\qquad \begin{cases} dx = -a\sin\beta\cos\lambda\, d\beta - a\cos\beta\sin\lambda\, d\lambda \\ dy = -a\sin\beta\sin\lambda\, d\beta + a\cos\beta\cos\lambda\, d\lambda \\ dz = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\beta\, d\beta \end{cases}$$

und danach für das Quadrat irgend eines beliebigen auf dem Ellipsoid gelegenen Linienelements

$$(14.)\qquad ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\beta)\,d\beta^2 + a^2\cos^2\beta\, d\lambda^2.$$

Längs eines Meridians ist λ constant; demnach gilt für ein Linienelement eines Meridians die Gleichung

$$(15.)\qquad ds_\lambda^2 = a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\beta)\,d\beta^2,$$

und die Cosinus der Winkel, die die Richtung dieses Linienelements mit den drei Coordinatenaxen einschliesst, sind

$$(16.)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dx}{ds}\right)_\lambda = -\dfrac{\sin\beta\cos\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}} \\[2ex] \left(\dfrac{dy}{ds}\right)_\lambda = -\dfrac{\sin\beta\sin\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}} \\[2ex] \left(\dfrac{dz}{ds}\right)_\lambda = \dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}}. \end{cases}$$

Darin sind den Quadratwurzeln ihre positiven Werthe beizulegen, und der Index λ soll bedeuten, dass dieser Grösse ein constanter Werth zu ertheilen ist. Der Nenner dieser Ausdrücke kann nach den gemachten Voraussetzungen für keinen reellen Werth von β verschwinden. Bezeichnet man mit w das Azimuth des betrachteten Linienelements, d. h. den unterhalb π gelegenen Winkel, unter dem dieses den nach dem Punkte N gerichteten Meridian schneidet, so ist

$$\cos w\, ds = \left(\frac{dx}{ds}\right)_\lambda dx + \left(\frac{dy}{ds}\right)_\lambda dy + \left(\frac{dz}{ds}\right)_\lambda dz,$$

also nach (13.) und (16.)

$$\cos w\, ds = a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}\, d\beta.$$

Daraus folgt weiter nach (14.)

$$\sin w\, ds = a\cos\beta\, d\lambda. \tag{17.}$$

Wenn nun das Linienelement einer geodätischen Linie angehört, dann gilt die Formel (9.), der man auch unter Benutzung von (2.) und (13.) die Gestalt

$$a^2\cos^2\beta\, d\lambda = \varkappa\, ds$$

geben kann, und daraus folgt in Verbindung mit (17.)

$$\varkappa = a\sin w\cos\beta \tag{18.}$$

oder

$$\sin w = \frac{\varkappa}{a\cos\beta}. \tag{19.}$$

Aus dieser Formel lässt sich nun unmittelbar eine wichtige Folgerung ziehen über den allgemeinen Verlauf einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid. Da $\varkappa$ längs der geodätischen Linie constant bleibt, so kann man zu jedem gegebenen Werthe der reducirten Breite β nach (19.) das Azimuth w bestimmen. Aus dieser Gleichung folgt aber weiter, dass $\cos\beta$ höchstens den Werth $\frac{\varkappa}{a}$ annehmen kann. Sieht man also von den Fällen ab, wo die geodätische Linie ein Theil des Äquators oder eines Meridians ist, so ändert sich beim Fortschreiten längs dieser Linie die Grösse β stetig zwischen den beiden Werthen $+\beta_0$ und $-\beta_0$, für die

$$\cos\beta_0 = \frac{\varkappa}{a} \tag{20.}$$

wird; in diesen beiden Fällen ist aber

$$\sin w = 1,$$
$$w = \frac{\pi}{2}.$$

Die geodätische Linie verläuft also innerhalb einer Zone, die von den beiden Parallelkreisen der Breiten $\pm \arccos\frac{\varkappa}{a}$ begrenzt wird, und sie berührt diese

Breitenkreise. Da β_0 stets zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist, so folgt aus (20.)

$$0 < \varkappa < a.$$

Bezeichnet man mit $\pm z_0$ die Höhen der Breitenkreise, die die eben erwähnte Zone begrenzen, so ist nach (2.)

$$z_0 = c \sin \beta_0, \tag{21.}$$

sonach besteht zwischen $\varkappa$ und z_0 die Gleichung

$$\frac{\varkappa^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Damit geht der Ausdruck (11.) für die Grösse Z über in:

$$Z = \left(1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{c^4} z^2\right) \frac{z_0^2 - z^2}{c^2}. \tag{22.}$$

Das Bogenelement der geodätischen Linie war durch die Gleichung (12.),

$$ds = \left(1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{c^4} z^2\right) \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

gegeben. Die Form dieser Differentialgleichung zeigt, dass z eine elliptische Function des Arguments s ist. Da ferner identisch

$$d \log (x + iy) = \frac{x\,dx + y\,dy + i(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2},$$

d. h. nach (9.) und (10.)

$$d \log (x + iy) = \frac{z\,dz - i\varkappa \frac{c^2}{a^2} ds}{z^2 - c^2} \tag{23.}$$

ist, so lässt sich auch $\log (x + iy)$ durch elliptische Functionen des Arguments s darstellen. Es wird sich nun im Folgenden darum handeln, diese elliptischen Functionen durch Sigmafunctionen auszudrücken. Dazu kann man folgendermassen verfahren.

Es sei u eine Veränderliche, die mit z durch die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{du} = c\sqrt{Z} \tag{24.}$$

verknüpft ist, unter Z die durch die Formel (22.) definirte ganze Function vierten Grades von z verstanden. Ferner soll festgesetzt werden, dass dem Werthe $u = 0$ der Werth z_0 der Variablen z entspreche. Durch Multiplication mit $2z$ erhält man

$$(25.)\qquad \frac{d(z^2)}{du} = \sqrt{4z^2(z_0^2-z^2)\left(1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z^2\right)};$$

hier steht auf der rechten Seite unter dem Wurzelzeichen eine ganze Function dritten Grades von z^2, die für

$$(26.)\qquad z^2 = z_0^2,\quad 0,\quad -\frac{c^4}{a^2\varepsilon^2}$$

verschwindet. Bezeichnet man sie mit $R(z^2)$ und setzt

$$(27.)\qquad R(z^2) = 4z^2(z_0^2-z^2)\left(1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z^2\right) = 4Bz^6+6Cz^4+4B'z^2,$$

so ist

$$(28.)\qquad \begin{cases} B = -\dfrac{a^2\varepsilon^2}{c^4} \\[2mm] C = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z_0^2-1\right) \\[2mm] B' = z_0^2. \end{cases}$$

Auf das Differential

$$\frac{d(z^2)}{\sqrt{R(z^2)}} = du$$

kann man nun die Transformationsformeln E. F. S. 16 (IX.) anwenden und demnach

$$(29.)\qquad \begin{cases} Bz^2+\dfrac{1}{2}C = \mathrm{s} \\[2mm] -B\sqrt{R(z^2)} = \sqrt{4(\mathrm{s}-e_1)(\mathrm{s}-e_2)(\mathrm{s}-e_3)} \end{cases}$$

setzen. Da B negativ ist, gehört $\mathrm{s} = -\infty$ zu $z^2 = \infty$. Den Werthen e_1, e_2, e_3 von s, bei denen wie üblich die Bezeichnung so gewählt worden ist, dass

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

entsprechen die drei Werthe (26.) von z^2, und zwar in der oben angegebenen Reihenfolge.

Es wird also

$$(30.)\qquad \begin{cases} e_1 = -B\dfrac{c^4}{a^2\varepsilon^2}+\dfrac{1}{2}C = \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z_0^2 \\[2mm] e_2 = \dfrac{1}{2}C = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z_0^2 \\[2mm] e_3 = Bz_0^2+\dfrac{1}{2}C = -\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\dfrac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z_0^2. \end{cases}$$

Diese drei Grössen sind sämmtlich reell, und es ist

$$(31.)\qquad \begin{cases} e_1 - e_2 = 1 \\ e_2 - e_3 = \dfrac{a^2 \varepsilon^2}{c^4} z_0^2 \\ e_1 - e_3 = 1 + \dfrac{a^2 \varepsilon^2}{c^4} z_0^2 \end{cases}$$

oder auch wegen (21.)

$$(32.)\qquad \begin{cases} e_1 - e_2 = 1 \\ e_2 - e_3 = \dfrac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \sin^2 \beta_0 \\ e_1 - e_3 = \dfrac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta_0}{1-\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Durch die Transformationsformeln (29.) geht das Differential du in

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

über. Nach dem oben (S. 336) Festgesetzten entspricht nun dem Werthe $u = 0$ der Werth $z^2 = z_0^2$, also nach (29.) und (30.) der Werth $s = e_3$ und nicht $s = \infty$, also ist s keine $\wp$-Function des Arguments u, sondern des Arguments $u - \omega_3$, wo

$$(33.)\qquad \omega_3 = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}.$$

Man hat daher nach (29.) und (30.)

$$(34.)\qquad z^2 = \frac{c^4}{a^2 \varepsilon^2} (e_2 - \wp(u - \omega_3))$$

zu setzen. Diese Formel lässt sich noch durch Einführung der Sigmafunctionen in eine einfachere Gestalt bringen.

Aus der Gleichung (E. F. S. 37 (14.))

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

folgt, wenn man $\omega_1 + \omega_3$ für v und $u - \omega_3$ für u schreibt,

$$e_2 - \wp(u - \omega_3) = \frac{\sigma(u+\omega_1)\,\sigma(u - \omega_1 - 2\omega_3)}{\sigma^2(u-\omega_3)\,\sigma^2 \omega_2}.$$

Nun ist (E. F. S. 72 (12.))

$$\sigma(u-2\omega_3) = -e^{-2\eta_3(u-\omega_3)}\sigma u$$

und (E. F. S. 88 (3.))

$$\sigma(u-\omega_1) = -e^{-\eta_1 u}\sigma\omega_1\,\sigma_1 u,$$
$$\sigma(u-\omega_3) = -e^{-\eta_3 u}\sigma\omega_3\,\sigma_3 u,$$

daher

$$\sigma(u-\omega_1-2\omega_3) = e^{-2\eta_3(u-\omega_3)-\eta_1 u}\sigma\omega_1\,\sigma_1 u,$$

mithin

$$e_2-\wp(u-\omega_2) = e^{2\eta_3\omega_2}\frac{\sigma^2\omega_1}{\sigma^2\omega_3\,\sigma^2\omega_2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u\right)^2.$$

Für $u = 0$ ergiebt sich wegen $\sigma_\alpha 0 = 1$ unter Benutzung der zweiten Formel (31.) für den auf der rechten Seite stehenden von u unabhängigen Factor:

$$e^{2\eta_3\omega_2}\frac{\sigma^2\omega_1}{\sigma^2\omega_3\,\sigma^2\omega_2} = \frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z_0^2.$$

Setzt man die erhaltenen Ergebnisse sämmtlich in die Gleichung (34.) ein und zieht die Quadratwurzel, so folgt

$$z = z_0\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u. \tag{35.}$$

Das Vorzeichen ist dabei richtig bestimmt; denn für $u = 0$ nimmt z den verlangten Werth z_0 an. Diese Formel stellt in einfacher Weise die dritte Coordinate eines Punktes einer beliebigen geodätischen Linie auf dem Ellipsoid als elliptische Function der Variablen u dar.

Man kann die obige Formel (35.) unmittelbar aus der Differentialgleichung (24.) herleiten, indem man darin zunächst

$$z = z_0\eta$$

setzt und die alsdann entstehende Differentialgleichung für η,

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 = (1-\eta^2)\left(1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z_0^2\eta^2\right),$$

mit derjenigen vergleicht, der die Function

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u = \eta$$

zu genügen hat, nämlich (E. F. S. 98 (11.))

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 = (1-\eta^2)(e_1 - e_2 + (e_2 - e_3)\eta^2).$$

Die Übereinstimmung beider Differentialgleichungen wird durch die Formeln (31.) bewirkt, durch die die drei Grössen e_1, e_2, e_3 bestimmt sind. Nimmt man noch die Festsetzung hinzu, dass $\eta = 1$ für $u = 0$ werden soll, so sind alle Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (35.) erfüllt.

Um die entsprechenden Formeln für die Coordinaten x und y herleiten zu können, ist eine Bemerkung vorauszuschicken. Es sei u_0 einer der Werthe von u, für die z den Werth c annimmt. Aus (34.) folgt

$$(36.)\qquad e_2 - \frac{a^2\varepsilon^2}{c^2} = \wp(u_0 - \omega_3),$$

$$(37.)\qquad z^2 - c^2 = -\frac{c^4}{a^2\varepsilon^2}(\wp(u-\omega_3) - \wp(u_0 - \omega_3)),$$

daher

$$(38.)\qquad \frac{d(z^2)}{du} = -\frac{c^4}{a^2\varepsilon^2}\wp'(u-\omega_3)$$

und weiter

$$(39.)\qquad \left(\frac{d(z^2)}{du}\right)_{u=u_0} = -\frac{c^4}{a^2\varepsilon^2}\wp'(u_0-\omega_3).$$

Andererseits liefert die Gleichung (25.) für $u = u_0$ und $z = c$:

$$\left(\frac{d(z^2)}{du}\right)^2_{u=u_0} = 4c^2(z_0^2 - c^2)\left(1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{c^2}\right),$$

oder da wegen (20.) und (21.)

$$z_0^2 - c^2 = -c^2\cos^2\beta_0 = -\frac{c^2\varkappa^2}{a^2},$$

ferner

$$1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

ist:

$$\left(\frac{d(z^2)}{du}\right)^2_{u=u_0} = -4c^2\varkappa^2.$$

Bestimmt man nun weiter, u_0 soll der Werth sein, für den die Quadratwurzel aus der rechten Seite dieser Gleichung einen negativen imaginären Werth erhält, sodass also

$$(40.)\qquad \left(\frac{d(z^2)}{du}\right)_{u=u_0} = -2ic\varkappa,$$

dann ergiebt sich in Verbindung mit (39.)

$$(41.)\qquad \wp'(u_0-\omega_3) = 2i\frac{\varkappa}{c}\frac{a^2\varepsilon^2}{c^2}.$$

Die Gleichungen (36.) und (41.) zeigen, dass

$$\wp(u_0-\omega_3) < e_3$$

und $\wp'(u_0-\omega_3)$ positiv imaginär ist. Nach der Tabelle S. 21 liegt also der Argumentwerth $u_0-\omega_3$ zwischen $-\omega_3$ und 0. Man hat daher

$$u_0-\omega_3 = -\theta\omega_3$$

zu setzen, wo θ einen positiven echten Bruch bedeutet, d. h. es ist

$$(42.)\qquad u_0 = iv,$$

wenn man unter v eine positive reelle den Bedingungen

$$0 < v < \frac{\omega_3}{i}$$

genügende Grösse versteht. Durch die Gleichungen (36.) und (41.) ist sodann der Werth von u_0 eindeutig bestimmt.

Dies vorausgeschickt, soll jetzt die Berechnung der Coordinaten x und y durch elliptische Functionen von u vorgenommen werden. Zu dem Zwecke greife man auf die Gleichung (23.),

$$d\log(x+iy) = \frac{z\,dz - i\varkappa\frac{c^2}{a^2}ds}{z^2-c^2},$$

zurück. Wendet man auf sie die Formeln (37.) und (38.) an, so erhält man zunächst

$$d\log(x+iy) = \frac{\frac{1}{2}\wp'(u-\omega_3)\,du + i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c^2}ds}{\wp(u-\omega_3)-\wp(u_0-\omega_3)},$$

wofür man auch

$$d\log(x+iy) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(u-\omega_3)+\wp'(u_0-\omega_3)}{\wp(u-\omega_3)-\wp(u_0-\omega_3)}du + \frac{-\frac{1}{2}\wp'(u_0-\omega_3)\,du + i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c^2}ds}{\wp(u-\omega_3)-\wp(u_0-\omega_3)}$$

schreiben kann. Setzt man in dem zweiten Bruche auf der rechten Seite dieses Ausdruckes den Formeln (12.) und (24.) gemäss

$$(43.)\qquad ds = c\left(1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z^2\right)du$$

und benutzt die Formel (41.), so geht er über in

$$-i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c}\,\frac{\dfrac{a^2-c^2}{c^2}-\dfrac{a^2\varepsilon^2}{c^4}z^2}{\wp(u-\omega_3)-\wp(u_0-\omega_3)}\,du$$

oder unter nochmaliger Benutzung der Formel (37.) in

$$-i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c}du.$$

Sonach erhält man schliesslich

$$(44.)\qquad d\log(x+iy) = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u-\omega_3)+\wp'(u_0-\omega_3)}{\wp(u-\omega_3)-\wp(u_0-\omega_3)}\,du - i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c}du.$$

Um daraus $x+iy$ durch Integration zu finden, hat man sich der Formel E. F. S. 37 (15.),

$$(45.)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)-\frac{\sigma'}{\sigma}u+\frac{\sigma'}{\sigma}v,$$

zu bedienen, aus der

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u-\omega_3)+\wp'(u_0-\omega_3)}{\wp(u-\omega_3)-\wp(u_0-\omega_3)} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\omega_3)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0-\omega_3)$$

folgt. Es wird also

$$x+iy = Ce^{-i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c}u}\,\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u-\omega_3)}\,e^{u\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0-\omega_3)},$$

unter C die Integrationsconstante verstanden. Es empfiehlt sich, diese Gleichung unter Benutzung der schon auf S. 339 gebrauchten Formel

$$\sigma(u-\omega_3) = -e^{-\eta_3 u}\sigma\omega_3\,\sigma_3 u$$

folgendermassen zu schreiben:

$$x+iy = C\frac{\sigma(u_0-u)}{\sigma_3 u\,\sigma\omega_3}\,e^{\left(-i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c}+\eta_3+\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0-\omega_3)\right)u}.$$

Zur Bestimmung der Constanten C setze man $u = 0$, dann wird wegen

$$x + iy = a\cos\beta\cos\lambda + ia\cos\beta\sin\lambda$$

oder

(46.) $$x + iy = a\cos\beta\, e^{i\lambda},$$

falls unter β_0 und λ_0 die zu $u = 0$ gehörigen Werthe der reducirten Breite und der Länge verstanden werden:

$$a\cos\beta_0\, e^{i\lambda_0} = C\frac{\sigma u_0}{\sigma\omega_3}.$$

Mithin ergiebt sich

(47.) $$x + iy = a\cos\beta_0\, e^{(\nu u + \lambda_0)i}\,\frac{\sigma(u_0 - u)}{\sigma u_0\,\sigma_3 u},$$

worin zur Abkürzung

(48.) $$\nu = \frac{1}{i}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - \omega_3) + \eta_3 - i\frac{\varkappa\varepsilon^2}{c}\right)$$

gesetzt worden ist.

Man kann den vorstehenden Ausdruck für ν noch in eine kürzere Form bringen. Wendet man wieder die Formel (45.) an, indem man darin

$$u = u_0 - \omega_3, \qquad v = \omega_1$$

setzt, so kommt zunächst

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - \omega_3) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - \omega_2) + \eta_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(u_0 - \omega_3) + \wp'\omega_1}{\wp(u_0 - \omega_3) - \wp\,\omega_1}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite nimmt wegen (36.), (41.) und wegen

$$\wp'\omega_1 = 0, \qquad \wp\omega_1 = e_1$$

die Gestalt

$$i\frac{\varkappa}{c}\,\frac{a^2\varepsilon^2}{c^2(e_1 - e_2) + a^2\varepsilon^2}$$

an; nach (31.) ist aber $e_1 - e_2$ gleich Eins, mithin erhält man dafür

$$i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c}.$$

Es ergiebt sich also

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - \omega_3) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - \omega_2) + \eta_1 + i\varkappa\frac{\varepsilon^2}{c},$$

und die Formel (48.) geht schliesslich in

$$v = \frac{1}{i}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u_0 - \omega_2) + \eta_2\right)$$

oder mit Einführung der Function $\sigma_2 u$ einfach in

$$v = \frac{1}{i}\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_0 \tag{49.}$$

über.

Aus dieser Formel ersieht man, dass v eine reelle Grösse ist. Denn $\sigma_2 u$ ist eine gerade Function von u, die, wenn wie hier die Grössen e_1, e_2, e_3 reell sind, für reelle Werthe des Arguments ebenfalls reelle Werthe annimmt. Daher sind ihre Ableitung und demnach auch der Quotient beider ungerade Functionen. Nach (42.) ist u_0 eine rein imaginäre Grösse, dies gilt also auch von $\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}u_0$, d. h. v selbst ist, wie behauptet, reell.

Einunddreissigstes Kapitel.

Bestimmung der Bogenlänge der geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoide.

Ebenso wie die drei Coordinaten x, y, z lassen sich nun auch die Bogenlänge s, sowie die Länge und Breite als elliptische Functionen des Arguments u ausdrücken. Die dadurch entstehenden Formeln sind besonders für die Zwecke der höheren Geodäsie von Wichtigkeit.

Zur Bestimmung der Bogenlänge hat man auf die Differentialgleichung S. 342 (43.), nämlich

$$ds = c\left(1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{c^4} z^2\right) du,$$

zurückzugehen. Setzt man darin für z^2 seinen Ausdruck als elliptische Function von u nach der Gleichung S. 338 (34.),

$$z^2 = \frac{c^4}{a^2 \varepsilon^2}(e_2 - \wp(u - \omega_3)),$$

ein, so erhält man

$$ds = c(1 + e_2 - \wp(u - \omega_3))\, du$$

oder, weil $e_1 - e_2$ gleich Eins ist,

$$ds = c(e_1 - \wp(u - \omega_3))\, du. \tag{1.}$$

Daraus ergiebt sich durch Integration, für C als Integrationsconstante,

$$s = c\left(e_1 u + \frac{\sigma'}{\sigma}(u - \omega_3)\right) + C. \tag{2.}$$

Zählt man die Bogenlänge der geodätischen Linie von einer der Stellen an, wo sie den ihre Zone begrenzenden nördlichen Breitenkreis berührt (S. 335), so muss z für $s = 0$ den Werth z_0, also u den Werth Null annehmen. Dadurch bestimmt sich der Werth der Integrationsconstanten zu

$$C = c\frac{\sigma'}{\sigma}\omega_3 = c\eta_3.$$

Setzt man diesen Werth in (2.) ein und benutzt wieder die Sigmafunctionen mit Index, so erhält man

$$(3.)\qquad s = c\left(e_1 u + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}u\right).$$

Durch diese Formel ist die Bogenlänge der geodätischen Linie als elliptische Function desselben Arguments u ausgedrückt, wie im vorhergehenden Kapitel die drei Coordinaten x, y, z.

Es handelt sich nun darum, die wahre und die reducirte Breite als Functionen von u darzustellen. Aus der Formel S. 332 (8.),

$$(4.)\qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

folgt

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}} \\ \cos\gamma &= \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}}\sqrt{1-\varepsilon^2}, \end{aligned}\right.$$

wobei den Quadratwurzeln ihre positiven Werthe beizulegen sind, und entsprechend

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\gamma}}\sqrt{1-\varepsilon^2} \\ \cos\beta &= \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\gamma}}. \end{aligned}\right.$$

Nun ist nach S. 336 (21.) und S. 339 (35.)

$$(7.)\qquad \frac{z}{z_0} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta_0} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}u;$$

unter Hinzunahme der zweiten Formel S. 338 (32.),

$$e_2 - e_3 = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin^2\beta_0,$$

wird also

$$\sin^2\beta = \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}(e_2-e_3)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u\right)^2.$$

Nach der zwischen den drei Sigmafunctionen mit Index bestehenden Relation (E. F. S. 89 (8.))

$$(e_2-e_3)\sigma_1^2 u + (e_3-e_1)\sigma_2^2 u + (e_1-e_2)\sigma_3^2 u = 0$$

ist aber mit Rücksicht auf $e_1-e_2 = 1$

$$\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\sin^2\beta + 1 = (e_1-e_3)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}u\right)^2,$$

mithin erhält man, wenn man noch von der dritten Formel S. 338 (32.),

$$e_1-e_3 = \frac{1-\varepsilon^2\cos^2\beta_0}{1-\varepsilon^2},$$

Gebrauch macht:

$$(8.)\qquad \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta_0}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}u.$$

Die linke Seite dieser Formel hat nach (5.) und (6.) den Werth

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\,\frac{\cos\gamma_0}{\cos\beta_0} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,\frac{\sin\gamma_0}{\sin\beta_0},$$

wo γ_0 die zu β_0 gehörige wahre Breite bedeutet. Es ist also

$$(9.)\qquad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\,\frac{\cos\gamma_0}{\cos\beta_0} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}u,$$

und wenn man die Gleichung (7.) berücksichtigt, erhält man

$$(10.)\qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_0} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}u.$$

Die Formeln (7.) und (10.) ergeben die Möglichkeit, aus den Anfangswerthen zu jedem Werth von u die Sinus der reducirten und wahren Breiten zu ermitteln. Hierdurch sind zugleich diese Grössen selbst bestimmt, da sie zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen.

Um noch die Länge λ zu finden, gehe man auf die Formeln S. 343 (46.)

und (47.) zurück. Setzt man ihre rechten Seiten einander gleich, so folgt

$$\cos\beta = \cos\beta_0\, e^{(\nu u - \lambda + \lambda_0)i}\, \frac{\sigma(u_0 - u)}{\sigma u_0\, \sigma_3 u} \tag{11.}$$

und entsprechend nach (9.)

$$\cos\gamma = \cos\gamma_0\, e^{(\nu u - \lambda + \lambda_0)i}\, \frac{\sigma(u_0 - u)}{\sigma u_0\, \sigma_2 u}. \tag{12.}$$

In diesen Formeln sind β, β_0, γ, γ_0, λ, λ_0, und, wie oben S. 344 gezeigt worden ist, auch ν reell, während (S. 341) $u_0 = i\nu$ rein imaginär ist. Vertauscht man nun in der Gleichung (11.), die sich auch in der Form

$$\cos\beta\, e^{(\lambda - \lambda_0 - \nu u)i} = \cos\beta_0\, \frac{\sigma(\nu i - u)}{\sigma(\nu i)\, \sigma_3 u} \tag{13.}$$

schreiben lässt, i mit $-i$, und vereinigt das Resultat mit der vorstehenden Gleichung durch Addition und Subtraction, so erhält man

$$(14.)\quad \begin{cases} 2\cos\beta\cos(\lambda - \lambda_0 - \nu u) = \cos\beta_0 \cdot \dfrac{\sigma(u + \nu i) - \sigma(u - \nu i)}{\sigma_3 u\, \sigma(\nu i)} \\[2ex] 2\cos\beta\sin(\lambda - \lambda_0 - \nu u) = \cos\beta_0\, i\, \dfrac{\sigma(u + \nu i) + \sigma(u - \nu i)}{\sigma_3 u\, \sigma(\nu i)}. \end{cases}$$

Auf demselben Wege leitet man aus der Formel (12.) die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} 2\cos\gamma\cos(\lambda - \lambda_0 - \nu u) = \cos\gamma_0 \cdot \dfrac{\sigma(u + \nu i) - \sigma(u - \nu i)}{\sigma_2 u\, \sigma(\nu i)} \\[2ex] 2\cos\gamma\sin(\lambda - \lambda_0 - \nu u) = \cos\gamma_0\, i\, \dfrac{\sigma(u + \nu i) + \sigma(u - \nu i)}{\sigma_2 u\, \sigma(\nu i)} \end{cases}$$

her. Jedes dieser beiden Gleichungssysteme kann zur Bestimmung der Längendifferenz $\lambda - \lambda_0$ benutzt werden.

Es bleibt nun noch übrig, die Anfangswerthe β_0, γ_0 und λ_0 durch specielle Werthe der elliptischen Functionen des Arguments u darzustellen. Da für

$$u = u_0 = \nu i$$

z den Werth c annimmt (S. 340), so ergiebt sich aus S. 339 (35.)

$$c = z_0\, \frac{\sigma_1}{\sigma_3}(\nu i)$$

oder wegen

$$z_0 = c \sin \beta_0:$$

(16.) $$\sin \beta_0 = \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_1}(vi).$$

Für $u = u_0$ verschwindet der Gleichung (11.) zufolge $\cos \beta$, also wegen (4.) auch $\cos \gamma$, und es haben sowohl β wie auch γ den Werth $+\frac{\pi}{2}$. Dies leuchtet auch geometrisch ein, da z den Werth c annimmt. Aus der Gleichung (10.) folgt also

(17.) $$\sin \gamma_0 = \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}(vi).$$

Zur Bestimmung von $\cos \beta_0$ und $\cos \gamma_0$ hat man zunächst aus (17.)

$$\cos^2 \gamma_0 = \frac{\mathfrak{S}_1^2(vi) - \mathfrak{S}_2^2(vi)}{\mathfrak{S}_1^2(vi)};$$

mit Benutzung der Formel (E. F. S. 89 (7.))

$$\mathfrak{S}_1^2 u - \mathfrak{S}_2^2 u + (e_1 - e_2)\mathfrak{S}^2 u = 0,$$

d. h. hier wegen $e_1 - e_2 = 1$

$$\mathfrak{S}_1^2 u - \mathfrak{S}_2^2 u + \mathfrak{S}^2 u = 0$$

ergiebt sich daraus

$$\cos^2 \gamma_0 = -\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}(vi)\right)^2,$$

also

(18.) $$\cos \gamma_0 = i\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}(vi).$$

Auf der rechten Seite ist der positive reelle Werth zu nehmen, da γ_0 stets zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist.

Aus (4.) folgt ferner

$$\cos \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{\sin \beta_0}{\operatorname{tg} \gamma_0},$$

mithin nach den eben abgeleiteten Formeln

(19.) $$\cos \beta_0 = \frac{i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}(vi) \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_2}(vi),$$

und es ist wiederum der positive Werth der rechten Seite zu nehmen.

Vermittelst dieser Gleichungen sind die Winkel β_0 und γ_0 durch den Argumentwerth $u_0 = iv$ eindeutig bestimmt. Die rechten Seiten erscheinen zwar in imaginärer Gestalt. Aber es ist leicht einzusehen, dass in Wirklichkeit nur reelle Grössen vorkommen. Denn für rein imaginäre Werthe des Arguments nimmt die Function σu selbst rein imaginäre Werthe an, während $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ reell sind. Das folgt unmittelbar aus der Darstellung dieser Functionen mittels der Thetareihen, die bei σu nach Sinus, bei den Sigmafunctionen mit Index aber nach Cosinus der Vielfachen des Arguments $\frac{u\pi}{2\omega_1}$ fortschreiten (E. F. S. 171).

Was die Grösse λ_0 anbetrifft, die Länge desjenigen Punktes, in dem für $u = 0$ die geodätische Linie den begrenzenden Parallelkreis berührt, so ist leicht einzusehen, dass ihr Werth durch die Constante u_0 nicht bestimmt ist.

Die vorstehenden Formeln lassen aber erkennen, dass wenn man die rein imaginäre Constante u_0 willkürlich angenommen hat, dadurch die Gestalt einer geodätischen Linie auf dem gegebenen Ellipsoid vollständig bestimmt ist. Denn nachdem man aus den Formeln (16.) und (19.) die reducirten Breiten der äussersten Parallelkreise, zwischen denen die geodätische Linie verlaufen muss, ermittelt hat, kennt man damit und durch die Excentricität des Ellipsoids auch die Grössen e_1, e_2, e_3 den Formeln S. 338 (32.) zufolge, und dadurch sind die sämmtlichen in den Formeln vorkommenden elliptischen Functionen bestimmt. Aus S. 344 (49.) lässt sich weiter die Grösse ν berechnen.

Nunmehr nehme man auf einem der genannten äussersten Parallelkreise irgend einen Punkt P_0 beliebig an; seine Länge sei λ_0. Dann erlauben die Formeln (14.), zu jedem Werthe der reducirten Breite die zugehörige Länge eines Punktes der geodätischen Linie zu berechnen. Diese ist dadurch vollkommen bestimmt. Ihre Lage auf dem Ellipsoid hängt von der Wahl des Punktes P_0, d. h. von der Annahme der Constanten λ_0 ab. Zu jedem anderen Werth von λ_0 gehört eine neue geodätische Linie, die jedoch mit der ursprünglichen durch Verschiebung auf dem Ellipsoid längs des Äquators zur Deckung gebracht werden kann.

Mit Hülfe der abgeleiteten Formeln kann man ferner die folgende Hauptaufgabe der Geodäsie lösen. Auf der Erde, die als ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid angenommen werden möge, sei ein Punkt durch seine Länge und seine reducirte Breite gegeben. Von ihm gehe unter einem bekannten

Azimuth eine geodätische Linie aus, auf der ein Bogen seiner Länge nach durch Messungen bestimmt sei. Man soll die Coordinaten des Endpunktes dieses Bogens ermitteln.

Es seien λ_1 und β_1 die Länge und die reducirte Breite des gegebenen Punktes, w_1 das Azimuth der geodätischen Linie in diesem Punkte und s die gemessene Bogenlänge, dann kann man zur Lösung der gestellten Aufgabe folgendermassen verfahren. Man bestimmt zunächst nach S. 335 (18.) und (20.) mittels der Formel

$$\cos\beta_0 = \sin w_1 \cos\beta_1$$

die reducirten Breiten der beiden äussersten Parallelkreise, zwischen denen die geodätische Linie verlaufen muss, hierauf vermöge der Gleichungen S. 338 (32.) die drei Grössen e_1, e_2, e_3, wodurch zugleich die in den Formeln auftretenden elliptischen Functionen gegeben sind. Um die Grösse ω_3 nach S. 338 (33.) zu finden, wird man das im siebenundzwanzigsten und im dreissigsten Kapitel der Elliptischen Functionen auseinandergesetzte Verfahren einschlagen. Dabei ist es besonders vortheilhaft, dass der bei der Berechnung gebrauchte Modul k, für den die Formel

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

d. h.

$$k^2 = \frac{\varepsilon^2 \sin^2\beta_0}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\beta_0} = \varepsilon^2 \sin^2\gamma_0$$

stattfindet, wegen der kleinen Excentricität des Erdellipsoids sehr klein ist. Das gilt mithin auch für die Grössen

$$l = \frac{1 - \sqrt[4]{1-k^2}}{1 + \sqrt[4]{1-k^2}}$$

(E. F. S. 265 (2.)) und

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots$$

(E. F. S. 261 (27.)), von denen die numerische Berechnung der elliptischen Functionen abhängt. Die dafür aufgestellten Reihenentwickelungen werden daher sehr stark convergent sein.

Zur Bestimmung der Grösse u_0 hat man auf die Gleichungen S. 340 (36.) und S. 341 (41.) zurückzugreifen und entsprechend der im neunundzwanzigsten und dreissigsten Kapitel der Elliptischen Functionen gegebenen Anweisung zu verfahren. Die Formeln (16.) und (19.) liefern alsdann die Grösse β_0. Danach ermittelt man die Constante ν nach der Formel S. 344 (49.). Es sei nun u_1 der absolut kleinste nicht positive reelle Werth des Arguments u, für den β den Werth β_1 annimmt, so ergiebt sich nach (7.)

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_0} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_3} u_1,$$

woraus sich der Werth von u_1 eindeutig bestimmen lässt (E. F. S. 256).

Nach der Formel (3.) hat der vom Werthe $u = u_1$ an gezählte Bogen der geodätischen Linie die Länge

$$s = c\left(e_1(u-u_1) + \frac{\mathfrak{G}_3'}{\mathfrak{G}_3} u - \frac{\mathfrak{G}_3'}{\mathfrak{G}_3} u_1\right);$$

da s positiv, so ist $u > u_1$, und nach der soeben getroffenen Festsetzung über die Grösse u_1 ergiebt der Ausdruck von s für u gleich Null,

$$-c\left(e_1 u_1 + \frac{\mathfrak{G}_3'}{\mathfrak{G}_3} u_1\right),$$

den Werth der Bogenlänge, die von dem gegebenen Anfangspunkte bis zu demjenigen Punkte reicht, an dem die geodätische Linie zum ersten Male den nördlichen äussersten Parallelkreis der zugehörigen Zone berührt. Zu dem gegebenen Werth von s gehört ein und nur ein reeller Werth von u. Aus der Formel (11.) folgt für $\beta = \beta_1$, $\lambda = \lambda_1$, $u = u_1$:

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0\, e^{(\nu u_1 - \lambda_1 + \lambda_0)i} \frac{\mathfrak{G}(u_0 - u_1)}{\mathfrak{G}u_0\, \mathfrak{G}_3 u_1}.$$

Daraus ergiebt sich nunmehr der Werth für die Grösse λ_0, wenn man noch festsetzt, dass

$$0 \leqq \lambda_0 < 2\pi$$

sein soll. Um schliesslich die zum Endpunkte des gegebenen Bogens s gehörigen Werthe von β und λ zu ermitteln, hat man den soeben bestimmten zugehörigen Werth von u in die Gleichung (7.) einzusetzen, wodurch die

Breite β entsprechend der Festsetzung

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq +\frac{\pi}{2}$$

eindeutig bestimmt ist; danach liefern die Formeln (14.) auch die Länge λ, wobei

$$0 \leqq \lambda < 2\pi.$$

Die Coordinaten des Endpunktes ergeben sich aus S. 339 (35.), d. h.

$$z = c \sin\beta_0 \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_3} u$$

und aus S. 343 (47.):

$$x + iy = a \cos\beta_0 \, e^{(\nu u + \lambda_0) i} \frac{\mathfrak{S}(u_0 - u)}{\mathfrak{S} u_0 \, \mathfrak{S}_3 u}.$$

Die letzte Formel erlaubt übrigens, einen Schluss über das periodische Verhalten der geodätischen Linien unmittelbar abzulesen. Vermehrt man nämlich in dieser Formel u um $2\omega_1$, so gehen dadurch (Vgl. E. F. S. 72 (13.) und S. 91 (12.))

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{S}(u_0 - u) & \text{in} & -e^{-2\eta_1(u_0 - u - \omega_1)} \mathfrak{S}(u_0 - u), \\ \mathfrak{S}_1 u & ,, & -e^{\;2\eta_1(u + \omega_1)} \mathfrak{S}_1 u, \\ \mathfrak{S}_3 u & ,, & e^{\;2\eta_1(u + \omega_1)} \mathfrak{S}_3 u \end{array}$$

über. Daher wechselt z das Vorzeichen, und wenn man

$$x + iy = \varphi(u)$$

setzt, so ist

$$\varphi(u + 2\omega_1) = -e^{2(\nu\omega_1 - \eta_1 v) i} \varphi(u);$$

d. h. durch Vermehrung des Arguments u um $2\omega_1$ erhält man den früheren Werth von $x+iy$, jedoch multiplicirt mit einem Exponentialfactor, wieder. Eine vollkommene Periodicität würde eintreten, wenn

$$\nu\omega_1 - \eta_1 v$$

mit π in einem rationalen Verhältniss stünde.

Um über die geometrische Bedeutung dieser Grösse einen Aufschluss zu erhalten, gehe man auf die Gleichungen (7.) und (11.) zurück und setze darin $u + 4\omega_1$ an Stelle von u. Die zu diesem Argumentwerth gehörigen Werthe der reducirten Breite und Länge seien $\bar{\beta}$ und $\bar{\lambda}$. Vermöge der Formeln

$$\sigma_\alpha(u+4\omega_1) = e^{4\eta_1(u+2\omega_1)}\sigma_\alpha u$$

und

$$\sigma(u+4\omega_1) = e^{4\eta_1(u+2\omega_1)}\sigma u$$

folgt dann sogleich aus (7.)

$$\bar{\beta} = \beta,$$

demnach aus (11.)

$$\cos\bar{\beta} = \cos\beta_0\, e^{(\nu u+4\nu\omega_1-\bar{\lambda}+\lambda_0)i}\,\frac{e^{-4\eta_1(u_0-u-2\omega_1)}\sigma(u_0-u)}{\sigma u_0\, e^{4\eta_1(u+2\omega_1)}\sigma_3 u}$$

oder

$$\cos\bar{\beta} = \cos\beta_0\, e^{(\nu u-\lambda+\lambda_0)i}\,\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma u_0\,\sigma_3 u}\cdot e^{(4(\nu\omega_1-\eta_1 v)-\bar{\lambda}+\lambda)i}.$$

Es muss daher

$$e^{(4(\nu\omega_1-\eta_1 v)-\bar{\lambda}+\lambda)i} = 1$$

d. h.

$$4(\nu\omega_1-\eta_1 v)-\bar{\lambda}+\lambda = 2\mu\pi$$

oder

$$4(\nu\omega_1-\eta_1 v) = \bar{\lambda}-\lambda+2\mu\pi$$

sein, unter μ eine ganze Zahl verstanden. Da die Grösse $4\omega_1$ die kleinste reelle Periode des in (7.) auftretenden Sigmaquotienten $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}u$ ist (E. F. S. 94 und 95), so kann man sagen: Das Vierfache der in Rede stehenden Grösse $\nu\omega_1-\eta_1 v$ ist bis auf ein Vielfaches von 2π dem Längenunterschiede gleich, der zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten der geodätischen Linie besteht, wenn ihre reducirten Breiten in periodischer Wiederkehr einander gleich geworden sind.

ANMERKUNGEN.

Zu S. 17.

Nach mündlicher Mittheilung von Herrn H. A. Schwarz ist die hier angegebene Schlußweise zur Bestimmung der ganzen Zahl k, die bei der Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\bar{\omega}} \frac{\wp' u_0}{\wp u - \wp u_0}\, du$$

vorkommt, Weierstrass von ihm gelegentlich mitgetheilt worden.

Zu S. 60.

Die Bezeichnung der Thetafunctionen ist hier, wie in der Theorie der elliptischen Functionen (E. F. S. 171), abweichend von Jacobi so gewählt worden, dass den Functionen

$$\vartheta_0 \quad \vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3$$

die Sigmafunctionen

$$\sigma \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3$$

entsprechen. Weierstrass selbst hat sich in seinen Vorlesungen ursprünglich dieser Bezeichnungsweise später der Jacobischen bedient.

Zu S. 62 u. f.

Die eindeutige Bestimmung der in der Formel für den Flächeninhalt des Ellipsoids auftretenden Logarithmen ist in den Weierstrassschen Vorlesungen nicht vollständig durchgeführt worden; die hier gegebenen Ausführungen schliessen sich möglichst an die in der Vorrede erwähnten Aufzeichnungen von Weierstrass an, insbesondere finden sich dort die Formeln S. 65 (16.) und S. 66 (17.).

Vom dreiundzwanzigsten Bogen an hat Herr O. Köhler je zwei Correcturen gelesen und die Formeln nachgerechnet.

Rudolf Rothe.

Berichtigung zu Band V.

S. 264, Z. 2 v. u. lies e_γ statt e_β.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).