

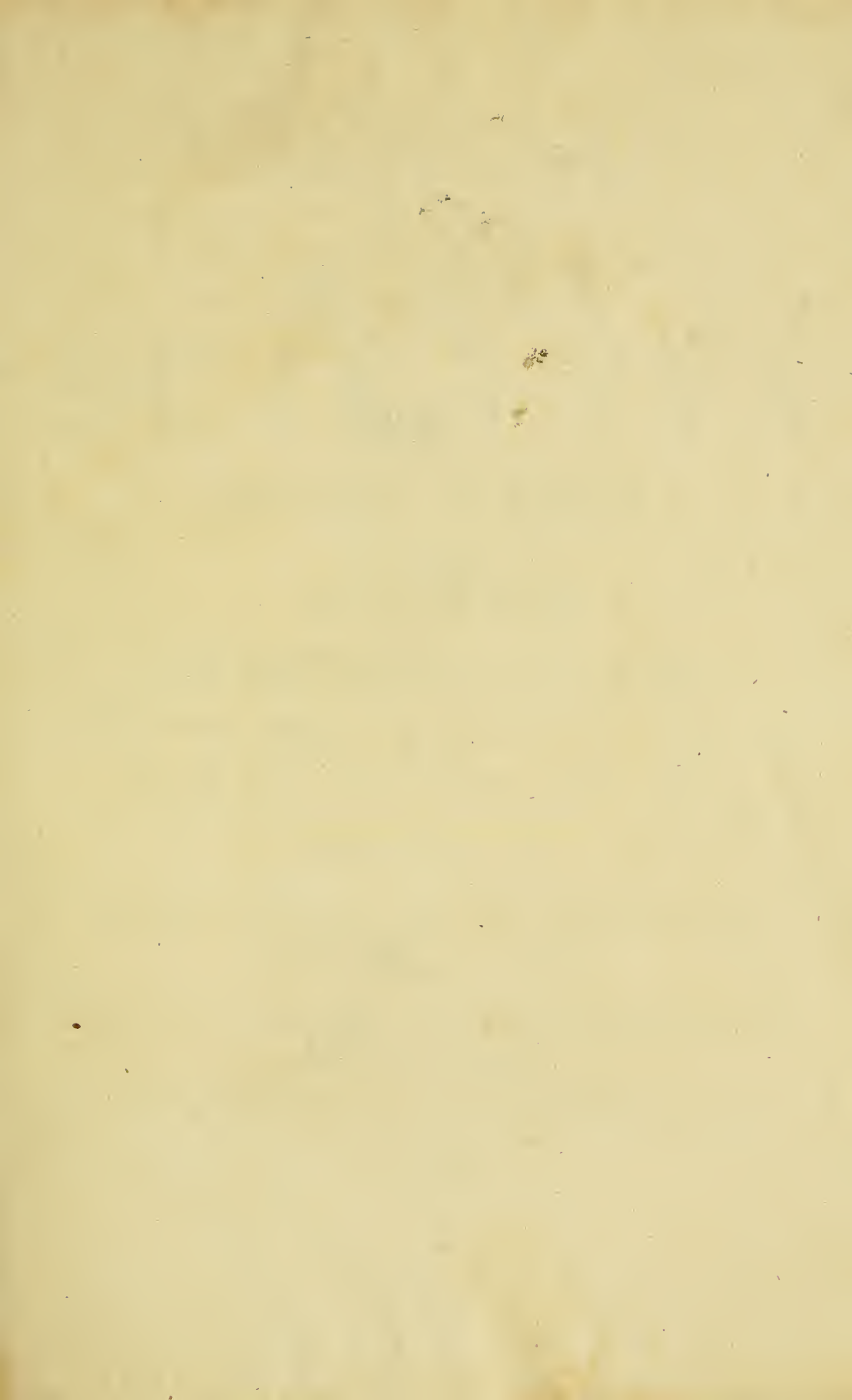
Brandeis University
Library



*As for the wise, their
body alone perishes in
this world — Rashi*

Cou JRB

32/M



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE

EXPOSITA

AUCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESIOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.

ACAD. SCIENT. IMPER.

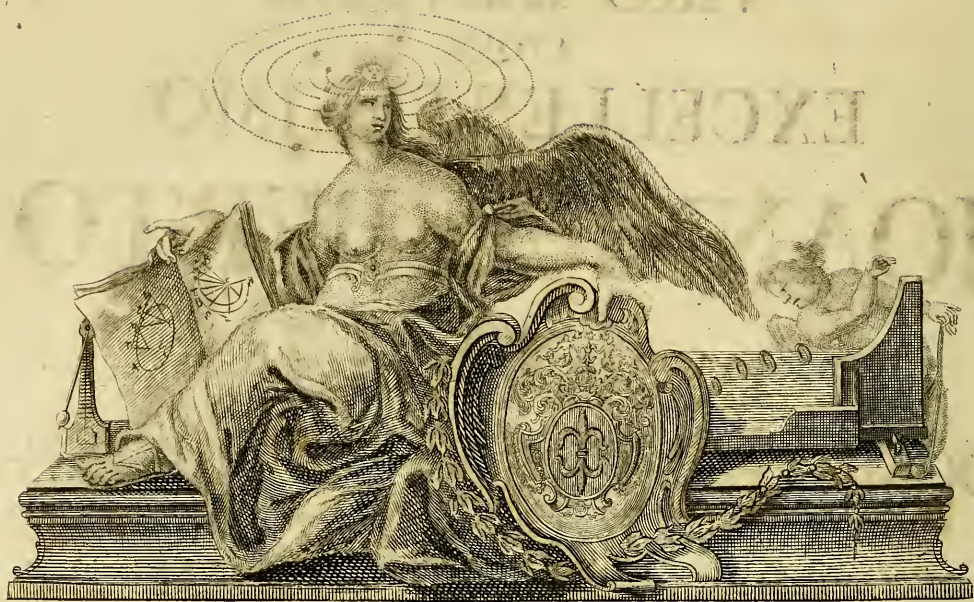
—
PETROPOLI

EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.

A. 1736.

Digitized by the Internet Archive
in 2011 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

VIRO ILLVSTRI
ATQVE
EXCELLENTISSIMO
JOANNI ALBERTO
DE KORFF
DOMINO HAEREDITARIO PRAE-
DIORVM
RENGENHOFFIENSIVM
SERENISSIMAE
ATQVE
POTENTISSIMAE RVSSORVM
IMPERATRICIS
CAMERARIO ORDINARIO
ATQVE
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPER.
PRAEFECTO.



VIR ILLUSTRIS

Cum, quae his praeteritis annis de motu corporum partim collegi et in ordinem digessi, partim ipse sum meditatus, mandavissem Vir Illustris, ut typis excuderentur, ea Tibi potissimum offerre atque dedicare non vereor. Tanta enim sunt
Tua

Tua tam ad excolendas et augendas omnis generis scientias et artes, quam ad academiam ad summum felicitatis fastigium euehendam, studia et curae, ut Tibi omnes harum rerum cultores multum, academici autem plurimum deuincti esse debeant. Maximum propterea in posterum et felicissimum successum certo sperare possumus, quod Augustae, Imperatrici nostrae Clementissimae pro summa Eius in studia propensione placuerit Tibi potissimum academiae scientiarum curam committere, Teque laborum nostrorum arbitrum atque iudicem constituere. Hoc igitur munere ita defungi decreuisti, ut ante omnia statum Academiae ad institutum foundationis reformares, atque in ordinem convenientem redigeres, tum vero ut academicorum quisque tam in docendis quam excolendis scientiis omne studium operamque impenderet, ad quae officia exequenda non solum Ipse Tuo exemplo et auctoritate quemque excitas, sed etiam ex Augustae summa munificentia, quicquid opus est, largiter suppeditas. Equidem in hoc tractatu de motu utriusque horum

officiorum, quae requiris satisfacisse mihi videor; primo enim omnia ordine ad docendum maxime idoneo disposui, atque in iis explicandis perpetuo usus sum methodo analytica, quae synthesi in instruendo merito longe praeferrri solet. Deinde vero non pauca omnino noua passim adieci, quibus hanc de motu scientiam pro viribus adauxi atque locupletavi. Hunc ergo laborem meum, quem tam docentibus quam discentibus non inutilem fore confido, ut benigne excipere digneris enixe rogo atque obsecro, meque Tuo fauori atque beneuolentiae submisisse commendo

VIR ILLUSTRIS
ATQUE
EXCELLENTISSIME

*Dabam Petropoli
die 1. Aug. A. 1736.*

Tui obseruantissimus

Leonhardus Euler.



PRAEFATIO.

Mechanicae vox longo ab hinc temporis interuallo duplicem obtinuit significationem, et hoc quidem tempore eo nomine appellantur duae scientiae tam ratione principiorum, quam ratione materiae inter se prorsus diuersae. Mechanicae enim nomen tum ei scientiae tribui solet, quae de aequilibrio potentiarum tractat, earumque inter se comparatione; tum etiam ei, in qua ipsa motus natura, generatio et alteratio explicatur. Quanquam enim in hac posteriore disciplina potentiae quoque praecipue considerantur, cum iis motus et generetur et immutetur; tamen tractationis ratio multum discrepat a priore scientia. Ad vitandam igitur omnem ambiguitatem iuuabit illam scientiam, quae de potentiarum aequilibrio et comparatione agit, Staticam appellasse, alteri vero motus scientiae soli Mechanicae nomen reliquis-

liquisse, quo quidem sensu hae voces iam passim sunt usurpatae. Temporis praeterea ingens intercedit discrimen inter has disciplinas: Statica enim iam ante Archimedis tempora excoli coepit, Mechanicae vero prima demum iecit fundamenta Galilaeus, dum grauium descensum inuestigauit. His vero posterioribus temporibus post inuentam Analysis infinitorum tanta utraque scientia cepit incrementa, ut quae ante tam longo temporis interuallo erant eruta, prae his propemodum euanescent. Ista vero tam multa inuenta, quibus hae scientiae ad hoc usque tempus sunt aduatae et promotae, per tot diaria et opera sunt sparsa, ut harum rerum studioso sit difficillimum ea conquirere et peruoluere. Praeterea, quod maximam parit molestiam, alia sine omni analysis et demonstratione sunt proposita, alia nimis perplexis et more veterum concinnatis demonstrationibus sunt munita, alia vero ex alienis et minus genuinis principiis deriuata, ut nisi cum summo labore maximoque temporis dispendio cognosci et digeri nequeant. Quod quidem ad Staticam attinet, completum fere et omnibus numeris absolutum opus prodit Varignonii duobus constans voluminibus, Gallico idiomate conscriptum. Quod etiam si Mechanicae titulum prae se ferat, tamen totum est occupatum in
 defi-

definiendo aequilibrio potentiarum cuiusque modi corporibus applicatarum; neque ibi vix quicquam continetur, quod ad motum, eamque scientiam, quam hic *Mechanicae* nomine indicamus, pertineat. Celeb. Wolfius etiam in suis *Matheseos Elementis* praesertim nouissimae editionis multa praeclara cum ad *Staticam* tum ad *Mechanicam* spectantia in *Elementis Mechanicis* exposuit, coniunctim quidem neque vlllo discrimine inter has scientias factō. Praestituti autem limites; ipsaque operis ratio ipsi non permisisse videntur tum has scientias a se inuicem discernere, tum utramque satis ampliter explicare. Quamobrem nescio an praeter *Hermanni Phoronomiam* vnquam aliud in publicum prodierit opus, in quo haec de motu scientia seorsim et tot tantisque eximiis inuentis locuplecata esset pertractata. Etenim *Hermannus* cum ipse hanc scientiam plurimis adauxit accessionibus, tum quae illo tempore aliorum industria erant detecta, simul adiecit. At cum in illo non satis magno opere praeter *Mechanicam* constituisset reliquas quoque affines scientias, *Staticam* scilicet, et *Hydrostaticam* vna cum *Hydraulica* complecti, nimis exiguum spatium pertractandae *Mechanicae* restabat; quo factum est, vt omnia quae ad hanc scientiam pertinent, rimis breuiter et concise proferre cogere-

geretur. Praeterea, quod lectorem maxime distinet, omnia more veterum synthetice geometricis demonstrationibus est persecutus, atque analysin, qua ad completam harum rerum cognitionem peruenitur, celauit. Non multum dissimili quoque modo conscripta sunt Newtoni Principia Mathematica Philosophiae, quibus haec motus scientia maxima est adepta incrementa. Sed quod omnibus scriptis, quae sine analysi sunt composita, id potissimum Mechanicis obtingit, ut Lector, etiamsi de veritate eorum, quae proferuntur, conuincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita ut easdem quaestiones, si tantillum immutentur, proprio Marte vix resolvere valeat, nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo euoluat. Idem omnino mihi cum Newtoni Principia et Hermannii Phoronomiam perustrare coepissem, usu venit, ut quamuis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepantia problemata resolvere non potuerim. Illo igitur iam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones ad meam utilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meae augmentum percepi.

mili deinde modo alia quoque passim dispersa ad hanc scientiam spectantia scripta sum persecutus, quae omnia ad meum usum methodo plana et aequabili exposui, atque in ordinem idoneum digessi. Hoc in negotio occupatus non solum in plurimas antea nondum tractatas invidi quaestiones, quas feliciter solutas dedi: sed etiam complures peculiare methodos sum adeptus, quibus tam mechanica quam ipsa analysis non parum augmenti accepisse videantur. Hinc igitur natus est iste de motu tractatus, in quo cum ea, quae in aliorum scriptis de motu corporum inveni, tum quae ipse sum meditatatus, methodo analytica et commodo ordine exposui. Operis autem partitionem tum ab ipso corporum, quae mouentur, discrimine, tum ab eorum statu vel libero vel non libero petii. Ipsa corporum indoles mihi hanc suppeditavit diuisionem, ut primo corporum infinite paruorum et quasi punctorum motum inuestigarem, tum vero ad corpora finitae magnitudinis eaque vel rigida vel flexibilia vel ex partibus a se inuicem omnino dissolutis progrederer. Quemadmodum enim in Geometria, in qua dimensio corporum traditur, tractatio a punctis ordiri solet, ita etiam corporum finitae magnitudinis motus explicari non potest, nisi prius punctorum, ex quibus corpora composita concipienda

sunt, motus sit diligenter examinatus. Namque corporis finitam habentis magnitudinem motus aliter considerari et determinari non potest, nisi ut definiatur, qualem quaeque eius particula seu punctum habeat motum. Quocirca haec de motu punctorum tractatio est fundamentum et praecipua pars totius Mechanicae, cui reliquae partes omnes inmittuntur. Huic igitur disquisitioni de motu punctorum duos hos priores Tomos destinaui, in quorum altero puncta libera in altero vero non libera sum contemplatus. Latius autem pleraque, quae in his libris tradidi, patent quam sola puncta; ex iisque saepenumero corporum finitorum motus potest determinari, totalis scilicet non vero is, quo partes singulae inter se mouentur. Ex eo enim, quod punctum in vacuo proiectum parabolam describat, quoque intelligitur quaeque corpora finita si proiciantur, in parabolis moueri debere, motus vero singularum partium lexinde non constat, sed haec inquisitio propria est sequentium Librorum, in quibus corporum finitorum motus definietur. Simili quoque modo, quae Newtonus de motu corporum a viribus centripetis sollicitatorum demonstrauit, de punctis tantum valent, interim vero tamen ea ad motum planetarum recte transtulit. In hoc itaque primo Tomo puncta libera examini

subiicio, atque quamnam motus alterationem quaeque potentiae sollicitantes iis inferant, inuestigo: liberum autem mihi est corpus, quando nihil impedit, quo minus corpus ea celeritate et secundum eam directionem, quas tum ratione motus iam insitit, tum ratione potentiarum sollicitantium habere debet, progrediat. Ita planetae et in terra corpora vel delabentia vel proiecta libere moueri dicuntur, quia in motu et vim insitam et effectum potentiae sollicitantis sequuntur; at corpus super plano inclinato descendens, aut pendulum oscillationes peragens non libere mouetur, planum enim subiectum, vel pendulum alteri termino fixum impedit, quominus corpus directe descendat, ut vis grauitatis postulat. Expono igitur Capite primo generales motus proprietates, et quae de celeritate, spatio et tempore tradi solent: atque demonstro leges naturae vniuersales, quas corpus liberum a nullis potentius sollicitatum obseruat. Quid scilicet huiusmodi corpus si semel quieuerit, perpetuo in quiete perseuerare debeat; at si motum habuerit, perpetuo eadem celeritate in directum progredi debeat, quarum utraque lex sub nomine conseruationis status commodissime comprehendendi potest. Ex quo sequitur conseruationem status esse corporum omnium proprietatem essentialem, atque



omnia corpora, quatenus sunt talia, habere vim seu facultatem in statu suo perpetuo permanendi, quae nil aliud est nisi ipsa vis inertiae. Minus quidem apte vis nomen huius conseruationis causae tribuitur, quia non est homogenea cum aliis viribus proprie sic dictis, cuiusmodi est vis grauitatis, neque cum iis comparari potest; in quo errore plures, et imprimis Methaphysici versari solent, vocis ambiguitate decepti. Cum ergo omne corpus natura sua in statu eodem siue quietis siue motus perseueret, externis viribus tribuendum est, si corpus hanc legem non sequatur, sed vel motu inaequabili, vel secundum lineam curuam progrediatur. Huiusmodi vero externae vires sunt potentiae, de quarum aequilibrio et comparatione in Statica est tractandum, quae, quando in corpus agunt, eius statum perturbant, id vel mouendo vel accelerando, vel retardando vel directionem mutando. In secundo igitur Capite persequor, cuiusmodi effectum quaeque potentia in punctum liberum siue quiescens siue motum exercere debeat. Hinc conficiuntur vera Mechanicae principia, ex quibus, quicquid ad motus alterationem pertinet, explicari debet; quae, cum adhuc nimis leuiter essent confirmata, ita demonstrauit, ut non solum certa sed etiam necessario vera esse intelligantur. Expositis principiis, ex quibus

intelligi potest, quemadmodum motus tum conseruetur, tum a potentiis vel generetur vel alteretur, progredior ad ipsum motum corporum a potentiis utcumque sollicitatorum determinandum et examinandum. Atque primo quidem motum considero rectilineum tanquam determinatu facillimum, qui oritur, si punctum liberum ab unica potentia vel quiescens ad motum sollicitatur, vel iam motum in ipsa potentiae directione siue acceleratur, siue retardatur, cui disquisitioni Capita tertium et quartum dicavi, in quorum priore motum rectilineum in vacuo, in posteriore vero motum rectilineum in medio quomodocumque resistente pertracto. Quamuis enim resistentia ad potentias proprie sic dictas reduci queat, tamen in hac tractatione consultum visum est alterationem motus a resistentia seorsim tradere; cum ut alios, qui hac de re scripserunt, sequerer, tum etiam propter essentialem, quae inter potentias absolutas et resistentiam intercedit differentiam. Potentia enim absoluta seu proprie sic dicta determinatam et a motu corporis non pendentem habet directionem, atque insuper in corpus motum aequae agit, ac in quiescens; cum contra resistentiae directio sit semper in ipsa corporis moti directione sita, eiusque quantitas a celeritate corporis pendeat. Etsi vero in natura praeter resistentiam, quae quadratis celeritatum est proportionalis, alia non obseruetur, tamen alias etiam quasque resistentias pertractavi, cum et plurimum circa motum in medio resistente agitatorum problematum solutiones simul exponerem, tum vero imprimis ut plurima egregia

cal-



calculi specimina afferendi esset occasio. In duobus denique postremis capitibus motus corporum curuilineos sum contemplatus, qui oriuntur, quando potentiarum sollicitantium directio cum corporis proiecti directione non congruit. Hoc enim casu corpus perpetuo a recto tramite retrahitur et in linea curua moueri cogitur. In quinto quidem capite motum huiusmodi curuilineum in vacuo exposui, in sexto vero capite medii resistantiam simul consideravi. Primaria ergo problemata, quae in his capitibus continentur, in hoc versantur, ut corporis utcumque proiecti et a quibuscumque potentiis sollicitati curua, in qua moueatur, determinetur, atque simul corporis celeritas in singulis curuae punctis indicetur, hocque tam in vacuo, quam in medio resistente. Ex his vero primariis propositionibus tunc aliae sunt natae, in quibus vel ex data curua a corpore descripta, vel ex data motus quadam indole tum potentiae sollicitantes tum resistantia quaeruntur. In quo negotio in id imprimis incubui, ut omnia tam a Newtono quam ab aliis tractata hucque spectantia problemata complecterer, atque solutiones genuinas methodo analytica traderem. His igitur Tomus iste primus absolvitur, quem pariter ac sequentem ita conscripsi, ut qui in analysi tam finitorum quam infinitorum satis fuerit exercitatus, is mira facilitate omnia intelligere, atque sine ulla manuductione integrum hoc opus perlegere queat.



CAPUT



CAPUT PRIMUM
DE MOTU IN GENERE.

DEFINITIO I.

I.

Motus est translatio corporis ex loco, quem occupabat, in alium. Quies vero est permanſio corporis in eodem loco.

Corollarium I.

2. Motus igitur et quietis ideae in alias res cadere non poſſunt, niſi quae locum occupant. Quare cum hoc ſit corporum proprium, locum occupare, de ſolo corpore dici poteſt, quod moueatur vel quieſcat.

Corollarium 2.

3. Atque haec motus quietisque idea ita eſt propria corpori, vt ad omnia prorsus corpora pertineat. Nullum enim exiſtere poteſt corpus, quod non vel moueatur vel quieſcat.

DEFINITIO 2.

4. Locus eſt pars ſpatii immenſi ſeu infiniti, in quo vniuerſus mundus conſiſtit. Vocari hoc ſen-

A

ſu

si acceptus locus solet absolutus, vt distinguatur a loco relatiuo, cuius mox fiet mentio.

Corollarium I.

5. Quando igitur corpus successiue aliam atque aliam huius immensi spatii partem occupat, mouetur: at si perpetuo in eadem sede perseverat, tum quiescit.

Corollarium 2.

6. Concipi autem animo solent huius spatii termini fixi ad quos corpora referuntur. Atque ista relatio est id, quod situs appellatur. Quae igitur corpora eundem seruant situm respectu horum terminorum ea quiescere dicuntur. Contra vero, quae situm suum mutant, moueri dicuntur.

Scholion I.

7. Si hac significatione expositae voces accipiantur, vocari solent motus absolutus, quiesque absoluta. Atque hae sunt verae et genuinae istarum vocum definitiones, sunt enim accommodatae ad leges motus, quae in sequentibus explicabuntur. Quoniam autem immensi illius spatii eiusque terminorum, quorum in datis definitionibus mentio est facta, nullam nobis certam formare possumus ideam; loco huius immensi spatii eiusque terminorum considerare solemus spatium finitum, limitesque corporeos, ex quibus de corporum motu et quiete iudicamus. Sic dicere solemus, corpus, quod re-

spe-

spectu horum limitum situm eundem conseruat, quiescere, id vero, quod situm eodem respectu mutat, moueri.

Scholion 2.

8. Quae hic de immenso et infinito spatio eiusque terminis dicta sunt, considerari debent vt conceptus pure mathematici. Qui, quanquam metaphysicis speculationibus videntur contrarii, nihilo tamen minus ad institutum nostrum recte adhibentur. Namque non asserimus, dare huiusmodi spatium infinitum, quod habeat limites fixos et immobiles; sed siue sit, siue non sit, non curantes, postulamus tantum, vt motum absolutum et absolutam quietem contemplaturus sibi tale spatium repraesentet, ex eoque de corporum statu vel quietis vel motus iudicet. Ratiocinium enim commodissime hoc modo instituetur, vt animum a mundo abstrahentes imaginemur nobis spatium infinitum atque vacuum, et in eo corpora collocata esse concipiamus, quae si in hoc spatio situm suum retinent, absolute quiescere, si autem ex alia huius spatii parte in aliam transeunt, absolute moueri iudicanda sunt.

DEFINITIO 3.

9. Motus relatiuus est situs mutatio respectu cuiusdam spatii pro lubitu assumti. Atque quies relatiua est permanens in eodem situ respectu eiusdem spatii. *Ita terram pro hoc spatio accipientes, ea quiescere dicimus, quae in terra situm suum immutatum tenent; ea vero moueri, quae ex alio situ respectu ter-*

rae in alium progrediuntur, hocque sensu solem moueri dicimus. Simili modo in naui propulsa relatiue quiescunt, quae eundem in naui tenent locum, et relatiue mouentur, quae in naui locum suum mutant.

Corollarium I.

10. Conueniunt motus relatiuus et quies relatiua cum absolutis, quando spatium corpusue, cuius respectu motus et quies iudicantur, reuera quiescit respectu spatii illius immensi et infiniti. Si enim terra reuera quiescit, quae huius respectu mouentur et quiescunt, etiam absolute mouentur et quiescunt.

Corollarium 2.

11. Discrepant autem relatiuus motus et quies ab absolutis, si spatium illud mouetur. Nam si terra respectu spatii infiniti non quiescit, neque quae eius respectu quiescunt, absolute quiescunt; atque etiam motus absolutus differet a relatiuo. Quin imo fieri potest, vt corpus, quod relatiue mouetur, idem absolute quiescat.

Scholion.

12. Perspicuum est statum hunc corporum relatiuum vel motus vel quietis innumerabilibus modis posse esse diuersum: prout enim aliud atque aliud assumitur spatium; cuius respectu motus et quies diiudicantur, alii prodibunt motus relatiui aliaque quies. Sic stellae fixae respectu telluris mouentur, quaelibet vero respectu reliquarum quiescit. Atque
pla-

planetæ tam respectu terræ, quam stellarum fixarum mouentur. In sequentibus autem semper et motum et quietem absolutam intelligi volo, nisi expresse monuero etiam ad relatiua pertinere, quæ afferentur.

PROPOSITIO I.

Theorema.

13. *Omne corpus, quod siue motu absoluto siue relatiuo in alium locum transfertur, per omnia loca media transit, neque subito ex primo in vltimum potest peruenire.*

Demonstratio.

Pro motu absoluto si corpus subito ex loco primo in extremum perueniret, necesse esset, vt in primo fuisset annihilatum, statimque in vltimo de nouo productum, id quod per leges naturæ, nisi accedat miraculum, fieri non potest. Procedet igitur ex primo in proximum quendam, ex hocque in sequentem, donec tandem in extremum perueniat. *Pro motu relatiuo* si corpus, quod in locum spatii infiniti substituitur, re vera quiescit, superius valet ratiocinium (10). At si moueatur, ipsum quoque per singula loca media transire debet, et propterea etiam motus relatiuus erit successiuus, fietque per singula media loca. Q. E. D.

Corollarium I.

14. Sequitur ex his etiam motum non posse fieri in instanti, sed tempore opus esse, quo ex

alio loco in alium perueniat corpus. Quia enim per singula loca media debet transire, hoc cum motu instantaneo consistere non potest.

Corollarium 2.

15. Poterit igitur etiam via assignari, per quam corpus transit, atque ea cognita, nullum in ea erit punctum, quod corpus ex primo loco in vltimum progressum non attigerit. Vocari autem solet haec via spatium percursum.

Scholion.

16. Facile quoque est haec ad corpora circa axem rotata accommodare. Quoniam enim ipsum corpus situm suum non mutat: tamen motus inest in eius partibus, qui cognoscetur, si singulae partes vt totidem diuersa corpora seorsim considerantur. Singulae enim respectu spatii infiniti situm suum mutare deprehendentur, neque vllae quiescent nisi quae in ipso axe sunt positae. Atque simili modo omnia corpora contemplari oportet, vt non solum ipsius totius, sed singularum etiam partium situs eiusque mutatio inspiciatur.

DEFINITIO 4.

17. Corpus aequabiliter vel vniformiter moueri dicitur, quod aequalibus temporibus per aequalia spatia currit. Motus vero inaequabilis est, qui aequalibus temporibus fit per spatia inaequalia, seu qui aequalia spatia inaequalibus temporis interuallis absoluit.

Corol-

Corollarium 1.

18. Corpus igitur motu aequabili latum duplo tempore absoluit spatium duplum, triplo tripulum, atque in genere spatia percurfa sunt temporibus proportionalia, temporaque spatiis viciffim. Ut nauis super mari aequabili motu incedens, fi vna hora duo percurrit milliaria, eadem duabus horis quatuor absoluet milliaria, tribus sex, et n horis $2n$ milliaria.

Corollarium 2.

19. Quamobrem fi datur motus aequabilis, habebitur ex eo accurata temporis menfura, quae nifi ex motu cognofci non potest. Metiendis enim spatiis, quae corpus aequabiliter motum percurrit, innotefcet fimul temporum, quibus ea erant percurfa, ratio.

Scholion.

20. Neque vero aliunde habemus temporis in annos, dies, et horas diuifionem, nifi ex motu, quem tanquam aequabilem fpectamus. Pofita enim terra quiefcente crediderunt veteres folem motu aequabili ferri, tempusque, quo circa terram reuoluitur, diem appellauerunt. Porro fumerunt ftellarum fixarum circa terram motum quoque effe aequabilem, atque tempus, quo fol in eundem refpectu ftellarum fixarum locum, reuertitur, annum pofuerunt. Denique haec tempora in partes aequales diuiferunt, hocque modo horas, et minuta funt
ade-

adepti. Facile autem patet, si motus isti non sint, ut creduntur, aequabiles, hanc quoque temporum mensuram esse erroneam. Atque re ipsa recentiores astronomi in his motibus inaequalitatem detexerunt, et inuenerunt dies omnes non esse aequales inter se, quamobrem correctionem etiam adhibere solent ex aliis magis aequabilibus motibus; quam temporis aequationem vocant, ex qua inaequalitas dierum cognoscitur.

DEFINITIO 5.

21. Omne corpus, quod mouetur, celeritatem seu velocitatem habere dicitur, eaque mensuratur spatio, quod id corpus aequabiliter motum dato tempore percurrit. *Scilicet quando corpus B eodem tempore duplum spatium motu aequabili absoluit, quo corpus A etiam aequabiliter motum simpliciter percurrit, corpus B duplo maiorem habere dicitur celeritatem, quam corpus A.*

Corollarium I.

22. Quia igitur in motu aequabili corpus aequabilibus temporibus aequalia percurrit spatia (17.), habebit corpus aequabiliter motum perpetuo eandem celeritatem, seu velocitatem. In motu vero inaequabili corpus successiue aliam atque aliam induit celeritatem.

Corollarium 2.

23. Celeritas autem, quam corpus inaequaliter motum in quouis spatii percursum puncto habet,

bet, mensuranda est ex spatio, quod ea celeritate aequabiliter motum dato tempore percurrere possit.

Corollarium 3.

23. Celeritas porro corporis aequabiliter moti absolute mensurari potest spatio, quod dato tempore verbi gratia vno minuto secundo percurritur. Atque is celeritatem corporis cuiuspiam perfecte cognoscere censendus est, qui spatium definire valet, quod corpus ea celeritate motum tempore minuti secundi percurrit.

Scholion.

24. Maxime etiam est in vsu haec celeritatis metiendae ratio. Nautas enim naus celeritatem exploraturos videmus spatium mensurare, quod nauis dato tempore percurrit. Vulgo autem accipiunt interuallum quatuor horarum, et inuestigant, quot milliaria nauis hoc tempore absoluat. Ex quo simul intelligitur, quot pedes nauis tempore minuti secundi percurrat, siquidem motu aequabili progrediatur.

PROPOSITIO 2.

Theorema.

25. *Duorum corporum aequabili motu progredientium celeritates sunt directe vt spatia quaecunque percursa et inuerse vt tempora, quibus ea spatia erant percursa.*

B

De-

Demonstratio.

Sint duo corpora A et *a*, eorumque celeritates C et *c*; percurrat illud A spatium S tempore T, hoc vero *a* spatium *s* tempore *t*. Iam quia in motu aequabili spatia sunt temporibus proportionalia (18.), determinabitur spatium, quod corpus *a* tempore T absoluit, ex hac proportione $t:T = s:S$: $\frac{sT}{T}$: mouebitur ergo corpus *a* tempore T per spatium $\frac{sT}{T}$. At corpus A mouetur eodem tempore T per spatium S. Celeritates vero corporum mensurari debent spatiis eodem tempore percursis (18.). Quocirca erit $C:c = S:\frac{sT}{T}$ seu $C:c = \frac{S}{T}:\frac{s}{T}$. Ex quo sequitur celeritates esse directe vt spatia et inuerse vt tempora, quibus ea sunt percursa. Q. E. D.

Corollarium I.

26. Ex vltima analogia prodit haec aequatio $\frac{cT}{S} = \frac{ct}{s}$. In quouis igitur motu aequabili factum ex celeritate in tempus, si diuidatur per spatium eo tempore percursum, dabit semper eundem quotum.

Corollarium 2.

27. Erit etiam $T:t = \frac{S}{C}:\frac{s}{c}$. Ex quo sequitur tempora esse in ratione composita ex directa spatiorum et inuerfa celeritatum, seu esse vt spatia per celeritates diuisa.

Corollarium 3.

28. Deinde inuenta proportio transmutatur etiam in hanc $S:s = CT:ct$. Ex qua colligitur spatia motu aequabili percursa esse in ratione composita ex ratione celeritatum et ratione temporum.

Co-

Corollarium 4.

29. Data igitur celeritate corporis aequabiliter moti vna cum spatio quouis descripto, innotescet tempus, quo hoc spatium est percursum; diuidendo scilicet spatium per celeritatem. Cum enim hunc quotum tempori semper proportionalem esse ostenderimus, poterimus eundem pro temporis mensura vsurpare.

Corollarium 5.

30. Similiter celeritas poterit exprimi per spatium percursum diuisum per tempus, atque spatium etiam ipsum per factum ex tempore in celeritatem.

Scholion I.

31. Si enim celeritas tanta sit, vt corpus ea motum tempore minuti secundi absoluat spatium trium pedum, et propterea celeritatem exponamus numero 3; poterimus inuenire tempus, quo 60 pedes v. gr. eodem motu absoluuntur. Diuidatur enim 60 per 3 quotus 20 indicabit hos 60 pedes 20 minutis secundis percurri. Et si quaeratur spatium tempore 12 minutis secundis percursum, prodibit id 36 pedum. Atque etiam corporis 6 minutis secundis 48 ped. percurrentis proueniet celeritas 8, quae indicat hoc corpus minuto secundo 8 ped. percurrere.

Scholion 2.

32. Atque hanc tempora, spatia et celeritates mensurandi rationem in sequentibus semper adhibe-

bimus. Tempora nempe in minutis secundis perpetuo exprimemus, et spatia pedibus, iisque Rhenanis. Celeritates vero, ut iam est factum, denotabimus numero pedum, qui minuto secundo percursunt. Infra quidem commodior celeritates determinandi ratio occurret, qua deinceps sumus vsuri, sed ea tamen ex hac nascitur, ad eamque facile reuocatur.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

33. *In motu quantum vis inaequali, minima spatii elementa motu aequali percursi concipi possunt.*

Demonstratio.

Quemadmodum enim in geometria curuarum linearum elementa ut lineolae rectae considerantur, ita etiam simili modo in mechanica motus inaequalis in infinitos aequabiles resoluitur. Vel enim reuera elementa aequali motu percursuntur, vel mutatio celeritatis per huiusmodi elementa est tantilla, ut incrementum aut decrementum sine errore negligi possit. In utroque casu ergo apparet propositionis veritas. Q. E. D.

Corollarium I.

34. Omnis ergo celeritatis mutatio in motu inaequali in singulorum elementorum initiis fieri concipienda est, quia integra elementa aequali motu percursi ponuntur.

Co-

Corollarium 2.

35. Quare secundum notandi modum analy-
feos infinite paruorum, si celeritas in primo ele-
mento fuerit c , erit celeritas in secundo $c+dc$, in
tertio $c+2dc+ddc$, et ita porro.

Scholion.

36. Demonstrationis datae vis hoc nititur
fundamento, quod celeritatis mutatio, quae fieri
potest, dum elementum infinite paruum percurritur,
debeat esse infinite exigua et evanescere prae cele-
ritate, quam corpus iam habet, hoc enim nisi esset,
generaretur motus finitus in instanti, quod esset ab-
surdum. Interim tamen videtur haec propositio ad-
mitti non posse, si ipse motus et celeritas est infini-
te parua, quo casu incrementum vel decrementum
momentaneum habere potest rationem finitam ad
illam. Sed de hoc infra videbimus, ubi motus ge-
neratio considerabitur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

37. *Moueat corpus motu utcumque inaequa-* Tab. I.
bili per lineam AM, data vero sit celeritas corporis in Fig. 10
quouis loco: oportet determinare tempus, quo arcus AM
absoluitur.

Solutio.

Sit spatium AM, siue sit linea recta siue curva,
= s , et celeritas, quam corpus habet in M sit c , quae
erit functio quaedam ipsius s . Ab M accipiatur ele-
mentum Mm , quod igitur motu aequabili idque ce-

leritate c percurri concipiendum est. Vocato elemento Mm , ds ; erit tempus, quo hoc elementum percurritur $=\frac{ds}{c}$ (29.). Integrando ergo habebitur tempus, quo totus arcus AM absolvitur $=\int\frac{ds}{c}$. Ad integrale vero talis adiici debet constans, quae reddat hoc tempus $=0$, si ponitur $s=0$, secundum notas integrationis regulas. Q. E. J.

Exemplum I.

33. Sit celeritas in M ut potestas quaecunque spatii iam descripti AM , scilicet $c=s^n$; erit $\int\frac{ds}{c}=\frac{s^{1-n}}{1-n}$. Ad quod constantem non opus est adiicere si $n < 1$, vel negativum habeat valorem: dabit enim ipsum $\frac{s^{1-n}}{1-n}$ tempus, quo arcus AM percurritur. At si fuerit $1-n$ numerus negativus habebitur $\int\frac{ds}{c}=\frac{-1}{(n-1)s^{n-1}}$. Ad quod constans $\frac{1}{(n-1)0^{n-1}}$, i. e. infinita quantitas debet addi, quo totum habeatur tempus per AM . Tempore ergo in his casibus opus est infinito, quo corpus ex A in alium quemvis locum M perueniat. Quamobrem perpetuo in A persistet, neque vnquam inde egredietur. Fit hoc vero, quoties est n numerus positivus unitate maior. Si vero est $n=1$, tempus nequidem algebraice potest exhiberi, provenit enim $\int\frac{ds}{s}=ls$, ad quod etiam quantitatem infinitam addi oporteret, quo tempus per AM haberetur.

Co-

Corollarium 1.

39. In mundo ergo alii casus subsistere nequeunt, nisi in quibus celeritates motus saltem principio sint vt spatiorum percursorum potestates exponentis minoris, quam est vnitas.

Corollarium 2.

40. Progrediatur corpus in recta AM, sitque in quouis loco celeritas eius vt applicata MN curuae AN, quae cum recta AM in A concurrat, ita vt celeritas corporis in principio A sit nulla. Peripicuum est ex praecedentibus, quo tempus per AM fiat finitum, oportere tangentem AB in A esse ad AM perpendicularem. Coincidente enim M in A debet MN fieri $\propto AM^n$, et n numerus vnitate minor scilicet fractio ex quo normalitas tangentis sequitur. Sin vero tangens AB angulum constituat acutum vel infinite paruum cum AM, tempus per AM fiet infinitum.

Tab. I.
Fig. 2.

Exemplum 2.

41. Moueatur corpus per rectam AB ita, vt descripto super ea semicirculo ANB celeritas in quouis puncto M sit vt applicata circuli in eo loco MN. Id quod ita potest intelligi, celeritatem in M tantam esse, qua corpus minuto secundo possit percurrere spatium $\propto m \cdot MN$. Ponatur huius semicirculi radius $AC \propto a$, spatium iam percursum $AM \propto s$; erit $MN \propto \sqrt{2as - ss}$. Celeritas ergo in M, quam posuimus c , erit hoc casu $\propto m\sqrt{2as - ss}$.

Tab. I.
Fig. 3.

Id

Idcirco tempus, quo spatium AM percurritur, erit

$$= \int \frac{ds}{m\sqrt{(2as-ss)}} = \frac{1}{ma} \int \frac{ads}{\sqrt{(2as-ss)}}.$$
 At $\int \frac{ads}{\sqrt{(2as-ss)}}$ denotat
 ipsum circuli arcum AN . Quamobrem tempus,
 quo spatium AM percurritur erit $= \frac{AN}{m \cdot AC}$ minut. se-
 cundis. Atque tempus, quo corpus ab A ad B mo-
 uetur erit $= \frac{ANB}{m \cdot AC}$ min. sec. Est vero quam proxime
 $\frac{ANB}{AC} = \frac{22}{7}$. Ergo tempus hoc erit $= \frac{22}{7 \cdot m}$ minutis se-
 cundis. Ex quo iutelligitur quantacunque fit linea
 AB , eam perpetuo eodem tempore percurri.

Corollarium 3.

Tab. I. 42. Ex solutione problematis apparet etiam
 Fig. I. eodem tempore, quo corpus ex A in M peruenit,
 idem motu retrogrado ex M in A peruenturum, si
 modo in utroque motu in iisdem locis aequales ha-
 beat celeritates.

Corollarium 4.

Tab. I. 43. Repraesentent curvae AN applicatae MN
 Fig. 4. celeritates, quas corpus in recta AN motum habet
 in singulis punctis M , constituat autem curua in A
 cum recta AM angulum recto minorem. His posi-
 tis iam est ostensum, tempus, quo corpus ex A in M
 perueniet, fore infinite magnum. Quare etiam mo-
 tu retrogrado corpus ex M versus A latum post
 tempus demum infinitum i. e. nunquam in A per-
 tingit, quamvis vbique, nisi in A habeat celerita-
 tem finitam.

PRO-

PROPOSITIO 5.

Theorema.

44. *Moueantur duo corpora in rectis AM et am* Tab. I.
exprimanturque eorum celeritates applicatis curuarum Fig. 5.
AN et an similium. Dico haec corpora percursura
spatia homologa AM et am eodem tempore.

Demonstratio.

Sint igitur AM et am spatia homologa, habebunt ea eandem rationem, quam applicatae MN et mn, sit ista ratio $m:n$; erit, positis $AM = s$, et $MN = c$, $am = \frac{ns}{m}$ et $mn = \frac{nc}{m}$. Est vero tempus per AM $= \int \frac{ds}{c}$ (37.), tempus autem per am habebitur ponendo $\frac{ns}{m}$ loco ds , et $\frac{nc}{m}$ loco c , in $\int \frac{ds}{c}$. Hoc vero facto iterum prodit $\int \frac{ds}{c}$: quare vtrumque tempus per AM et am erit $\int \frac{ds}{c}$, sunt igitur ea aequalia. Q. E. D.

Corollarium I.

45. Intelligitur hinc quoque ratio eius, quod §. 41. est dictum, sunt enim circuli omnes curvae similes et diametri spatia homologa.

Corollarium 2.

46. Sit curvae AN parameter a , quae siue maior siue minor accipiatur, curua AN mutetur in aliam sui similem. Hoc vero vt eueniat, huiusmodi debet esse aequatio pro curua AN, vt applicata c aequetur functioni ipsarum a et s vnus tantum dimensionis. Pro variis autem valoribus ipsius a , s exprimet spatia homologa, si accipiatur $= a$ vel
C
na.

na. Quoties igitur *c* huiusmodi definitur aequatione, spatia *na*, siue magnum siue paruum ponatur *a*, aequalibus percurruntur temporibus.

Scholion.

47. Quemadmodum, si *c* aequatur functioni ipsarum *a* et *s* vnius dimensionis, tempora per *a* vel *na* sunt omnia aequalia, quicquid sit *a*: Ita etiam si fuerit *c* aequale functioni ipsarum *a* et *s*, quae habeat *m* dimensiones, tempora per *a* vel *na*, quicquid sit *a*, tenebunt rationem a^{1-m} . Nam $\frac{c}{a^{m-1}}$, erit functio vnius dimensionis ipsarum *a* et *s*, quae ponatur *k*. Erit ergo $c = a^{m-1}k$, et $\int \frac{ds}{c} = a^{1-m} \int \frac{ds}{k}$. At $\int \frac{ds}{k}$ dabit, posito $s = a$ vel *na*, quantitatem constantem, utcumque varietur *a* (46.). Quamobrem $a^{1-m} \int \frac{ds}{k}$ dabit multipulum quoddam potestatis a^{1-m} . Erit consequenter tempus per *na* vt a^{1-m} .

DEFINITIO 6.

48. Scala celeritatum est curua, cuius applicatae repraesentant celeritates, quas corpus motum habet in locis respondentibus spatii, quod percurrit.

Tab. 1. Ita corporis in recta AM moti scala celeritatum est curua AN, cuius applicatae MN exponunt celeritatem corporis in singulis punctis M.

DEFINITIO 7.

49. Scala temporum est curua, cuius applicatae repraesentant tempora, quibus partes spatii percurfi respondentes absoluuntur. Ita si curua AT
sue

fuerit eiusmodi, ut eius applicata quaeuis MT exhibeat tempus, quo spatium AM percurritur, curua AT erit scala temporum.

Corollarium.

50. Quemadmodum ex data scala celeritatum AN inueniri debeat scala temporum, iam ex praecedente problemate (37.) apparet. Scilicet si dicatur spatium $AM = s$, celeritas in M i. e. $MN = c$, et tempus, quo AM percurritur i. e. $MT = t$, erit $t = \int \frac{ds}{c}$. Ex data igitur curua AN concessis quadraturis construi potest curua AT .

PROPOSITIO 6.

Problema.

51. Data scala temporum AT inuenire et construere scalam celeritatum AN .

Solutio.

Ponantur ut ante $AM = s$, $MN = c$, et $MT = t$ oportebit ex data aequatione inter s et t inueniri aequationem inter s et c . Facile vero hoc efficietur ex supra inuento canone $t = \int \frac{ds}{c}$. Fit enim differentiando $dt = \frac{ds}{c}$, atque $c = \frac{ds}{dt}$. Ducatur ergo ad curuam AT in T normalis TO erit $\frac{ds}{dt} = \frac{MT}{MO}$. Fiat ergo ut MO ad MT , ita linea quaedam vnitate expressa, qua minutum secundum indicatur, ad quartam proportionalem, quae erit $= MN$. Sumatur igitur ab M interuallum $MQ = r$, et ducatur QN parallela normali TO , erit punctum N in scala celeritatum quaesita. Q. E. I.

Exemplum I.

52. Sit scala temporum linea recta ad AM utcumque inclinata; erit $t = ms$, et $dt = mds$. Prohibet igitur $c = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}$. Scala celeritatum ergo erit linea recta ipsi AN parallela, atque corpus motu ferretur aequabili.

Exemplum 2.

53. Sint tempora ut potestates quaecunque spatiorum descriptorum, seu $t = s^m$, ideoque $dt = ms^{m-1} ds$. Ex quo erit $c = \frac{1}{ms^{m-1}} = \frac{1}{m} s^{1-m}$. Quare si curua AT fuerit parabola Apolloniana i. e. $t = s^{\frac{1}{2}}$; erit $m = \frac{1}{2}$, atque $c = 2s^{\frac{1}{2}}$. Ex quo apparet hoc casu scalam celeritatum quoque esse huiusmodi parabolam.

Corollarium.

54. Intelligitur etiam, si detur aequatio inter c et t , quomodo inueniendum sit spatium percursum s , atque utraque scala celeritatum et temporum. Quia enim est $c = \frac{ds}{dt}$; erit $ds = cdt$, et $s = \int cdt$.

Scholion.

55. Monendum hic est, ista, quae haecenus de scalis celeritatum et temporum sunt tradita, non solum ad motum absolutum spectare, sed etiam ad relatiuum pertinere. Nondum enim ipsa motus natura est considerata, neque quicquam est assumptum, quod motui absoluto esset proprium. Nunc vero afferemus quasdam propositiones, quae motui

ab-

absoluto sunt peculiare, ex quibusque quodammodo interna inter motus absolutos et relativi differentia poterit perspici.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

56. *Corpus absolute quiescens perpetuo in quiete perseverare debet, nisi a causa externa ad motum sollicitetur.*

Demonstratio.

Concipiamus corpus hoc existere in spatio infinito atque vacuo, perspicuum est nullam esse rationem, quare potius in hanc vel illam plagam moveatur. Consequenter ob defectum sufficientis rationis, cur moveatur, perpetuo quiescere debet. Neque vero hæc ratio in mundo cessat; quamvis obiici posset esse in mundo sufficientem rationem, quare in hanc potius, quam illam plagam, cedat. Etenim non est credendum in spatio infinito illo et vacuo defectum sufficientis rationis ad motum unicam esse causam permansionis in quiete; sed nullum est dubium, quin in ipsa corporis natura sit causa huius phaenomeni. Defectus scilicet sufficientis rationis non potest pro vera et essentiali cuiusquam eventus causa haberi, sed tantum veritatem idque rigide demonstrat. Quin et simul indicat in ipsa rei natura occultam esse causam veram essentialem, quae non cessat, cessante illo sufficientis rationis defectu. Ita Archimedis demonstratio de aequilibrio bilancis vtrinque sibi similis, non solum in vacuo, sed etiam in mundo rei veritatem euincit. Alia autem eaque

genuina datur huius aequilibræ ratio, quæ etiam in mundo locum habet. Cum igitur in vacuo spatio verum sit corpus quiescens in quiete permanere debere; erit in ipsa corporis natura etiam huius rei ratio posita, propter quam in mundo quoque corpus, quod semel quiescit, nisi ab alia causa vrgeatur, in quiete persistere cogatur. Q. E. D.

Corollarium I.

57. Est igitur lex in ipsa rerum natura fundata, quod omne corpus quiescens, nisi ab alia causa externa ad motum sollicitetur, in quiete debeat perseverare.

Corollarium 2.

58. Quemadmodum fundamentum huius demonstrationis ex ipsa quietis absolutæ natura est petitum, perperam ista lex ad quietem relativam extenditur.

Scholion.

59. Experientia autem ipsa edocemur hanc legem in quiete relativâ non valere. Videmus enim corpora in navî relativæ quiescentia, si navis subito concutiatur, in quiete non permanere, sed simul concuti et de loco suo moveri; etiam si ante quiescissent, nullaque accessisset causa ea commoveus.

Corollarium 3.

60. Simili modo, quo euicimus corpus semel quiescens perpetuo quiescere debere, nisi a causa externa afficiatur, potest ostendi, corpus, quod
nunc

nunc quiescit absolute, ante hac semper quoque quieuisse, siquidem sibi ipsi fuerit relictum. Vti enim nulla est ratio, quare potius ex hac, quam illa plaga, in eum, quo nunc stat, locum peruenerit, ita concludendum est etiam in eo loco antea semper constituisse.

Corollarium 4.

61. Corpus igitur, quod semel quiescit, si vlla causa externa in id neque agat, neque egerit, id non solum in posterum quiescet semper, sed etiam ante perpetuo quieuisse statuendum est.

Corollarium 5.

62. Sequitur ex hoc corpus semel absolute motum in quietem peruenire nunquam posse sibi relictum. Nam si tandem quiesceret, idem oporteret antea quoque semper quieuisse, quod est contra hypothesin.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

63. *Corpus absolutum habens motum, aequabiliter perpetuo mouebitur, et eadem celeritate iam antea quouis tempore fuit motum; nisi causa externa in id agat aut egerit.*

Demonstratio.

Si enim corpus motum celeritatem non conseruaret semper eandem, tum vel augeri deberet vel diminui eius celeritas. Hoc autem casu ad quietem inclinaret quod, quia nunquam quietem conse-

sequi potest (62.) accidere nequit. Illo casu vero ex quiete prouenisse censendum esset, quod aequè foret absurdum. Praeterea si hoc corpus in spatio infinito et vacuo positum concipiatur, eiusque via, qua est ingressum et ingredietur, consideretur; nulla est ratio, quare potius in hoc maiorem minoremue habeat celeritatem, quam in illo loco, quocirca perpetuo eadem moueri debet celeritate. Q. E. D.

Corollarium.

64. Quoties igitur corpus motum vel celerius vel tardius ingredi videmus, causae externae hanc mutationem adscribere debemus.

PROPOSITIO 9.

Theorema.

65. *Corpus absoluto motu praeditum progredietur in linea recta, seu spatium, quod describit, erit linea recta.*

Demonstratio.

Nulla est enim ratio, si corpus hoc in spatio infinito et vacuo positum concipiatur, quare in hanc potius quam aliam regionem a linea recta declinaret. Ex quo concludendum est, hoc ab ipsa corporis natura pendere, vt motum in linea recta progrediatur. Quamobrem in mundo etiam, vbi quidem hoc sufficientis rationis principium cessat, nihilominus statuendum est, omne corpus motum in directum progredi debere, nisi scilicet impediatur. Q. E. D.

Co-

Corollarium 1.

66. Ex his duabus propositionibus conficitur ista lex vniuersalis: omne corpus motu praeditum aequabiliter in linea recta progredi.

Corollarium 2.

67. Corpus ergo quod a causis externis co- Tab. 1.
 actum fuit in linea curua AM progredi, si cum in M Fig. 7.
 peruenerit, causae hae externae subito cessent, tum ea celeritate, quam habebat in M aequabiliter secundum directionem, quam ipso tempore liberationis habuit, in recta progredietur. Est vero tangens MT nil aliud, nisi curuae elementum in M in directum productum, quamobrem, corpus in M sibi relictum in tangente MT aequabiliter ea celeritate, quam in M habuit, progredietur.

Scholion 1.

68. Has de absoluta quiete et motu leges auctores in vna sunt complexi. Hancque *Neutonus* in Principiis Phil. ita proponit, vt dicat: Omne corpus perseuerare in statu suo quiescendi vel mouendi vniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Corollarium 3.

69. Pertinent autem hae leges de motus continuatione ad motus tantum absolutos, neque eae in motibus relatiuis vim suam retinent. Quemadmodum enim fieri potest, vt corpus relatiue quiescens non perseueret in quiete, etiamsi a nullis cau-

sis externis agitetur (59.), ita etiam corpora motum habentia relatiuum non semper aequabiliter in directum relatiue mouebuntur.

Corollarium 4.

70. Quando igitur corpus a nullis causis externis est sollicitatum, id, quomodocunque inaequaliter relatiue moueatur, tamen vel absolute quiescere vel vniformiter in directum moueri censendum est. Ex hocque quodammodo potest intelligi, quantum status relatiuus ab absoluto differat.

Scholion 2.

71. In Astronomiae principiis mechanicis, prout a *Newtono* sunt tradita, statuuntur sol et stellae fixae a causis externis vel omnino non affici, vel tam parum, vt effectus sit insensibilis. Quanquam igitur solem neque aequabiliter neque in directum progredi videmus respectu terrae, tamen eum absolute vel quiescere vel vniformiter in directum moueri certum erit. Difformitates ergo illae in motu solis obseruatae in ipsa terra positae sint necesse est.

DEFINITIO 8.

72. Motus directio siue determinatio est linea recta in qua corpus motum vniformiter progredi conatur, et re ipsa progreditur, nisi a causis externis impediatur.

Corollarium.

73. Corpus igitur habens motum absolutum, nisi ab aliis causis afficiatur, perpetuo eandem motus directionem eandemque celeritatem conseruabit.

DE-

DEFINITIO 9.

74. Vis inertiae est illa in omnibus corporibus insita facultas vel in quiete permanendi, vel motum vniformiter in directum continuandi.

Corollarium I.

75. Quanquam enim permanſionem in quiete, motusque vniformem continuationem in directum ex principio ſufficientis rationis demonſtrauimus, tamen iam notauiſus hanc non eſſe cauſam phaenomeni efficientem, ſed eam in ipſa corporis natura eſſe ſitam. Haec igitur ex corporum natura pendens cauſa ſtatus ſui conſeruatiſonis eſt id, quod vis inertiae appellatur.

Scholion.

76. *Keplerus*, qui primus hanc vocem formauiſit, tribuit eam ei vi, quam omnia habent corpora, reſiſtendi omni illi, quod ea de ſtatu ſuo deſturbare conatur; atque haec vox inertiae melius cum hac reſiſtentiſae ideae congruit, quam illa perfeuerantiſae, cum qua nos coniunxiſimus. Sed facile intelligitur has definitiones re a ſe inuicem non diſferre, eadem enim eſt vis motum vel quietem continuans, et quae impedimentiſis reſiſtit. Malui vero hac vti definitione, quam Kepleriana, quia nondum conſtat, quomodo corpora viribus ſollicitantiſis reſiſtant. Praeterea vero haec ipſa reſiſtendi vis originem habet ſuam ab hac quietem motumue continuandi facultate; ideoque ex hac debet explicari.

PROPOSITIO IO.

Theorema.

77. *Quando spatium, ex quo motus relatiuus determinatur, absolute vel quiescit vel mouetur vniformiter in directum; tum leges datae de motu et quiete etiam in statu corporum relatiuo valebunt.*

Demonstratio.

Si spatium ex quo motus relatiuus diiudicatur absolute quiescit, propositum per se est clarum; Nam hoc casu quies et motus relatiui cum absolutis congruunt, adeoque omne corpus etiam relatiue vel perpetuo quiescet vel vniformiter mouebitur in directum (10.). Sin vero illud spatium ipsum moueatur vniformiter in directum, tum ea corpora, quae relatiue quiescunt, eundem habebunt motum absolutum, quem habet ipsum spatium. Quare ea quoque vniformiter indirectum progrediuntur, huncque motum ex sua natura poterunt continuare: vt igitur et hoc casu lex (66.) obseruetur. Corpus vero quod relatiue mouetur vniformiter in directum, id etiam, si ipsum spatium vniformem habet motum rectilineum, aequabiliter in recta progredietur absolute, quemadmodum tum ex sequente apparebit propositione, tum per se perspicuum est. Motus ergo hic relatiuus quoque legi est consentaneus et propterea sine vi externa continuari poterit.

Q. E. D.

Corollarium 1.

78. Corpus igitur a nulla causa externa affectum, quod relatiue vel quiescit vel vniformiter mouetur in directum, indicio erit ipsum spatium ad quod eius motus iudicatur, absolute vel quiescere, vel in directum aequabiliter moueri.

Corollarium 2.

79. Talis quoque motus relatiuus in suo statu per se ipsum perpetuo conseruabitur. Non solum enim ipsum, quod mouetur, corpus absolute mouetur vniformiter in directum; sed etiam spatium illud, quo relatio aestimatur, iuxta eandem legem progreditur. Quamobrem vterque motus per se continuabitur, atque motus relatiuus iste in hoc statu nulla accedente causa externa perseuerabit.

Corollarium 3.

80. Quia omnis idea, quam de motu habemus est relatiua (7.), hae quoque leges non sufficiunt ad cognoscendum, qualis sit cuiuspiam corporis motus absolutus. Quando enim corpus a nulla causa externa affectum aequabiliter in recta progredi videmus, plus inde concludere non possumus, quam hoc corpus etiam absolute vel vniformiter in directum moueri vel quiescere. Quantum vero sit eius motus absolutus definire non licet, neque quam habeat directionem.

Corollarium 4.

81. Quae igitur ex hac corporum natura, quod in statu suo vel quietis vel motus vniformis in

rectum permaneant, deducuntur, non solum ad motum et quietem absolutam pertinebunt, sed etiam ad eum statum relatiuum, quo spatium corpusue, ex quo motus aestimatur, vniformiter in directum progreditur.

Scholion.

§ 2. Atque etiam non admodum erimus solliciti de motu absoluto, cum iste relatiuus iisdem contineatur legibus. Et propterea motum hunc relatiuum ipsum saepius mutabimus in alios huiusmodi: ita tamen vt traditae leges obseruentur; si scilicet eum, relatione ad aliud corpus vniformiter in directum quoque progrediens facta, contemplabimur. Qua ratione non cessabit aequabiliter in recta progredi, idque innumerabilibus modis fieri potest, ex quibus, qui commodissimus erit, seligi poterit.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tab. I. § 3. *Moueatur corpus absolute aequabiliter in recta AL, aliudque corpus aequabiliter quoque in recta AM. Quaeritur corporis in AL absoluto motu lati motus relatiuus respectu corporis alterius in AM progredientis.*

Solutio.

Sit celeritas corporis in AL progredientis, a ; et celeritas alterius in AM moti, b : simulque egrediantur haec corpora ex puncto A. Perspicuum est si sumantur duo spatia AL, AM in ratione celeri-

tatum a et b , ambo corpora eodem momento in L et M peruenire. Ducta igitur recta ML cum recta AM angulum faciente AML , cuius sinus est ad finem anguli ALM , quem cum AL efficiet, vt AL ad AM i. e. vt a ad b , designabit L locum, in quo reperietur corpus in AL progrediens eodem momento, quo alterum in M existit. Quia vero corporis illius motus relatiuus respectu huius desideratur, hoc, quod in AM reuera mouetur, vt quiescens in A debet considerari. Puncto igitur M cogitatione in A translato, perueniet L in N ducta AN parallela et aequali ipsi ML ex A . Simili modo quando corpus in AM motum peruenit in locum proximum m , alterum in l reperietur, eritque ml parallela ipsi ML , quia $Mm:Ll=b:a=AM:AL$. Puncto vero m simili modo in A translato sumendo $An=ml$ perueniet l in n , eritque n in eadem recta AN . Ex quo sequitur corpus absolute in AL motum relatiue in recta AN moueri. Celeritas autem relatiua erit ad absolutam vt Nn ad Ll , seu vt ML ad AL . Quae ratio cum fit constans ob triangulum ALM specie datum corpus absolute in AL aequabiliter motum, relatiue quoque aequabiliter in recta AN progredietur. Positio vero rectae AN inuenietur sumendo angulum LAN tanto, vt eius sinus sit ad finem anguli NAM , vt b ad a . Celeritas denique absoluta per AL erit ad celeritatem relatiuam per AN , vt sinus anguli MAN ad sinus anguli LAM . Q. E. I.

Corollarium 1.

84. Corpus igitur absolute aequabiliter in directum progrediens, quoque relative aequabiliter in directum promouebitur, si modo corpus, ex quo relatio iudicatur, quoque aequabiliter in directum progrediatur. Atque hoc est quod in praecedente demonstratione (77.) assumimus.

Corollarium 2.

85. Constructio ceterum lineae AN et celeritatis relatiuae inuentio facillime hoc modo institui potest. Sumtis, vt iam fecimus, AL et AM in ratione *a* ad *b* ductaque ML, ducatur huic ML parallela AN ex A, erit haec via motu relatiuo descripta. Celeritas vero relatiua erit ad absolutam, vt ML ad AL.

Corollarium 3.

86. Idem ratiocinium valet, si AL non motu absoluto, sed relatiuo percurratur, et AM eadem relatione. Tum vero prodibit corporis per AL moti alius motus relatiuus respectu corporis AM lati.

Corollarium 4.

87. Patet igitur, quomodo motus absolutus in infinitos relatiuos possit transmutari, qui semper erunt aequabiles et in directum fient, si modo motus absolutus fuerit huiusmodi, et motus eorum corporum, ex quibus relatiui oriuntur.

Scholion.

88. Assumimus in solutione ambo corpora Tab. 1.
 ex eodem loco A egredi: sed solutio non minus Fig. 9.
 succedit, si ambo corpora in principio in diuersis
 punctis A et B fuerint posita. Nam progrediatur
 corpus A motu absoluto aequabiliter in recta AL,
 alterum vero B similiter in recta BM, ita vt celerita-
 tes sint vt *a* ad *b*. Sumantur AL et BM in eadem
 ratione *a* ad *b*, peruenient ambo corpora simul in
 L et M. At quia corporis A motus relatiuus respectu
 corporis B requiritur, corpus B vt quiescens in B de-
 bet considerari. Transferatur ergo cogitatione cor-
 pus B ex M in B, perueniet corpus A ex L in N, du-
 cendo BN parallelam et aequalem ipsi ML: dico
 punctum N fore in recta per A transeunte, ita vt
 corpus A relatiue moueatur in recta AN, idque
 aequabiliter. Ducta enim NL aequalis erit et paral-
 lela ipsi BM. His factis specie datur triangulum
 ANL: quare NL ad AL habebit rationem datam,
 ergo ob $NL=BM$, erit ratio AL ad BM data, quae
 ergo si semel sumpta fuerit in ratione *a* ad *b*, semper
 erit eadem. Ex quo apparet punctum N esse in re-
 cta AN et celeritatem relatiuam per AN esse ad ab-
 solutam per AL, vt AN ad AL i. e. in ratione data.
 Motus igitur relatiuus per AN fiet in recta, erit-
 que aequabilis.

Corollarium 5.

89. Si igitur detur corporis A motus absolu-
 tus per rectam AL, eiusque relatiuus aequabilis per
 E AN

AN quacunque celeritate, poterit inueniri motus corporis B, cuius respectu motus relatiuus corporis A oritur. Sumtis enim duobus spatiis AL et AN eodem tempore percursis, ducatur per punctum quoduis arbitrarium B recta BM parallela ipsi NL, determinabit haec viam a corpore B percursam, eiusque celeritas erit ad celeritatem corporis A absolutam per AL vt est NL ad AL. Erit vero corpus B in B eodem tempore, quo est A in A.

Corollarium 6.

90. Dantur ergo innumerabiles motus corporis B, quia punctum B pro lubitu potest assumi, ex quibus motus relatiuus corporis A idem prouenit. At corporis B celeritas semper erit eadem, eiusque directio secundum parallelam ipsi NL.

Corollarium 7.

91. Intelligitur etiam motum absolutum aequabilem in directum tendentem transmutari posse in relatiuum quemcunque itidem aequabilem et in recta factum. Potest enim recta AN pro arbitrio duci, et celeritas per eam poni quaecunque. Semper enim datur motus aequabilis quoque et recta progrediens corporis B, ex quo hic motus relatiuus existit.

Corollarium 8.

92. Motus deinde iste relatiuus per se sine vlla vi externa poterit continuari. Motus enim absoluti per AL et per BM, quia fiunt aequabiliter
in

in lineis rectis, per se continuantur. Quamdiu vero isti motus durant, tamdiu etiam relatiuus per AN continuare debet.

PROPOSITIO 12.

Problema.

93. *Moueat corpus A absolute quomodocunque in linea AL, et corpus B in linea BM. Requiritur motus relatiuus corporis A respectu corporis B.*

Tab. I.
Fig. 10.

Solutio.

Abscindantur in curuis AL et BM arcus, qui aequalibus temporibus percurreuntur, AL et BM. Reperietur ergo corpus A in L, quando B in M pertingit. Sed quia corporis A motus relatiuus respectu B desideratur, corpus B vt quiescens in B debet considerari. Quare transferatur id cogitatione ex M per rectam MB in B, peruenietque corpus L in N, ducta LN parallela et aequali ipsi MB. Curua igitur in qua est punctum N hoc modo inuentum, erit via a corpore A motu relatiuo descripta. Atque hoc motu relatiuo arcus AN eodem tempore percurretur, quo arcus AL et BM absoluuntur. Ex quo celeritas relatiua in N quoque innotescit.
Q. E. I.

Corollarium I.

94. Determinari igitur hoc modo poterit motus relatiuus corporis quocunque motu lati respectu corporis quomodocunque etiam moti.

E. 2

Co-

Corollarium 2.

95. Intelligitur etiam ex solutione, quomodo datis curuis AN et AL vna cum motibus per eas inueniri possit curua BM et motus per eam. Nec non definietur curua AL ex curuis BM et AN.

Corollarium 3.

96. Perspicuum quoque est curuam BM ob punctum B arbitrarium infinitis modis posse aliter esse positam. Quia tamen arcus BM, qui eodem tempore, quo AL et AN, describitur, subtensa BM semper est aequalis et parallela lineae LN, ea semper erit sibi similis et aequalis et parallela, atque motus per eam perpetuo idem.

Scholion.

97. Et haec sunt, quae de comparatione motuum absolutorum et relatiuorum afferenda iudicauimus. Motus autem relatiuus alias hoc modo solet describi, vt motus per AN dicatur motus corporis A, quod reuera in linea AL mouetur, qualis ex corpore B in BM moto spectatur. Spectator vero in corpore B relatiue quiescens ponitur, et ipsum B vt quiescens considerans. Ita motus stellarum relatiuus respectu telluris, congruit cum eo motu, quem nos in terra degentes eamque tanquam quiescentem considerantes intuemur. Terra enim ex B in M promota et stella ex A in L, videmus eam ex M secundum plagam ML et in distantia ML. Quia vero nos de loco B motos esse non apprehendimus, sed etiam nunc in B consistere putamus, videbimus stel-

lam

Iam ex B non in L, sed in N, eadem scilicet plaga eademque distantia. Propterea recta BN aequalis erit et parallela rectae ML, ut nostro considerandi modo inuenimus.

SCHOLION GENERALE.

98. Ista motus leges, quas corpus sibi relictum vel quietem vel motum continuando obseruat, spectant proprie ad corpora infinite parua, quae ut puncta possunt considerari. In corporibus enim finitae magnitudinis quorum singulae partes alios habent motus insitos, quaelibet pars quidem has leges obseruare conabitur, quod autem non semper propter corporis statum fieri potest. Corpus igitur ipsum eum sequetur motum, qui ex singularum partium conatibus componitur, isque adhuc ob insufficientiam principiorum non potest definiri, sed haec tractatio ad sequentia est differenda. Diuersitas igitur corporum suppedabit nobis operis diuisionem primariam. Primo enim contemplabimur corpora infinite parua seu quae tanquam puncta spectari possunt. Deinde corpora finitae magnitudinis aggrediemur ea, quae sunt rigida neque figuram suam mutari patiuntur. Tertio agemus de corporibus flexibilibus. Quarto de iis quae extensionem et contractionem admittunt. Quinto plurium corporum solutorum motus examini subiiciemus, quorum alia impediunt, quin motus suos possint, ut conantur, absoluere. Sexto vero de motu fluidorum erit agendum. De his vero corporibus non solum videbimus, quomodo sibi

relicta motus continent; sed praeterea inquiremus, quomodo ea a causis externis scilicet potentiis afficiantur. Denique in his omnibus disquisitionibus magnam inferet varietatem status corporum vel liber vel non liber. Per statum non liberum hic intelligo, quando corpora impediuntur, quo minus in ea directione progrediantur, qua conantur; cuiusmodi est motus corporum pendulorum, quae, quia non possunt directe, vti conantur, descendere, oscillationes efficiunt. Ex quo intelligitur statum liberum esse, quando corpora nullum inveniunt impedimentum in quamvis plagam progrediendi, in quam tum ex propria vi tum a potentiis sollicitata tendunt. Apparet igitur, quibus de rebus in *Mechanica* sit agendum, et quam sint multa, quae etiam nunc nequidem sunt libata. Nam praeter motum punctorum, quae adhuc sunt tractata, tam pauca sunt, vt fere omnia demum inuenire et ex principiis deriuare necesse sit. Incipio igitur a motu punctorum liberorum a potentiis quibuscunque sollicitatorum, quia, quos sibi ipsa relicta sequantur motus, hoc capite iam est ostensum. Hanc ob rem primum istum motum punctorum libero destinavi, in sequente vero punctorum motum non liberum pertractare constitui; in quorum utroque, quae occurrent, cum ex his iam traditis, tum ex sequentibus principiis methodo analytica sum deriuaturus.

CAPUT SECUNDUM
DE
EFFECTU POTENTIARUM IN PUNCTUM LI-
BERUM AGENTIUM.

DEFINITIO IO.

99.

Potentia est vis corpus vel ex quiete in motum perducens, vel motum eius alterans. *Huiusmodi vis, ideoque et potentia est gravitas, per eam enim corpora, remotis impedimentis, ex quiete deorsum delabuntur, motusque ipse descensus ab ea continuo acceleratur.*

Corollarium I.

100. Omne corpus sibi relictum vel in quiete perseverat, vel motu aequabili in directum progreditur. Quoties igitur euenit, vt corpus liberum, quod quiescebat, moueri incipiat, aut motum vel non aequabiliter vel non in directum progrediatur, causa est potentiae cuidam adscribenda: quicquid enim corpus de statu suo deturbare valet, potentiam appellamus.

Scholion I.

101. Doctrina de potentiis, quatenus plures corpori applicatae in aequilibrio consistunt, corpusque in quiete conseruant, iam in statica est exposita. Ibiue potentia ita quoque est definita, vt denotet omne id, quod corpora mouere valet. Motus

tus vero ipse in statica non consideratur, sed ii tantum casus inuestigantur, quibus plures potentiae sese destruunt, corpusque, in quod agunt, in quiete permanet. Nunc autem in Mechanica explicandum est, quomodo potentiae in corpus agentes, quae inter se non sunt contrariae, re ipsa motum producant in corpore quiescente, in moto vero motum immutent.

Scholion 2.

102. Vtrum huiusmodi potentiae ex ipsis corporibus originem suam habeant, an vero per se tales dentur in mundo, hic non definitio. Sufficit enim hoc loco potentias in mundo reuera existere, id quod vel sola vis grauitatis, qua omnia corpora terrestria deorsum delabi conantur, docet. Praeterea vero huiusmodi vires corpora sollicitantes conspicuuntur in motibus planetarum, qui nisi a quadam potentia essent affecti, vniformiter in lineis rectis progredi deberent. Similes etiam potentiae deprehenduntur in corporibus magneticis et electricis inesse, quae certa tantum corpora attrahunt. Quas omnes a motu materiae cuiusdam subtilis oriri alii putant, alii ipsis corporibus vim attrahendi et repellendi tribuunt. Quicquid autem sit, videmus certe ex corporibus elasticis et vorticibus huiusmodi potentias originem ducere posse, suoque loco inquiremus, num ex inde phaenomena haec potentiarum explicari possint. Interim vero potentiarum quarumuis in corpora effectus determinare

conabimur, quo deinceps, cum ad eorum plenior-
rem cognitionem peruentum fuerit, statim, quae
eruta sunt, ad eas accommodari queant.

DEFINITIO II.

103. Directio potentiae est linea recta, se-
cundum quam ea corpus mouere conatur. *Ita gra-
uitatis directio est linea recta verticalis, corpora enim
grauia secundum eam delabi conatur.*

Scholion I.

104. In statica, vbi omnia in quiete perma-
nere ponuntur, omnes potentiae suas directiones
perpetuo easdem seruare statuuntur. At in mecha-
nica, cum corpus perpetuo in alium perueniat lo-
cum, potentiae in id agentis directio continuo mu-
tabitur: Pro diuersis enim corporis locis vel poten-
tiae directiones erunt inter se parallelae, vel ad fi-
xum punctum conuergentes, vel aliam tenebunt le-
gem, ex quo tam multiplex potentiarum in mecha-
nica tractatio oritur.

Scholion 2.

105. Potentiarum diuersarum comparatio et
mensura ex statica quoque est repetenda. In qua
traditum est potentiam aliquam *a* se habere ad aliam
b vt *m* ad *n*, quando potentia *a* puncto *A*, *n* vicibus Tab. I.
secundum directionem *AB* applicata, et potentia *b*, *m* Fig. 11.
vicibus secundum directionem contrariam *AC*, pun-
ctum *A* perseuerat in aequilibrio. Tum enim po-
tentia *a*, *n* vicibus sumpta aequiualeat potentiae *b*, *m* vi-
cibus sumptae, eritque $na = mb$ seu $a : b = m : n$.

Scholion 3.

106. In hoc vero differt mensura potentiarum mechanica a statica, quod in hac omnes magnitudinem eandem retinere ponuntur, in mechanica vero, ut perueniente corpore in alium locum earum directiones mutabiles ponuntur; ita earum quantitas secundum certam legem variabilis esse potest.

PROPOSITIO 13.

Theorema.

107. *Quando punctum a pluribus potentiis est sollicitatum, eundem ab iis adipiscetur motum, ac si ab unica iis omnibus aequivalente fuisset sollicitatum.*

Demonstratio.

Tab. 1. Sit punctum A sollicitatum a potentiis AB, AC, AD, AE, quibus aequiualet potentia AM. Sumatur huic aequalis et contrarie posita AN, haec, ut ex statica notum est destruet actionem potentiarum AB, AC, AD, AE. Primo igitur momento potentia AN tantum imprimeret puncto A motum secundum, AN quantum potentiae AB, AC, AD, AE simul agentes ei imprimerent secundum earum mediam directionem, quae est AM. Potentia vero AM sola, quia aequalis est potentiae AN, tantum quoque promouebit punctum A versus AM, quantum AN versus AN. Quare potentia AM tantum etiam puncto A imprimet motum secundum AM, quantum potentiae AB, AC, AD, AE simul agentes

tes secundum eandem directionem AM. In utroque igitur casu effectus erit idem. Q. E. D.

Corollarium I.

108. Si igitur punctum a pluribus potentiis sollicitetur, poterit id tanquam ab vnica sollicitatum considerari, quæ iis omnibus est æquiualens.

Corollarium 2.

109. Atque vicissim loco vnus potentia in punctum agentis, possunt plures in id agentes considerari, quibus illa æquiualeat: id quod, vt ex statica manifestum est, infinitis modis fieri potest.

Scholion.

110. Quia vero, quam primum corpus de loco suo est motum, potentia in id agentes directiones suas et magnitudines mutant vel mutare ponuntur; potentia quoque æquiualens quouis momento erit alia. Hanc ob rem quouis momento potentiarum punctum sollicitantium æquiualens debet inuestigari; neque id diutius ab eadem potentia affici ponendum est quam per temporis elementum infinite paruum.

DEFINITIO 12.

111. Potentia absoluta est potentia, quæ in corpus siue motum siue quiescens æqualiter agit. *Huiusmodi potentia absoluta est vis gravitatis, quæ corpora siue moueantur siue quiescant æqualiter deorsum trahit.*

Corollarium.

112. Si igitur cognitus fuerit potentiae absolutae effectus in corpus quiescens, innotescet quoque eius effectus in corpus utcumque motum.

DEFINITIO 13.

113. Potentia relatiua est, quae aliter agit in corpus quiescens, aliter in motum. *Huiusmodi potentia est vis fluii corpus secum abripiensis, quo enim celerius corpus mouetur, eo vis fluii in id fit minor: eaque prorsus euanescit, quando corpus iam eandem, quam habet fluius, celeritatem est adeptum.*

Corollarium I.

114. Si igitur data sit corporis celeritas una cum lege potentiae relatiuae, inueniri poterit vis, quantum potentia in corpus agit. Haecque deinde ut potentia absoluta poterit considerari, quamdiu corpus eandem habet celeritatem, eiusque effectus ex potentiarum absolutarum actione determinari. Vim enim potentiae relatiuae in corpus data celeritate motum determinare, nil aliud est, nisi potentiam absolutam hoc casu aequivalentem assignare.

Corollarium 2.

115. Hoc igitur differunt a se inuicem potentiae absolutae et relatiuae, quod potentiae absolutae quantitas et directio a solo corporis, in quod agit, loco pendeat; relatiuae vero quantitas et directio insuper a corporis, in quod agit, celeritate.

Scholion I.

116. Respiciunt potissimum potentiae relatiuae ad motum corporum in fluidis, horum enim actio in corpora a celeritate eorum pendet relatiua; quae, quo est maior, eo quoque maiorem vim corpus a fluido patitur. Praeter alios autem casus motuum in fluidis, qui maiorem cognitionem fluidorum requirunt, duo sunt tractatu faciliores; alter quando fluidum quiescit, alter quando mouetur vniformiter in directum. Poterit vero iste ad illum substituendo motum relatiuum loco absoluti semper reduci; fluidum scilicet vt quiescens considerandum est, in quo statu quoque vi propria permanebit. Quae igitur in sequentibus de potentiis relatiuis proferentur, ea ad motum corporum in fluidis quiescentibus potissimum pertinebunt. Actio vero fluidorum in corpora mota consistit tota in motu eorum diminuendo, et propterea resistentia appellatur, quae, quo celerius corpora mouentur, maior est quoque, et euanescit omnino, quando corpora quiescunt. Hanc ob rem in posterum loco potentiarum relatiuarum media resistentia substituemus; motus vero, qui a solis potentiis absolutis afficiuntur, in vacuo fieri ponemus.

Scholion 2.

117. Motus quidem in mediis resistentibus, si maxime ordinem sequi vellemus, ad vltimam partem, quae fluidis est destinata, esset referenda, cum etiam nunc non constet, qua lege fluida cor-

poribus in iis motis resistant. Verum quia haec materia a plerisque ita tractari est solita, vt prorsus a fluidorum natura sit reuocata, et vt hypothesis pure mathematica considerata: hanc methodum retinere malui, quam plurima elegantia problemata praeterire, quae in tractatione de fluidis etiam locum non inueniunt. Attamen hanc medii resistentiam non nisi punctorum motui accommodabo, pro corporibus enim finitae magnitudinis calculus fieret insuperabilis. Quando autem corpora instar punctorum considerari possunt, hoc inde nascitur commodum, quod directio vis resistentis congruat cum motus directione, si quidem ea a fluido quiescente oriatur. Hanc ob rem in hac de motu punctorum tractatione potentiis relatiuis eandem semper directionem tribuemus, quam habet ipsum punctum, eamque semper vt motum diminuentem considerabimus.

PROPOSITIO 14.

Problema.

118. *Dato effectu potentiae absolutae in punctum quiescens, inuenire effectum eiusdem potentiae in punctum idem quomodocunque motum.*

Solutio.

Tab. II.

Fig. 1.

Sit punctum in A positum, vnde moueatur celeritate c secundum directionem AB, potentiae vero in id agentis directio sit AC. Assumatur temporis aliquod elementum dt , hocque tempusculo protrahatur punctum A, si quiesceret in A, per spatium

olum AC, quod vocetur dz , ita vt post tempus dt non amplius sit in A, sed in C. Hic motus igitur per AC erit effectus potentiae in punctum quiescens. Effectus vero eiusdem potentiae, quia ponitur absoluta in idem punctum motum aequalis esse debet effectui in quiescens (111.). Abscindatur nunc in puncti A directione, quam habet secundum AB, spatium AB, quod celeritate sua c tempusculo dt percurreret, si a nulla potentia sollicitaretur, erit $AB = cdt$ (30.). Agente vero potentia post temporis elementum dt punctum non reperietur in B, sed alibi in D, ita vt effectus, qui mensurandus est deuiatione a puncto B, quae est spatium BD, aequalis sit effectui eiusdem potentiae in punctum quiescens (111.) i. e. AC. Erit ergo $BD = AC$. Praeterea vero erit BD ipsi AC parallela, quia BD est effectus potentiae, ideoque in eius directionem incidere debet, quae durante tempusculo infinite paruo dt non mutatur. Quamobrem punctum A celeritatem c habens secundum directionem AB, et sollicitatum a potentia absoluta, elapso tempusculo dt , non in B, sed D reperietur, ducta BD aequali et parallela ipsi AC. Spatia vero infinite paruo tempusculo percurra, vt lineolae rectae possunt considerari; propterea punctum tempusculo dt spatium AD percurrisse censendum est. Q. E. I.

Corollarium I.

119. Quia etiam motus per spatiola infinite parua pro aequabilibus haberi possunt, (33.) erit celeritas, qua elementum AD percurritur $= \frac{AD}{dt}$ (30.)

Co-

Corollarium 2.

120. Ponatur celeritas per $AD = c + dc$, quia praecedens erat c (35.), erit $c + dc = \frac{AD}{dt}$, at ante erat $AB = cdt$, ex quo fit $c = \frac{AB}{dt}$. Prodit ergo $dc = \frac{AD - AB}{dt}$. Abscindatur igitur in AD portio $Ab = AB$, erit $dc = \frac{Db}{dt}$.

Scholion I.

121. Notandum autem est AC vel BD infinities esse minorem, quam AB , nam AB est spatium celeritate finita tempore dt percursum, at AC spatium celeritate infinite parua eodem tempore absolutum, corpori enim quiescenti nulla potentia finitam celeritatem tempusculo infinite paruo potest inferre.

Corollarium 3.

122. Hanc ob rem angulus BAD erit infinite paruus, et iunctis punctis B et b , lineola Bb erit in AD perpendicularis. Vocetur sinus anguli BAC , quippe qui datur k , posito sinu toto 1 , erit sinus ang. BDb etiam k , quia illi est aequalis, sinus vero ang. DBb erit $\sqrt{1 - kk}$. Ex his, quoniam est $BD = AC = dz$, erit $Db = dz\sqrt{1 - kk}$ et $Bb = kdz$.

Corollarium 4.

123. Incrementum igitur celeritatis dc , quod ante inueneramus $= \frac{Db}{dt}$, erit $\frac{dz\sqrt{1 - kk}}{dt}$. Intelligitur vero dz esse infinities minus quam dt , est enim dz infinite paruum respectu AB i. e. cdt , ideoque etiam respectu ipsius dt , quia c ponitur finitae magnitudinis.

Co-

Corollarium 5.

124. Inuento celeritatis incremento dc a potentia illato, considerandus quoque est angulus BAD declinationem puncti ab insita directione AB representans, quae itidem a potentia producitur. Est vero eius sinus $= \frac{Bb}{AB} = \frac{k dz}{cdt}$.

Corollarium 6.

125. Duplex igitur est effectus potentiae punctum motum sollicitantis. Alter in celeritate immutanda consistit, alter in eius directione. Ille dat incrementum celeritatis $dc = \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$, hic vero anguli declinationis sinum $= \frac{k dz}{cdt}$.

Corollarium 7.

126. Si angulus BAC fuerit rectus, ideoque $k=1$; erit $dc=0$. Hoc igitur casu celeritas a potentia manet immutata. Anguli vero declinationis BAD sinus fit $= \frac{dz}{cdt}$.

Corollarium 8.

127. Si angulus BAC fit obtusus seu recto maior erit eius cosinus $\sqrt{(1-kk)}$ negatiuus, et propterea celeritatis incrementum dc prodibit negatiuum $= \frac{-dz\sqrt{(1-kk)}}{dz}$. Id quod indicat, celeritatem a potentia diminui. Declinatio vero $\frac{k dz}{cdt}$ eadem manet, quae ante.

Corollarium 9.

128. Si potentiae directio AC cum motus puncti A directione AB congruit, fit $k=0$. Hoc

G

igi-

igitur casu motus directio a potentia non immutatur. Celeritatis vero incrementum dc fiet $=\frac{dz}{dt}$, si potentiae directio conspirat cum directione motus. Sin autem ei fuerit contraria, fit $dc = -\frac{dz}{dt}$.

Scholion 2.

129. Apparet itaque ex huius propositionis solutione, quomodo potentiae absolutae effectus in punctum quomodocunque motum inueniri debeat, si cognitus fuerit effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens. Hanc ob rem in sequentibus huius capitis propositionibus sufficiet punctum a potentiis sollicitatum quiescens ponere, vel motum in eadem, quam habet potentia, directione. Nam si punctum A habeat celeritatem c , eaque moueatur secundum directionem AB; interea vero sollicitetur a potentia eandem habente directionem AB, ita ut elapso tempusculo dt non in B, quo sola celeritate c latum perueniret, sed in b reperiatur, erit potentiae effectus spatium Ab . Atque per tantundem spatium ao punctum A, si in a quiesceret, fuisset eodem tempusculo dt pertractatum. Innotescit ergo ex motu puncti A a potentia sollicitati effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens; porroque hinc effectus potentiae in punctum utcumque motum.

Tab. II.
Fig. 2.

PROPOSITIO 15.

Problema.

130. Dato celeritatis incremento, quod quaedam potentia in puncto A tempusculo dt producit, inuenire

trahere incrementum celeritatis, quod eadem potentia in eodem puncto tempusculo dt producit.

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c eandemque directionem AB, quam habet potentia id sollicitans, sitque ao spatium, per quod haec potentia punctum A, si quiesceret, tempusculo dt traheret. Sit porro AB spatium, quod punctum A celeritate c tempusculo dt percurrit, percurreret idem insuper a potentia sollicitatum spatium Ab , sumto $Bb=ao$: hocque spatium quia est infinite paruum aequabili motu descripsisse aestimandum est. Sequenti igitur tempusculo dt hac celeritate percurreret spatium $bC=Ab$, nisi a potentia sollicitetur; at agente iterum potentia, quae immutata manere ponitur saltem per tempus infinite paruum, perueniet id ultra C in c , sumto $Cc=ao$. Simili modo tertio tempusculo dt , percurreret spatium $cd=cD+Dd$, vbi $cD=bc$ et $Dd=ao$. Et quarto tempusculo dt percurreret spatium $de=dE=Fe$, vbi rursus est $dE=cd$ et $Fe=ao$. Est vero $Ab=AB+ao$; $bc=AB+2ao$; $cd=AB+3ao$; $de=AB+4ao$. Erit ergo $\frac{ao}{dt}$ incrementum celeritatis tempusculo dt productum a potentia; $\frac{2ao}{dt}$ erit celeritatis incrementum tempusculo $2dt$ acquisitum; similiter $\frac{3ao}{dt}$ incrementum tempusculi $3dt$: et generaliter tempusculo ndt crescet celeritas puncti c elemento $\frac{n \cdot ao}{dt}$. Ponatur $ndt=d\tau$, erit $n=\frac{d\tau}{dt}$. Celeritatis igitur incrementum tempusculo

culo $d\tau$ acquisitum erit $\frac{ao \cdot d\tau}{dt^2}$. Quia vero pro tempusculo dt incrementum celeritatis est $\frac{ao}{dt}$, prodibit ista analogia; Celeritatis incrementum temp. dt est ad celeritatis incrementum temp. $d\tau$ acquisitum vt dt ad $d\tau$. Consequenter celeritatis incrementa sunt temporibus, quibus producuntur, proportionalia. Q. E. I.

Corollarium I.

131. Apparet haec incrementa celeritatis non pendere ab ipsa celeritate c , sed eundem habitura esse valorem, quantumvis magna aut parua ponatur c . Hocque natura potentiarum absolutarum melius intelligitur, quod aequaliter agant in corpora mota et quiescentia.

Corollarium 2.

132. Si ergo fuerit $c=0$, punctumque A quiescens a potentia ad motum sollicitetur, erunt ipso motus initio celeritates acquisitae, vt tempora: scilicet duplo tempore duplam, triplo triplam adipiscetur celeritatem.

Corollarium 3.

133. Si igitur ipso motus initio celeritas tempusculo t acquisita, dicatur c , et spatium percursum sit s ; erit $t=nc$. Sed est etiam $t=\int \frac{ds}{c}$ (37). Ergo prodit $nc=\int \frac{ds}{c}$, seu $ncdc=ds$ hincque $s=\frac{nc^2}{2}=\frac{t^2}{2n}$. Spatia igitur primo motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum, siue celeritatum, per ea spatia acquisita. Scho-

Scholion I.

134. Veritas huius propositionis, quod celeritatis incrementa temporibus, quibus generantur, sint proportionalia etiam in quantitatibus finitis constat, si modo potentia punctum sollicitans manet eadem, et eandem perpetuo retinet directionem, quam habet ipse puncti motus. In infinite parvis hac restrictione non est opus, potentia enim utcumque variabilis per tempusculum quam minimum nullius mutationis capax est consideranda. Quomodo autem se habeant diuersarum potentiarum effectus mox sumus exposituri, atque etiam in punctis, quae a potentiis sollicitantur diuersitatem ponemus, ut aliud in data ratione maius minusue esse possit. Neque vero haec inaequalitas aduersatur extremae punctorum paruitati, non enim puncta mathematica intelligimus, sed physica ex quorum compositione corpora oriuntur. Possunt enim duo plurae in vnum coalescere concipi, quod, quanquam simplicibus est maius, infinite tamen exiguae manet magnitudinis.

Scholion 2.

135. Theoremate hoc ex solutione problematis inuento primus est vsus Galilaeus ad motum grauium delabentium inuestigandum. Eius quidem demonstrationem non dedit, sed tamen propter insignem eius cum phaenomenis congruentiam de eo amplius dubitari noluit. Refutauit vero etiam alias hac de re opiniones, quo suam sententiam non

parum confirmavit. Alii enim statuebant celeritatis incrementa non temporibus, sed spatiis percursis esse proportionalia, huius vero absurditas a Galilaeo iam tunc plerisque Philosophis erat persuasa. Apparet autem, si potentiarum actiones hanc sequerentur legem nulla corpora ad motum perducere unquam posse. Foret enim $dc = nds$ et $c = ns$, tempus vero t , quod est $\int \frac{ds}{c}$ euaderet $= \frac{1}{n} \int \frac{dc}{c} = \frac{1}{n} \ln c = \frac{1}{n} \ln ns$ constans, quae constans esse debet $= -\frac{1}{n} \ln n$. Tempus scilicet logarithmo spatii descripti per o diuisi esset proportionale et propterea infinitum. Nullum igitur corpus ex quiete unquam ad motum posset perducere. Recte itaque Galilaeus aduersariis respondit, quod in instanti motus finitus hoc posito generari deberet, alioquin motum produci prorsus non posse. Etsi enim in initio infinite parua in puncto ponatur celeritas, ea tamen ab huiusmodi potentia imaginaria nunquam effici poterit finita. Ex data vero problematis solutione intelligitur legem inuentam necessariam esse, neque ullam aliam vi principii contradictionis existere posse.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

136. *Potentia q in punctum b eundem habet effectum, quem potentia p in punctum a; si fuerit $q : p = b : a$.*

Demonstratio.

Ponatur $q = np$, erit $b = na$. Concipiatur iam punctum na in n partes aequales diuisum, quarum quae-

quaelibet erit $=a$; harum partium vnaquaeque sollicitata sit a parte n sima ipsius potentiae np id est a potentia p . His positis quaeuis pars eodem modo trahetur a sua potentia, quo punctum ipsum a a potentia p . Neque vero hae puncti na partes a suis potentiis sollicitatae a se inuicem segregabunt; sed perpetuo vnitae manebunt, si quidem initio fuerint coniunctae. Pespiciuum autem est hos duos casus eodem redire, nec a se inuicem discrepare, siue punctum na a potentia np trahatur, siue quaeuis puncti na pars a a simili parte p potentiae np trahatur, dummodo partes non a se inuicem diuellantur. Quapropter constat propositum na aequae a potentia np vrgeri ac punctum a a potentia p . Q. E. D.

Corollarium I.

137. Punctum igitur na a potentia np eadem adipiscetur accelerationes, quas punctum a a potentia p .

Corollarium 2.

138. Ad eandem ergo maiori puncto celeritatem inducendam, quam minori, opus est maiori potentia, idque tanto maiori, quanto illud punctum maius est quam hoc.

Scholion I.

139. Propositio ista fundamentum completur ad vim inertiae metiendam, hac enim nititur omnis ratio, quare corporum materia seu massa in Mechanicis considerari debeat. Attendi enim oportet ad punctorum numerum, ex quibus corpus

mouendum est conflatum, eique massa corporis proportionalis est ponenda. Puncta vero ea inter se aequalia censerī debent, non quae aequae sunt parua, sed in quae eadem potentia aequales exerit effectus. Si igitur vniuersam materiam in huiusmodi aequalia puncta seu elementa concipiamus diuisam, quantitatem materiae cuiusque corporis ex numero pun-
 rum ex quibus est compositum, aestimari necesse est. Vim autem inertiae proportionalem esse huic punctorum numero seu quantitati materiae in sequenti propositione demonstrabimus.

Corollarium 3.

140. Aequalia ergo sunt, quod ad quantitatem materiae attinet, duo corpora, quae ex aequali punctorum numero sunt composita. Atque duo corpora sunt in ratione m ad n , si punctorum, ex quibus constant, numeri teneant rationem hanc m ad n .

Scholion 2.

141. Ostendetur vero in sequentibus hanc ipsam quantitatis materiae mensurandae rationem re ipsa adhiberi, et apud omnes esse receptam. Ex pondere enim cuiusque corporis materia solet inuestigari, ponderique materiae quantitas proportionalis censetur. Corpora autem omnia aequaliter in spatio vacuo descendere per experimenta constat, et propterea omnia a vi grauitatis aequaliter accelerantur. Quo circa necesse est, vt vis grauitatis in singula corpora agens eorum quantitati materiae sit
 pro-

proportionalis. Ponderus vero corporis indicat vim grauitatis, qua illud sollicitatur. Quare cum illa sit proportionalis materiae quantitati, ponderatione simul quantitas materiae innotescit, eo ipso sensu, quem hic materiae tribuimus.

PROPOSITIO 17.

Theorema.

142. *Vis inertiae cuiuscunque corporis proportionalis est quantitati materiae, ex qua constat.*

Demonstratio.

Vis inertiae est vis in quouis corpore insita in statu suo quietis vel motus aequabilis in directum permanendi (74.). Ea igitur aestimanda est ex vi, vel potentia, qua opus est ad corpus ex statu suo deturbandum. Diuersa vero corpora aequaliter in statu suo perturbantur a potentiis, quae sunt vt quantitates materiae in illis contentae. Eorum igitur vires inertiae proportionales sunt his potentiis. Consequenter etiam materiae quantitatibus sunt proportionales. Q. E. D.

Corollarium I.

143. Perspicitur simul ex demonstratione idem corpus siue quiescat siue moueatur eandem habere semper vim inertiae. Nam siue quiescat siue moueatur aequaliter ab eadem potentia afficitur scilicet absoluta.

Corollarium 2.

144. Neque vero vis inertiae homogenea est cum vlla potentia: fieri enim non potest, vt corpus quantumuis magnum a minima potentia non afficiatur, vt in sequentibus demonstrabitur.

Scholion.

145. Apparet hinc origo vocis vis inertiae, quam supra (76.) inuimus, ex eo, quod vis inertiae actioni potentiarum quodammodo resistit. *Newtonus* quoque in Princ. Phil. Nat. Definitione III, cum vi inertiae et hac vi resistendi eandem ideam coniungit, et vtramque quantitati materiae proportionalem statuit.

PROPOSITIO ¹⁸ ~~14~~.

Problema.

146. *Dato effectu vnus potentiae in punctum aliquod, inuenire effectum cuiusuis alius potentiae in idem punctum.*

Solutio.

Tab. II.
Fig. 3.

Quiescat punctum in A et consistat potentiae datae AB in id effectus in hoc, quod ab ea tempusculo *dt* per spatium *Ab* deducatur. Quaeritur iam per quantum spatium idem hoc punctum tempusculo *dt* ab alia potentia AC protrahatur. Ducantur lineae AB et AC, ita vt iuncta BC fit in AC normalis, id quod semper fieri potest, si $AC < AB$. At si $AC > AB$ solutio ex illa facile deducetur. Ex altera parte ducatur recta AD ita vt BAD sit trian-
gu-

gulum ifosceles. Bisecentur AB et AD in E et F , et per AE repraesentetur dimidium potentiae AB , et per AF tantadem potentia. Manifestum est potentiam AC idem praestare in punctum A , quod duae potentiae AE et AF coniunctim (107.) quia AC aequivaleret ob parallelogrammum $AECF$ ambabus AE et AF . Loco igitur potentiae AC ponamus punctum A sollicitari a potentiis AE et AF . Hoc vero modo rem concipiamus, quasi quaelibet potentia AE et AF dimidium puncti A afficiat. Medietates vero istae sint ad tempusculum dt saltem a se inuicem solutae, hocque finito eas subito ad se inuicem rursus accedere ponemus. Quia nunc potentia AB punctum A tempusculo dt per spatium Ab protrahit, protrahet dimidia potentia AE puncti dimidium eodem tempusculo dt per idem spatium Ab (136.). Similiter tempusculo dt altera medietas puncti A a potentia AF protrahetur per spatium $Ad = Ab$. Finito igitur tempusculo dt , altera medietas puncti A erit in b altera in d . Coeant nunc rursus subito ad se mutuo, seu contrahantur vi cohaesionis infinita, conuenient in puncto medio c lineolae bd : nulla enim est ratio, quare propius ad b quam d conueniant. A potentiis ergo AE et AF coniunctim agentibus punctum A tempusculo dt per spatiolum Ac protrahetur. Quamobrem etiam potentia AC aequivalens potentiis AE et AF tempusculo dt protrahet per spatiolum Ac . Est vero bd parallela ipsi BD et propterea $Ab : Ac = AB : AC$. Dato igitur spatiolo Ab , per quod punctum A a po-

tentia AB protrahitur, dabitur spatiolum Ac, per quod idem punctum A ab alia potentia AC protrahitur eodem tempusculo. Atque simul patet, si effectus Ac minoris potentiae AC fuerit datus, quantus sit maioris AB effectus Ab. Q. E. I.

Corollarium I.

147. Spatia igitur, per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis protrahuntur aequalibus temporibus, sunt vt ipsae potentiae.

Corollarium 2.

148. Quia spatia motus inirio descripta inaequalibus temporibus sunt in duplicata ratione temporum (133.); erunt spatia per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis inaequalibus temporibus protrahuntur in ratione composita ex ratione simplici potentiarum et duplicata temporum.

Scholion.

149. Principium, quo in huius problematis solutione sumus vfi, in hoc consistit, vt corpus a pluribus potentiis sollicitatum in totidem partes concipiatur diuisum, quarum quaelibet ab vna tantum potentia trahatur. Deinde cum singulae a potentiis suis momento temporis fuerint protractae, subito ad se mutuo compelli in vnumque ingredi intelligantur, quo facto locus, in quo conuenerunt, erit is, ad quem integrum corpus ab omnibus potentiis simul agentibus eodem tempore fuisset pertractum. Veritas huius principii ex hoc potest percipi, quod corporis partes elastis fortissimis con-

inunctae possint concipi, quae (quanquam indefinenter agunt, tamen per intervalla cedere moxque se subito contrahere vi infinita poni possunt, ita ut tempus, quo partes solutae ad se inuicem reducuntur, sit nullum. Eodem vero hoc principio iam alii in pluribus mechanicis problematibus soluendis sunt vsi. Atque plerique adoptauerunt istud re non diuersum, quod potentias non indefinenter, sed per saltus effectum suum exercere posuerunt. Hoc autem principio admissio manifestum est duas partes aequales recta ad se mutuo accedere et intervalli sui medio congregari debere.

PROPOSITIO 19.

Theorema.

150. *Moueatur punctum in directione AM et sollicitetur, dum per spatium Mm percurrit a potentia p secundum eandem directionem trahente, erit incrementum celeritatis, quod interea punctum acquirit ut potentia sollicitans ducta in tempusculum, quo elementum Mm percurritur.*

Tab. IV.
Fig. 4.

Demonstratio.

Sit tempusculum dt , et absoluat punctum hoc tempore spatium $M\mu$, si a potentia non sollicitaretur; sed celeritate, quam in M habuit, uniformiter progredi pergeret. Effectus vero potentiae in hoc consistit, ut punctum ab ea ulterius per μm protrahatur, quod spatium aequale est illi, per quod idem punctum, si quiesceret ab eadem potentia eodem tempusculo dt protraheretur, quia potentia po-

nitur absoluta (111.). Huic spatiolo dato tempore proportionale est celeritatis incrementum. At si potentia est eadem, celeritatis incrementum est vt tempusculum dt (130.). Quare cum spatiolum $m\mu$ seu incrementum celeritatis sit dato tempusculo vt potentia p , erit celeritatis incrementum pro quocunque tempusculo et quibuscunque potentiis vt pdt . i. e. vt potentia ducta in tempusculum. Q. E. D.

Corollarium I.

151. Sit puncti in M celeritas c , et spatiolum $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$, quia ad tempus determinandum, elementum Mm motu aequabili describi ponendum est. Cum autem sit dc vt pdt , erit quoque dc vt $\frac{pds}{c}$, seu cdc vt pds . Incrementum ergo quadrati celeritatis est vt potentia ducta in spatii elementum percursum.

Corollarium 2.

152. Apparet igitur non solum verum esse hoc theorema, sed etiam necessario verum, ita vt contradictionem inuolueret ponere $dc = p^2 dt$ vel $p^3 dt$ aliamue functionem loco p . Quae omnes cum Clar. Dan. Bernoullio in Comment. Tom. I. aequae probabiles videantur, de rigidis harum propositionum demonstrationibus maxime eram sollicitus.

Scholion.

153. Propositionis huius demonstratio facilius sequitur ex 148. vnde prodit spatiolum $m\mu$ propor-

portionale potentiae p ductae in quadratum tempusculi dt , ita ut sit $m\mu$ ut pdt^2 . At $m\mu$ diuisum per tempus dt dat incrementum celeritatis; quare celeritatis incrementum erit ut pdt , quemadmodum in propositione erat enunciatum.

PROPOSITIO. 20.

Theorema.

154. *Congruente puncti directione motus cum potentiae directione, erit incrementum celeritatis, ut potentia ducta in tempusculum et diuisa per materiam seu quantitatem puncti.*

Demonstratio.

Sint duo puncta seu corpuscula inaequalia A et B mota in rectis AM, BN. Sollicitentur ea a potentiis p et π respectiue, dum percurrunt spatiola Mm , Nn , et sint tempora, quibus ea percurruntur dt , $d\tau$. Manifestum est punctum B a potentia π eodem modo affici ac punctum A a potentia $\frac{A\pi}{B}$ (136.). Quare substituto loco B puncto ipsi A aequali, pro potentia π substitui debet potentia $\frac{A\pi}{B}$, hocque modo obtinemus casum propositionis praecedentis, quo puncta ponuntur aequalia. Hanc ob rem incrementum celeritatis per Mm est ad incrementum celeritatis per Nn ut pdt ad $\frac{A\pi}{B}d\tau$, seu ut $\frac{pdt}{A}$ ad $\frac{\pi d\tau}{B}$ (150.). Ex quo constat propositum, quod celeritatis incrementum, sit ut factum ex potentia et tempusculo diuisum per puncti materiam seu quantitatem. Q. E. D.

Tab. II.
Fig. 5.

Co-

Corollarium I.

155. Si igitur celeritas puncti A fuerit c , erit $dc = \frac{npdt}{A}$, vbi n in omnibus casibus eundem denotat numerum, neque enim a potentia neque a tempusculo neque a puncti quantitate pendet.

Corollarium 2.

156. Quantitas materiae A hic in considerationem venit quatenus potentiae sollicitanti reluctatur, i. e. quatenus congruit cum vi inertiae. Hanc ob rem est celeritatis incrementum vt potentia sollicitans et tempusculum directe, atque inuerse vt vis corporis inertiae.

Corollarium 3.

157. Posito spatio $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$. Hinc fiet $dc = \frac{npds}{Ac}$, seu $cdc = \frac{npds}{A}$. Quare incrementum quadrati celeritatis proportionale est facto ex potentia in spatiolum percursum diuiso per massam seu vim inertiae corpusculi.

Scholion.

157. Propositio ista complectitur omnia principia haecenus tradita motus naturam definitiua, omnesque leges motus, si quidem potentiae directio cum motus directione congruit. Quamobrem si haec propositio cum decima quarta coniungitur, qua effectus potentiarum oblique agentium determinatur, omnia habebuntur principia, ex quibus punctorum a quibuscunque potentiis sollicitatorum motus possunt inueniri.

Corollarium 4.

159. Quia est $dc = \frac{npdt}{A}$, erit spatium per quod punctum A a potentia p tempusculo dt perducitur $= \frac{npdt^2}{A}$. Est enim hoc spatium factum ex dc in dt . Nam dicto hoc spatium dz est $dc = \frac{dz}{dt}$ (128.), adeoque $dz = d. dt = \frac{npdt^2}{A}$.

PROPOSITIO 21.

Problema.

160. *Potentiae cuiuscunque in punctum motum oblique agentis effectum determinare.*

Tab. II.

Fig. 1.

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c directionemque AB. Sollicitetur vero a potentia p , cuius directio AC cum AB faciat angulum, cuius sinus est k . Perpicuum est punctum A sibi relictum neque a potentia sollicitatum in recta AB esse progressurum, tempusculoque dt percursurum spatium $AB = cdt$ (30.). Agente vero potentia p declinabit punctum A a recta AB, percurretque interea spatium AD, ut in prop. 14 est ostensum. Posuimus autem ibi AC seu $BD = dz$, quod est spatium per quod punctum A, si quiesceret, a potentia p tempore dt pertraheretur. Est ergo $dz = \frac{npdt^2}{A}$ (159.). Anguli igitur BAD sinus, qui inuentus est $= \frac{k dz}{c dt}$ (124.) erit $= \frac{nk p dt}{Ac}$. Atque celeritatis incrementum dc , quod erat $= \frac{dz v(1-kk)}{dt}$ (123), fit $= \frac{np dt v(1-kk)}{A}$. Q. E. I.

I

Co-

Corollarium I.

Tab. II.
Fig. 6.

161. Vocetur spatium $AD=ds$, erit $dt=\frac{ds}{c}$ adeoque posito $\frac{ds}{c}$ loco dt , prodibit $dc=\frac{npds\sqrt{(1-kk)}}{\Lambda c}$. Ducatur ex D in directionem potentiae AE perpendicularis DE, sitque $AF=dy$, et $DF=dx$, erit $ds^2=dx^2+dy^2$, et $k=\frac{dx}{ds}$, et $\sqrt{(1-kk)}=\frac{dy}{ds}$. Proueniet ergo $dc=\frac{npdy}{\Lambda c}$ seu $\Lambda dc=npdy$.

Corollarium 2.

162. Ducatur ad curuam, quam corpusculum hoc modo describit, in A radius osculi AO, erit $Bb:AB=AD:AO$. Quare erit $AO=\frac{AB \cdot AD}{Bb}$. Est vero $\frac{Bb}{AB}$ sinus anguli BAD, qui inuentus est $=\frac{nkpd}{\Lambda c}$. Erit ergo $\frac{Bb}{AB}=\frac{npdxdt}{\Lambda cds}$, atque ob $AD=ds$, prodibit $AO=\frac{\Lambda cds^2}{npdxdt}$.

Corollarium 3.

163. Quia vero est $dt=\frac{ds}{c}$, erit $AO=\frac{\Lambda c^2 ds}{npdx}$. Vocetur radius osculi $AO=r$, habebitur $nprdx=\Lambda c^2 ds$.

Corollarium 4.

164. Si potentiae p directio AE incidat in normalem AO, fiet $AF=dy=0$, et $DF=dx=AD=ds$. Quamobrem erit $cdc=0$, atque idcirco haec potentia celeritatem non immutabit.

Corollarium 5.

165. Hoc porro casu erit $npr=\Lambda c^2$ ob $dx=ds$, atque ideo $r=\frac{\Lambda c^2}{np}$. Haec igitur potentia, cuius di-

di-

directio est normalis in corporis directionem efficit, ut corpus non in recta motum suum absoluat, sed in arcu curvae.

Corollarium 6.

166. Si potentiae p directio incidat in tangentem AB; fiet $dx=0$ et $dy=ds$. Habebitur ergo $Acde=npds$. In hac igitur directione potentia p celeritatem corporis maxime augebit.

Corollarium 7.

167. Si potentiae p directio in oppositam ipsi AB directionem incidat, ita ut motui corporis sit contraria; fiet p quantitas negatiua, habebiturque $Acde=-npds$. Tantum igitur hoc casu minuetur celeritas, quantum ante augebatur.

Corollarium 8.

168. In utroque autem casu, quo directio potentiae p in tangentem incidit, erit $r=\frac{Ac^2 ds}{np.o}$ ob $dx=0$. Tum igitur directio corporis non mutabitur, sed id in recta moueri perget.

Corollarium 9.

169. Determinato ergo in vnico casu ex experimento valore litterae n , inferuiet is pro omnibus casibus. Tum igitur omnium, quae in motibus possunt desiderari, poterunt assignari valores absoluti.

Corollarium 10.

170. Ex corollario primo prodit $A=\frac{npdy}{cdc}$. Quo valore in tertio substituto habebitur $nprdx$

$\frac{npdyds}{dc}$, seu $r dx dc = c dy ds$. In qua aequatione neque n neque A neque p inest, haec igitur valet pro motu puncti cuiuscunque a quacunque potentia sollicitati.

Corollarium II.

171. Quanquam autem in ista aequatione ipsa potentia p non inest, tamen eius directio a qua relatio elementorum dx et dy pendet, adhuc super est. Data igitur directione potentiae punctum in quouis loco sollicitantis, et ipsa curua in qua punctum mouetur, poterit ex his solis datis determinari puncti celeritas in quouis loco. Erit enim $\frac{dc}{c} = \frac{dy ds}{r dx}$ seu $c = e^{\int \frac{dy ds}{r dx}}$ vbi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1.

Corollarium I2.

172. Quia porro est $dt = \frac{ds}{c}$, erit $t = se^{-\int \frac{dy ds}{r dx}}$. Hinc igitur simul innotescit tempus, quo quaeuis curuae portio describitur, neque ad hoc pluribus opus est datis, quam ipsa curua, et directione potentiae.

Corollarium I3.

173. Si ex O in potentiae directionem AE demittatur perpendicularis OE , quae a quibusdam coradius appellatur, erit $ds : dx = AO : AE$. Posito ergo coradio $AE = q$, erit $\frac{r dx}{ds} = q$. Fiet igitur $c = e^{\int \frac{dy}{q}}$, et $t = se^{-\int \frac{dy}{q}}$.

Scho-

Scholion.

174. Ex solutione huius problematis apparet, posse eius beneficio puncti a quibuscunque potentiis sollicitati motum determinari. Ex duabus enim aequationibus, definitur et puncti celeritas in loco quouis, et curvatura seu radius osculi ipsius curvae percurvae. His vero cognitis simul reperietur tempus, quo quaevis curvae portio absolvitur, quae abunde sufficiunt ad motum determinandum.

DEFINITIO 14.

175. Vis restituens est vis illa imaginaria et infinita, quae partes corporis separatas momento rursus congregat, et in statum pristinum restituit. *Huiusmodi vim in solutione Prop. 18. adesse concepimus, qua duae puncti partes, quae ad momentum solutae concipiebantur, rursus contrahabantur.*

Corollarium 1.

176. Si punctum in duas partes aequales concipiatur diuisum, eaeque a potentiis fuerint separatae, vis restituens eas contrahet in medio rectae illas iungentis, vt §. 146 ex principio sufficientis rationis est ostensum.

Corollarium 2.

177. Quia effectus vis restituens in instanti debet produci, poterit vis restituens considerari vt elastrum vi infinita praeditum, quo partes separatae iterum coniunguntur.

Scholion.

178. Vfus huius vis restituentis iam elucet quodammodo ex propositione 18, vfus vero eius adhuc erit ampliffimus in fequentibus, quando motus corporum finitae magnitudinis fumus inueftigaturi. Hic vero effectum eius indagabimus in coniungendis pluribus puncti partibus feparatis, quae inquitio in fequentibus magnam habebit vtilitatem. Complectitur ergo vis restituens principium aliquod, cuius ope plurimae quaestiones facile refolui poterunt, idque principium restitutionis vocabimus.

PROPOSITIO 22.

Theorema.

Tab. II. 179. *Sint duae puncti partes in b et d fe-*
 Fig. 7. *ratae, dico eas a vi restituente coniunctum iri in pun-*
cto c centro grauitatis particularum b et d.

Demonstratio.

Fuerint hae partes primo coniunctae in A, sintque eae a potentiis AB, AD pertractae in *b* et *d* eodem tempusculo *dt*. Harum potentiarum vero aequiualeus fit potentia AC, quae eodem tempusculo integrum punctum ex A pertrahere valeat in *c*. Manifestum igitur est partes *b* et *d* a vi resistente in *c* contrahi debere, quia potentia AC eundem in punctum integrum A edit effectum, ac ambae AB et AD in duas eius partes (149). Hinc igitur innotescit punctum concursus *c*, in quod particulae *b* et *d* a vi restituente compellentur. Quo autem particula

cula b a potentia AB tempusculo dt per spatium AB protrahatur debet esse $Ab = \frac{n \cdot AB \cdot dt^2}{b}$ (159.) seu $AB = \frac{Ab \cdot b}{ndt^2}$. Similem ob rationem erit $AD = \frac{\Delta d \cdot d}{ndt^2}$, et $AC = \frac{\Delta c(b+d)}{ndt^2}$. Est vero AC diagonalis parallelogrammi, quod a potentiis AB et AD constituitur, quia his aequialet. Ex illis autem aequationibus deducitur $\frac{AB}{Ab} + \frac{AD}{Ad} = \frac{AC}{Ac}$, sunt vero AB , AD et AC inter se ut sinus angulorum DAC , BAC et BAD . Quamobrem erit $\frac{f_{DAC}}{Ab} + \frac{f_{BAC}}{Ad} = \frac{f_{BAD}}{Ac}$, ex qua proprietate sequitur puncta b , c , et d esse in directum posita. Hoc cum sit, erit $bc:cd = f_{BAC} \cdot Ab : f_{DAC} \cdot Ad = AD : AB = Ad : d : Ab \cdot b$. Coaequenter prodibit $bc:cd = d:b$ seu $b \cdot bc = d \cdot dc$. Ex quo intelligitur punctum c esse centrum grauitatis particularum b et d . Q. E. D.

Corollarium I.

180. Vbicunque ergo accipiatur punctum A , semper in eundem incidit locum punctum concursus c , ex quo apparet vim restituentem constantem habere effectum, neque a loco puncti A nec a potentiis particulas b et d sollicitantibus pendere.

Scholion.

181. Egregie conuenit hic vis restituentis effectus cum effectu vis elasticae, quam eius loco substituere licet. Iungat enim particulas b et d filum elasticum bd , quod sese contrahendo b et d congreget in c . Vis autem haec contrahens aequaliter ager
in

in particulas b et d , cum vtrunque se aequaliter contrahere conetur. Spatia vero, per quae b et d eodem tempore protrahuntur, sunt reciproce vt ipsae particulae (159), quia ab eadem potentia afficiuntur. Quare si punctum concursus est c , erit bc ad dc reciproce vt b ad d , seu $b.bc = d.cd$. Ex quo etiam intelligitur punctum c esse centrum grauitatis particularum b et d .

Corollarium 2.

182. Quamuis igitur vis restituens sit imaginaria et in sola cogitatione formata, tamen eius effectus sequitur motus leges reales. Hocque magis erimus certi, ope principii restitutionis semper ad veritatem perueneri.

PROPOSITIO 23.

Theorema.

Tab. II.

Fig. 8.

183. *Sint a, b, c, d partes puncti a se inuicem separatae, quae a vi restituente rursus congregentur: conuenient eae in communi centro grauitatis g .*

Demonstratio.

Ponamus initio integrum punctum fuisse in puncto quocunque O , ex quo singulae hae partes a, b, c, d tempusculo dt a potentiis OA, OB, OL, OD pertractae sint in a, b, c, d . Accipiatur harum potentiarum aequivalens AG , quae eodem tempusculo integrum punctum, quod est $a+b+c+d$, ex O pertraxisset in g ; erit g punctum, in quod partes a, b, c, d a vi restituente congregabuntur (149).

Per

Per punctum O ducatur recta quaevis KN, in eamque ex punctis A, a, B, b, C, c, D, d, G, g, demittantur perpendiculara. Erunt autem $OA = \frac{Oa.a}{ndt^2}$, $OB = \frac{Ob.b}{ndt^2}$, $OC = \frac{Oc.c}{ndt^2}$, $OD = \frac{Od.d}{ndt^2}$, et $OG = \frac{Og(a+b+c+d)}{ndt^2}$ (159). At ob triangula similia OAK, Oak; OBL, Obl; etc. erit $AK = \frac{OA.ak}{Oa} = \frac{ak.a}{ndt^2}$, $BL = \frac{OB.bl}{Ob} = \frac{bl.b}{ndt^2}$, $CM = \frac{OC.em}{Oc} = \frac{cm.c}{ndt^2}$, $DN = \frac{OC.dn}{Od} = \frac{dn.d}{ndt^2}$, et $GS = \frac{OG.gs}{Og} = \frac{gs(a+b+c+d)}{ndt^2}$; atque $OK = \frac{OA.Ok}{Oa} = \frac{Ok.a}{ndt^2}$, $OL = \frac{OB.Ol}{Ob} = \frac{Ol.b}{ndt^2}$, $OM = \frac{OC.Om}{Oc} = \frac{Om.c}{ndt^2}$, $ON = \frac{OD.On}{Od} = \frac{On.d}{ndt^2}$ et $OS = \frac{OG.Os}{Og} = \frac{Os(a+b+c+d)}{ndt^2}$. Sed quoniam AG est potentia aequivalens potentiis OA, OB, OC, OD constat ex statica esse $AK + BL + CM + DN = GS$, et $OK + OL + OM + ON = OS$. Fiet ergo $ak.a + bl.b + cm.c + dn.d = gs(a+b+c+d)$, et $Ok.a + Ol.b + Om.c + On.d = Os(a+b+c+d)$. Ex quibus proprietatibus intelligitur punctum g esse centrum grauitatis particularum a, b, c, d. Vis ergo restituens has particulas in centro communi grauitatis g congregat. Q. E. D.

Corollarium I.

184. In hoc igitur vis restituens effectus consistit, quod corpusculi quotcunque partes separatas in ipsarum communi centro grauitatis congreget.

K

Co-

Corollarium 2.

185. Hoc igitur modo puncti a pluribus potentiis sollicitati motus poterit determinari sine potentiae aequivalentis consideratione, dum a singulis potentiis partes quaecunque affici ponuntur, quolibetque tempusculo iterum a vi restituyente congregari.

Scholion.

Tab. II. 186. Demonstratio huius theorematis ope
Fig. 9. filorum elasticorum sese contrahentium eodem modo potest perfici, quo ante fecimus (181.). Sint enim particulae separatae in a , b , c , d , et ponamus primo filum particulas a et b tantum contrahere, coibunt eae in centrum grauitatis e . Nunc concipiamus particulas a et b in e locatas cum particula c coniungi erit punctum concursus in f , quod est centrum grauitatis trium particularum a , b et c . Iam hae tres in f positae cum quarta d coniungantur, erit punctum concursus in g centro grauitatis omnium quatuor a , b , c et d . Quare a vi restituyente omnes particulae in commune centrum grauitatis congregantur.

Corollarium 3.

187. Denuo igitur constat, vim restituentem recte per contractionem filorum elasticorum binas quasque particulas iungentium repraesentari.

SCHO-

SCHOLION GENERALE.

188. His igitur positis principiis, ex quibus puncti liberi a quibuscunque potentiis sollicitati motus determinari poterit, progrediemur ad punctorum liberorum motus inuestigandos. Hanc vero tractationem in duas partes dispesci conueniet, in quarum prima motus tantum rectilinei examinantur in altera vero curuilinei quicunque. Illi rectilinei, vt ex dictis intelligitur, oriuntur, quando motus directio cum potentiae directione conuenit; hi vero quando hae directiones discrepant. Vtramque vero partem duplici modo tractabimus, pro duplici potentiarum natura: primum scilicet puncta a solis potentiis absolutis sollicitari ponemus; deinde vero ab absolutis et relatiuis coniunctim. Loco relatiuarum quidem substituemus media resistentia, quia vt iam monuimus potentiae relatiuae ad motus corporum in fluidis determinandos considerantur (116.), quamobrem eos potissimum casus, qui in rerum natura existunt, euoluemus, neque multum iis, qui non nisi in imaginatione reperiuntur, immorabimur. Primum ergo de motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati tractabimus. Deinde inuestigabimus motus rectilineos puncti liberi in medio resistente. Tertio motus curuilineos puncti liberi a potentiis absolutis utcunque sollicitati euoluemus. Quarto denique motus curuilineos puncti liberi in medio resistente exponemus.

CAPUT TERTIUM

DE

MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

PROPOSITIO 24.

Theorema.

189.

Quando potentiae et motus directiones in eadem sitae sunt rectae, motus erit rectilineus.

Demonstratio.

Omne corpus vi insita conatur motum suum in directum continuare, id quod semper praestat, nisi impediatur (65). Potentiae vero in corpus motum duplicem esse ostendimus effectum, alterum quo eius directio immutatur, alterum quo celeritas eius. At directio manet immutata, si potentiae directio cum ea in directum iacet (128.). Hoc igitur casu punctum in linea recta progredi perget.

Q. E. D.

Corollarium I.

190. In hoc igitur capite alios non considerabimus casus, nisi in quibus motus et potentiae directiones in eadem recta sunt positae.

Corollarium 2.

191. Vidimus autem duobus modis hanc congruentiam euenire posse, prout scilicet ambae hae
di-

directiones vel in eandem plagam vel in oppositas tendunt. In quorum illo puncti celeritas augetur, in hoc vero diminuitur (128.).

Scholion.

192. In motu hoc rectilineo duo sunt consideranda, quorum primum est potentia, a qua punctum ubiuis sollicitatur, alterum vero celeritas, quam habet in quolibet spatii loco. His praeterea adiungimus tertium, quod est tempus, quo quaevis spatii portio percurritur. Tria vero ista ita sunt comparata, ut dato vno reliqua duo semper possint determinari. Primo igitur potentiam tanquam datam considerabimus: deinde vero eam ex data vel celeritatum vel temporum ratione inuestigabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

193. *Protrahatur punctum in A quiescens in Tab. II.
recta AP, a potentia vniformi seu quae vbique punctum Fig. 10.
eadem vi sollicitat, determinare celeritatem puncti in
quouis loco P.*

Solutio.

Exponatur massa seu vis inertiae puncti litera A et potentia litera g, quae erit constans seu vbique eiusdem quantitatis. Sit spatium $AP = x$, et celeritas in P, quae quaeritur, ponatur $= c$. Sumatur elementum spatii Pp, quod erit $= dx$; atque incrementum celeritatis, quod punctum, dum elementum Pp absolvitur, a potentia g accepit, erit dc .

His positis erit $c\,dc = \frac{ng\,dx}{\Lambda}$ (157.), quia potentiam perpetuo deorsum trahere, et propterea motum accelerare ponimus. Ex hac aequatione, si integretur, oritur $cc = \frac{2ngx}{\Lambda} + \text{Const.}$, quae constans ex eo debet determinari, quod celeritas in A euanescat. Factis igitur $c=0$, et $x=0$, prodibit $\text{Const.} = 0$, quamobrem habebitur $cc = \frac{2ngx}{\Lambda}$, seu $c = \sqrt{\frac{2ngx}{\Lambda}}$.
Q. E. I.

Corollarium I.

194. Punctum A igitur perpetuo in recta AP descendet, et celeritas in quouis loco erit vt radix quadrata ex spatio iam percurso.

Corollarium 2.

195. Ex his etiam plurium punctorum a potentiis vniformibus seu constantibus descensus poterunt comparari, erunt enim celeritates in ratione subduplicata composita ex directis potentiarum et spatiorum percursorum et inuersa massarum.

Scholion I.

196. Casus hic apprime conuenit cum lapsu corporum super terra: grauitas enim, quae potentiae vices sustinet, est vniformis in non nimis magnis a terrae superficie distantis. Namque idem pondus cuiusuis corporis reperitur in altissimis montibus et profundissimis vallibus; ex pondere autem grauitas innotescit. In descensu igitur grauium libero celeritates sunt vt radices quadratae ex altitudinibus percursis. Haecque est ipsa Galilaei propositio.

fitio, quam primus tum ex experimentis tum ex ratione detexit. Descensus autem in spatio ab aere vacuo fieri debet, quia aer motui resistit, hancque regulam euertit.

Scholion 2.

197. In spatio ab aere vacuo, quod ope antliae pneumaticae efficitur, plurimis experimentis est demonstratum, corpora quaecunque aequaliter descendere. Ex quo consequitur, si nullus esset aer, omnia corpora ex aequalibus altitudinibus delapsa aequales adipisci celeritates. Hanc ob rem si g designet vim grauitatis, qua quoduis corpus A citetur, erit $\frac{g}{A}$ quantitas semper constans. Vis igitur grauitatis proportionalis est quantitati materiae corporis, in quod agit. Illa autem vis nil aliud est nisi pondus corporis; quare pondera corporum sunt quantitati materiae proportionalia. *Newtonus* hanc propositionem in Princ. Phil. quoque affirmat, eamque praeterea ex experimentis pendulorum probat.

Corollarium 3.

198. Corpus igitur quodcunque in superficie terrae ex data altitudine delapsum datum acquirat celeritatis gradum. Cognita ergo altitudine ex qua corpus descendit, innotescet simul celeritas eius hoc descensu acquisita.

Scholion 3.

199. Ad celeritates igitur mensurandas poterimus has altitudines adhibere, ex quibus graue
in

in terrae superficie descendens aequalem acquirit celeritatem. Haec quidem altitudo non potest loco ipsius celeritatis substitui, quia celeritates sunt in altitudinum ratione subduplicata. Verum tamen altitudine commode quadratum celeritatis denotari poterit.

DEINITIO 15.

200. Altitudinem celeritati cuidam debitam vocabimus posthac eam altitudinem, ex qua graue in superficie terrae descendens eandem illam acquirit celeritatem.

Corollarium I.

201. Haec igitur altitudo debita est vt quadratum celeritatis ad quam refertur. Celeritate ergo existente c et ipsi debita altitudine v , erit v vt c^2 .

Scholion I.

202. Haecenus celeritatem expressimus linea recta, quae dato tempore ea celeritate percurri potest. In posterum autem commodius erit altitudinem debitam eius loco introducere. Hanc ob rem ponemus $v=cc$ et $c=\sqrt{v}$. Habebimus ergo in problemate praecedente hanc aequationem $v=\frac{2ngx}{\Lambda}$.

Corollarium 2.

203. In posterum igitur semper loco celeritatis c ponere licebit \sqrt{v} , seu radicem quadratam ex altitudine celeritati debita.

Co-

Corollarium 3.

204. Si potentia g denotet ipsam vim grauitatis, erit x ipsa altitudo celeritati c debita, adeoque $v=x$. Est vero $v=\frac{2ngx}{A}$, ex quo igitur erit $n=\frac{A}{2g}$. Hoc igitur iam affecuti sumus commodum, vt literam n determinauerimus, quae in omnibus casibus tenet eundem valorem (155.).

Scholion 2.

205. Quia hic g vim grauitatis significat erit $\frac{g}{A}$ quantitas constans (197.). Hanc ergo ponemus 1 , id quod licebit, cum potentiae ad corpora definitam rationem habere nequeant. Atque hinc facile erit in aliis casibus valorem ipsius $\frac{g}{A}$ seu potentiae applicatae ad corpus exhibere. Erit nempe $\frac{g}{A}$ ad 1 , seu $g:A$ vt vis g , qua corpus A sollicitatur, ad pondus, quod idem corpus haberet in nostris regionibus. Litera igitur A non amplius materiae quantitatem denotabit, sed ipsum corporis A pondus, si super terra esset positum. Hoc igitur modo omnes potentias cum ponderibus comparabimus, id quod in potentiis mensurandis ingentem lucem foenerabitur.

Corollarium 4.

206. Cum in $n=\frac{A}{2g}$, g denotet vim grauitatis, positumque sit $\frac{g}{A}=1$, erit $n=\frac{1}{2}$. Quem valorem semper retinebit, si modo celeritates per radices quadratas altitudinum ipsis debitarum exprimantur. Ideoque erit in nostro casu $dv=\frac{gdx}{A}$ et $v=\frac{gx}{a}$.

L

Co-

Corollarium 5.

207. Propterea in hac lege generali $c dc = \frac{n p ds}{\Lambda}$ (157.), si sit altitudo celeritati c debita v , erit $c dc = \frac{dv}{2}$, adeoque ob $n = \frac{1}{2}$, habebitur haec lex $dv = \frac{p ds}{\Lambda}$, vbi gp est ad A , vt vis p ad pondus corporis A .

Corollarium 6.

208. Simili modo, quae in §. §. 161, et 163 tradita sunt, nempe aequationes $Ac dc = n p dy$ et $n p r dx = Ac^2 ds$, substituendo v loco c^2 et $\frac{1}{2}$ loco n , transmutantur in has $Adv = p dy$ et $p r dx = 2Av ds$, vbi p ad A habet rationem modo dictam.

Corollarium 7.

209. Atque in §. 165. habebitur $r = \frac{2Av}{p}$ seu $pr = 2Av$. Item in §. 166. habebitur $Adv = p ds$, et in casu §. 167. habebitur $Adv = -p ds$. Hocque modo ante vsitatas quantitates vagas n et c ad determinatos valores reduximus.

PROPOSITIO 26.

Theorema.

210. *In diuersis potentiarum vniformium hypothesis altitudines, ex quibus aequalia corpuscula descendunt aequales acquirunt celeritates, sunt reciprocae vt potentiae.*

Demonstratio.

Sit vnus cuiusque corpusculi massa, seu pondus in superficie terrae A , potentia quaevis vniformis \mathcal{E} , et altitudo celeritati acquisitae debita v . Alti-

tu-

tudo vero, ex qua corpusculum A a potentia g sollicitatum aequalem acquirit descendendo celeritatem, fit x , erit $v = \frac{2n g x}{A}$ (202.). At est $n = \frac{1}{2}$ (206.). Ergo fit $v = \frac{g x}{A}$ seu $Av = gx$. Quare cum celeritates a diuersis potentiis productae et corpuscula ponantur aequalia, erit Av quantitas constans, ideoque etiam gx . Propterea erit x reciproce vt g , i. e. altitudo, ex qua corpusculum A a potentia g sollicitatum acquirit celeritatem \sqrt{v} , erit reciproce vt potentia g . Q. E. D.

Corollarium I.

211. Ostendit *Newtonus* eiusdem corporis in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae positum seu potentiam, qua ad eorum centra sollicitatur esse vt 10000, 835, 525, et 410. Altitudines igitur, ex quibus corpus in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae descendens aequalis acquirit celeritates sunt inter se vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$.

Corollarium 2.

212. Statuit autem idem *Newtonus* omnia corpora in his superficiebus aequaliter descendere, pariter vt in superficie terrae. Non igitur opus est hanc adiicere conditionem, quod corpora sint aequalia, sed ex altitudinibus, quae sunt vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$, in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et Terrae, quaecunque corpora delabentia eundem acquirunt celeritatis gradum.

Scholion I.

213. Intelligitur ex his duplicem cuiusvis potentiae esse effectum in corpora, alterum quo certum nisum seu conatum corporibus imprimit, alterum quo ea reipsa mouet. Ille in statica potissimum consideratur, et mensurandus est pondere, quod aequalem habet conatum deorsum, poteritque vocari vis potentiae absoluta. Posterior vero effectus mensurari debet acceleratione, seu celeritatis incremento¹, quod corpori dato tempore imprimit: proportionalis igitur est illi conatui diuiso per corporis massam (159.). Vocatur hic effectus a *Newtono* vis accelerans, et propterea vis potentiae accelerans proportionalis est vi eius absolutae ad massam corporis seu pondus applicatae. Quapropter cum sit $dv = \frac{pdx}{A}$ (207) et $\frac{p}{A}$ denotet vim accelerantem, erit dv aequale facto ex vi accelerante in elementum spatii percursum. Ita vis grauitatis absoluta est massae corporum, in quae agit, proportionalis, nisum enim eorum deorsum causatur, seu pondus, quod massae proportionale esse ostendimus. Vis autem accelerans grauitatis in omnibus corporibus est aequalis, cum omnia aequaliter descendant, aequalibusque temporibus aequales adipiscantur celeritates.

Corollarium 3.

214. Vires ergo potentiarum acceleratrices sunt inter se vt vires absolutae, si corpora sint aequalia. Quare cum vis acceleratrix grauitatis sit

1 vt ante posuimus (205), erit vis acceleratrix grauitatis solaris = 24, 390; vis acceleratrix grauitatis in superficie Iouis = 2, 036; Vis acceleratrix grauitatis, quae est in superficie Saturni = 1, 280. Atque grauitatis vim acceleratricem in superficie lunae statuit *Neutonus* = $\frac{1}{3}$.

Corollarium 4.

215. Quare si Propositio 25. ad lapsum corporum in superficie terrae accommodari debeat, erit $\frac{g}{A} = 1$, quemadmodum fecimus §. 205. Sin vero ad lapsum corporum in superficie solis, erit $\frac{g}{A} = 24, 390$; sin ad lapsum corporum in superficie Iouis, erit $\frac{g}{A} = 2, 036$; sin ad lapsum corporum in superficie Saturni, erit $\frac{g}{A} = 1, 280$, sin denique ad lapsum corporum in superficie Lunae erit $\frac{g}{A} = \frac{1}{3}$.

Scholion 2.

216. Assumimus hic cum *Neutono* omnia corpora coelestia terrae nostrae esse similia, atque corpora in eorum superficiebus posita vim habere ad eorum centra tendentem, quae similis sit grauitati corporum terrestrium. Ex traditis igitur *Neutonianis* apparet, corpus, cuius hic pondus sit 1 librae, in superficie Solis positum ponderare 24, 390 libras; in superficie Iouis vero 2, 036 libras; in superficie Saturni 1, 280 libras, et in superficie lunae tertiam librae partem.

Scholion 3.

Quo autem facilius grauitatis similibusque potentiarum in corporibus coelestibus natura perspiciatur, singula corporum elementa aequalia aequaliter a grauitate affici concipienda sunt. Ex quo sequitur, quod iam experientia constat, vires grauitatis, quibus quaeque corpora sollicitantur, esse ipsorum massis seu quantitibus materiae proportionales. Ante vero iam est demonstratum, si potentiae sint massis corporum, quae sollicitant, proportionales, effectus earum in corporibus mouendis esse aequales (136). Quamobrem ex his manifestum est omnia corpora in superficie terrae aequaliter descendere debere, atque etiam pariter in omnibus corporibus coelestibus.

PROPOSITIO 27.

Problema.

Tab. II. 118. *Puncto A a potentia vniiformi per spatium AP promoti, definire tempus, quo spatium AP absoluitur.*

Solutio.

Sit vt ante potentia sollicitans g , spatium $AP = x$, et altitudo celeritati, quam in P habet debita v ; erit ob $n = \frac{1}{2}$, $v = \frac{g x}{\Lambda}$. Ipsa igitur celeritas in P erit $= v = \frac{g x}{\Lambda}$. Habebitur ergo tempus, quo elementum $Pp = dx$, percurretur, vt $\frac{dx \sqrt{\Lambda}}{v g x}$. Sit tempus, quo spatium AP absoluitur $= t$, ponaturque $dt = \frac{dx \sqrt{\Lambda}}{v g x}$ oportebit ex vnico experimento determinare

literam m , quo tempus in data mensura puta in minutis secundis reperiatur. Ex illa vero aequatione prodit integrando $t = 2m\sqrt{\frac{\Lambda x}{g}}$, ad quod constantem quantitatem adiciere non est opus, quia posito $x = 0$ etiam t evanescit, prout debet. Determinato igitur m ex experimento, habebitur $t = 2m\sqrt{\frac{\Lambda x}{g}}$ minut. sec. Quo autem huiusmodi mensura temporis absoluta resultet, oportet ut x quoque secundum constantem mensuram exhibeatur: determinabimus igitur semper spatium x in scrupulis i. e. partibus millesimis pedis Rhenani; fractio enim $\frac{\Lambda}{g}$ in numeris absolutis exprimetur, ita ut non opus sit ad eam certam mensuram adhibere. Definita ergo litera m , id quod mox faciemus, habebitur plena problematis solutio. Q. E. I.

Corollarium I.

219. Si g designet gravitatem, erit $\frac{\Lambda}{g} = 1$, (205), hanc ob rem tempus, quo corpus terrestre ex altitudine x scrup. pedis rhenani delabitur, erit $2m\sqrt{x}$ minutorum secundorum.

Corollarium 2.

220. Experimentis autem compertum est corpus minuto secundo altitudinem 15625 scrup. pedis Rhenani descendendo absolvere. Quam ob rem, si ponatur $x = 15625$, debet prodire $t = 1$. Cum autem sit $t = 2m\sqrt{x}$, erit $1 = 2m\sqrt{15625}$ i. e. $= 250m$. Reperitur ergo valor literae $m = \frac{1}{250}$.

Co-

Corollarium 3.

221. Quoniam vero litera m in omnibus casibus eundem retinet valorem, erit in casu problematis $t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$ minut. sec. Expresso igitur spatio percurso x in scrupulis pedis Rhenani dabit $\frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$ numerum minorum secundorum, quibus hoc spatium percurritur.

Corollarium 4.

222. Atque ad omnes prorsus casus hic valor ipsius m inuentus accommodari potest. Sit enim elementum spatii descripti dt , altitudo celeritati, qua hoc percurritur, debita v , erit temporis elementum $dt = \frac{m ds}{\sqrt{v}}$ et $t = m \int \frac{ds}{\sqrt{v}}$. Ex qua aequatione, si v et s in scrup. pedis Rhenani exprimantur et ponatur $m = \frac{1}{\sqrt{2g}}$, prodibit tempus t in minutis secundis, $t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ min. sec.

Scholion 1.

223. Ex hoc igitur, quod celeritates per radices quadratas altitudinum debitarum denotamus, istud porro affecuti sumus commodum, quod temporum absolutam mensuram semper inueniamus. Vbi vero sumus experimento, quo definitur altitudo, ex qua graue minuto secundo delabitur, quam *Hugenius* per experimenta pendulorum inuenit 15 ped. Paris. 1 dig. $2 \frac{1}{8}$ lineas, i. e. in fractionibus decimalibus 15, 0976 ped. Parisinos. Rationem autem pedis Rhenani ad Parisinum adhibemus 1000 ad 1035, ex qua altitudo minuto secundo cadendo per-

percurſa prouenit 15, 625 ped. Rhenanos, ſeu 15625 ſcrupula eiusdem pedis; Hancque menſuram malumus adhibere quam Pariſinam, quia hic numerus eſt quadratus, eoque euitamus frequentes radicis extractiones. Numerus praeterea, per quem $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ (s et v in ſcrupulis pedis Rhenani expreſſis) diuidi debet, vt tempus in minutis ſec. reperiatur, eſt 250, qui facillime memoria teneri poteſt.

Corollarium 5.

224. Cum $\frac{g}{A}$ denotet potentiae vim accelerantem (213) erunt tempora, quibus ſpatia quaecunq; a potentiis vniformibus percurruntur, in ratione ſubduplicata compoſita ex directa ſpatiorum et reciproca virium accelerantium.

Corollarium 6.

225. Poſita celeritate, quam punctum A ex altitudine x a potentia g ſollicitatum acquirat, c , eſt c vt $\sqrt{\frac{g x}{A}}$ (193). Ergo ct erit vt x , quia t eſt vt $\sqrt{\frac{Ax}{g}}$. Conſequenter ſpatia percurſa ſunt in ratione compoſita temporum quibus deſcribuntur, et celeritatum, quas deſcenſu adipiſcuntur, quaecunq; ſint potentiae ſollicitantes, modo ſint vniformes.

Corollarium 7.

226. Atque ſpatia, quae aequalibus temporibus percurruntur, ſunt vt vires potentiarum ſollicitantium accelerantes.

Corollarium 8.

227. Spatia igitur, per quae corpora aequalibus temporibus in superficiebus Solis, Iouis, Saturni, Lunae et Terrae delabuntur, sunt inter se vt 24390, 2036, 1280, 533, 1000 (214).

Corollarium 9.

228. In eadem vis accelerantis hypothefi tempora, quibus spatia quaecunque percurreuntur, sunt vt celeritates acquisite, atque tam tempora quam celeritates sunt in ratione subduplicata spatiorum descriptorum.

Scholion 2.

229. Hic semper ponimus corpora descendencia descensum a quiete inchoare, seu eorum celeritatem in initio descensus esse nullam. In sequentibus vero inuestigabimus eos motus, qui oriuntur, quando corpora in ipso motus initio iam habent quandam celeritatem. In his autem tempora et spatia ea debent intelligi, quae initium suum habent in ipso celeritatis euanescentis puncto, et aequationes inuentae omnes ita sunt comparatae, vt euanescente c vel v , simul x et t euanescant.

PROPOSITIO 28.

Theorema.

Tab. II. 230. Corporis per AP descendens vt haec-
Fig. 10. nus posuimus, celeritas in P tanta erit, vt ea aequaliter progrediens eodem tempore, quo per AP est delapsus, spatium duplo maius quam AP absoluere possit.

De-

Demonstratio.

Manentibus, quae in praecedentibus posuimus, corpore A, potentia g , spatio descripto x , celeritate in P acquisita \sqrt{v} , et tempore descensus t , erit $t = \frac{1}{1,25} \sqrt{\frac{\Lambda x}{g}}$ (221), et $v = \frac{g x}{\Lambda}$ (204). Hanc ob rem habetur $\frac{g}{\Lambda} = \frac{v}{x}$, ideoque $t = \frac{x}{1,25 \sqrt{v}} = \frac{2x}{2,50 \sqrt{v}}$. At haec expressio dat tempus quoque, quo spatium $2x$ celeritate vniformi \sqrt{v} percurritur, quia $\frac{2x}{\sqrt{v}}$ est diuisum per 250, quem numerum inuenimus ad tempus in minutis sec. exprimendum (220). Consequenter spatium $2x$ eodem tempore celeritate \sqrt{v} percurritur, quo spatium x descensu vniformiter accelerato. Q. E. D.

Corollarium I.

231. Corpus igitur a potentia vniformi sollicitatum descendens tempore t per spatium x tantam acquirit celeritatem, qua aequabiliter progrediens idem spatium x dimidio tempore t percurrere poterit.

Corollarium 2.

232. Quia in superficie terrae corpora tempore minuti secundi per spatium 15625 scrup. pedis Rhenani delabuntur, tanta erit eorum celeritas hoc lapsu acquisita, qua vniformi motu spatium 31250 scrup. minuto secundo, seu 15625 scrup. semi minuto secundo percurrent.

Corollarium 3.

233. Cum celeritas per radices quadratas ex altitudinibus, ex quibus lapsu acquiruntur, exprimere instituerimus, erit celeritas $\sqrt{15625}$ seu 125, tanta, qua minuto secundo spatium 31250 scrup. absolui potest.

Corollarium 4.

234. Facile igitur erit spatium assignare, quod celeritate hoc modo expressa \sqrt{v} minuto sec. percurritur. Fiat enim, quia spatia eodem tempore descripta sunt ut celeritates, ut 125 ad \sqrt{v} ita 31250 scrup. ad $250\sqrt{v}$. Quo facto erit $250\sqrt{v}$ spatium in scrupulis expressum, siquidem altitudo v in talibus exhibeatur, quod celeritate \sqrt{v} minuto secundo absolui potest, motu scilicet aequabili.

Exemplum I.

235. Delapsus sit corpus ex altitudine 1000 ped. erit in scrupulis $v=1000000$, quare ex hoc descensu tantam acquirat celeritatem, qua minuto secundo spatium 250000 scrup. i. e. 250 pedes absoluere possit.

Corollarium 5.

236. Et reciproce si celeritas per spatium, quod ea minuto secundo percurritur, exprimatur ut initio fecimus, reduci hinc ea poterit ad receptum nostrum modum per radices ex debitis altitudinibus. Sit enim spatium illud a scrup. et altitudo huic celeritati debita v scrup. erit $250\sqrt{v}=a$ atque

$$v = \frac{a^2}{62500} \text{ scrup.}$$

Exem-

Exemplum 2.

237. Habeat corpus tantam celeritatem qua minuto secundo spatium 1000 ped. seu 1000000 percurrere potest, erit altitudo huic celeritati debita $\frac{1000000000000}{62500}$ scrup. seu 16000 pedes.

Scholion.

238. Perspicitur igitur, quomodo vtrumque celeritates exprimendi modum inuicem comparari, alterumque ad alterum reduci oporteat. Initio enim celeritates per spatia exprimebamus, quae minuto secundo seu alio dato tempore percurruntur. Postmodum vero celeritates per altitudines debitas exhibere magis congruum visum erat. Nunc vero monstratum, quomodo vterque exprimendi modus ad celeritates mensurandas accommodandus sit.

PROPOSITIO 29.

Problema.

239. *Potentia existente vniformi secundum rectam BP trahente habeat corpus in initio B iam celeritatem datam secundum eandem directionem BP, requiritur eius celeritas in quouis puncto P rectae BP.* Tab. II.
Fig. II.

Solutio.

Sit vt ante potentia g , et corpus A . Celeritas vero, quam habet in initio B ponatur debita altitudini c . Vocetur $BP = x$, et celeritas in P , quam quaerimus, debita sit altitudini v . Erit vt ante (207) ob potentiam constantem g , per elementum $Pp = dx$ sollicitantem $dv = \frac{gdx}{v}$. Integrando igitur

M 3

tur

tur fit $v = \frac{gx}{\Lambda} + \text{Const.}$ quae quantitas constans ex eo est determinanda, quod facto $x=0$, fiat $v=c$ (per hyp.) erit ergo $\text{Const.} = c$. Consequenter habebimus $v = c + \frac{gx}{\Lambda}$, et ipsam celeritatem $\sqrt{v} = \sqrt{c + \frac{gx}{\Lambda}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Ponatur ut fit in casu grauitatis ordinariae $\frac{g}{\Lambda} = 1$, erit $v = c + x$. Altitudo igitur celeritati in P debita est aggregatum altitudinis celeritati initiali in B debitae et spatii percurfi.

Scholion.

241. Alia hic occurrit solutio problematis, possumus enim motum per BP cum celeritate initiali \sqrt{c} in B considerari ut partem motus per lineam AP ex quiete, ut ante posuimus factum, in quo corpus, cum ex A in B peruenerit, habeat celeritatem propositam \sqrt{c} . Sit igitur hoc spatium AB $= k$, erit $c = \frac{gk}{\Lambda}$ (206), et $v = \frac{g(k+x)}{\Lambda} = c + \frac{gx}{\Lambda}$, ut iam est inuentum. Spatium autem AB erit $\frac{\Lambda c}{g}$.

PROPOSITIO 30.

Problema.

242. *Iisdem quibus in praecedente propositione positis, determinare tempus, quo spatium BP percurritur.*

Solutio.

Sit tempus per spatium BP $= t$, erit $dt = \frac{mdx}{\sqrt{c + \frac{gx}{\Lambda}}}$ (218); est enim celeritas, qua elementum Pp percur-

curritur $\sqrt{c + \frac{g^x}{\Lambda}}$ vt in praecedente propositione reperimus. Integrando igitur fiet $t = \frac{2m\Lambda}{g} \sqrt{c + \frac{g^x}{\Lambda}} + \text{Const.}$ Constans haec vero quantitas addenda ex hoc definietur, quod posito $x = 0$, fieri debeat $t = 0$. Prodibit igitur $\text{Const.} = -\frac{2m\Lambda}{g} \sqrt{c}$. Consequenter habetur $t = \frac{2m\Lambda}{g} \sqrt{c + \frac{g^x}{\Lambda}} - \frac{2m\Lambda}{g} \sqrt{c}$. Expressis c et x in scrupulis ped. Rhen. positoque $m = \frac{1}{250}$ (220), proueniet tempus in minutis secundis expressum. Q. E. I.

Corollarium.

243. Quia in nostris terrestribus regionibus est $\frac{g}{\Lambda} = 1$, erit tempus quo spatium BP cum celeritate in B initiali \sqrt{c} absoluitur $= \frac{1}{125} \sqrt{c+x} - \frac{1}{125} \sqrt{c}$ minut. secund. siquidem c et x in scrupulis pedis Rhenani exprimantur.

Scholion.

244. Simili modo aliam huius problematis afferimus solutionem, quo praecedentis in scholio annexo. Posita enim recta $AB = k$, ex qua corpus A delabens in B adipiscitur celeritatem altitudini c debitam, erit tempus, quo hoc spatium AB absoluitur $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{\Lambda k}{g}}$ et tempus, quo spatium AP percurritur erit $\frac{1}{125} \sqrt{\frac{\Lambda(k+x)}{g}}$ (221). Tempus, quo hoc descensu spatium BP absoluitur erit $\frac{1}{125} \sqrt{\frac{\Lambda(k+x)}{g}} - \frac{1}{125} \sqrt{\frac{\Lambda k}{g}}$. Est vero $k = \frac{\Lambda c}{g}$ (241). Consequenter hoc tempus quaesitum per BP fiet $= \frac{\Lambda}{125g} \sqrt{c + \frac{g^x}{\Lambda}} - \frac{1}{125g} \sqrt{c}$, vt ante inuenimus, si quidem ibi loco m ponatur $\frac{1}{250}$. Atque haec sunt, quae de punctorum descensu rectilineo

neo in hypothefi potentiae vniformis exponenda erant. Pergo igitur ad ascenfus rectilineos, in quibus celeritatis directio est directe contraria directioni potentiae, quam etiam nunc vniformem feu constantem ponam.

PROPOSITIO 31.

Problema.

Tab. II.

245. *Potentia vniformi tendente deorfum, habeat*

Fig. 12.

corpus in B celeritatem datam furfus directam; requiritur eius celeritas in quouis puncto spatii BA, quod ascensu percurrit.

Solutio.

Perspiciuum est hoc casu corpus in linea recta esse progressurum motu retardato (191), quia eius directio motus directe est contraria potentiae sollicitantis directioni. Sit itaque celeritas in B debita altitudini c , et ponatur corpus iam peruenisse in P. Vocetur altitudo, cui celeritas hoc loco debetur, v , spatiumque ipsum iam percursum BP, x . Capiatur $Pp = dx$, erit in p altitudo celeritati debita $v + dv$. Quia autem potentia, quam pono $= g$, motui est contraria; tota in diminuendo motu consumitur. Quam ob rem dv aequale poni oportet ipsi $\frac{-gdx}{A}$ denotante A corporis massam. Cum itaque sit $-dv = \frac{gdx}{A}$; erit integrando $C - v = \frac{gx}{A}$. Ad constantem C definiendam ponatur $x = 0$, quo casu v in c transmutari debet; eritque ideo $C = c$. Ex quo prodibit ista aequatio $c - v = \frac{gx}{A}$ seu $v = c - \frac{gx}{A}$, quae determinat

ce-

celeritatem corporis in quouis puncto spatii ascensu descripti. Q. E. I.

Corollarium I.

246. Celeritas igitur corporis evanescet, quando fit $c = \frac{gx}{A}$, i. e. quando pervenit ad altitudinem $x = \frac{Ac}{g}$. Sit BA ista altitudo ideoque aequalis $\frac{Ac}{g}$, inde $c = \frac{BA \cdot g}{A}$, ex quo intelligitur BA eam ipsam esse altitudinem, ex qua corpus A a potentia g sollicitatum descendendo acquirit celeritatem c (206). Corpus igitur ea celeritate, quam ex data altitudine delapsus est adeptus, sursum progrediens ad eam ipsam pertinet altitudinem, antequam motum suum amittit.

Corollarium 2.

247. Praeterea corpus ascendens per spatium BA in singulis punctis eas ipsas habet celeritates quas ibidem haberet, si ex A descendisset. Posita enim $AP = y$, erit celeritas in P descensu ex A nata $= \sqrt{\frac{gy}{A}}$; at est celeritas in eodem loco P ascensu ex B relicta $\sqrt{c - \frac{gx}{A}}$. Quia autem est $x + y = BA = \frac{Ac}{g}$, patet has expressiones celeritatum esse aequales nempe $\frac{gy}{A} = c - \frac{gx}{A}$.

Corollarium 3.

248. Congruit igitur motus corporis ascendentis cum motu descendente, atque vtriusque celeritates in iisdem locis, i. e. in iisdem a puncto supremo, quo celeritas evanescit, distantis, erunt aequales.

Corollarium 4.

249. Ex his perspicitur, tempus quoque ascensus per spatium BA aequale esse tempori descensus per idem spatium; Quare cum dicto $BA = a$, tempus descensus sit $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{\Lambda a}{g}}$ min. sec. (221); eidem valori aequale esse debet tempus ascensus per BA; seu posito loco a eius valore $\frac{\Lambda c}{g}$, erit tempus integri ascensus $= \frac{\Lambda}{125g} \sqrt{c}$.

Corollarium 5.

250. Simili modo tempus ascensus per quamvis portionem BP definietur, manente enim $AP = y$ erit tempus siue ascensus siue descensus per AP $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{\Lambda y}{g}}$, quod ablatum ab integro tempore ascensus $\frac{\Lambda}{125} \sqrt{c}$ relinquet tempus per portionem BP. Est vero $y = \frac{\Lambda c}{g} - x$, quare tempus ascensus per BP habebitur $= \frac{\Lambda}{125g} \sqrt{c} - \frac{\Lambda}{125g} \sqrt{c - \frac{g x}{\Lambda}}$.

Scholion I.

251. Evidenter vero haec aequalitas ascensuum a priori ostendi potest ex ipsa potentiarum actione. Cum enim in ascensu potentia tantum de celeritate auferat, quantum in descensu ad eam addit, perspicuum est perfectam aequalitatem inter utrumque motum versari debere, neque aliud esse discrimen, nisi temporis ordinem, qui cogitatione duntaxat inuersus alterum casum in alterum transformatur. Similis vero est ratio etiam omnium motuum a potentiis absolutis productorum: iisdem enim celeritatibus per eandem viam reuerti poterit

COR-

corpus, si quidem in reditu impressiones easdem, quas in itu, sed contrarias patitur. Sic planetae in pugnas contrarias circa solem eodem modo, quo nunc, in ellipsis mouerentur, si initio motus ipsis fuisset his contrarii. Nam per idem spatii elementum effectus potentiae ad celeritatem immutandam idem est semper, atque fit ratione corporis negatius, quando reuertitur. Effectus autem, qui ad directionem corporis immutandam impenditur, utroque casu manet, quo fit ut corpus in itu et reditu eandem percurrat semitam. Sed haec infra clarius patebunt, ubi de huius modi motibus ex instituto agetur. At vero, si adest resistentia, haec inter ascensus et descensus similitudo euanescit: nam in utroque casu resistentia motum corporis minuit, neque effectus eius in altero alterius est oppositus, quemadmodum vsu venit, si potentia sollicitans est absoluta.

Scholion 2.

252. Satis igitur exposito motu rectilineo, qui a potentiis vniformibus oritur, pergendum est ad potentias difformes, quae aliis in locis alias exercent in corpora vires, atque exponendum, quomodo motus corporum, quatenus fiunt in linea recta, ab iis varientur. Huiusmodi enim difformitati omnes potentiae, quas in mundo obseruamus, sunt obnoxiae, neque vlla potentia potest assignari, quae corpus, in quocunque loco sit positum, aequaliter afficiat. Sic planetae, quo soli sunt propiores, ve-

hementius ad solem attrahuntur, et quo magis etiam corpus a superficie terrae remouetur, minor in eo fit grauitas seu nisus deorsum. Simili haec fere accidunt modo, quo magnetem obseruamus idem ferri frustum in minore distantia fortius, in maiore vero debilius attrahere. Quamcunque igitur potentiae distantiarum seu positionum corporis teneant rationem, leges eruemus, secundum quas motus corporis sollicitati immutatur. Et primo quidem potentias potestati cuidam distantiarum corporis a puncto fixo proportionales contemplantur.

DEFINITIO 16.

253. Centrum virium vocatur punctum illud fixum, ad quod corpora attrahuntur vi, quae pendet a distantia ab hoc puncto, seu quae est vt functio distantiae quaecunque.

Corollarium 1.

254. Datur igitur distantia ab hoc centro virium, in qua corpus positum tanta vi ad centrum trahitur quanta foret vis eius grauitatis, si in superficie terrae versaretur.

Corollarium 2.

255. Cognita ergo hac distantia, et lege attractionis scilicet functione distantiae, cui attractio est proportionalis; innotescet ratio, quem habet corporis vbicunque positi conatus accedendi ad centrum virium, ad eiusdem corporis vim grauitatis, si esset in terrae superficie.

Corollarium 3.

256. Cum itaque hoc modo vires vtcunque variables cum vi grauitatis comparare liceat, quia huius in corpora effectus est cognitus; cuiuscunque etiam vis in corpora effectus poterit determinari.

Scholion I.

257. Pono hic attractionem centrorum virium similem vi grauitatis, ita vt quoque diuersorum corporum in eadem distantia positorum conatus ad centrum sint vt massae ipsorum, ideoque vires acceleratrices omnium aequales (212). In his igitur pertractandis massam corporis moti non opus est in computum vocare, sed vim acceleratricem duntaxat, quae conatui accedendi ad centrum diuiso per massam est proportionalis. Comparabitur ea autem cum vi grauitatis acceleratrice, quam ponimus $= 1$, atque ad hanc vnitatem reuocabimus omnes vires potentiarum acceleratrices, quippe quantitates homogeneas.

Corollarium 4.

258. Quando itaque dicemus vires esse distantis a centro virium seu cuidam functioni earum proportionales, id non de solis nisibus, quos corpora habent ad centrum, sed de viribus acceleratricibus, i. e. de nisibus ad massas corporum applicatis intelligi debet.

Corollarium 5.

259. Quoniam igitur potentiae directio, qua corpus vrgetur, semper tendit ad centrum virium;

N 3.

per-

spicuum est, si corpus vel quiescit, vel motum habet, cuius directio per centrum virium transit, tum corpus in hac linea recta per centrum virium transeunte perpetuo moueri debere. (189).

DEFINITIO 17.

260. Potentia, quae corpora ad huiusmodi virium centrum vrget, vocatur vis centripeta. Haecque, si fit negatiua, vt corpora ab hoc centro repellat, vocatur vis centrifuga.

Corollarium 1.

261. Cum hic de motu sit quaestio, vis centripeta nobis erit vis acceleratrix seu conatus corporis ad centrum tendentis diuisus per corporis massam.

Corollarium 2.

262. Conatus igitur seu nisus, quem habet corpus ad centrum virium, exprimitur vi centripeta in corporis massam ducta. Quamobrem erit ad pondus eiusdem corporis, si in superficie terrae esset positum, vt vis centripeta seu vis acceleratrix ad vnitatem. (257.)

Scholion.

263. *Newtonus*, qui voce vis centripetae potissimum vtitur, triplici modo eandem mensurari posse animaduertit. Primo quantitate eius absoluta, qua efficaciam ipsius centri virium metitur, sine respectu habito ad corpora attracta; sic dicit in maiore magnete maiorem inesse vis centripetae quantita-

tem

tem absolutam, in minore minorem. Et simili modo secundum eius theoriam in sole quantitas absoluta maior est quam in terra. Haec comparatio autem intelligenda est de centrīs viriū similiter i. e. secundum eandem distantiae functionem attrahentibus, in dissimilibus enim huiusmodi comparatio locum non habet. Haec ergo quantitas absoluta mensuranda est ex conatu, quem datum corpus in data distantia habet versus viriū centrum. Loco huius autem considerationis hic adhibeo distantiam in qua corpus positum vi aequali ponderi eius nititur ad centrum (254). Secundo habet vis centripetae quantitatem accelerantem, quae apud ipsum eodem accipitur sensu, quo hic ipsa vis centripeta (261), mensuratur enim conatu ad massam applicato. Tercio inducit vis centripetae quantitatem motricem (qua nihil aliud denotat nisi ipsum conatum, quem corpora habent ad centrum viriū accedendi; quantitas motus enim, quam mensurare soliti sunt celeritate ducta in massam, quaeque dato tempore generatur, proportionalis est ipsi conatui. Posito namque conatu hoc p , massa A , est celeritatis incrementum dato tempusculo vt. $\frac{p}{A}$ (154), quod ductum in massam A dat incrementum quantitatis motus, quod itaque ipsi p erit proportionale.

PROPOSITIO 32.

Problema.

264. *Sit centrum viriū C , quod attrahat* Tab. II.
ad se in ratione quacunque multiplicata distantiarum; ad Fig. 13.
hoc-

hocque trahatur corpus in A quiescens: quaeritur eius celeritas in quouis puncto spatii AC.

Solutio.

Sit $AC = a$; $AP = x$; et celeritas quam in P habebit sit debita altitudini v . Fiat attractio in ratione n multiplicata distantiarum, et designet f eam distantiam a C, in qua corporis conatus ad C aequalis est ponderi corporis, si esset in terrae superficie positum. Vis igitur acceleratrix, qua corpus in P vrgetur ad C erit ad vim grauitatis, quam pono $= 1$, vt CP^n i. e. vt $(a-x)^n$ ad f^n ; quamobrem ea exprimetur per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$. Sumto ergo $Pp = dx$, erit $dv = \frac{(a-x)^n dx}{f^n}$. Est enim dv aequale dx multiplicato per vim acceleratricem (213). Integrata hac aequatione prodibit $v = C - \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ad constantem C definiendam ponatur $x = 0$, quo casu fieri debet per hypothesin $v = 0$, fiet ergo $C = \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Habebitur ergo $v = \frac{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Seu posito $a-x = y$; erit $v = \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua aequatione celeritas corporis in quouis loco spatii AC cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium I.

265. Si $n+1$ est numerus positius, euanescet y^{n+1} facto $y = 0$. Hoc igitur casu altitudo celerita-

ritati, quam corpus in C perueniens habebit debita erit $= \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. At si $n+1$ est numerus negativus, fiet y^{n+1} , facto $y=0$, infinite magnum: hoc ergo casu corporis in C peruenientis celeritas erit infinite magna.

Corollarium 2.

266. Sed si est $n+1=0$ seu $n=-1$, ex inuenta aequatione valor ipsius v non cognoscitur ob numeratorem et denominatorem euanescentes. Quamobrem hunc casum ex ipsa aequatione differentiali oportebit repetere. Erit autem $dv = \frac{f dx}{a-x}$, cuius integralis est $v = C - fl(a-x)$. Debet autem esse $C = fla$, quocirca prodibit $v = fl \frac{a}{a-x} = fl \frac{a}{y}$. Qui est verus valor ipsius v quando habetur $n = -1$, i. e. quando vis centripeta est reciproce vt distantia a centro virium.

Corollarium 3.

267. Hoc igitur casu, quo $n = -1$, cum corpus peruenerit in centrum C, celeritas eius erit infinite magna; fit enim $v = fl \infty$. Qui infinitorum gradus est infimus et quasi proximus finito; quantumuis enim parum $n+1$ cyphram excedat, subito celeritas in C fit finita.

Corollarium 4.

268. Cum autem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus, quia tum altitudo celeritatis in c debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, erunt ipsae celeritates plurium corporum

O

ad

ad centrum C delabentium, quas in C habebunt, ut $a^{\frac{n+1}{2}}$ i. e. in ratione $\frac{n+1}{2}$ plicata distantiarum ex quibus lapsum inchoauerunt.

Scholion I.

269. Postquam autem corpus ex A in C peruenit, quo tum promoueatur, non tam facile potest definiri. Videtur quidem, si in expressione inuenta y ponatur negatiuum, proditura esse altitudo celeritati in Q debita, quae si est affirmatiua, corpus reuera in Q perueniet; sin vero sit negatiua, indicio hoc est corpus nunquam ultra C in plagam CQ esse peruenturum. Verum hic motum prosequendi modus non semper adhiberi potest; saepe enim ipsi hypothesi, qua ponitur vis attractiua cis et ultra C versus centrum eadem, est contrarius. Namque corpus in P existens, quia trahitur deorsum, cum in Q peruenerit, sursum urgetur aequali vi, si est $CQ = CP$. Hanc ob rem vis, qua corpus in Q sollicitatur, sit negatiua ratione prioris, atque idcirco quantitate negatiua est exprimenda. Vis igitur in P per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$ seu $\frac{y^n}{f^n}$ expressa sui fieri debet negatiua, cum $-y$ ponitur loco y , id quod nunquam euenit, nisi sit n vel numerus impar vel fractio, cuius numerator et denominator sunt numeri impares. His igitur in casibus prodibit verus valor ipsius v , cum corpus in Q peruenerit; in reliquis semper; quia in calculo vis sollicitans corpus in Q cum vero eius valore non congruit, veritati non consentanea

lit-

litterae v quantitas elicitur. Si enim est n numerus par vis attrahens in Q factio n negatiua aequalis erit vi in P et tendet in eandem plagam deorsum scilicet; Ex quo fit, vt corpus transgressum centrum C in recta CQ in infinitum deberet descendere, id quod etiam calculus declarat. Quod cum pugnet cum hypothesi perspicuum est his casibus motum corporis, postquam in C peruenit, ex inuenta formula definiri non posse. Absurdum autem magis elucet quando est $n = \frac{1}{2}$ vel alia huiusmodi fractio, quae y^n transmutat in quantitatem imaginariam, posito $-y$ loco y ; id quod indicaret corpus ultra C progressum non solum non ad C attrahi, sed vim attrahentem etiam fieri imaginariam, quod quid sit nequidem intelligi potest.

Corollarium 5.

270. Si igitur n est numerus impar, valor ipsius v , qui est $\frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)y^n}$ non mutatur posito $-y$ loco $+y$, quia $n+1$ exponens ipsius y euadit numerus par. Ex quo apparet celeritatem corporis in Q aequalem fore ei, quam habet in P , si quidem est $CQ = CP$. Pari ergo modo corpus in directione CQ recedit, qua ante per AC accesserat; pertingetque in B vsque, ita vt sit $AB = AC$, vbi celeritatem suam perdet omnem. Reuertetur itaque simili modo ad C , et tum rursus in A perueniet. Quos motus reciprocos, nisi adest resistentia, perpetuo perficiet.

Corollarium 6.

271. Excipiendus est tamen casus, quo $n = -1$, quanquam -1 est numerus impar. Facto enim y negatiuo fit $v = fl \frac{-a}{y}$, quae est quantitas imaginaria. Ex quo perspicitur corpus nunquam ultra C esse transgressurum. Aliud ergo iudicium ferendum esse videtur, quando n est numerus negatiuus, etiamsi impar. Huiusmodi enim simile exemplum infra occurret si $n = -3$. (335).

Scholion 2.

272. Hoc quidem veritati minus videtur consentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate sua infinite magna, quam in C acquisiuit, in aliam potius plagam, quam in CB, sit progressurum; praesertim cum huius celeritatis infinitae directio sit secundum hanc plagam. Quicquid autem sit hic calculo potius, quam nostro iudicio est fidendum, atque statuendum, nos saltum, si fit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere. Eo autem magis in hac sententia confirmamur simili exemplo, quod infra plene explanatum occurret, (655) si est $n = -2$; hoc enim casu corporis in C peruenientis celeritas quoque est infinita, et secundum CB directa, nihilo vero minus corpus non ultra C progreditur, sed subito ex C versus A reuertitur pariter ac accesserat. Ex quo perspicitur, quoties celeritas in C existat infinita, iudicium de vteriori corporis motu esse suspendendum. Tam diu autem hoc tantum fiat, quoad ad motus curvili-

lineos perueniamus; ex iisque enim qui sint rectilinei, euidentius colligetur (762). Neque enim calculus, qui tum instituetur, obnoxius est huic incommodo, vt a hypothefi diffentiat; sed quaquaversus vis centripeta aequalis ponetur non refragante calculo.

Scholion 3.

273. Semper autem, quando celeritas in C non est infinite magna, id quod accidit, quoties est $n+1$ numerus affirmatiuus, motum corporis integrum iudicio nostro poterimus cognoscere, etiam si calculus sit insufficiens. Si enim celeritas in C est finita, habensque directionem secundum CB, quam necessario habere debet; fieri non potest, vt non in CB motum continuet. Simili autem modo hunc motum continuans a C recedet, quo ante in AC accesserat, atque in puncto quocunque Q eandem habebit celeritatem, quam ante in P puncto aequae distito a C habebat; sicut ex (251) intelligi potest. Perpetuo igitur motus reciprocos ex A in B et vicissim rediens corpus perficiet.

PROPOSITIO 33.

Problema.

274. Centro C attrabente in ratione quacunque multiplicata distantiarum, habeat corpus in D iam celeritatem datam; Requiritur punctum A in recta CD producta, ex quo corpus descensum ad C inchoans cum in D peruenerit, hanc ipsam acquirat celeritatem.

Tab. II.

Fig. 14.

Solutio.

Denotante vt supra n exponentem rationis multiplicatae in qua fit vis centripeta, et f distantiam in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis; fit $CD = b$, celeritas in D debita altitudini b , et quaesita distantia CA ponatur $= q$. Cum igitur hic q idem denotet quod supra a , et b idem quod y , et h idem quod ibi v , habebitur ista aequatio $b = \frac{q^{n+1} - h^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua fit $q^{n+1} = b^{n+1} + (n+1)bf^n$, atque $q = \frac{b^{n+1} + (n+1)bf^n}{n+1}$. Particulari autem casu quo $n = -1$ habebitur $b = fl \frac{q}{b}$, hincque $q = e^b f b$, vbi e est numerus cuius logarithmus est vnitas. Q. E. I.

Corollarium I.

275. Si vis centripeta est directe vt distantia fit $n = 1$, eritque $q = \sqrt{b^2 + 2fb}$. Quae quantitas semper est finita, si modo b , f et b sunt tales. Simile euenit semper dummodo $n+1$ est numerus affirmatiuus. Atque etiam in casu $n = -1$, distantia q nunquam fit infinita.

Corollarium 2.

276. Sit autem $n+1$ numerus negatiuus puta $-m$, vt fit $n = -m-1$, erit $q = b \sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1} - m.b^m b}}$ quae altitudo toties est infinita, quoties est $b = \frac{f^{m+1}}{m.b^m}$, et, si b est quantitas adhuc maior, fit q ne-

gatiua, seu potius infinito maior, vel etiam imaginaria. Ex quo intelligitur his casibus, ne ex infinita quidem distantia corpus delapsum tantam in D acquirere posse celeritatem.

Corollarium 3.

277. Manente $n+1$ numero negatiuo $-m$, et distante puncto A in infinitum; erit $b = \frac{f^{m+1}}{mb^m}$.

Atque distantia a centro C, in qua corpus, ex spatio infinito delapsum, celeritatem habet \sqrt{b} , erit $= f \sqrt[3]{\frac{f}{mb}}$.

Corollarium 4.

278. Si vis centripeta reciproce proportionalis est distantiarum quadratis, erit $m=1$. Quapropter fit $q = \frac{bf^2}{f^2 - bb}$. Quando ergo est $b = \frac{f^2}{b}$, distantia AC i. e. q fit infinite magna.

Corollarium 5.

279. Si hoc problema cum praecedente coniungatur, facile determinabitur motus corporis, quod ex D descensum ad C inchoat celeritate \sqrt{b} ; Ex praecedente enim innotescit descensus corporis ex A factus, cuius cum sit descensus ex D celeritate \sqrt{b} inceptus pars, vocetur $CP=y$, et celeritas quam corpus in P habet, debita sit altitudini v , erit

$$v = \frac{q^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n} \quad (266). \quad \text{Est autem } q^{n+1} = b^{n+1} + \dots$$

(n+1)

$$(n+1)bf^n. \text{ Vnde fit } v = \frac{b^{n+1} + (n+1)bf^n - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$$

$$= \frac{b^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n} + b.$$

Corollarium 6.

280. Expressio haec ipsius v , quando descensus ex D incipitur celeritate altitudini b debita, non differt ab ea, quae prodit, si descensus ex quiete fieret, nisi hoc, quod fit hac ipsa quantitate b vbique maior.

Scholion.

Tab. II.
Fig. 13.

281. Quod ad tempora attinet quibus in quavis hypothese vis centripetae spatium AC eiusque partes absoluuntur, ea facile ex cognitis celeritatibus cognoscentur. Pro generali quidem valore litterae n tempus non potest in terminis finitis exhiberi, quippe tempus per AP inuenitur $= \int \frac{dx \sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}}$

quae quantitas vniuersaliter neque integrari neque ad cognitarum curuarum quadraturas potest reduci. Attamen in variis ipsius n casibus satis concinne exprimi potest, quamobrem missis generalibus praecipuos casus speciales sequentibus propositionibus sumus complexuri.

PROPOSITIO 34.

Problema.

Tab. II.
Fig. 15.

282. Si fuerit vis centripeta distantis a centro C proportionalis, et corpus ex A in C vsque delabatur;

tur; determinari oporteat tempus, quo corpus quamque huius spatii partem absoluat.

Solutio.

Positis $AC = a$, et distantia à centro C in qua vis centripeta aequalis est vi gravitatis $= f$, sit spatii quaevis portio $CP = y$, et celeritas in P debita altitudini v . Erit ergo tempus, quo spatium CP absolvitur $\int \frac{dy}{v}$, negligo hic fractionem $\frac{1}{250}$, quia haec tempori in minutis secundis cognoscendo inferuit, et cum libuerit, potest adiungi. Est vero ex prop.

32 facto $n = 1$, $v = \frac{a^2 - y^2}{2f}$, ergo $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{(a^2 - y^2)}}{\sqrt{2f}}$. Ex quo fit tempus per $PC = \int \frac{dy \sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = \frac{\sqrt{2f}}{a} \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$. Super

AC construatur circuli quadrans AME , in eoque ducantur applicatae CE , PM . Quo factò erit, ut constat, arcus $EM = \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$. Quamobrem tempus

per PC fiet $= \frac{EM \cdot \sqrt{2f}}{a}$. Tempus igitur totius descensus per AC erit $= \frac{AME \cdot \sqrt{2f}}{a}$. Hinc erit tempus descensus per $AP = \frac{AM \cdot \sqrt{2f}}{a}$. Ex his igitur tempus descensus per quamvis spatii percursum portionem innotescit, idque in minutis secundis, si hae expressiones per 250 diuidantur, et longitudo f in partibus millesimis pedis Rhenani exhibeatur. Q. E. I.

Corollarium I.

283. Denotet $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $2AME:a = \pi:1$, et $\frac{AME}{a} = \frac{\pi}{2}$. Hanc ob rem erit tempus descensus per $AC = \frac{\pi}{2} \sqrt{2f}$.

P

Id

Id quod non pendet ab altitudine lapsu percurfa a , sed quantacunque haec fit, eundem valorem retinet. Omnia igitur corpora, quae ad hoc centrum delabuntur aequalibus temporibus eo peruenient.

Scholion.

284. Sequitur haec temporum aequalitas ex ipsa celeritatis expressione $\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{2f}}$ in qua a et y vnam dimensionem habere censenda sunt. Quoties enim hoc euenit tempora, quibus quaecunque spatia a percurruntur, debent inter se esse aequalia. (46.)

Corollarium 2.

285. Si praeterea aliud sit huiusmodi centrum virium, sed diuersa praeditum efficacia, ita vt distantia, in qua centripeta vis aequalis est grauitati, sit F , erunt tempora descensum ad vtrumque centrum inter se vt \sqrt{f} ad \sqrt{F} . Sed efficaciae ipsae hoc casu tenent inuersam rationem distantiarum $f:F$, sunt enim vt vires, quas haec centra exercent in aequalibus distantis. Quapropter tempora descensum ad diuersa huiusmodi virium centra sunt in ratione reciproca subduplicata efficaciarum. Quae quidem ratio in omnibus similibus centrīs virium locum tenet; si spatia percurfa sunt inter se aequalia, vt in sequenti docebitur.

PROPOSITIO 35.

Problema.

286. *Si fuerit vis centripeta quadratis distantiarum a centro C reciproce proportionalis, et*
cor-

Tab. III.

Fig. 1.

corpus ex A in C usque delabatur: inueniendum est tempus, quo corpus quamuis huius spatii AC portionem percurrat.

Solutio.

Manente $AC = a$, et distantia in qua vis centripeta grauitati aequalis est f ; sit $CP = y$, et celeritas in P debita altitudini v . Erit ergo ob $n = -2$, ex prop. 32, $v = f^2 \left(\frac{a-y}{ay} \right)$ et $Vv = fV \frac{a-y}{ay}$. Elementum igitur temporis $\frac{dy}{v}$ fit $\frac{dy \sqrt{ay}}{f \sqrt{(a-y)}} = \frac{\sqrt{a}}{f} \cdot \frac{y dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$.

Consequenter tempus per PC est $\frac{\sqrt{a}}{f} \int \frac{y dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Est

vero $\int \frac{y dy}{\sqrt{(ay-y^2)}} = -\sqrt{(ay-y^2)} + \int \frac{\frac{1}{2} a dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Quare de-

scripto super AC semicirculo AMC ductaque ordinata PM erit $CM = \int \frac{\frac{1}{2} a dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$ et $PM = \sqrt{(ay-y^2)}$.

Propterea prodibit tempus per $CP = \frac{\sqrt{a}}{f} (CM - PM)$, atque ex hoc tempus totius descensus per $AC = \frac{AMC \cdot \sqrt{a}}{f}$. Tempus ergo, quo portio AP absoluitur, est $\frac{\sqrt{a}}{f} (AM + PM)$. Q. E. I.

Corollarium I.

287. Denotante igitur $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $AMC = \frac{1}{2} a \pi$. Ideoque erit tempus descensus per $AC = \frac{\pi a \sqrt{a}}{2f}$. Ex quo intelligitur plurium corporum ad C delabentium tempora descensuum esse in sesquuplicata ratione distantiarum.

Corollarium 2.

288. Atque ad diuersa huiusmodi centra virium corpora accedent temporibus, quae sint in ratione composita ex directa sesquuplicata distantiarum et inuersa subduplicata efficaciarum. Est enim efficacia directe vt distantiae f quadratum.

Scholion.

289. Si sit vis centripeta reciproce vt cubus distantiae, prodit $n = -3$ et $v = \frac{f^3}{2} \left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 y^2} \right)$. Est igitur $Vv = \frac{f}{ay} \sqrt{f \frac{a^2 - y^2}{2}}$, et tempus per CP $= \frac{ay^2}{f\sqrt{f}} \int \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{ay^2}{f\sqrt{f}} (a - \sqrt{a^2 - y^2})$. In circuli autem quadrante est $PM = \sqrt{a^2 - y^2}$; tempus ergo, quo CP absoluitur et $= \frac{ay^2}{f\sqrt{f}} (AC - PM)$, et tempus, quo totum spatium AC percurritur est $\frac{ay^2}{f\sqrt{f}} AC$ seu $\frac{a^2 y^2}{f\sqrt{f}}$. Consequenter tempus, quo portio AP percurritur erit $= \frac{AC \cdot PM \sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. In hoc igitur casu tempus algebraice potest exhiberi, id quod etiam fit in hisce casibus quibus n est terminus huius seriei $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{11}{2}$, etc. Quae autem sint ipsa tempora saltem integra descensuum per AC sumus inuestigaturi.

PROPOSITIO 36.

Problema.

290. Determinare tempus descensus per AC ad centrum virium C, si vis centripeta proportionalis

lis est reciproce huic distantiarum dignitati cuius exponens est $\frac{2m+1}{2m-1}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum.

Solutio.

Retinentibus a, f, y et v eosdem, quos supra, valores erit $n = \frac{2m-1}{2m-1}$. Quo circa fit $v =$

$$\frac{2m-1}{2} \int \frac{2m+1}{2m-1} \left(\frac{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}{a^{\frac{2}{2m-1}} y^{\frac{2}{2m-1}}} \right), \text{ adeoque } \int \frac{dy}{\sqrt{v}} =$$

$$V \frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1) f^{\frac{2m+1}{2m-1}}} \int \frac{y^{\frac{1}{2m-1}} dy}{V(a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}})}, \text{ quod inte-}$$

grale ita debet accipi, vt euanescat posito $y=0$. Quo facto si ponatur $y=a$, prodibit tempus totius descensus per AC quaesitum. Ponatur $y^{\frac{2}{2m-1}}=z$,

et $a^{\frac{2}{2m-1}}=b$, erit $y^{\frac{1}{2m-1}}=\sqrt{z}$ et $dy = \frac{2m-1}{2} z^{\frac{2m-3}{2}} dz$,

quibus substitutis fiet $\int \frac{dy}{\sqrt{v}} = V \frac{(2m-1)a^{\frac{2m-1}{2}}}{2 f^{\frac{2m+1}{2m-1}}} \int \frac{z^{m-1} dz}{V(b-z)}$.

Ad $\int \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}}$, inueniendum pono $b-z=u^2$, erit $z=b-u^2$ et $dz=-2udu$, ideoque $\frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}} = -2 du (b-u^2)^{m-1} = -2 du (b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1} b^{m-2} u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} b^{m-3} u^4 - \text{etc.})$ cuius integrale est $C - 2u(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1 \cdot 3} b^{m-2} u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 5} b^{m-3} u^4 - \text{etc.})$, quae quantitas

titas cum debeat euanescere facto y seu $z=0$, i. e. $u^2=b$, erit $C=2b^{m-\frac{1}{2}}(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\text{etc.})$ Quia autem integrum tempus prouenit facto $y=a$ seu $z=b$, i. e. $u=0$, remanebit pro integrali ipsius $\frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{(b-z)}}$ sola quantitas C , quae loco $b^{m-\frac{1}{2}}$ restituito a est $=2a(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+\text{etc.})$. Totum ergo descensus tempus per AC aequabitur facto ex $\frac{a^{2m-1}}{f^{\frac{2m-1}{2}}}\sqrt{2(2m-1)f}$ in hanc seriem $1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+\text{etc.}$ quae toties abrumpitur, quoties m est numerus integer affirmatiuus. His igitur in casibus tempus algebraice potest exhiberi. Q. E. I.

Corollarium I.

291. Sit $m=1$, quo casu est $n=-3$, erit series $=1$; tempus ergo descensus per AC prodibit $=\frac{a^2}{f^2}\sqrt{2f}=\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ vt supra (289) est inuentum.

Corollarium 2.

292. Si sit $m=2$, quo casu fit $n=-\frac{5}{3}$, erit seriei valor $=\frac{2}{3}$, atque tempus totius descensus $=\frac{2}{3}$.

$\frac{a^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{4}{3}}}\sqrt{6f}$. Sin est $m=3$, erit $n=-\frac{7}{5}$, et series $=\frac{2.4}{3.5}$

tem-

tempusque $\frac{2.4.a^{\frac{6}{5}}}{3.5.f^{\frac{6}{5}}}\sqrt{10}f$. Simili modo si est $m=4$,

fit $n=\frac{9}{7}$, atque tempus prodibit $=\frac{2.4.6.a^{\frac{8}{7}}}{3.5.7.f^{\frac{8}{7}}}\sqrt{14}f$.

Corollarium 3.

293. Colligitur ex his seriei valor generalis $\frac{2.4.6.\dots(2m-2)}{3.5.7.\dots(2m-1)}$. Generatim igitur tempus

descensus erit $=\frac{2.4.6.\dots(2m-2).a^{\frac{2m}{2m-1}}}{3.5.7.\dots(2m-1).f^{\frac{2m-1}{2m}}}\sqrt{2(2m-1)}f$. Si quidem est $n=\frac{2m-1}{2m-1}$ seu $m=\frac{n-1}{2n+2}$.

Corollarium 4.

294. Successiue ergo loco m positis valoribus 1, 2, 3, 4, etc. seriei valores sequentem constituent progressionem 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{2.4}{3.5}$, $\frac{2.4.6}{3.5.7}$, etc. in qua concessa circuli quadratura, termini intermedii possunt exhiberi. Si enim est $m=\frac{1}{2}$ terminus respondens inuenitur $\frac{\pi}{2}$ denotante 1:π rationem diametri ad peripheriam; si $m=\frac{3}{2}$, erit respondens terminus $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, et ita porro si m denotet $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ etc. prouenient hi termini $\frac{1.3.\pi}{2.4.2}$, $\frac{1.3.5.\pi}{2.4.6.2}$, $\frac{1.3.5.7.\pi}{2.4.6.8.2}$, etc.

Corollarium 5.

295. Innotescit ergo etiam in his casibus tempus descensus per AC. Nam si est $m=\frac{1}{2}$ fit $n=-\infty$, quo casu tempus semper est infinite paruum.

Sit

Sit ergo $m = \frac{3}{2}$, fiet $n = -2$, et tempus descensus

$$= \frac{1 \cdot \pi \cdot a^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 2 \cdot f^{\frac{2}{3}}} \sqrt[3]{4f} = \frac{\pi \cdot a \sqrt{a}}{2 \cdot f}$$

prorsus ut iam inuenimus

(287). Sit $m = \frac{5}{2}$, erit $n = -\frac{3}{2}$ et tempus descensus

$$= \frac{1 \cdot 3 \pi a^{\frac{5}{4}}}{2 \cdot 4 \cdot f^{\frac{5}{4}}} \sqrt[4]{2f}. \text{ Atque si } m = \frac{7}{2}, \text{ fit } n = -\frac{4}{3} \text{ et tem-}$$

$$\text{pus descensus} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \pi a^{\frac{7}{6}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot f^{\frac{7}{6}}} \sqrt[6]{3f}.$$

Corollarium 6.

296. Generaliter igitur si fuerit $m = \frac{2k+1}{2}$, quo casu fit $n = -\frac{k-1}{k}$, erit tempus descensus =

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \pi a^{\frac{2k+1}{2k}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot f^{\frac{2k+1}{2k}}} \sqrt[k]{kf}.$$

PROPOSITIO 37.

Problema.

297. Determinare tempus descensus per AC ad virium centrum C, si vis centripeta proportionalis est reciproce huic distantiarum dignitati, cuius exponens est $\frac{m-1}{m}$, denotante m numerum quemcunque integrum affirmatiuum.

Solutio.

Est itaque $n = \frac{1-m}{m}$, et propterea $v = \frac{a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m} f^{\frac{1-m}{m}}}$

$= m f^{\frac{m-1}{m}} (a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}})$. Elementum igitur temporis, quod est $\frac{dy}{v}$, erit $= dy : V m f^{\frac{m-1}{m}} (a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}})$, et tempus ipsum per PC $= \frac{1}{V m f^{\frac{m-1}{m}}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}}}}$. Ponatur $a^{\frac{1}{m}} = b$

et $y^{\frac{1}{m}} = z$; erit $dy = m z^{m-1} dz$, fit igitur tempus per PC $= V m f^{\frac{1-m}{m}} \int \frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{b-z}}$. At integrale ipsius $\frac{z^{m-1} dz}{\sqrt{b-z}}$ eodem modo, quo in praecedente prop. sumtum, est

$2b^{\frac{2m-1}{2}} \left(1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} + \text{etc.} \right)$.

Quamobrem integrum tempus descensus per AC posito $a^{\frac{2m-1}{2m}}$ loco $b^{\frac{2m-1}{2}}$ erit $= 2V m a^{\frac{2m-1}{m}} f^{\frac{1-m}{m}}$ ducto in hanc seriem $1 - \frac{(m-1)}{1.3} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7} + \text{etc.}$ Quoties igitur m est numerus integer affirmatiuus, toties series abrumpitur, ita vt tempus quaesitum algebraice exprimatur. Q. E. I.

Corollarium I.

298. Sit $m = 1$, quo casu fit $n = 0$, et vis centripeta propterea vniformis ac grauitati aequalis; Series ergo erit $= 1$, et tempus descensus per AC $= 2V a$ omnino vt iam §. 219 est inuentum modo neglecta littera m .

Q

Co-

Corollarium 2.

299. Sit $m=2$, vt sit $n=-\frac{1}{2}$; erit tempus totius descensus $=\frac{2}{3} \cdot 2a^{\frac{3}{4}} f^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2}$. Sit $m=3$, erit $n=-\frac{2}{3}$; totumque tempus descensus $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} 2a^{\frac{5}{6}} f^{-\frac{1}{3}} \sqrt{3}$. Simili modo si $m=4$, et propterea $n=-\frac{3}{4}$ prodit tempus descensus $=\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} 2a^{\frac{7}{8}} f^{-\frac{3}{8}} \sqrt{4}$ etc.

Corollarium 3.

300. Generaliter igitur quicquid sit m , ideoque $n=\frac{1-m}{m}$, erit tempus descensus totius per AC $=\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m-1)} 2a^{\frac{2m-1}{2m}} f^{\frac{1-m}{2m}} \sqrt{m}$.

Corollarium 4.

301. Iisdem quibus supra (294) interpolati-
onibus adhibitis, poterunt tempora descensuum assignari, si m est numerus quicunque integer affirmatiuus $+\frac{1}{2}$. Sit nimirum $m=\frac{1}{2}$, quo casu fit $n=1$, erit tempus descensus $=\frac{\pi}{2} \sqrt{2f}$, prorsus vt §. 253, vbi idem casus, quo $n=1$ seu vis centripeta distantis proportionalis, est pertractatus.

Corollarium 5.

302. Si $m=\frac{3}{4}$ seu $n=-\frac{1}{3}$ fit tempus descensus $=\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{6a^{\frac{4}{3}} f^{-\frac{1}{3}}}$, si $m=\frac{5}{2}$ seu $n=-\frac{3}{5}$ prodit tempus descensus $=\frac{1 \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 2} \sqrt{10a^{\frac{8}{5}} f^{-\frac{3}{5}}}$. Atque generaliter casu quo $n=\frac{1-m}{m}$ reperitur tempus descensus $=\frac{1 \cdot 3 \dots (2m-2)}{2 \cdot 4 \dots (2m-1)} \frac{\pi}{2} \sqrt{4ma^{\frac{2m-1}{m}} f^{\frac{1-m}{m}}}$.

Scholion.

303. Intelligitur ex hisce, quibus casibus tempora descensuum algebraice possint exprimi, videlicet, quando est $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$ vel $n = \frac{1-m}{m}$ et m significat numerum affirmatiuum integrum quemcunque. Atque praeter hos casus, dubito, an quisquam alius detur. Deinde etiam apparent casus, quibus temporis definitio a circuli quadratura pendet, hique habentur si fuerit vel $n = \frac{-m-1}{m}$, vel $n = \frac{1-2m}{1+2m}$, denotante m vt supra numerum quemcunque integrum affirmatiuum. Neque vero hi sunt omnes casus, qui ad circuli quadraturam deducuntur; namque singularis casus si $n = -1$ quoque a circuli quadratura pendet, vt sequenti propositione demonstrabimus. At vero hoc differt iste casus ab illis, quod hic in temporis expressione non π , sed $\sqrt{\pi}$ occurrat; et praeterea etiam totum duntaxat descensus tempus $\sqrt{\pi}$ inuoluat, dum tempus per quoduis spatium indefinitum nonnisi quadraturis transcendentium curuarum potest exhiberi.

PROPOSITIO 38.

Theorema.

304. *Existente vi centripeta reciproce distantis a centro virium C proportionali, erit tempus descensus integri per AC = $\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$, denotantibus a spatium AC, f distantiam in qua vis centripeta est grauitati aequalis, et $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum.*

Demonstratio.

Quia in quouis puncto P altitudo celeritati debita est $fl \frac{a}{y}$, (266); erit ipsa celeritas $= \sqrt{fl \frac{a}{y}}$ et tempus per spatium PC $= \frac{1}{\sqrt{f}} \int \sqrt{\frac{dy}{l^2}}$. Huius ergo integrale ita acceptum vt euanescat facto $y=0$, dabit verum tempus per PC. Quare si in hac expressione tum ponatur $y=a$, prodibit totum descensus tempus per AC. Ponatur autem $y=az$; et habebitur $\frac{a}{\sqrt{f}} \int \frac{dz}{\sqrt{-lz}}$. Demonstravi vero in Commentariis Academiae Scientiarum Petropol. Anno 1730. hanc quantitatem $\int \frac{dz}{\sqrt{-lz}}$, si ponatur $z=1$, seu $y=a$, definire in hac progressionem 1, 2, 6, 24 etc., eum terminum, cuius index sit $-\frac{1}{2}$, quem alia methodo ibidem ostendi esse $= \sqrt{\pi}$. Ex quo intelligitur tempus totius descensus per AC esse $\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$. Q. E. D.

Corollarium.

305. Si ergo plura corpora ad idem centrum C ex diuersis distantis delabantur, erunt eorum tempora descensuum ipsis distantis proportionalia.

Scholion I.

306. Neglexi in hac propositione fractionem $\frac{1}{230}$, quae in temporis expressionem, integratione spatii elementi per radicem quadratam altitudinis celeritati debita diuisi erutam, est multiplicanda (221), quippe quae ad tempus in minutis secundis inueniendum inferuit, si longitudines in scrupulis pedis rhenani exponuntur. Simili modo etiam in sequen-

quentibus tempora, nisi in minutis secundis desiderentur, sum definiturus, ad ambages vitandas. Facile enim apparet ad numerum minorum secundorum inueniendum nil aliud esse faciendum, nisi ut huiusmodi temporis expressiones per 250 diuidantur, atque longitudines in scrupulis pedis Rhenani exhibeantur, vti iam saepius est inculcatum.

Scholion 2.

307. Omnino paradoxon hoc videbitur, quod integrale ipsius $\int \frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ posito $z=1$, fiat $=\sqrt{\pi}$. Nullo enim modo quisquam hoc directe poterit demonstrare; neque ego hanc aequalitatem nisi a posteriori cognoui, quemadmodum ex citata dissertatione videre licet. Eisdem igitur reddunt valores haec duo integralia $\int \frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ et $2\sqrt{\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, neque tamen ipsa sunt inter se aequalia; immo nequidem inter se possunt comparari.

PROPOSITIO 39.

Theorema.

308. Si vis centripeta fuerit ut potestas exponentis n distantiarum, et plura corpora ex diuersis distantibus ad idem centrum delabantur, erunt descensuum tempora potestatibus distantiarum, quarum exponens est $\frac{1-n}{2}$, proportionalia.

Demonstratio.

Sit corporis cuiusuis a centro C distantia AC $=a$, et f distantia, in qua vis centripeta grauitati

Q 3

aequa-

aequalis est. Deinde cum peruenerit corpus in P, ponatur $CP=y$, et altitudo celeritati in hoc loco debita $=v$, erit $v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Tempus ergo,

quo CP absoluitur est $=\sqrt{(n+1)}f^n\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1})}}$. Quod integrale quanquam exhiberi non potest, tamen ita erit comparatum, vt a et y in singulis terminis $\frac{1-n}{2}$ dimensiones constituent, quia in differentiali eundem dimensionum numerum efficiunt, considerato dy tanquam vna dimensione. Quamobrem si post integrationem ponatur $y=a$, quo casu tempus totius descensus prouenit, habebit solum a totidem videlicet $\frac{1-n}{2}$ dimensiones, seu erit multipulum ipsius $a^{\frac{1-n}{2}}$. Quare, cum alter factor non complectatur nisi f et numeros, ideoque eundem valorem retineat, vtcunque a varietur, erunt diuerforum descensuum tempora vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ i. e. vt potestates distantiarum, quarum exponens est $\frac{1-n}{2}$.
Q. E. D.

Corollarium I.

309. Quo igitur omnia descensuum tempora sint inter se aequalia, oportet vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ sit quantitas constans, vtcunque a mutetur, id quod accidit si $n=1$, seu vis centripeta distantis directe proportionalis, vti iam obseruauimus (283).

Co-

Corollarium 2.

310. Simili modo ex his statim apparet, si vis centripeta est reciproce vt quadratum distantiae, seu $n=2$, tempora descensuum ad hoc centrum esse inter se vt distantiae eleuatae ad exponentem $\frac{3}{2}$, seu in sesquuplicata distantiarum ratione (287).

Corollarium 3.

311. Si fuerint plura similiter attrahentia virium centra, sed efficacia differentia, et ad ea corpora ex aequalibus distantiiis delabantur, erunt tempora inter se vt $f^{\frac{n}{2}}$ quia a vt constans, f vero vt variabilis consideratur. Est vero efficacia vt vis centripeta in data distantia puta r , erit ergo f^n reciproce vt efficacia, atque tempora illa inter se in reciproca subduplicata efficaciarum ratione (285).

Corollarium 4.

312. Et, si ad diuersa huiusmodi virium centra corpora ex quibuscunque distantiiis delabantur, erunt eorum tempora descensuum in ratione composita ex directa $\frac{1-n}{2}$ plicata distantiarum, et reciproca subduplicata efficaciarum.

Scholion.

313. Ex his, quae de viribus centripetis dicta sunt, abunde perspicitur, quomodo motus corporum inueniri oporteat, si loco vis centripetae vis centrifuga seu pellens corpus de centro substituatur. Omnia enim manent, vt in praecedentibus, nisi quod loco formulae vim centripetam exprimentis,

tis, quae erat $\frac{y^n}{f^n}$ (264), eius negatiua debeat adhiberi. Neque tamen superfluum iudico de his casibus quaedam afferre; cognoscentur enim ex his generales quaedam regulae ad motus generationem a potentiis pertinentes, quae ex solo calculo non possunt deduci. Respiciunt ea ~~antem~~ actionem potentiarum in corpora quiescentia, ad quae calculus noster, quippe quo ponitur celeritatis incrementum respectu prioris infinite paruum, minus recte accommodatur, et re ipsa absurdi quid praebet, nisi primum spatii elementum tempusculo infinite paruo percurritur. Ad hoc autem dilucidandum hoc vtor axioma, quod corpus in ipso centro virium repellente positum perpetuo ibi sit permanfurum, si vis centrifuga in ipso illo puncto fuerit infinite parua seu nulla; id quod euenit, quando exponens dignitatis distantiarum, cui vis centrifuga est proportionalis, est numerus nihilo maior seu positiuus.

PROPOSITIO 40.

Problema.

Tab. III. 314. *E centro virium C a se repellente in ratione n plicata distantiarum, egrediatur corpus in recta CP, requiritur eius celeritas in loco quouis P et tempus, quo spatium CP percurritur.*

Solutio.

Sit f distantia, in qua vis centrifuga aequalis est grauitati, et vocetur CP, y , atque altitudo ce-

le-

leritati in P debita v . Erit ergo vis, qua corpus in P vrgetur $= \frac{y^n}{f^n}$, et propterea $dv = \frac{y^n dy}{f^n}$ (213), quia corpus motu accelerato propellitur. Quare, cum corpus in C celeritatem nullam habere ponatur, erit $v = \frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$, si fuerit $n+1$ numerus positivus, sin autem negativus, fiet v infinitum. Ex hoc prodit tempus, quo spatium CP percurritur, $= \int (n+1)f^n dy : y^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2}{1-n} \sqrt{(n+1)f^n} y^{1-n}$ si quidem y^{1-n} fit $= 0$, posito $y = 0$. Nam si fuerit infinitum, tempus quoque prodiret infinitum, ob addendam constantem infinite magnam; id quod indicio esset corpus nunquam ex C egressurum. Tempus igitur erit $= \frac{2}{1-n} \sqrt{(n+1)f^n} y^{1-n}$, quoties et $1-n$ et $n+1$ fuerint numeri positivi. Q. E. I.

Corollarium 1.

315. Sunt vero hi ambo numeri $1-n$, et $1+n$ affirmativi, si n contineatur intra hos limites -1 et $+1$. Atque si n illum terminum -1 transcendit celeritas vbique erit infinita; et si hunc $+1$ transgreditur, tempus erit infinitum.

Corollarium 2.

316. Constat autem ex ipsa rei natura, si n fuerit numerus nihilo maior, corpus nunquam ex C esse egressurum (313). Hanc ob rem necesse est, etsi n contineatur intra 0 et $+1$, calculum hic adhibitum, quippe qui tempus indicat finitum, fallere.

Corollarium 3.

317. Tempora haec autem sequuntur ex celeritatibus, ergo et in his ipsis absurdum inesse debet, quoties n comprehenditur intra 0 et $+1$. Neque enim hae celeritates generari poterunt, cum corpus nunquam ex C egrediatur.

Scholion I.

318. Sit curua AM talis, vt denotantibus abscissis $AP=y$, applicata PM sit $=v$. Haec curua contento n intra hos limites 0 et $+1$, hanc habebit proprietatem, vt ipsa in A cum axe confundatur, hocque loco curuedinem habeat infiniter magnam nempe radium osculi euanescentem.

Corollarium 4.

319. Quoties igitur accidit, vt scala celeritatum, seu potius altitudinum celeritatibus debitatum huiusmodi habeat formam, toties iudicandum est, eam a nulla potentia generari potuisse, etiam si calculus aliter ostendat, sed esse casum penitus imaginarium ac in rerum natura non existentem.

Scholion 2.

320. Ratio huius aberrationis calculi a natura in ipso principio motus sine dubio est sita, atque hoc loco lex alias vniuersalis de celeritatis incremento a potentiis producto perperam adhibetur. Quoniam enim, vt iam animaduertimus (313) haec lex locum habet tantum, quando corpus finitam iam habet celeritatem, semper in principio motus

tus temere vsurpatur. Cum autem iste error in ipso primo tantum elemento insit, plerumque est infinite parvus et hanc ob rem non est respiciendus. Est vero infinite parvus, quoties primum elementum spatii tempusculo infinite paruo percurritur, tum enim neque in celeritatibus neque in temporibus considerabile discrimen poterit producere. Euenit hoc, si potentia, qua corpus in ipso principio motus sollicitatur est finitae magnitudinis vel etiam infinitae magnae; perspicuum enim est hoc casu, primum elementum temporis puncto percurri. At si potentia, vt in nostro casu vsu venit, in principio est infinite parua seu potius nulla, ad primum tantum elementum absoluendum non modo finito, sed etiam infinito opus est tempore, quia corpus quiescens a nulla potentia pulsus de loco suo nunquam excedet. In reliquis quidem casibus, quibus n est non solum nihilo, sed etiam vnitatem maior, tantus est error, vt etiam calculus infinitum tempus per primum elementum ostendat. Verum, si n intra 0 et 1 comprehenditur, vitium calculi animaduertitur; hocque ideo, vti videtur, quia his casibus scala potentiarum formam habet curuae AM , quae axi AP in A ad angulos rectos occurrit. Statim enim in proximo ipsi A puncto a linea ab potentiam exprimens infinite maior est sagitta Aa ; perinde autem est in motus computatione, siue corpus elementum percurrens consideretur a potentia, quae initio agit, sollicitatum siue ea, qua in fine elementi vrgetur. In hoc autem casu euidentis est, errorem

R 2

nasci

Tab. III.

Fig. 4.

nasci oportere, si corpus per totum elementum Aa a potentia ab sollicitatum consideretur.

PROPOSITIO 41.

Problema.

Tab. III.
Fig. 5.

321. Si fuerit vis centripeta functioni cuiunque distantiarum a centro C proportionalis, corpusque ex A ad id delabatur; requiritur celeritas eius in puncto quocunque P atque tempus, quo spatium AP percurritur.

Solutio.

Repraesentet curua BMD scalam potentiarum seu legem vis centripetae, ita ut corpus in P trahatur ad C a potentia PM , quae sit ad vim grauitatis ut haec PM ad rectam constantem AE , qua vis grauitatis exprimitur. Sit nunc $AP=x$; $PM=p$; $AE=1$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Vis igitur accelerans est p , et propterea sumto elemento $Pp=dx$, erit $dv=pdfx$ (213). Ex qua prodit integrando $v=spdx$. At $spdx$ exprimit aream $ABMP$, hanc ob rem habebitur $v=\frac{ABMP}{AE}$, completa homogeneitate recta $AE=1$. Cognita nunc altitudine v erit tempus, quo spatium AP percurritur $=\int\frac{dx}{\sqrt{pdx}}$ quod, quia p per x dari ponitur, per quadraturas innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

322. Perspicitur ex his, si corpus ea celeritate, quam in C acquisiuit, retro moueatur fursum, motum eius ascensus similem fore descensui, atque

in

in puncto P eandem habiturum esse celeritatem, quam habuit ante, et proinde tempus quoque ascensus per CP aequale esse debere, tempori descensus per idem spatium.

Corollarium 2.

323. Posuimus hic corpus in A celeritatem habere nullam, atque ex quiete motum inchoare. Sed non difficilior euadit calculus, si ei in A celeritas quaecunque tribuatur; hoc enim casu differentiale pdx ita debet integrari, vt facto $x=0$, ipsum $spdx$ praebeat altitudinem celeritati initiali debitam. Tempus vero ex $spdx$ hac ratione accepto inuenietur similiter vt supra.

Scholion I.

324. Assumimus quidem p esse functionem ipsius x , et propterea non respicere centrum virium C, sed tantum motus initium A. Nihilo tamen minus casus propositionis in solutione continetur; si enim p est functio ipsius distantiae CP a centro virium C, quam vocemus y , serit $y=a-x$, posito toto spatio $AC=a$, et hanc ob rem p denotabit functionem ipsius $a-x$, i. e. functionem ipsius x et constantium vt assumimus. Nostra vero solutio latius patet, determinat enim motum corporis a quacunque potentia sollicitati, nullo respectu ad certum aliquod punctum fixum habito, dummodo hae potentiae vbiuis eandem directionem teneant. Nisi enim hoc fiat, corpus cessabit in linea recta moueri, sed in curua incedet, de quo motu in sequentibus tractabimus.

Scholion 2.

325. Determinauimus hæctenus motus corporis rectilineos ex data potentia, nunc vero pertractanda restat altera huius capituli pars, qua ex data motus conditione potentiarum legem definiri oportet. Sit vero hoc vel ex datis celeritatibus vel temporibus, vtrumque autem duplici modo est pertractandum. Vel enim respicitur ad vnicum descensum seu ascensum, in cuius singulis punctis datae ponuntur vel celeritates vel tempora, quibus quæque spatii portiones percurreuntur. Vel considerantur infiniti descensus ad punctum fixum ex diuersis altitudinibus facti, in quibus dantur vel celeritates vltimæ, vel tempora, quibus singuli descensus integri absoluuntur. Ex his igitur quatuor oriuntur problemata primaria, quorum solutiones hic exhiberi oportet. Praeter hæc vero aliae afferuntur quæstiones, in quibus neque solæ celeritates neque sola tempora dantur, sed aliud quiddam, quod ex vtrisque sit compositum, cuiusmodi vero quæstiones, cum innumerabiles possent excogitari, aliquas tantum magis insignes, et ex quarum solutionibus simul reliquorum solutiones possint intelligi, in medium proteremus.

PROPOSITIO 42.

Problema.

Tab. II. 326 *Data corporis rectam AP percurrentis in*
 Fig. 10. *singulis punctis celeritate; requiritur potentiae lex, quæ*
hunc motum corpus sollicitando efficere valet.

So-

Solutio.

Percurso quouis spatio AP, quod ponimus $=x$, sit altitudo celeritati, quam corpus in P habet, debita $=v$, quae proinde data et ipsius x et constantium functio quaedam esse ponitur. Potentia vero in P agens, quam quaerimus, sit $=p$, quae ergo ex corporis acceleratione dv , dum elementum $Pp=dx$ percurrit, inueniri poterit. Cum enim sit $dv=px$ (213), erit $p=\frac{dv}{dx}$ seu ista potentia quaesita se habebit ad vim grauitatis, vt incrementum altitudinis celeritati debitaе, ad spatii elementum, quod interea percurritur. Q. E. I.

Corollarium I.

327. Si fuerit $v=x$, seu spatium descriptum ea ipsa altitudo celeritati debita; fiet $dv=dx$ et $p=1$, id quod indicat potentiam hunc motum producentem esse vniformem, et ipsi grauitati aequalem.

Corollarium 2.

328. Si ipsae celeritates ponantur spatiis percursis proportionales; erit $v=\frac{x^2}{f}$, denotante f constantem requisitam, fit ergo $dv=\frac{2xdx}{f}$ et $p=\frac{2x}{f}$. Quamobrem potentia erit spatiis percursis proportionalis.

Scholion I.

329. Constat autem ex superioribus, hunc casum existere non posse; nam quia potentia in ipso motus initio A est nulla, corpus ex hoc puncto
nun-

nunquam egreditur, sed ibi perpetuo quiescet. Idem commonstrat temporis per AP computatio, quod erit $= \int \frac{dx}{x} \sqrt{f}$, quae quantitas est infinita, si quidem integrale ita accipitur, ut euanescatposito $x=0$.

Corollarium 3.

330. Quo igitur hoc non eueniat, oportet ut $\frac{dv}{dx}$ sit eiusmodi quantitas, quae facta $v=0$ non euanescat, sed quae vel fiat finita vel infinita. Ex quo perspicitur scalam altitudinum celeritatibus debitarum AM, in qua sumtis $AP=v$, applicatae PM repraesentent has altitudines v , non debere in A in axem incidere, sed angulum cum eo finitum constitutuere oportere.

Tab. III.
Fig. 2.

Scholion 2.

331. Haec intelligenda sunt tantum de iis casibus, quibus corporis celeritas in A euanescens ponitur, et scala AM cum axe in A concurrat. Aliter enim se res habet, si corpus in A celeritatem iam habet, qua, etiamsi potentia sit nulla, tamen ex A progredi, potentiaeque actionem subire potest, ita ut non opus sit tempore infinito ad spatium AP absoluendum.

PROPOSITIO 43.

Problema.

Tab. III.
Fig. 5.

332. Dato tempore, quo corpus in recta AC progrediens, percurrit singula spatia AP; oportet definire legem potentialium, qua efficitur, ut corpus hoc motu feratur.

So-

Solutio.

Dicto spatio AP, x ; et tempore, quo percurritur $=\sqrt{t}$, quia expressionis temporis quadratum vnicam habet dimensionem; sit potentia quaesita $=p$, et altitudo celeritati in P debita $=v$, hac enim opus est ad inueniendum p , quamuis ex calculo exire debeat. His positis erit vt ante $dv=pdx$, et $v=spdx$. Tempus igitur $\sqrt{t}=\int\frac{dx}{\sqrt{spdx}}$, ex qua aequatione sumtis differentialibus prodit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{dx}{\sqrt{spdx}}$ et $spdx=\frac{4tdx^2}{dt^2}$, cuius si denuo sumatur differentialis posito dx constante, habebitur $p=\frac{4dx}{dt}-\frac{4tdxdt}{dt^2}$. Q. E. I.

Corollarium I.

333. Si ponatur tempus ipsum $=T$ neglecta homogeneitate, erit $t=T^2$; atque prodibit $p=\frac{-2dxddT}{dT^3}$. Quae expressio simplicior est superiore, et facilius ad casus speciales accommodatur.

Corollarium 2.

334. Si tempora ponantur spatiis descriptis proportionalia, erit $T=x$ et $ddT=0$, ob dx constans. Consequenter potentia erit nulla, qua indicatur corpus vi insita hunc motum aequabilem continuare.

Scholion.

335. Notandum hic est pro T eiusmodi accipi debere functionem ipsius x , quae cum fiat $=0$, posito $x=0$, tum crescentibus x crescat quoque.

S

Fie-

Fieri enim omnino non potest, ut corpus moueri pergat, tempus vero diminuatur. Ponamus v. g. $T = \sqrt{(2ax - x^2)}$ quae quantitas ad certum tantum terminum crescit, crescente x , tum vero decrescit.

Erit ergo $dT = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ et $ddT = \frac{-a^2 dx^2}{(2ax - x^2)^{3/2}}$. Ex

his fit $p = \frac{2a^2}{(a-x)^3}$, seu posita $AC = a$, sollicitabitur corpus in P ad C vi cubo distantiae a C reciproce proportionali. Tempus vero $\sqrt{(2ax - x^2)}$ ulterius non valet, quam usque ad C quo $x = a$. Sed de hoc casu iam est actum (289). Quare ex hoc concludi videtur corpus cum in C peruenerit ex eo nunquam esse egressurum, quod autem quomodo fieri possit, cum celeritas eius in C sit infinite magna, nullo modo concipi potest. Accedit quod, cum sit $Vv = \frac{dx}{dT} = \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a-x}$, celeritas corporis cum ultra C progrediatur, deberet esse negatiua, ideoque corpus a C non recederet, sed ad C accederet, quae ita pugnant, ut etiam nunc conciliari nequeant.

Corollarium 3.

336. Cum sit elementum temporis $dT = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit celeritas corporis in quouis loco $Vv = \frac{dx}{dT}$, ex data ergo temporum lege, simul celeritas corporis in singulis locis innotescit; quod quidem ex ipso nexu inter celeritates et tempore consequitur, nullo respectu habito ad potentiam (37).

PROPOSITIO 44.

Problema.

337. Si corpus in recta AP ita descendat, ut Tab. III.
 ea celeritate, quam in P habet, eodem tempore, quo Fig. 6.
 spatium AP percurrit, progredi possit motu uniformi
 per spatium PM, applicatam curvae AM datae: deter-
 minari oportet legem potentiae sollicitantis, qua talis
 motus generatur.

Solutio.

Posito $AP = x$ et $PM = s$, erit s ob datam cur-
 uam AM functio ipsius x . Sit porro potentia in P
 corpus sollicitans $= p$, altitudo celeritati in P debi-
 ta $= v$, et tempus, quo spatium AP absoluitur $= T$,
 Quia iam spatium s tempore T celeritate \sqrt{v} absol-
 uitur motu aequabili, erit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$ (30). Est vero
 $v = \int p dx$ et $T = \int \frac{dx}{\sqrt{p dx}}$, quocirca habebitur $\int \frac{dx}{\sqrt{p dx}}$
 $= \frac{s}{\sqrt{p dx}}$, vel relicto v loco $\int p dx$, quo calculus con-
 cinnior reddatur, erit $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{s}{\sqrt{v}}$. Quae differentiata
 dat $\frac{dx}{\sqrt{v}} - \frac{ds}{\sqrt{v}} - \frac{s dv}{2v\sqrt{v}}$, ex qua deducitur haec aequatio
 $\frac{dv}{v} = \frac{2 ds}{s} - \frac{2 dx}{s}$, cuius integralis est $\ln v = 2 \ln s - 2 \int \frac{dx}{s}$, seu
 $v = e^{-2 \int \frac{dx}{s}}$ denotante e numerum, cuius logarith-
 mus est 1. Sumantur iterum differentialia, pro-
 dibit $dv = p dx = 2e^{-2 \int \frac{dx}{s}} (s ds - s dx)$. Ex qua tandem
 elicirur $p = 2se^{-2 \int \frac{dx}{s}} \left(\frac{ds - dx}{dx} \right)$. Innotescet igitur po-
 tentia quaesita p ex ista aequatione, quia s in x da-
 ri ponitur. Q. E. I.

Corollarium I.

338. Quia est $v = e^{-2 \int \frac{dx}{s}} s^2$, habebitur hinc ipsa corporis, quam in P habet, celeritas $\sqrt{v} = e^{-\int \frac{dx}{s}} s$. Quam autem constantem in integratione ipsius $\frac{dx}{s}$ addi oporteat, mox docebitur.

Corollarium 2.

339. Tempus quoque T, quo spatium AP percurritur, facile ex hisce deducitur. Nam cum sit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$, habebitur $T = e^{\int \frac{dx}{s}}$. Cum igitur debeat T evanescere facto $x = 0$, oportet ipsum $\frac{dx}{s}$ ita integrari, ut $e^{\int \frac{dx}{s}}$ evanescat, facto $x = 0$. Quamobrem necesse est ut fiat $\int \frac{dx}{s} = -\infty$, si ponatur $x = 0$.

Corollarium 3.

340. Sit $s = nx$, erit $\int \frac{dx}{s} = \frac{1}{n} \ln x + l$. Quicquid igitur c denotet, semper $\int \frac{dx}{s}$ fit $= -\infty$ posito $x = 0$. Quare erit $e^{\int \frac{dx}{s}} = c x^{\frac{1}{n}} = T$. Consequenter prodibit $p = \frac{2n(n-1)}{c} x^{\frac{n-2}{n}}$, atque $\sqrt{v} = \frac{n}{c} x^{\frac{n-1}{n}}$.

Corollarium 4.

341. Si ponatur $s = x$, perspicuum est motum in AP uniformem esse debere, id quod etiam calculus ostendit. Fit enim $n = 1$, adeoque $p = 0$ et $\sqrt{v} = \frac{n}{c}$ seu constanti.

Corollarium 5.

342. Si n est unitate minor, celeritas in ipso puncto A fit infinite magna, atque etiam potentia p , erit enim reciproce ut potestas exponentis $\frac{2-n}{n}$ spatiorum percursorum.

Corollarium 6.

343. Si n est unitate maior, attamen binario minor, fit quidem celeritas in $A=0$, sed potentia manet in A infinite magna, decrescitque in ratione quadam multiplicata spatiorum percursorum.

Corollarium 7.

344. Si $n=2$, habemus casum potentiae uniformis. Fit enim $p=\frac{4}{c^2}$, et $\sqrt{v}=\frac{2}{c}\sqrt{x}$. Hancque proprietatem iam demonstrauius propositione 28, (230) ubi ostendimus corpus in hac potentiae uniformis hypothese ex quiete descendens tantam quouis spatio percurso acquirere celeritatem, qua eodem tempore uniformiter posset duplum spatium percurrere.

Corollarium 8.

345. Sin vero n binarium excedat, prodeunt ii casus, quos diximus (316) in rerum natura locum obtinere non posse, quamuis calculus aliter ostendat. Fit enim celeritas in A nulla, ibidemque potentia sollicitans euanescit, quamobrem corpus nunquam ex A exire poterit, non obstante calculo, qui tempus T per spatium quoduis AP , exhibet finitum.

Scholion.

346. Huius propositionis casus est ergo eiusmodi, ut data motus conditio sit ex celeritate et tempore permixta, ex qua legem potentiarum erui oporteat. Plura vero huiusmodi exempla afferre superuacaneum foret, cum ex hoc vno omnium reliquorum soluendorum modus perspiciatur.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tab. III.

Fig. 7.

347. *Datis celeritatibus, quas corpus ex quibuscunque distantis ad centrum virium C accedens in isto centro C acquirit, definire legem vis centripetae huiusmodi descensus producentis, posito quod corpus singulos descensus ex quiete incipiat.*

Solutio.

Repraesentet CM scalam altitudinum celeritatibus, quas corpus in puncto C acquirit, debitarum, ita ut PM sit ipsa altitudo debita celeritati, quam corpus ex P descensum inchoans in C adipiscitur. Curua vero DN sit scala potentiarum quaesita, cuius scilicet applicatae PN exhibeant vim centripetam corpus in punctis P sollicitantem; linea vero CB designet vim centripetam vi grauitatis aequalem. His positis atque corpore ex P in C descendente erit altitudo celeritati eius in C debita aequalis areae CDNP applicatae ad BC (321). Quamobrem erit $PM = \frac{CDNP}{BC}$. Vocentur nunc CP, y ; PM, v ; et PN, p ;

p ; positoque $BC=1$; erit $v=spdy$, et differentiando $dv=pdy$. Quare cum detur v in y erit $p=\frac{dv}{dy}$.
Q. E. I.

Corollarium 1.

348. Sint celeritates in C acquisite, ut spatia percurfa erit \sqrt{v} ut y , et consequenter p ut y . Vis centripeta igitur proportionalis est distantis a centro C.

Corollarium 2.

349. Si celeritates in C acquisite dignitati exponentis n distantiarum a centro C proportionales ponantur, erit v ut y^{2n} ; ergo p ut y^{2n-1} . Potentia igitur seu vis centripeta distantiarum dignitati $2n-1$ est proportionalis.

Corollarium 3.

350. Quia celeritas in C acquisita, cum fuerit $y=0$, debet esse quoque $=0$, et praeterea maiori distantiae y maior celeritas respondere debeat; non poterit non n numerum affirmatiuum significare.

Corollarium 4.

351. Potentia autem p erit constans, cum sit $n=\frac{1}{2}$; quo numero si n fuerit minor, erit vis centripeta reciproce ut dignitas quaedam distantiarum a centro C. Sin n fuerit $>\frac{1}{2}$ erit p directe ut huiusmodi dignitas quaedam. In illo casu ergo vis centripeta in C erit infinite magna, et decrescet crescentibus distantis; hoc vero casu erit in C $=0$, crescetque crescentibus distantis.

Co-

Corollarium 5.

352. Cum sit $PM = \frac{CDNP}{CB}$, perspicuum est curvam CM esse etiam scalam altitudinum celeritatibus debitarum, cum corpus ex C egrediatur in recta CP, vi centripeta in centrifugam mutata, atque motum a quiete incipiat (321).

Scholion.

353. Quamquam autem hoc modo problema reductum sit ad prop. 42 (326), transmutata vi centripeta in centrifugam; tempus tamen ascensus per CP in casu vis centrifugae non erit aequale tempori descensus per PC in casu vis centripetae. Neque enim aequalitas celeritatum, quae in utroque casu per aequalia spatia generantur, temporum aequalitatem inducit; sed ex ipso etiam intuitu contrarium apparet. Nam quoties vis centripeta in C est $= 0$, etiam vis centrifuga in C evanescit; quamobrem tempus ascensus per CP erit infinitum (313), cum tamen descensus absoluitur tempore finito. Nullum igitur adminiculum ex ista similitudine celeritatum ad solutionem sequentis problematis suppeditatur. In sequenti autem propositione dari ponuntur tempora, quibus singuli descensus absoluuntur, eaque non solum est difficillima solutu, sed ex scala temporum nequidem scala potentiarum villo modo potest construi. Quocirca non nisi casus particulares in hac propositione complectemur, quorum solutio vires nostras non superat.

PRO-

PROPOSITIO 46.

Problema.

354. Si fuerint tempora, quibus corpus ex quibuscunque distantis PC ad centrum virium C peruenit, in ratione quacunque multiplicata distantiarum; desinare legem vis centripetae.

Tab. III.

Fig. 8.

Solutio.

Sint ista tempora vt potestates distantiarum exponentis n , sitque curua DN scala vis centripetae quaesita, ita vt applicata πv exponat potentiam, qua corpus in π existens ad C vrgetur, repraesentante CB vim grauitatis. His positis descendat corpus ex puncto quocunque P et ponatur distantia $PC = a$, erit ergo tempus descensus per PC vt a^n , quamobrem id ponamus $= Ca^n$, denotante C quantitatem constantem, in qua a non insit, quia a ob punctum P variabile reipsa est quantitas variabilis. Peruenit nunc corpus in locum quemcunque π et vocetur $C\pi = x$, erit altitudo celeritati eius in hoc loco debita $= \frac{PNv\pi}{BC} = \frac{CPND - C\pi vD}{BC}$ (321). Ponatur autem area $CPND = A$, et area $C\pi vD = X$, atque $BC = 1$; erit ergo altitudo celeritatis in π debita $= A - X$, et ipsa celeritas $= \sqrt{A - X}$. Notandum hic autem est, X esse functionem quandam ipsius x et constantium in qua non sit a , area enim $C\pi vD$ non pendet a puncto P, sed retinet eundem valorem vbicunque accipiatur punctum P, dummodo distantia $C\pi$ maneat eadem. Qualis autem X est functio ipsius x , talis etiam esse debet A functio ipsius a , abeunte

T

enim

enim x in a , functio X transmutabitur in A . Iam tempus, quo hoc descensu spatium $C\pi$ percurritur erit $= \int \frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$, quod integrale ita debet esse sumtum ut facto $x=0$, ipsum euanescat. Ex hac igitur expressione habebitur integrum tempus descensus per PC si ponatur $x=a$, quo casu X quoque transmutatur in A . Quia autem haec resultans quantitas ita debet esse comparata, ut in ea a habeat n dimensiones; (oportet enim eam aequalem esse ipsi Ca^n), in indefinito integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ a et x simul habeant necesse est ubique n dimensiones. Quamobrem etiam formula differentialis $\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ n habebit dimensiones, dimensionemque vnam constituere existimanda sunt tam a et x quam dx . Perspicuum igitur est in $\sqrt{(A-X)}$ $1-n$ inesse debere dimensiones, atque in $A-X$, $2-2n$ dimensiones ipsarum a et x . Sed quia in X non inest a , debet X functio esse $2-2n$ dimensionum solius x , aliud ergo X esse non poterit nisi bx^{2-2n} , et propterea erit $A=ba^{2-2n}$. Constans quidem quantitas ad bx^{2-2n} adiaci potest, cum ea, quia ad ba^{2-2n} pariter est addenda, ex $A-X$ iterum excedat. Nam si ponatur $X=bx^{2-2n}+bc^{2-2n}$, erit $A=ba^{2-2n}+bc^{2-2n}$ et idcirco $A-X=b(a^{2-2n}-x^{2-2n})$. Sed quia X denotat aream $C\pi vD$, euanescere debet facto $x=0$, quamobrem, si est $2-2n$ numerus positivus, semper debet esse $bc^{2-2n}=0$, at si $2-2n$ euadet numerus negativus quantitas bc^{2-2n} designabit quantitatem infinitam negativam. Quicquid igitur sit bc^{2-2n} debet esse $-bc^{2-2n}$, hoc enim si $2-2n$ seu $1-n$ est numerus af-

firmatius sponte euanescit, et si $1-n$ est negatiuum praebet infinitum requisitum. Sed cum sit propositum legem vis centripetae inuenire, nihil refert siue haec quantitas constans sit $=0$ siue infinita. Namque posita vi centripeta in $\pi=p=\pi v$, erit area $C\pi v D = \int p dx$. Quamobrem habebitur $bx^{2-2n} + bc^{2-2n} = \int p dx$, et sumtis differentialibus prodibit $p = (2-2n)bx^{1-2n}$. Consequenter vis centripeta debet esse in $1-2n$ *plicata* ratione distantiarum.
Q. E. I.

Corollarium 1.

355. Quo igitur omnes descensus ad centrum C sint isochroni, seu absoluantur aequalibus temporibus, poni debet $n=0$, quo facto prouenit vis centripeta distantis directe proportionalis. Iam quidem animaduertimus hoc casu omnes descensus ad centrum esse isochronos (283).

Corollarium 2.

356. Si ponatur $n=1$, vt tempora descensuum sint spatiis percurfis proportionalia; inuenitur vis centripeta distantis reciproce proportionalis.

Corollarium 3.

357. Si $n=\frac{1}{2}$ seu tempora in ratione subduplicata distantiarum, vis centripeta habetur constans, quam proprietatem iam supra eruimus (217). Si ergo $n > \frac{1}{2}$ vis centripeta crescente distantia decrescet, si $n < \frac{1}{2}$ crescet crescente distantia.

Scholion.

358. Hæ quidem proprietates omnes consequuntur ex propositione 39, (308), ubi demonstrauimus, si vis centripeta fuerit vt potestas exponentis n distantiarum, tempora descensuum fore in ratione $\frac{1-n}{2}$ *plicata* distantiarum. Quæ propositio egregie cum hac nostra conspirat, posito enim n loco $\frac{1-n}{2}$ prodibit $1-2n$ loco n . Neque tamen me hac propositione acta egisse putandum est, nam hic a priori modo analytico ex data temporum conditione legem vis centripetae erui, cum ibi inuerso ordine, ad idem fuerim perductus. Neque præterea ante certum erat, præter has inuentas virium centripetarum leges alias non satisfacere. Ipsa vero solutio incredibilem in posterum præstat utilitatem. Nam quia mere est analytica et peculiarem a nemine adhuc adhibitam methodum complectitur, ad plurima alia problemata soluenda deducere potest, quæ aliis methodis frustra tentantur. Ita cum huiusmodi methodus adhuc incognitus esset, neque hi isochroni descensus, neque curua tautochrone a priori sunt inuenta, sed examinantes vel vim centripetam distantiiis proportionalem vel curuam cycloidem inopinato in istas proprietates inciderunt Geometrae.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. III. 359. *Data scala potentiarum BND, quibus
Fig. 9. corpus per spatium AC descendens sollicitatur, inuenire*

innumerabiles alias ut $\mathcal{E}\nu\delta$, quibus corpus sollicitatum in C eandem acquirit celeritatem, posito corpore semper in A motum ex quiete inchoante.

Solutio.

Cum pro scala potentiarum BND altitudo celeritati, quam corpus in C habebit, aequalis sit areae $\frac{ABCD}{CE}$ exponente CE vim grauitatis (321) et pro scala $\mathcal{E}\nu\delta$ ista altitudo $= \frac{A\beta\gamma C}{CE}$ (cit.); debet esse $ABDC = A\mathcal{E}\delta C$, quam proprietatem utique infinitae curuae habere possunt. In quocunque quidem spatii AC puncto P, haec proprietates locum habere nequit, ut esset $ABNP = A\mathcal{E}\nu P$, nisi curua $\mathcal{E}\nu\delta$ incidat in alteram BND. Erit ergo discrimen quoddam inter has areas quod vocemus Z ita ut sit $A\mathcal{E}\nu P = ABNP - Z$, quae differentia Z ita debet esse comparata ut euanescat puncto P tam in A incidente quam in C. Hanc ob rem constructa super axe AC curua quacunque AMC, quae in punctis A et C cum axe occurrat, poterit eius applicata PM loco huius Z usurpari; euanescit enim puncto P et in A et C translato. Quo autem ex eadem curua AMC innumerabiles curuae $\mathcal{E}\nu\delta$ deduci queant, expedit functionem quandam ipsius applicatae PM loco D adhibere quam ipsam. Haec vero functio hanc habere debet proprietatem, ut fiat $= 0$, si euanescit PM. His iam ita institutis ponatur $AC = a$, $AP = x$, $PN = y$, $P\nu = Y$, et $PM = z$, quarum quantitatibus a , x , y et z , nec non Z functio ipsius z tanquam datae considerari possunt, incognita vero quantitas erit Y, quae ex

hac aequatione $\int Ydx = \int ydx - Z$ definietur. Sumtis enim differentialibus prodit $Y = y - \frac{dZ}{dx}$, ex qua aequatione curua $\xi y \delta$ construi poterit. Q. E. I.

Corollarium 1.

360. Sit $Z = nz^2$, erit $dZ = 2nzdz$ et $Y = y - \frac{2nzdz}{dx}$. At $\frac{zdz}{dx}$ denotat subnormalem in curua AMC ducta normali MR in puncto M. Si itaque accipiat Ny , quae linea est $= y - Y$, aequalis cuicumque multiplo subnormalis PR, curua $\xi y \delta$ quaesito satisfaciet.

Corollarium 2.

361. Possumus etiam ponere $dZ = pzdz$ denotante p functionem quamcunque ipsius z . Hic enim non opus habemus ad hoc respicere quod Z evanescere debeat, posito $z = 0$. Nam quaecunque functio loco p accipiat, integrale ipsius $pzdz$ semper ita potest accipi vt fiat $= 0$ posito $z = 0$. Hanc ob rem habebimus $Y = y - \frac{pzdz}{dx} = y - p$. PR. seu $Ny = p$. PR. quae constructio latissime patet.

Scholion.

362. Notandum hic est non necesse esse, vt loco curuarum BND et AMC curuae regulares, quae aequationibus certis contineantur, adhibeantur. Sed ad construendas curuas $\xi y \delta$ sufficit curuas etiam vel maxime irregulares nulla aequatione contentas accipere. Pariter enim constructio determinandis subnormalibus succedit.

PROPOSITIO 48.

Problema.

363. *Data scala potentiarum BND, quibus corpus spatium AC percurrens sollicitatur, inuenire innumerabiles alias ut $\mathcal{E}\nu\delta$, quibus efficiatur ut corpus eodem tempore spatium AC absoluat.*

Solutio.

Sumto quocunque spatio AP, sit tempus, quo hoc absoluitur vrgente scala potentiarum BND, $=t$ et tempus, quo idem spatium agente scala $\mathcal{E}\nu\delta$ absoluitur, sit $=T$, ponaturque $T=t+Z$, quae quantitas Z euanescat, puncto P tam in A quam in C translato. Hanc ob rem vt ante facio Z functionem applicatae PM curuae AMC in A et C cum axe AC occurrentis, talem, vt euanescat facto $PM=z=0$. Dicantur nunc AP, x , PN, y et $P\nu$, Y, et erit $t=\int \frac{dx}{\sqrt{fydx}}$; atque $T=\int \frac{dx}{\sqrt{Ydx}}$, quocirca hanc habebimus aequationem $\int \frac{dx}{\sqrt{Ydx}} = \int \frac{dx}{\sqrt{fydx}} + Z$, ex qua Y determinari poterit. Nam differentiando habebitur $\frac{dx}{\sqrt{Ydx}} = \frac{dx}{\sqrt{fydx}} + dZ$, ex qua prodit $\sqrt{Ydx} = \frac{dx\sqrt{fydx}}{dx+dZ\sqrt{fydx}}$ atque $\int Ydx = \frac{dx^2\sqrt{fydx}}{(dx+dZ\sqrt{fydx})^2}$. Quia vero ista quantitas ob datas x , y et Z construi potest, ponatur ea $=P$, eritque $Ydx=dP$ consequenter inuenitur $Y=\frac{dP}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium I.

364. Sit $dZ = pzdz$ vt ante denotante p functionem quamcunque ipsius z , erit $\frac{zdz}{dx} =$ subnormali PR, quam ponamus $= r$. Quo facto habebitur $P = \frac{\int y dx}{\sqrt{1 + rp\sqrt{\int y dx}^2}}$ atque $Y = \frac{dP}{dx}$.

Corollarium 2.

365. Sit curua data BND linea recta parallela axi AC, ita vt potentia sit vniformis, semper enim potentia vniformis datur, quae efficiat vt corpus dato tempore spatium AC absoluat. Ponatur $AB = PN = b$; erit $\int y dx = bx$. Vnde habebitur $P = \frac{bx}{(1 + rp\sqrt{bx})^2}$ hacque differentiata obtinetur $Y = \frac{dP}{dx}$.

Scholion.

Duas has posteriores propositiones inter se fere similes ideo innexi, quia peculiarem etiam soluendi modum requirunt, cuius vtilitas in sequentibus reddetur conspicua. Ceterum vero ipsae propositiones non sunt inelegantes et huic capiti, in quo omnes casus motum rectilineum a potentiis productum respicientes exponere constituimus, necessario erant inferendae. Neque vero eas ad casus speciales accommodare idoneum visum est, ob nimis prolixum calculum, ad quem fuisset perueniendum. His igitur relictis pergimus ad motus rectilineos in medio resistente.

CAPUT QUARTUM

DE

MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI IN
MEDIO RESISTENTE.

DEFINITIO 18.

367.

Lex resistentiae est potestas seu functio celeritatis corporis, cui ipsa resistentia est proportionalis. *Sic si resistentia est celeritatis quadrato proportionalis, lex resistentiae est celeritatis quadratum.*

Corollarium 1.

368. Cognoscitur igitur ex lege resistentiae, si plura puncta aequalia diuersis ferantur celeritatibus, quomodo se habeant motus diminutiones inter se. Atque dato celeritatis decremento vnus puncti, reliquorum quoque celeritatis decrementa inueniuntur.

Corollarium 2.

369. Si ergo pro vno celeritatis gradu datur ratio resistentiae ad vim grauitatis, pro omnibus aliis quoque gradibus ratio inter resistentiam et vim grauitatis ex lege resistentiae innotescet. Atque ex hoc effectus resistentiae in corpus motum inuenietur.

∇

Scho-

Scholion I.

370. Pertinet utique vis resistentiae ad potentias, atque ideo cum vi grauitatis est homogenea, quemadmodum, cum de motu corporum in fluidis tractabitur, apparebit. Semper igitur potentia absoluta poterit assignari eundem in corpore effectum, quem resistentia, producens. Haec vero potentia absoluta pendebit a celeritate corporis, quam ob rem in eius expressione celeritas inerit, seu altitudo celeritati debita. Hoc igitur modo corporis motus in medio resistente reducetur ad corporis motum a potentiis absolutis sollicitatum, cuius, cum supra in capite secundo leges sint expositae, ex iis omnes quaestiones poterunt resolui.

Scholion 2.

371. Directio vis resistentiae in hac tractatione nobis semper erit congruens cum directione motus corporis (117) et contraria. Quamobrem potentia absoluta ei substituenda motum semper retardabit, directione motus non mutata. Perspicuum itaque est, vim resistentiae, quoties eius expressio prodit negatiua, habituram directionem contrariam, motumque corporis esse acceleraturam. Hic quidem casus in fluidis quiescentibus locum habere nequit, sed tamen in calculo, cum ex dato corporis motu resistentia inuestigabitur, saepe occurret.

Corollarium 3.

372. Corpus igitur in medio resistente motum, si a nulla alia potentia sollicitetur, in linea recta moueri debet. Quia enim a vi resistentiae directio motus non mutatur, eius motus, quem a natura in linea recta prosequitur, perpetuo in eadem recta fiat necesse est.

Corollarium 4.

373. Si praeterea accedit potentia absoluta cuius directio perpetuo cum directione motus congruit, corpus quoque in medio resistente in linea recta progredietur. Neque enim potentia haec absoluta neque vis resistentiae directionem motus immutabit.

Scholion 3.

374. In hoc igitur capite, in quo motus tantum rectilineos exponere constituimus, alias potentias absolutas cum vi resistentiae non coniungemus, nisi quarum directio cum motus directione conuenit. Hanc ob rem omnes potentias, quas in capite praecedente adhibuimus, etiam in hoc capite cum vi resistentiae coniunctas considerare licebit. Antequam autem potentias absolutas inducemus, conuenit motum corporum a sola resistentiae vi impeditum examini subiicere, quo facilius a simplicioribus ad magis composita progrediamur.

Scholion 4.

375. In legis resistentiae expressione seu illa celeritatis functione, praeter altitudinem celeritati debitam *v* inesse possunt quantitates constantes, sed excludimus omnes quantitates variabiles a loco corporis pendentes. Fieri quidem potest, vt resistentia, quam corpus aequali celeritate latum patitur, maior minorue sit, prout corpus in alium atque alium locum perueniat; quemadmodum euenit, quando fluidum, in quo corpus mouetur in alio loco est densius in alio vero rarius, quo casu in resistentiae expressione loci rationem haberi oportet. Neque tamen in lege resistentiae locum respici conuenit, nam per eam resistentiae rationem, quando corpus in eodem loco variis celeritatibus moueri ponitur, exprimere volumus. Discrimen vero quod ex loci varietate oriri potest in exponente resistentiae comprehendemus, quo simul resistentiae intensitas indicatur.

DEFINITIO 19.

376. Exponens resistentiae est altitudo debita celeritati ei, quam si corpus habet, resistentiam patitur aequalem vi grauitatis. *Hac scilicet celeritate motum corpus tantum a resistentia retardatur, quantum a vi grauitatis sursum proiectum.*

Corollarium I.

377. Si igitur corpus in medio resistentiae motum celeritatem habeat altitudini *v* debitam, atque haec altitudo *v* sit ipsi exponenti resistentiae aequa-

aequalis, erit, dum corpus per spatium dx progreditur, $dv = -dx$; quia potentia resistentiae aequivalens hoc casu aequalis est vi grauitatis, quam semper ponimus $= 1$, et motum retardat.

Corollarium 2.

378. Datis ergo lege et exponente resistentiae motus diminutio potest definiri. Namque ex exponente intelligitur, quantam corpus habere deberet celeritatem, ut resistentiae vis aequalis esset grauitati, et ex lege resistentiae cognoscitur ratio, secundum quam diuersae celeritates a resistentia minuuntur.

Scholion I.

379. Exponens resistentiae est vel constans vel variabilis seu a loco, in quo est corpus, pendens. Illud accidit in medio seu fluido vniformi, quod corporibus vbique eandem resistentiam infert, si quidem eadem vbique moueantur celeritate. Huiusmodi medium resistens appellabimus vniforme, quippe quod in omnibus locis sui est simile. Exponens autem resistentiae variabilis est in medio seu fluido difformi, etiamsi in quoque loco seorsim resistentia eandem teneat legem. Nam quo densius est fluidum seu medium, in quo corpus versatur, eo quoque maiorem patitur corpus resistentiam aequali etiam motum celeritate. Maior scilicet erit celeritas resistentiam grauitati aequalem patiens in fluido rario-re, minor vero in densiore. Quia autem densitas

et raritas medii a loco pendet, perspicuum est resistentiae exponentem, si est variabilis a loco corporis pendere debere.

DEFINITIO 20.

380. Media resistentia similia hic vocantur, quae eandem habent resistentiae legem. Dissimilia vero, quae resistentiae lege differunt. *Sic aqua et mercurius sunt huiusmodi media similia, siquidem ambo haec fluida resistunt, uti videntur, in duplicata celeritatum ratione.*

Corollarium I.

381. Si ergo media resistentia similia inter se differunt, tota differentia consistit in exponente resistentiae, seu densitate et raritate. Sic in aqua exponens resistentiae est maior quam in argento vivo, quia hoc est fluidum densius illo.

Scholion.

382. Media similia cum corporibus aequaliter celeribus diuersas facere queant resistentias, prout eorum densitates inter se differunt, has ipsas densitates ex resistentia, quam corpori data celeritate motu inferunt, metiri conuenit. In fluidis enim, ut, cum de motu corporum in fluido agitur, docetur, resistentiae aequalibus celeritatibus factae sunt densitatibus fluidorum proportionales. Hancque proprietatem ad alia media quamcunque resistentiae legem tenentia transferimus: quia aliae re-
si-

fistentiae leges praeter duplicatam celeritatem rationem mere sunt imaginariae, et ad analyfin tantum exercendam adhiberi solent.

PROPOSITIO 49.

Problema.

383. Corporis in recta AP moti in medio quocunque resistente, cuius et lex et exponens resistentiae sunt cognita, data celeritate in puncto P, inuenire celeritatis decrementum, dum spatii elementum Pp percurrit.

Tab. IV
Fig. 1.

Solutio.

Posito elemento $Pp = dx$, sit altitudo celeritati in P debita $= v$, et exponens resistentiae $= q$. Denotat ergo \sqrt{q} celeritatem, quam si corpus in P haberet, vis resistentiae aequalis foret vi grauitatis $= 1$. Quamobrem, si esset $v = q$, tum haberetur vis resistentiae $= 1$ atque $dv = -dx$ (376, 377). Sit autem V ea celeritatis \sqrt{v} functio, qua resistentiae lex exprimitur, atque designet Q similem functionem ipsius \sqrt{q} , seu Q est huiusmodi quantitas, quae prodit, si in V loco v substituitur q . Resistentia ergo, quam patitur corpus celeritate \sqrt{q} motum, quae est $= 1$, se habebit ad resistentiam corporis celeritate \sqrt{v} moti, vt se habet Q ad V (367). Ex hoc elicitur vis resistentiae, quam corpus celeritate \sqrt{v} latum patitur, $= \frac{V}{Q}$. Quae cum motum retardet erit $dv = -\frac{V dx}{Q}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

384. Quia quantitas V est functio ipsius v et constantium, atque q , ideoque et Q vel est constans vel functio quaedam ipsius x (375); aequatio inuenta $dv = \frac{-vdx}{Q}$ sponte separatur. Habetur enim $\frac{dv}{v} = \frac{-dx}{Q}$, ex qua iutegrata vel saltem constructa totus corporis motus per AP cognoscitur.

Corollarium 2.

385. Cum vis resistantiae sit $= \frac{v}{Q}$, poterit ex hac medii densitas cognosci. Quia enim densitatem metimur ex resistantia, quam corpus data celeritate motum patitur, oportebit in $\frac{v}{Q}$ loco v substituere quantitatem constantem, quo facto habebitur resistantia vt $\frac{1}{Q}$. Densitas igitur medii quoque erit vt $\frac{1}{Q}$ seu reciproce vt Q .

Scholion.

386. Denotat hic $\frac{v}{Q}$ non tantum potentiam sollicitantem, sed iam ipsam vim retardatricem resistantiae, et hanc ob rem non opus est massam corporis in calculum inducere. Ceterum hic corporis massam constantem seu plurium corporum massas inter se aequales ponimus. Non enim consultum esse iudico hanc tractationem, quae non nisi in unico casu in usum venire potest, praeter necessitatem extendere et magis complicatam reddere.

PROPOSITIO 50.

Problema.

387. In medio resistenti uniformi, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, definire corporis moti celeritatem in singulis locis.

Solutio.

Moueat corpus in recta AP, sitque celeritas eius in puncto A debita altitudini c . Ponatur spatium percursum $AP = x$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Exponens resistentiae, qui est constans, vocetur $= k$, et lex resistentiae sit v^m , ita ut resistentia vbique sit ut celeritatis potestas exponentis $2m$. In praecedente igitur formula $dv = -\frac{v dx}{Q}$ abit hoc casu V in v^m , et Q , quia talis esse debet functio ipsius q seu k , qualis est v^m ipsius v , erit $= k^m$.

Habemus ergo hanc aequationem $dv = -\frac{v^m dx}{k^m}$, seu

$\frac{dv}{v^m} = -\frac{dx}{k^m}$. Cuius integralis est $\frac{v^{1-m}}{1-m} = C - \frac{x}{k^m}$. Con-

stans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $x = 0$ transmutari debeat v in c , quamobrem erit

$C = \frac{c^{1-m}}{1-m}$. Hinc itaque resultabit aequatio ista

$v^{1-m} = c^{1-m} - \frac{(1-m)x}{k^m}$, seu $v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m} k^m - (1-m)x}{k^m}}$,

si est $m < 1$. At si erit $m > 1$, habebitur

$v = \frac{c k^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)}}$. Vnicus vero casus, quo

X

est

est $m=1$, in his formulis non comprehenditur, sed deriuari debet ex aequatione differentiali, quae, facto $m=1$, erit huiusmodi $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{k}$, cuius integralis est $lv = C - \frac{x}{k}$. Simili vero modo erit $C=lc$, ideoque $lv = lc - \frac{x}{k}$. Logarithmis ad numeros reductis habebitur ergo $v = ce^{\frac{-x}{k}}$. Quemcunque igitur m habeat valorem, corporis celeritas in quouis loco rectae AP innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

388. Si resistentia medii est quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=1$. Quamobrem pro hoc casu, qui solus in rerum natura existere putatur, valet singularis solutionis casus $v = ce^{\frac{-x}{k}}$. Ex quo apparet corpus celeritatem ante non amittere totam, quam spatium infinitum x percurrerit.

Corollarium 2.

389. Si medium in maiore quam duplicata celeritatum ratione resistit, erit $m > 1$, atque

$$v = \frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{m-1}}}. \quad \text{Perspicitur autem ex}$$

hac aequatione celeritatem non euanescere, nisi ponatur $x = \infty$.

Corollarium 3.

390. Hoc vero differt iste casus a priore, quo erat $m=1$, quod in illo, si fuerit celeritas initialis infinite magna, prodeat vbique ea tanta. Hoc

vero casu, quo est $m > 1$, si ponatur $c = \infty$, prouenit $v = \sqrt[m-1]{\frac{k^m}{x}}$. Erit ergo v semper finitae magnitudinis, nisi sit $x = 0$ vel $= \infty$.

Corollarium 4.

391. Praeterea hoc casu, quo $m > 1$, corpus an- Tab. IV.
tequam peruenit in punctum A, semper alicubi puta Fig. 2.
in C habuit celeritatem infinite magnam. Ad hoc punctum C inueniendum, fieri debet x negatiuum, et $k^m + (m-1)c^{m-1}x$ poni aequale nihilo. Vnde in-

$$\text{uenitur } AC = \frac{k^m}{(m-1)c^{m-1}}.$$

Corollarium 5.

392. Si resistentia fit in minore quam dupli- Tab. IV.
cata ratione celeritatum, ideoque est $m < 1$, erit Fig. 1.

$$v = \sqrt[m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}. \text{ Celeritas corporis ergo}$$

euanescit in puncto C, si accipiatur $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$.
Consequenter, cum corpus in C peruenerit, ibi perpetuo quiescet, neque ultra progredietur.

Corollarium 6.

393. Si ponatur $m = 0$, erit resistentia constans et aequaliter aget in corpus siue quiescens siue motum. Abit ergo hoc casu resistentia in potentiam absolutam et aequalem vi grauitatis. Nam, quoniam si est $v = k$ resistentia aequalis ponitur vi grauitatis, etiam quacunque alia celeritate corpus moueatur, tantundem resistentiae patietur.

Scholion I.

394. Exposuimus in his corollariis primarias motuum differentias, si fuerit vel $m = 1$ vel maior vel minor unitate. Hae vero differentiae breuibus hisce canonibus comprehendi possunt: si est $m = 1$, corpus per totum spatium nusquam neque celeritatem infinitam neque nullam habebit. Deinde si $m > 1$, corpus alicubi habeat celeritatem infinitam necesse est, euanescentem verò nusquam. Denique si $m < 1$ corpus alicubi celeritatem habebit nullam, infinitam vero nusquam.

Scholion 2.

395. Haec celeritatis diminutio permanet eadem in quamcunque plagam corpus moueatur, quia resistantiam vbique eandem ostendit. Neque enim hic motus similis est ei, qui a potentia absoluta contra vrgente diminuitur, quo fit, vt corpus in contrariam plagam motum tantundem acceleretur, quantum ante erat retardatum. Sed ad motum in medio resistente diminutum restituendum atque rursus pariter accelerandum ac ante diminuebatur, oportet vim resistantiae negatiuam statui, atque ita in vim propellentem transmutari. Tum enim fiet $dv = \frac{v dx}{Q}$, ex quo apparet celeritatem tantundem augeri, quantum ante minuebatur. Vi ergo resistente in propellentem transmutata, motus corporis fiet retrogradus, atque ex P in A reuertetur ita, vt in singulis punctis spatii AP eandem recuperet celeritates, quas ante ibidem habebat.

Scho-

Scholion 3.

396. In casibus, quibus $m < 1$, corpusque tandem ad quietem peruenit, occurrit eadem difficultas, cuius supra (316) mentio est facta, si motum transmutanda vi resistente in propellentem velimus conuertere. Nam si corporis cum in C peruenit celeritas est nulla, vis propellens $\frac{v^m}{k^m}$ quoque euanescit, si quidem m non est numerus negatiuus, et hanc ob rem nunquam ex loco C corpus poterit depelli. Hoc igitur casu motus diminutionis non poterit in motum augmentationis conuerti. Calculus quidem contrarium ostendit, nam si dicatur $CP = y$, erit altitudo debita celeritati in P, nempe $v = \sqrt{\frac{1-m(1-m)y}{k^m}}$. Quod autem ex hac aequatione ipsa absurdum sequatur, hinc apparet quod $\frac{1}{1-m}$ exponens ipsius y est vnitate maior, ideoque scala altitudinum celeritatibus deuitarum rectam AC in C tangat. Quoties enim hoc euenit, corpus ex puncto C nunquam egredi potest, etiamsi calculus secus commonstret (319).

PROPOSITIO 51.

Problema.

397. *Moto corpore in medio resistente vniformi, quod resistantiam facit potestati cuiusque celeritatum proportionalem; determinare tempus, quo corpus spatium quodcumque AP percurrit.*

Solutio.

Positis ut in praecedente problemate, celeritate initiali in $A = \sqrt{c}$, $AP = x$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, exponente resistentiae $= k$ et lege $= v^m$, ita ut vis resistentiae fit ut celeritatis potestas exponentis $2m$.

Quia iam est $v = \frac{c k^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)}}$ (387) si qui-

dem $m > 1$, erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{c k^{\frac{m}{m-1}}}}{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}$. Ele-

mentum ergo temporis quo spatium dx percurritur

est $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx (k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt{c k^{\frac{m}{m-1}}}}$, cuius integralis est

$\frac{C + 2(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c k^{\frac{m}{m-1}}}}$, quod exprimit

tempus per spatium AP , si modo constans C recte determinatur, id quod fit efficiendo, ut facto $x = 0$ totum tempus evanescat. Debebit itaque esse

$C = \frac{2k^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c k^{\frac{m}{m-1}}}}$; quamobrem totum tempus

per spatium $AP = \frac{2(k^m + (m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - 2k^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}} k^{\frac{m}{2m-2}}}$

Quae

Quae expressio quoque valet si $m < 1$. At si est $m = 1$,

peculiari operatione opus est, nam quia est $v = ce^{\frac{x}{k}}$,

erit $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{\frac{x}{k}} dx}{\sqrt{c}}$, cuius integrale est $\frac{2ke^{\frac{x}{k}} - 2k}{\sqrt{c}}$, quod

exprimit tempus, quo spatium AP percurritur.

Quemcumque ergo valorem habeat m , tempus ex

his formulis per spatium quodcumque determinatur.

Corollarium 1.

398. Si ergo resistentia quadratis celeritatum est proportionalis, et consequenter $m = 1$, tempus quo corpus spatium infinitum describit, quoad scilicet totum suum motum amittit, crit quoque infinitum.

Corollarium 2.

399. Si vero est $m > 1$, erit quoque $2m > 1$, et consequenter formula exprimens tempus per AP inuenta recte est disposita. Ex ea autem apparet, tempus, donec corpus totum motum amittat, fore infinitum, id quod facile ex hoc perspicitur, quod spatium quoque fit infinitum (389).

Corollarium 3.

400. Quia vero hoc casu corpus, antequam

Tab. IV.

Fig. 2.

peruenit in A, alicubi in C habuit celeritatem infinitam, tempus etiam, quo ex C in A pertingit in-

notescet facto $k^m + (m-1)c^{m-1}x = 0$ (391). Quo

facto resultat tempus per CA = $\frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$.

Co-

Corollarium 4.

401. Si fuerit $m < 1$, duo casus sunt a se inuicem distinguendi, quibus m vel maius est quam $\frac{1}{2}$ vel minus. Si enim est $m > \frac{1}{2}$, manet $2m-1$ numerus affirmatiuus, et tempus quo spatium AP absoluitur

$$\text{erit} = \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}} \cdot 2k^m}{(2m-1)(c^{1-m}k^m - (1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}} (2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$$

Corollarium 5.

Tab. IV. 402. Quia corpus hac hypothefi motum, Fig. 1. omnem celeritatem amittit, cum in C peruenit existente $AC = \frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$ (392), erit tempus, quo spatium hoc AC percurrit, ob denominatorem $(c^{1-m}k^m - (1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}$ euanescentem, infinitum. Hoc igitur euenit, si m intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ continetur.

Corollarium 6.

403. Sin vero fuerit $m < \frac{1}{2}$ erit tempus, quo spatium quodcunque AP percurritur $= \frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m} - \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}(c^{1-m}k^m - (1-m)x)^{\frac{1-2m}{2-2m}}}{1-2m}$. Ex quo apparet tempus, quo corpus ex A in C, vbi totum suum motum amittit, esse finitum et $= \frac{2c^{1-2m}k^m}{1-2m}$. Fit enim hoc casu $c^{1-m}k^m - (1-m)x = 0$ (392).

Scho-

Scholion I.

404. In his autem formulis non continetur casus, quo $m = \frac{1}{2}$. i. e. si resistentia est celeritatibus proportionalis. Hic igitur casus ex formula differentiali temporis est deducendus. Posito autem $m = \frac{1}{2}$ prodit $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{k}}{2\sqrt{ck-x}}$. Cuius integrale a logarithmis pendet atque est $= 2\sqrt{k}l\frac{C}{2\sqrt{ck-x}}$. Constans vero C debet esse $2\sqrt{ck}$, quo tempus evanescat facto $x=0$. Consequenter tempus quo spatium AP percurritur erit $2\sqrt{k}l\frac{2\sqrt{ck}}{2\sqrt{ck-x}}$.

Corollarium 7.

405. In hoc itaque casu, quo $m = \frac{1}{2}$, quia spatium AC, quo corpus percurrere totum motum perdit, est $= 2\sqrt{ck}$ (392), tempus quo hoc spatium percurritur est infinitum.

Corollarium 8.

406. Ex his igitur omnibus colligitur tempus, quo corpus totum suum motum amittit esse infinitum, si fuerit $2m$ vel aequalis unitati, vel ea maior; contra vero si est $2m$ unitate numerus minor, tempus totius motus esse finitum.

Scholion 2.

407. Si vis resistentiae transmutatur in propellentem, quo casu motus fit retrogradus et simili modo augetur, quo ante minuebatur; tempora eadem esse debebunt, quae hic sunt definita. Nam quia corporis spatium AP percurrentis in singulis locis eadem est velocitas siue ex A in P motu retar-

dato siue vicissim ex P in A motu accelerato feratur, inter vtrumque tempus discrimen esse non potest. Attamen iis casibus, quibus spatium totum AC tempore finito absoluitur, haec regula non valet, quia corpus in C quiescens nullam vim propellentem sentire potest (396). Semper vero huic regulae confidere possumus, si corpori finita celeritas iniitialis tribuatur.

PROPOSITIO 52.

Problema.

Tab. IV. 408. *Sollicitetur corpus, quod mouetur in medio quocunque resistente, a potentia quacunque absoluta, determinare celeritatis incrementum vel decrementum, dum quodvis elementum Pp percurrit.*

Fig. 3.

Solutio.

Sit corporis celeritas in P debita altitudini v , et elementum percurrendum $Pp = dx$. Sit porro potentia absoluta seu potius eius vis accelerans in $P = p$, atque exponens resistentiae $= q$. Designet V eam ipsius v functionem, cui resistentia proportionalis est, sitque Q talis functio ipsius q , qualis V est ipsius v . His positis retardabitur corpus, dum per elementum Pp mouetur, vi resistentiae $\frac{V}{Q}$ (383); interea vero simul acceleratur potentia absoluta p . Quamobrem corpus elementum Pp percurrens accelerabitur a vi $p - \frac{V}{Q}$. Ex quo igitur erit $dv = p dx - \frac{V}{Q} dx$.

Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

409. Si igitur est $p > \frac{v}{Q}$ celeritas corporis elementum Pp percurrentis augebitur; sin vero $p < \frac{v}{Q}$, eius celeritas diminuetur. Atque si fuerit $p = \frac{v}{Q}$ celeritas neque augebitur, neque minuatur, sed immutata manebit per elementum Pp .

Corollarium 2.

410. Si potentia absoluta fuerit motui contraria, eumque retardet; erit $dv = -pdx - \frac{v}{Q}dx$. Hoc igitur casu corpus ab vtraque vi retardabitur.

Scholion I.

411. Si potentia absoluta corpus deorsum trahat, vt in solutione problematis posuimus, atque corpus sursum moueatur, habebit et potentiam absolutam et vim resistentiae contrariam. Tum igitur habebitur ista aequatio $dv = -pdx - \frac{v}{Q}dx$. Ex quo apparet motum ascendentem non similem fore descendenti, quia vis sollicitans in ascensu non est negatiua ratione vis sollicitantis in descensu. Quo igitur ascensus similis sit descensui atque corpus in vtroque motu in iisdem locis eandem habeat celeritatem, oportet vim resistentiae in ascensu transmutari in propellentem. Quo facto habebitur $dv = -pdx + \frac{v}{Q}dx$, ex qua aequatione perspicitur corpus ascendens per Pp tantundem retardari, quantum ante in descensu accelerabatur.

Scholion 2.

412. Aequatio inuenta $dv = p dx - \frac{v}{Q} dx$ hac summa extensione ob defectum analyseos neque separari neque construi potest: et hanc ob rem celeritas corporis in P non potest determinari. Multo minus igitur tempus, quo spatium AP absoluitur poterit assignari. Relinqui ergo oportet hanc generalem aequationem, atque descendi ad casus particulares, quibus aequatio potest separari ac celeritas definiri. Triplici vero modo aequatio ista separationem indeterminatarum x et v admittit. Quorum primus est, si x plus vna dimensione non habet. Secundus si v vnicam tantum obtinet dimensionem. Tertius casus habebitur, si x et v simul vbique eundem dimensionum numerum constituunt; vel si aequatio ad aliam hac proprietate praeditam reduci poterit.

Corollarium 3.

413. Primus casus ergo habetur, si et p et q fuerint constantes, tum enim quia et Q constans erit, prodit $dx = \frac{Q dv}{pQ - v}$, in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Praeterea vero etiam aequatio separari poterit si fuerit $p = \frac{\Lambda}{Q}$. Tum enim erit $\frac{dv}{\Lambda - v} = \frac{dx}{Q}$, quae quia V ab v , et Q ab x pendent, construi potest.

Corollarium 4.

414. Quo v vnicam habeat dimensionem oportet sit $V = v$, quo casu quoque erit $Q = q$, et
aequa-

aequatio generalis abibit in hanc $dv = p dx - \frac{v dx}{q}$, quae in determinatarum separationem admittit.

Corollarium 5.

415. Quo appareat, quando aequatio homogenea sit futura, sit $V = v^\alpha$, et $q = x^\beta$, erit $Q = x^{\alpha\beta}$. Sit porro $p = x^\gamma$, et computetur v constituere δ dimensiones dum x vnam adimplet. His positis

aequatio illa abibit in hanc $dv = x^\gamma dx - \frac{v^\alpha dx}{x^{\alpha\beta}}$ in cuius

primo termino censendae sunt δ dimensiones; in secundo $\gamma + 1$ dimensiones, et in tertio $\alpha\delta + 1 - \alpha\beta$. Debet igitur esse $\delta = \gamma + 1$, atque $\gamma + 1 = \alpha\gamma + \alpha + 1 - \alpha\beta$, seu $\gamma(\alpha - 1) = \alpha(\beta - 1)$. Quoties igitur fuerit $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ toties aequatio ad homogeneitatem potest reduci, adeoque celeritas ipsa determinari.

Scholion 3.

416. Loco V , q et p alias functiones non assumere licet nisi potestates ipsarum v et x . Nam, quia in V non inesse potest x atque in q et p non ingreditur v , ac insuper numerus dimensionum ipsarum x et v vbique vel debet esse idem, vel ad eundem reducibilis; loco harum quantitarum necessario potestates debent assumi. Hanc ob rem posui $V = v^\alpha$, $q = x^\beta$, et $p = x^\gamma$, atque superiorem analogiam $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ elicui. Neglexi quidem coefficientes, qui salua hac reductione possunt adici: nam homogeneitas hisce perturbari non potest. Itaque potest poni $q = Bx^\beta$ et $p = Cx^\gamma$, manente

eadem analogia. Pro x vero non solum spatium percursum AP potest substitui, sed illud ipsum quacun- que constante auctum, dummodo eius differen- tiale sit dx vel huius aliquod multiplum. Ad v^α coefficientem addere non est opus, quia per V ratio tantum resistentiae indicatur.

Corollarium 6.

417. Si medium resistens est vniforme ideo- que $\beta=0$; erit $\alpha=-1:\gamma$. Vnde fit $\gamma=\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Quare si fuerit lex resistentiae v^α , potentia absoluta debe- bit esse $=Bx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, quo aequatio celeritatem defini- ens ad homogeneitatem possit reduci.

Scholion 4.

418. Hos motus rectilineos in medio resi- stente ita sumus pertractaturi, vt primo potentiam absolutam constantem ponamus, tumque ad quasuis vires centripetas progrediamur. Hisque expositis quaestiones inuersas contemplabimur, quemadmo- dum in praecedente capite fecimus, atque ex datis proprietatibus motus cum potentiam absolutam tum resistentiae vim eruemus.

PROPOSITIO 53.

Problema.

419. *Posita potentia absoluta, et medio resisten- te vniformi; determinare corporis descendens celeri- tatem in singulis locis, si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis.*

Solutio.

Manentibus vt haectenus $AP=x$, celeritate in $P=\sqrt{v}$, fit potentia vniformis $=g$, exponens resistantiae $=k$. Quia lex resistantiae est v , erit vis resistantiae $=\frac{v}{k}$. Ex quibus prodit $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$, seu $dx=\frac{kdv}{gk-v}$; cuius integralis est $x=kl\frac{c}{gk-v}$. Sit celeritas initialis in A debita altitudini c debeat esse $C=gk-c$, atque $x=kl\frac{gk-c}{gk-v}$. Logarithmorum loco sumantur numeri $e^{\frac{x}{k}}=\frac{gk-c}{gk-v}$; ex qua aequatione prouenit $e^{\frac{x}{k}}v=c+gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ seu $v=e^{-\frac{x}{k}}c+gk(1-e^{-\frac{x}{k}})=e^{-\frac{x}{k}}(c-gk)+gk$. Q. E. I.

Corollarium I.

420. Si corpus in A motum ex quiete inchoet, erit $c=0$. Hoc igitur in casu habebitur $v=gk(1-e^{-\frac{x}{k}})$, quae expressio, quo maior accipitur x , magis quoque augetur, certum tamen terminum nunquam potest transgredi. Nam sumto $x=\infty$, habebitur $v=gk$. Est ergo \sqrt{gk} asymtotos celeritatum corporis descendens, quam ante non acquirit, quam ex spatio infinito fuerit delapsum.

Corollarium 2.

421. Si celeritas initialis \sqrt{c} fuerit huic asymtoto \sqrt{gk} aequalis, motus corporis descendens erit vniformis, fit enim $v=gk=c$. Apparet hoc etiam ex aequatione differentiali, $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$.
Nam

Nam si semel fuerit $v = gk$, incrementum celeritatis erit perpetuo euanescens.

Corollarium 3.

422. Si fuerit $c < gk$, corpus descendens movebitur motu accelerato, nunquam tamen celeritatem \sqrt{gk} acquirat, nisi spatio infinito percurso. Si enim est $c < gk$, quantitas $e^{\frac{-x}{k}}(c - gk)$ semper est negativa, et hanc ob rem v perpetuo erit minor quam gk .

Corollarium 4.

423. Si celeritas initialis \sqrt{c} fuerit maior quam \sqrt{gk} , erit $e^{\frac{-x}{k}}(c - gk)$ quantitas positiva, ideoque v ubique maior quam gk . Percurso vero spatio infinito fiet $v = gk$. Ex quo perspicitur corpus hoc casu motu retardato descendere.

Scholion I.

424. Comprehendi debet in hac aequatione $v = e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk$ etiam casus, quo corpus in vacuo a sola potentia absoluta sollicitatum descendit. Hicque habebitur, si resistentia ponatur euanescens, seu exponens k infinitus, tum enim resistentiae vis $\frac{v}{k}$ euanescit. Difficile autem videtur determinatu, quem valorem habitura sit altitudo v , facto $k = \infty$.

Ad hunc vero inveniendum plurimum conducit $e^{\frac{-x}{k}}$ in seriem aequivalentem $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{6k^3} +$ etc. trans-

mu-

mutare, cuius si k est ∞ sufficit loco accipere

$1 - \frac{x}{k}$. Quo valore loco $e^{\frac{-x}{k}}$ substituto habebitur $v = c - \frac{cx}{k} + gx = c + gx$ ob euanescentem terminum $\frac{cx}{k}$.

Quae aequatio conuenit cum ea, quam supra (239) inuenimus; nam quod ibi est $\frac{g}{A}$ hic nobis est tantum g . Quoniam g non solum potentiam absolutam, sed vim eius accelerantem exhibet.

Scholion 2.

425. Si k non quidem habet valorem infinitum, sed tamen perquam ingentem; prout accidit, quando corpora vehementer graui in fluido tenui delabuntur; magnam praestabit utilitatem superior series, sumendis tantum tribus terminis primis

$1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2}$ loco $e^{\frac{-x}{k}}$: error enim erit insensibilis. Hoc

igitur casu si corpus ex quiete delabatur, ut sit $c = 0$,

erit $v = gx - \frac{gx^2}{2k}$. Ex qua aequatione vero proximus ipsius v valor eruitur. At si prorsus nihil negligere

velimus, erit $v = gx - \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^2}{6k^2} - \frac{gx^4}{24k^3} + \frac{gx^5}{120k^4} -$ etc.

qua serie infinita verus valor ipsius v exprimitur.

PROPOSITIO 54.

Problema.

426. Determinare tempus, quo corpus in medio resistente uniformi, existente resistentia celeritatum quadratis proportionalis, a potentia absoluta uniformi sollicitatum per spatium AP descendit.

Z

So-

Solutio.

Positis ut supra $AP = x$, celeritate in $A = \sqrt{c}$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, exponente resistentiae $= k$, erit

$$v = gk + e^{\frac{-x}{k}}(c - gk), \quad (419). \quad \text{Ex quo habebitur elementum temporis } \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{e^{\frac{-x}{k}}(gk + c - gk)}. \quad \text{Ad quod}$$

integrandum pono $e^{\frac{-x}{k}} = z$ et $c - gk = b$, breuitatis causa; eritque $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-k dz}{z \sqrt{(gk + bz)}}$. Fiat porro $gk + bz = r^2$, erit $z = \frac{r^2 - gk}{b}$, et $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-2k dr}{r^2 - gk} = \frac{dr \sqrt{\frac{k}{g}}}{r + \sqrt{gk}} - \frac{dr \sqrt{\frac{k}{g}}}{r - \sqrt{gk}}$.

Quocirca erit $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = C + \sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{r + \sqrt{gk}}{r - \sqrt{gk}}$. Restituatur loco r suus valor $\sqrt{(gk + e^{\frac{-x}{k}}(c - gk))}$, et habebitur tempus descensus per spatium $AP = C + \sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} - \sqrt{gk}}$. Quod quo euanes-

cat facto $x = 0$, debet esse $C = -\sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{\sqrt{c + \sqrt{gk}}}{\sqrt{c - \sqrt{gk}}}$. Ex his conficitur tempus descensus per AP

$$= \sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} - \sqrt{gk}} - \sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{\sqrt{c + \sqrt{gk}}}{\sqrt{c - \sqrt{gk}}}. \quad \text{Quae}$$

expressio simplicior reddi potest ita, ut prodeat

$$\frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk)} + \sqrt{gk}}{\sqrt{c + \sqrt{gk}}}; \quad \text{cui itaque tempus descensus per } AP \text{ aequale est.} \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium I.

427. Si celeritas initialis fuerit = 0, ideoque $c=0$, erit tempus, quo corpus per altitudinem AP descendit $= \frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}} l \sqrt{(1 - e^{-\frac{x}{k}}) + 1} = \frac{x}{\sqrt{gk}} - 2\sqrt{\frac{k}{g}} l \frac{1 - \sqrt{(1 - e^{-\frac{x}{k}})}}{e^{-\frac{x}{k}}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}} l \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{x}{k}} - 1}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}} l (\sqrt{e^{\frac{x}{k}} + 1} + \sqrt{e^{\frac{x}{k}} - 1})$.

Scholion I.

428. Formula etiam generalis temporis per AP cum celeritate initiali \sqrt{c} transmutatur posito

$$2\sqrt{\frac{k}{g}} l e^{\frac{x}{2k}} \text{ loco } \frac{x}{\sqrt{gk}} \text{ in hanc } 2\sqrt{\frac{k}{g}} l \frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{k}} gk + c - gk)} + \sqrt{e^{\frac{x}{k}} gk}}{\sqrt{c + \sqrt{gk}}}$$

Ex qua ea, quam modo pro casu $c=0$ inuenimus, sponte sequitur, prodit enim $2\sqrt{\frac{k}{g}} l (\sqrt{e^{\frac{x}{k}} + 1} + \sqrt{e^{\frac{x}{k}} - 1})$.

Corollarium 2.

429. Si ponatur $c=gk$, quo casu motus descensus est aequabilis (421), prodibit tempus descensus per spatium AP ex hac vltima forma

$$= 2\sqrt{\frac{k}{g}} l \sqrt{e^{\frac{x}{k}}} = \frac{x}{\sqrt{gk}}, \text{ quemadmodum ex natura motu-}$$

aequabilis quoque reperitur. Tempus enim debet ex primi spatio percurso x diuiso per celeritatem \sqrt{gk} .

Scholion 2.

430. Tempora haec autem habebuntur in minutis secundis, si inuentae expressiones per 250

diuidantur, et lineae c , k , x in scrupulis pedis Rhenani exhibeantur (222).

Scholion 3.

431. Posita celeritate initiali $c=0$, si detur tempus, quo spatium AP descendendo percurritur, poterit ipsum spatium AP determinari. Nam sit tempus t minorum secundorum, denturque k et x in scrupulis pedis Rhenani, erit $t = \frac{1}{125} \sqrt{\frac{k}{g}} l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}} + 1} + \sqrt{e^{\frac{x}{k}} - 1})$. Consequenter $e^{\frac{125t\sqrt{g}}{k}} = \sqrt{e^{\frac{x}{k}} + 1}$

$+ \sqrt{e^{\frac{x}{k}} - 1}$. Hinc inuenitur $e^{\frac{x}{2k}} = \frac{e^{\frac{250t\sqrt{g}}{k}} + 1}{2e^{\frac{125t\sqrt{g}}{k}}}$ atque

$x = 2kl \left(\frac{e^{\frac{250t\sqrt{g}}{k}} + 1}{2} - 250t\sqrt{gk} \right)$, vel etiam $x = 250t\sqrt{gk} - 2kl \frac{2}{e^{\frac{125t\sqrt{g}}{k}} + 1}$. Hocque spatium x reperitur

in partibus millesimis pedis Rhenanis.

Scholion 4.

432. Si k fuerit quantitas vehementer magna, et tempus tantum quam proxime desideretur per AP, existente celeritate initiali $\sqrt{c=0}$; assumo

hanc formulam $\frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}} l(\sqrt{1 - e^{-\frac{x}{k}}} + 1)$. In qua,

quia $\sqrt{1 - e^{-\frac{x}{k}}}$ fere euanescit si k est valde magnum,

erit $l(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{x}{k}}}) = \sqrt{1 - e^{-\frac{x}{k}}} - \frac{1 + e^{-\frac{x}{k}}}{2} +$
(1 - e

$$\frac{(1 - e^{-\frac{x}{k}})^3}{3} - \frac{(1 - e^{-\frac{x}{k}})^2}{4} + \frac{(1 - e^{-\frac{x}{k}})^5}{5} \dots$$

Est vero etiam quam proxime $\sqrt{(1 - e^{-\frac{x}{k}})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{xx}}{4k\sqrt{k}} + \frac{5x^2\sqrt{x}}{96k^2\sqrt{k}}$. Ex quo

$$\text{prouenit } l(1 + \sqrt{(1 - e^{-\frac{x}{k}})}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{x}{2k} + \frac{x\sqrt{x}}{12k\sqrt{k}} - \frac{x^2\sqrt{x}}{480k^2\sqrt{k}}$$

Quamobrem habebitur tempus descensus per ipati-

$$\text{um AP} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$$

Corollarium 3.

433. Quando itaque resistentia euanescit, ideoque fiat $k = \infty$, prodibit descensus corporis per AP a sola potentia absoluta g sollicitati. Huius vero descensus tempus ex hac postrema formula, ob euanescentes omnes terminos praeter primum, inenitur $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$, quemadmodum iam supra (218) est inuentum; neglecto numero m et g posito loco $\frac{g}{x}$ vt hic instituimus.

PROPOSITIO 55.

Problema.

434. Si corpus in medio resistente uniformi, quod resistit in duplicata ratione, ex B data celeritate sursum proiciatur, atque sollicitetur potentia uniformi g ; determinari oporteat celeritatem corporis in singulis locis.

Tab. IV.

Fig. 4.

Solutio.

Sit celeritas in puncto B $= \sqrt{c}$, et celeritas in P $= \sqrt{v}$, ponatur BP $= x$, et resistentiae exponens

Z 3

$= k;$

$=k$; Quia nunc motus et a potentia absoluta g et a resistencia $\frac{v}{k}$ retardatur erit $dv = -gdx - \frac{vdx}{k}$. Hinc fit $dx = \frac{-kdv}{gk+v}$ et $x = k \int \frac{C}{gk+v}$, vbi debet esse $C = gk + c$ quo fiat $v = c$ facto $x = 0$. Quamobrem habebimus $x = k \int \frac{gk+c}{gk+v}$; ex qua erit $v = e^{-\frac{x}{k}}(c+gk) - gk$, quae determinat celeritatem in quouis loco P. Q. E. I.

Corollarium I.

435. Pertingat corpus hoc modo sursum poiectum ad A vsque, et sit celeritas in A $= 0$. Quocirca altitudo tota BA reperietur faciendo $v = 0$, quo casu fit $e^{-\frac{x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$ seu $x = k \int \frac{c+gk}{gk}$, cui quantitati aequalis est altitudo BA.

Corollarium 2.

436. Euanescat resistencia, seu fiat $k = \infty$ vt motus fiat in vacuo, erit $e^{-\frac{x}{k}} = 1 - \frac{x}{k}$. Hoc igitur casu erit $v = c - gx$. Eademque aequatio reperitur, si corpus a potentia sola absoluta g sollicitatum consideretur.

Corollarium 3.

437. Si medium resistens fuerit valde rarum, ita vt k numerum vehementer magnum significet,

poterit loco $e^{-\frac{x}{k}}$ accipi $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{3k^3}$. Ex quo erit

$v = c - \frac{cx}{k} + \frac{cx^2}{2k^2} - gx + \frac{gx^2}{2k} - \frac{gx^3}{3k^2} q. p.$ Quo autem haec quantitas valorem vero proximum ipsius v exhibeat,

at, non solum opus est ut k sit numerus valde magnus, sed insuper requiritur ut altitudo x multo sit minor quam k , quo $e^{\frac{-x}{k}}$ non multum ab unitate differat.

Scholion I.

438. Iam animaduertimus descensum corporis per AB non similem esse ascensui, si medium in utroque casu resistens ponatur. Potest tamen descensus per AB cogitatione concipi, qui prorsus similis sit ascensui, ita ut corpus tam in ascensu quam descensu in puncto P eandem habeat celeritatem. Ad hoc autem statui oportet in descensu et potentiam absolutam accelerantem, et medium propellens. Nam quia in ascensu ambae motui erant contrariae, necesse est ut in descensu utraque secunda constituatur, quo motus fiat perfecte retrogradus.

Corollarium 4.

439. Posita igitur altitudine $AP=y$, et celeritate hoc descensu $=Vv$, erit $dv=pdv+\frac{vdy}{k}$. Ex qua integrata prodit $v=gk^{\frac{y}{k}}-1$.

Scholion 2.

440. Congruit haec aequatio cum priore quam accensum contemplantes eruimus. Est enim $y=AB-x=k \log \frac{c+gk}{gk}-x$, ideoque $e^{\frac{y}{k}}=\frac{c+gk}{gk} \cdot e^{\frac{-x}{k}}$. Ex hoc igitur prodit $v=e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk$; quemadmodum

dum supra inuenimus in solutione problematis. Apparet igitur in hoc descensu corpus in singulis punctis P easdem esse habiturum celeritates, quas habuit ibidem in ascensu. Idem ergo etiam necesse est reperiatur tempus descensus hoc modo considerati, ac ex ascensu prouenit.

PROPOSITIO 56.

Problema.

441. Determinare tempus ascensus per BP corporis in medio resistente in duplicata ratione celeritatum ex B data celeritate sursum proiecti, et interim sollicitati a potentia absoluta g deorsum tendente.

Solutio.

Positis celeritate in B = \sqrt{c} , eaque in P = \sqrt{v} ; deinde BP = x et exponente resistentiae = k , erit

$v = e^{-kx} (c + gx) - gx$ (434). Ex quo oritur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\sqrt{e^{-kx} (c + gx) - gx}}$. Ad quod in-

tegrandum pono ut supra $e^{-kx} = z$ et $c + gx = b$, breu. gr. quo facto habebitur $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-k dz}{z \sqrt{(bz - gx)}}$. Sit $bz - gx = r^2$,

erit $z = \frac{r^2 + gx}{b}$, atque $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-2k dr}{r^2 + gx}$, cuius integratio a

Tab. IV.
Fig. 5.

quadratura circuli pendet. Ad hoc igitur construendum constituatur quadrans circuli abc cuius radius ac fit = 1, sumatur in eo tangens at = $\frac{r}{\sqrt{gk}}$, eritque arcus am = $\int \frac{dr \sqrt{gk}}{r^2 + gx}$ qui signetur hoc modo A $\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Hu-

ius-

iusmodi scilicet expressio $A t$ nobis denotet arcum circuli, cuius tangens est t existente radio $=r$.

Hanc ob rem erit $\int \frac{-2kdr}{r^2+gk} = -2\sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}}$

$A \cdot \frac{r}{\sqrt{gk}}$. Quia autem est $r = \sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk)}$, erit

$\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk}{gk}}$. Quae quantitas

cum debeat euanescere facto $x=0$, dabit $C = 2\sqrt{\frac{k}{g}} A \cdot \sqrt{\frac{c}{gk}}$.

Tempus igitur ascensus per spatium BP inue-

Tab. IV.
Fig. 4.

nitur $= 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{c}{gk}} - 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk}{gk}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}}$

$(A \cdot \sqrt{\frac{c}{gk}} - A \cdot \sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk}{gk}}) = 2\sqrt{\frac{k}{g}} A \cdot \frac{\sqrt{cgk} - \sqrt{(gke^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - g^2k^2)}}{gk + \sqrt{(ce^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - cgk)}}$

Q. E. I.

Corollarium I.

442. Quia tota altitudo AB ad quam corpus pertingere potest habetur faciendo $x = kl \frac{c+gk}{gk}$ quo

casu fit $e^{\frac{-x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$; Inuenietur tempus totius ascensus $= 2\sqrt{\frac{k}{g}} A \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{gk}}$.

Corollarium 2.

443. Quare si fuerit $c = gk$ erit tempus totius ascensus per BA $= 2\sqrt{\frac{k}{g}} A \cdot 1$. At arcus cuius tangens aequatur radio est peripheriae pars octaua. Posita itaque quarta peripheriae parte $amb = \pi$, erit tempus ascensus per BA $= \pi \sqrt{\frac{k}{g}}$.

A 2

Co-

Corollarium 3.

444. Ex hoc quoque intelligitur, si celeritate infinita corpus ex B sursum proiiciatur tempus ascensus totius nihilo minus fore finitum, fit enim $= 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \infty$; qui arcus cum sit quarta peripheriae pars $= \pi$, erit tempus totius ascensus $= 2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

Corollarium 4.

445. Si loco celeritatis initialis Vc detur tota altitudo $BA = a$, ad quam corpus pertingit, quia est $a = kl^{\frac{c+gk}{gk}}$ et propterea $c = gk(e^{\frac{a}{k}} - 1)$; reperietur tempus totius ascensus per $BA = 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$.

Scholion I.

446. Si transmutetur ascensus in descensum medio accelerante, ut supra assumimus (438) et vocetur $AP = y$, erit tempus descensus per $AP = 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \sqrt{(e^{\frac{y}{k}} - 1)}$, substituto y loco a in superiore formula. Ibi enim a denotabat altitudinem ascensu percursum, hic vero est y altitudo integra, ad quam corpus celeritate, quam P habet, pertinere potest.

Scholion 2.

447. Aequatio fundamentalis pro descensu hoc modo considerata est $dv = gdy + \frac{vdy}{k}$ (438), quae ex aequatione fundamentali pro vero descensu $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$ (419) potest formari ponendo y loco x et $-k$ loco k . Quare etiam expressio temporis vero pro-

proxima per spatium AP ex ea quam supra inuenimus (432) pro vero descensu, accommodari poterit ad hunc descensum imaginarium ascensus inuersum; ponendo quoque y loco x et $-k$ loco k . Hoc itaque modo inuenitur tempus descensus per spatium $AP = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}} - \frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}} + \frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ q. p. dummodo $\frac{y}{k}$ fuerit numerus vnitate minor.

Corollarium 5.

448. Si medii resistentia prorsus euanescat, vt fiat $k = \infty$, erit tempus totius ascensus per spatium $BA = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. Quae expressio prouenit ex superiore $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}} - \frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}} + \frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ posito a loco y , omnes enim termini praeter primum euanescent.

Corollarium 6.

449. Poterit hinc etiam ex dato tempore integri ascensus t reperiri altitudo percursa a . Nam quia est $t = 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot A \cdot \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$, erit tangens arcus $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$. Vocetur illa tangens T , erit $T^2 + 1 = e^{\frac{a}{k}}$ et $a = kl(T^2 + 1)$.

PROPOSITIO 57.

Problema.

450. Dato tempore quo corpus ex B sursum proiectum iterum in B decidit in medio resistente in duplicata celeritatum ratione, et sollicitante potentia absoluta vniformi g , determinare altitudinem BA ad quam

Tabula IV,
Fig. 4.

A a 2

cor

corpus peruenit, ut et celeritatem initialem in B et finalem post descensum in eodem loco B; nec non tempus ascensus per BA et tempus descensus per AB.

Solutio.

Sit datum tempus $=t$, quod est summa temporum ascensus et descensus per rectam BA, et exponens resistentiae $=k$. Ponatur altitudo BA quaefita $=x$. Erit tempus ascensus per BA $=2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$, (445) atque tempus descensus sequentis ex A in B $=2\sqrt{\frac{k}{g}}l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, (427). Ex quibus conflatur ista aequatio $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)} + l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, ex qua inueniri potest x . Cognita autem altitudine x dabitur simul et tempus ascensus per BA et tempus descensus per AB. Porro data altitudine BA $=x$, erit altitudo generans celeritatem in B, qua ascendit $=gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ (420), et altitudo generans celeritatem, qua decidit in B $=gk(1-e^{-\frac{x}{k}})$ (420). Q. E. I.

Corollarium I.

451. Erit ergo celeritas ascendens in B ad celeritatem descendentem ibidem ut $e^{\frac{2k}{x}}$ ad 1. Ex quo apparet tanto magis de motu amitti quanto corpus altius ascendat.

Scho-

Scholion I.

452. Si fuerit k numerus valde magnus neque altitudo x admodum magna, vt loco temporum supra inuentas expressiones algebraicas adhibere liceat; erit tempus ascensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (447), atque tempus descensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{6k\sqrt{g}}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (432). Quorum temporum summa, quia data est, habebitur $t\sqrt{g} = 4\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2}$, quam proxime.

Scholion 2.

453. Accuratus autem definietur haec temporum summa magis continuandis seriebus tempora ascensus et descensus exprimentibus. Fit scilicet tempus ascensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$ et tempus descensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} + \text{etc.}$ Quamobrem horum temporum summa $t = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{23040k^4\sqrt{g}} - \text{etc.}$ Vbi notandum si tempus detur in minutis secundis, et k et x in scrupulis pedis Rhenani exprimentur, superiorem seriem per 250 esse diuidendam. Ita si tempus t sit μ minutorum secundorum debeat pro t substitui 250μ .

Corollarium 2.

454. Ex superiore aequatione poterit serie inuertenda elici x per seriem. Fiet autem $\sqrt{x} = \frac{t\sqrt{g}}{4} - \frac{g^2 t^5 \sqrt{g}}{2^{15} \cdot 15 \cdot k^2} + \frac{g^4 t^9 \sqrt{g}}{2^{29} \cdot 15 \cdot k^2} - \text{etc.}$ et consequenter $x = \frac{g t^2}{2^4} - \frac{g^2 t^6}{2^{16} \cdot 15 k^2} + \frac{g^4 t^{10}}{2^{26} \cdot 225 k^4} - \text{etc.}$

Corollarium 3.

455. Differentia inter tempus descensus et tempus ascensus erit ergo $\frac{x\sqrt{x}}{2k\sqrt{g}} - \frac{x^2\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{g}}$ quam proxime. Inuenta ergo altitudine x simul et tempus ascensus et tempus descensus innotescunt.

Corollarium 4.

456. In serie erit etiam altitudo debita celeritati, qua corpus ascensum inchoat $= gx + \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} + \frac{gx^4}{24k^3} +$ etc. et altitudo debita celeritati, qua corpus delabitur $= gx - \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} - \frac{gx^4}{24k^3} +$ etc.

Exemplum .

457. Globus ferreus ex tormento bellico sursum explosus recidebat in terram post 34 minuta secunda, eratque $k = 2250000$ scrupulorum pedis Rhenani, et $g = \frac{7499}{7500}$. Habebimus ergo $t = 8500$, et $\frac{t\sqrt{g}}{4\sqrt{k}} = 1$, 416572, adeoque $\frac{g^{2t^5}\sqrt{g}}{2^{15} \cdot 15 k^2\sqrt{k}} = 0$, 01188. Atque $\frac{g^{4t^9}\sqrt{g}}{2^{29} \cdot 15 k^4\sqrt{k}} = 0$, 0007477. Fiet igitur $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} = 1$, 405439, et $\sqrt{x} = 2108$, 159, et tota altitudo x ad quam globus in aere peruenit $= 4443$ ped. Rhen. Sit nunc δ numerus minorum secundorum, quibus descensus longius durat quam ascensus; erit $\frac{2508\sqrt{g}}{3k\sqrt{k}} - \frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}} - \frac{x^2\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}}$. Est vero $\frac{\sqrt{x}}{k} = \frac{527}{375}$, ex quo prodit $\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}} = 0$, 9913, et $\frac{x^2\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}} = 0$, 01893. Habebimus ergo $\frac{2508\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = 0$, 97237, et hinc $\delta = 5''$, 50''' . Ex quo apparet tempus ascensus fuisse 14'' , 5''' ,

5''', et tempus descensus = 19'', 55'''. Altitudo autem generans celeritatem, qua corpus ascensum inchoavit reperitur 15542 ped. et altitudo debita celeritati, qua delabitur = 1969 ped. Videatur de his Comment. Tom. II. pag. 338.

Corollarium 5.

458. Quia altitudo celeritati, qua corpus sursum proiicitur = $gk(e^{\frac{x}{k}} - 1) = gx(1 + \frac{x}{2k} + \frac{x^2}{6k^2} + \frac{x^3}{24k^3} + \text{etc.})$. Erit tempus ascensus et descensus simul sumtum, si corpus hac celeritate in vacuo sursum proiceretur sola sollicitante vi grauitatis, = $4\sqrt{gx} + \frac{x\sqrt{gx}}{24k^2} + \frac{5x^2\sqrt{gx}}{9216k^4} + \frac{x^3\sqrt{gx}}{32k^3} + \text{etc.}$

Corollarium 6.

450. Erit ergo summa temporum ascensus et descensus in vacuo ad temporum summam in medio resistente vt $g(1 + \frac{x}{4k} + \frac{5x^2}{96k^2} + \frac{x^3}{124k^3} + \text{etc.})$ ad $1 + \frac{x^2}{480k^2} - \frac{x^4}{92160k^4} + \text{etc.}$ Si scilicet in utroque casu corpus eadem celeritate proiciatur.

Scholion 3.

460. In citato Tomo II. Commentar. pag. 340 est Theorema, quo haec tempora in vacuo et medio resistente in duplicata celeritatum ratione, vt hic quoque statuimus, inter se conferuntur; atque afferitur tempus in vacuo semper esse maius tempore in pleno. At vero ex nostra comparatione apparet, fieri posse, vt tempus in vacuo etiam minus sit tempore in pleno. Nam si fuerit x valde paruum k vero vehementer magnum, ea tempora

inter se erunt proxime vt g ad i . Est vero g in medio resistente ob vim grauitatis densitate mediū minutam semper minor vnitatē, et hanc ob rem tempus in vacuo minus erit his casibus tempore in pleno. Quando vero g quam minime ab vnitatē differt et x non est admodum paruum respectu k , prout in eiaculatione globorum ex tormentis euenit, tempus in vacuo vtique perpetuo erit maius quam in medio resistente. Deinde si fuerit $x > k$ facile perspicitur, dari quoque casus, quibus euentus illi Theoremati futurus sit contrarius. In exemplo autem allato corpus celeritate altitudini 15542 ped. debita in vacuo sursum proiectum recidet in terram post 63 minuta secunda, cum tamen in aere non diutius quam 34'' moretur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula IV.
Fig 6.

461. Si corpus post quemuis descensum ex O reflectatur eaque celeritate, quam in descensu est adeptum iterum recta ascendat, atque hae reflexiones perpetuo, cum in O peruenerit repetantur; quaerendae sunt altitudines OA , OB , OC etc. quas corpus hoc modo successiue percurrit in medio resistente vniiformi iuxta quadrata celeritatum et sollicitatum a potentia vniiformi g .

Solutio.

Posito, vt haecenus est factum, exponente resistantiae $\equiv g$, altitudo prima $AO = a$, eritque celeritati, qua corpus ascensum inchoauit, altitudo de-

debita $= gk(e^{\frac{a}{k}} - 1)$ (439). Altitudo vero debita celeritati, qua per AO delapsus punctum O attingit est $= gk(1 - e^{-\frac{a}{k}})$ (420). Hac celeritate iam secundum ascensum per OB incipiat, fitque $OB = z$,

erit $gk(1 - e^{-\frac{a}{k}}) = gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)$. Ex quo prodit $OB = kl(2 - e^{\frac{a}{k}}) = z$. Altitudo vero debita celeritati, qua in hoc secundo descensu per BO delabitur, erit

$= gk(1 - e^{-\frac{z}{k}}) = \frac{gk(1 - e^{-\frac{a}{k}})}{2 - e^{\frac{a}{k}}}$, hacque celeritate tertium ascensum per OC incipiet. Sit nunc $OC = z$, erit

$\frac{gk(1 - e^{-\frac{a}{k}})}{2 - e^{\frac{a}{k}}} = gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)$, consequenter $z = OC = kl$

$\frac{3 - 2e^{\frac{a}{k}}}{2 - e^{\frac{a}{k}}}$. Celeritas vero, quam in descensu per CO

acquirat, debita erit altitudini $gk(1 - e^{-\frac{z}{k}}) = \frac{gk(1 - e^{-\frac{a}{k}})}{3 - 2e^{\frac{a}{k}}}$.

Hac porro celeritate quartum ascensum per OD incipit, quam altitudinem OD denuo vocemus z , erit

$gk(e^{\frac{z}{k}} - 1) = \frac{gk(1 - e^{-\frac{a}{k}})}{3 - 2e^{\frac{a}{k}}}$ et consequenter $z = OD$

B b

$= kl$

$= kl \frac{4-3e^{\frac{-a}{k}}}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$ Simili modo prodibit altitudo quin-

ta OE $= kl \frac{5-4e^{\frac{-a}{k}}}{4-3e^{\frac{-a}{k}}}$, et sexta OF $= kl \frac{6-5e^{\frac{-a}{k}}}{5-4e^{\frac{-a}{k}}}$. Ex

quibus concluditur ea altitudo OP, cuius index est n ,

fore $= kl \frac{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}}{(n-1)-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = kl \frac{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$. Ma-

nifestum igitur est ad quantam altitudinem corpus in quaque reflexione ex puncto O perueniat.

Q. E. I.

Corollarium I.

462. Ex hac solutione simul perspicitur celeritati, qua in hoc descensu per PO delabitur,

debitam altitudinem fore $= \frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{ne^{-n+1}}$

Celeritas vero, qua ascensum per OP est adorsum,

debita est altitudini $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-1-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}} = \frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$

Corollarium 2.

463. Quia OA $= a = kle^{\frac{a}{k}}$ et OB $= kl(2-e^{\frac{-a}{k}})$,

erit OA + OB $= kl(2e^{\frac{a}{k}}-1)$. Eodemque modo
OA

$$OA + OB + OC = kl(3e^{\frac{a}{k}} - 2), \text{ et } OA + OB + OC + OD = kl(4e^{\frac{a}{k}} - 3) \text{ etc.}$$

Corollarium 3.

464. Si k est numerus valde magnus, vt $\frac{a}{k}$ fere evanescat, erit quam proxime $OP = a - \frac{(n-1)a^2}{k} + \frac{(n-1)^2 a^3}{k^2} - \frac{(n-1)^3 a^4}{k^3} + \text{etc.}$ Quae series cum sit geometrica erit $OP = \frac{ak}{k + (n-1)a} q. p.$

Corollarium 4.

465. Si altitudo prima OA fuerit infinite magna reliquae nihilo minus erunt finitae. Prohibet enim $OB = kl_2$, $OC = kl\frac{3}{2}$, $OD = kl\frac{4}{3}$, etc. $OP = kl\frac{n}{n-1}$.

Corollarium 5.

466. Et, si altitudo quaecunque fuerit $= kl\Lambda$ erit altitudo sequens, ad quam corpus post percussionem e prima pertingere valet $= kl\frac{2\Lambda-1}{\Lambda}$. Porro altitudo tertia erit $= kl\frac{3\Lambda-2}{2\Lambda-1}$ et similiter quarta $= kl\frac{4\Lambda-1}{3\Lambda-1}$ et ea cuius index est n erit $= kl\frac{n\Lambda-n+1}{(n-1)\Lambda-n+2}$.

Scholion I.

467. Possunt etiam loco n numeri negativi substitui, tumque invenientur altitudines praecedentes in quarum serie prima existit. Sic altitudo, quam sequitur prima $OA = a$, posito $n = 0$, erit $= kl\frac{1}{2-e^{\frac{a}{k}}}$. Ex quo apparet, si fuerit $e^{\frac{a}{k}} = 2$ seu

$a = kl/2$, altitudinem praecedentem fuisse infinitam.

At si fuerit $e^{\frac{a}{k}} > 2$, altitudo praecedens ob logarithmum quantitatis negatiuae erit imaginaria, id quod indicat, fieri non posse, ut altitudo tanta possit assignari, cuius sequens sit haec assumpta a .

Scholion 2.

468. Quod post altitudinem infinitam sequi possit altitudo finita admirabile quidem videtur; sed consideranti, quod corpus in medio resistente ex infinita altitudine delapsum finitam acquirat tantum celeritatem, (420) ratio huius phaenomeni facile patebit. Hac enim finita celeritate ad finitam tantum altitudinem reascendere poterit. Maxima autem celeritas, quam corpus in descensu potest adipisci, est \sqrt{gk} . Quare si corpus initio sursum proniciatur celeritate maiore quam \sqrt{gk} haec celeritas ex nullo quamuis magno descensu antecedente generari potuit; quemadmodum etiam hoc casu calculus altitudinem praecedentem exhibet imaginariae quantitatis.

PROPOSITIO 59.

Problema.

Tabula IV. 469. *Resistente medio uniformi in celeritatum*
 Fig. 3. et 4. *ratione simplici, et sollicitante potentia absoluta uniformi deorsum tendente, determinare corporis recta vel ascendantis vel descendantis celeritatem in quouis puncto.*

So-

Solutio.

Descendat primo corpus in recta AP, sitque Tabula IV
 celeritas eius initialis in A debita altitudini c . Fig. 3.
 Ponatur potentia absoluta $=g$, exponens resistentiae
 $=k$; atque $AP=x$, et altitudo debita celeritati in
 $P=v$. His positis erit $dv=gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$, est enim vis
 resistentiae $=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $dx=\frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Fiat $\sqrt{v}=u$,
 erit $dv=2udu$, atque $dx=\frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}=-2du\sqrt{k}+\frac{2gkdu}{g\sqrt{k}-u}$.
 Integrata hac aequatione prodit $x=C-2u\sqrt{k}-2gkl$
 $(g\sqrt{k}-u)=C-2\sqrt{kv}-2gkl(g\sqrt{k}-\sqrt{v})$. Posito vero
 $x=0$ fieri debet $v=c$, ex quo fit $C=2\sqrt{kc}+2gkl$
 $(g\sqrt{k}-\sqrt{c})$. Habebimus itaque $x=2\sqrt{kc}-2\sqrt{kv}$
 $+2gkl\frac{g\sqrt{k}-\sqrt{c}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$, ex qua v ope logarithmicae potest
 deduci Q. E. Alterum.

Iam pro ascensu sit celeritas initialis in B alti- Fig. 4.
 tudini c debita, et $BP=x$, et altitudo celeritati
 in P debita $=v$. Quia in ascensu tam potentia
 absoluta, quam resistentiae vis retardant, erit
 $dv=-gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quae aequatio directe ex priore
 $dv=gdx-\frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ deducitur ponendo $-g$ loco g . Quam-
 obrem etiam hoc modo requisitam aequationem in-
 tegralem ex illa deriuare licet. Fit igitur facta g
 negatiuo $x=2\sqrt{kc}-2\sqrt{kv}-2gkl\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E.
 Alterum.

Corollarium I.

470. Si celeritas initialis in descensu fuerit Fig. 3.
 $=0$, erit $x=-2\sqrt{kv}+2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Ex qua aequa-
 tio-

tione determinatur celeritas corporis ex quacunq̄ue altitudine delapfi.

Corollarium 2.

471. Quia vero est $l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = -l(1 - \frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}})$;
 habebitur in serie $l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}} + \frac{v}{2g^2k} + \frac{v\sqrt{v}}{3g^3k\sqrt{k}} + \frac{v^2}{4g^4k^2}$
 + etc. Qua substituta prodibit $x = \frac{v}{g} + \frac{2v\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{v^2}{2g^3k}$
 + $\frac{2v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$ etc. Si nunc fuerit k numerus valde
 magnus erit $v = gx - \frac{2x\sqrt{gx}}{3\sqrt{k}}$ q. p.

Corollarium 3.

Tabula IV. 472. Si fit $v = g^2k$, prodit $x = \infty$. Ex quo
 Fig. 4. apparet, corpus ex infinita altitudine delapsum
 maiorem acquirere non posse celeritatem quam $g\sqrt{k}$.
 Et si fuerit semel $v = g^2k$, corpus motu aequabili
 esse progressurum; tum vero motum eius retardari,
 si fit $v > g^2k$.

Corollarium 4.

473. Si corpus ex B sursum proiciatur cele-
 ritate \sqrt{c} , altitudo BA reperietur factō $v = 0$. Pro-
 dicit autem $BA = 2\sqrt{kc} - 2gkl(1 + \frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} - \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}}$
 + $\frac{c^2}{2g^3k}$. Altitudo vero ex qua corpus descendendo
 hanc celeritatem acquirere potest erit $= -2\sqrt{kc}$
 $2gkl(1 - \frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} + \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k} +$ etc.

Corollarium 5.

474. Si corpus sursum proiciatur celeritate
 $g\sqrt{k}$, maxima scilicet, quam descensu acquirere
 potest, erit altitudo ad quam pertingit $= 2gk(2 - l_2)$.

PRO-

PROPOSITIO 60.

Problema.

475. Resistente medio uniformi in ratione simplici celeritatum et sollicitante potentia absoluta uniformi; determinare tempus, quo corpus vel ascendens vel descendens spatium quoduis percurrit.

Solutio.

Positis ut ante pro descensu per AP celeritate in $A = \sqrt{c}$, et ea in $P = \sqrt{v}$; exponente resistentiae $= k$ et potentia absoluta $= g$, spatioque $AP = x$, erit $dx = \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{2u du\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$ posito u^2 loco v . Iam dicto tempore per $AP = t$ erit $dt = \frac{dx}{u} = \frac{2 du\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$. Ex qua prodit $t = 2\sqrt{k} l \frac{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum.

Tabula IV.

Fig. 3.

Quia ascensus per $BP = x$, cum celeritate initiali \sqrt{c} prodit ponendo $-g$ loco g , erit tempus ascensus per $BP = 2\sqrt{k} l \frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Problemate vero praecedente definitur v ex dato x . Quare et hic tempus, quo spatium quoduis percurritur poterit cognosci. Q. E. I.

Fig. 4.

Corollarium I.

476. Si celeritas initialis, qua corpus descendit fuerit nulla, erit tempus descensus per spatium $AP = 2\sqrt{k} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. At v definitur ex hac aequatione $x = -2\sqrt{k} v + 2gkl \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$.

Fig. 5.

Co-

Corollarium 2.

477. Tota altitudo BA, ad quam corpus ex B ascendens peruenire potest, absoluetur tempore $= 2\sqrt{kl} \frac{g\sqrt{k} + \sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$.

Corollarium 3.

478. Si ergo celeritas initialis \sqrt{c} fuerit infinita, erit etiam tempus, quo tota altitudo BA percurritur, infinitum, nempe $= 2\sqrt{kl}\infty$.

Scholion I.

479. Hoc igitur vehementer differt haec resistentiae hypothesis a priore, quae quadratis celeritatum posita erat proportionalis. Nam illo casu corpus infinita celeritate sursum proiectum ad summum punctum pertingit tempore finito (444). Hoc vero notandum est tempus $2\sqrt{kl}\infty$ esse numerum infinitum infimi ordinis: Ex quo concludi posse videtur; si resistentia fuerit in maiore quam simplici ratione celeritatum, tempus ascendens totius semper esse finitum. Sin autem resistentia sit in simplici vel minore celeritatum ratione, tempus ascensus totius esse infinitum, si quidem celeritas initialis est infinite magna.

Scholion 2.

490. Has duas resistentiae hypotheses ideo fusius pertractandas esse censui, quod eae a *Neutono*, aliisque, qui eum secuti sunt, praecipue sint consideratae. Haec quidem posterior hypothesis, qua resistentiam celeritatibus proportionalem posuimus,
me-

mere mathematica est, neque vllum in physicis habere potest vsum. Sed quia initio putarunt, resistantiam fluidorum a tenacitate oriundam celeritatibus esse proportionalem, diligentius in huiusmodi motus inquirendum esse existimauerunt. Postmodum tamen, cum resistantiam tenacitatis longe aliter se habere intellexissent, hanc tractationem nihilo minus retinuerunt. Prior vero, qua resistantia quadratis celeritatum proportionalis est, maxime explorari meretur: certum enim est praecipuam fluidorum resistantiam hanc tenere rationem. Praeterea etiam haec hypothesis in calculo prae reliquis tantam habet praerogatiuam, vt, quod in aliis hypothesis minime potest praestari, in hac tamen sola calculus non refragetur. Omnia enim fere problemata, quae in vacuo solutionem non respuunt, in hac resistantiae hypothesis resolui possunt. Hanc ob rem in sequentibus istam resistantiam potissimum examinabimus, reliquas autem, nisi concinno computo quaesitum inueniri potest, plerumque negligemus.

PROPOSITIO 61.

Problema.

481. *Resistat medium uniforme in ratione quacunque multiplicata celeritatum, sitque potentia sollicitans vniformis; determinari oportet motum corporis recta vel ascendentis vel descendens.*

Solutio.

Tabula IV.

Fig. 3.

Consideremus primo descensum, et ponamus celeritatem in A = Vc , spatium iam percursum AP = x et celeritatem in P = Vv . Sit resistentiæ exponens = k et lex resistentiæ = v^m , atque potentia absoluta = g . His igitur positis erit $dv = g dx - \frac{v^m dx}{k^m}$, et

$dx = \frac{k^m dv}{g k^m - v^m}$. Habemus ergo $x = \int \frac{k^m dv}{g k^m - v^m}$ ex qua

ope quadraturarum v in x determinari poterit. Ponatur tempus, quo spatium AP percurritur = t ,

erit $dt = \frac{dx}{v} = \frac{k^m dv}{g k^m v - v^m v}$. Atque $t = \int \frac{k^m dv}{g k^m v - v^m v}$

Q. E. Alterum.

Iam pro ascensu maneat Vc celeritas initialis in B, sitque BP = x , et celeritas in P = Vv , atque tempus, quo spatium BP percurritur = t . His

positis erit $dv = -g dx - \frac{v^m dx}{k^m}$ quae aequatio ex illa elicitur ponendo $-g$ loco g . Quo facto erit pro

ascensu $x = -\int \frac{k^m dv}{g k^m + v^m}$ et $t = -\int \frac{k^m dx}{g k^m v + v^m v}$

Q. E. Alterum inueniendorum.

Corollarium I.

482. Si fuerit $v^m = g k^m$, corpus hac celeritate descendens motu aequabili feretur. Nam perpetuo potentiae absolutae, qua corpus acceleratur, aequalis erit vis resistentiæ, qua retardatur.

Co-

Corollarium 2.

483. Corpus vero ex quiete delapsum perpetuo accelerabitur, neque tamen unquam celeritatem acquirat altitudini $g^{\frac{1}{k}}$ debitam. Sed haec celeritas est quasi asymptotica, quam siue celerius siue tardius corpus moueatur, affectat.

Scholion.

484. Quia haec inuentae aequationes neque integrari possunt, neque v vel t in x definiri, diutius iis immorari non expedit. Ad alia igitur progredior, atque medium resistens variabile contemplabor manente potentia absoluta uniformi. Huiusmodi tamen accipiam hypothesein, qua aequatio dv determinans fiat homogenea, ideoque his difficultatibus non sit obnoxia. Deinde potentiam absolutam non amplius uniformem sed variabilem pono, seu eius loco vim centripetam considero, qua corpus perpetuo ad certum aliquod punctum fixum attrahitur. Cum hac quidem primum aliam resistentiam non coniungam, nisi quae quadratis celeritatum est proportionalis. Deinde vero cum aliis resistentiae hypotheseibus eas tantum vires centripetas coniungi conuenit, quae integrationem aequationis differentialis admittunt.

PROPOSITIO 62.

Problema.

485. *Potentia absoluta existente uniformi, et Tabula IV, exponente resistentiae distantis a puncto C proportionali, Fig 7.*

C c 2

at-

atque lege resistentiae celeritatum ratione quacunque multiplicata, requiritur corporis in recta AC ad C vel accedentis vel ab eo recedentis celeritas in quouis loco.

Solutio.

Potentia vniformis ad C vrgens sit $=g$ altitudo debita celeritati in loco quocunqve $P=v$. Ponatur AC quae est maxima altitudo ad quam corpus pertingit $=a$ et $CP=x$, erit exponens resistentiae vt x , fit is $\lambda^{\frac{1}{m}}x$ et lex resistentiae fit v^m . His positis erit vis resistentiae $=\frac{v^m}{\lambda x^m}$, et pro ascensu per CA, quo et potentia absoluta et vis resistentiae retardant, habebitur ista aequatio $dv = -g dx - \frac{v^m dx}{\lambda x^m}$. Descensum hic quoque tanquam ascensum consideremus, et quia in descensu vero potentia accelerans, resistentia vero retardans est, in hoc ascensu substituto contrario modo potentia retardans et resistentia accelerans poni debet (411), ex quo oritur pro descensu haec aequatio $dv = -g dx + \frac{v^m dx}{\lambda x^m}$. Quae aequatio ex illa deriuatur faciendo λ negatiuum, et hanc ob rem alteram tantum aequationem integrari opus est. Sumamus aequationem pro descensu, quae erit huiusmodi $\lambda x^m dv + \lambda g x^m dx = v^m dx$, et ponamus $v = xz$. Erit ergo $dv = x dz + z dv$, ex quo prodibit ista aequatio, $\lambda x^{m+1} dz + \lambda x$

$+\lambda x^m z dx + \lambda g x^m dx = x^m z^m dx$. Quae diuisa per $x^{m+1}(z^m - \lambda z - \lambda g)$ abit in hanc $\frac{\lambda dz}{z^m - \lambda z - \lambda g} = \frac{dx}{x}$ in qua indeterminatae iam sunt separatae. Haec igitur aequatio ita integretur, vt facto $x=a$, celeritas euanescat; quo facto ex aequatione integrali celeritas corporis descendens in quouis loco innotescet. Eadem vero ipsa aequatio facto λ negatiuo inseruiet ad celeritates in ascensu per CA definiendas. Q. E. I.

Corollarium I.

486. Si fuerit $m=1$ seu resistentia quadratis celeritatum proportionalis, erit $\frac{\lambda dz}{(1-\lambda)z - \lambda g} = \frac{dx}{x}$ adeoque $\frac{\lambda}{1-\lambda} l((1-\lambda)z - \lambda g) = lx + C = \frac{\lambda}{1-\lambda} l \frac{(1-\lambda)v - \lambda gx}{x}$ substituo $\frac{v}{x}$ loco z . Quia autem si $x=a$ debet esse $v=0$, erit $C = \frac{\lambda}{1-\lambda} l - \lambda g - la$, ideoque $lx = la + \frac{\lambda}{1-\lambda}$

$$\frac{\lambda gx - (1-\lambda)v}{\lambda gx}. \text{ Ex qua prodit } v = \frac{\lambda gx}{\lambda-1} \left(a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right)$$

$$= \frac{\lambda g}{\lambda-1} \left(a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} x^{\frac{1}{\lambda}} - x \right).$$

Corollarium 2.

487. Si fuerit λ vnitatem minor, haec aequatio ad aliam formam redigi debet; Prodit autem

$$v = \frac{\lambda g}{1-\lambda} \left(\frac{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} x - x^{\frac{1}{\lambda}}}{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}} \right).$$

Corollarium 3.

488. Casus, quo $\lambda=1$, seu exponens resistentiae ipsi distantiae a puncto C est aequalis, in his formulis non continetur, sed ex differentiali $\frac{-dz}{g} = \frac{dx}{x}$ est deducendus. Prodibit autem $C - \frac{z}{g} = lx$ hincque $v = gx(la - lx)$.

Corollarium 4.

489. Ex his intelligitur casu $m=1$ corporis descendens celeritatem tam in A quam in C fore $=0$. Fit enim $v=0$ in tribus hisce aequationibus, tam posito $x=0$ quam $x=a$. Corpus igitur ex A in C delapsum omnem motum amittet atque in C. perpetuo quiescet, ob resistentiam in eo loco infinite magnam.

Corollarium 5.

490. Dum igitur corpus rectam AC percurrit, alicubi inter A et C habebit celeritatem maximam, quae inuenitur ex aequatione differentiali faciendo $dv=0$. Fiet autem tum $v = \lambda gx$, quo valore loco v in integratis aequationibus substituto prodibit $\lambda x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$, atque $x = \frac{a}{\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}}$, si $\lambda > 1$.

Sin autem $\lambda < 1$ erit $x = \lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} a$. At si $\lambda = 1$; erit $x = la - lx$ ideoque $x = \frac{a}{e}$, denotante e numerum, cuius logarithmus est vnitas.

Scho-

Scholion I.

491. Ex his colligere licet etiam in reliquis resistentiae hypothesibus celeritatem corporis, cum ad C peruenerit, esse euanituram. Vis enim resistentiae est $\frac{v^m}{\lambda x^m}$, quae ergo fit infinita si $x=0$.

Quare si corpus in C quandam haberet velocitatem, ea a vi resistentiae infinita statim in nihilum redigi deberet. Maximam vero in descensu celeritatem habebit quando est $v^m = \lambda g x^m$. Ex quo apparet maximam celeritatem esse debitam altitudini $x\sqrt{\lambda g}$. Sed quia x ignoratur seu locus, quo corpus celerissime descendit, etiam ipsa celeritas non potest determinari, nisi per quadraturas curuarum, quarum ope aequatio differentialis construitur.

Corollarium 6.

492. Pro ascensu ex C in A si $m=1$ celeritates corporis in singulis locis P determinabuntur ex

hac aequatione $v = \frac{\lambda g x}{\lambda + 1} \left(\frac{a \frac{\lambda + 1}{\lambda} - x \frac{\lambda + 1}{\lambda}}{x \frac{\lambda + 1}{\lambda}} \right)$, quae ex illis

pro descensu formatur, facto λ negatiuo, uti oportet.

Corollarium 7.

493. In ascensu ergo corporis celeritas in C semper est infinita. Facto enim $x=0$, quia $\frac{\lambda + 1}{\lambda}$ est unitate maius, denominator euanescit.

Scho-

Scholion 2.

494. Perspicuum etiam est ex sola contemplatione, celeritatem in C esse debere infinitam. Nam nisi tanta esset, corpus vim resistentiae in C infinitam superare non posset, sed perpetuo in C haerere deberet.

PROPOSITIO 63.

Theorema.

495. *Iisdem positis, quae in praecedente propositione, si plura corpora ex diuersis distantis ad punctum C accedant, erunt tempora, quibus eo perueniunt in subduplicata ratione distantiarum.*

Demonstratio.

In solutione praecedentis problematis ad celeritatem in P determinandam obtinuimus hanc aequationem, $\lambda x^m dv + \lambda g x^m dx = v^m dx$, (485). In qua aequatione x et v vbique eundem dimensionum numerum constituunt. Eius igitur integralis ita accepta, vt posito $x = a$ fiat $v = 0$, habebit hanc proprietatem, vt x , v et a vbique eundem dimensionum numerum constituent. Ex ea ergo prodibit v aequalis functioni cuidam ipsarum a et x , in qua a et x vnicam vbique dimensionem constituent; seu v erit functio ex a ex x constans vnus dimensionis. Quare in elemento temporis per CP quod est $\frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit ipsarum x , dx , et a dimidia dimensio, et hanc ob rem tempus per CP aequabitur functioni ex a et x constanti dimidiae dimensionis. Posito ergo $x = a$,
quo

quo casu totum tempus descensus per AC inuenitur, habebitur functio ipsius folius a dimidiae dimensionis. Quamobrem tempus per AC exprimetur huiusmodi expressione $C\sqrt{a}$ in qua C ex quantitatibus λ , m et g constat, non vero pendet ab a . Quia iam a denotat altitudinem AC, perspicuum est plurimum descensuum tempora esse inter se in subduplicata ratione altitudinum percurfarum. Q. E. D.

Corollarium I.

496. Simili modo intelligitur plurimum ascensuum ex C tempora tenere etiam rationem altitudinum, ad quas peruenitur, subduplicatam.

Corollarium 2.

497. In quacunq;ue igitur multiplicata celeritatum ratione medium resistat, dummodo potentia absoluta est constans et resistentiae exponens distantis a C proportionalis, tempora vel ascensuum vel descensuum rationem tenent subduplicatam altitudinum.

Scholion I.

498. Neque vero ascensus cum descensibus comparare licet, neque plures ascensus vel descensus inter se, in quibus litterae λ , m et g non eosdem tenent valores. Nam in expressione $C\sqrt{a}$, quantitas C in omnibus casibus, qui inter se comparantur, eadem esse debet.

Scholion 2.

499. In hac propositione eadem vñ sumus methodo varia descensuum ad punctum fixum tempora comparandi, quam supra in propositionibus 39 et 46. Hoc autem casu eo magis huius methodi praestantia cernitur, quia nequidem celeritatem in x determinare licebat. Hoc enim solum nobis perspicere sufficebat, cuiusmodi functio ipsarum a et x futura sit ea expressio, cui v effet aequalis. In sequentibus autem plura specimina egregia huius methodi occurrent.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tabula IV. 500. *Existente vi centripeta cuiuscunque potestati distantiarum a centro C proportionali, medioque uniformi resistente in duplicata celeritatum ratione; determinare corporis in recta AC moti siue sursum siue deorsum in singulis locis P celeritatem.*

Solutio.

Sit corpus in P, habeatque celeritatem altitudini v debitam. Vocetur AP, x , et sit vis centripeta vt x^n , atque ea distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati $=f$. Deinde ponatur exponens resistentiae k . His praemissis erit vis absoluta, qua corpus in P sollicitatur $=\frac{x^n}{f^n}$, et vis resistentiae in hoc loco $\frac{v}{k}$, existente vi grauitatis $=1$.

Des-

Descendat iam corpus ad C et habebit, dum per elementum pP mouetur, vim centripetam accelerantem, atque vim resistentiae retardantem. Quia hic autem corpus inuerse ex P in p peruenire ponimus crescente x , contrarias harum virium actiones statui oportet, seu quod eodem redit dx negatiuum est ponendum, quia descensu distantia $PC = x$ minuitur.

Prodibit ergo $dv = -\frac{x^n}{f^n} dx + \frac{v dx}{k}$. In vero autem corporis ascensu per Pp , vtraque vis erit retardans, ideoque habebitur $dv = -\frac{x^n}{f^n} dx - \frac{v dx}{k}$. Ex

quo perspicitur alteram aequationem ex altera oriri faciendo k negatiuum. Hanc ob rem alterutram tantum aequationem integrari opus est. Sumamus eam pro ascensu $dv = -\frac{x^n dx}{f^n} - \frac{v dx}{k}$, seu $dv + \frac{v dx}{k} = -\frac{x^n dx}{f^n}$ haecque multiplicetur per $e^{\frac{x}{k}}$ vt prodeat

$$e^{\frac{x}{k}} (dv + \frac{v dx}{k}) = -\frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}, \text{ cuius integralis est } e^{\frac{x}{k}} v =$$

$$-\int e^{\frac{x}{k}} \frac{x^n dx}{f^n}. \text{ Erit ergo } v = -e^{-\frac{x}{k}} \int \frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}. \text{ Pro des-}$$

$$\text{censu igitur erit } v = -e^{\frac{-x}{k}} \int \frac{e^{\frac{-x}{k}} x^n dx}{f^n}. \text{ In vtraque vero}$$

integratione quantitas constans adicienda ex eo de-

terminari debet, quod corporis moti alicubi celeritas sit data: alioquin enim motus non esset determinatus. Q. E. I.

Corollarium I.

501. Perspicitur igitur si n fuerit numerus integer affirmatiuus, has formulas fore integrabiles.

Est enim $\int e^{\frac{x}{k}} x^n dx = k e^{\frac{x}{k}} x^n - nk^2 e^{\frac{x}{k}} x^{n-1} + n(n-1)k^3 e^{\frac{x}{k}} x^{n-2} - n(n-1)(n-2)k^4 e^{\frac{x}{k}} x^{n-3} + \text{etc.} + C$. Quae series non fit infinita, quoties n est numerus integer affirmatiuus.

Corollarium 2.

502. Sit celeritas in C data et debita altitudini c , erit pro ascensu $v = e^{-\frac{x}{k}} c - \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2 x^{n-1}}{f^n}$

$-\frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} + \text{etc.} + n(n-1)(n-2) \dots \dots 2. 1.$

$\frac{k^{n+1} e^{-\frac{x}{k}}}{f^n}$; quorum signorum ambiguum superius

valet si $n+1$ fuerit numerus impar, inferius vero si $n+1$ fuerit numerus par. Pro descensu autem erit

$v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2 x^{n-1}}{f^n} + \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} + \text{etc.}$

$-n(n-1) \dots \dots 2. 1. \frac{k^{n+1} e^{\frac{x}{k}}}{f^n}$. Loco C debita

substituta constante.

Co

Corollarium 3.

503. Integrale ipsius $\frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$ ita acceptum ut fiat $=0$, facto $x=0$, ponatur $=X$. Eritque $v=e^{\frac{-x}{k}}(c-X)$, quia facto $x=0$, fieri debet $v=c$. Inferuit quidem haec aequatio ascensui, sed facto k negatiuo ad descensum accommodatur.

Corollarium 4.

504. Cognito X apparebit altitudo CA ad quam corpus vel ascendere potest, vel ex ea delapsum celeritatem acquirit $=\sqrt{c}$. Ex hac enim aequatione $X=c$ radix x dabit altitudinem CA .

Corollarium 5.

505. Ex differentiali aequatione pro descensu $dv = -\frac{x^n dx}{f^n} + \frac{v dx}{k}$, apparet alicubi corpus habiturum esse celeritatem maximam antequam ad C pertingit, quae ibi erit, ubi est $v = \frac{kx^n}{f^n}$, si quidem n non est numerus negatiuus.

Corollarium 6.

506. Detur altitudo $CA=a$, ex hacque si quaeratur c , oportet eam habere quantitatem, quae resultat in X posito a loco x . Sit $ca=A$ erit pro ascensu $v=e^{\frac{-x}{k}}(A-X)$, et pro des-

censu $v = e^{\frac{x}{k}}(A-X)$. Facto enim $x = a$ debet evanescere v . Iam facto $x = 0$, quo casu etiam fit $X = 0$ (503), erit $v = c = A$.

Corollarium 7.

507. Manifestum est ex hisce, quomodo tempus quo spatium CP percurritur, inveniendum sit. Scilicet pro ascensu erit tempus per CP

$$= \int \frac{e^{\frac{x}{2k}} dx}{\sqrt{(A-X)}} \text{ atque pro descensu tempus per CP erit}$$

$$= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2k}} \sqrt{(A-X)}}$$

Exemplum.

508. Sit vis centripeta ut distantia a centro C, quo casu fit $n = 1$; Erit ergo pro ascensu

$$v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{-x}{k}}}{f}. \text{ Pro descensu vero}$$

$$v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{x}{k}}}{f} \text{ (502). In descensu maxima celeritas erit, ubi est } v = \frac{kx}{f} \text{ (505), qua}$$

aequatione cum illa coniuncta habebitur $f e^{\frac{x}{k}} c + k^2$

$$= k^2 e^{\frac{x}{k}}. \text{ Erit ergo } e^{\frac{x}{k}} = \frac{k^2}{k^2 - cf} \text{ et } x = k \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - cf}}. \text{ Haec igitur distantia fit infinita si } cf = k^2, \text{ omnino vero}$$

imaginaria si $cf > k^2$. Sit porro in A corporis celeritas $= 0$, positaque $AC = a$, erit pro ascensu cele-

$$\text{ritatis initialis in C altitudo debita } = \frac{c^{\frac{a}{k}} k a - c^{\frac{a}{k}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}.$$

In

In descensu vero erit celeritatis finalis in C altitu-

do debita $= -\frac{\frac{-a}{c^{\frac{-a}{k}}} k a}{f} - \frac{\frac{-a}{c^{\frac{-a}{k}}} k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$. Ex qua apparet si fuerit a infinitum fore celeritatis vltimae in C altitudinem debitam $= \frac{k^2}{f}$.

PROPOSITIO 65.

Problema.

509. *Existente vi centripeta ad C quacun- que et medio resistente secundum quadrata celeritatum ut- que difformi: determinare motum corporis recta vel accedentis vel recedentis a C.*

Solutio.

Sit corpus in P, et ponatur $CP = x$, et celeritas in P $= v$. Deinde sit vis centripeta in P $= p$, posita vi grauitatis $= 1$, et exponens resistentiae $= q$, quae litterae p et q denotant functiones quas-

cunque ipsius x . Erit ergo vis resistentiae $= \frac{v}{q}$. Hanc ob rem habebitur pro ascensu $dv = -pdx - \frac{vdx}{q}$. Pro descensu vero haec $dv = -pdx + \frac{vdx}{q}$. Quarum altera in alteram transmutatur facto q negatiuo.

Consideremus igitur alterutram tantum ascensui accommodatam, quae induit hanc formam $dv + \frac{vdx}{q}$

$= -pdx$. Multiplicetur haec per $e^{\int \frac{dx}{q}}$ vt fiat inte-

gralis. Erit autem aequatio integralis $e^{\int \frac{dx}{q}} v =$

$- \int e^{\int \frac{dx}{q}} p dx$; ergo $v = -e^{-\int \frac{dx}{q}} \int e^{\int \frac{dx}{q}} p dx$. Sit cor-
po-

poris in A, posita $AC = a$, celeritas nulla, et scribatur X loco integralis ipsius $e^{\int \frac{dx}{q}}$ ita accepti ut euanescat factò $x = 0$. Deinde loco x positò a abeat X in A erit $- \int e^{\int \frac{dx}{q}} p dx = A - X$, atque $v = e^{-\int \frac{dx}{q}} (A - X)$. Tempus igitur quo spatium PC absoluitur est $= \int \frac{e^{\frac{1}{2} \int \frac{dx}{q}} dx}{\sqrt{(A - X)}}$. Pro descensu erit autem scripto $A - X$ simili modo loco $- \int e^{-\int \frac{dx}{q}} p dx$, altitudo celeritati in P debita $v = e^{\int \frac{dx}{q}} (A - X)$ et tempus quo spatium PC absoluitur erit $= \int \frac{e^{\frac{1}{2} \int \frac{dx}{q}} dx}{\sqrt{(A - X)}}$

Q. E. I.

Corollarium I.

510. Celeritas in puncto infimo C reperietur factò $x = 0$, quo casu et X euanescit, et $\int \frac{dx}{q}$ euanescere ponamus. Prodibit igitur tam pro ascensu quam pro descensu $v = A$. Notandum autem est A in utroque casu non eundem habere valorem, sed diuersum. Formatur enim ex X, quod pro ascensu est $= \int e^{\int \frac{dx}{q}} p dx$, pro descensu vero $= \int e^{-\int \frac{dx}{q}} p dx$.

Corollarium 2.

511. In descensu maximam habebit corpus celeritatem quando est $v = pq$, tum enim fit $dv = 0$.

Lò.

Locus ergo, in quo celeritas est maxima, determinabitur ex ista aequatione $pq = e^{\int \frac{dx}{4}} (A - X)$.

Scholion.

512. In hypothese tam potentiae quam medii uniformis, corpus delapsum spatio demum infinito percurso acquirebat maximam suam celeritatem, et si principio ea statim promoueatur, eam perpetuo retinebat. Hic vero ubi p et q sunt quantitates variables corpus ex quiete delapsum finito tempore maximam celeritatem acquirere potest, neque si eam semel habuit retinere debet; nisi sit pq perpetuo quantitas constans, seu medii densitas vi centripetae proportionalis (385).

PROPOSITIO 66.

Problema.

513. *Data lege vis centripetae ad centrum C* Tabula IV.
trahentis, et medio resistente in duplicata celeritatum Fig. 8.
ratione; si dentur celeritates corporis, quas ex quibus-
cunq; altitudinibus delapsum in C acquirit, deter-
minare densitatem seu resistentiae exponentem in singu-
lis locis.

Solutio.

Posita quacunq; distantia $CP = x$ et vi centripeta in $P = p$; sit curua CMB huius indolis vt eius applicata quaeuis AB sit aequalis altitudini debitaee celeritati, quam corpus ex A delapsum in C acquirit, quae curua igitur data erit. Exponens vero resistentiae, qui quaeritur, sit in $P = q$. Sit porro

E c distan-

distantia AC ex qua corpus delabitur $=a$, erit AB certa quaedam functio ipsius a , quam ponamus L. Eiusdem vero curvae applicata PN fit R, eritque R talis functio ipsius x qualis L est ipsius a . Ex praecedente autem propositione apparet, corporis ex distantia AC $=a$ delapsi altitudinem celeritati in C acquisitae debitam fore $=A$ (510). Quamobrem erit $L=A$, atque etiam $R=X$, est enim quoque X talis functio ipsius x , qualis A est ipsius a , R igitur talis esse debet functio ipsius x , ut evanescat facta $x=0$. Quoniam vero est $X=fe^{-\int \frac{dx}{q}} p dx$ erit $R=fe^{-\int \frac{dx}{q}} p dx$, et $l \frac{p dx}{dR} = \int \frac{dx}{q}$. Ex qua posito dx constante, elicitur $q = \frac{p dx dR}{d p dx - p d dR}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

514. Si fuerit CMB linea recta, adeoque $R=ax$, erit $ddR=0$ et $q = \frac{p dx}{d p}$. Si fit praeterea $p=Cx^n$ erit $q = \frac{x}{n}$, seu medii densitas erit distantis a centro reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

515. Si fuerit $n=0$ seu vis centripeta vbique eadem erit $q=\infty$, ideoque medii densitas nulla, et ipsa resistentia evanescens. Hicque est casus corporis invacuo descendens a potentia absoluta uniformi sollicitati.

Corollarium 3.

516. Si fuerit n numerus negatiuus, habebit q quoque valorem negatiuum. Ex quo cognoscitur

tur resistentiam transmutandam esse in vim propellentem.

Scholion I.

517. Ex hisce facile quoque resoluitur eadem quaestio ad ascensum accommodata, si nimirum detur altitudo, ad quam corpus ex C quacunque celeritate proiectum pertingit. Posita enim celeritate $\equiv \sqrt{R}$, qua spatium x absolvitur, q tantummodo in sui negatium transmutari debebit, quo facto habebitur $q = \frac{pdx dR}{pd dR - dp dR}$.

Scholion 2.

518. Vtraque aequatio definiens q tam pro ascensu quam pro descensu ita est comparata, ut idem valor ipsius q inveniatur, quaecunque multipla loco p et R accipiantur. Neque tamen ex his concludere licet, si determinatae sint q et p , R vagum quendam habere posse valorem: sed necessario debebit esse determinatus. Quo autem ille ipse valor ipsius R , qui est assumtus, prodeat, non vero eius quoddam multipulum, vis centripeta p ad hoc est vel remittenda vel intendenda. Quando autem vis centripetae in singulis locis quantitas ipsa datur, problema erit plus quam determinatum, si quidem celeritates quibusvis distantis respondentes dentur: sed duntaxat earum ratio proposita esse debet. Ratio vero difficultatis in hoc consistit, quod inuenimus q

ex aequatione $R = se^{-\int \frac{dx}{q}} p dx$ bis differentiata. Dif-

E e 2

fe-

ferentiata enim aequatio latius patet plusque in se complectitur quam integralis

Scholion 3.

519. Ex solutione problematis sponte sequitur, quomodo, si data fuerit medii densitas in singulis locis seu quantitas q , inueniri oporteat vim centripetam p , reliquis iisdem, quibus ante, manentibus datis. Ex hac enim aequatione $\int \frac{p dx}{dR} = \int \frac{dx}{q}$, deducetur $p = \frac{dR}{dx} e^{\int \frac{dx}{q}}$, qui valor est determinatus, quia $\int \frac{dx}{q}$ ita sumtum ponimus, vt euanescat, facto $x = 0$ (510).

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tabula IV.
Fig. 7.

520. *Resistente medio in duplicata celeritatum ratione, dataque eius densitate, seu exponente resistentiae in singulis locis: determinare vim centripetam, quae faciat, vt corpus, ex quacunque altitudine ad centrum C delabatur, perpetuo tamen eodem tempore eo perueniat.*

Solutio.

Descendat corpus ex puncto quocunque A sitque $AC = a$. Vocetur indeterminata $CP = x$ et ponantur altitudo celeritati in P debita $= v$, exponens resistentiae in P $= q$, et vis centripeta ibidem $= p$, quae est inuenienda. Habebitur igitur $v = e^{\int \frac{dx}{q}}$ (A - X) et tempus, quo spatium PC absoluitur $= f$

$$= \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q} \sqrt{A-X}}}, \quad (509). \quad \text{Vbi est } X = \int e^{-\frac{dx}{q}}$$

pdx ita accepto, ut evanescat posito $x=0$: et A oritur ex X posito $x=a$. Totum igitur tempus per AC habebitur si in integrali ipsius

$$\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q} \sqrt{A-X}}}$$

ponatur $x=a$ vel $X=A$. Expressio vero resultans ita esse debet comparata, ut in ea omnino non insit a vel A : quod obtinetur, si $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q} \sqrt{A-X}}}$

fuerit functio ipsarum a et x vel ipsarum A et X nullius dimensionis. Quamobrem et differentialis huiusmodi sit functio necesse est. Ponatur igitur

$$\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} = \frac{dX}{P}; \text{ habebimus pro differentiali temporis}$$

$\frac{dx}{P \sqrt{A-X}}$, in quo A et X dimensionem obtinent dimidiam; P ergo, quo nulla adsit dimensio, quoque dimidiam dimensionem habere debet. Sed in P non inesse potest a vel A , eius enim quantitas a solo puncto P pendere debet, non a puncto A .

Hanc ob rem erit $P = \frac{\sqrt{X}}{b}$, et elementum temporis $= \frac{bdX}{\sqrt{AX-XX}}$, quod requisitam habet proprietatem.

Erit igitur $\frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}$, et integratione peracta $2b\sqrt{X}$

$$= \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}, \text{ quod integrale ita esse debet sumtum, ut}$$

evanescat facto $x=0$. Quia autem est $X = \int e^{-\int \frac{dx}{q}}$
 $p dx$, habebitur $4b^2 \int e^{-\int \frac{dx}{q}} p dx = \left(\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} \right)^2$, et hinc

differentiando tandem $p = \frac{e^{\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

521. Quia elementum temporis est $\frac{b dx}{\sqrt{(\Delta X - X X)}}$
 erit tempus, quo spatium PC absolvitur = arcui cir-
 culi, cuius sinus versus est X, existente diametro
 = A, ducto in $\frac{2b}{A}$. Et posita ratione peripheriae ad
 diametrum $\pi:1$, erit tempus totius descensus per
 AC = $b\pi$, quod est constans, neque ab a pendens.

Corollarium 2.

522. Quia est $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2b\sqrt{X}$ et $e^{\int \frac{dx}{2q}} = \frac{dx \sqrt{X}}{4 dx}$
 erit $p = \frac{X dx}{b^2 dX}$. Estque $X = \frac{1}{4b^2} \left(\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} \right)^2$.

Corollarium 3.

523. Sit medium resistens vniforme, et ideo
 $q = k$; erit $e^{\int \frac{dx}{2q}} = e^{\frac{x}{2k}}$ et $\int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2q}}} = 2k(1 - e^{-\frac{x}{2k}})$. Ex
 quo

quo prodibit $p = \frac{k}{b^2} (e^{\frac{x}{2k}} - 1)$. Vis igitur centripeta in C erit $= 0$.

Corollarium 4.

524. Si q est constans et $= k$; erit $2b\sqrt{X} = 2k(1 - e^{\frac{-x}{2k}})$ et $X = \frac{k^2}{b^2} (1 - e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Quia vero X abit in Aposito $x = a$, erit $A = \frac{k^2}{b^2} (1 - e^{\frac{-a}{2k}})^2$, atque $v = \frac{k^2}{b^2} e^{\frac{x}{k}} ((1 - e^{\frac{-a}{2k}})^2 - (1 - e^{\frac{-x}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

525. In infimo igitur loco C altitudo celeritati debita erit $= A = \frac{k^2}{b^2} (1 - e^{\frac{-a}{2k}})^2$.

Corollarium 6.

526. Maximam habebit corpus celeritatem, ubi est $v = pk$. Erit ergo $e^{\frac{-x}{2k}} (1 - e^{\frac{-x}{2k}}) = (1 - e^{\frac{-a}{2k}})^2 - (1 - e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Ex quo reperitur $e^{\frac{-x}{2k}} = 2e^{\frac{-a}{2k}} - e^{\frac{-a}{k}}$, hincque $x = 2al(2e^{\frac{k}{2k}} - 1)$.

Scholion.

527. Si q et k accipiantur negatiua inuenitur lex vis centripetae, quae efficit, vt omnes ascensus ex C facti absoluantur aequalibus temporibus.

Hoc

Hoc enim semper locum habet, descensum in ascensum transmutari vi resistentiae negatiua facta. Quo igitur omnes ascensus fiant isochroni erit

$$p = \frac{e^{-\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int e^{\int \frac{dx}{2q}} dx. \quad \text{In casuque mediū vniformis}$$

$$\text{erit } p = \frac{k}{b^2} (1 - e^{\frac{-x}{2k}}).$$

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tabula IV.
Fig. 9.

528. Si vis centripeta sit distantis a centro C proportionalis, et medium vniforme resistat in simplici celeritatum ratione: oportet determinari motum corporis tam recto accedentis ad centrum C, quam recedentis ab eo.

Solutio.

Sit distantia, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis $= f$, et exponens resistentiae $= k$. Iam accedat corpus in recta AC ad centrum C et ponatur altitudo celeritati, quam C habebit debita $= c$. Hacque celeritate tum vltra C in recta CB recedat a C. Consideremus primo ascensum, et ponamus CP $= x$ et celeritatis in P altitudinem debitam $= v$. His positis erit vis centripeta in P $= \frac{x}{f}$, et vis resistentiae $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$; ex quibus oritur ista aequatio $dv = -\frac{x dx}{f} + \frac{dx \sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quo haec aequatio fiat homogenea ponatur $\sqrt{v} = u$ et $\sqrt{k} = b$; erit ergo $dv = 2u du$,
et

et $2udu = -\frac{xdx}{f} + \frac{udx}{b}$. Fiat $u = rx$; erit $2r^2 x dx + 2rx^2 dr = -\frac{xdx}{f} + \frac{rx dx}{n}$, ex qua oritur $\frac{dx}{x} = \frac{2fbrdr}{fr-b-2fbr^2}$.
 Quae integrata cum debita adiecta constante, et restitutis v et k , abit in hanc $\frac{v}{c} = \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} =$

$$\left(\frac{4\sqrt{f}kv - x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{f}kv - x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}} \right) \sqrt{\frac{f}{f-8k}}$$

Si autem $8k > f$ aequatio differentialis ope circuli quadraturae debet construi.

Ponatur scilicet $b = \frac{1}{4}\alpha$ et $f = \frac{1}{2}\xi$, et habebitur ista

aequatio differentialis $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 - 2ar + \xi} = \frac{dx}{x} + \frac{rdr - adr}{r^2 - 2ar + \xi} + \frac{adr}{r^2 - 2ar + \xi}$. Cuius integralis est $C = lV$

Tabula IV.
Fig. 10.

$$(u^2 - 2aux + \xi x^2) + \int \frac{adr}{r^2 - 2ar + \xi}. \text{ Est vero } \int \frac{adr}{r^2 - 2ar + \xi} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}} am,$$

arcusque am tangens $at = \frac{r - \alpha}{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}}$, existente radio $ac = r$. Posito ergo $\frac{u}{x}$ loco r , erit

$$at = \frac{u - \alpha x}{x\sqrt{(\xi - \alpha^2)}}. \text{ Ad constantem } C \text{ determinandam ponatur } x = 0 \text{ et } u = \sqrt{c},$$

quo facto loco $\frac{\alpha}{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}} am$ habebitur $\frac{\alpha}{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}} amb$. Erit ergo $lVc + \frac{\alpha}{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}} amb = lV(u^2 - 2aux + \xi x^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}} am$. Vnde fit $bm =$

$$\frac{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}}{\alpha} lV \frac{u^2 - 2aux + \xi x^2}{c}, \text{ estque } bm \text{ arcus cuius tangens } bs \text{ est } = \frac{x\sqrt{(\xi - \alpha^2)}}{u - \alpha x}.$$

Pro recessu a centro C si ponatur, ut ante $CQ = x$, et celeritas in $Q = \sqrt{v}$, retinentibus b, f, k, α, ξ, r et u eosdem quos ante valores, habebitur $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 + 2ar + \xi}$. Ex qua obtinebitur $bm = -\frac{\sqrt{(\xi - \alpha^2)}}{\alpha} lV \frac{u^2 + 2aux + \xi x^2}{c}$, estque arcus

$$bm \text{ tangens } bs = \frac{\alpha\sqrt{(\xi - \alpha^2)}}{u + \alpha x}. \text{ At si fuerit } \alpha^2 > \xi \text{ seu } f > 8k \text{ poterit integratio algebraice exhiberi, erit}$$

$$\frac{v}{c} + \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{f}kv + x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{f}kv + x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}} \right) \sqrt{\frac{f}{f-8k}}. \text{ Restat}$$

F f

stat autem casus quo $\alpha^2 = 8$, seu $f = 8k$ qui seorsim pertractari debet. Inuenitur autem pro accessu haec aequatio $\sqrt{\frac{4\sqrt{kv}-x}{4\sqrt{kc}}} = \frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$. Atque pro recessu ista $\sqrt{\frac{4\sqrt{kv}+x}{4\sqrt{kc}}} = \frac{-x}{4\sqrt{kv}+x}$. Q. E. I.

Corollarium I.

Tabula IV
Fig. 9.

529. In casu ergo quo $f = 8k$ semper pro accessu esse debet $4\sqrt{kv} > x$, alioquin $\frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$ aequaretur quantitati imaginariae. Quare nisi $x = 0$, non poterit esse $v = 0$, atque ideo celeritas in C necessario debet esse $= 0$. Quamobrem si ea ponatur finita \sqrt{c} initium descensus erit imaginarium.

Corollarium 2.

530. Hoc autem casu $f = 8k$ recessus ex aequatione cognoscitur facto enim $v = 0$ inuenitur $\sqrt{\frac{x}{4\sqrt{kc}}} = -1$, hincque $x = BC = \frac{4\sqrt{kc}}{e}$ denotante e numerum cuius logarithmus est vnitas. Ergo distantia BC est proportionalis celeritati in C.

Corollarium 3.

531. Quia igitur, quando resistentia tanta est, ut sit $8k = f$, corpus in accessu ad C omnem amittit celeritatem; multo maiore ratione si $8k < f$, seu resistentia adhuc maior fuerit, corpus ad C accedens omnem celeritatem amittet.

Co-

Corollarium 4.

532. Quare si vel $8k=f$ vel $8k<f$, corpus post accessum ad C in C perpetuo quiescet, atque his casibus nullus recessus sequi poterit. At si resistentia fuerit minor, seu $8k>f$, tum corpus accedens in C finitam celeritatem habere poterit, qua deinde a C recedet, atque motu oscillatorio mouebitur.

Corollarium 5.

533. Sin autem $8k>f$ pro accessu haec habetur aequatio; arcus cuius tangens est $\frac{x\sqrt{c-\alpha^2}}{u+\alpha x} = \frac{\sqrt{c-\alpha^2}}{\alpha}$ $\int \sqrt{\frac{u^2-2\alpha ux+\alpha x^2}{c}}$. Vnde initium accessus A inuenitur ponendo $u=0$, prodit autem arcus cuius tangens est $\frac{\sqrt{8k-f}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{8k-f}}{\sqrt{f}} \int \frac{\sqrt{2fc}}{x}$. Pro recessu vero similiter inuenitur arcus cuius tangens est $\frac{\sqrt{8k-f}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{8k-f}}{\sqrt{f}} \int \frac{\sqrt{2fc}}{x}$.

Scholion I.

534. Hinc sequi videtur distantiam BC semper aequalem esse distantiae AC, quia hae duae aequationes inter se congruunt. At cum, si $8k<f$ nullus omnino detur recessus, fieri non potest, vt, si $8k$ aliquantulum tantum maius fuerit quam f , spatium recessus aequale fiat spatio accessus. Difficultas haec autem tollitur, si attendamus innumerabiles arcus eidem tangenti $\frac{\sqrt{8k-f}}{\sqrt{f}}$ respondere, quorum

F f 2

rum

rum alius pro accessu alius pro recessu accipi debet. Ponatur $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \tau$, et minimus arcus tangenti τ respondens sit γ ; et semiperipheria circuli π , erit τ tangens omnium horum arcuum γ , $\pi + \gamma$, $2\pi + \gamma$, $3\pi + \gamma$ etc. nec non horum $-\pi + \gamma$, $-2\pi + \gamma$ etc. Pro recessu nunc BC sumi debet arcus γ , eritque $\frac{\gamma}{\tau} = l \frac{\sqrt{2fc}}{BC}$, atque $BC = e^{\frac{-\gamma}{\tau}} \sqrt{2fc}$. Atque pro accessu sumi debet arcus $-\pi + \gamma$ fitque $AC = e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}} \sqrt{2fc}$. Reliqui arcus dant puncta, in quibus corpus circa C oscillando successive habet celeritatem = 0. Cum igitur in prima oscillatione sit spatium accessus $= e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}} \sqrt{2fc}$; erit spatium accessus secundae oscillationis aequale spatio recessus in prima oscillatione atque ideo $= e^{\frac{-\gamma}{\tau}} \sqrt{2fc}$. In tertia oscillatione erit spatium accessus $= e^{\frac{-\pi-\gamma}{\tau}} \sqrt{2fc}$. Atque in oscillatione, quae numero n indicatur est spatium accessus $e^{\frac{-(n-2)\pi-\gamma}{\tau}} \sqrt{2fc}$. Hacque ratione cuiuscunque oscillationis tam spatium accessus, quam spatium recessus poterit determinari.

Corollarium 6.

535. Quando igitur corpus oscillationes absoluit circa centrum C, constituent spatia accessus progressionem geometricam, cuius denominator est

est $e^{\frac{-x}{r}}$. Similemque progressionem constituunt spatia recessus, atque etiam integra spatia singulis oscillationibus percurfa.

Scholion 3.

536. Quia aequatio differentialis $2udu = \frac{-xdx}{f}$
 $+ \frac{udx}{b}$ pro descensu, et aequatio $2udu = \frac{-xdx}{f} - \frac{udx}{b}$
 pro ascensu est homogenea: erit in utroque casu u
 $=$ functioni ipsarum x et a vnius dimensionis, de-
 notante a maximam a centro C elongationem AC
 aut BC . Quamobrem in temporis expressione $\int \frac{dx}{u}$
 nulla inerit dimensio ipsarum a et x , et ideo
 omnia tempora tam ascensuum, quam descensuum
 erunt inter se aequalia. Integrale enim ipsius $\frac{dx}{u}$,
 erit functio ipsarum a et x nullius dimensionis,
 haecque expressio posito $x = a$ erit aequalis quanti-
 tati constanti. Simili modo erunt omnium descen-
 suum tempora vsque ad punctum maximae celerita-
 tis inter se aequalia. Distantia enim puncti, in quo
 corpus maximam habet celeritatem, proporti-
 onalis est ipsi a seu maximae elongationi a cen-
 tro C (528).

PROPOSITIO 69.

Theorema.

537. Si fuerit vis centripeta ut potestas dis- Tabula IV,
 tantiae a centro C , cuius exponens est n ; et medi- Fig. 7.

Ff 3

um

um resistat in ratione $2m$ multiplicata celeritatum; exponens vero resistentiae sit proportionalis distantiarum a centro C potestati exponentis $\frac{mn+m-n}{m}$: Erunt plurium descensuum vel ascensuum tempora in spatiis totorum descriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata.

Demonstratio.

Sit AC spatium totum vel ascensu vel descensu descriptum $=a$, eiusque portio quaecunque $CP=x$, et celeritas corporis in $P=v$. Ponatur distantia f , in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis. His positis erit vis centripeta in

$P = \frac{x^n}{f^n}$, et sumto pro resistentiae exponente

$\frac{1}{\lambda^m x^{\frac{mn+m-n}{m}}}$ erit vis resistentiae $\frac{v^m}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Hinc pro de-

scensu habebitur ista aequatio $dv = \frac{-x^n dx}{f^n} + \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$

pro ascensu vero $dv = \frac{-x^n dx}{f^n} - \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Quae

aequationes inter se prorsus conueniunt nisi quod λ in altera negativum habeat valorem. Ponatur nunc $v = u^{n+1}$, et habebitur

$(n+1)u^n du = \frac{x^n dx}{f^n} + \frac{u^{mn+m} dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$, in qua aequatio-

ne u et x eundem vbique dimensionum numerum constituunt. Haec vero aequatio ita debet integrari, vt, facto $x=a$, euanescat u . Quam ob rem aequatio integralis ita erit comparata vt a , x et u vbi-

vbique eundem constituent dimensionum numerum. Ex ea igitur reperietur u aequalis functioni ipsarum a et x vnus dimensionis. Consequenter aequabitur v functioni ipsarum a et x dimensionum $n+1$. Quocirca tempus, quo spatium PC percurritur, nempe $\int \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit functio ipsarum a et x , quae habebit $\frac{1-n}{2}$ dimensiones. Facto deinde $x=a$, quo totum tempus per AC habeatur, prodibit functio ipsius tantum a dimensionum $\frac{1-n}{2}$. Totum ergo tempus vel ascensus vel descensus erit $= A a^{\frac{1-n}{2}}$, vbi A est quantitas constans ex literis f et λ , quae immutatae manent, vtcunque a varietur. Perspicuum igitur est omnes tam ascensus, quam descensus esse inter se in totorum spatiorum descriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata. Q. E. D.

Corollarium I.

538. Si medium resistens sit vniforme, ideoque $mn+m-n=0$, erit $n=\frac{m}{1-m}$, seu vis centripeta vt distantia eleuata ad $\frac{m}{1-m}$. Tempora vero vel ascensuum vel descensuum erunt in spatiorum percursorum ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata.

Corollarium 2.

539. Si fuerit $n=1$, seu vis centripeta distantis a centro C proportionalis, erunt omnia tempora tam ascensuum quam descensuum inter se aequa-

aequalia. Hoc vero casu cum resistentiae lex sit celeritatum potestas exponentis $2m$, erit resistentiae exponens ut distantia a centro C eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.

Corollarium 3.

540. Ex hoc patet, quod ex praecedente propositione inuenimus (536), si resistentia sit celeritatibus proportionalis, et hanc ob rem $m = \frac{1}{2}$, et medium vniforme, omnia tempora tam ascensuum quam descensuum fore inter se aequalia.

Corollarium 4.

541. Si vis centripeta fuerit constans seu $n = 0$, erunt tempora vel ascensuum vel descensuum in subduplicata spatiorum percursorum ratione. Exponens vero resistentiae fit distantis a centro C proportionalis. Eundem hunc casum iam exposuimus supra (495).

Scholion.

542. Hisce concludimus hoc Caput de motu puncti rectilineo in medio resistente; atque iuxta diuisionem factam progredimur ad motus curuilineos in vacuo corporum a quibuscunque potentiis absolutis sollicitatorum.

CAPUT QUINTUM

DE

MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO A
QUIBUSCUNQUE POTENTIIS ABSO-
LUTIS SOLLICITATI.

DEFINITIO 21.

543.

Vis tangentialis est potentia corpus, quod lineam curvam *AMB* describit, sollicitans, cuius directio incidit in tangentem *TMt* puncti *M*, in quo corpus, cum sollicitatur, est versatur. Tabula IV.
Fig. II.

Corollarium I.

544. Vis igitur tangentialis in corpus, dum elementum *Mm* percurrit, alium effectum non exerit, nisi quod motum eius vel acceleret vel retardet, prout scilicet corpus trahit vel secundum directionem *MT* vel *Mt*.

Corollarium 2.

545. Cum igitur corpus in linea curva moeuetur; vis tangentialis directionem suam perpetuo mutat, et secundum aliam plagam effectum suum exerit.

Scholion.

546. Vis quidem tangentialis per se in rerum natura vix unquam oriri potest; nihilo vero minus

G g

eius

eius vsus latissime patet. Quamcunque enim potentia sollicitans habeat directionem, ea semper in duas alias potest resolui, quarum alterius directio in tangente sit sita.

DEFINITIO 22.

547. *Vis normalis est potentia corpus lineam curuam AMB describens sollicitans, cuius directio MR est normalis in curuae elementum Mm seu tangentem MT.*

Corollarium I.

548. Vis igitur normalis corporis celeritatem neque auget neque minuit, quia eius directio MR neque in sequentia neque in antecedentia vergit (164).

Corollarium 2.

549. In hoc vero eius effectus consistit, vt in sequentibus ostendetur, vt corporis tantum directionem immutet, et efficiat, vt corpus, quod per se in recta esset progressurum, in linea curua promoueatur (165).

Scholion I.

550. Si corpus in eodem plano moueatur, in eoque etiam positae sint potentiarum sollicitantium directiones; singulae potentiae resolui possunt in binas, quarum altera sit normalis, altera tangentialis, quemadmodum ex principiis staticis apparet. Quare cum virium tangentialis et normalis effectus in corpus determinauerimus, simul quoque

cuiusvis potentiae obliquae effectus innotescet. Vocamus autem potentiam seu vim obliquam omnes potentias corpus sollicitantes, quae neque normales sint neque tangentiales.

Scholion 2.

551. Hinc oritur primaria huius capituli diuisio. Primo enim eos motus considerabimus, quorum semitae sunt in eodem plano, atque simul omnes potentiae sollicitantes in eodem ipso plano constitutae. Deinceps autem de iis motibus explicabimus, quorum semitae non sunt positae in eodem plano; ad quos cognoscendos singulas potentias in binas resolvere non sufficit, sed eas in ternas resolvere oportet, propter tres spatii, in quo corpus mouetur, dimensiones.

PROPOSITIO 70.

Problema.

552. *Si corpus, dum elementum Mm percurrit, sollicitatur a duabus potentiis altera normali altera tangentiali: determinare utriusque effectum in motu corporis alterando.*

Tabula IV,
Fig II.

Solutio.

Sit corporis elementum Mm describentis celeritas debita altitudini v , et vis normalis secundum MR trahens $=N$, et vis tangentialis secundum MT trahens $=T$, ponaturque elem. Mm $=ds$ et radius osculi in M $=r$. Ad effectum vis N determinandum, quia eius directio est normalis in Mm, vte-

G g 2

mur

mur formula §. 165, quae erat $npr = Ac^2$. Haec vero transmutata est in hanc $pr = 2Av$ (209). Quod autem hic nobis est N , id in citatis locis erat $\frac{p}{A}$, intelligimus enim per N non impressionem solum potentiae N in corpus, sed ipsam vim acceleratricem; seu potentiam absolute consideratam diuisam per massam corporis (218). Quare loco $\frac{p}{A}$ hic substitui debet N , quo facto habebitur $Nr = 2v$. *Quod erat alterum.* Deinde ad effectum vis tangentialis T determinandum adhibeo canonem §. 166, hunc $Ac dc = np ds$, seu huius loco mutatum $Adv = p ds$ (209). Atque ob allegatas rationes hic loco $\frac{p}{A}$ substituo T , eritque $dv = T ds$. Q. E. *Alterum.*

Corollarium I.

553. Quia vis grauitatis ponitur 1, erit vis normalis ad vim grauitatis vt altitudo celeritati debita ad dimidium radii osculi curuae; quae analogia sequitur ex aequatione $Nr = 2v$.

Corollarium 2.

554. Ex data igitur vi normali et curua quam corpus describit statim innotescit corporis celeritas. Nam expressa celeritate per \sqrt{v} erit $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Nr}{2}}$.

Corollarium 3.

555. Incrementum vero altitudinis celeritatem exponentis semper aequale est facto ex vi
tan-

tangentiali et spatio a corpore percurso. Seu hoc elementum ipsius v est ad spatium descriptum ds ut vis tangentialis ad vim grauitatis.

PROPOSITIO 71.

Problema.

556. *Si corpus, dum elementum Mm percurrit, sollicitetur a potentia quacunque obliqua airecti-
onis MC ; oportet determinari effectum huius potentiae in corporis motu alterando.* Tabula IV.
Fig. 11.

Solutio.

Sit potentia haec obliqua ad corporis grauitatem, si in superficie terrae esset positum ut P ad r , elementum $Mm = ds$, et celeritas in M debita altitudini v . Quia vero obliquitas potentiae MC data esse ponitur, angulus CMT datus erit, et propterea triangula CMT , Mmr , quae oriuntur ex C in MT et ex m in MC perpendicularis demissis, erunt specie data. Ponamus igitur $Mr = dy$ et $mr = dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; et ratio inter ds et dx et dy data erit. Conferantur iam cum his, quae supra (161, 163) nec non postea (203) tradita sunt. Ea enim prorsus similia sunt hisce, de quibus hic quaerimus: hoc tantum differunt, quod hic nobis sit $P:r$, quod ibi erat $p:A$. Hanc ob rem habebimus $dv = Pdy$, et, posito radio osculi MR in $M = r$, haec aequatio $Prdx = 2vds$ (208), scripto P loco $\frac{p}{A}$. Harum aequationum illa $dv = Pdy$ definit celeritatis incrementum, dum corpus elementum Mm

percurrit. Altera vero $Prdx = 2vds$ seu $\frac{2vds}{Pdx}$ exhibet lineae a corpore descriptae curvaturam in M . Innotescit ergo totus potentiae obliquae effectus in corpus motum. Q. E. I.

Corollarium I.

Tabula IV.
Fig. 12.

557. Si potentia obliqua constituit angulum obtusum cum elemento Mm , omnia manent ut ante, nisi nisi quod lineola $mr = dy$, accipi debeat negativa. Erit ergo $dv = -Pdy$, et altera aequatio $Prdx = 2vds$ ut ante.

Corollarium 2.

558. Si ergo potentiae directio MC intra normalem MR et elementum Mm cadit, ut in fig. 11. motus corporis acceleratur. At si CM extra utramque cadit, ut in fig. 13. motus retardatur.

Corollarium 3.

Fig. 11.]

559. Si directio potentiae MC incidit in tangentem MT , euanescit angulus mMr , et fit $Mr = Mm$ seu $dx = 0$ et $dy = ds$. Habebitur itaque $dv = Pds$, et $r = \infty$, id quod indicat corporis directionem ab hac potentia tangentiali non affici.

Corollarium 4.

Fig. 12.

560. Si directio potentiae MC incidit in alteram partem Mt , quo casu fit $Mr = dx = 0$, et $dy = ds$, erit $dv = -Pds$ et $r = \infty$ ut ante. Vis igitur tangentialis celeritatem corporis tantum afficit, directionem vero prorsus non immutat (544).

Co-

Corollarium 5.

561. Incidat potentiae directio MC in normalem MR, quo effectum vis normalis cognoscamus. Hoc ergo casu erit $dy=0$ et $dx=ds$. Et consequenter prodit $dv=0$, et $Pr=2v$. Vis ergo normalis celeritatem non afficit, sed tantum motus directionem (548).

Scholion 1.

562. Hinc igitur tam vis normalis, quam vis tangentialis effectus in corpus motum cognoscuntur. Quamobrem cum omnes potentiae, quotquot corpus sollicitant, modo sint in eodem plano positae cum motus directione, in binas alteram normalem alteram tangentialem possint resolui, etiam quarumcunque potentiarum effectus in corpus motum cognoscitur.

Scholion 2.

563. Hanc ergo priorem partem de motu in eodem plano facta ita subdiuidi maxime conuenit, vt primo directiones potentiae sollicitantis sint inter se parallelae, quemadmodum in nostris regionibus vis grauitatis directiones sibi parallelae obseruantur. Deinde contemplabimur casus, quibus potentiae directiones omnes in vno puncto conuergunt, quo etiam corpora perpetuo attrahuntur, et qui est casus virium centripetarum, qua de re tam egregiae inuentiones a *Newtono* sunt factae in *Princ. Phil. Nat. Parte I.* Tertio vero potentias
quas-

quascunque corpus sollicitantes inducemus et inuestigabimus, qui motus sit perpetuo secuturus. Ita autem in his singulis versabimur, vt primo quaestiones directas proponamus, tum vero etiam quaestiones quasque inuersas, vt haecenus fecimus, si-
mus resoluturi. Perpetuo denique, quantum licet, a casibus simplicioribus ad magis compositos et difficiliore progrediemur.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tabula IV.
Fig. 13.

564. *Si fuerit potentia constans, eiusque directio vbique normalis ad rectam AB; atque ex A data celeritate secundum directionem AH proiciatur corpus: determinari oportet curuam AMDB, quam corpus describet, motumque corporis in hac curua.*

Solutio.

Vocetur potentia sollicitans g , et sit celeritas, qua corpus in A proicitur debita altitudini c , atque cosinus anguli $HAB = \lambda$, posito sinu toto $= 1$. Iam percurrente corpore elementum $Mm = ds$, sit celeritas in M debita altitudini v , et $AP = x$, atque $PM = y$, itemque radius osculi in M $= r$. Propterea erit $Mr = dx$, et $mr = dy$, ex quo apparet hunc casum referri ad fig. 12, quo corporis motus retardabatur. Habebimus ergo $dv = -gdy$ et $grdx = 2vds$ (557). Ex harum vero aequationum illa oritur $v = C - gy$, in qua constans C ex hoc debet determinari, quod posito $y = 0$, fieri debeat $v = c$. Habetur

betur ergo $v=c-gy$. In altera nunc aequatione loco v substituatur hic valor inuentus, et prodibit $\frac{g r d s}{2 a s}=c-gy$. Est vero $r=\frac{d s^3}{-d x d d y}$ posito $d x$ constante, quo substituto erit $\frac{-g d s^2}{2 d d y}=c-gy$, seu $2 c d d y=2 g y d d y-g d x^2-g d y^2$ posito $d x^2+d y^2$ loco $d s^2$. Huius aequationis integralis reperitur $\frac{d x}{d s}=\sqrt{\frac{c}{c-g y}}$. Posito autem $y=0$, designat $\frac{d x}{d s}$ cosinum anguli HAB, qui est λ , erit ergo $\lambda^2=\frac{c}{c}$ et $C=\lambda^2 c$. Habebimus igitur $\frac{d x}{d s}=\lambda \sqrt{\frac{c}{c-g y}}$ et hinc $\frac{\lambda d y \sqrt{c}}{\sqrt{c(1-\lambda^2)-g y}}=d x$. Cuius integralis est $C-2 \lambda \sqrt{c(1-\lambda^2)-g y}=\frac{x}{\sqrt{c}}=2 \lambda \sqrt{c(1-\lambda^2)-2 \lambda \sqrt{c(1-\lambda^2)-g y}}$, ita determinata constante c ut euanescat y posito $x=0$. Ponatur breuitatis gratia sinus anguli HAB seu $\sqrt{1-\lambda^2}=\mu$, erit $g x=2 \lambda \mu c-2 \lambda \sqrt{\mu^2 c^2-g c y}$; atque hinc $y=\frac{\mu x}{\lambda}-\frac{g x^2}{4 \lambda^2 c}$. Erit ergo etiam $v=c-\frac{\mu g x}{\lambda}+\frac{g^2 x^2}{4 \lambda^2 c}$, et $d s^2=d x^2(1+\frac{\mu^2}{\lambda^2}-\frac{\mu g x}{\lambda^2 c}+\frac{g^2 x^2}{4 \lambda^4 c^2})=\frac{d x^2}{\lambda^2}(1-\frac{\mu g x}{\lambda c}+\frac{g^2 x^2}{4 \lambda^2 c^2})$. Consequenter erit $\frac{d s^2}{v}=\frac{d x^2}{\lambda^2 c}$ et $\int \frac{d s}{\sqrt{v}}=\frac{x}{\lambda \sqrt{c}}=$ tempori, quo arcus AM percurritur. Q. E. I.

Corollarium I.

565. Recidet ergo corpus in puncto B in lineam horizontalem AB sumta $AB=\frac{4 \lambda \mu c}{g}$. Tempus vero, quo corpus supra AB versatur et curuam ADB absoluit, est $=\frac{4 \mu \sqrt{c}}{g}$.

Corollarium 2.

566. Denotat autem $2 \lambda \mu$ sinum anguli, qui est duplus anguli HAB. Quare, si huius dupli angu-

H h

gu-

guli sinus vocetur κ , erit $AB = \frac{2\lambda c}{g}$. Ex quo apparet distantiam AB fore maximam, si fuerit $\kappa = 1$, ideoque angulus HAB semirectus, si quidem corpus eadem celeritate \sqrt{c} proiciatur.

Corollarium 3.

567. Intelligitur etiam motum corporis horizontalem esse aequabilem. Tempora enim quibus quilibet arcus describitur, sunt respondentibus abscissis in recta AB proportionalia.

Corollarium 4.

568. Si corpus perpetuo eadem celeritate \sqrt{c} proiciatur, sed sub diuersis angulis cum AB, erunt tempora, quibus supra AB versabitur, inter se ut sinus angulorum HAB (565).

Corollarium 5.

569. Maxima altitudo DE ad quam corpus pertinet erit applicata in puncto E, sumto $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g}$. Ex quo apparet esse AE subduplam ipsius AB. Ipsa vero maxima altitudo DE erit $\frac{\mu^2 c}{g}$, quae proinde quadrato sinus anguli HAB est proportionalis.

Corollarium 6.

570. Ex aequatione $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$ perspicitur curuam ADB esse parabolam, cuius axis sit recta DE, et parameter $\frac{AE^2}{DE} = \frac{4\lambda^2 c}{g}$. Parameter ergo proportionalis est quadrato cosinus anguli HAB.

Co-

Corollarium 7.

571. Huius ergo parabolae vertex erit punctum D, et distantia DF foci F a vertice D est $= \frac{\lambda^2 c}{g}$. Quare si ducatur recta MF erit haec $MF = DQ + DF$ ex natura parabolae.

Corollarium 8.

572. Porro autem erit $MF = DE - MP + DF = \frac{c}{g} - y = \frac{c - gy}{g}$. Quia vero est $v = c - gy$, erit altitudo debita celeritati in M $= g \cdot MF$. Patet ergo etiam fore $AF = \frac{c}{g}$.

Corollarium 9.

573. Perspicuum igitur est corpus hanc parabolam describens in loco quouis M tantam habere celeritatem, quantam corpus idem ab eadem potentia vniformi g sollicitatum recta descendens acquirere potest ex altitudine, quae aequalis sit distantiae puncti M a foco F parabolae.

Corollarium 10.

574. Cosinus anguli FAE est $= \frac{AF}{AE} = 2\lambda\mu = \kappa$. Ex quo manifestum est angulum FAE esse complementum dupli anguli HAE ad rectum, seu potius excessum huius dupli anguli super angulum rectum.

Corollarium 11.

575. Quia angulus AFD est deinceps positus anguli AFE, hicque complementum anguli FAE, erit angulus AFD duplus anguli HAB.

Hh 2

Scho-

Scholion I.

576. Facile ergo ex his deducitur constructio parabolae, quam corpus data celeritate et in data directione proiectum describet. Ducti enim AG normali ad AB capiatur angulus $GAF =$ duplo angulo HAE, et in hac directione sumatur AF aequalis altitudini, ex qua idem corpus recta descendens acquirit celeritatem aequalem ei, qua ex A proicitur, quo facto erit punctum F focus parabolae quaesitae (573, 575). Normalis porro DE per E in rectam AB ducta erit axis huius parabolae, atque vertex D reperitur, sumendo $DF = \frac{AF - FE}{2}$. Cum igitur parameter aequalis sit $4DF$, in promptu erit parabolae descriptio.

Scholion 2.

577. Si est $g = 1$, habemus casum grauitatis terrestris. Quocirca, si nullus adesset aer, qui ob resistantiam corpora mota impediret, omnia corpora proiecta mouerentur in parabolis. Hanc veritatem primus elicuit *Galilaeus*, et post eum omnes scriptores mechanici demonstrauere. Plerique quidem multo breuiore modo et sine differentio - differentialibus ad eam peruenerunt, sed nos hic malimus uti methodo vniuersali, quae latissime pateret, quam nimis particulari, quae ad hunc solum casum esset accommodata.

PROPOSITIO 73.

Problema.

578. Si corpus in A data celeritate et in data directione proiectum perpetuo attrahatur ad rectam AB in ratione quarumcunque functionum distantiarum ab hac recta; determinare curvam ADB, quam corpus ita sollicitatum describet et motum totum in hac curva.

Tabula V
Fig. I.

Solutio.

Sit celeritas in A = \sqrt{c} et sinus anguli HAB = μ , posito sinu toto = 1, et cosinus = λ . Ponatur celeritas corporis in M debita altitudini v , et elementum $Mm = ds$, itemque abscissa AP = x , applicata PM = y et radius osculi MR = r . Dum autem corpus elementum Mm percurrit, trahitur interea a potentia data, quae sit = P functioni cuidam ipsius y , in directione MP. His positis erit $dv = -Pdy$, et $Prdx = 2vds$ (557). Sit autem $\int Pdy = Y$, atque Y talis functio ipsius y , quae fiat = 0 posito $y = 0$. Hanc ob rem erit $v = c - Y$. Deinde ex priore aequatione valor ipsius P i. e. $\frac{dv}{dy}$ substituatur in altera $Prdx = 2vds$, et habebitur $\frac{dv}{v} = \frac{2dyds}{r dx}$. Est vero posito ds constante $r = \frac{ds dy}{d dx}$, vnde fit $\frac{dv}{v} = \frac{2 d dx}{dx}$, et integrando $lC - lv = l \frac{dx^2}{ds^2}$. Constans C determinabitur ex hoc, quod in puncto A, in quo fit $v = c$, fiat $\frac{dx}{ds} = \lambda$. Quocirca erit $lC = lc + 2l\lambda$, porroque sumendis numeris $\lambda^2 cds^2 = v dx^2$. Ex hac aequatione

Hh 3

nc

ne statim habetur elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\lambda\sqrt{c}}$, et hinc tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{\infty}{\lambda\sqrt{c}}$. Pro ipsa autem curua AMDB habebitur aequatio ex duabus aequationibus inuentis $v=c-Y$ et $\lambda^2 cds^2 = vdx^2$ eliminando v , orietur enim $\lambda^2 cds^2 = cdx^2 - Ydx^2 = \lambda^2 cdx^2 + \lambda^2 cdy^2$. Sed quia $1-\lambda^2 = \mu^2$, prodibit $dx = \frac{\lambda dy \sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, in qua aequatione, cum sint indeterminatae x et y a se inuicem separatae, construi poterit curua quaesita ADB. Q. E. I.

Corollarium I.

579. Tempora igitur, quibus arcus quicunque AM describuntur, sunt, vt abscissae respondentes AP. Est enim tempus per AM $= \frac{\infty}{\lambda\sqrt{c}}$.

Scholion I.

580. Motus corporis in curua AM in duos alios cogitatione potest resolui, quorum alter fiat secundum parallelas rectae AB, alter secundum perpendiculares in hanc AB. Illo motu corpus progreditur secundum rectam AB, isto vero vel ascendit vel descendit respectu huius rectae AB. Iam vero perspicuum est a potentia, cuius directio perpetuo est in perpendiculis ad AB, motum progressiuum horizontalem non immutari, et hanc ob rem hic motus perpetuo esse debebit aequabilis, et ea celeritate factus, quae oritur ex simili motus resolutione initialis. Cum vero motus initialis directio sit recta AH, erit eius celeritas \sqrt{c} ad celeritatem progressiuam secundum AB vt sinus totus 1 ad cosinum angu-

guli HAB, qui est λ . Celeritas ergo progressiva secundum AB erit $\lambda\sqrt{c}$, ex qua tempus, quo motus horizontalis perficitur per spatium $AP=x$, provenit $=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$ vt inuenimus.

Corollarium 2.^o

581. Si corpus celeritate \sqrt{c} ex A perpendiculariter ascendat in AC, et sumatur $AL=PM=y$, erit celeritas in L aequalis celeritati in M nempe $=\sqrt{v}$. Est enim $dv=-Pdy$, atque $v=c-Y$, quemadmodum pro puncto M inuenimus.

Corollarium 3.^o

582. Si fuerit AC tota altitudo, ad quam corpus ex A celeritate \sqrt{c} sursum proiectum pertingere potest; erit CL altitudo, ex quo corpus cadendo eandem acquirit celeritatem quam habet in M.

Corollarium 4.^o

583. Maxima altitudo DE reperitur, faciendo $dy=0$, quo casu erit $Y=\mu^2c$, ex qua aequatione valor ipsius y erutus dabit altitudinem DE, et celeritas in P tanta erit, quantam corpus ex altitudine CI delapsum acquirit.

Corollarium 5.^o

584. Inuenimus autem quoque $v=\frac{\lambda^2cds^2}{dx^2}$. Quare cum in puncto D sit $dx=ds$ erit celeritas in D $=\lambda\sqrt{c}$, quae est aequalis ipsi celeritati horizontali, qua corpus secundum AB progreditur.

Scho-

Scholion 2.

585. Amplitudo quidem AB ex aequatione quia non potest integrari, non apparet. Nihilominus tamen minus perspicuum est, partes AE et EB oportere esse aequales, et ramum DB similem et aequalem ipsi arcui DA. Namque postquam corpus in D peruenit, simili modo rursus accelerabitur, quo ante per AD erat retardatum; quia potentia in iisdem ab AB distantis est eadem, hocque modo motus iterum perfecte restituitur.

Scholion 3.

586. Facile hinc etiam problema reciprocum, quo ex data curua ADB et celeritate corporis in A, quaeritur potentiarum lex, quae faciat ut corpus in hac curua moueatur, resolui poterit. Ex aequatione enim $dx = \frac{\lambda dy \sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, habetur $Y = \mu^2 c - \frac{\lambda^2 c dy^2}{dx^2}$, atque $dY = P dy = -\frac{2\lambda^2 c dy ddy}{dx^2}$, posito dx constante. Quia est vero $r = \frac{ds^3}{dx ddy}$ eodem dx posito constante, erit $-ddy = \frac{ds^3}{rdx}$. Hoc substituto habebitur $P = \frac{2\lambda^2 c ds^3}{rdx^3} =$ potentiae sollicitanti corpus in M secundum directionem MP.

PROPOSITIO 74.

Problema.

Tabula V.
Fig. 2. 587. *Trabatur corpus in A proiectum ubique ad virium centrum C a vi centripeta quacunque; oporteatque determinari naturam curuae AM, in qua corpus mouebitur, et motum corporis in hac curua.*

So-

Solutio.

Ponatur vis centripeta corpus in M ad C sollicitans = P et celeritas corporis M debita sit altitudini v . Vocentur deinde distantia CM, y ; elementum Mm , ds , et perpendicularum CT in tangentem curvae MT, p , necnon elementum Mr , dx , et radius osculi MR, r . Erit ergo ob triangula similia Mmr et CMT , $ds\sqrt{(y^2-p^2)}=ydy$, et $dx\sqrt{(y^2-p^2)}=pdy$. Atque radius osculi r reperitur $=\frac{ydy}{dp}$. His positis habebimus $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (557). His aequationibus coniunctis eliminato P erit $rdvdx=-2vdsdy$ seu $\frac{dv}{v}=-\frac{2dsdy}{rdx}$. Substituantur $\frac{ydy}{dp}$ loco r , et $\frac{y}{p}$ loco $\frac{ds}{dx}$; prodibitque $\frac{dv}{v}=-\frac{2dp}{p}$. Quae integrata dat $v=\frac{C}{p^2}$. Constans haec C definietur ex data celeritate initiali in A, quae fit debita altitudini c , et directione projectionis, quam ita definiemus vt, posita distantia CA= a , perpendicularum CD in tangentem AD sit = b . Propterea erit $C=cb^2$ et $v=\frac{cb^2}{p^2}$. Hinc erit $\frac{ds}{dv}=\frac{pds}{bvc}$ = elemento temporis per Mm . Consequenter ob $pds=2MCm$, erit tempus, quo arcus AM percurritur $=\frac{2\cdot ACM}{bvc}$. Ipsa curua vero determinabitur substituendo $\frac{cb^2}{p^2}$ loco v in aequatione $Prdx=2vds$, quo facto prodibit $Pp^2rdx=2cb^2ds$. Haec aequatio loco r et $\frac{ds}{dx}$ substitutis valoribus $\frac{ydy}{dp}$ et $\frac{y}{p}$, transmutabitur in hanc $Pdy=\frac{2cb^2dp}{p^3}$. Quae aequatio, quaecunque P sit functio ipsius y , ob indeterminatas separatas poterit construi. Q. E. I.

Corollarium I.

588. Quia tempus, quo arcus AM percurritur, est $\frac{2 \cdot ACm}{b\sqrt{c}}$, erunt tempora, quibus arcus quicumque describuntur, ut areae comprehensae arcu descripto et rectis ad centrum C ductis.

Corollarium 2.

589. Deinde cum sit $v = \frac{cb^2}{p^2}$, erit $\sqrt{v} = \frac{b\sqrt{c}}{p}$. Celeritas igitur corporis in quocunque loco curvae percurvae est reciproce ut perpendicularum ex centro C in tangentem in illo puncto demissum.

Scholion I.

590. Haec arearum aequabilis descriptio constituit apud *Newtonum* primam propositionem, ex qua sequentia fere omnia deducit. Sunt autem hae duae proprietates maxime generales, et id tantum requirunt, ut vis centripetae directio sit perpetuo versus centrum. Quaecunque enim vis centripeta quantitate siue ipsarum CM functione siue secus exprimatur, aequae tamen utraque valet. Nam cum in eas incidissemus, ex calculo vis centripeta P exterminabatur, eiusque tantum directio in consideratione relinquebatur.

Corollarium 3.

591. Ad curvam, quam corpus describit, cognoscendam ipsam vim centripetam dari oportet.

tet, ex hacque data aequatio pro curua habebitur. Est enim $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$, quae exprimit curuae naturam si P fuerit quantitas data.

Corollarium 4.

592. Quia est $\frac{ydy}{dp} = r$, erit etiam $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$. Atque hoc est Theorema Moyvreaunum, illud vero $P = \frac{2cb^2dp}{p^3dy}$ Keilius primus se inuenisse contendit.

Scholion 2.

593. Hae aequationes duplicem habent utilitatem: Primo enim ex data vi centripeta poterit natura curuae, quam corpus proiectum describit, determinari. Deinde etiam vicissim ope harum aequationum, si fuerit data curua, quam corpus circa virium centrum C describit, definiri potest in quouis loco vis centripeta efficiens, vt corpus in hac curua libere moueatur.

Corollarium 5.

594. Quia est etiam $dv = -Pdy$, perspicuum est, si P fuerit functio ipsius y , celeritatem vbique a distantia corporis a centro pendere, et in iisdem distantiiis corpus eandem habere debere celeritatem.

Corollarium 6.

595. Quoties igitur P est functio ipsius y toties etiam curua descripta, ita erit comparata vt in aequalibus a centro distantiiis perpendiculara ex centro in tangentes demissa sint inter se aequalia, quia celeritates sunt reciproce vt haec perpendiculara (589).

Scholion 3.

596. Atque semper si P fuerit functio ipsius y , poterit assignari recta EC, in qua corpus a vi centripeta sollicitatum descendens in singulis punctis N eandem habebit celeritatem, quam habet in curua AM motum in punctis M aequaliter a centro distantibus. Sumto enim $CN = CM = y$, et $Nn = mr = dy$. Si fuerit celeritas in N aequalis celeritati in M scilicet debita altitudini v , erit etiam dum corpus per elementum Nn moueatur $dv = -Pdy$. Ex quo intelligitur celeritatem in n aequalem fore celeritati in m. Atque ita in singulis punctis rectae EC corpus tantam habebit celeritatem, quantam habet in curua AM in iisdem a centro C distantibus. Si ergo fuerit E motus initium in quo celeritas est $= 0$, ex data linea EC corporis in curua AM moti in singulis punctis innotescet celeritas. Hac igitur recta EC in posterum utemur ad celeritates corporis in curua moti definiendas, eamque vocabimus distantiam celeritates determinantem.

Corollarium 7.

597. Cum igitur data sit celeritas in A nempe debita altitudini c , ex hoc tota distantia EC reperietur. Tantum enim punctum E distans a C accipi debet, ut corpus ex E hac vi centripeta sollicitatum descendens in A aquirat celeritatem $= \sqrt{c}$.

Corollarium 8.

598. Si vocetur angulus $MCm = d\tau w$, erit
 $d\tau w = \frac{dx}{y} - \frac{pdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Vnde prodit $p = \frac{y^2 d\tau w}{\sqrt{(y^2 d\tau w^2 + dy^2)}}$.
 Tempusculum vero, quo angulus MCm absolvitur
 est $= \frac{pds}{b\sqrt{c}} = \frac{pydy}{b\sqrt{c}(y^2-p^2)}$. Hoc igitur tempusculum
 erit $= \frac{y^2 d\tau w}{b\sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

599. Si celeritatem angularem seu eam qua
 angulus MCm percurritur metiri velimus ipso hoc
 angulo per tempus diuiso prodibit celeritas angula-
 ris in $M = \frac{b\sqrt{c}}{y^2}$. Celeritas igitur angularis est reci-
 proce vt quadratum distantiae corporis a centro C.

Scholion 4.

600. Quia autem curua, quam corpus a da-
 ta vi centripeta sollicitatum describit, aliter non
 cognoscitur, nisi per aequationem inter corporis
 distantiam a centro et perpendicularum in tangentem
 ex centro demissum; difficile plerumque est iudica-
 re qualis sit curua inuenta, cum curuarum naturas
 consueuerimus aequationibus inter coordinatas or-
 thogonales exponere. Interim tamen huiusmodi
 aequationes inter distantiam a centro et perpendi-
 culum in tangentem, si modo sint vel algebraicae
 vel differentiales in quibus indeterminatae sint a se
 inuicem separatae, sufficiunt ad curuas quaesitas
 construendas. Sed quo natura et ordo curua-
 rum harum penitus possit inuestigari, dabimus

hic methodum aequationes inter distantiam et perpendicularum ad consuetas aequationes inter coordinatas reducendi.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tabula V.
Fig. 3.

601. Naturam curvae AM, quam corpus a quacunque vi centripeta sollicitatum describit, definire aequatione inter coordinatas orthogonales CP et PM ad axem fixum AC relatas.

Solutio.

Positis vt ante celeritate initiali in $A=Vc$, $AC=a$ et perpendicularo ex C in tangentem in A demisso $=b$. Atque praeterea $CM=y$, $CT=p$, et vi centripeta in $M=P$, quae sit functio quaedam ipsius y . Vocetur deinde $CP=x$, et $PM=z$, erit $CM=\sqrt{(x^2+z^2)}=y$, seu $z=\sqrt{(y^2-x^2)}$, retinebimus enim loco z in calculo y , quia hoc modo calculus fit facilius et breuior, atque post peractam totam operationem in promptu est z loco y introducere. His positis erit $Mm=\sqrt{(dx^2+dz^2)}=\frac{\sqrt{(y^2dy^2-2yx dy dx+y^2dx^2)}}{\sqrt{(y^2-x^2)}}$ et $Mr=\frac{-ydx+xdy}{\sqrt{(y^2-x^2)}}$. Fiet igitur $\frac{Mr}{Mm}=\frac{p}{y}\frac{xdy-ydz}{\sqrt{(y^2dy^2-2yx dy dx+y^2dx^2)}}$, et consequenter $p=\frac{yx dy-y^2 dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2yx dy dx+y^2dx^2)}}$. Sed pro curua AM hanc ante eliciuimus aequationem $Pdy=\frac{2cb^2 dp}{p^2}$. Ponamus autem Y integrale ipsius Pdy ita assumptum vt euanescat posito $y=a$. Quo facto erit $Y=C-\frac{cb^2}{p^2}$, vbi constans C ob $p=b$, si est $y=a$, debet esse $=c$. Erit er-

ergo $Y = \frac{cp^2 - cb^2}{p^2}$, ex qua prodit $p = \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{c-Y}}$. Quae
 quantitas cum sit Y functio ipsius y , est quoque
 functio quaedam ipsius y . Hanc ob rem habebimus
 hanc aequationem $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{c-Y}} = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2yx dydx + y^2dx^2)}}$.
 Ponamus $x = uy$ et $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{c-Y}} = Q$ breuitatis gratia, erit
 $Q = \frac{-y^2du}{\sqrt{(dy^2 - u^2dy^2 + y^2du^2)}}$, ex qua oritur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{Qdy}{y\sqrt{(y^2 - Q^2)}}$
 $= \frac{b\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - y^2Y)}}$ restituito $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{c-Y}}$ loco Q . Quae igitur
 aequatio, cum in ea indeterminatae u et y sint sepa-
 ratae, semper poterit construi. Q. E. I.

Corollarium I.

602. Quia est $u = \frac{x}{y}$, exprimet u cosinum
 anguli MCA. Et hanc ob rem vltima aequatio se-
 parata erit inter distantiam corporis a centro et an-
 guli ACM cosinum. Ex hac vero aequatione spon-
 te oritur aequatio inter x et z .

Corollarium 2.

603. Aequatio vero nunquam esse poterit
 algebraica, nisi denotet $\int \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - y^2Y)}}$ arcum circuli
 commensurabilem cum arcu $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$.

Corollarium 3.

604. Quoties ergo $\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - y^2Y)}}$ reduci po-
 terit ad formam huiusmodi $\frac{\lambda dz}{\sqrt{(\Lambda^2 - Z^2)}}$ et λ sit numerus
 rationalis, aequatio algebraica pro curua quaesita
 poterit exhiberi.

Scho-

Scholion I.

605. Si autem $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ aequabitur huiusmodi quantitati $\frac{\lambda dz}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$, habebitur integratione per logarithmos imaginarios peracta haec aequatio

$$\frac{\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1}} = \left(\frac{\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}} \right)^\lambda$$

$$\left(\frac{\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1}} \right)^\lambda. \text{ Est vero hic } C \text{ constans}$$

quantitas ex eo determinanda, quod, si fit $CM(y) = CA(a)$, simul quoque fieri debeat $x=a$, seu $u=1$. Ex illa autem aequatione conficitur ista

$$u = \frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\lambda (\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\lambda}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\lambda (\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\lambda}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

Quae quoties λ est numerus rationalis, ab imaginariis $\sqrt{-1}$ affectis libera redditur, et in algebraicam certi ordinis transmutatur.

Corollarium 4.

606. Quia est $x=uy$, habebitur ista aequatio $x =$

$$\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\lambda (\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\lambda y - (\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\lambda (\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\lambda y}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

quae, cum sit Z functio ipsius y , et $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$ facile in aequationem inter x et z mutatur.

Scholion 2.

607. Superior aequatio etiam in hanc potest transmutari $Z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} ((\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^\lambda$

$(\sqrt{-1})$

$(\sqrt{A^2-C^2}+C\sqrt{-1})-(\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\lambda}}$ ($\sqrt{A^2-C^2}-C\sqrt{-1}$)), quae commodior est, si $\frac{1}{\lambda}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

Scholion 3.

608. At si fuerit λ numerus negatiuus $= -\mu$, habebitur

$$\frac{(\sqrt{A^2-C^2}+C\sqrt{-1})^\mu(\sqrt{A^2-Z^2}-Z\sqrt{-1})^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}}$$

$$\frac{(\sqrt{A^2-C^2}-C\sqrt{-1})^\mu(\sqrt{A^2-Z^2}+Z\sqrt{-1})^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}} = u.$$

Ex quo apparet si λ fuerit negatiuum, ipsius u valorem tantum fieri negatiuum, id quod quidem ex aequatione differentiali intelligitur. Simili vero modo erit etiam $Z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{A^2-C^2}-C\sqrt{-1})-(\sqrt{1-u^2}+u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{A^2-C^2}+C\sqrt{-1}))$.

Corollarium 5.

609. Si fuerit $\lambda = 1$, erit $u = \frac{Z\sqrt{A^2-C^2}-C\sqrt{A^2-Z^2}}{A^2}$ et $x = \frac{Zy\sqrt{A^2-C^2}-Cy\sqrt{A^2-Z^2}}{A^2}$. Si fuerit $\lambda = -1$, etiam u vel x sumi debet negatiuum.

Corollarium 6.

610. Si fuerit $\lambda = 2$, erit $u = \frac{2Z(A^2-2C^2)\sqrt{A^2-Z^2}}{A^4}$ et $x = \frac{2C(A^2-Z^2)\sqrt{A^2-C^2}}{A^4}$. At si fuerit $\lambda = \frac{1}{2}$ erit $Z = C - 2Cu^2 + 2u\sqrt{1-u^2}$, (A^2-C^2).

PROPOSITIO 26.

Theorema.

Tabula V.
Fig. 4.

611. Si fuerit vis centripeta ut functio quaecunque distantiarum a centro C , et corpus in A proiiciatur secundum directionem normalem in AC celeritate, cuius altitudo debita se habeat ad dimidiam AC , ut vis centripeta in A ad vim gravitatis 1 : hoc corpus in peripheria circuli $AMBA$ cuius centrum est C movebitur aequabiliter.

Demonstratio.

Moueat in hoc circulo; quia eius distantia a centro non variatur, perpetuo ab eadem vi centripeta versus C sollicitabitur, cuicumque functioni distantiarum etiam sit proportionalis vis centripeta. Atque quia ad centrum C sollicitatur, erit directio potentiae sollicitantis normalis semper in curvae portianculam, in qua corpus mouetur. Quocirca corpus sollicitabitur perpetuo a vi normali nunquam a tangentiali, et hanc ob rem eius celeritas semper manebit eadem (591), ac ideo corpus motu aequabili peripheriam describet. Deinde quia vis centripeta seu normalis ubique est eadem, ponatur ea $=g$, et celeritas itidem constans debita altitudini c , atque radius $AC = a$, quae quantitas a ubique exhibet curvae radium osculi. His igitur positis erit $ag = 2c$ (561). Ex quo haec oritur analogia: Ut altitudo celeritati corporis, qua initio in A proiicitur debita c ad dimidiam distantiam

am

am AC, $\frac{1}{2}a$ ita vis centripeta g ad vim grauitatis $\mathbf{1}$. Q. E. D.

Corollarium 1.

612. Quando ergo corpus semel arcum circuli describit, cuius centrum est in ipso centro virium \mathbf{C} ; tum perpetuo in ea circuli peripheria reuoluetur. Si quidem vis centripeta a solis distantis a centro pendeat, ita vt in aequalibus distantis vis centripeta fit aequalis.

Corollarium 2.

612. Posita ratione diametri ad peripheriam $\mathbf{1}:\pi$, erit peripheria circuli, in quo corpus mouetur $=2\pi a$. Quia deinde celeritas, qua corpus mouetur, est $=\sqrt{c}=\sqrt{\frac{ag}{2}}$; erit tempus vnus periodi per totam peripheriam $=\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

614. Si ergo plura corpora in diuersis circulis moueantur, erunt tempora reuolutionum in subduplicata ratione composita ex directa radiorum circulorum et inuersa virium centripetarum.

Corollarium 4.

615. Si corpus ex \mathbf{A} perpendiculariter ad \mathbf{AC} proiciatur, sed celeritate vel maiore vel minore quam $\sqrt{\frac{ag}{2}}$. Corpus arculum circuli describet, cuius radius erit vel maior vel minor quam \mathbf{AC} .

Corollarium 5.

615. Hoc ergo casu, quo corpus incipit in arcu circulari moueri, cuius centrum non est in C statim ad centrum vel magis accedet vel magis ab eo recedet. Et hanc ob rem statim ab alia sollicitabitur vi centripeta, nisi forte vis centripeta vbi-que est eadem.

Scholion.

Tabula V.
Fig. 5.

617. Quacunq; autem corpus in A celeritate proiiciatur, modo sit eius directio in rectam AC per centrum virium C transeuntem perpendicularis, curua $BMAN$ hanc habebit proprietatem, vt eius portiones AMB , AND cis et vltra rectam AC positae sint inter se similes et aequales, atque AC axis et diameter huius curuae. Nam, quia, vt iam inuimus, vis centripeta functioni cuidam distantiarum a centro est proportionalis, corpus siue supra siue infra AC in aequalibus a C distantijs aequaliter sollicitatur, et hanc ob rem eodem modo per DNA ad A accedere debet, quo ab A per AMB recedit, atque in punctis homologis M et N eandem quoque habebit celeritatem.

Corollarium 6.

618. Omnis igitur recta ex centro C ducta, quae in curuam est normalis, erit simul curuae diameter; ita vt curuae partes cis et vltra hanc rectam positae sint inter se similes et aequales.

PRO-

PROPOSITIO 77.

Theorema.

619. Si plura corpora circa centrum virium C Tabula V. Fig. 6. moueantur, atque describant curuas AM , am circa C similes: erunt celeritates in punctis similibus M et m , in subduplicata ratione composita ex rationibus laterum homologorum et virium centripetarum in locis homologis M et m .

Demonstratio.

Quia est $AC : aC = MC : mC$, erit etiam radius osculi in M ad radium osculi in m in eadem ratione, nec non etiam perpendicularum CT ad Ct . Ex propositione 74 vero apparet esse $Prdx = 2vds$ seu loco $\frac{ds}{dx}$ posito $\frac{y}{p}$, $Ppr = 2vy$. Hinc ergo erit celeritas $Vv = V\frac{Ppr}{2y}$. Ex quo prodit haec analogia; celeritas in M est ad celeritatem in m in ratione subduplicata composita ex directis virium centripetarum in M et m , radiorum osculi in M et m , atque perpendicularorum CT ad Ct ; atque ratione inuersa distantiarum MC ad mC . Quia vero est CT ad Ct vt MC ad mC , et radius osculi in M ad radium osculi in m vt MC ad mC , erit celeritas in M ad celeritatem in m in ratione subduplicata composita ex rationibus virium centripetarum in M et m , et laterum homologorum MC ad mC . Q. E. D.

Corollarium I.

620. Si ergo dicatur $AC = A$; $aC = a$. $CD = H$ et $Cd = b$, itemque celeritas in $A = \sqrt{C}$, et in $a = \sqrt{c}$; erit cele-

ritas angularis in $M = \frac{H\sqrt{C}}{MC^2}$ et celeritas angularis in $m = \frac{b\sqrt{c}}{mC^2}$ (599). Quia autem est $H:b = MC:mC = A:a$; erunt celeritates angulares in M et m vt $\frac{\sqrt{C}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{c}}{a}$, i. e. in ratione constante.

Corollarium 2.

621. Tempora igitur, quibus aequales anguli ACM , $aC\bar{m}$, seu spatia homologa AM et am absoluuntur sunt reciproce vt celeritates angulares in M et m , i. e. directe vt latera homologa et reciproce vt celeritates in punctis homologis.

Scholion I.

622. Quin etiam celeritates in punctis homologis vbique eandem tenent rationem. Est enim celeritas in $M = \frac{H\sqrt{C}}{CT}$ et celeritas in $m = \frac{b\sqrt{c}}{Ct}$ (589). Quamobrem cum sit $H:b = CT:Ct$, erit celeritas in M ad celeritatem in m vt \sqrt{C} ad \sqrt{c} i. e. vt celeritas in A ad celeritatem in a .

Corollarium 3.

623. Ex ipsa autem propositione perspicitur esse celeritatem in A , \sqrt{C} ad celeritatem in a , \sqrt{c} in ratione subduplicata composita ex rationibus virium centripetarum in A et a , et laterum homologorum A ad a . Quare si dicatur vis centripeta in $A = G$ et vis centripeta in $a = g$; erit $\sqrt{C} : \sqrt{c} = \sqrt{AG} : \sqrt{ag}$.

Corollarium 4.

624. Consequenter tempus per AM erit ad tempus per am, vt $\sqrt{\frac{A}{C}}$ ad $\sqrt{\frac{a}{c}}$ i. e. in ratione subduplicata composita ex directa laterum homologorum et inversa virium centripetarum in punctis A et a. Quae ergo ratio est constans, eandemque tenere debent inter se integra reuolutionum tempora.

Scholion 2.

625. Hoc etiam casu, quo plures figurae similes circa centrum C describuntur, vires centripetae in punctis homologis eandem vbique tenere debent rationem. Quia enim est $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$ (592) erit vis centripeta in M, ad vim centripetam in m directe vt quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in a et reciproce vt AC ad aC quae est ratio constans. Quamobrem quo possint plures figurae similes circa centrum C describi, oportet vt vis centripeta huiusmodi distantiarum functione exprimatur, quae in locis homologis vires centripetas eandem rationem tenentes praebet. Scilicet posita P vi centripeta in distantia y et Q in distantia my, debebit P ad Q habere rationem constantem, in qua non insit y. Hoc enim nisi fuerit, fieri non potest, vt circa centrum C plures figurae similes describantur.

Corollarium 5.

626. Hoc autem obtineri non potest, nisi sit P potestas quaedam ipsius y, vt $\frac{y^n}{f^n}$. Hoc enim
ca-

casu fit $Q = \frac{m^n y^n}{f^n}$ et ratio P:Q erit $1 : m^n$, quae est constans.

Corollarium 6.

627. Nisi ergo vis centripeta cuidam dignitati distantiarum a centro C fit proportionalis, ne fieri quidem potest, ut plures figurae similes circa centrum C describantur. Atque in his solis casibus locum habebunt proprietates, quas ex hac propositione eruimus.

Corollarium 7.

628. Si autem fuerit $P = \frac{j^n}{f^n}$, erit $G = \frac{A^n}{f^n}$ et $g = \frac{a^n}{f^n}$. Celeritates ergo in locis homologis tenebunt rationem $A^{\frac{n+1}{2}}$ ad $a^{\frac{n+1}{2}}$.

Corollarium 8.

629. Atque tempora quibus arcus similes AM et an absoluuntur erunt in ratione $A^{\frac{1-n}{2}}$ ad $a^{\frac{1-n}{2}}$ seu in ratione multiplicata iterum homologorum cuius exponens est $\frac{1-n}{2}$.

Scholion 3.

630. In praecedente et hac propositione continentur omnia Theoremata, quae *Hugenius* de viribus centrifugis in tractatu suo de Horologio oscill-

cillatorio annexit. Eaque partim re ipsa hic appo-
sui, partim euentissime ex ipsis propositionibus
deduci possunt.

PROPOSITIO 78.

Problema.

631. Si centrum C attrahat in ratione distanti-
rum directa, et corpus ex A secundum directionem ad ra-
dium AC normalem data cum celeritate proiciatur: de-
terminare curuam AMDBH, quam corpus describet,
corporisque celeritatem in singulis locis.

Tabula VI.
Fig. 1.

Solutio.

Ponatur distantia $CA = a$, erit perpendicularum,
quod ex centro C in motus directionem demittitur
 $= a$. Celeritas vero in A debita sit altitudini c .
Peruenerit corpus in M, sitque $CM = y$, et perpen-
diculum ex C in tangentem in M demissum CT po-
natur $= p$, atque celeritas in M debita sit altitudi-
ni v . Sit porro distantia, in qua vis centripeta
aequalis est grauitati, f ; erit vis centripeta in
M $= \frac{y}{f}$ posita vi grauitatis $= 1$. His cum prop.
75 (601) comparatis, erit $P = \frac{y}{f}$ et $Y = \frac{y^2 - a^2}{2f}$.
Quamobrem habebitur $p = \frac{a\sqrt{2cf}}{\sqrt{(a^2 + 2cf - y^2)}}$. Est vero
 $v = \frac{a^2c}{p^2}$ (587), ex quo erit $v = \frac{a^2 + 2cf - y^2}{2f}$. Ob ele-
mentum curuae autem $= \frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$, erit elementum
temporis $\frac{ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2y^2 + 2cfy^2 - y^4 - 2a^2cf)}}$. Demisso ex M in
CA perpendicularo MP, vocetur $CP = x$, po-

L 1

na-

naturque $x = uy$. His positis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{2cf}}{y\sqrt{(2cfy^2 - 2a^2cf - y^4 + a^2y^2)}} (601)$. Fiat $y = \frac{1}{\sqrt{(q + \frac{2cf+a^2}{4a^2cf})}}$ et prodibit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-\frac{1}{2}dq}{\sqrt{(\frac{a^2-2cf}{4a^2cf})^2 - q^2}}$. Quo collato cum formula $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(\Lambda^2 - Z^2)}} (604)$, erit $\lambda = \frac{1}{2}$, $Z = -q$ et $A = \frac{a^2 - 2cf}{4a^2cf}$. Ex his autem inuenitur $Z = -q = C - 2Cu^2 + 2u\sqrt{(A^2 - C^2)}(1-u^2) = \frac{a^2 + 2cf}{4a^2cf} - \frac{1}{y^2}$. Constantis quantitas C ex hoc determinabitur, quod factu $u = 1$ fieri debeat $y = a$. Hinc ergo erit $C = \frac{2cf - a^2}{4a^2cf}$ unde fit $\sqrt{(A^2 - C^2)} = 0$. His substitutis habebitur $\frac{1}{2cf} - \frac{1}{y^2} = \frac{(a^2 - 2cf)u^2}{2a^2cf} = \frac{(a^2 - 2cf)x^2}{2a^2cfy^2}$ ob $u = \frac{x}{y}$. Aequatio igitur resultabit ista $a^2y^2 - 2a^2cf = (a^2 - 2cf)x^2$. Ponatur applicata $MP = z$, erit $y^2 = x^2 + z^2$. Hinc sequens prodibit pro curua quaesita aequatio inter coordinatas orthogonales, $a^2z^2 + 2cfx^2 = 2a^2cf$. Haec aequatio est ad ellipsin, cuius centrum in C est situm, et $AB = 2a$ est alter eius axis; alter vero $DH = 2\sqrt{2cf}$. Q. E. I.

Corollarium I.

632. Altitudo celeritati in M debita v est $\frac{a^2 + 2cf - y^2}{2f}$. Quia autem est $a^2 + 2cf = AC^2 + CD^2 = AD^2$, erit $v = \frac{AD^2 - CM^2}{2f}$.

Corollarium 2.

633. Simili modo perpendicularum CT in tangentem MT demissum erit $p = \frac{AC \cdot CD}{\sqrt{(AD^2 - CM^2)}}$ et ipsa tangens

gens $MT = \frac{\sqrt{AD^2 \cdot CM^2 - CM^4 - AC^2 \cdot CD^2}}{\sqrt{AD^2 - CM^2}} = \frac{(AC^2 - CD^2) \cdot CP \cdot PM}{AC \cdot CD \sqrt{AD^2 - CM^2}}$. Si quidem est $AC > CD$.

Corollarium 3.

634. Hoc autem casu quo $AC > CD$, erit AB ellipsis axis transuersus, in eoque foci F et G fiti. Erit autem $CF = CG = \sqrt{AC^2 - CD^2}$. Adeoque $MT = \frac{CF^2 \cdot CP \cdot PM}{AC \cdot CD \sqrt{AD^2 - CM^2}}$.

Corollarium 4.

635. Anguli ergo TMC , quem corporis in M directio cum radio MC constituit, sinus est $\frac{AC \cdot CD}{CM \cdot \sqrt{AD^2 - CM^2}}$, et cosinus $\frac{CF^2 \cdot CP \cdot PM}{CM \cdot AC \cdot CD \cdot \sqrt{AD^2 - CM^2}}$.

Scholion I.

636. Distantia celeritates determinans CE (596, 597) aequalis est semper subtensae AD . Nam posita $CE = k$, descendat corpus ex E versus C a vi centripeta tractum; habere debet corpus cum in A peruenerit celeritatem altitudini c debitam. Quamobrem erit $k = \sqrt{a^2 + 2cf}$, (275). Quia autem est $AC = a$, et $CD = \sqrt{2cf}$, erit $CE = \sqrt{AC^2 + CD^2} = AD$.

Corollarium 5.

637. Altitudo debita celeritati, quam corpus in recta EC motum acquireret, cum in C peruenerit, erit $\frac{k^2}{2f} = \frac{a^2 + 2cf}{2f} = \frac{AD^2}{2f}$.

Corollarium 6.

638. Tempus quo arcus AM absoluitur $= \frac{2 \cdot ACM}{a \sqrt{c}}$ (588) ob $b = a$ hoc casu. Quamobrem

tempus totius reuolutionis per ellipsis perimetrum ADBHA erit $= \frac{2 \cdot \text{Areae Ellipticae}}{a\sqrt{c}}$. Est vero posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, spatium ellipticum $= \pi a\sqrt{2cf}$. Consequenter tempus vnius reuolutionis erit $2\pi\sqrt{2f}$.

Corollarium 7.

639. Si ergo plura corpora circa idem centrum virium attrahens in ratione distantiarum reuoluantur in ellipsis, erunt singulorum tempora integrarum reuolutionum inter se aequalia.

Scholion 2.

640. Quando corporis directio initialis in puncto A non ponitur normalis ad radium AC, calculus non praebet ellipsin pro curua a corpore descripta; sed aliam curuam ordinis quarti, quae tamen nullo modo satisfacere potest. Causa huius discrepantiae calculi a veritate in hoc consistit, quod expressio sinus anguli, quem curua cum radio constituit, in y et u sumpta semper euadat $= 1$, posito $y=a$ et $u=1$, etiamsi secundum hypothesin alia prodire debeat quantitas. Sinus enim anguli, quem curua cum radio comprehendit est $\frac{y du}{\sqrt{(dy^2 - u^2 dy^2 + y^2 du^2)}}$ quae expressio facto $u=1$ euidenter abit in unitatem, cum tamen prodire debeat $\frac{b}{a}$. Quamobrem perspicuum est, nisi ponatur $b=a$, calculum hoc modo institutum nunquam cum veritate conspirare posse, si quidem aequatio inter u et y quaeri debeat. Haec ergo regula perpetuo est tenenda, quoties

ties curua descripta secundum praecepta propof. 75 (601) inuestigabitur. Methodus autem hac propositione tradita ad curuas algebraicas tantum inueniendas est accommodata; alia enim methodo, si curuae sint transcendentes, vti oportet. At omnes curuae algebraicae hac gaudent proprietate, vt in eas ex puncto quocunque duci possit perpendicularis. Quocirca, quoties corpus in curua algebraica circa centrum virium reuoluitur, semper in ea vel vnum vel plura poterunt assignari puncta, in quibus radius ad curuam sit perpendicularis. In huiusmodi igitur punctis corpus motum inchoare ponendum est, atque calculus semper veritati erit consentaneus. Ex tali autem solutione facile inuenietur corporis in quouis alio loco celeritas, atque hinc methodo inuersa data corporis celeritate in loco, in quo radius non est ad curuam normalis, reperietur celeritas in loco, vbi radius in curuae normalem incidit. Quomodo autem hoc effici debeat ex propositione sequente perspicietur. Supra memorata curuarum algebraicarum proprietates vero, quae ex quocunque puncto dato in eas perpendicularis potest demitti, non in omnes curuas transcendentes competit. In spirali enim logarithmica nullum radium ex centro ad curuam ductum esse normalem, sed perpetuo cum ea constantem constituere angulum, cuique est notum. Quo tandem ratio intelligatur, quare $\frac{y du}{\sqrt{(dy^2 - u^2 dy^2 + y^2 du^2)}}$ semper facto $u=1$ mutetur in vnitatem, cum tamen quouis alius quo-

que angulus praeter rectum ex ea produci deberet; animaduertendum est abeunte u in 1 , elementum du euanescere prae dy , nisi sit tangens in A ad radium AC normalis. Hancque ob causam posito $u=1$, elementum $dy^2(1-u^2)$ non est negligendum ratione $y^2 du^2$, cum vtrumque euanescat, vt et numerator $y du$. Quo fit, vt cuiusuis arbitrarii anguli sinus illa formula facto $u=1$ possit exprimi. Sed quoniam haec cautela in calculo non potest obseruari, praeter casus $b=a$ calculus nunquam veram curuam exhibet.

PROPOSITIO 79.

Problema.

641. Attrahente centro virium in ratione distantiarum, et proiiciatur corpus in M celeritate quacunque, et secundum quamcunque directionem MT : determinari oportet ellipsin in qua corpus mouebitur.

Solutio.

Solutionem huius problematis esse possibilem ex hoc intelligi potest, quod numerus datorum non fit nimis magnus ad ellipsin determinandam, prout apparebit. Ponantur radius $CM=y$, sinus anguli $CMT=s$, posito sinu toto $=1$, et altitudo celeritatis in M debita $=v$, distantia praeterea a centro C , in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis maneat $=f$. Hae igitur quantitates tanquam datae et cognitae erunt considerandae; incognitae vero et inueniendae sunt ellipsis axes, eorumque positio:
ho-

horum ponatur $AC = a$ et $CD = b$, eritque $b = \sqrt{2cf}$ (631). His positis habebitur statim $2fv = a^2 + b^2 - y^2$ (632), unde fit $a^2 + b^2 = AD^2 = 2fv + y^2$, cognoscitur ergo iam subtensa AD , huicque aequalis distantia CE celeritates determinans. Deinde quoque habetur $s = \frac{ab}{y\sqrt{(a^2 + b^2 - y^2)}} = \frac{ab}{y\sqrt{2fv}}$, ex quo oritur $ab = sy\sqrt{2fv}$. His coniunctis oritur $(a^2 - b^2)^2 = 4f^2v^2 + 4fvy^2 + y^4 - 8fs^2vy^2 = 4f^2v^2 + y^4 + 4fvy^2(1 - 2s^2)$. Est vero $1 - 2s^2$ cosinus dupli anguli CMT , quem vocemus i . Erit ergo $a^2 - b^2 = \sqrt{(4f^2v^2 + y^4 + 4fi vy^2)}$. Ex his aequationibus provenit $a^2 = fv + \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{(f^2v^2 + \frac{1}{4}y^4 + fivy^2)}$ et $b^2 = fv + \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{(f^2v^2 + \frac{1}{4}y^4 + fivy^2)}$. Inuentis vero axibus positio eorum facile habebitur. Est enim cosinus anguli $ACM = \frac{x}{y} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{a^2y^2 - a^2b^2}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{fv + \frac{1}{2}y^2}{4f^2v^2 + y^4 + 4fivy^2}}$ seu cosinus dupli anguli $ACM = \frac{2fi v + y^2}{\sqrt{(4f^2v^2 + y^4 + 4fivy^2)}}$, atque sinus huius anguli $2ACM = \frac{2fv\sqrt{(1-i^2)}}{\sqrt{(4f^2v^2 + y^4 + 4fivy^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

642. Vbicunque igitur corpus proiciatur, et quacunque celeritate, atque secundum quamvis directionem, corpus circa centrum virium in perimetro ellipsis mouebitur, cuius centrum est in ipso centro virium.

Scholion.

643. Haecenus vis centralis distantis proportionalis attrahens est posita; simili autem modo reperientur curvae descriptae, si vis corpora a centro

tro in eadem ratione repellat. Praecedentia enim omnia ad hunc casum accommodantur, si modo $-f$ loco f scribatur. Hoc vero facto, curua, quae ante erat ellipsis transmutatur in hyperbolam, axe minore imaginario facto, centrumque virium manet in centro hyperbolae.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tabula VI. Fig. 2. 644. Si vis centripeta fuerit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, corpusque in A data celeritate proiiciatur in directione ad radium AC normali: oportet determinare curuam AMDBHA, quam corpus describet, et motum ipsum per illam.

Solutio.

Positis ut ante $AC = a$, et celeritate in A debita altitudini c , sit f distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati. Ponatur tum $CM = y$, perpendicularum, quod in tangentem demittitur, $CT = p$, et altitudo celeritati in M debita $= v$. His cum prop. 75 (601) comparatis erit $b = a$, $P = \frac{f^2}{y^2}$, et $Y = \frac{f^2}{a} - \frac{f^2}{y}$. Demittatur ex M in AC perpendicularum MP, et vocetur $CP = x$, ponaturque $x = uy$. Quo facto erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{adyvc}{y\sqrt{(cy^2 - a^2c - \frac{f^2y^2}{a} + f^2y)}}$. Ponatur

$$y = \frac{1}{\frac{f^2}{2a^2c} - q}, \text{ eritque } \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{dq}{\sqrt{\left(\left(\frac{2ac-f^2}{2a^2c}\right)^2 - q^2\right)}}.$$

Conferatur haec formula cum $\frac{\lambda dz}{\sqrt{(\Lambda^2 - Z^2)}}$ (604), eritque $\lambda = 1$, $A = \frac{2ac-f^2}{2a^2c}$ et $Z = q$. Quamobrem habebit

bebitur sequens aequatio $u = \frac{q\sqrt{A^2 - C^2} - C\sqrt{A^2 - q^2}}{A^2}$ (609).
 Est vero $q = \frac{f^2}{2a^2c} - \frac{1}{y}$, et constans quantitas C ex eo
 debet definiri, quod factò $u = 1$ fiat $y = a$. Aequa-
 tio vero illa parum mutata in hanc transit $C +$
 $u\sqrt{A^2 - q^2} = q\sqrt{1 - u^2}$. In qua factò $u = 1$ et
 $q = \frac{f^2 - 2ac}{2a^2c}$, prodit $C = 0$. Consequenter habebitur
 $(\frac{f^2 - 2ac}{2a^2c})^2 u^2 = q^2$, seu $(f^2 - 2ac)u = 2a^2cq = f^2 - \frac{2a^2c}{y}$.
 Quia vero est $u = \frac{x}{y}$, erit $(f^2 - 2ac)x = f^2y - 2a^2c$, at-
 que $f^4y^2 = 4a^4c^2 - 4a^2cx(f^2 - 2ac) + (f^2 - 2ac)^2x^2$.
 Vocetur applicata $PM = z$, erit $f^4z^2 = 4a^4c^2 - 4a^2cx$
 $(f^2 - 2ac) - 4acf^2x^2 + 4a^2c^2x^2$. Ponatur $x = t +$
 $\frac{2a^2c - af^2}{2f^2 - 2ac}$, quo factò habebitur $f^4z^2 = \frac{a^3cf^4}{f^2 - ac} - 4act^2$
 $(f^2 - ac)$. Quae est aequatio ad ellipsin abscissis in
 axe transverso a centro G sumtis, cuius axis trans-
 uersus est $= \frac{af^2}{f^2 - ac}$ et coniugatus $= \frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{f^2 - ac}}$. Centri-
 que virium C a centro ellipsis G distantia $CG =$
 $\frac{2a^2c - af^2}{2f^2 - 2ac}$, quae aequalis est semidistantiae focorum.
 Hanc ob rem centrum virium C in alterutro foco
 ellipsis est positum. Apparet igitur corpus in A
 celeritate \sqrt{c} proiectum circa centrum C descriptu-
 rum esse ellipsin AMDBHA, cuius focus alter in C
 est situs. Eritque $AC = a$, $AG = \frac{af^2}{2f^2 - 2ac}$, $AB = \frac{af^2}{f^2 - ac}$,
 $BC = \frac{a^2c}{f^2 - ac}$, axisque coniugatus $DH = \frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{f^2 - ac}}$. Latus
 vero rectum ellipsis est $= \frac{4a^2c}{f^2}$. Ad celeritatem in
 M determinandam vsu erit aequatio $v = \frac{a^2c}{p^2}$. Est
 autem $p = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(c-y)}} = \frac{a\sqrt{acy}}{\sqrt{(acy + (a-y)f^2)}}$, ergo $v = \frac{acy + (a-y)f^2}{ay}$.
 Q. E. I.

Corollarium I.

645. Distantia celeritates determinans CE inuenitur $= \frac{af^2}{f^2-ac}$ (274). Ex quo apparet distantiam hanc CE aequalem esse axi transuerso ellipsis AB.

Corollarium 2.

646. Toties autem curua a corpore descripta est re vera ellipsis, quoties est $f^2 > ac$ seu $c < \frac{f^2}{a}$. At si est $c > \frac{f^2}{a}$, tum axis transuersus fit negatiuus, et coniugatus imaginarius, id quod indicio est curuam his casibus abire in hyperbolam.

Corollarium 3.

647. Quando vero est $c = \frac{f^2}{a}$, curua medium tenebit inter hyperbolam et ellipsin axemque transuersum habebit infinitum. Erit itaque tum curua a corpore descripta parabola.

Corollarium 4.

648. Si $c = \frac{f^2}{2a}$, ellipsis abit in circulum, aequales enim euadunt axes, transuersus et coniugatus. Centrum vero virium in ipsum centrum circuli incidet.

Corollarium 5.

649. Ducatur in ellipsi ex altero foco F recta FM ad M, erit $FM = AB - y = \frac{f^2(a-y) + acy}{f^2-ac}$. Ex quo cognoscitur fore $v = \frac{(f^2-ac).FM}{a.CM}$. Est ergo celeritas in puncto quouis M vt $\sqrt{\frac{FM}{CM}}$.

Co-

Corollarium 6.

650. Sinus anguli, quem radius CM cum tangente MT constituit est $= \frac{p}{y} = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(acy)^2 + (a-y)^2 y}}$ Posito sinu toto = 1. Sed quia est $FM = \frac{f^2(a-y) + acy}{f^2 - ac}$, erit sinus anguli $CMT = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2 - ac) FM \cdot CM}}$.

Corollarium 7.

651. Quia est $GC = \frac{2a^2c - af^2}{2f^2 - 2ac}$, centrum virium erit in remotiore foco a vertice A, quoties est $c > \frac{f^2}{2a}$. In propiorem vero incidet si $c < \frac{f^2}{2a}$.

Corollarium 8.

652. Posito axe maiore AB = E, parametro = L, erit $E = \frac{af^2}{f^2 - ac}$, et $L = \frac{4a^2c}{f^2}$. Hinc reperitur $a = \frac{E \pm \sqrt{(E^2 - EL)}}{2}$ atque $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{L}}{E \pm \sqrt{(E^2 - EL)}}$.

Corollarium 9.

653. Tempus, quo corpus integram ellipsis circumferentiam percurrit, est $= \frac{2 \cdot \text{Areae Ellipt.}}{a\sqrt{c}}$
 $= \frac{4 \cdot \text{Areae Ellipt.}}{f\sqrt{L}}$ (588). Posita vero ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, est area elliptica $= \frac{\pi E\sqrt{EL}}{4}$.
 Tempus ergo vnius reuolutionis est $= \frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$.

Corollarium 10.

654. Si ergo plura corpora circa centrum virium C reuoluantur attracta in reciproca duplicata ratione distantiarum; erunt tempora periodica inter se in sesquuplicata ratione axium transuersorum ellipsium.

Corollarium II.

655. Si celeritas initialis in A euanescit, abic ellipsis in lineam rectam AC. In hac igitur recta corpus perpetuo mouebitur ab A ad C, hincque subito rursus ad A reuertetur, ita vt nunquam ultra centrum C pertingat (272).

PROPOSITIO 8I.

Problema.

656. Posita vi centripeta distantiarum quadratis reciproce proportionali, proiciatur corpus ex M celeritate quacunque et iuxta directionem quamuis MT: ex quo oporteat determinari ellipsin MDBHAM, in qua corpus mouebitur.

Solutio.

Sit $MC=y$, sinus anguli $CMT=s$, et celeritas in M debita altitudini v , distantia a centro, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis, maneat $=f$. Haeque sunt quantitates cognitae, ex quibus quaesitae axis transuersus AB, eius positio, et latus rectum debent definiri. Sit axis transuersus $=E$, et latus rectum $=L$, reliquaeque litterae a, c , feruent suas significationes, vt in praecedente propositione. Erit iam ex natura ellipsis $FM=E-y$, ex quo fiet $v = \frac{(f^2-ac)(E-y)}{ay}$ (649) $= \frac{f^2(E-y)(2E-L \pm 2\sqrt{E^2-EL})}{y(E \pm \sqrt{E^2-EL})^2}$ (652) $= \frac{f^2(E-y)}{Ey}$. Hinc reperitur $E = \frac{f^2 y}{f^2 - v y}$. Deinde est sinus anguli $CMT = s = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)y(E-y)}}$ (650). At est $f^2-ac = \frac{f^2(E \pm \sqrt{E^2-EL})}{2E}$ et

et $a^3c = \frac{1}{8}f^3L(E + \sqrt{E^2 - EL})$ (652), ex quo fit $\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{f^2 - ac}} = \frac{1}{2}\sqrt{EL}$, hincque $s = \frac{\sqrt{EL}}{2\sqrt{Ey - y^2}}$. Erit igitur axis coniugatus $DH = \sqrt{EL} = 2s\sqrt{Ey - y^2} = \frac{2sy\sqrt{vy}}{\sqrt{f^2 - vy}}$, et latus rectum $L = \frac{4s^2vy^2}{f^2}$. Ad positionem axis transuersi inueniendum quaeratur cosinus anguli MCP seu $\frac{x}{y} = \frac{f^2y - 2a^2c}{y(f^2 - 2ac)} = \frac{2Ey - LE}{2y\sqrt{E^2 - EL}} = \frac{ff - 2ssvy}{\sqrt{f^4 - 4ffssvy + 4s^2v^2y^2}}$. Ex quo erit tangens ang. MCP $= \frac{2svy\sqrt{1 - ss}}{ff - 2ssvy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

657. Si est $f^2 > vy$ vel $v < \frac{f^2}{y}$ curua descripta semper erit ellipsis. At si $v > \frac{f^2}{y}$ curua erit hyperbola, fit enim axis transuersus negatiuus. Sin autem $v = \frac{f^2}{y}$, curua erit parabola.

Corollarium 2.

658. Quia neque axis transuersus neque latus rectum villo casu fieri potest imaginarium quomodocunque corpus proiiciatur; ideo semper in sectione conica mouebitur, in cuius alterutro foco positum est centrum virium.

Scholion I.

659. Postquam *Keplerus* ostendisset planetas in ellipsis moueri, in quarum alterutro foco sol esset positus; atque tempora esse proportionalia areis, quas rectae ad solem ductae cum arcu descripto comprehenderent; *Newtonus* demonstrauit vim planetas in orbitis continentem ad solem ten-

dere, atque esse quadratis distantiarum planetarum a sole reciproce proportionalem. Haec eadem veritas ex hisce duabus propositionibus consequitur; nam centro virium in ratione inuersa duplicata distantiarum attrahente, corpora in ellipsis vel hyperbolis moueri debebunt, quarum alteruter focus in centrum virium incidit.

Corollarium 3.

666. Secundum *Newtonum* vis attrahens solis est ad vim attrahentem terrae in aequalibus ab vtriusque centrīs distantis vt 227512 ad 1. Quare cum vis attrahens terrae in distantia semidiametri suae a centro seu in superficie aequalis sit vi grauitatis 1; corpus a centro solis semidiametrum terrestrem distans, ad id trahetur vi 227512 vicibus maiore quam grauitate. Ex quo concluditur, si corpus a centro solis distet 477 semidiametros terrae, vim, qua ad solem trahetur, fore aequalem vi grauitatis.

Corollarium 4.

667. Si igitur sol locum centri virium in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahentis sustineat, pro f accipi debet distantia 447 semidiametris telluris aequalis.

Scholion 2.

668. Quo hae propositiones ad motum planetarum possint accommodari fit sol in C et planeta moueatur in ellipsi $ADBHA$ cuius axis transuersus AB sit $=E$, distantia focorum $CF=D$, et celeritas,

tas, quam planeta habet in summa abside A debita sit altitudini c . Eritque $c = \frac{227512(E-D)}{(E+D)E}$. Iam pro mercurio est $E = 15991$ semid. telluris, quam mensuram hic constanter ad distantias exprimendas adhibebimus, $D = 3367$. Quare erit $c = 7,368$. Pro Venere est $E = 29882$ et $D = 206$, vnde reperitur $c = 7,598$. Pro Tellure est $E = 41312$ et $D = 743$. Vnde erit $c = 5,323$. Pro Marte est $E = 62959$ et $D = 5887$, vnde fit $c = 3,049$. Pro Ioue est $E = 214870$ et $D = 10350$, vnde $c = 0,9633$. Pro Saturno est $E = 394042$, et $D = 22391$, vnde $c = 0,5173$. Quae sufficiunt ad cuiusque planetae motum absolutum determinandam.

Scholion 3.

669. *Newtonus*, prout iam innuimus, ex ellipti, quam corpus describit, cognita, et centro virium in alterutro foco posito, deduxit vim centripetam esse quadratis distantiarum reciproce proportionalem. Post modum autem a *Cel. Iob. Bernoulli* aliisque huius propositionis inuersa fuit agitata, ut scilicet quaeratur curua, quam corpus circa centrum virium in ratione reciproca duplicata distantiarum attrahens, describet. Negabant enim a *Newtono* satis esse demonstratum, praeter sectiones conicas nullam aliam curuam quaesito satisfacere, quamuis prop. XVII. Lib. I. Princ. Naturalis hoc satis clare euincere videatur. Huius igitur quaestionis his duabus quaestionibus plenam exhibuimus solutionem, qua *Newtoni* assertio extra dubium ponitur.

tur. Alias huius problematis solutiones videre licet in Comm. Acad. Paris. et Horis subsecivis Francof.

Scholion 4.

670. Tempus vnus reuolutionis planetæ circa solem est $\frac{\pi E\sqrt{E}}{250f}$ minutorum secundorum (653) si quidem E et f in partibus millesimis pedis Rhemani exprimantur. Quia autem E et f commodius in semidiametris telluris exhibentur, quarum vnus continet 20302353 pedes; loco fractionis $\frac{1}{250}$ per quam $\frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$ multiplicandum est, adhiberi oportet 569, 945. Hanc ob rem tempus vnus reuolutionis planetæ erit $\frac{569945\pi E\sqrt{E}}{1000f}$ minutorum secundorum, seu ob $\pi=3, 1415926538$ et $f=477$ semidiam. terræ, (667), erit tempus periodicum planetæ = 3, 758. $E\sqrt{E}$, minutorum secundorum, expresso axe transuerso in semidiametris terræ.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tabula VI.
Fig.3.

671. *Si vis centripeta fuerit reciproce vt cubus distantiae a centro; requiritur curua, quam corpus vtcunque proiectum describet, corporisque motus in ea.*

Solutio.

Sit centrum in C et proiciatur corpus ex A celeritate \sqrt{c} et secundum directionem cum Ac facientem angulum cuius sinus sit $\frac{g}{a}$, posita $AC=a$.
Per-

Peruenerit corpus in M, vbi fit $CM=y$, et in tangentem MT ex C demissum perpendicularum $CT=p$. Celeritas vero in M debita fit altitudini v . Atque distantia a centro C, in qua vis centripeta aequalis est grauitati, fit $=f$. Hinc ergo erit vis centripeta in M $=\frac{f^3}{y^3}=P(601)$; ex quo prodit $Y=\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}$. Habebitur igitur pro curua quaesita ista aequatio $\frac{f^3}{2a^2}-\frac{f^3}{2y^2}=c-\frac{cb^2}{p^2}$. Atque cum fit $v=\frac{cb^2}{p^2}(587)$, erit etiam $v=c-\frac{f^3}{2a^2}+\frac{f^3}{2y^2}$. Has aequationes per sequentes casus examinabimus.

I. Si fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, erit $\frac{1}{y^2}=\frac{b^2}{a^2 p^2}$ seu $p=\frac{by}{a}$. Perspicitur autem ex hoc angulum CMT, cuius sinus est $\frac{p}{y}$, aequalem fore angulo ad A. Quamobrem curua his casibus descripta erit spiralis logarithmica, cuius centrum est in ipso centro virium C. Ita autem corpus mouebitur in hac spirali, vt semper fit $v=\frac{f^3}{2y^2}$ seu celeritas distantiae a centro reciproce proportionalis.

Tabula VI
Fig. 6.

Si non fuerit $c=\frac{f^3}{2a^2}$, demittatur ex M in AC perpendicularis MP, et vocetur $CP=x$ atque $x=uy$.

Habebitur igitur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{b dy \sqrt{c}}{y \sqrt{(cy^2 - cb^2 - \frac{f^3 y^2}{2a^2} + \frac{f^3}{2})}}$

(601). Est vero u cosinus anguli ACM sinu toto existente $=1$. Radio igitur 1 si describatur arcus circuli GN, erit $GN=-\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$. Vocetur autem

$GN=t$, atque habebitur ista aequatio $dt=-\frac{b dy \sqrt{c}}{y \sqrt{(cy^2 - cb^2 - \frac{f^3 y^2}{2a^2} + \frac{f^3}{2})}}$.

$\frac{b dy \sqrt{c}}{y \sqrt{(cy^2 - cb^2 - \frac{f^3 y^2}{2a^2} + \frac{f^3}{2})}}$

N n

II. Sit

II. Sit $c = \frac{f^3}{2b^2}$, erit $dt = -\frac{abd y}{y^2 \sqrt{(a^2 - b^2)}}$, adeoque $t = C + \frac{ab}{y \sqrt{(a^2 - b^2)}}$. Constans vero C erit $= \frac{b}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$, quia evanescente t fit $y = a$. Sit autem tangens anguli ad A = θ , eritque $t = \theta (\frac{a}{y} - 1)$ seu $y = \frac{\theta a}{1 + \theta}$. Vnde ex dato angulo ACM reperitur recta CM, ideoque punctum M in curua quaesita. Haec curua autem est spiralis hyperbolica, quam Cel. *Iob. Bernoullè* pro eodem casu satisfacientem inuenit in Act. Lips. 1713.

Si c neque $= \frac{f^3}{2a^2}$, neque $= \frac{f^3}{2b^2}$; ponatur $c = \frac{\delta f^3}{2a^2}$, erit $dt = \frac{-bdy \sqrt{\delta}}{y \sqrt{((\delta - 1)y^2 + a^2 - \delta b^2)}}$. Ponatur $y = \frac{1}{q}$, erit $dt = \frac{bdq \sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta - 1 + (a^2 - \delta b^2)q^2)}}$. Hinc duo oriuntur casus primarii.

III. Si $a^2 - \delta b^2$ fit numerus affirmatiuus, pen-
debit integratio a logarithmis. Erit enim $t = \frac{b \sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$
 $\int \frac{C}{\sqrt{(\delta - 1 + (a^2 - \delta b^2)q^2)} - q \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}} = \frac{b \sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$
 $\int \frac{C y}{\sqrt{((\delta - 1)y^2 + a^2 - \delta b^2)} - \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$. Atque determinata
debito modo constante C erit $t = \frac{b \sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$
 $\int \frac{y \sqrt{\delta} (a^2 - b^2) - y \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}{a \sqrt{((\delta - 1)y^2 + a^2 - \delta b^2)} - a \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$; atque $y = \frac{2ae}{e} \frac{t \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}{b \sqrt{\delta}} \frac{(\sqrt{\delta} (a^2 - b^2)(a^2 - \delta b^2) - a^2 + \delta b^2)}{a^2(\delta - 1) - (\sqrt{\delta} (a^2 - b^2) - \sqrt{(a^2 - \delta b^2)})^2}$

IV. Si $\delta > \frac{a^2}{b^2}$, erit $dt = \frac{bdq \sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta - 1 - (\delta b^2 - a^2)q^2)}}$. Integrale vero huius membri est $\frac{b \sqrt{\delta}}{\sqrt{(\delta b^2 - a^2)}}$ ductum in arcum circuli, cuius sinus est $q \sqrt{\frac{\delta b^2 - a^2}{\delta - 1}}$ posito radio = 1. At-

Atque addita idonea constante erit $\frac{1}{b} \sqrt{\delta b^2 - a^2} = \text{Ar}$ cuius sinus est $\frac{1}{y} \sqrt{\frac{\delta b^2 - a^2}{\delta - 1}}$ — Arcui cuius sinus est $\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\delta b^2 - a^2}{\delta - 1}} = \text{Ar}$ cuius sinus est $\frac{D}{ay} (\sqrt{a^2 - D^2} - \sqrt{y^2 - D^2})$ posito $\sqrt{\frac{\delta b^2 - a^2}{\delta - 1}} = D$. Hinc constructio curvae facilis fuit: sumatur enim arcus GL, qui ad GN habeat rationem ut $\sqrt{\delta b^2 - a^2}$ ad $b\sqrt{\delta}$. Huius arcus sinus LR ponatur = R. Erit ergo $Ray = DV \sqrt{a^2 - D^2} - DV \sqrt{y^2 - D^2}$, atque $y = \frac{aDR\sqrt{a^2 - D^2} - aD^2\sqrt{1 - R^2}}{a^2R^2 - D^2}$. Vnde et constructio et aequatio curvae quaesitae deducitur. In his autem quatuor casibus, omnia ad problema pertinentia continentur. Q. E. I.

Corollarium I.

672. Distantia celeritates determinans reperitur $= \frac{af\sqrt{f}}{\sqrt{(f^3 - 2a^2c)}}$. Quare si $c = \frac{f^3}{2a^2}$, quo casu corpus in spirali logarithmica mouetur, distantia celeritates determinans est infinita.

Corollarium 2.

673. Quia, si corpus in spirali logarithmica mouetur, est $p = \frac{by}{a}$ et $v = \frac{f^3}{2y^2}$, erit tempus, quo arcus AM absoluitur $= \frac{a^3 - ay^2}{f\sqrt{2f(a^2 - b^2)}}$ Tabula V.
Fig. 5.

Corollarium 3.

674. Si hoc tempus ponatur T, et cosinus anguli CMT = i, erit $y = \sqrt{a^2 - fiT\sqrt{2f}}$. Ex qua aequatione post quoduis tempus datum reperitur corporis a centro C distantia.

Corollarium 4.

675. Corpus igitur in ipsum centrum C perueniet tempore $T = \frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, dum interim reuolutiones infinitas circa C perfecerit.

Corollarium 5.

676. Si T capiatur maius quam $\frac{a^2}{fi\sqrt{2f}}$, fit y imaginaria. Ex quo sequitur, postquam corpus in C peruenerit, nusquam amplius reperiri, sed quasi annihilari.

Corollarium 6.

Tabula VI.
Fig. 4.

677. Si fit $\delta = \frac{a^2}{b^2}$ seu $c = \frac{f^3}{2b^2}$, corpus mouebitur in spirali hyperbolica, atque etiam post infinitas circa C peractas reuolutiones in ipsum centrum C perueniet tempore quoque finito. Est enim tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{2\theta a(a-y)}{f\sqrt{2f}}$, ideoque tempus, quo corpus in C peruenit $= \frac{2\theta a^2}{f\sqrt{2f}}$.

Corollarium 7.

678. Si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$ seu $c < \frac{f^3}{2b^2}$, qui erat casus tertius, corpus in lineis spiralibus quoque mouebitur, atque tandem post infinitos percurfos gyros in centrum C perueniet. Apparet hoc ex aequatione nam facto $t = \infty$ demum fit $y = a$.

Scholion I.

679. Quando est $c = \frac{f^3}{2b^2}$, spiralis hyperbolica quam corpus describit, hanc habet proprietatem,

tem, ut posito $t = -\theta$ fiat $y = \infty$. Iste igitur radius ex centro C ductus videtur esse curvae ex infinito accedentis asymptotos. At potius curva ab eo perpetuo recedit, neque tamen ultra datum interual- lum θa . Recta ergo ipsi huic radio parallela ab eo- que interuallo θa distans erit vera asymptotos. Hu- ius praeterea curvae insignis est proprietas, quod ex infinitis circulis concentricis arcus abscindat aequales, ex qua natura et forma curvae magis elu- cet. Similem quoque proprietatem habent curvae, quae describuntur, si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$, simul vero $\delta > 1$. Fit enim $y = \infty$, si capiatur $t = -\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2 - \delta b^2)}} / \frac{a\sqrt{(\delta - 1)}}{\sqrt{\delta(a^2 - b^2) - \sqrt{(a^2 - \delta b^2)}}$. Ex quo perspicitur, si sit $\delta < 1$, locum, quo fit $y = \infty$ fore imaginarium. At si $\delta = 1$, erit $t = -\infty$: curva enim hoc casu orta est spiralis logarithmica. Ce- terum omnes hae curvae ita sunt comparatae, ut sint ubique versus C concavae, neque enim ex mo- tus natura usquam habere possunt punctum flexus vel reversionis.

Corollarium 8.

680. Si est $\delta > \frac{a^2}{b^2}$ seu $c > \frac{f^3}{2b^2}$, curva a corpo- re descripta non erit amplius spiralis, sed algebra- ica, si quidem inter algebraicas etiam eae referan- tur in quarum aequationibus continentur exponen- tes irrationales.

Scholion 2.

681. Ad has igitur inveniendas oportet poni $b = a$ (640). Quo facto haec habebitur aequatio

Nn 3

$dt =$

$dt = \frac{adq\sqrt{\frac{\delta}{1-a^2q^2}}}{\sqrt{(1-a^2q^2)}}$. Seu posito $aq=r$, et loco dt valore $\frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}}$, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-dr\sqrt{\frac{\delta}{1-r^2}}}{\sqrt{(1-r^2)}}$. Hac forma comparata cum $\frac{\lambda dz}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (605), erit $Z=-r$, $A=1$, $\lambda = \frac{\delta}{\delta-1}$. Habebitur propterea ista aequatio $u =$

$$\frac{(V(1-C^2)-CV-1)^{\frac{\delta}{\delta-1}}(V(1-r^2)-rV-1)^{\frac{\delta}{\delta-1}}(V(1-C^2)+CV-1)^{\frac{\delta}{\delta-1}}(V(1-r^2)+rV-1)^{\frac{\delta}{\delta-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Seu $2rV-1 = (V(1-u^2)-uV-1)^{\frac{\delta-1}{\delta}} (V(1-C^2) - CV-1) - (V(1-u^2)+uV-1)^{\frac{\delta-1}{\delta}} (V(1-C^2)+CV-1)$ (605 et 607). Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$, seu $q=\frac{1}{a}$, seu $r=1$. Determinata igitur C erit $2r = (u + \sqrt{(u^2-1)})^{\frac{\delta-1}{\delta}} + (u - \sqrt{(u^2-1)})^{\frac{\delta-1}{\delta}} = \frac{2a}{y}$, seu $u =$

$$\frac{1}{2y\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}} ((a + \sqrt{(a^2-y^2)})^{\frac{\delta}{\delta-1}} + (a - \sqrt{(a^2-y^2)})^{\frac{\delta}{\delta-1}}) - \frac{\delta}{\delta-1} = \frac{x}{y}. \text{ Quae est aequatio pro curua quaesita.}$$

Exemplum I.

682. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}=2$, seu $\delta=\frac{4}{3}$, atque $c=\frac{2f^5}{3a^2}$. Erit $2xy = (a + \sqrt{(a^2-y^2)})^2 + (a - \sqrt{(a^2-y^2)})^2 = 4a^2 - 2y^2$. Ponatur applicata $PM=z$, fiet $x\sqrt{(x^2+z^2)} = 2a^2 - x^2 - z^2$, et sumendis quadratis $0 = 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2z^2 + x^2z^2 + z^4$, siue $x = \frac{2a^2-z^2}{\sqrt{(4a^2-z^2)}}$.

Haec

Haec curua igitur ad instar parabolae progreditur, sed habet asymptoton rectae AC parallelam et ab ea interuallo $2a$ distitam, quam nunquam attingit.

Exemplum 2.

683. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}=3$, seu $\delta=\frac{9}{8}$ et $c=\frac{9f^3}{16a^2}$. Oritur ergo $2xy^2=(a+\sqrt{a^2-y^2})^3+(a-\sqrt{a^2-y^2})^3=8a^3-6ay^2$. Atque inducta applicata $PM=z$, habebitur $x^3=4a^3-xz^2-3ax^2-3az^2$. Haec curua ordinis tertii pertinet ad speciem 41 in enumeratione a *Newtono* facta.

Scholion 3.

684. Innumerabiles aliae inueniri possunt curuae algebraicae, quae a corpore proiecto in hac hypothese describuntur, si ponatur $\delta=\frac{m^2}{m^2-1}$, denotante m numerum quemcunque rationalem vnitate maiorem ne fiat δ negatiuum. Hae autem tres hypotheses pertractatae, quibus vis centripeta primo distantis, secundo reciproce quadratis distantiarum et tertio reciproce cubis distantiarum est posita proportionalis, sunt solae, quae deducunt ad curuas vel algebraicas vel a circuli aut hyperbolae quadraturis pendentes; si quidem loco P potentia ipsius y substituatur. Quaquam autem in aliis potestatibus ipsius y loco P substitutis aequatio pro curua descripta non potest ab irrationalitate liberari, et hanc ob rem neque algebraica neque a quadratura circuli vel hyperbolae pendens esse potest; tamen dantur casus speciales, quibus curua quaesita fit al-

gc-

gebraica. Namque quemadmodum linea recta et circulus in omnibus hypothesibus satisfacere possunt; ita etiam quandoque aliae curvae algebraicae reperiuntur. Has autem quomodo inueniri oporteat in sequenti propositione declarabimus.

PROPOSITIO 83.

Problema.

685. *Existente vi centripeta ut potestas distantiarum quaecunque, inuenire casus speciales, quibus corpus certo quodam modo proiectum in linea algebraica moueatur.*

Solutio.

Manentibus omnibus, ut hactenus, pro curva quaesita inuenta est haec aequatio $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-y^2Y)}} (601)$. Nostro autem casu est $P = \frac{y^n}{f^n}$, denotante f distantiam, in qua vis centripeta grauitati aequatur. Hinc erit $Y = \int P dy = \frac{y^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Deinde quia curuas algebraicas requirimus, ponimus $b = a (640)$. His substitutis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{cf^n(n+1)}}{y\sqrt{((n+1)cf^n(y^2-a^2)-y^2(y^{n+1}-a^{n+1}))}}$. Sit distantia celeritates determinans k , erit $c = \frac{k^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hac igitur loco c introducta erit

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady \sqrt{(k^{n+1}-a^{n+1})}}{y \sqrt{(a^{n+3}-a^2 k^{n+1} + k^{n+1} y^2 - y^{n+3})}}$$

Patet hinc si $k=a$, quo casu fit $c=0$, fore $u=$ const. $=1$, ideoque $x=y$, qui est casus, quo corpus recta descendit ad centrum. Si k est infinita, erit c quoque infinita, quoties $n+1$ est numerus affirmatiuus. Hoc igitur casu corpus etiam in recta progredi debebit, quia vis finita corporis infinita celeritate moti directionem non valet mutare. Ponamus ergo $n+1$ esse numerum negatiuum $=-m$, seu $n=-m-1$, fiet

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}} dy \sqrt{(k^m - a^m)}}{\sqrt{(a^{m-2} k^m + a^m y^{m-2} - k^m y^{m-2} - a^{m-2} y^m)}}$$

Siat k infinite magna, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} =$

$$\frac{y^{\frac{m-4}{2}} dy}{\sqrt{(a^{m-2} - y^{m-2})}}$$

euanescentibus reliquis terminis;

et ponatur $y^{m-2} = q^2$, erit $y = q^{\frac{2}{m-2}}$. Hac- que facta substitutione oritur sequens aequatio

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{2dq}{(m-2) \sqrt{(a^{m-2} - q^2)}}$$

Qua formula com-

parata cum vniuersali $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2 - Z^2)}} (604)$, erit $\lambda = \frac{2}{m-2}$,

$$A = a^{\frac{m-2}{2}} \text{ et } Z = q = y^{\frac{m-2}{2}}.$$

Emerget igitur ista

aequatio algebraica pro curua quaesita, $2y^{\frac{m-2}{2}} \sqrt{-1}$

$$= (\sqrt{(1-u^2)} + u \sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}} (\sqrt{a^{m-2} - C^2}) + C \sqrt{-1} -$$

O o

(V

$(\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}} (\sqrt{a^{m-2}-C^2}-C\sqrt{-1})$ (607).

Constans C ex hoc determinatur, quod factò $u=1$

fieri debeat $y=a$. Hanc ob rem erit $2y^{\frac{m-2}{2}} =$

$a^{\frac{m-2}{2}} ((u-\sqrt{u^2-1})^{\frac{m-2}{2}} + (u+\sqrt{u^2-1})^{\frac{m-2}{2}})$.

Quoties igitur m est numerus rationalis affirmatiuus, inuenitur curua algebraica, quam corpus normaliter proiectum existente distantia celeritates determinante infinita, describet. Q. E. I.

Corollarium I.

686. Sumendis quadratis obtinebitur $4y^{m-2} - 2a^{m-2} = a^{m-2} ((u+\sqrt{u^2-1})^{m-2} + (u-\sqrt{u^2-1})^{m-2})$

seu ob $m=n-1$, haec aequatio $4y^{-n-3} - 2a^{-n-3} = a^{-n-3} ((u+\sqrt{u^2-1})^{-n-3} + (u-\sqrt{u^2-1})^{-n-3})$.

Corollarium 2.

687. Oportet esse m numerum affirmatiuum nihilo maiorem. Nam si esset m vel $=0$ vel numerus negatiuus, celeritas corporis foret infinita, et curua propterea linea recta.

Corollarium 3.

688. Si sit $n=-2$, habebitur ista aequatio $\frac{4a}{y} - 2 = 2u = \frac{2x}{y}$, seu $2a = x + y$. Quae posita applicata PM, $\sqrt{y^2-x^2} = z$ abit in hanc aequationem $z^2 = 4a^2 - 4ax$, pro parabola centro virium in foco posito, vt iam inuenimus (647).

Co-

Corollarium 4.

689. Si $n = -3$ seu $m = 2$, qui est casus in praecedente propos. tractatus, erit $2y^{\frac{m-2}{2}} = 2a^{\frac{m-2}{2}}$ seu $y = a$. Curua ergo quam corpus describet erit circulus, in cuius centrum ipsum centrum virium incidit.

Scholion I.

690. Si n est numerus impar, erit m par ideoque $\frac{m-2}{2}$ integer. His igitur casibus formula in solutione problematis inuenta vti coueniet. At si n fuerit par, formula (686) quadratis sumtis producta debet adhiberi. Statim enim utroque casu ad aequationem rationalem inter x et y peruenitur vt in sequentibus exemplis apparebit.

Exemplum I.

691. Attrahat centrum in ratione reciproca quadruplicata distantiarum, et corpus normaliter proiciatur existente distantia celeritates determinante infinita; curua, quam corpus describit erit algebraica sequens. Ob $n = -4$ erit $4y - 2a = 2ay = \frac{2ax}{y}$, seu $2y^2 = a(y+x)$. Introducta vero applicata $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ erit $2x^2 + 2z^2 = ax + a\sqrt{x^2 + z^2}$, quae aequatio est pro curua ordinis quarti.

Exemplum 2.

692. Sit vis centripeta reciproce in quintuplicata distantiarum ratione, seu $n = -5$ et $m = 4$.

Habebitur ergo $2y = 2au = \frac{2ax}{y}$, atque $yy = ax = x^2 + z^2$, quae est aequatio ad circulum centro virium in eius peripheria posito. Casum hunc habet *Newtonus* in Princ. Lib. I. Prop. VII.

Exemplum 3.

693. Sit $n = -7$, seu $m = 6$, erit $2y^2 = 4a^2u^2 - 2a^2$ seu $y^4 = 2a^2x^2 - a^2y^2$. Posita applicata $PM = z$, prodibit ista aequatio $(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - a^2z^2$, pro linea ordinis quarti, in qua centrum virium quoque in peripheriam incidit.

Scholion 2.

694. De figuris, quas corpora a datis viribus centripetis sollicitata describunt, hic plura addere operae non esset pretium, cum in Physica et Astronomia aliae virium centripetarum hypotheses, nisi quae quadratis distantiarum reciproce est proportionalis, usum habeant nullum. Quando tamen in Astronomia corpus a pluribus huiusmodi viribus sollicitatum considerari debet, quarum vna prae reliquis maximam vim exercet, haec prout res postulat ne reliquas in computum ducere opus sit, aliquantum vel augetur vel diminuitur, quo saltem quam fieri potest proxime motus illius corporis cognoscatur. His igitur casibus curua, quam corpus describit, non multum discrepabit ab ellipsi. Hanc ob rem Astronomi hanc curuam ad instar ellipsis contemplari solent, quae autem non est fixa sed mobilis, ita vt corpus in ellipsi circa focum reuol-

uolente moueri concipiant. Ex hocque oritur mobilitas orbitalum planetarum, qua lineae absidum perpetuo in alium situm transferuntur. Nos vero quo propius ad veritatem accedamus praeter mobilitatem axis ellipsis etiam speciem eius tanquam variabilem considerabimus. Ita igitur hac in re versabimur, vt de quolibet elemento curuae, quam corpus describit, determinemus, cuiusnam ellipsis focum in centro virium habentis sit portio, ex quo tam positio quam species istiusmodi ellipsium innotescet. Omnes autem hae ellipses alterutrum focum in ipso centro virium positum habebunt, quia ad id punctum corpus perpetuo retrahitur.

PROPOSITIO 84.
Problema.

695. *Si vis centripeta non multum discrepat a ratione reciproca duplicata distantiarum; determinare motum ellipsis, eiusque continuam speciei mutationem, atque corporis motum in ista mutabili ellipsi.* Tabula VI.
Fig. 5.

Solutio.

Sit centrum virium C, habeatque corpus in M secundum directionem MT celeritatem altitudini v debitam. Ponatur vis centripeta in M agens $=P$, distantia $CM=y$ et sinus anguli CMT $=s$. Iam perspicuum est, quamcunque legem teneat P, semper tamen aequari posse huic formae $\frac{f^2}{y^2}$, dummodo f

non quantitatem constantem vt haecenus, sed variabilem denotet. Erit ergo $f^2 = Py^2$. Quia autem dum corpus elementum Mm percurrit f constans manet, poterit determinari ellipsis, cuius focus est C et elementum Mm , in qua corpus, si f perpetuo maneret constans, moueretur. Sit igitur AC huius ellipsis axis transuersi positio, erit tangens anguli $MCA = \frac{2svy\sqrt{(1-ss)}}{ff-2ssvy}$ (656), quae ergo erit $= \frac{2sv\sqrt{(1-ss)}}{Py-2s^2v}$. At latus rectum erit $= \frac{4s^2v}{p}$ et axis transuersus $\frac{Py^2}{py-v}$ (cit.). Ex centro C demittatur perpendicularum CT in tangentem MT , quod ponatur $= p$, erit $s = \frac{p}{y}$. Atque vbi perpendicularum in tangentem est $= b$, quod fiat in G posita $CG = a$, sit corporis celeritas debita altitudini c , ex quo erit $v = \frac{cb^2}{p^2}$ (589). Tangens vero $MT = \sqrt{(y^2 - p^2)}$ ponatur breuitatis gratia $= t$. His positis erit tang. ang. $MCA = \frac{2cb^2t}{Py^2p - 2cb^2p}$ et latus rectum $= \frac{4cb^2}{Py^2}$, transuersum vero $= \frac{Py^2p^2}{Py^2p^2 - cb^2}$. Praeterea vero est ex natura attractionis $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$ (587). Ex qua aequatione p in y poterit determinari, adeoque tota ellipsis ex solo y , et c et b . Sit iam CE linea fixa, cum qua angulus, quem recta CM constituit, ex natura curuae potest definiri. Ab hoc igitur angulo, si auferatur angulus MCA , habebitur inclinatio lineae absidum AC in rectam fixam CG . Motus autem corporis ex cognita celeritate, $v = \frac{cb^2}{p^2}$ facile innotescet. Q. E. I.

Scholion I.

696. Ellipsis hoc modo determinata merito potest vocari ellipsis curuam osculans ad similitudinem circulorum osculatorum, quibus curuedines linearum mensurantur. Haec vero consideratio non est pure geometrica, sed ad hanc ellipsin osculantem inueniendam praeter curuae naturam nosse oportet celeritatem corporis et vim centripetam.

Corollarium I.

697. Si t euanescit linea absidum AC seu positio axis ellipsis osculantis incidit in radium CM, ob euanescentem angulum MCA.

Corollarium 2.

698. Si fuerit $P = \frac{2cb^2}{y^3}$, fiet angulus MCA rectus: Hoc igitur casu erit vis centripeta vt cubus distantiae reciproce. Quare posito $P = \frac{f^3}{y^3}$, erit $c = \frac{f^3}{2b^2}$. Curua autem, quae tum a corpore describitur, est spiralis hyperbolica (679). Pro hac igitur curua linea absidum perpetuo est normalis cum radio MC. At latus rectum ellipsis osculantis erit $= 2y = 2MC$.

Corollarium 3.

699. Si fuerit $P = \frac{f^n}{y^n}$, erit $\int Pdy = -\frac{f^n}{(n-1)y^{n-1}}$
 $= C - \frac{cb^2}{p^2}$. Quia vero factu $y = a$ fieri debet $p = b$,
 erit $C = c - \frac{f^n}{(n-1)a^{n-1}}$. Hinc inuenietur

$$p^2 =$$

$$p^2 = \frac{(n-1)cb^2a^{n-1}y^{n-1}}{(n-1)ca^{n-1}y^{n-1} + f^n(a^{n-1} - y^{n-1})}. \quad \text{Latus}$$

rectum ergo ellipsis osculantis erit $\frac{4cb^2y^{n-2}}{f^n}$. La-

tus transuersum et ang. MCA ex his etiam in y de-

Corollarium 4.

700. Si fuerit $P = \frac{cb^2}{yp^2}$, ellipsis osculans semper erit parabola. Fiet autem hoc valore loco P in aequatione $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$ substituto $p^2 = \frac{b^2y}{a}$. Et consequenter $P = \frac{ac}{2y}$. Hoc autem casu curua descripta haec ipsa est parabola ob $f^2 = ac$ (647).

Scholion 2.

701. Non confundenda est haec ellipsium osculantium doctrina cum motu corporum in orbibus mobilibus, de quo *Newtonus* aliique post eum tractauerunt. Hoc enim loco determinauimus, cuiusnam ellipsis portio sit quoduis elementum curuae a corpore descriptae. At, quando de orbibus mobilibus sermo erit, inuestigabitur vis centripeta efficiens, vt corpus in data curua circa centrum virium reuolvente moueatur.

PROPOSITIO 85.

Theorema.

702. Si corpus vtcunque proiectum attrahatur ad quocunque centra virium A, B, C, quorum singulorum vires sint distantis ab ipsis proportionales:

Tabula VI.
Fig. 6.

les: corpus eodem modo mouebitur ac si ad punctorum A, B, C, commune centrum grauitatis O attraheretur pariter in ratione distantiarum simplici.

Demonstratio.

Positis centrorum A, B, C, viribus, quas in distantia r exercent, α , β , γ , respectiue, sit ac directio motus, quam corpus in M habet, ideoque tangens curuae EMF descriptae in M. At sit O centrum grauitatis corporum α , β , γ , in punctis A, B, C positorum, et in O concipiatur vis distantii directe proportionalis, quae in distantia r , attrahat $vi = \alpha + \beta + \gamma$. His positis corpus in M attrahetur ad A vi AM. α , ad B vi BM. β , et ad C vi CM. γ . His autem viribus simul agentibus demonstrandum est aequalem esse vim OM. $(\alpha + \beta + \gamma)$ corpus ad O trahentem. Ad hoc ostendendum ex punctis A, B, C et O in tangentem ac demittantur perpendiculara Aa, Bb, Cc et Oo. Hoc modo quaelibet vis in normalem et tangentialem resoluetur, eritque summa normalium ex viribus ad A, B, C tendentibus ortarum $= \alpha. Aa + \beta. Bb + \gamma. Cc$, summa vero tangentialium erit $= -\alpha. Ma + \beta. Mb + \gamma. Mc$. At quia O est centrum grauitatis corporum α , β , γ in A, B, C sitorum, liquet ex staticis fore $\alpha. Aa + \beta. Bb + \gamma. Cc = (\alpha + \beta + \gamma). Oo$ et $-\alpha. Ma + \beta. Mb + \gamma. Mc = (\alpha + \beta + \gamma). Mo$. Ex quo perspicitur viribus $\alpha. AM$, $\beta. BM$, $\gamma. CM$ coniunctis aequialere vim $(\alpha + \beta + \gamma). OM$. Q. E. D.

Corollarium I.

703. Corpus igitur in hac hypothefi ellipfin describet, cuius centrum in ipfo centro grauitatis O est positum (631). Omnes enim vires idem efficiunt, quod vnica in O posita et attrahens in ratione directa distantiarum.

Corollarium 2.

704. Manifestum quoque est, quocumque etiam sint huiusmodi virium centra in ratione distantiarum attrahentia; semper tamen corpus in ellipfi motum iri, omnino ac si ad vnicum virium centrum in eorum communi centro grauitatis positum attraheretur.

Scholion I.

705. Demonstratio porro pari quoque modo succedit, si illa quocumque virium centra non sint in eodem plano posita, quemadmodum ex staticis principiis cuique perspectum esse potest. Hincque intelligitur, corpus nihilominus perpetuo in eodem plano moueri debere, etiamsi centra virium in diuersissimis planis sint dispersa.

Scholion 2.

706. Si centra virium in alia ratione quacumque praeter simplicem distantiarum ad se trahant, huiusmodi reductio ad vnicum virium centrum locum prorsus non habet, atque motus corporis calculo vix, re ipsa autem ne vix quidem potest

test determinari. His igitur in casibus ad approximationes erit confugiendum, quae pro variis conditionibus diuersimode sunt instituendae. Atque hanc ob rem *Newtonus* verum lunae motum, qui ex duplici attractione oritur, determinare non suscepit, sed vero tantum proxime hoc praestare conatus est. Ad hoc autem opus est peculiaribus considerationibus, atque inuersa methodus est adhibenda, qua ex curua, quam corpus describit cognita, ad vires attrahentes receditur. Quamobrem, quae subsidia ad hoc institutum afferri possunt, ea in sequentibus, cum inuerso ordine vim sollicitantem tanquam incognitam sumus inuestigaturi, explicabimus. Ad hanc igitur tractationem progrediemur quae duplici modo institui potest. Primo enim praeter curuam descriptam vt cognita sumetur potentiae sollicitantis directio in singulis locis, ex hisque quantitas potentiae sollicitantis et ipse corporis motus determinabitur. In altera contemplatione curua et corporis motus in ea pro datis accipientur, ex quibus potentiam sollicitantem erui oportebit.

PROPOSITIO 86.

Problema.

707. Inuenire legem vis perpetuo dorsum secundum rectas MP inter se parallelas tendentis, quae faciat, vt corpus in data curua AM moueatur; atque determinare corporis in singulis locis M celeritatem.

Tabula VII
Fig. I.

Solutio.

Per rectas MP ducatur normali AP, et vocetur AP, x et PM, y . Ponatur curva AM = s , et radius osculi MR in M = r , erit $r = \frac{dsdy}{d^2dx}$ sumto ds pro constante. Porro debita sit corporis in M celeritas altitudini v , et vis corpus in M trahens secundum MP ponatur P. Ex his habebuntur duae istae aequationes $dv = -Pdy$ et $Prdx = 2vds$ (547), ex quibus si cognita esset v statim appareret quantitas ipsius P. Eliminetur igitur P ad v inueniendum ex hac aequatione $rdxdv = -2vdsdy$, quae posito loco r eius valore $\frac{dsdy}{d^2dx}$ abit in hanc $-\frac{dv}{v} = \frac{2ddx}{dx}$, quae integrata dat $lC - lv = l\frac{dx^2}{ds^2}$. Cognita autem sit celeritas in puncto A, eaque debeat altitudini c , atque sit cosinus anguli MAP seu valor ipsius $\frac{dx}{ds}$ incidente puncto M in A = λ . Hinc ergo erit $lC = lc + 2/l\lambda$ et consequenter $v = \frac{\lambda^2 cds^2}{dx^2}$, vnde corporis in singulis locis M celeritas innotescit. Vis autem sollicitans P reperietur $= \frac{2\lambda^2 cds^2}{rdx^3} = \frac{2\lambda^5 cds^2 ddx}{dx^3 dy}$. Siue sumto dx pro constante, quo casu est $r = \frac{ds^2}{dxddy}$, erit $P = \frac{-2\lambda^2 cddy}{dx^2}$. Tempus denique, quo arcus AM percurritur erit $= \int \frac{ds}{v} = \frac{x}{\lambda v c}$. Q. E. I.

Corollarium I.

708. Quaecunque ergo sit vis sollicitans, corpus perpetuo aequabiliter secundum horizontem progreditur, ob tempus per AM proportionale ipsi AP, vti iam supra est obseruatum (579).

Co-

Corollarium 2.

709. Si ex R in rectam MP productam demittatur perpendicularis RS, et ex S in MR quoque perpendiculum ST, atque denique tertium perpendiculum TV ex T in MS: erit $MV = \frac{rdx^3}{ds^3}$. Quare vis sollicitans P se habebit ad vim grauitatis vt $2\lambda^2c$ ad MV, seu P est reciproce vt MV.

Corollarium 3.

710. Si angulus ad A est rectus, fiet $\lambda = 0$. Quo casu corpus directe sursum ascendere debet. At si tantum sit λ infinite paruum atque c infinite magnum, ita vt $2\lambda^2c$ finitum habeat valorem, corpus in huiusmodi curua utique moueri poterit.

Exemplum 1.

711. Sit curua AM circulus, cuius diameter posita sit in axe AP, et radius $= a$. Erit itaque $r = a$, et $ds : dx = a : y$. Hanc ob rem fiet $P = \frac{2\lambda^2 a^2 c}{y^3}$, et $v = \frac{\lambda^2 a^2 c}{y^2}$. Vis ergo corpus in M deorsum trahens est reciproce, vt cubus applicatae MP et celeritas reciproce vt haec ipsa applicata. Altitudo vero generans celeritatem in summo peripheriae puncto, vbi fit $y = a$ est $= \lambda^2 c$.

Exemplum 2.

712. Sit curua AMC parabola, cuius axis CB est verticalis et parameter $= a$. Ducatur horizontalis MQ, et ponatur CQ $= t$ et MQ $= z$, erit $z^2 = at$. Praeterea vero erit $dx = -dz$ et $dy = -dt$,

Tabula VII.
Fig. 2.

et ut ante $V(dt^2 + dz^2) = ds$. Quo circa fiet $v = \frac{\lambda^2 cds^2}{dz^2}$
 et $P = \frac{2\lambda^2 cddt}{dz^2}$. Debita sit celeritas in puncto summo
 C altitudini b , eritque ob $ds = dz$ in C, $\lambda^2 c = b$,
 ideoque $v = \frac{bds^2}{dz^2}$ et $P = \frac{2bddt}{dz^2}$ sumto dz pro constante.
 Ex aequatione vero $z^2 = at$ fit $dt = \frac{2zdz}{a}$ et $ddt = \frac{2dz^2}{a}$,
 atque $ds^2 = dz^2(1 + \frac{4z^2}{a^2})$. Consequenter inuenitur
 $v = b(\frac{a^2 + 4z^2}{a^2}) = b(\frac{a+4t}{a})$ et $P = \frac{4b}{a}$. Ex quo apparet
 potentiam deorsum tendentem, quae efficit, ut
 corpus in hac parabola progrediatur esse constan-
 tem. Quae igitur, si aequalis sit grauitati $= 1$,
 fiet $b = \frac{a}{4} =$ distantiae foci a vertice. Quae con-
 ueniunt cum supra inuentis (454 et sqq.).

Exemplum 3.

Tabula VII.
Fig. 3.

713. Sit curua MAN hyperbola centro C
 descripta habens axem CP verticalem. Ponatur se-
 miaxis transuersus $AC = a$, et semi coniugatus $= e$,
 atque $CP = t$ ac $PM = z$, sitque insuper altitudo ce-
 leritati quam corpus in A habet, debita $= b$, erit
 ut supra pro parabola fecimus, $v = \frac{bds^2}{dz^2}$ et $P = \frac{2bddt}{dz^2}$
 sumto dz constante. Est vero ex natura hyperbola
 $a^2z^2 = -a^2e^2 + e^2t^2$, ex qua fit $dt = \frac{a^2zdz}{e^2t}$ et ddt
 $= \frac{a^2dz^2}{e^2t} - \frac{a^2zdzdt}{e^2t^2} = \frac{a^2e^2t^2dz^2 - a^4z^2dz^2}{e^4t^3} = \frac{a^4dz^2}{e^2t^3}$. Consequen-
 ter erit $P = \frac{2a^4b}{e^2t^3}$, seu potentia corpus deorsum tra-
 hens vbique in M proportionalis est reciproce cubo
 distantiae ML puncti M ab horizontali LC per cen-
 trum C ducta. Porro erit $\frac{ds^2}{dz^2} = \frac{e^4t^2 + a^4z^2}{e^4t^2} = \frac{(a^2 + e^2)t^2 - a^4}{e^2t^2}$.
 Atque praeterea habebitur $v = \frac{b(a^2 + e^2)t^2 - a^4b}{e^2t^2}$.

PRO-

PROPOSITIO 87.

Problema.

714. Data curva AMB una cum centro virium C inuenire legem vis centripetae, quae faciat, ut corpus in hac curva libere moueatur, ut et celeritatem corporis in loco quouis M.

Tabula VII.
Fig. 4.

Solutio.

Quia curva AMB una cum puncto C est data, quaeratur aequatio inter distantiam MC cuiusque curuae puncti M a centro C et perpendicularum CT, quod ex C in tangentem MT demittitur. Quare posita $CM=y$ et $CT=p$ habebitur inter p et y aequatio. Iam sit corporis in dato loco A celeritas debita altitudini c , atque perpendicularum ex C in tangentem in A demissum $=b$. Eorum vero, quae sunt incognita, vocetur altitudo debita celeritati in M $=v$, et vis centripeta in M $=P$. His positis erit $v = \frac{cb^2}{p^2}$ (589), atque $P = \frac{2cb^2dp}{p^3dy}$ (592). Vel posito radio osculi in M $=r$ erit $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$ (592).

Q. E. I.

Corollarium I.

715. Tempus etiam, quo corpus quem vis Arcum AM absoluit, erit $= \frac{2 \text{ ACM}}{bvc}$ seu erit proportionale areae ACM (588).

Corollarium 2.

716. Quia cb^2 est quantitas constans, erit vis centripeta in puncto quouis M proportionalis huic

va-

valori $\frac{dp}{p^3 dy}$ feu huic $\frac{y}{p^2 r}$. Celeritas vero Vv proportionalis est reciproce perpendicularo CT in tangentem MT demisso (589).

Exemplum I.

717. Sit curua data ellipsis, et centrum virium C in ipso eius centro positum. Vocetur eius semi axis transuersus, a et semiaxis coniugatus, b erit ex natura ellipsis $p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2 - y^2)}}$. Habebitur ergo $dp = \frac{aby dy}{(a^2 + b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque $\frac{dp}{p^3 dy} = \frac{y}{a^2 b^2}$. Quo-

circa prodibit vis centripeta $P = \frac{2cb^2 y}{a^2 b^2}$, quae igitur proportionalis est distantiae corporis a centro.

Exemplum 2.

718. Sit curua data iterum ellipsis, at centrum virium C in eius alterutro foco positum. Ponatur eius axis transuersus $= A$ et latus rectum $= L$, eritque ex natura ellipsis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Differentiando ergo fit $8pdp = \frac{A^2 L dy}{(A-y)^2}$. Quia vero est $16p^4 = \frac{A^2 L^2 y^2}{(A-y)^2}$ erit $\frac{dp}{p^3} = \frac{dy}{L y^2}$, et consequenter $P = \frac{4cb^2}{L y^2}$. Vis igitur centripeta reciproce erit proportionalis quadrato distantiae corporis a centro virium C.

Exemplum 3.

719. Sit curua spiralis logarithmica, et centrum virium in eius centro positum; erit $p = ny$ et $\frac{dp}{p^3 dy} = \frac{1}{n^2 y^3}$, ideoque $P = \frac{2cb^2}{n^2 y^3}$. Quare vis centripeta erit reciproce vt cubus distantiae corporis a centro.

PRO-

PROPOSITIO 88.

Theorema.

720. *Vis tendens ad centrum C, quae facit, ut* Tabula VII.
Fig 5.
corpus in data curua AM moueatur, se habet ad vim tendentem ad aliud centrum c, quae facit, ut corpus in eadem curua et eodem tempore periodico moueatur, ut cubus rectae cV ex c ad tangentem TM parallele rectae CM ductae, ad solidum ex recta cM in quadratum rectae CM.

Demonstratio.

Sit corporis celeritas in dato puncto A, cum corpus circa centrum virium C reuoluitur debita altitudini c , et perpendicularum ex C in tangentem in A demissum $=b$. At cum corpus circa centrum virium c mouetur, sit celeritas in A debita altitudini γ , et perpendicularum ex centro c in tangentem in A demissum $=\theta$. Quia autem tempora periodica circa vtrumque virium centrum sunt aequalia erit $bV/c = \theta V/\gamma$ seu $cb^2 = \gamma\theta^2$ (715). Ex centro C et c porro in tangentem in M demittantur perpendiculara CT et ct , sitque radius osculi in M $=r$. His positis erit vis centripeta in M ad centrum C tendens, quam vocemus $P = \frac{2cb^2 \cdot CM}{r \cdot CT^3}$. Atque vis centripeta in M ad centrum c tendens, quam vocemus $\Pi = \frac{2\gamma\theta^2 \cdot cM}{r \cdot ct^3}$ (714). Quamobrem ob $cb^2 = \gamma\theta^2$ erit $P:\Pi = \frac{CM}{CT^3} : \frac{cM}{ct^3}$. Ducta autem cV parallela rectae CM erit, ob triangula TCM et tcV similia, $CT:ct = CM:cV$. Hanc ob rem erit $P:\Pi = \frac{1}{CM^2} : \frac{cM}{cV^3} = cV^3 : cM \cdot CM^2$. Q. E. D.

Qq

Co-

Corollarium I.

721. In eodem puncto *M* erit celeritas corporis, dum ad virium centrum *C* attrahitur ad celeritatem, dum ad alterum centrum *c* attrahitur, reciproce vt *CT* ad *ct*, siue directe vt *cV* ad *CM*. Sequitur hoc ex eo, quod est $cb^2 = \gamma\theta^2$.

Corollarium 2.

722. Si tempora periodica non sint aequalia, sed sint inter se vt *T* ad *t*; erit $T:t = \frac{1}{b\sqrt{c}} : \frac{1}{\theta\sqrt{\gamma}}$ seu $cb^2 : \gamma\theta^2 = t^2 : T^2$. Consequenter erit $P : \Pi = t^2 : T^2$. Seu vires *P* et Π erunt in ratione composita ex ratione in theoremate assignata, et inuversa duplicata temporum periodicorum.

Corollarium 3.

723. Eodem hoc casu, quo tempora periodice sunt inaequalia, erit celeritas in *M* centro virium in *C* posito, ad celeritatem in *M* centro virium in *c* posito in ratione reciproca composita ex ratione perpendicularorum *CT* et *ct* et ratione temporum periodorum *T* : *t*.

Scholion I.

724. Propositionem hanc *Newtonus* deduxit ex Lib. I. prop. VII. in coroll. 3. Princ. eaque vtitur ad inueniendam vim centripetam tendentem ad punctum quodcumque ex cognita vi ad aliud quodpiam centrum trahente. Nos hic vsum eius in vnico exemplo sequente ostendemus.

Ex-

Exemplum.

725. Sit curua data circulus AMc , alterum-Tabula VII,
que centrum virium positum fit in ipso circuli centro Fig. 6.
C. Vis igitur centripeta P ad C tendens vbique
erit constans, dicaturque g . Ex hac quaeratur vis
ad centrum virium c in peripheria situm tendens Π ,
faciensque, vt corpus eodem tempore periodico in
circulo moueatur. Demittatur ergo ex c in tan-
gentem MV perpendicularum CV , quod ex natura
circuli simul parallelum erit rectae CM . Quamob-
rem erit $g: \Pi = cV^3 : cM \cdot CM^2$, ideoque $\Pi = \frac{g \cdot cM \cdot CM^2}{cV^3}$.
Ducatur recta AM erunt triangula cVM , cMA ob
ang. $cMV = cAM$, similia; et propterea $cV : cM$
 $= cM : cA$. Habetur ergo $cV = \frac{cM^2}{2cM}$, ex quo fit
 $\Pi = \frac{8g \cdot cM^5}{cM^5}$. Est igitur haec vis Π reciproce vt po-
testas quinta distantia Mc corporis a centro virium
 c , vt iam supra (692) est inuentum.

Corollarium 4.

726. Sit celeritas corporis in peripheria cir-
culi circa centrum C reuoluentis debita altitudini c ,
et celeritas corporis in M circa centrum virium c
reuoluentis debita altitudini v . Eritque $\sqrt{c} : \sqrt{v}$
 $= cV : CM = cM^2 : 2 \cdot CM^2$ (721) seu $v = \frac{4c \cdot CM^4}{cM^4}$.
Quamobrem celeritas corporis circa centrum c re-
uoluentis erit vbique reciproce vt quadratum distan-
tiae eius ab c .

Corollarium 5.

727. Quia centro virium in centro circuli C existente, est $h=y=p=r$ radio CM; erit $F=\frac{2c}{CM}$ (592). Hanc ob rem fiet posito $\Pi=\frac{f^5}{c.M^5}$, $g=\frac{f^5}{8.CM^5}$, et $c=\frac{f^5}{16.CM^4}$. Ideoque $v=\frac{f^5}{4.c.M^4}$.

Scholion 2.

728. In his propositionibus posuimus curuam, quam corpus describit, absolute esse datam et aequationem pro ea haberi. Sed dantur etiam casus, quibus curua ipsa quam corpus describit non datur, sed ex certis conditionibus ad ipsum motum spectantibus ante debet inueniri, quam lex vis centripetae potest determinari. Hucque pertinent, quae passim tradita sunt de motu corporum in orbibus mobilibus, qua de re igitur in sequenti propositione tractabimus.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 1. 729. Si orbita (A) (M) (B) utcumque reuoluatur circa centrum virium C; oportet definiri vim centripetam perpetuo ad C tendentem, quae faciat ut corpus in hac orbita mobili moueatur.

Solutio.

Dum orbita ex situ (A) (M) (B) in situm AMB peruenit, ponatur corpus interea ex (A) in M peruenisse, ita vt corpus interea in orbita angulum (A)C(M)=ACM, reuera autem angulum (A)CM = (A)

$\equiv(A)C(M)+\equiv(A)CA$ descripserit. Existente initio corpore in (A) fit eius celeritas vera non ea, quam in orbita habet, debita altitudini c , et recta $C(A)$, quae tam in orbitam quam in veram curuam, in qua corpus mouetur, fit perpendicularis $\equiv a$. Porro fit celeritas corporis in M , quatenus in orbita mouetur, debita altitudini u , et vera corporis celeritas in M debita altitudini v . At celeritas angularis in orbita fit ad veram celeritatem angularem circa C , dum corpus in M versatur, vt 1 ad w . In orbita igitur tanquam immobili spectata elementum $(M)(m)$ celeritate \sqrt{u} describetur. Ponatur distantia $C(M)\equiv CM\equiv y$, et perpendicularum in tangentem orbitae in (M) vel M ex C demissum, $C(T)\equiv CT\equiv p$, habebiturque ob orbitam datam aequatio inter p et y . Iam dum corpus in orbita elementum Mm describit, progrediatur ipsa orbita motu angulari circa C per angulum $\equiv mC\mu$, et hanc ob rem corpus re ipsa non in m , sed in μ reperietur, sumto $C\mu\equiv Cm$, atque idcirco interea elementum $M\mu$ descripsisse censendum est, id quod fecit celeritate debita altitudini v . Erit itaque $M\mu : Mm \equiv v : \sqrt{u}$, atque centro C descripto arcuulo Mv (ob datam motuum angularium circa C in orbita et reuera rationem $1 : w$) erit $Mn : Mv \equiv 1 : w$. Est vero posita tangente $MT \equiv \sqrt{(y^2 - p^2)} \equiv q$, $Mm \equiv \frac{y dy}{q}$, et $Mn \equiv \frac{p dy}{q}$. Quo circa habebitur $M\mu \equiv \frac{y dy \sqrt{v}}{q \sqrt{u}}$, et $Mv \equiv \frac{w p dy}{q}$. Ex quo ob $\mu v \equiv mn \equiv dy$ prodibit $1 + \frac{w^2 p^2}{q^2} \equiv \frac{v y^2}{u q^2}$ seu $v y^2 \equiv u q^2 + w^2 u p^2$. Quia $M\mu$ est ele-

mentum verae curvae, quam corpus describit, demittatur in hoc productum, ex C perpendiculum CΘ, eritque $M\mu : Mv = CM : C\Theta$, vnde fit $C\Theta = \frac{wpv}{\sqrt{v}}$. Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim $v = \frac{a^2cv}{w^2up^2}$ (589) ideoque $u = \frac{a^2c}{w^2p^2}$ et $v = \frac{a^2c(q^2 + w^2p^2)}{w^2p^2y^2}$. His loco u et v positus valoribus, erit $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(q^2 + w^2p^2)}}$, quam breuitatis gratia vocemus π . Ex hac autem π cognita innotescit ipsa vis centripeta P, quae facit vt corpus in hac data orbita, hocque modo mobili moueatur. Namque erit $P = \frac{2a^2cd\pi}{\pi^3dy}$ (592). At ob $\pi^2 = \frac{w^2p^2y^2}{q^2 + w^2p^2}$ erit $\frac{1}{\pi^2} = \frac{q^2}{w^2p^2y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{w^2y^2} + \frac{1}{w^2p^2}$, ideoque $-\frac{2d\pi}{\pi^3} = -\frac{2dy}{y^3} + \frac{2dw}{w^3y^2} + \frac{2dy}{w^2y^3} - \frac{2dw}{w^3p^2} - \frac{2dp}{w^2p^3}$ seu $\frac{d\pi}{\pi^3} = \frac{dy(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2q^2} + \frac{dp}{w^2p^3}$. Consequenter habebitur $P = \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{2a^2cq^2dw}{w^3y^2p^2dy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

730. Posito radio = 1, est $\frac{m\mu}{CM} = \frac{(w-1)pdy}{qy}$ elementum anguli (A)CA quem orbita confecit dum corpus arcum (A)M percurrit. Hanc ob rem erit ang. (A)CA = $\int \frac{(w-1)pdy}{qy}$. Estque $w-1 : 1$ vt celeritas angularis orbitae, ad celeritatem angularem corporis, dum est in M, in ipsa orbita.

Corollarium 2.

731. Celeritas corporis in orbita, quae est vt \sqrt{u} , reciproce proportionalis est ipsi wp . Ergo, nisi w sit constans, fieri non potest, vt corpus hoc mo-

modo in orbita quiescente moueatur, attractum ad centrum C.

Corollarium 3.

732. Posito igitur w constante, i. e. ratione motus angularis corporis ad motum angularem orbitae perpetuo eadem, erit etiam celeritas corporis in orbita \sqrt{u} reciproce proportionalis perpendicularulo C(T) in tangentem. Atque vis centripeta ad C tendens, atque efficiens vt corpus hac ratione in orbita quiescente moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3ay}$. Sit enim celeritas respectu orbitae quam corpus in (A) habet, debita altitudini γ , erit $\sqrt{\gamma} : \sqrt{c} = 1 : w$ (*p. hyp.*) atque $c = w^2\gamma$, ex quo vis centripeta ad C tendens, faciensque vt corpus in orbita quiescente moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, vt etiam ex supra traditis inuenitur (592).

Corollarium 4.

733. Angulus igitur (A)CA in hac hypothesi, qua w ponitur constans, qui ab orbita absoluitur, dum corpus arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w-1) \int \frac{pdy}{qy} = (w-1) \text{ang. (A)C(M)}$. Ergo vna tota corporis in orbita reuolutione, ipsa orbita circa C gyraabitur angulo $(w-1) 360$ graduum.

Corollarium 5.

734. Vis autem, quae efficit, vt corpus in hac orbita mobili proportionaliter motui angulari in ipsa orbita, moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3}$
 seu

seu $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Quare differentia inter vim centripetam pro orbita immobili et vim pro orbita mobili reciproce proportionalis est cubo distantiae corporis a centro virium C.

Corollarium 6.

735. Si sit $w=1$, erit $w-1=0$, motusque orbitae nullus, quo casu etiam vis centripeta fit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy}$ evanescente altero termino. Idem evenit si $w=-1$ seu $w-1=-2$, quo casu orbita in antecedentia movetur duplo velocius, quam ipsum corpus in orbita ingreditur. At vera curva, quae hoc motu a corpore describitur, non differt ab orbita, nisi quod sit inversa.

Corollarium 7.

736. Si $w > 1$ orbita in consequentia movetur qui motus, quo sit maior, eo maior etiam erit vis centripeta. At si $w < 1$, orbita in antecedentia tendit, et vis centripeta fit minor, ob w^2-1 negativum.

Corollarium 8.

737. Si $w=0$ fit etiam $c=0$, corpusque in recta linea movebitur, quia motus angularis orbitae hoc casu aequalis fit et contrarius motui angulari corporis in orbita.

Corollarium 9.

738. Si w est numerus negativus, nempe $=-n$, corpus in eadem movebitur curva ac si esset

$w=$

$w = +n$, hoc tantum discrimine, quod corpus in contrarias plagas progrediatur. Et hanc ob rem vis centripeta eundem retinet valorem, siue w affirmatiue siue negatiue accipiatur. Idem etiam vniuersaliter, si w est quantitas variabilis, obtinet.

Exemplum.

739 Sit curua (A)(M)(B) ellipsis, et centrum virium C eius alteruter focus. Ponatur eius latus rectum $=L$ et axis transuersus (A)(B) $=A$; erit $a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - AL}$, et $4pp = \frac{ALy}{A-y}$. Sit praeterea w constans, erit vis, quae facit vt corpus in hac ellipsi mobili moueatur $= \frac{4a^2\gamma}{Ly^2} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Angulus vero (A)CA, quem orbita absoluit, dum corpus in ea arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w - 1)(A)C(M)$ (733). Aequatio vero pro ipsa curua, quam corpus describit, cuius elementum est $M\mu$, habebitur inuenienda aequatione inter $CM = y$, et $C\Theta = \pi$. Est autem $pp = \frac{ALy}{4A-4y}$, et $qq = \frac{4Ay^2 - 4y^3 - ALy}{4A-4y}$, qui valores in aequatione $\pi = \frac{wpy}{\sqrt{(qq + w^2p^2)}}$ substituti dabunt aequationem pro ipsa curua descripta hanc

$$\pi\pi = \frac{w^2ALy^2}{4Ay - 4y^2 + (w^2 - 1)Ay}$$

Scholion I.

740. Curuae ipsae, quas corpora a huiusmodi viribus centripetis sollicitata describunt, difficillime alias cognoscerentur, earumque forma hac consideratione non adhibita nequaquam posset

determinari. Maximam igitur habent vtilitatem huiusmodi virium centripetarum inuestigationes pro curuis ex datis vtcunque generatis, quo reciproce ex viribus centripetis datis ipsae curvae earumque proprietates innotescant. Occurrunt enim in motibus corporum coelestium tam complexae virium ea sollicitantium expressiones, vt omnino eorum orbitae determinari nequeant, nisi forte illae vires comprehendantur in tali quodam casu, de quo a posteriori vis centripeta est inuenta.

Scholion 2.

741. Si corpus in huiusmodi orbita mobili moueri deprehenditur, motus eius et distantia quouis tempore a centro C poterit determinari. Atque quoties corpus in orbita in puncta (A) et (B) peruenit, tum in minima vel maxima a C erit distantia. Quare cum motus gyratorius lineae (A)(B), quae linea absidum vocatur, sit datus; definiri poterit, quando corporis a centro C distantia sit maxima vel minima. *Newtonus* hanc rem pertractauit in princ. Libro 1. tota Sect. IX. eaque theoria vtitur ad motum lineae absidum orbitae lunaris determinandum. Sed minus accurate haec consideratio ad lunam accommodari potest, cum vis lunam sollicitans non ad punctum quoddam fixum C, vt hic posuimus, sed perpetuo variabile tendat. Operam igitur dabimus, vt, postquam reliqua huc pertinentia explicauerimus, alias propositiones magis idoneas afferamus, quae ad motum lunae transferri queant.

PRO-

PROPOSITIO 90.

Problema.

742. Cognita curua, quam corpus vi quacunque centripeta V sollicitatum describit, determinare curuam, quam corpus a vi centripeta $V + \frac{C}{y^3}$ (denotante y distantiam MC corporis a centro virium C), sollicitatum describet.

Solutio.

Agente vi centripeta $V + \frac{C}{y^3}$, fit corporis celeritas, qua in (A) secundum directionem ad radium $C(A)$ normalem proicitur, debita altitudini c , et ponatur $C(A) = a$. Vrgente autem vi V , fit (A) (M)(B) orbita, in qua corpus mouebitur proiectum in (A) secundum eandem directionem, sed celeritate debita altitudini γ . Iam ex praecedente propositione manifestum est, vi $V + \frac{C}{y^3}$ effici, vt corpus in eadem orbita (A)(M)(B), sed circa centrum C in data ratione ad motum angularem in ipsa orbita mobili, moueatur. Sit igitur $w = 1$ ad 1 vt motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in ipsa orbita dum est in M , et sit etiam $c = w^2 \gamma$ (732), atque vocetur perpendicularum ex C in tangentem orbitae in M demissum $CT = p$. Hinc perspicuum est, vim centripetam facientem, vt corpus in orbita immobili (A)(M)(B) moueatur, fore $= \frac{2a^2 \gamma dp}{p^3 dy}$, ideoque $V = \frac{2a^2 \gamma dp}{p^3 dy}$, quam aequationem ergo ob datam curuam (A)(M)(B) construibilem ponimus (*p. hyp.*). Vis autem efficiens, vt corpus

in eadem orbita descripto modo mobili moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Quamobrem habebitur $V + \frac{C}{y^3} = \frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} + \frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Ex quo prodit $C = 2 a^2 \gamma (w^2 - 1) = \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2}$ atque $w^2 = \frac{2a^2c}{2a^2c-C}$. Erit ergo $w - 1 : 1 = \frac{\sqrt{2a^2c} - \sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}} : 1$ atque $\gamma = \frac{2a^2c-C}{2a^2}$. Inuenta igitur curua, quam corpus in (A) celeritate altitudinis $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum describit sollicitatum a vi V, vis $V + \frac{C}{y^3}$ efficiet, vt corpus in (A) celeritate \sqrt{c} proiectum moueatur in eadem orbita mobili ita, vt sit motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in hac orbita, quemadmodum est $\frac{\sqrt{2a^2c} - \sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$ ad 1. Motus autem corporis in ipsa orbita idem erit, quem habet in orbita immobili a vi tantum V sollicitatum et in (A) celeritate debita altitudini $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum, qui motus per hypothesin est cognitus. Q. E. I.

Corollarium I.

743. Dum igitur corpus in orbita ex (A) ad (B) peruenit, seu circa centrum C angulo 180 gr. reuoluitur, ipsa orbita interea angulo $\frac{\sqrt{2a^2c} - \sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$ 180 grad. circa C gyrabitur:

Corollarium 2.

764. Si igitur recta (A)(B) est linea absidum, erit punctum (A) ima, punctum (B) vero summa absis, vti in astronomia vocantur; corpus igitur ab abside ima ad summam perueniet absoluto motu angulari circa C gradus $\frac{180}{\sqrt{(1 - \frac{C}{2a^2c})}}$. Co-

Corollarium 3.

745. Tempus, quo corpus in orbita mobili ex (A) in M peruenit, aequatur tempori quo in quiescente ex (A) in (M) pertingit. Angulus vero (A)CM se habet ad ang. (A)C(M) vt w ad 1 i. e. vt $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{c}{2a^2e}}}$ ad 1.

Exemplum.

746. Sit vis V reciproce proportionalis quadrato distantiae a centro seu $V = \frac{ff}{yy}$, erit curva (A)(M)(B) ellipsis, in cuius foco positum est centrum vi-rium C. Sit eius axis transuersus (A)(B) = A, et latus rectum = L, erit $a = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - AL} = (A)C$ et (B)C = $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - AL}$. Ob $4pp = \frac{ALy}{A-y}$ erit $\frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy} = \frac{4a^2\gamma}{Ly^2} = \frac{ff}{yy}$. Hinc fit $4a^2\gamma = Lff = 4a^2c - 2C$, vnde $L = \frac{4a^2c - 2C}{ff}$. Atque $c = \frac{Lff + 2C}{4a^2}$. Quae est altitudo debita celeritati corporis in (A) pro orbita mobili ex vi centripeta $\frac{ff}{y^2} + \frac{c}{y^3}$. Motus vero angularis orbitae erit ad motum angularem corporis in orbita vt $\frac{V(\frac{1}{2}Lff + C) - V\frac{1}{2}Lff}{V\frac{1}{2}Lff}$ ad 1. Atque corpus ab abside ima ad summam perueniet, postquam motu angulari ang. $\frac{180\sqrt{(\frac{1}{2}Lff + C)}}{V\frac{1}{2}Lff} = 180\sqrt{1 + \frac{2C}{Lff}}$ grad. absoluerit.

PROPOSITIO 91.

Problema.

747. *Si figura, quam corpus a quacunque vi centripeta describit, non multum differt a circulo, determinare motum absidum.*

Solutio.

Comparandus est huiusmodi motus cum motu corporis in ellipsi mobili parum excentrica cuius focus alteruter positus sit in centro virium. In hac igitur orbita quiescente corpus mouebitur sollicitatum a vi centripeta quadratis distantiarum reciproce proportionali. In eadem vero orbita mobili corpus mouebitur, si fuerit vis centripeta $= \frac{ffy+C}{y^2}$ (746). Manentibus praecedentibus denominationibus ponatur $y=a+z$, erit z respectu ipsius a valde paruum, quia curua a corpore descripta circulo proxima ponitur. Quare vis centripeta illa erit $= \frac{aff+C+ffz}{y^2}$, et $2a$ quam proxime erit aequalis ipsi lateri recto L . Iam ponatur vis centripeta corpus sollicitans $= \frac{P}{y^2}$ in qua P sit functio quaecunque ipsius y . Ponatur in P loco y eius valor $a+z$ abeatque P reiectis terminis, in quibus z plus vna habet dimensionem, ob z tam paruum in $E+Fz$. Hac ergo formula cum $aff+C+ffz$ comparata habebitur $F=ff$, seu $f=\sqrt{F}$ et $aF+C=E$, seu $C=E-aF$. His substitutis corpus ab hac vi centripeta $\frac{P}{y^2}$ sollicitatum ab abside ima ad summam perueniet, absolu-

to motu angulari angulo $180\sqrt{1 + \frac{2C}{Lff}}$ grad. (746).
 Seu posito $2a$ loco L , et F loco ff atque $E-aF$ loco C erit iste angulus graduum $180\sqrt{\frac{E}{aF}}$. Si quidem orbita non multum a circulari discrepat. Q. E. I.

Corollarium 1.

748. Linea vero absidum (A)(B), dum corpus circa C reuoluitur angulo 360 gr. mouebitur motu angulari per angulum $\frac{\sqrt{E} - \sqrt{aF}}{\sqrt{E}}$ 360 grad. Motus enim angularis orbitae proportionalis ponitur motui angulari corporis, ob vim centripetam $-\frac{ff}{yy} + \frac{C}{y^3}$ (734).

Corollarium 2.

749. Quia E est functio talis ipsius a , qualis P est ipsius y , erit Fz incrementum ipsius E crescente a elemento z . Quare posito $z = da$ erit $Fda = dE$, ideoque, angulus, quo corpus ab abside ima ad summam peruenit est $= 180\sqrt{\frac{Eda}{aaE}}$ grad.

Corollarium 3.

750. Quia E talis est functio ipsius a , qualis P ipsius y , poterit in $\frac{Eda}{aaE}$ poni y loco a et P loco E . Quamobrem existente vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, corpus ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo $180\sqrt{\frac{Pdy}{ydaP}}$ graduum. Atque in hac expressione si restet y , poterit eius loco a scribi, quippe parum ab y discrepans.

Co-

Corollarium 4.

757. Si fuerit $\frac{da}{a} > \frac{dE}{E}$ seu $\frac{dy}{y} > \frac{dP}{P}$, ellipsis motu suo verum corporis motum exprimens mouebitur in consequentia. Sin vero $\frac{dy}{y} < \frac{dP}{P}$ linea absidum in antecedentia mouebitur. At si $\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$ seu $P = ay$, quo casu vis centripeta reciproce proportionalis est quadratis distantiarum, linea absidum quiescet, seu corpus, postquam motu angulari angulum 180 gr. absoluerit ab abside ima ad summam et vicissim pertingit.

Corollarium 5.

725. Dato autem angulo, quo corpus ab abside altera ad alteram peruenit qui sit 360μ grad. erit $\mu^2 = \frac{Pdy}{y dP}$ ideoque $P^{\mu\mu} = ay$, seu $P = ay^{\frac{1}{\mu}}$. Vis ergo centripeta quae facit, vt lineae absidum tantus sit motus, erit $y^{\frac{1-3\mu^2}{\mu^2}}$.

Corollarium 6.

763. Si accidit vt $\frac{Pdy}{y dP}$ seu dP fiat negatiuum, motus absidum erit imaginarius. Ex quo cognoscitur corpus nunquam ad absidem alteram peruenire posse ab altera progressum. Sed perpetuo vel magis recessurum a centro vel ad id accessurum, siue in orbita clausa prorsus non moueri.

Corollarium 7.

754. Si vis centripeta proportionalis sit distantiarum potestati y^n , erit $P = y^{n+3}$. Quare fiet $\frac{Pdy}{y dP}$

$\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{n+3}$, atque corpus ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo circa C graduum $\frac{180}{\sqrt{n+3}}$; a summa vero vel ima abside ad eandem reuertetur absoluto angulo $\frac{360}{\sqrt{n+3}}$ grad.

Corollarium 8.

755. Si ergo fuerit $\sqrt[n+3]{}$ numerus rationalis, et m minimus numerus integer, quo fiat $\frac{m}{\sqrt[n+3]{}}$ quoque numerus integer; tum corpus post $\frac{m}{\sqrt[n+3]{}}$ reuolutiones circa centrum C peractas in idem punctum incidet, totidemque curua a corpore descripta absoluet spiras, antequam in se ipsam redeat atque claudatur. At si $n+3$ non est quadratum curua nunquam in se redibit, sed infinitas circa centrum C habebit spiras, neque vnquam corpus in eandem viam reuertetur.

Exemplum I.

756. Attrahat centrum virium in ratione reciproca triplicata distantiarum, erit $n+3=0$. Hac ergo hypothese corpus ab altera abside egressum, ad alteram nisi infinitis reuolutionibus peractis non perueniet. Atque si vis centripeta in maiore ratione quam triplicata distantiarum decreseat curua prorsus non habebit duas absides sed vel in infinitum abibit, vel in ipso centro, vt spiralis logarithmica terminabitur.

Exemplum 2.

757. Si vis centripeta est quadratis distantiarum reciproce proportionalis erit $n+3=1$. Quare tum corpus motu angulari absolutis 180 gr. ab altera abside ad alteram perueniet, et curua postquamuis reuolutionem in se ipsam redibit. Corpus enim in ellipsi in cuius alterutro foco centrum virium est positum mouebitur, eiusque axis transuersus est ipsa linea absidum.

Exemplum 3.

758. Sit vis centripeta distantis reciproce proportionalis, est $n+3=2$. Corpus igitur ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo $\frac{180}{\sqrt{2}}$ grad. seu 227 gr. 16'. Orbita vero ob $\sqrt{2}$ irrationale nusquam in se redibit.

Exemplum 4.

759. Si vis centripeta est constans in omni distantia, erit $n=0$. Hoc ergo casu corpus ab altera abside egressum ad alteram perueniet motu angulari percurso angulo $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grad. i. e. 103 gr. 55', quam proxime.

Exemplum 5.

760. Si vis centripeta est directe, vt corporis a centro distantia, quo casu corpus in ellipsi moueri constat, in cuius centro centrum virium est positum (631). Absis igitur ima ab summa distabit angulo 90 grad. Idem vero ex hac regula deducitur, nam ob $n=1$, erit $\frac{180}{\sqrt{n+3}}=90$.

Scho-

Scholion I.

761. Quoties igitur corpus circa centrum viri-
um tanta velocitate proiicitur, vt fere in circulo de-
beret reuolui, ope huius propositionis vera curua,
quam corpus describet potest determinari, id quod ex
sola vis centripetae consideratione fieri non potest.
Ex quibus eo magis huiusmodi contemplationum
vsus perspicitur, cum res, quae alias determinatu es-
sent difficillimae ex iis facile definiantur. *Newtonus*
eandem hanc propositionem exposuit Sect. IX.
prop. 45.

Scholion 2.

762. Iam supra ostendimus corpus in hypo-
thesi vis centripetae cubo distantiae reciproce pro-
portionalis ad centrum descendens ad id tempore
finito peruenire, neque deinde ex eo egredi sed
quasi subito annihilari (675) (676). Idem etiam
valet, si corpus recta ad centrum descendat. At-
que simili modo, si vis centripeta in maiore quam
triplicata distantiarum ratione decrescat, corpus
statim ac in centrum peruenerit, ibi euanescent, ne-
que ultra centrum progredietur, neque reuertetur.
Vtrum vis enim eueniat, curua, quam corpus ve-
locitate quadam proiectum describeret, haberet du-
as absides, quod esset absurdum (756). Quoties
autem vis centripeta in minore quam triplicata ra-
tione decrescit, vt in simplici distantiarum ratione
vel ea maiore, corpus, postquam in centrum per-

uenerit, in eadem recta, qua ad centrum accessit, recedet; perspicitur hoc enim ex ratione reciprocata duplicata (655), et simplici de qua patet (266) corpus non ultra centrum posse progredi. At si $n+1 > 0$ corpus recta ad centrum descendens finitam habebit celeritatem, qua ultra centrum in eadem recta progredietur, quoad motum amiserit (273). Hoc ergo modo satisfacimus desiderato superiori (272), quo motum corporis recta descendentis, cum in centrum peruenisset, definiiri oportebat.

PROPOSITIO 92.

Problema.

Tab. VIII.
Fig. 2. 763. *Inuenire vires centripetas tendentes ad duo virium centra C et D, quae faciant, ut corpus in data curua AMB et data in singulis punctis M celeritate moueatur.*

Solutio.

Moueatur corpus ab A per M ad B, et sit eius celeritas in M debita altitudini v , ponatur $CM=y$ et $DM=z$. Ducta vero tangente TV in eamque ex C et D demissis perpendicularibus CT et DV, dicantur $CT=p$ et $DV=q$. Vis centripeta porro, quae ad C tendit sit $=P$, et ea, quae ad D trahit sit $=Q$. Vis igitur normalis ex vtraque orta erit $=\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$, et vis tangentialis accelerans motum corporis erit $= -\frac{P\sqrt{y^2-p^2}}{y} - \frac{Q\sqrt{z^2-q^2}}{z}$ cadentibus tangentibus in antecedentia. Posito ergo radio osculi in $M=r$,
et

et elemento curvae $= ds$ erit $\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z} = \frac{2v}{r}$ (561);

et $dv = -\frac{Pds\sqrt{(y^2-p^2)}}{y} - \frac{Qds\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$ (559). Est vero

$ds = \frac{y dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{z dz}{\sqrt{(z^2-q^2)}}$, ideoque $dv = -Pdy - Qdz$.

Ex his quibus aequationibus coniunctis habebitur

$$P = \frac{2vyzdz + qrydv}{przdz - qrydy} \text{ et } Q = \frac{2vzydy + przd v}{qrydy - przdz} = \frac{2vzydy - przd v}{przdz - qrydy}.$$

Est vero $r = \frac{ydy}{dp} = \frac{zdz}{dq}$; ergo $zdz = \frac{ydy\sqrt{(z^2-q^2)}}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$ atque

$dq = \frac{dp\sqrt{(z^2-q^2)}}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Tandem dicta $CD = k$ erit $k^2 = y^2 +$

$z^2 - 2pq - 2\sqrt{(y^2-p^2)(z^2-q^2)}$, ex quibus P et Q prout

libuerit determinari possunt. Q. E. I.

Corollarium I.

764. Si corpus in curua motu aequabili debeat moueri ita ut sit $v = c$, et $dv = 0$; erit

$$P = \frac{2cyzdz}{przdz - qrydy} \text{ et } Q = -\frac{2czydy}{przdz - qrydy}. \text{ Atque } P:Q = dz:-dy.$$

Corollarium 2.

865. Si fuerit $v = \frac{cb^2}{p^2}$; seu celeritas corporis reciproce ut perpendiculum ex centro C in

tangentem demissum; erit $dv = -\frac{2cb^2 dp}{p^3}$. His substitu-

titutis fit $Q = 0$, erit enim $przd v = -\frac{2cb^2 rzd p}{p^2}$

$= -\frac{2cb^2 zydy}{p^2} = -2vzydy$. Atque $P = \frac{2cb^2 pyzdz - 2cb^2 qy^2 dy}{p^3 r (przdz - qydy)}$

$= \frac{2cb^2 y}{p^3 r}$ (714). Haec enim vis sola efficiet, ut

corpus hoc modo in ista curua moueatur.

Exemplum.

766. Sit curua data AMB ellipsis et centra C et D eius foci. Ponatur eius axis transuersus

$AB = A$ et latus rectum $= L$, eritque ex natura el-

lipfis $4pp = \frac{ALy}{\Lambda - y}$ et $4qq = \frac{ALz}{\Lambda - z}$. At praeterea erit $z = \Lambda - y$, et $r = \frac{4(Ay - yy)^{\frac{3}{2}}}{\Lambda\sqrt{\Lambda L}} = \frac{4(Az - zz)^{\frac{3}{2}}}{\Lambda\sqrt{\Lambda L}}$. Ex quo prodibit $P = \frac{\Lambda v dy - y dv(\Lambda - y)}{2y dy(\Lambda - y)}$ et $Q = \frac{\Lambda v dz - z dv(\Lambda - z)}{2z dz(\Lambda - z)}$ $= \frac{\Lambda v dy + y dv(\Lambda - y)}{2y dy(\Lambda - y)}$, ideoque $P + Q = \frac{\Lambda v}{yz}$ et $Q - P = \frac{dv}{dy}$.

PROPOSITIO 93.

Problema.

Tab. VIII.
Fig. 3.

767. *Moueat corpus data celeritate in curua etiam data AMB, et oportet inueniri vim centripetam ad centrum C tendentem vna cum vi perpetuo ad rectam AB normaliter in directione MP corpus trahente, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac curua cum praescriptaque celeritate libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in puncto M existentis celeritas debita altitudini v , et distantia $MC = y$, perpendicularis vero $MP = z$. Ponatur vis corpus ad centrum C trahens $= P$ et vis secundum MP trahens $= Q$. Ducta tangente MV in M demittantur in eam perpendiculara CT et PQ, quae dicantur p et q . His factis erit vis normalis ex vtraque orta $= \frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$ et vis tangentialis $= \frac{P\sqrt{y^2 - p^2}}{y} + \frac{Q\sqrt{z^2 - q^2}}{z}$. Posito ergo radio osculi in M $= r$ erit $\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z} = \frac{2v}{r}$ (561) et $dv = -Pdy - Qdz$ (559). Ex his itaque reperietur $P = \frac{2vyzdz + qrydy}{przdz - qrydy}$ et $Q = -\frac{2vzydy - przdvy}{przdz - qrydy}$. Ponatur autem $CP = x$, erit $\sqrt{dx^2 + dz^2}$; $dx = z : q$; vnde $q =$

$$q = \frac{zdx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} \text{ et posito } dx \text{ constante est } r = \frac{(dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx dz}$$

Erit autem porro $y = \sqrt{(x^2 + z^2)}$,
 et $p = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}$. His substitutis prodibit $P = \frac{2vy dx dz ddz - y dx dv (dx^2 + dz^2)}{x(dx^2 + dz^2)^2}$, et $Q = -\frac{2vy dy dx ddz + (zdx - xdz)(dx^2 + dz^2)dv}{x(dx^2 + dz^2)^2}$. Q. E. I.

Corollarium I.

768. Si corpus aequabiliter in curua moueri debeat ita vt sit $v=c$ et $dv=0$, erit $P = \frac{2cy dx dz ddz}{x(dx^2 + dz^2)^2}$ et $Q = -\frac{2cy dy dx ddz}{x(dx^2 + dz^2)^2}$.

Corollarium 2.

769. Si curua sit circulus, cuius centrum in C existat, et radius dicatur $=a$. Erit $r=a$, $y=a$, $p=a$, et $q = \frac{z^2}{a}$. Quare prodibit $P = \frac{2v}{a} + \frac{zdv}{adz}$ et $Q = -\frac{dv}{dz}$. Ergo cognita Q erit $P = \frac{2v}{a} - \frac{Qz}{a}$. Atque si est $v=c$ et $dv=0$, erit $Q=0$, et $P = \frac{2c}{a}$.

Scholion.

770. Ex hac propositione in se spectata, qua ipsa curua a corpore descripta datur, parum utilitatis consequitur ad curuas, quas corpora a compositis viribus sollicitata describunt, determinandas. Ab hac vero ad alias propositiones progredi licet, in quibus curuae a corporibus descriptae non ipsae dantur; sed generantur ex motu vnus pluriumue datarum, quemadmodum in superioribus propositionibus, in quibus de motu absidum tractauimus, est factum.

PRO.

PROPOSITIO 94.

Problema.

Tab. VIII.
Fig. 4.

771. *Si moueatur corpus utcumque in curua AMB ipsa vero curua interea reuoluatur circa punctum fixum C: inueniri oportet duas vires, quarum altera perpetuo ad punctum fixum C, altera normaliter ad rectam positione datam PC sit directa, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac orbita mobili libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in M existentis celeritas, qua in ipsa curua elementum Mm percurrit, debita altitudini v , atque celeritas angularis corporis in orbita ad veram celeritatem angularem corporis circa C vt 1 ad w , seu celeritas angularis corporis in orbita ad celeritatem angularem ipsius orbitae, dum corpus est in M vt 1 ad $w-1$. Ponatur radius $CM=y$, et perpendicularum CT , ex C in tangentem orbitae in M demissum $=p$, ipsa vero tangens $MT=q$, ita vt sit $q=V(y^2-p^2)$. Ex M in rectam positione datam DP demittatur perpendicularum MP , quod dicatur z , et CP, x , ita vt sit $x=V(y^2-z^2)$. Iam dum corpus elementum Mm percurrit, ponatur orbita interea angulo $=mC\mu$ circumferri; quamobrem motu composito corpus in μ perueniet, sumto $C\mu=Cm$, eritque $M\mu$ elementum verae curuae, in qua corpus mouetur, in quod productum demittatur ex C perpendicularum CO . Centro C describatur ar-

arculus Mm , erit $mm = \mu\nu = dy$, et $Mn : Mv = 1 : w$.
 Est vero $Mm = \frac{ydy}{q}$, vnde $Mv = \frac{wpydy}{q}$, ex quo habe-
 bitur $M\mu = \frac{dy}{q} \sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}$, atque porro $C\Theta =$
 $\frac{wpy}{\sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$ et $M\Theta = \frac{qy}{\sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$. Fiat $Mm : M\mu = v :$
 $\sqrt{v(w^2 p^2 + q^2)}$, cuius quadratum $\frac{v(w^2 p^2 + q^2)}{y^2}$ exhibet alti-
 tudinem debitam verae corporis celeritati; huius
 igitur incrementum est $\frac{dv(w^2 p^2 + q^2)}{y^2} + \frac{2(w^2 - 1)v p d p}{y^2}$
 $- \frac{2(w^2 - 1)v p^2 dy}{y^3} + \frac{2v p^2 w d w}{y^2}$. Radius osculi au-
 tem verae curvae, in qua corpus incedit est

$$= \frac{y dy}{d.C\Theta} = \frac{y dy (w^2 p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2 - 1)p^3 dy + w y^3 d p + p y^3 d w - p^3 y d w}$$

$$= \frac{y dy (w^2 p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2 - 1)p^3 dy + w y^3 d p + p q^2 y d w}.$$

Posito sinu to-
 to = 1, erit sinus anguli $CMP = \frac{x}{y}$ et cosinus = $\frac{z}{y}$.

At anguli $CM\Theta$ sinus erit $= \frac{w p}{\sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$ eiusque co-
 sinus $= \frac{q}{\sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$. Ex quibus reperitur angu-
 li $PM\Theta$ sinus $= \frac{w p x - q x z}{y \sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$, eiusque cosinus

$= \frac{w p x + q z}{y \sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$. Demisso ex P in tangentem $M\Theta$
 perpendicularo PQ erit $PQ = \frac{w p z^2 - q x z}{y \sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$ et MQ

$= \frac{w p x z + q z^2}{y \sqrt{(w^2 p^2 + q^2)}}$. Atque percurrente corpore ele-
 mentum $M\mu$ erit lineae PM incrementum dz

$= \frac{w p x dy + q z dy}{q y}$. Ex qua aequatione relatio inter w
 et x innotescit, et simul positio lineae absidum AB

respectu rectae CP inueniri potest. Iam ponatur
 vis corpus sollicitans versus $MC = P$ et vis secundum
 MP trahens = Q , ex quibus oritur vis tangentialis

motum corporis retardans $= \frac{Pq}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpz+Qqx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$
 quae ergo ducta in $\frac{dy}{q} \sqrt{(w^2p^2+q^2)}$ aequalis poni
 debet $= -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3}$
 $-\frac{2vp^2wdw}{y^2}$, ita ut prodeat $Pdy + \frac{Qwpzdy}{qy} + \frac{Qzdy}{y} =$
 $-\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$.

Vis autem normalis ex utraque orta est $\frac{Pwp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$
 $+ \frac{Qwpz-Qqx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, quae aequalis esse debet
 $\frac{2w(w^2-1)vp^3dy + 2wvy^3dp + 2vpq^2ydw}{y^3dy\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ (561), qua-
 re habebitur $Pwpdy + Qwpzdy - Qqxdy =$
 $\frac{2w(w^2-1)vp^3dy}{y^2} + 2wvydp + \frac{2vpq^2dw}{y}$. Ex quibus
 aequationibus coniunctis obtinetur $Q = -\frac{wpqdw}{yxdy}$
 $-\frac{2wvqdp}{yxdy} - \frac{2vpqdw}{yxdy}$, atque $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3}$
 $+ \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy} + \frac{2vpqzdw}{y^2xdy}$. Angulus vero, quem li-
 nea absidum AB facit cum recta CP erit $= \int \frac{(w-1)pdy}{qy}$,
 unde eius positio quouis tempore innotescit. Q.E.I.

Corollarium I.

772. Quia est $dz = \frac{wpzdy + qzdy}{qy}$ ponatur $z = ty$;
 eritque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wpdy}{qy}$. Ex qua aequatione, si detur
 w in y , in qua etiam ob curuam AMB datam p et q
 exprimuntur, inuenietur t , ideoque etiam z et x .

Corollarium 2.

773. Si fuerit celeritas corporis in orbita
 \sqrt{v} reciproce ut perpendicularum CT ex C in tan-
 gentem demissum, seu $v = \frac{a^2c}{p^2}$ erit $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy}$
 $+ \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy}$ et $Q = -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy}$.

Co-

Corollarium 3.

774. Si hoc casu est w constans, euanescit vis Q et sola remanet $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3}$ ad centrum tendens, quae efficiet, vt corpus in orbita AMB circa C mobili progrediatur prorsus vt supra inuentum est (734).

Corollarium 4.

775. Si v non est $\frac{a^2c}{p^2}$, sed w constans, ita vt motus angularis orbitae proportionalis sit motui angulari corporis in orbita, nempe vt $w-1$ ad 1 , erit $Q = -\frac{wpqdv-2wvqdp}{yxdy}$ et $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy}$.

Exemplum.

776. Posito $v = \frac{a^2c}{p^2}$, sit curua AMB ellipsis alterutrum focum in C habens. Cuius igitur axis transuersus si vocetur A et latus rectum L erit $4pp = \frac{ALy}{A-y}$, seu $p = \frac{\sqrt{ALy}}{2\sqrt{A-y}}$ et $q = \frac{\sqrt{(4Ay^2-4y^3-ALy)}}{2\sqrt{A-y}}$, atque $\frac{dp}{p^3} = \frac{2dy}{Ly^2}$. Quare habebitur $Q = -\frac{2a^2cdw\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}{yxdy\sqrt{AL}}$ et $P = \frac{4a^2c}{Ly^2} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2czdw\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}{y^2xdy\sqrt{AL}}$. Atque $\frac{d}{dt} = \frac{wdy\sqrt{AL}}{\sqrt{(1-tt)}-y\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}$.

Scholion I.

777. Hae formulae existente curua ellipsi variis modis simpliciores effici possunt, si curua in qua corpus mouetur ad circulum proxime accedat. Atque hic casus tum non parum habebit utilitatis in motu lunae theoretice definiendo. Terra enim vt

in C quiescens ponatur, et Sol in recta ad CP in C perpendiculari pariter tanquam quiescens consideretur, quo facto et his viribus cum viribus solis et terrae comparatis, elicietur motus Lunae synodicus pro quavis lineae absidum positione, et simul ipsius lineae absidum motus, qui a vero lunae motu quam minime differet.

Scholion 2.

778. Multo latius quidem patet ista propositio, quam superior (729), in qua vis omnis ad centrum rotationis orbitae erat directa, haec enim illam in se complectitur, euanescente vi Q. Neque tamen perfecte ad motum lunae explicandum quadrat propter vim reciproce cubo distantiae MC proportionalem in vi P (773). Hanc ob rem alios orbitae motus praeter gyratorium in medium proferemus, qui et latius pateant, et magis cum quaestionibus physicis congruant. Huiusmodi sunt motus orbitarum per quasque curvas manente orbita sibi semper parallela, quae contemplatio aliis ideo anteferri meretur, quod vires sollicitantes et facile inueniri, et simplicioribus formulis possint comprehendi. Ad hoc autem praestandum opus est sequens theorema praemitti.

PROPOSITIO 95.

Theorema.

Tabula IX.

Fig. 1.

779. *Moueat corpus M in curva AM a vi quacunque sollicitatum circa punctum C, atque insuper et*

et corpus M et punctum C ab aequali vi et in eadem directione sollicitentur: erit motus relatiuus corporis M respectu puncti C, seu motus corporis M qualis ex C peccatur idem, ac si haec noua vis non accessisset.

Demonstratio.

Puncto C quiescente perueniat puncto temporis dt corpus ex M in m . Hoc igitur tempusculo finito corpus M distabit a C interuallo mC , et cum plaga quadam fixa recta AC expressa constituet angulum mCA . Ponatur iam corpore existente in M et corpus M et punctum C ab aequali et in eandem plagam tendente vi vrgeri, ita vt punctum C ab hac vi tempusculo dt promoueatur per Cc . Eodem igitur tempusculo dt corpus M, si quiesceret, ab hac vi transferretur per Mm parallelam et aequalem ipsi Cc . At quia corpus C iam habet motum insitum, quo tempusculo dt elementum Mm percurrit, vtroque motu coniuncto describet diagonalem $M\mu$ completo parallelogrammo $Mm\mu n$. Quocirca accedente hac noua vi corpus M finito tempusculo dt distabit a puncto C, quod interea in c est translatum, interuallo μc , et ducta ac parallela ipsi AC cum plaga fixa constituet angulum μca . At est ob $mCc\mu$ parallelogrammum $\mu c = mC$ et ang. $mCA = \text{ang. } \mu ca$. Consequenter vis vtrumque punctum M et C aequaliter et secundum eandem directionem sollicitans non immutat motum relatiuum corporis M respectu puncti C. Q. E. D.

Corollarium 1.

780. Quaecunque igitur vis punctum *C* sollicitat, si eadem simul corpus *M* secundum eandem plagam urgeat; motus relatiuus corporis *M* respectu puncti *C* non mutabitur.

Corollarium 2.

781. Huiusmodi ergo vi *M* et *C* aequaliter sollicitante effici potest, ut corpus *M* in orbita *AM* quomodocunque mobili moueatur. Orbita autem ipsa motu suo ita sequetur puncti *C* motum, ut eius positio sibi semper maneat parallela.

Corollarium 3.

782. Perspicitur etiam ex demonstratione propositionis, si et puncto *C* et corpori *M* aequalis celeritas imprimatur secundum eandem plagam, motum relatiuum non perturbatum iri.

Corollarium 4.

783. Atque cum talis motus puncto *C* impressus perpetuo duret aequalis in directum sine vlla vis continuatione, sequitur corpus *M* circa punctum *C* aequaliter indirectum progrediens aequè moueri posse, ac circa quiescens. Hoc enim obtinebitur, si modo corpori *M* aequalis celeritas in eandem plagam directa adiiciatur.

Corollarium 5.

784. Corpus ergo circa centrum virium vni-
formiter in directum progrediens, eandem curuam
li-

libere describere poterit, quam circa quiescens describeret, modo ei superaddatur tanta celeritas quantam accepit centrum virium.

Corollarium 6.

785. Quemadmodum autem corpus sibi ipsum relictum non potest in linea curua progredi, neque inaequabiliter in recta; ita corpus circa centrum virium vel in curua motum vel difformiter in directum non potest libere circa id eandem curuam describere quam circa quiescens, sed perpetuo tanta vi insuper vrgeri debet, quanta ad centrum in sua via retinendum requiritur.

PROPOSITIO 96.

Problema.

786: Si corpus M circa centrum virium L qui- Tabula IX,
 escens reuoluatur in curua BM; determinare vim, Fig. 2.
 quae efficit, ut corpus in eadem orbita secundum curuam
 AL sibi ipsi semper parallele mota ingrediatur.

Solutio.

Quia corpus M in orbita BM libere mouetur circa centrum virium quiescens L, erit, posita distantia $LM = y$ et perpendicularo ex L in tangentem in M demisso $= p$, altitudo debita celeritati in $M = \frac{a^2 c}{p^2}$ (589) et vis centripeta ad L tendens $= \frac{2a^2 c d p}{p^3 d y}$ (592). Iam ponatur centrum L in curua AL moueri attractum ad centrum virium C, sitque $CL = s$ et perpendicularum ex C in tangentem in L de-

demissum $=w$. Quo posito erit altitudo debita celeritati in $L = \frac{b^2 e}{w^2}$ (589) et vis punctum L ad C trahens $= \frac{2b^2 e d w}{w^3 d s}$ (592). Ponatur autem primo puncto L celeritas secundum tangentem imprimi $= \frac{b v e}{w}$, eademque etiam corpori M secundum directionem huic tangenti parallelam; atque perspicuum erit si nulla insuper vis punctum L sollicitet, sed tantum hunc motum impressum conseruet, corpus M libere in eadem curua BM motum puncti L ita sequente, vt axis BL sibi semper maneat parallelus, motum iri (783). At quo corpus M eodem modo circa punctum L in curua AL incedens moueatur, oportet, vt ipsi perpetuo tanta vis imprimatur, quanta requiritur ad punctum L in hac curua AL retinendum (781). Ducta igitur MN parallela ipsi LC, corpus M praeter vim, quae ad L vrgetur, sollicitari debebit vi $= \frac{2b^2 e d w}{w^3 d s}$ secundum directionem MN. Quare haec duplex vis efficiet vt problemati satisfiat. Quo autem appareat, quamam vi corpus M respectu puncti C et rectae fixae AC ipsi BL parallelae sollicitari oporteat, resoluantur vires corpus M secundum MN et ML trahentes in duas alias, quarum altera habeat directionem MC altera MP, quae linea MP ad AC perpendiculariter est ducta. Ad hoc praestandum ipsi MP ducatur parallela KLN rectam MC in O secans, et vocetur LI $= x$, MI $= z$; CK $= r$, KL $= t$; atque CP $= X$, PM $= C$ et CM $= Y$. Quocirca erit $y = \sqrt{x^2 + z^2}$; $s = \sqrt{r^2 + t^2}$ et $Y = \sqrt{X^2 + Z^2}$. Atque poro $p = \frac{x dz - z dx}{\sqrt{d x^2 + d z^2}}$ et

$w =$

$zv = \frac{r dt - t dr}{\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}$. Praeterea vero erit $X = r + x$ et $Z = t + z$. Quare cum ob curvas AL et BM datas, z, y et p in x , itemque t, s et w in r dentur, poterunt hae omnes quantitates in X, Z et Y exhiberi. Aequatio vero inter X et Z ex eo deducetur, quod temporis incrementum per BM aequale esse debeat temporis incremento per AL. Hinc ergo erit

$$\frac{p\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{a\sqrt{c}} = \frac{w\sqrt{(dr^2 + dt^2)}}{b\sqrt{e}}$$

et integralibus sumtis erit area ACL + constante quadem area ad aream BLM ut $b\sqrt{e}$ ad $a\sqrt{c}$. Vis igitur secundum ML trahens resoluatur in binas secundum MO et LO seu MI trahentes, et simili modo vis secundum MN in binas secundum MO et NO trahentes, quarum posterior corpus M secundum directionem ipsi MI contrariam sollicitabit; ad quas resolutiones instituendas angulos nosse oportet. Est vero MLO = LMI, eiusque igitur sinus = $\frac{x}{y}$ et cosinus = $\frac{z}{y}$, sumto x pro sinu toto. Similiter est MON = CMP, huius igitur sinus = $\frac{x}{Y}$ et cosinus = $\frac{Z}{Y}$. Anguli ergo LMO, qui horum est differentia sinus erit = $\frac{xz' - Zx}{Yy}$. Denique est MNQ = CLK, quare eius sinus est $\frac{r}{s}$ et cosinus = $\frac{t}{s}$. Consequenter ob NMO = MNQ - MON, erit eius sinus = $\frac{Zr - Xt}{Ys}$. Est vero $Xz - Zx = Cr - Xt$ ob $V = r + x$ et $Z = t + z$. Ex his fiet MN: MO seu $\frac{x}{Y} : \frac{r}{s}$

ita vis secundum MN tendens $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim secundum MC, quae ergo erit = $\frac{2b^2eYrdw}{Xs w^3ds}$. Atque MN: NO seu $\frac{x}{Y} : \frac{Zr - Xt}{Ys}$ ita vis secundum MN $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim

V v fe

secundum ON quae ergo est $= \frac{2b^2edw(Zr-Xt)}{Xsw^3ds}$. Simili modo erit $ML : MO = \frac{X}{Y} : \frac{x}{y}$ ita vis secundum ML, $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim secundum MC quae ergo erit $= \frac{2a^2cYxdp}{Xyp^3dy}$. Atque $ML : LO$ seu $\frac{X}{Y} : \frac{Zr-Xt}{Yy}$ ita vis secundum ML $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim secundum OL seu MP quae ergo est $= \frac{2a^2cdp(Zr-Xt)}{Xyp^3dy}$. Ex quibus colligitur corpus M trahi debere a vi tendente secundum $MC = \frac{Y}{X} \left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy} \right)$ atque a vi secundum MP $= \frac{(Zr-Xt)}{X} \left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2b^2edw}{sw^3ds} \right)$. Quae expressiones omnes in X, Z et Y exhiberi poterunt, et praeterea inter has quantitates, quae veram curuam a corpore M descriptam pertinent, aequatio assignari. Q. E. I.

Corollarium I.

787. Si curua AL sit peripheria circuli, cuius centrum in C et radius $AC = b$, erit $s = w = b$, et $r^2 + t^2 = b^2$. Hoc ergo casu vis secundum MC trahens erit $= \frac{Y}{X} \left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2a^2cxdp}{yp^3dy} \right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X} \left(\frac{e}{b^2} - \frac{a^2cdp}{yp^3dy} \right)$ et vis secundum MP $= \frac{(Zr-X\sqrt{b^2-r^2})}{X} \left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy} - \frac{2e}{b^2} \right)$. Atque e erit altitudo debita celeritati quam habet punctum L.

Corollarium 2.

788. Sit curua BM ellipsis centrum habens in L, et BL eius semiaxis transuersus $= a$, ita vt altitudo debita celeritati in B sit $= c$, alter vero semiaxis sit $= b$. Eritque $a^2z^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ et $\frac{2a^2cdp}{p^3dy} = \frac{2cy}{b^2}$. Quare vis secundum MC fit

$$= \frac{Y}{X} \left(\frac{2b^2 e r d w}{s w^3 d s} + \frac{2c x}{b^2} \right) = \frac{2b^2 e Y d w}{s w^3 d s} - \frac{2Yx}{X} \left(\frac{b^2 e d w}{s w^3 d s} - \frac{c}{b^2} \right).$$

Atque vis secundum MP = $\frac{(Zr - Xt)}{X} \left(\frac{2c}{b^2} - \frac{2b^2 e d w}{s w^3 d s} \right)$.

Corollarium 3.

789. Si et curua AL fuerit circulus vt coroll. 1. et curua BM ellipsis vt coll. 2. erit vis secundum MC = $\frac{Y}{X} \left(\frac{2er}{b^2} + \frac{2cx}{b^2} \right) = \frac{2eY}{b^2} - \frac{2Yx}{X} \left(\frac{e}{b^2} - \frac{c}{b^2} \right)$ et vis secundum MP = $\frac{(Zr - Xt)}{X} \left(\frac{2c}{b^2} - \frac{2e}{b^2} \right)$, vbi r et t et x in X, Z et Y poterunt determinari ex his aequationibus $a^2 z^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, $r^2 + t^2 = b^2$, $r + x = X$ et $t + z = Z$. Aequatio autem emergens ad quatuor dimensiones ascendit.

Corollarium 4.

790. Si ellipsis BM ponatur infinite parua seu saltem perquam exigua respectu circuli AL ita tamen vt tempus periodicum ellipsis fit finite magnum, erit $x = \frac{a^2 X (Y^2 - b^2) + abZ \sqrt{(4a^2 X^2 + 4b^2 Z^2 - (Y^2 - b^2)^2)}}{2a^2 X^2 + 2b^2 Z^2}$ et $z = \frac{b^2 Z (Y^2 - b^2) - abX \sqrt{(4a^2 X^2 + 4b^2 Z^2 - (Y^2 - b^2)^2)}}{2a^2 X^2 + 2b^2 Z^2}$.

Corollarium 5.

791. Si curua BM fuerit quoque circulus in L centrum habens; fiet $b = a$, ideoque $x^2 + z^2 = a^2$, $r^2 + t^2 = b^2$, $r = X - x$ et $t = Z - z$, ex quibus posito $b^2 - a^2 = f^2$ reperietur $2x = \frac{(Y^2 - f^2)X + Z \sqrt{(4a^2 Y^2 - (Y^2 - f^2)^2)}}{Y^2}$ et $2z = \frac{(Y^2 - f^2)Z - X \sqrt{(4a^2 Y^2 - (Y^2 - f^2)^2)}}{Y^2}$. Atque $2Zr - 2Xt = -\sqrt{(4a^2 Y^2 - (Y^2 - f^2)^2)}$.

Scholion I.

792. Extremum hoc corollarium adiecimus, ut appareat, quales vires requirantur ad corpus in epicyclo circa centrum virium circumagendum, quemadmodum Ptolemaici planetas moueri existimauerunt.

Corollarium 6.

793. Ex hypothefi coroll. 3. intelligitur si fuerit $\frac{e}{b^2} = \frac{c}{b^2}$ seu celeritas corporis L ad celeritatem corporis M in B ut diameter circuli AL ad axem coniugatum ellipsis BM; tum veram curuam a corpore M descriptam fore ellipsin centrum habentem in C, cum vis sollicitans ad C tendens sit $= \frac{2eY}{b^2}$, euanescente vi secundum MP. Huius ellipsis semi-axis maior erit $b+a$, minor vero $b-b$.

Scholion 2.

794. Propositionem hanc ideo praecipue attuli, quod in appendice nouae Principiorum *Newtoni* editionis anglicae Cl. *Machin* affeuerat, lunae motum considerari posse tanquam in ellipsi cuius axis transuersus sit ad coniugatum ut 2:1 circa centrum factum, dum interea ipsa ellipsis motu sibi semper parallelo secundum peripheriam circuli libere progrediatur, quemadmodum in coroll. 3. explicui. Equidem non nego hac ratione motum perquam conformem motui lunae posse exhiberi, sed an exacte congruat vehementer dubito. Sequente autem propositione determinare statui, quid

ad

ad lunæ motum indicandum requiratur. Etiamſi vero iſta propoſitio ad aſtronomiam pertineat, tamen eam, vt genuina huiusmodi quaſtiones reſol- uendi methodus perſpiciatur, hic afferre e re vi- ſum eſt.

PROPOSITIO 97.

Problema.

795. *Quieſcente ſole in S, et terra T circa* Tabula IX.
eum in circulo TD uniformiter mota, attrahatur luna Fig. 3.
*L tum ad terram T tum ad ſolem S in ratione reci-
 proca diſtantiarum duplicata; quibus poſitis deter-
 minari oporteat motum lunæ, qualis ex terra T
 ſpectatur.*

Solutio.

Ponatur diſtantia terræ a ſole $ST = a$, et viſ qua terra ad ſolem trahitur $= \frac{f}{a^2}$. Diſtantia lunæ a terra LT ſit $= y$, et diſtantia lunæ a ſole LS ſit $= z$. Viſ qua luna ad terram trahitur ſit $= \frac{b}{y^2}$; viſ vero qua luna ad ſolem trahitur ſecundum LS erit $= \frac{f}{z^2}$. Ab hiſ igitur viribus lunam ſollicitantibus, qualis motus producat, eſt inueſtigandum. At quia lunæ motus, qualis a ſpectatore in terra conſtituto obſeruatur, definiri debet, terra tanquam quieſcens eſt conſideranda; id quod ſit, dum toti ſyſte- mati motus ei, quem terra habet, æqualis et con- trarius imprimitur, ſimulque ſollicitationes, quas terra a ſole recipit, contrario modo in lunam et

lem cogitatione transferuntur. Celeritas autem terrae in circulo TB debita est altitudini $\frac{f}{2a}$, vti ex vi $\frac{f}{a^2}$, qua terra ad solem vrgetur colligi potest. Tanta igitur celeritas et soli et lunae secundum directionem ad TS normalem imprimi debet. Praeterea, quia terra ad solem trahitur vi $\frac{f}{a^2}$, oportet ad huius vis effectum destruendum res ita concipi, ac si sol perpetuo tanta vi ad terram traheretur, luna vero eadem vi secundum LN ipsi ST parallelam. Hoc facto sol describet circa terram in T quiescentem circulum SE eadem celeritate, qua ante terra circa solem ferebatur. Luna vero praeter vires secundum LT et LS tendentes insuper vrgetur versus LN vi $= \frac{f}{a^2}$. Ducta LM parallela quoque ipsi TS, resoluatur vis secundum LS agens $\frac{f}{z^2}$ in has duas, quarum alterius directio sit LT, alterius LM. Ex consideratione ergo trianguli LTS oriatur vis secundum LT agens $= \frac{fy}{z^3}$ et vis secundum LM trahens $= \frac{af}{z^3}$. Quare omnibus coniunctis luna trahetur versus LT vi $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{z^3}$, atque versus LM vi $= \frac{f}{a^2} - \frac{af}{z^3} = \frac{f(z^3 - a^3)}{a^2 z^3}$, ex quibus viribus motus lunae debet determinari. Notandum autem directionem LM non esse constantem sed variabilem, quippe perpetuo parallelam radio TS, qui ob motum solis secundum peripheriam SE circumfertur. Producta igitur ST in A, vt AB sit linea syzygiarum, et ex L in eam demisso perpendicularo LP erit TP aequalis et parallela ipsi LM. Perueniat tempusculo dt luna
 ex

ex L in l , sol autem ex S in s ; transferetur ergo interea linea syzygiarum in ab , et luna in l sollicitabitur partim a vi secundum lT , partim a vi secundum parallelam ipsi Tp trahente, demisso scilicet ex l in Ta perpendicularo lp . Ex his autem viribus resoluendis reperiuntur vis normalis et tangentialis, quarum utraque celeritatem lunae dabit. Hae autem aequationes coniunctae eliminata celeritate praebebunt aequationem pro curua ABL in qua luna moueri cernitur. Q. E. I.

Scholion I.

796. Aequationes, quae hinc ad motum lunae deducuntur, tam fiunt complexae, ut ex iis neque celeritas lunae, neque orbita, neque positio lineae absidum eiusque motus exacte possint determinari. Vero autem proxime ex eodem calculo negligendis quantitibus vehementer exiguis quodammodo conclusiones in usum astronomiae possunt elici, quemadmodum fecit Summus *Newtonus* in *Phil. Princ. Libr. III.* Etiam si autem hoc incommodo calculus non laboraret, tamen ista propositio non summo rigore motum lunae esset exhibitura. Posuimus enim solem prorsus quiescere, quod a vero parumper discrepat; deinde terram in circulo motam consideramus, et orbitam lunae in ipso terrae plano positam, quae itidem re ipsa secus se habent. Interim tamen certum est, si huius propositionis solutio posset euolui ex eaque tabula confici, hoc

hoc in Astronomia maximam habiturum esse utilitatem.

Corollarium 1.

797. Quia lunae a terra distantia est admodum parua respectu distantiae terrae a sole, sine sensibili errore fere poterit poni $z = a$, quo casu vis secundum LM agens euanescit, et luna tantum ad terram trahetur vi $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$.

Corollarium 2.

798. Cum orbita lunae non multum differat a circulo, poterit ea instar ellipsis mobilis considerari, vt fecimus prop. 90 (747). Quare ad motum absidum cognoscendum, erit ex illius prop. coroll. 3 (750) $P = \frac{a^3by + fy^4}{a^3}$, atque luna a perigaeo ad apogaeum perueniet absoluto motu angulari circa terram angulo $= 180 \sqrt{\frac{a^3b + fy^3}{a^3b + 4fy^3}}$ grad. vbi y , quia non multum variatur tanquam constans est considerandum.

Scholion 2.

799. Regrederetur ergo perpetuo linea absidum motus lunaris, quia $\frac{a^3b + fy^3}{a^3b + 4fy^3}$ minor et vnitae, id quod est contra obseruationes. Ratio vero huius erroris est quod z vt constantem quantitatem considerauimus. Nam etsi z non multum neque augeatur neque minuatur ratione sui ipsius, tamen eius incrementa et decrementa respectu incrementorum ipsius y minime negligi possunt. Quare cum ipsius

P dif-

P differentiale fit accipiendum, in eo perperam z tanquam constantem sumus contemplati, eiusque loco a posuimus. Quia autem z non potest dari per y , motus absidum non potest hoc modo determinari. Interim tamen hoc colligitur, si fuerit $ady > ydz$, lineam absidum in antecedentia, at si $ady < ydz$ in consequentia promoueri, si quidem cogitationem abstrahamus a vi secundum LM agente.

Corollarium 3.

800. Posito $LM = TP = x$, erit proxime $z = a + x$, vbi x est admodum paruum respectu a . Neglecto ergo x prae a erit vis qua luna ad terram trahitur $= \frac{b}{y^2} + \frac{fy}{a^3}$ et vis qua secundum LM trahitur $= \frac{3fx}{a^3}$. Haec igitur euanescit quando luna est in quadraturis, maxima vero est, quando luna est in syzygiis.

Scholion 3.

801. Cum autem non fit huius loci haec ad motum lunae spectantia fusius persequi, quippe quae ad Astronomiam Theoreticam pertinent; ad reliqua instituto nostro accommodata progrediemur. Sufficienter enim possunt ista ad intelligendum, quomodo canones motuum traditi, ad quosuis casus motusque respectiuos inueniendos in usum verti queant. Quae autem in hoc capite restant, motum corporum liberum, qui non fit in eodem plano, comple-

plectuntur. Ex praecedentibus quidem manifestum est; vnica existente vi centripeta, motum corporis semper fieri in eodem plano, quomodocunque etiam corpus initio fuerit proiectum; et si plura sint centra virium in eodem plano sita, in eodemque plano corporis fiat proiectio, curua a corpore descripta similiter tota in eodem plano erit posita. Ad sequentia igitur referri debet, quando corpus a pluribus viribus, quarum directiones in diuersis planis existunt, sollicitatur, vel etiam quando directio, secundum quam corpus initio proficitur, non in eo, in quo sunt virium directiones, sita est plano. His igitur in casibus motus corporis ita debet considerari, quasi fieret in superficie quadam conuexa seu concaua, in eaque lineam quandam describeret. Natura autem superficiei exprimitur aequatione tres indeterminatas inuolvente, et lineae in ea superficie ductae natura continetur eadem illa aequatione coniuncta cum alia aequatione vel tres quoque illas indeterminatas complectente vel duas tantum. Ex his enim deduci poterit curuae lineae proiectio in dato plano, et ex projectione et superficie simul innotescit ipsa curua a corpore descripta et in superficie posita. Quemadmodum porro in plano quaeuis vires ad duas normalem et tangentialem possunt reduci, ita in hoc negotio virium reductio ad tres vires fieri debet (545), quae, quales in corpus exerant effectus, primum sumus inuestigaturi.

PROPOSITIO 98.

Theorema.

802. *Tres principales vires, quae faciunt, ut corpus in curua non in eodem plano existente moueatur, et in quas aliae vires resolui debent, singulae sunt inter se normales: Earum vna est tangentialis, reliquae duae normales ad eam, quarum altera directionem habet in dato plano, alterius vero directio est normalis ad hoc planum. Harumque virium nulla reliquarum actiones immutare valet.*

Demonstratio.

Assumpto plano fixo APQ, in eoque axe AP, sit *Mm* elementum a corpore descriptum. Ex punctis *M* et *m* in planum fixum demittantur perpendiculara *MQ* et *mq*, et ex punctis *Q* et *q* perpendiculara in axem, *QP*, *qp*. Iam si corpus a nulla vi sollicitaretur, in recta *Mm* producta progredieretur celeritate quam habuit in *Mm*; aequali ergo tempusculo, quo *Mm* percurrit, perueniet in *n*, descripto elemento *mn* aequali et in directum posito elemento *Mm*. Quare demisso quoque ex *n* in planum APQ perpendicularo *nr*, erunt elementa *Qq* et *qr* inter se quoque aequalia et in directum posita: hanc ob rem perpendicularum *rπ* ex *r* in axem AP demissum abscindet elementum *pπ = Pp*. Sit celeritas qua corpus elementum *Mm* describit, debita altitudini *v*, et consideretur primo vis tangentialis, quae directionem habet iuxta *mn* et tota in alteranda celeritate absimitur. Ponatur haec vis tangentialis T

Tabula IX.
Fig. 4.

existente vi grauitatis $= r$, erit $dv = T.Mm$, et
 elementum mn absoluitur celeritate debita altitudi-
 ni $v + dv$. Deinde in plano Mr concipiatur vis di-
 rectionem habens ms normalem ad corporis directi-
 onem Mm . Haec ergo efficiet vt corpus ab mn de-
 clinet, et in $m\upsilon$ elemento in eodem plano Mr po-
 sito progrediatur. Sit haec vis $= N$, et cum radi-
 us osculi elementorum Mm et $m\upsilon$, demisso ex υ in
 mn perpendicularo $\upsilon\varepsilon$ sit $= \frac{m \upsilon^2}{\upsilon\varepsilon}$, erit $\frac{2v \cdot \upsilon\varepsilon}{m \upsilon^2} = N$ (561).
 Est vero $\frac{\upsilon\varepsilon}{m \upsilon}$ sinus anguli $n m \upsilon$. Quamobrem erit
 $2v \cdot \sin. n m \upsilon = N \cdot m \upsilon = N \cdot Mm$, ideoque $\sin. n m \upsilon$
 $= \frac{N \cdot Mm}{2v}$. Tertia vis sit normalis ad vtramque expo-
 sitarum mn et ms , ita vt eius directio mt sit norma-
 lis in planum Mr . Haec igitur vis neque praeece-
 denti in actiones impedit, neque ab ipsis impedi-
 mentum seu immutationem patietur. Tota ergo im-
 pendetur ad corpus a plano Mr detrahendum; dedu-
 cat ea corpus ex υ in μ , ita vt planum $\upsilon m \mu$ sit norma-
 le in planum Mr ; eritque eius effectus angulus $\upsilon m \mu$.
 Hoc igitur effectu eodem, quo circa praecedentem
 vim normalem fecimus, modo aestimato, si fuerit
 haec vis M , erit $\sin. \upsilon m \mu = \frac{M \cdot Mm}{2v}$. Tres ergo hae vi-
 res simul efficient, vt corpus, postquam elemen-
 tum Mm descripsit, progrediatur in elemento $m\mu$,
 aucta celeritate debita scilicet altitudini $v + T.Mm$.
 Quaecunque autem aliae vires corpus solli-
 citent, eae omnes resolui possunt in huiusmodi
 tres, quarum directiones sunt mn , ms , mt . Quarum
 effectus in corpus cum determinauerimus,

simul

simul quarumcunque virium effectus cognoscen-
tur. Q. E. D.

Corollarium I.

803. Sumta $\nu\mu$ in plano $nr\pi$, et demisso
ex μ in planum APQ perpendicularo $\mu\epsilon$, erit $\mu\epsilon$ pa-
rallela ipsi rn . Tres igitur coordinatae pro punctis
M, m et μ erunt AP, PQ, QM; Ap , pq , qm ; et
 $A\pi$, $\pi\epsilon$, $\epsilon\mu$.

Corollarium 2.

804. Quare si ex μ in $m\nu$ perpendicularum $\mu\eta$
demittatur, erit id in planum Mr normale; simili-
que modo $\epsilon\theta$, quae est ad qr perpendicularis, in
idem planum normalis erit. Quamobrem ob ϵ et μ
in recta $\epsilon\mu$ huic plano parallela posita, erit $\epsilon\theta = \mu\eta$,
et $\theta\eta = \epsilon\mu$.

Corollarium 3.

805. Si ad Qq ducatur normalis qT in plano
fixo APQ, erit haec qT normalis in planum Mr .
Cum igitur mt in idem planum sit quoque normalis,
erit mt parallela ipsi qT ; inter hasque distantia erit
altiludo mq .

Corollarium 4.

806. Trium coordinatarum dicantur $AP = x$,
 $PQ = y$ et $QM = z$. Eritque $Pp = p\pi = dx$; $pq = y$
 $+ dy$; $qm = z + dz$; atque $\pi\epsilon = y + 2dy + ddy$; et
 $\epsilon\mu = z + 2dz + ddz = \theta\eta$. At $Qq = \sqrt{dx^2 + dy^2} = qr$,
 $q\epsilon = \sqrt{(dx^2 + (dy + ddy)^2)} = q\theta = \sqrt{dx^2 + dy^2} +$
 $\frac{dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dz^2}}$; ideoque $r\theta = \frac{-dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Porro erit
X x 3 $\pi r =$

$\pi r = y + 2dy$ et $rn = z + 2dz$. Denique erit
 $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = mn$ et $m\mu = \sqrt{(dx^2 +$
 $(dy + ddy)^2 + (dz + ddz)^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$
 $+ \frac{dy ddy + dz ddz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$.

Corollarium 5.

807. Quia mq , $\theta\eta$ et rv sunt inter se paral-
 lelae, in eodem plano et rectis qr ac mv termina-
 tae, erit $\theta\eta - qm : q\theta = rv - mq : qr$. Est vero $\theta\eta - qm$
 $= dz + d dz$; $q\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dy ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et $qr = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.
 Quare est $rv - mq = \frac{(dz + ddz)(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 + dy ddy}$
 hincque $ny = rn - rv = -ddz + \frac{dy dz ddy}{dx^2 + dy^2}$. Vnde repe-
 ritur fin. $nmy = \frac{dy dz ddy - dx^2 ddz - dy^2 ddz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

Corollarium 6.

808. Cum deinde sit $rg = -ddy$, et Qq :
 $Pp = rg : g\theta$ erit $\theta g = -\frac{dx ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \mu\eta$. Hanc ob rem
 habebitur fin. $\nu m \mu = -\frac{dx ddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 7.

809. Ex datis igitur tribus viribus T, N et
 M corpus sollicitantibus orientur tres sequentes
 aequationes: $dv = TV\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $2vd y dz ddy$
 $- 2v ddz(dz^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2 +$
 $dy^2)}$ atque $-2v dx ddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2$
 $+ dy^2)}$, ex quibus tum celeritas corporis in singu-
 lis locis tum ipsa curua cognoscuntur.

Co-

Corollarium 8.

§ 10. Duae posteriores aequationes coniunctae et eliminata v dant istam aequationem $\frac{ddz(dx^2+dy^2)}{dxddy}$
 $-\frac{dydz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quae assumi potest pro aequatione naturam superficiei exprimente, in qua curua descripta extat.

Scholion.

§ 11. Hac igitur propositione primarias dedimus regulas, ex quibus motus corporis ita sollicitati, vt in eodem plano moueri nequeat, deduci poterit. Ostendimus enim omnes potentias in ternas, quarum effectus determinauimus, posse resolui; et idcirco, quaecunque proponantur potentiae sollicitantes ope talis resolutionis, quem motum eae in corpore producant, cognoscitur. Apparet etiam si potentia M desit, corpus motum suum in plano esse absoluturum, qui igitur casus huc non pertinet. At si potentia tangentialis T euanescat manentibus reliquis M et N , corpus quidem orbitam non planam describet, sed tamen motu vniformi feretur. Quo igitur situs orbitae in vniuersum cognoscatur, inclinationem plani, in quo sunt elementa Mm et mp , ad planum APQ eiusque cum hoc interfectionem inuestigari oportebit.

PROPOSITIO 99.

Problema.

§ 12. Determinare plani, in quo duo elementa Mm et mp a corpore descripta sunt posita, incli-

Tabula X.
Fig. 1.

nationem ad planum fixum APQ, eiusque cum hoc intersectionem.

Solutio.

In plano, cuius inclinationem quaerimus, dantur tria puncta M , m et μ ; in hoc igitur plano posita erit quaevis recta per horum punctorum duo transiens. Quare si recta mM producat, donec ipsi qQ productae occurrat in S , erit punctum S tum in plano $Mm\mu$ tum in plano fixo APQ; transibit ergo per S recta, qua haec plana se mutuo interfecant. Manentibus igitur ut ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, et elementis abscissae Pp et $p\pi$ inter se aequalibus, erit $qm-QM:Qq=QM:QS$, hincque $QS=\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}$. Lineae vero QS positio cognoscitur ex angulo PQS , cuius sinus est $=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Deinde in plano $Mm\mu$ quoque situm est punctum n ; hanc ob rem recta per n et μ transiens seu huic parallela per M ducta in eodem extabit plano. Haec autem recta occurret plano APQ in puncto R rectae QP productae, et QR cognoscetur ex hac analogia $rn-z\mu:rz=\mu QM:QR$; hinc erit $QR=\frac{zddy}{dadz}$, ideoque $PR=\frac{zddy}{dadz}-y$. Est vero ut $Qq:Pp=QS:PT$ ducta ST perpendiculari in AP . Ex quo oritur $PT=\frac{zdx}{dz}$. Porro est quoque $Pp:pq-PQ=PT:PQ+ST$, ideoque $PQ+ST=\frac{zdy}{dz}$, et $ST=\frac{zdy}{dz}-y$. Occurrat recta RS producta axi AP in O ; eritque $PR-ST:PT=PR:PO$, ex quo inuenitur $PO=\frac{zdxddy-ydxadz}{dzddy-dydz}$; atque AO

$\frac{xdzddy - xdyddz + ydxddz - zdxdy}{dzddy - dyddz}$. Porro ex his est tangens anguli POR $= \frac{PR}{PO} = \frac{dzddy - dyddz}{dxddz}$; unde positio interfectionis RO plani $Mm\mu$ cum plano fixo APQ innotescit. Inclinationo autem horum planorum mutua inuenitur demittendo ex Q in RS perpendicularo QV; tum enim erit anguli inclinationis tangens $= \frac{MQ}{QV}$. Est vero $QV = \frac{PO \cdot QR}{RO} = \frac{xdzddy}{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}$ ideoque $\frac{MQ}{QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$, ex quo angulus inclinationis mutuae planorum $Mm\mu$ et APQ determinatur. Q. E. I.

Corollarium I.

§ 13. Si angulus POR semper maneat idem, erit $adxddz + dyddz = dzddy$, estque huius anguli tangens $= a$. Aequatio haec integrata dat $adx + dy + \xi dz = 0$, atque $ax + y + \xi z = f$. Ex qua aequatione cognoscitur orbitam a corpore descriptam totam fore in eodem plano positam.

Corollarium 2.

§ 14. Si enim fuerit $ax + y + \xi z = f$, erit $adx + dy + \xi dz = 0$, et $ddy + \xi ddx = 0$. Hinc fiet $AO = x + \frac{ydx + \xi dx}{-dy - \xi dz}$, et cum sit $-dy - \xi dz = adx$, erit $AO = x + \frac{y}{a} + \frac{\xi z}{a} = \frac{f}{a}$, ideoque et AO constans.

Corollarium 3.

§ 15. Deinde manente angulo POR constante seu $ax + y + \xi z = f$; erit tangens anguli inclinationis

Y y onis

onis planorum $Mm\mu$ et $APQ = \frac{\sqrt{(dx^2 + (-dy - \xi dz)^2)}}{-\xi dx} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{-\xi}$. Quare et iste angulus erit constans.

Corollarium 4.

816. Neque etiam punctum intersectionis O invariabile poni potest, nisi simul orbita a corpore descripta fiat plana. Nam sit $AO = f$, et ponatur $x - f = t$, et $dx = dt$; erit $tdzddy - tdyddz = zdtddy - ydtddz$; hincque $\frac{ddy}{tdy - ydt} = \frac{ddz}{tdz - zdt}$. Multiplicetur per t , quo habeatur $\frac{tddy}{tdy - ydt} = \frac{tddz}{tdz - zdt}$. Quae aequatio ob dt constans est integrabilis; namque erit $t dy - ydt = atdz - azdt$. Haec diuisa per tt et integrata dabit $\frac{y}{t} = \frac{az}{t} + \xi$, seu $y = az + \xi x - \xi f$. Quam perspicuum est esse ad superficiem planam.

Corollarium 5.

817. At si ponatur tangens anguli inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ constans, huius modi aequatio $ax + y + \xi z = f$ non prodit; Atque aliunde manifestum est orbitam a corpore descriptam tum non necessario esse planam.

Corollarium 6.

818. Quare ne curua a corpore descripta sit plana, neque punctum O , neque angulus POR inuariabiles accipi possunt. Haec autem si sint variabilia, nihilo tamen minus angulus inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ constans esse potest.

Co-

Corollarium 7.

819. Linea intersectionis RO, quae in Astronomia linea nodorum appellatur, si non habeat constantem positionem, conuertitur circa punctum S. Nam recta *mMS* posita est in plano elementorum *Mm* et praecedentis. Quare intersectio RO et praecedens se in S decussabunt.

Corollarium 8.

820. Punctum igitur hoc S est in eo loco, ubi est $AT = \frac{xdz - zdx}{dz}$ et $ST = \frac{zdy - ydz}{dz}$. Ex quibus positio puncti S cognoscitur.

Corollarium 9.

821. Si ponatur punctum S inuariabile, erit $xdz - zdx = adz$ et $zdy - ydz = bdz$, vnde reperitur $x - a = az$ et $y - b = bz$. Hoc igitur casu orbita a corpore descripta non solum est plana, sed etiam linea recta; quia projectio eius *Qq* fit recta, et propter $y - b = bz$ etiam *Mm*.

Scholion.

822. Expositis nunc principiis, quae ad motum corporum in superficiebus non planis pertinent, ipsa tractatio vt prior de motu in plano in duas partes potest diuidi. In quarum prima docebimus ex datis viribus inuenire curuam a corpore descriptam, in altera vero ostendetur, si data fuerit curua, quam corpus describit, quales vires ad hoc requirantur. Hic vel curua ipsa tantum potest esse

data, vel simul quoque celeritas corporis in singulis locis.

PROPOSITIO 100.

Problema.

Tabula X.
Fig. 2.

824. Si corpus sollicitetur a tribus potentiis quarum directiones Mf , Mg et MQ sint parallelae tribus coordinatis AP , PQ et QM ; determinare motum corporis et orbitam, in qua mouebitur.

Solutio.

Quia Mf et Mg sunt parallelae ipsis AP et PQ , erit planum fMg parallelum plano APQ . In hoc plano ducatur Mi parallela elemento Qq , erit haec Mi quoque posita in plano Mq . In elementum mM productum demittatur ex Q perpendicularum Qd ; atque ex f et g in Mi perpendiculara fi et gk . Deinde ex i et k in Md cadant perpendiculara ib et kc . Erunt autem fi et gk perpendicularares in planum Mq , quia planum fMg est normale ad planum Mq . Manentibus nunc ut ante $AP=x$, $PQ=y$; et $QM=z$: sit vis corpus secundum Mf trahens $=P$; vis, quae corpus secundum Mg trahit $=Q$ et vis secundum MQ trahens $=R$. Hae igitur vires, ut earum effectus cognoscantur, resolui debent in vires tangentialem iuxta Mm agentem; normalem ad Mm in plano MQ sitam, et normalem ad planum Mq . Ob ang. $Mfi=Qqp$ erit $\sqrt{(dx^2+dy^2)}:dy=P$: $\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ exprimitque $\frac{Pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ vim ex P ortam secundum if agentem, et si P sola ageret foret per (802)

$M=$

$M = -\frac{P dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Deinde vis secundum Mi trahens erit $= \frac{P dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Haec porro resolvitur in vim secundum bi trahentem $= \frac{P dx dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et vim secundum Mb trahentem $= \frac{P dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Ex

P igitur erit $N = -\frac{P dx dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et $T = -\frac{P dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Simili modo vis Q , cuius directio est Mq , resolvitur in vim secundum kg agentem $= \frac{Q dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et vim secundum $Mk = \frac{Q dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Haec

ulterius resolvitur in vim secundum $ck = \frac{Q dy dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et vim secundum $Mc = \frac{Q dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Quare si haec vis sola ageret; haberetur $T = -\frac{Q dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$; $N = -\frac{Q dy dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$

et $M = \frac{Q dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Denique vis R directionem MQ habens resolvitur in vim secundum $Md = \frac{R dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et vim secundum $dQ = \frac{R \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Ex vi R igitur foret $T = -\frac{R dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ et $N = \frac{R \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$

Omnibus igitur hisce tribus viribus P , Q et R simul agentibus erit vis tangentialis ex omnibus orta $T = -\frac{P dx - Q dy - R dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$, vis normalis in plano Mq , quae

posita est $N = \frac{P dx dz - Q dy dz + R dx^2 + R dy^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$. Atque altera vis normalis $M = \frac{P dy + Q dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. His valoribus loco T , N et M in aequationibus §. 809 substitutis

prodibunt tres sequentes aequationes $dv = -P dx - Q dy - R dz$; $\frac{2v dy dz + 2v dx dy - 2v dz (dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = -P dx dz -$

$Q dy dz + R(dx^2 + dy^2)$, atque $\frac{2v dx dy}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = P dy - Q dx$.

— Qdx . Quae aequationes motum corporis determinant. Q. E. I.

Corollarium I.

824. Duae hae posteriores aequationes dant istam analogiam: $dydzddy - ddz(dx^2 + dy^2) : dxddy = -Pdx dz - Qdy dz + R(dx^2 + dy^2) : Pdy - Qdx$. Ex qua reperitur $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$.

Corollarium 2.

Tabula X.
Fig. I.

825. Planum ergo $Mm\mu$, in quo sunt elementa Mm et $m\mu$ hoc modo definitur.

Erit $A O = x - \frac{Pydz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy} = \frac{Pydz + Pzdy + Qzdx - Qzdx + Rydx - Rxdy}{Qdz - Rdy}$; et tang. angulus

$POR = -\frac{Qdz + Rdy}{Paz - Rdx}$. Atque tangens anguli, quem planum $Mm\mu$ facit cum plano $A P Q = \frac{\sqrt{(Pdz - Rdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2}}{Pdy - Qdx}$.

Corollarium 3.

826. Si potentia P evanescat, reperitur $Q = -\frac{2vddy}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ et $R = -\frac{dv}{dz} + \frac{2vdyddy}{dz(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, ex duabus aequationibus inuentarum. Et ex tertia prodibit $\frac{dv}{2v} - \frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, cuius integralis est $vdx^2 = a(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ seu $dx\sqrt{v} = \sqrt{a}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

Corollarium 4.

827. Hac igitur hypothesi erit tempus seu $\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}} = \frac{x}{\sqrt{a}}$. Ex quo intelligitur

tur motum corporis progressuum secundum axi AP parallelas esse vniformem.

Corollarium 5.

828. Eadem porro hypothese erit $Q = -\frac{2ad dy}{dx^2}$ et $R = -\frac{2addz}{dx^2}$, propter $ddy:ddz = Q:R$ (824). Ex quibus aequationibus ipsa curua a corpore descripta determinabitur.

Scholion.

829. Ex resolutione potentiarum facile perspicitur ad tres potentias, quas in hac propositione considerauimus, omnes omnino potentias, quae excogitari possunt, reduci posse. Quare cum datis his potentiis non difficulter curua a corpore descripta inueniatur, etiam pro quibusque casibus propositis ista propositio maximam habebit vtilitatem.

PROPOSITIO IOI.

Problema.

830. Si corpus perpetuo urgeatur versus axem AP secundum perpendiculara MP a corpore ad axem demissa; determinari oportet motum corporis. Tabula X.
Fig. 3v

Solutio.

Ductis coordinatis vt ante AP, x ; PQ, y ; et QM, z : erit $MP = \sqrt{y^2 + z^2}$. Sit vis secundum MP agens $= V$, eaque resoluatur in duas secundum MQ et Mg trahentes, vbi Mg est parallela ipsi PQ eique

eique aequalis. Erit igitur vis secundum MQ agens $= \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et vis secundum Mg $= \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. His cum propositione praecedente comparatis erit $P=0$, $Q= \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R= \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Quare habebitur $ddy:ddz = Q:R=y:z$ (828) atque $yddz=zddy$ seu $yddz-zddy=0$; cuius aequationis integralis est $ydz-zdy=bdx$. Porro erit $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = -\frac{2addy}{dx^2}$. Quae aequationes coniunctae determinant curuam a corpore descriptam. Corporis autem celeritas dabitur per aequationem $v dx^2 = a(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, seu ipsa celeritas erit $= \frac{\sqrt{a(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{ax}$. Q. E. I.

Corollarium I.

§31. Ponatur $dx = pdy$, erit ob dx constans, $0 = pddy + d^2y$ seu $ddy = -\frac{d^2y}{p}$. His substitutis ad cognoscendam curuam descriptam habebuntur istae aequationes $ydz - zdy = bpd y$ et $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = \frac{2adp}{p^2 dy}$.

Corollarium 2.

§32. Si porro ponatur $z = qy$, istae aequationes transibunt in $y^2 dq = bpd y$ et $\frac{V}{\sqrt{(1+qq)}} = \frac{2adp}{p^2 dy}$. Quae etiam tres continent variables.

Scholion I.

§33. Ad haec clarius exponenda maxime conuenit exempla adhibere. Quamobrem aliquot afferemus in quibus vis V a distantia MP pendere ponitur, eamque potestatibus aliquibus ipsius MP proportionalem ponemus; quo iste motus cum
mo-

motu in plano a vi centripeta distantiarum potestati cuidam proportionali comparari possit. Inter hos enim casus magna est similitudo, cum quod est in plano centrum virium hoc loco est quasi axis virium, ad quem corpus perpetuo attrahitur. Atque si initio corpus ita proiciatur, ut non habeat motum progressivum secundum axem AP, motus eius fiet in plano PQM, et corpus attrahetur perpetuo ad punctum P centrum virium.

Exemplum I.

834. Sit vis V distantiae MP directe proportionalis, ponaturque $V = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{f}$. Erit ergo $\frac{y}{f} = \frac{2adp}{p^2 dy}$ (831) et integrando $\frac{y^2}{2f} = C - \frac{a}{p^2}$. seu $\frac{1}{pp} = \frac{2cf-y}{2af}$ et $p = \frac{\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$. Cum autem sit $dq = \frac{bpa y}{y^2}$ (832) erit $\frac{bdy\sqrt{2af}}{y^2\sqrt{(2cf-y^2)}} = dq$. Cuius integralis est $q = \alpha - \frac{\xi\sqrt{(2cf-y^2)}}{y}$, denotante $\xi = \frac{b\sqrt{2af}}{2cf}$. Quare habebitur $z = \alpha y - \xi\sqrt{(2cf-y^2)}$, quae aequatio exprimit projectionem curvae descriptae in plano ad axem AP normali, quam igitur perspicitur esse ellipsin, cuius centrum in axe AP est positum. Deinde cum sit $dx = p dy$, erit $dx = \frac{dy\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$, quae aequatio exprimit projectionem curvae quaesitae in plano APQ. Haec itaque est linea sinuum *Leibnitiana*, cum abscissa x sit ut arcus, cuius sinus est applicata y.

Exemplum 2.

835. Si fuerit vis V reciproce ut quadratum distantiae MP; seu $V = \frac{ff}{y^2+z^2} = \frac{ff}{yy(1+q^2)}$, ob $z = qy$.
Z z Quam-

Quamobrem habebitur $\frac{ff}{y^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quia

autem est $dy = \frac{y^2dq}{bp}$ (832), erit $\frac{f^2dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2abd p}{p^2}$;

cuius integralis est $\frac{ffq}{\sqrt{(1+qq)}} = C - \frac{2ab}{p} = C - \frac{2ab^2dy}{y^2dy}$, loco p ipsius valore $\frac{y^2dq}{bdy}$ substituto. Hinc fit $\frac{f^2q dq}{\sqrt{(1+q^2)}} = Cdq - \frac{2ab^2dy}{y^2}$, et integrando $f^2\sqrt{(1+q^2)} = Cq + \frac{2ab^2}{y} + D$. Quare dum fit $q = \frac{z}{y}$; prodibit $f^2\sqrt{(y^2+z^2)} = Cz + Dy + 2ab^2$. Quae est aequatio pro projectione curvae descriptae in plano ad axem AP normali; quam igitur colligi potest esse ad sectionem conicam, cuius alteruter focus sit in axe AP positus.

Scholion 2.

836. Ex his intelligitur projectiones curvarum descriptarum in plano ad axem AP normali, congruere cum curuis, quas corpora in hoc plano mota describerent ab eadem vi sollicitata. Neque autem hoc mirum est; nam motus, quem hoc loco consideramus, reduci potest ad motum in plano ad axem AP normali factum a corpore ad axem perpetuo attracto; dummodo huic plano motus uniformis secundum axem AP impressus concipiatur. Namque iste motus progressivus, quia fit uniformiter in directum, motum corporis in plano turbare nequit. Haec igitur conuenientia iam deduci potuisset ex 827, vbi si vis P euanescit, motus corporis

ris secundum axem progressius aequabilis est ostensus. Quamobrem quoties vis P in nihilum abit; tum semper motus quaesitus ad motum in plano factum potest reduci. Hoc scilicet fiet si plano ad axem AP normali tantus motus retro secundum PA imprimatur, quantum habere inuentum est secundum AP progressiuum (827).

Scholion 3.

837. Interim tamen hoc maxime attendi meretur, quod tam facile in exemplis propositis aequationes inter coordinatas orthogonales pro curuarum proiectionibus in plano ad axem AP normali atque adeo pro ipsis curuis a corpore descriptis si motus progressius euanescat, inuenerimus. In huius capituli enim priore parte qua motus in plano a vi centripeta generales considerauimus¹, multo maiore opus fuit labore et comparatione arcuum circularium vt ad aequationes consuetas pro curuis descriptis peruenerimus. Maior igitur generalitas, quae saepissime inuentionem quaesiti difficiliorem reddit, hoc loco non solum non est impedimento, sed etiam facillime id determinat, quod in particulariori sensu difficile erat inuentu.

Corollarium 3.

838. In casu huius propositionis planum elementorum Mm et $m\mu$ facile determinatur. Nam ob $ddy:ddz=y:z$ erit $PO=0$ et $AO=x$, incidetque O

Tabula X.
Pag. I.

Zz 2

in

in P. Porro tang. ang. POR = $\frac{ydz - zdy}{zdx} = \frac{b}{z}$ ob $ydz - zdy = bdx$. Cotangens igitur anguli POR est vt QM. Denique tangens anguli inclinationis plani Mmp. ad planum APQ est $= \frac{\sqrt{(z^2 + b^2)}}{y}$.

Scholion 4.

839. Cum casus, quo vis P euanescit, ad motum in plano possit reduci; reduci quoque poterit ad motum in plano si vel Q vel R desit. Nam si axis capiatur in recta ad AP normali in plano APQ, vis Q directionem habebit axi parallelam, et reliquae P et R tractabuntur, vt ante Q et R. At si axis sumatur normalis ad AP et ad planum APQ, vis R locum vis P axi parallelae occupabit. Scilicet quemadmodum coordinatae x , y et z respectu situs inter se possunt commutari, similiter etiam de viribus P, Q et R est iudicandum.

PROPOSITIO 102.

Problema.

840. Si corpus in singulis punctis M duplici vi sollicitetur vna cuius directio est MA; et altera cuius directio est MQ normalis ex M in planum APQ demissa: oportet determinari motum corporis M, et orbitam eius.

Solutio.

Ducta MP, quae sit normalis in AP, vis MA resoluatur in vires secundum Mf ipsi AP parallelam, et secundum MP agentes. Haec vero vis iuxta MP

resoluitur in vires secundum MQ et Mg agentes. Pofitis igitur vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$; et vi secundum MA trahente $=V$, et vi secundum $MQ=W$, atque resolutione virium instituta et comparatione facta cum prop. 100. reperietur

$P = \frac{Vx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $Q = \frac{Vy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ et $R = W + \frac{Vz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$. Atque ex aequationibus eiusdem prop. prodibit $V = \frac{2vdxdy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $W = \frac{2vdy(xdz-zdx)-2vddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex his inuenitur $\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy+dzddz-xdy}{dx^2+dy^2+dz^2-xdy-ydx}$; hincque integrando $\ln v = \ln \sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} + \ln a$, seu $V = \frac{a\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{xdy-ydx}$; siue $v = \frac{a^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$. Hic valor loco v substitutus dat has aequationes $V = \frac{2a^3dxdy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)^3}$ et $W = \frac{2a^3ddy(xdz-zdx)-2a^3ddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)^3}$. Ex quibus curua descripta determinatur. Q. E. I.

Corollarium I.

841. Tempus quo corpus in M vsque peruenit, est $\int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{v}$. Cum autem sit $V = \frac{a\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{xdy-ydx}$, erit illud tempus $= \frac{\int xdy - \int ydx}{a\sqrt{a}}$, quod per quadraturam projectionis curuae descriptae in plano APQ cognoscitur.

Corollarium 2.

842. Si ponatur $y=px$ et $z=qx$; prodibunt sequentes aequationes $V = \frac{2a^3dx(xddp+pdxdp)\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{x^3d^3}$ et

Zz 3

et

et $W = \frac{2a^3dqddp - 2a^3dpddq}{x^3dp^3}$, Quae ad curuam cognoscendam inferuiunt.

Exemplum.

843. Si vis V fuerit distantiae MP proportionalis et vis W perpendiculari MQ; ponatur $V = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}{f}$ et $W = \frac{z}{g}$, vt itaque sit $V = \frac{xy(1 + p^2 + q^2)}{f}$ et $W = \frac{qx}{g}$. Quare per aequationes praeced. Coroll. erit $x^6dp^3 = 2a^3fdx(xddp + 2dxdp)$ et $x^4qdp^3 = 2a^3gdqddp - 2a^3gdpddq$. Illius aequationis integralis est $x^2 = C - \frac{2a^3fdx^2}{x^4dp^2}$; ex qua oritur $dp = \frac{adx\sqrt{2af}}{x^2\sqrt{(c^2 - x^2)}}$; huiusque integralis $p = \frac{y}{x} = C - \frac{a\sqrt{2af}(c^2 - x^2)}{c^2x}$, feu $y = nx - \frac{a\sqrt{2af}(c^2 - x^2)}{c^2}$, pro aequatione projectionis curuae descriptae in plano APQ, quae igitur est ellipsis, cuius centrum in A est positum. Ex inuenito ipsius dp valore erit porro $ddp = \frac{adx^2(2c^2 - 3x^2)\sqrt{2af}}{x^3(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

quibus loco dp et ddp valoribus in altera aequatione substitutis orietur $afqxdx^2 = -2accgdxdq + 3agx^2dxdq - ac^2gxddq + agx^3ddq$. Ponatur $q = e^{\int r dx}$ prodibit $fxdx = -c^2gxdr + gx^3dr - 2ccgrdx + 3gx^2rdx - c^2gxr^2dx + gx^3r^2dx$. Fiat $r = \frac{u}{x^2\sqrt{(c^2 - x^2)}}$, prouenietque $fxdx = -\frac{gdu\sqrt{(c^2 - x^2)}}{x} - \frac{gu^2dx}{x^3}$ feu $du + \frac{u^2dx}{x^2\sqrt{(c^2 - x^2)}} + \frac{fx^2dx}{g\sqrt{(c^2 - x^2)}} = 0$. Quae posito $t = \frac{\sqrt{(c^2 - x^2)}}{x}$ feu $x = \frac{c}{\sqrt{(1 + tt)}}$ transibit in hanc;

Tabula X. Fig. I. $du - \frac{u^2dt}{cc} = \frac{ccfdt}{g(1 + tt^2)^2}$; cuius integrale postea exhibebimus. Ad planum cognoscendum, in quo elementa Mm et mμ sunt sita, ob $ddy:ddz = gxdy - gydx$:
 $gxdz$

$gx dz - bz dx$ posito b loco $f+g$ reperietur $A O = \frac{fz(xdy-ydx)}{bzd y - g y dz}$; tang. ang. $POR = \frac{bzdy - g y dz}{g x dz - bz dx}$. Atque tang. ang. plani $M m \mu$ cum plano $A P Q = \frac{\sqrt{((bzd y - g y dz)^2 + (g x dz - bz dx)^2)}}{g(xdy-ydx)}$. Denique tempus quo corpus in M peruenit cum sit $= \frac{f x x dp}{a \sqrt{a}}$, erit $= \int \frac{dx \sqrt{2f}}{\sqrt{c^2 - x^2}}$. Erit itaque hoc tempus proportionale angulo cuius sinus est abscissa x , existente sinu toto $= c$, seu cuius sinus est $\frac{x}{c}$, si sinus totus capiatur $= 1$. Ex quo perspicitur motum corporis in projectione in plano $A P Q$ facta angularem circa A esse uniformem, et tempus vnus reuolutionis esse vt \sqrt{f} .

Corollarium 3.

844. Projectio curuae descriptae in plano APQ fit circulus, si est $n=0$ et $-a \sqrt{2af} = cc$; cuius centrum est in A et radius $= c$. Erit igitur $y = \sqrt{c^2 - x^2}$. Atque z dabitur ex hac aequatione $\frac{g d d z}{dx} = \frac{g x dz - b z dx}{cc - x x}$, quae aequae late patet ac casus exempli praecedentis, etiamsi hic casus particularis sit consideratus.

Corollarium 4.

845. Ad inuentum ipsius z valorem ex aequatione $\frac{g d d z}{dx} = \frac{g x dz - b z dx}{cc - x x}$, pono $z = e^{\int r dx}$. Quo facto prodibit aequatio differentialis primi gradus haec: $g dr + g r^2 dx = \frac{g r x dx - b dx}{cc - x x}$. Fiat $r = \frac{u}{\sqrt{c^2 - x^2}}$ prodibitque $g du + \frac{g u^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} + \frac{b dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = 0$. Posito $\frac{b}{g}$ seu $\frac{f+g}{g} = m^2$,

$= m^2$, orietur aequatio ista $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$, in qua indeterminatae iam sunt a se inuicem separatae.

Corollarium 5.

846. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = +\sqrt{-1} l(\sqrt{cc-xx} - x\sqrt{-1})$ et $\int \frac{du}{u^2+m^2} = \frac{1}{2m\sqrt{-1}} l \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$. Addita igitur constante et sumtis numeris habebitur $\left(\frac{\sqrt{cc-xx} - x\sqrt{-1}}{b} \right)^{2m} = \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$ hincque $u = \frac{(b^{2m} + (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m})m\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}}$.

Corollarium 6.

847. Cum vero fit $lz = \int r dx$, atque $r = \frac{u}{\sqrt{c^2-x^2}}$, erit $lz = \int \frac{m dx (b^{2m} + (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{c^2-x^2}}$. Ponatur $\int \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = s$; erit $s = \sqrt{-1} l \frac{\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1}}{b}$ et $e^{\frac{s}{\sqrt{-1}}} b = \sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1}$, atque $lz = \int \frac{m ds (1 + e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}}) \sqrt{-1}}{1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}}}$, seu posito $e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}} = t$ vt fit $ds = \frac{dt\sqrt{-1}}{2mt}$, erit $lz = \int \frac{-dt(1+t)}{2t(1-t)} = l \frac{(1-t)k}{\sqrt{t}}$, vnde fit $z = \frac{(1-e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})k}{\frac{ms}{e^{\sqrt{-1}}}} = \frac{(b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m})k}{b^m (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^m}$

Co-

Corollarium 7.

848. Inuento nunc valore ipsius z erit $dz = \frac{m z dx (b^{2m} + (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{c^2 - x^2}}$. Atque

$$\frac{g x dz - b z dx}{z} = \frac{m g dx (b^{2m} + (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m})}{(b^{2m} - (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{c^2 - x^2}}$$

Porroque posito $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ erit $\frac{b z dy - g y dz}{z} = \frac{m^2 g x dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$
 $\frac{m g dx (b^{2m} + (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}}$

Corollarium 8.

849. Ex his denique inuenietur $AO = \frac{f c c (b^{2m} - \sqrt{c^2 - x^2})}{m^2 g x (b^{2m} - (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) + m g (b^{2m} - x^2) - x\sqrt{-1}^{2m}}$, et tang.

$$POR = \frac{m x (b^{2m} - (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) + (b^{2m} + (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{-1} (c^2 - x^2)}{(c^2 - x^2) - x (b^{2m} + (\sqrt{c^2 - x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}) \sqrt{-1}}$$

Simili modo ex his inuenitur angulus inclinationis plani, in quo corpus mouetur, ad planum APQ.

Scholion.

850. Inuentorum valorum ipsius z et orbitae inclinationis applicatio fit ad modum difficilis ob quantitates imaginarias inuicem permixtas. Hanc ob rem iis longius immorari nolimus ad intersectiones curuae a corpore descriptae cum plano APQ determinandas. Quia autem magni est momenti haec quaestio in Astronomia ad motum nodorum inueniendum, sequens huic negotio destinata est propositio, in quo loco, vbi corpus motu suo in planum APQ perueniat, inuestigabimus. Corpus enim partim supra hoc planum motum suum absoluit partim infra; et siue supra sit siue infra, corpus perpetuo trahitur altera vi W ad hoc planum, in ratione directa distantiae ab hoc plano. Punctum vero in plano APQ, per quod corpus ex superiore parte in inferiorem transit vocatur nodus descendens, punctum vero per quod in superiora reuertitur nodus ascendens.

PROPOSITIO 103.

Problema.

851. *Si corpus attrahatur perpetuo partim ad punctum fixum A in ratione distantiarum ab eodem, partim normaliter ad planum APQ in ratione quoque distantiarum ab hoc plano: determinare nodos seu puncta, in quibus corpus in hoc planum peruenit; et praeter*

Tabula XI.

Fig. I.

ter-

terea etiam puncta, in quibus corpus ab hoc plano maxime distat.

Solutio.

Manentibus vt ante tribus coordinatis x, y et z , atque vi , qua corpus ad A trahitur $= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{f}$, ac vi , qua corpus ad planum APQ trahitur $= \frac{z}{g}$, positoque $\frac{f+g}{g} = m^2$: manifestum est corpus in ipsum planum APQ incidere, vbi erit $z=0$. Fit autem $z=0$, quoties est $b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2}) - x\sqrt{1}^{2m} = 0$ (847). Hocque euenit quoties est $u = \infty$ (846). Cum igitur sit $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$ (845), centro A describatur circulus BQC, radio $AB=c$; corpusque iuxta plagam BQC moueatur; et loco illius aequationis sumatur haec aequi-

ualens $\frac{\frac{c^2}{m^2} du}{c^2 u^2 + c^2} + \frac{cdx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$; seu $\frac{\frac{1}{m} \cdot c \cdot \frac{cdx}{m}}{c^2 u^2 + c^2} =$

$-\frac{cdx}{\sqrt{c^2-x^2}}$. Cuius integralis est $\frac{1}{m} \int \frac{c \cdot \frac{cdx}{m}}{c^2 u^2 + c^2} =$

$C - \int \frac{cdx}{\sqrt{c^2-x^2}}$; in qua $\int \frac{c \cdot \frac{cdx}{m}}{\frac{ccuu}{m^2} + c^2}$ exprimit arcum cui-

us tangens est $\frac{cu}{m}$, et $\int \frac{cdx}{\sqrt{c^2-x^2}}$ arcum BQ cuius sinus est $AP=x$. Sit C arcus BQC, seu quadrans circuli, et tangens $CS = \frac{cu}{m}$, cui respondeat arcus CR. Transibit ergo illa aequatio in hanc $\frac{1}{m}CQR = CQ$, atque $CR = m \cdot CQ$. Ex hoc perspicuum est fore $u = \infty$,

quoties angulus CAR fuerit rectus, vel aequalis tribus aut quinque aut 7 etc. rectis. Sequendo itaque corporis motum, erit u infinitum, si arcus CR successiue fiat aequalis sequentibus graduum numeris; 90 ; -90 ; -270 ; -450 ; -630 ; etc. Tunc autem arcus CQ tenebit gradus; $\frac{90}{m}$; $-\frac{90}{m}$; $-\frac{270}{m}$; $\frac{450}{m}$; $-\frac{630}{m}$; etc. atque arcus BQ: $90 - \frac{90}{m}$; $90 + \frac{90}{m}$; $90 + \frac{270}{m}$; $90 + \frac{450}{m}$; $90 + \frac{630}{m}$; etc. Quare si corpus alicubi fuerit in nodo, ad alios nodos perueniet successiue absolutis motu angulari circa A angulis graduum: $\frac{180}{m}$; $\frac{360}{m}$; $\frac{540}{m}$; $\frac{720}{m}$; etc. Duo igitur nodi proximi a se inuicem distabunt angulo $\frac{180}{m}$ grad. Atque nodus ascendens vel descendens distabit a sequente nodo eiusdem nominis angulo $\frac{360}{m}$ grad. i. e. angulo $\frac{360 \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{(g+j)}}$ grad. Q. E. Prius.

Maxime deinde corpus a plano APQ distabit, vbi erit $dz=0$; id quod euenit quoties $b^{2m} + (\sqrt{c^2 - x^2}) - x\sqrt{-1}^{2m} = 0$ (848). His autem in casibus fit $u=0$. Manente ergo priore constructione euadet $u=0$, quoties fit $CR=0$, vel -180 , vel -360 ; etc. grad. Tum autem arcus CQ continebit gradus; 0 , $-\frac{180}{m}$, $-\frac{360}{m}$, $-\frac{540}{m}$, etc. ideoque arcus BQ habebit gradus: 90 ; $90 + \frac{180}{m}$; $90 + \frac{360}{m}$; $90 + \frac{540}{m}$, etc. Maxima igitur corporis a plano APQ distantia aequaliter distat a nodis vtrinque proximis. Q. E. Posterius.

Corollarium I.

852. Nodi igitur in idem tandem recident punctum si fuerit m numerus rationalis seu $\frac{(f+g)}{g}$ numerus quadratus. At si $\frac{f+g}{g}$ non fuerit numerus quadratus, corpus nunquam in eodem puncto in planum APQ incidet, in quo ante aliquando inciderit.

Corollarium 2.

853. Si f est numerus affirmatiuus, seu si corpus perpetuo ad planum attrahatur vi positiva; erit m numerus vnitatis maior. Interualum ergo inter duos nodos proximos minus erit quam ang. 180 grad. Quare nodi retrogrediuntur: et nodus sequens ab oppositione praecedentis nodi distabit angulo $\frac{180(m-1)}{m}$ grad.

Corollarium 3.

854. Si corpus perpetuo a plano APQ repellatur fit g numerus negatiuus, atque $m = \sqrt{\frac{g-f}{g}}$. Quare si $g > f$, est m numerus realis sed vnitatis minor; tum igitur nodi in consequentia progrediuntur eo celerius, quo minus f ab g distabit. Atque si $f = g$, tum corpus e nodo egressum nunquam in superficiem APQ reuertetur. At si $f > g$, corpus perpetuo ab hoc plano discedet.

Corollarium 4.

§55. Quia corpus a plano APQ maxime distat, quando fit $(\sqrt{c^2-x^2}-x\sqrt{-1})^{2m} = b^{2m}$: ipsa maxima distantia habebitur, si in valore ipsius z inuento (§47), haec fiat substitutio. Inuenietur autem haec maxima distantia $= \frac{2k}{\sqrt{-1}}$, quae igitur vbique est eadem.

Corollarium 5.

§56. Si hic circulus BQC fuerit projectio orbitae a corpore descriptae in plano APQ, erit anguli inclinationis plani orbitae ad planum APQ tangens $= \frac{2k}{c\sqrt{-1}}$, in locis vbi corpus maxime ab hoc plano distat; seu $= \frac{2k}{c}$ posito k loco $\frac{k}{\sqrt{-1}}$, cum constans k talem debeat habere valorem ad imaginaria euitanda.

Corollarium 6.

§57. Eadem manente hypothese, in locis vbi corpus in planum APQ incidit tangens anguli inclinationis erit $= \frac{dz\sqrt{c^2-x^2}}{cdx}$, existente $(\sqrt{c^2-x^2}-x\sqrt{-1})^{2m} = b^{2m}$. Fiet itaque ista tangens $= \frac{mz(b^{2m} + (\sqrt{c^2-x^2}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2}-x\sqrt{-1})^{2m})c}$
(et loco z suo posito valore) $= \frac{2mk\sqrt{-1}}{c}$ seu
ido-

idoneo loco k valore substituto erit illa tangens $= \frac{2mk}{c}$.

Corollarium 7.

858. Tangens igitur inclinationis orbitae a corpore descriptae ad planum APQ, si corpus a plano APO maxime distat est ad eandem tangentem si corpus in hoc planum incidit ut r ad m . Fiet ergo ut distantia duorum nodorum ad 180 gradus, ita inclinatio orbitae, si corpus a nodis maxime distat, ad inclinationem orbitae a corpore descriptae, si corpus in ipsis versatur nodis.

Scholion.

859. Haec quidem propositio parum utilitatis habere videtur in astronomia, eo quod vim, qua corpus ad punctum fixum A trahitur, distantiae proportionalem faciamus; in corporibus vero coelestibus vis reciproce quadratis distantiarum proportionalis locum habeat. Vfus tamen eius eximius est, si orbitae corporum non multum a circulis differant; nam orbita in circulum abeunte, nihil interest, quomocunque vis centripeta a distantis pendeat. Quamobrem cum orbitae planetarum non multum a circulis discrepent, haec propositio bono cum successu
ad

ad eos motus potest accommodari. Hocque tum maxime est faciendum, vt linea f inueniatur, quae se habeat ad corporis a centro distantiam, vt vis grauitatis ad vim centripetam. Altera vis, quae corpus ad planum datum trahit, quodammodo distantiae proportionalis effici potest; id tamen si non accidat, litera g vt variabilis debet considerari, ex quo vero proxime motus nodorum poterit colligi, inter omnes ipsius g valores quasi medium eligendo. In motu lunae nodorum motus maxime attendi meretur, quippe qui iuxta nostram determinationem fit in antecedentia. Obseruatur autem nodi ab oppositione praecedentis nodi distantia fere $43'$, ita vt fit $\frac{180(m-1)}{m} = \frac{43}{60}$ atque $m = 1 + \frac{43}{10757} = 1 \frac{1}{250}$. Ex quo vis lunam ad planum ecclipticae perpetuo trahens a posteriore potest cognosci.

CAPUT SEXTUM

DE

MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO IN
MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 104.

Theorema.

860.

Si corpus moueatur in medio resistente a quocun-
que potentiis absolutis sollicitatum: vis resisten-
tiae actionem potentiarum absolutarum aliter non
turbat, nisi quod vim tangentialem ex illis or-
tam minuat.

Demonstratio.

Ex capite praecedente satis intelligitur omnes
potentias absolutas resolui posse in duas vires tan-
gentialem et normalem, si quidem motus fit in
eodem plano. At si corpus non in eodem mo-
uetur plano, tum tres vires aequivalentes as-
signari possunt loco quocunque potentiarum sol-
licitantium, quarum vna est tangentialis et duae
normales. Vis autem, quam resistentia in cor-
pus exerit, directio semper congruere ponitur
cum directione corporis (117). Quamobrem vis
resistentiae ad vim tangentialem est referenda, quam

Bbb

im-

imminuit, quia motum corporis retardat; vires vero normales prorsus non afficit. Manifestum igitur est resistantiam potentiarum absolutarum effectum aliter non turbare, nisi quatenus vis tangentialis ex iis orta a resistantia minuitur. Q. E. D.

Corollarium I.

861. Resistentiae igitur effectus totus in alteranda corporis celeritate consistit, neque eius directionem immutat, nisi quatenus virium normalium actio variatur variata celeritate.

Corollarium 2.

862. Nisi igitur praeter resistantiam adsint potentiae absolutae, fieri non potest, ut corpus in linea curua moueatur, sed perpetuo in recta moueri perget, quoad motum suum perdiderit.

Scholion I.

863. In hoc igitur capite, quo motus curvilineos tractabimus, necesse est, ut cum resistantia simul potentias absolutas consideremus; easque tales, quae resolutione praebeant vim normalem, ne in eandem rem capite 4. pertractatam incidamus. Hanc ob rem primo potentiam ad punctum infinite distans tendentem, seu directionem sibi perpetuo parallelam conseruantem considerabimus. Deinde ad vires centripetas progrediemur, aliasque quouis modo dispositas potentias. Denique etiam motus
non

non in eodem plano factos, quales orientur in medio resistente, examini subiiciemus.

Corollarium 3.

864. Si vis tangentialis sit T , et vna seu duae normales N seu N et M , et vis resistentiae R ; canones effectum harum virium continentes, quos in praecedente capite dedimus, etiam hic locum habebunt, si modo in iis loco T ponatur $T - R$.

Scholion 2.

865. Quemadmodum resistentiam, cuius vis a celeritate corporis pendere ponitur, exponi oporteat per legem resistentiae et exponentem in cap. 4. fufe est ostensum. Hoc vero capite varietas resistentiae magnum campum rerum pertractandorum aperiet, quae in capite praecedente locum non inueniebant. Praeterea hanc tractationem ita subdividemus, vt primo ex datis potentiis absolutis et resistentia curuam descriptam et motum corporis in ea determinemus. Deinde si curua et potentia absoluta fuerit data, ex his resistentiam deducemus. Tertio ex data curua et resistentia potentia absoluta datam habens directionem erit inuestiganda. Denique ex data curua, et celeritate corporis in singulis eius punctis et resistentia, potentia absoluta eiusque directio poterit inueniri. Primariam

Bbb 2

autem

autem huius capituli diuisionem motus in eodem plano et non in eodem plano factus constituet.

PROPOSITIO 105.

Problema.

866. *Si corpus moueatur in medio resistente quocunque sollicitatum a potentiis absolutis quibuscunque ita tamen ut motum suum in eodem plano absoluat; definire canones, quos in motu suo corpus obseruat.*

Tabula XI.
Fig. 3.

Solutio.

Describat corpus hac ratione sollicitatum curuam AMB ; sit eius celeritas in M debita altitudini v , et curuae elementum $Mm = ds$. Ponatur porro vis normalis ex omnibus potentiis absolutis orta $= N$, cuius ergo directio erit MN normalis in curuam; vis vero tangentialis ex iisdem potentiis absolutis orta $= T$, cuius directio est MT tangeus curuae in M . Atque vis resistentiae in M sit $= R$. His positis motus corporis definiri debet ex vi normali N et vi tangentiali $T - R$ (864). Sit iam radius osculi in $M = r$, eritque $N = \frac{2v^2}{r}$ (552) et $dv = (T - R) ds$; (cit.). Ex his duabus aequationibus, si eliminetur v , prodibit aequatio naturam curuae AMB exponens, simulque corporis in singulis locis celeritas ex aequatione $N = \frac{2v^2}{r}$ innotescit.

Q. E. I.

Co-

Corollarium I.

867. Erit igitur $v = \frac{Nr}{2}$. Vnde habebitur $dv = \frac{Ndr + rdN}{2}$. Qui valor si in aequatione $dv = (T - R)ds$ substituatur loco dv , et in R ponatur $\frac{Nr}{2}$ loco v ; prodibit aequatio pro curua a corpore descripta.

Corollarium 2.

868. Si in R , v vnicam habuerit dimensionem, id quod accidit, si resistentia est quadratis celeritatum proportionalis; aequatio $dv = (T - R)ds$, poterit separari, ex eaque v determinari. Haecque aequatio cum $v = \frac{Nr}{2}$ coniuncta dabit simpliciorum aequationem pro curua descripta.

Scholion.

869. Praeter hunc casum, quo v vnicam habet dimensionem in R , plurimi dantur alii, quibus aequatio $dv = (T - R)ds$ potest integrari; sed eos euoluere non est opus, cum nihilominus v possit eliminari. Hunc vero casum ideo praecipue notauimus, quia reuera ad fluidorum resistentiam pertinet, et quem propterea prae aliis diligentius examinabimus.

PROPOSITIO 106.

Problema.

870. Tendat vis sollicitans vbiq; normaliter ad rectam positione datam AP ; et moueatur cor-

Tabula XI.
Fig. 4.

Bbb 3

pus

pus in medio quocunque resistente; determinare curvam AMB in qua corpus mouebitur, et ipsum corporis motum.

Solutio.

Sit vis quae corpus in M sollicitat $=P$, cuius ergo directio erit MP. Celeritas corporis in M debeatur alt. v , et vis resistentiae ibi sit $=R$. Capiatur elementum Mm , ductaque mp fit $AP=x$, $PM=y$ et $Mm=ds$. Erit $Pp=Mr=dx$ et $mr=dy$. Porro ducatur tangens MT in eamque ex P perpendicularis PT. His factis vis P resoluetur in normalem $\frac{P \cdot PT}{PM} = \frac{P dx}{ds}$ et tangentialem $\frac{P \cdot MT}{MP} = \frac{P dy}{ds}$. Quia autem haec vis tangentialis motum corporis retardat eius negatiuum est capiendum. Posito igitur radio osculi in M $=r$, erit $\frac{P dx}{ds} = \frac{2v}{r}$ et $dv = -P dy - R ds$ (866). Ex quibus aequationibus tum ipsa curua tum motus corporis poterit inueniri. Q. E. I.

Corollarium I.

871. Posito dx constante est radius osculi $r = -\frac{ds^3}{dx ddy}$. Hanc ob rem habebitur sequens aequatio $P = -\frac{12v ddy}{ds^2}$. Qui valor ipsius P in altera aequatione substitutus dabit aequationem $dv = \frac{2v dy ddy}{ds^2} - R ds$, seu ob $dy ddy = ds dds$ haec $dv = \frac{2v dds}{ds} - R ds$. Quae aequatio locum habet, quaecunque fuerit potentia P, modo eius directio sit MP.

Co-

Corollarium 2.

872. Si resistentiae lex fuerit ratio quaecunque multiplicata celeritatum et exponens resistentiae fit quantitas vtcunque variabilis q ita vt sit R

$$= \frac{v^m}{q^m}, \text{ tum habebitur ista aequatio } dv = \frac{2vdds}{ds} - \frac{v^m ds}{q^m}, \text{ cuius integralis est } v^{1-m} = \frac{(m-1) dx^{2m-2}}{ds^{2m-2}}$$

$$\int \frac{ds^{2m-1}}{q^m dx^{2m-2}}.$$

Corollarium 3.

873. Si in eadem hypothesis fuerit $m=1$, erit $\frac{dv}{v} = \frac{2dds}{ds} - \frac{ds}{q}$, cuius integralis est $lv = 2l\frac{ds}{dx} - \int \frac{ds}{q}$,

seu $e^{\int \frac{ds}{q}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$. Si praeterea resistentia fuerit vni-

formis seu $q=c$, erit $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dx^2}$.

Tempus igitur hoc casu quo arcus AM absolvitur

$$\text{erit} = \int \frac{e^{\frac{s}{c}} dx}{\sqrt{a}}.$$

PROPOSITIO 107.

Problema.

874. Si et potentia et medium resistens sit vni- Tabula XI.
forme, illiusque directio sit MP normalis in rectam da- Fig. 4.
tam AP; medium vero resistat in ratione duplicata cele-
ritatum, aeterminare motum corporis proiecti.

Solu-

Solutio.

Ponatur potentia corpus perpetuo versus AP trahens $=g$ et exponens resistentiae $=c$, reliquae denominationes vero maneant vt ante. Erit igitur $P=g$ et $R=\frac{v}{c}$. Vnde orientur sequentes aequationes $\frac{gdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ seu $gds^2+2vddy=0$ posito dx constante; atque $dv=-gdy-\frac{vds}{c}$. Ex his vero aequationibus coniunctis iam inuenimus $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ (873). Quare cum sit $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$ prodit eliminata v ista aequatio $ge^{\frac{s}{c}}dx^2=-addy$, qua natura curuae descriptae continetur. Cum sit $dsdds=dyddy$ erit etiam $ge^{\frac{s}{c}}dx^2dy=-2adsdds$. Ponatur $dx=ps$, erit $dds=-\frac{dps}{p}$ et $dy=ds\sqrt{(1-pp)}$. His substitutis proueniet ista aequatio $ge^{\frac{s}{c}}ds=\frac{2adp}{p^3\sqrt{(1-pp)}}$, quae ad construendam curuam descriptam sufficit. Aequationis vero huius integralis aequatio est $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{a\sqrt{(1-pp)}}{p^2}-a.l\frac{1+\sqrt{(1-p^2)}}{p}$. Restituto vero $\frac{dx}{ds}$ loco p habetur $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{adyds}{dx^2}-a.l\frac{ds+dy}{dx}$. Quae est aequatio differentialis primi gradus atque simplicior reddi non potest. Q. E. I.

Corollarium I.

875. Pro curua descripta aequatio statim differentialis tertii gradus prodit: Nam ob $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, erit

erit $dv = -gdy + \frac{gds^2 d^3 y}{2ddy^2}$, quibus valoribus in aequatione $dv = -gdy - \frac{vds}{c}$ substitutis prodibit $dsdd$
 $y = c d^3 y$.

Corollarium 2.

876. Sit sinus anguli, quem curua in A cum axe AP constituit $= \mu$, eiusque cosinus $= \sqrt{1 - \mu^2}$ $= v$ et altitudo celeritati in A debita $= b$. Facto ergo $s = 0$ et $ds : dx = 1 : v$, fieri debet $v = b$, habebitur ergo ex $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{ads^2}{dx^2}$ haec $v^2 b = a$, vnde constans a cognoscitur.

Corollarium 3.

877. Porro in aequatione curuae vltima facto $s = 0$ et $ds : dx = 1 : v$ et $ds : dy = 1 : \mu$, inuenietur constans $C = gc + \mu b + v^2 b l^{\frac{1+\mu}{v}}$. Quare pro curua descripta haec orietur aequatio $\frac{gc}{b} (e^{\frac{s}{c}} - 1)$
 $= \frac{\mu dx^2 - v^2 dy ds}{dx^2} + v^2 l^{\frac{1+\mu}{v}} \frac{(1+\mu) dx}{v(dy+ds)}$. Ad celeritatem vero nueniendam inferuit aequatio $e^{\frac{s}{c}} v = \frac{v^2 b ds^2}{dx^2}$.

Corollarium 4.

878. Si fuerit D punctum supremum, erit ibi $dx = ds$ et $dy = 0$. Habebitur ergo $\frac{gc}{b} (e^{\frac{s}{c}} - 1) =$
 $\mu + v^2 l^{\frac{1+\mu}{v}}$ seu $e^{\frac{s}{c}} = \frac{b\mu + gc + v^2 b l^{\frac{1+\mu}{v}}}{gc}$. Ex qua
Ccc
aequa-

aequatione reperitur arcus $AMD = cl$
 $\frac{b\mu + gc + v^2 bl \frac{1+\mu}{v}}{gc}$. Altitudo vero debita cele-
 ritati quam corpus habebit in D erit $\frac{gc + b\mu + v^2 bl \frac{1+\mu}{v}}{v^2 gbc}$.

Corollarium 5.

879. Si in B curva eandem habere ponatur inclinationem ad axem AP quam habuit in A, erit $ds:dx:dy = 1:v:-\mu$. Hinc ergo emerget ista aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{b}} - 1) = 2\mu + v^2 l \frac{1+\mu}{1-\mu}$, ex qua prodit arcus $ADB = cl \frac{2\mu b + gc + v^2 bl \frac{1+\mu}{1-\mu}}{gc}$.

Corollarium 6.

880. Constructio curvae etiam facilis deduci potest ex aequatione $dsddy = cd^3y$. Namque ponatur $dy = pdx$, erit $dpdx\sqrt{1+pp} = cddp$. Porro fiat $dx = \frac{dp}{q}$, erit ob $ddx = 0$; $ddp = \frac{dpdq}{q}$, unde prodibit ista aequatio $dp\sqrt{1+pp} = cdq$, atque $q = \frac{1}{c} \int dp\sqrt{1+pp}$. Sumta igitur abscissa $x = \int \frac{cdp}{\int dp\sqrt{1+pp}}$ erit $y = \int \frac{cpdp}{\int dp\sqrt{1+pp}}$. Hisque respondebit $v = -\frac{cg(1+pp)}{2\int dp\sqrt{1+pp}}$. Unde cognoscitur pro p accipiendam esse quantitatem negativam.

Corollarium 7.

Tabula XI.
Fig. 5.

881. Si corpus in A proiciatur secundum directionem ipsius AP, et potentia tendat deorsum, tota

tota curua AM a corpore descripta cadet infra AP, fietque y seu PM negatiua; atque cum sit $\mu=0$ et $\nu=1$, habebitur pro curua AM ista aequatio $\frac{g^c}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{dyds}{dx^2} - l \frac{dx}{ds+dy}$ (877).

Corollarium 8.

882. Data igitur tangentis in quocunque puncto M inclinatione ad rectam AP seu ratione inter ds , dy et dx , inueniri potest ex hac aequatione longitudo arcus AM.

Scholion.

883. Experimenta docuere aerem corporibus resistere in duplicata celeritatum ratione. Cum igitur vis grauitatis sit vniformis et aer in non nimis altis distantis eandem fere densitatem seruet, casus corporum in aere proiectorum apprime ad hanc propositionem refertur. Determinauimus igitur veram curuam, quam globi ex sclopetis vel tormentis vel alio modo proiecti describunt. Sumitur vulgo pro hac curua parabola, quippe quae in vacuo est proiectoria, et aer tam subtile fluidum esse creditur, vt eius resistentia in computum duci non mereatur. Insensibilis quidem vtique est resistentia aeris, si corpus magnum parua celeritate proiciatur.. Sed longissime a parabola aberrabit proiectoria, si exiguum corpus magna vi proiciatur. His autem in casibus, tametsi hic vera assignata est proiectoria, maxime dolendum est, aequationem tam

esse intricatum, vt vix quicquam ad vsum practicum ex ea possit deduci. *Newtonus* in *Philos.* hoc problema non attigit, neque post eum quisquam tentauit, donec *Keilius* ad hoc problema *Iob. Bernoulli* prouocauerit, etsi ipse solutionem exhibere non potuerit. Dedit autem solutionem non solum *Iob. Bernoullius* in *Act. Lips.* 1719 m. Mai, sed eodem fere tempore *Iac. Hermannus* *Phoronomiae* suae inseruit. Sequens autem problema, in quo resistentia ipsis celeritatibus proportionalis ponitur, tum a *Newtono* in *Princ.* tum a *Hugenio* in tract. de causa grauitatis, est solutum.

PROPOSITIO 108.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 4.

884. Si medii resistentia fuerit vt ipsa corporis celeritas et potentiae directio MP ; praetereaue tam potentia sit vniformis quam medium resistens: determinare curuam, quam corpus proiectum describit, atque celeritatem in singulis locis.

Solutio.

Positis vt in praecedente Prop. potentia vniformi $=g$, exponente medii resistentis $=c$, altitudine celeritati in M debita $=v$, $AP=x$, $PM=y$ et arcu $AM=s$; erit ex vi normali vt ante $gds^2 + 2vddy=0$, sumto dx pro constante. Ex vi tangentiali vero ob resistentiam hoc casu $=\frac{v}{\sqrt{c}}$ habebitur ista aequatio $dv=-gdy-\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$. Ex his aequationibus

con-

coniunctis per §. 872 vbi fit $q=c$ et $m=\frac{1}{2}$ obtine-
 tur $Vv = -\frac{ds}{2ax} \int \frac{dx}{\sqrt{c}} - \frac{ds\sqrt{a}}{2dx} - \frac{xds}{2dx\sqrt{c}} - \frac{ds(\sqrt{ac-x})}{2dx\sqrt{c}}$, eritque ergo
 $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac-x})^2}{4cdx^2}$. Vnde pro curua descripta prouenit
 ista aequatio $2gcdx^2 = -ddy(\sqrt{ac-x})^2$ seu $-\frac{ddy}{dx} =$
 $\frac{2gcdx}{(\sqrt{ac-x})^2}$ cuius integralis est $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac-x}} + k$. At-
 que iterum integrando $y = kx - 2gc\sqrt{\frac{vac}{ac-x}}$. Vnde
 simul constabit v , ex aequatione $v = \frac{ds^2(\sqrt{ac-x})^2}{4cdx^2}$.
 Q. E. I.

Corollarium I.

885. Pro curua descripta statim haec
 aequatio differentialis tertii gradus prodiisset, si ex
 aequatione $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$, eiusque differentiali $dv = -$
 $gdy + \frac{gds^2d^2y}{2dd^2y^2}$ valores in aequatione $dv = -gdy - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$
 fuissent substituti. Prouenisset enim $d^3y\sqrt{gc} = -$
 $ddy\sqrt{-2ddy}$.

Corollarium 2.

886. Si corpus in A proiciatur celeritate
 altitudini b debita, et sinus anguli, quem tangens
 in A cum AP constituit sit $=\mu$ eius cosinus $V(1-$
 $\mu^2) = \nu$, erit in puncto A, $b = \frac{a}{4\nu^2}$ seu $a = 4\nu^2b$,
 ex quo constans indefinita a determinatur.

Corollarium 3.

887. Aequatio porro $\frac{dy}{dx} = -\frac{2gc}{\sqrt{ac-x}} + k$ ad
 punctum A translata dabit $\frac{y}{v} = -\frac{2g\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + k$
 Ccc 3

$= -\frac{g\sqrt{c}}{v\sqrt{b}} + k$ ob $a = 4v^2b$. Hinc inuenietur indifinita quantitas $k = \frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{v\sqrt{b}}$.

Corollarium 4.

888. Pro curua igitur descripta inuenietur ista aequatio differentialis $dy = \frac{2\mu y b dx \sqrt{c} - \mu x dx \sqrt{b} - g x dx \sqrt{c}}{2v^2 b \sqrt{c} - vx \sqrt{b}}$
 $= \frac{\mu dx}{v} - \frac{g x dx \sqrt{c}}{2v^2 b \sqrt{c} - vx \sqrt{b}}$. Ex qua deducitur $\frac{ds^2}{dx^2} =$
 $\frac{(2v b \sqrt{c} - x \sqrt{b})^2 - 2\mu g x (2v b \sqrt{c} - x \sqrt{b}) + g^2 c x^2}{v^2 (2v b \sqrt{c} - x \sqrt{b})^2}$. Quare cum sit
 $v = \frac{ds^2 (2v b \sqrt{c} - x)^2}{4cdx^2}$. Reperietur tandem $v =$
 $\frac{2v b \sqrt{c} - x \sqrt{b})^2 - 2\mu g x (2v b \sqrt{c} - x \sqrt{b}) + g^2 c x^2}{4v^2 b c}$.

Corollarium 5.

889. Aequatio autem integralis pro curua quaesita erit $y = \frac{\mu x \sqrt{b} + g x \sqrt{c}}{v \sqrt{b}} - 2gcl \frac{2v \sqrt{bc}}{2v \sqrt{bc} - x}$. Ex qua constructio curuae per logarithmicam facile perficitur.

Corollarium 6.

890. Tempus etiam, quo arcus AM absoluitur facile definitur. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{2v\sqrt{bc} - x}$ erit tempus per arcum AM $= 2\sqrt{cl} \frac{2v\sqrt{bc}}{2v\sqrt{bc} - x}$.

Corollarium 7.

891. Apparet etiam ex aequatione pro curua AM eam habere assymptoton: Nam cum x non possit esse maior quam $2v\sqrt{bc}$; si capiatur AE $= 2v\sqrt{bc}$ erit applicata in E $= -\infty$ ideoque assymptotos curuae AMDB. Intelligitur hoc etiam ex tempore

re quod fit infinitum antequam corpus ad perpendiculararem per E ductam peruenit.

Corollarium 8.

892. Punctum summum D reperietur si fiat $dy = 0$. Tum autem inuenitur $x = \frac{2\mu v b \sqrt{c}}{\mu \sqrt{b} + g \sqrt{c}} = AC$. Deinde cum sit in D $ds = dx$ et $2v \sqrt{bc} - x = \frac{2vgc \sqrt{b}}{\mu \sqrt{b} + g \sqrt{c}}$ erit altitudo debita celeritati in puncto D $= \frac{v^2 g^2 bc}{(\mu \sqrt{b} + g \sqrt{c})^2}$ et ipsa celeritas in D $= \frac{vg \sqrt{bc}}{\mu \sqrt{b} + g \sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

893. Applicata vero CD seu distantia puncti D ab axe AP erit $= 2\mu \sqrt{bc} - 2gc l \frac{\mu \sqrt{b} + g \sqrt{c}}{g \sqrt{c}}$ et tempus quo corpus ex A in D peruenit erit $= 2\sqrt{cl} \frac{\mu \sqrt{b} + g \sqrt{c}}{g \sqrt{c}}$.

Scholion.

894. Reduci igitur potest casus, quo corpus ex A oblique proiicitur ad casum, quo ad directionem potentiae normaliter ex D proiicitur. Cognita enim celeritate, qua corpus in A proiicitur, et directione inueniri poterit punctum D in quo tangens ipsi AC est parallela, et celeritas corporis in D. Quare ad meliorem huius motus cognitionem expedit motum tanquam in D incipientem considerari, quem in finem sequentem propositionem adiecimus.

PROPOSITIO 109.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 5.

895. Si corpus ubique aequaliter deorsum attrahatur, atque in A secundum directionem horizontalem AP data velocitate proiciatur in medio uniformi, quod in simplici celeritatum ratione resistat: determinare curuam AM, quam corpus describet et motum corporis in hac curua.

Solutio.

Cum propositio haec sit casus specialis praecedentis, maneat omnes denominationes, ut ante. Fiet autem y seu applicata PM negativa, quia curua AM infra AP cadet, atque erit $\mu=0$ et $\nu=1$. Existente ergo g potentia sollicitante, c exponente resistentiae, b altitudine celeritati in A debita, v altitudine celeritati in M debita, et $AP=x$ et $AM=s$; habebitur aequatio pro curua AM haec differentialis $dy = \frac{g x dx \sqrt{c}}{2 b \sqrt{c-x} \sqrt{b}} (888)$, atque haec integralis $y = \frac{g x \sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 2 g c l \frac{2 \sqrt{bc}}{2 \sqrt{bc-x}} (889)$. Porro erit $v = \frac{(2b\sqrt{c-x}\sqrt{b})^2 + g^2 c x^2}{4 b c} (888)$. Atque tempus quo arcus AM percurritur $= 2 \sqrt{c} l \frac{2 \sqrt{bc}}{2 \sqrt{bc-x}} (890)$. Quae aequationes tam curuam AM quam motum in hac curua determinant. Q. E. I.

Corollarium I.

896. Si $l \frac{2 \sqrt{bc}}{2 \sqrt{bc-x}}$ in seriem conuertatur prodibit $\frac{x}{2 \sqrt{bc}} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 bc} + \frac{x^3}{3 \cdot 8 bc \sqrt{bc}} + \frac{x^4}{4 \cdot 16 b^2 c^2} + \text{etc.}$ Quamobrem

obrem erit $y = \frac{g x^2}{4b} + \frac{g x^3}{2b \sqrt{c}} + \frac{g x^4}{3 2b^2 c} + \text{etc.}$ et tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{x^2}{4b\sqrt{c}} + \frac{x^3}{12bc\sqrt{b}} + \frac{x^4}{32b^2c\sqrt{c}} + \text{etc.}$

Corollarium 2.

897. In vacuo igitur quando c fit infinite magnum erit $y = \frac{g x^2}{4b}$; quo igitur casu curua AM abit in parabolam, cuius parameter est $\frac{4b}{g}$, et tempus quo arcus AM absoluitur est $= \frac{x}{\sqrt{b}}$, atque $v = b + \frac{g^2 x^2}{4b} = b + gy$, quemadmodum ex Prop. 72. colligere licet.

Corollarium 3.

898. Sumta $AE = 2\sqrt{bc}$ erit verticalis EF curuae AM assymtotos. Quare si ex M in EF demittatur perpendicularum MQ, erit $MQ = PE = 2\sqrt{bc} - x$, et $EQ = y$. Ponatur $MQ = z$, erit $y = -2cg + \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 1gc\sqrt{\frac{2\sqrt{bc}}{z}}$, et tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\sqrt{\frac{2\sqrt{bc}}{z}}$.

Corollarium 4.

899. Punctum igitur E per quod transit assymtotos EF tantum distat a puncto A, quousque corpus ex A si nulla adesset potentia sollicitans g , posset pertingere, antequam motum omnem amitteret. Atque simili modo patet tempus per AM aequale esse tempori per AP potentia g euanescen-

te. Intelligitur hoc ex eo, quod g in his expressi-
onibus non inest.

Corollarium 5.

900. Ducatur ex M tangens MT , erit $QT =$
 $-\frac{zdy}{z} = 2gc - \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Per M ducatur MR constituens
cum EF angulum, cuius tangens est $= \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$. Quo fa-
cto erit $QR = \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$; ideoque $RT = 2gc$.

Corollarium 6.

901. Si igitur MT consideretur vt applicata
curvae AM ad axem EF obliquangula; erit curva
 AM ob subtangentem RT constantem logarithmica
obliquangula subtangentis $= 2gc$, et tangens an-
guli inclinationis applicatarum MR ad asymtoton
 $EF = \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$.

Scholion.

902. Proiectoriam in hac resistantiae et vis
sollicitantis hypothesi non solum ope logarithmi-
cae construi posse, sed ipsam esse logarithmicam
obliquangulam obseruauit *Iob. Bernoulli* in Actis
Lips. 1719. Cuius solutio cum hac nostra egregie
conuenit.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tabula XI.

Fig. 4.

903. Posita potentiae absolutae uniformis di-
rectione MP verticali et medio, quod etiam unifor-
me

me ponitur, resistente in quacunque multiplicata celeritatum ratione: determinare curuam AM, quam corpus proiectum describit.

Solutio.

Manente AP=x; PM=y, Mm=ds, celeritate in M=Vv, potentia =g, exponente medii resistentis =c, resistat medium in ratione 2m cupli-
cata celeritatum; eritque $R = \frac{v^m}{c^m}$, et P=g (870).

Quare habebuntur istae aequationes $gds^2 = -2vddy$

et $dv = -gdy - \frac{v^m ds}{c^m}$, ex quibus tum curua AM tum

motus corporis in curua determinatur. Aequatio

autem $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$ dat $dv = -gdy + \frac{gds^2 d^3y}{2aay^2}$, et $v^m = \frac{g^m ds^{2m}}{2^m (-ddy)^m}$. Hinc eliminata v peruenitur ad

istam aequationem $c^m d^3y = -\frac{g^{m-1} ds^{2m-1}}{2^{m-1} (-duy)^{m-2}}$ pro

curuae natura. Ad hanc construendam ponatur $dy = pdx$, eritque $ddy = dx dp$, $d^3y = dx ddp$ et $ds = dx \sqrt{1+p^2}$. Quibus substitutis habebitur $2^{m-1} c^m (-$

$dp)^{m-2} ddp = -g^{m-1} dx^m (1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ponatur poro

$dx = \frac{dq}{q}$, eritque $ddp = \frac{d p dq}{q}$. Vnde habebitur

$2(-2)^{m-2} c^m q^{m-1} dq = -g^{m-1} dp (1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$, et inte-
Ddd 2 gran-

grando $q^m = -\frac{mg^{m-1}}{2(-2)^{m-2}c^m} \int dp (1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ex qua aequatione datur q in p , quo inuento sumta abscissa $x = \int \frac{dp}{q}$, est respondens applicata $y = \int \frac{pdp}{q}$. Atque celeritati debita altitudo $v = -\frac{g(1+p^2)}{2q}$; et tempus quo arcus AM absolvitur i. e. $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dp\sqrt{2}}{\sqrt{-gq}}$.
Q. E. I.

Corollarium I.

904. Perspicuum est quoties $2m$ fuerit vel numerus affirmatiuus impar vel numerus negatiuus par valorem ipsius q algebraice per p posse exhiberi.

Corollarium 2.

905. Si resistentia est constans seu $m=0$, et corpus initio in A proiectum sit celeritate \sqrt{b} secundum horizontalem AP, erit applicata PM, y negatiua, ideoque habebuntur hae aequationes $gds^2 = 2vddy$ et $dv = gdy - ds$ seu $v = b + gy - s$. Vnde prodibit haec aequatio $\frac{gds^2}{2ddy} = b + gy - s$.

Corollarium 3.

906. Commodius autem hic casus tractabitur, si in aequatione differentiali tertii gradus ponatur $m=0$ prodit enim $gd^3y = -\frac{2dly^2}{ds}$ seu substitutionibus per p et q factis haec $\frac{gdq}{q} = -\frac{2dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, cuius integralis est $glq = 2l\frac{\sqrt{(1+p^2)}-p}{a}$, seu obseruata homo-
ge-

geneitate $aq = (V(1+p^2)-p)^{\frac{2}{g}} = \frac{adp}{dx}$. Hinc habebitur $dx = \frac{adp}{(V(1+pp)-p)^{\frac{2}{g}}}$. Quae denuo integra-

ta dat $2x = \frac{ga}{(2+g)(V(1+pp)-p)^{\frac{2+g}{g}}} +$

$\frac{ga}{(2-g)(V(1+pp)-p)^{\frac{2-g}{g}}} + k$. Hincque reperitur

$y = \int p dx$ et absoluta integratione $4y = \frac{ga}{(2+2g)(V(1+pp)-p)^{\frac{2+2g}{g}}} + \frac{ga}{(2-2g)(V(1+pp)-p)^{\frac{2-2g}{g}}} + i$.

Patet igitur hanc curuam fore algebraicam nisi sit g vel 1 vel 2 .

Scholion.

907. Aequè late patet *Iob. Bernullii* solutio proiectoriarum in medio resistente quam dedit in Act. Lips. A. 1719 Mai. ac haec nostra solutio ubi etiam constructionem generalem pro his curuis dedit. Antequam autem hanc potentiae vniformis hypothesin relinquamus, problemata inuersa soluemus, quibus determinabimus resistantiam, quae efficit vt corpus in hac potentiae vniformis et deorsum tendentis hypothesi datam curuam describat. Haec enim materia tum a *Newtono* in Phil. tum a *Iob. Bernoullio* in Act. Lips. A. 1713 pluribus est pertractata; ubi Viri acutissimi multa eximia notauerunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 6.

908. *Posita potentia absoluta g uniformi et deorsum tendente, determinare resistantiam in singulis locis M , qua fiat, ut corpus datam curvam BAM describat.*

Solutio.

Ponatur ut ante $AP = QM = x$, $PM = AQ = y$, et elementum arcus $AM = ds$. Deinde fit celeritas in $M = \sqrt{v}$ et resistantia in $M = R$. His igitur comparatis cum Prop. 106. fiet $P = g$, et y negative debet accipi; eritque $gds^2 = 2vddy$, sumto dx constante (871) et $dv = gdy - Rds$ (870). Ex illa aequatione autem est $v = \frac{gds^2}{2ady}$ ideoque $dv = gdy - \frac{gds^2d^3y}{2ady^2}$. Coniunctis igitur his aequationibus prodibit $R = \frac{gds^3y}{2ad^2y^2}$. Quare cum curva sit data, ex eius aequatione reperietur finitus valor ipsius R , ideoque innotescit resistantia Q. E. I.

Corollarium I.

909. Erit igitur vis resistantiae in M ad vim sollicitantem g ut dsd^3y ad $2ddy^2$. Seu posito radio osculi in $M = r$, ob $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ erit $\frac{dsd^3y}{2ad^2y^2} = \frac{3dsdy - dxdr}{2ds^2}$. Quare erit $g : R = 2ds^2 : 3dsdy - dxdr$.

Corollarium 2.

910. Altitudo generans celeritatem in M nempe v ex ipsa curva determinatur est enim

$$v =$$

$v = \frac{g ds^2}{2ddy}$. Seu introducto radio osculi r ob $\frac{ds^2}{ddy} = \frac{r dx}{ds}$ erit $v = \frac{gr dx}{2ds}$.

Corollarium 3.

911. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione, exponens vero resistentiae sumatur incognitus q erit $R = \frac{v}{q} = \frac{g ds^2}{2qddy}$. Cum igitur inuentum sit $R = \frac{g ds d^3y}{2dd^3y^2}$; inuenietur medii resistentis exponens $q = \frac{dsddy}{d^3y}$. Similique modo pro aliis medii resistentis hypothesibus inueniri potest medii resistentis exponens.

Corollarium 4.

912. Introducto ad q determinandum radio osculi r , erit $\frac{d^3y}{ddy} = \frac{ddy(3dsdy - dxdr)}{ds^3} = \frac{3dsdy - dxdr}{rdx}$. Consequenter fiet $q = \frac{rdxds}{3dsdy - dxdr}$. Cognito igitur radio osculi r tam R quam q per differentialia primi gradus determinabuntur.

Corollarium 5.

913. Si curua AM fuerit parabola, cuius axis est verticalis AC, quia in ea est $d^3y = 0$, prodibit quoque resistentia $R = 0$. Ex quo cognoscitur parabolam in vacuo describi posse a corpore uniformiter deorsum tracto, quemadmodum cuique fatis constat.

Co-

Corollarium 6.

914. Si curua fuerit parabola quaecunque superioris ordinis ita ut sit $a^{n-1}y = x^n$, erit $dy = \frac{nx^{n-1}dx}{a^{n-1}}$ et $ds = \frac{dx \sqrt{(a^{2n-2} + n^2 x^{2n-2})}}{a^{n-1}}$.

Porroque ob dx constans $ddy = \frac{n(n-1)x^{n-2}dx^2}{a^{n-1}}$

et $d^3y = \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3}{a^{n-1}}$. Quare fit

et $R = \frac{(n-2)g \sqrt{(a^{2n-2} + n^2 x^{2n-2})}}{3n(n-1)x^{n-1}}$. Atque

posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae $q = \frac{x \sqrt{(a^{2n-2} + n^2 x^{2n-2})}}{(n-2)a^{n-1}}$.

Scholion.

915. Alia exempla curuarum, quae loco A M assumi possunt hic non adiungo; sed iis sequentes propositiones destino, cum diligentius examinari mereantur. Considerabo autem praecipue circulum et hyperbolam cum hae curvae a Viris citatis maxime sint tractatae.

PROPOSITIO II2.

Problema.

Tabula XI.
Fig. 6.

616. Posita vi absoluta g uniformi et perpetuo deorsum trabente; inuenire resistentiam, quae faciat

ciat ut corpus libere in peripheria circuli BAM D moueatur.

Solutio.

Sit radius circuli $AC = a$, erit $x^2 = 2ay - y^2$, et radius osculi in $M = a = MC$. Quare ob $dr = 0$ erit $g : R = 2ds : 3dy$. Est vero $ds : dy = a : x = AC : QM$. Hanc ob rem erit $g : R = 2AC : 3QM$ seu $R = \frac{3g \cdot QM}{2AC}$. Altitudo vero generans celeritatem in M erit $= \frac{gdx}{2ds} = \frac{g \cdot QC}{2}$. At si resistentia quadratis celeritatum proportionalis ponatur erit exponens resistentiae $q = \frac{adx}{3dy} = \frac{a \cdot QC}{3QM}$. Q. E. I.

Corollarium I.

917. Dum corpus per arcum BA ascendit ob QM tum existentem negativam, erit quoque resistentia per BA negatiua; seu motus corporis per CA a medio accelerabitur vi tangentiali $\frac{3g \cdot QM}{2AC}$.

Corollarium 2.

918. Resistentia vero in puncto A, quia QM euanescit, erit nulla; corpus igitur in A tanquam in vacuo mouebitur. In puncto vero D resistentia erit ad potentiam g in fesqui altera ratione. In B vero tantundem sursum a resistentia sollicitabitur.

Corollarium 3.

919. Cum igitur in B et D directio vis resistentiae cum directione potentiae g conueniat; Corpus in B sursum vrgebitur vi $\frac{1}{2}g$; in A deorsum trahetur a vi g , et in D sursum iterum a vi $\frac{1}{2}g$.

Corollarium 4.

920. Quia $\frac{QM}{AC}$ exprimit sinum anguli ACM posito radio $=1$, erit resistentia in M $=\frac{3}{2}g \sin. ACM$, seu resistentia vbique est vt sinus anguli ACM, quo corpus ab A declinauit.

Corollarium 5.

921. Porro est $\frac{a.QC}{QM}$ tangens arcus MD. Quare posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae q aequalis tertiae parti cotangentis arcus AM.

Corollarium 6.

922. Cum altitudo debita celeritati in M fit $=\frac{g.QC}{2}$; erit celeritas in A $=\sqrt{g \cdot \frac{AC}{2}}$; in B vero et D erit celeritas $=0$. Quia igitur corpus in B reuera sursum pellitur vi $=\frac{g}{2}$, mirum non est corpus in B sursum moueri incipere.

Corollarium 7.

923. Corpus igitur tam in quadrante BA quam AD in loco aequae distitis a puncto A aequales
ha-

habet celeritates. Infra vero horizontalem BD corpus peruenire non potest ob QC negatiuam, quo casu celeritas fit imaginaria.

Scholion.

924. Quorsum autem corpus, cum in D peruenerit, sit progressurum, facile ex allatis colligi potest. Nam cum celeritas in D sit $= 0$ et corpus in D sursum vrgeatur vi $\frac{1}{2}g$, perspicuum est corpus iterum sursum moueri debere. Eodem autem modo iterum per arcum DMA ascendet, quo initio per BA ascendit, quia tam in D quam in B vi $= \frac{1}{2}g$ sursum vrgetur. Hoc vero mirabile in hoc motu occurrit, quod corpus in B quiescens sursum pellatur et nihilominus in curua moueatur, etiamsi nulla vis adesse videatur, quae corporis directionem quam in E sursum accepit, posset inflectere. Sed ad hoc respondeo vis in B directionem non perfecte sursum tendere, sed infinite parum a vera verticali aberrare, id quod sufficit ad motum obliquum producendum. Directio enim vis resistentiae in B seu potius vis accelerantis est elementum peripheriae circuli in B insistentis, quod non perfecte est recta verticalis, sed infinite parum inclinata ad BC. Ceterum haec nostra egregie conueniunt cum iis quae Cel. *Bernoulli* dedit in Act. Lips. A. 1713 et quae sunt in *Newtoni* Princ. Phil. posterioribus editionibus. In prima enim editione error in solutione

nem irrepsit, quo inductus fuit, ut rationem g ad R statueret aequalem rationi AC ad QM . Motus autem de hoc a *Bernoullio* in sequentibus editionibus hunc lapsum emendauit.

PROPOSITIO II3.

Problema.

Tabula XII.
Fig. I.

925. Posita ut ante vi absoluta g uniformi et deorsum trabente; inuenire vim resistentiae, qua efficitur ut corpus in hyperbola NAM axem CAQ verticalem habente libere moueri possit.

Solutio.

Sit C centrum hyperbolae et semiaxis transversus $AC = a$, semiaxis vero coniugatus sit $= c$. Ponatur $CQ = t$ et $QM = AP = x$; eritque ex natura hyperbolae $c^2 t^2 = a^2 x^2 + a^2 c^2$. Sumta autem $PM = AQ = y$ erit $y = t - a$, et $dy = dt$, $d^2 y = d^2 t$ atque $d^3 y = d^3 t$. Ex aequatione vero habebitur $t = \frac{a\sqrt{(x^2+c^2)}}{c}$ et $dt = \frac{ax dx}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$, ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Porro fiet $ddt = ddy = \frac{ac dx^2}{(x^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$.

et $d^3 t = d^3 y = -\frac{3acx dx^3}{(x^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus erit $\frac{d^3 y}{ddy}$

$= -\frac{3x dx}{x^2+c^2}$ et $\frac{d^3 y}{ddy^2} = -\frac{3x\sqrt{(x^2+c^2)}}{ac dx}$. Consequenter pro-

proueniet resistentia $R = -\frac{3gx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{2ac^2}$ atque
 $v = \frac{g(c^4+c^2x^2+a^2x^2)\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac^3}$. Resistentia vero qua-
 dratis celeritatum proportionali posita erit ex-
 ponens resistentiae $q = -\frac{\sqrt{(x^2+c^2)}(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}{3cx}$.
 Q. E. I.

Corollarium I.

926. Ducta tangente MT erit $QT = \frac{ax^2}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$
 et $MT = \frac{x\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Consequenter prodibit
 $R = -\frac{3g.MT.\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac} = -\frac{3g.CO.MT}{2a^2}$ seu $R : g = -3 \cdot$
 $CQ.MT : 2.AC^2$.

Corollarium 2.

927. Quia resistentia R inuenitur negatiua,
 indicio id est descensum, per AM in hyperbola fieri
 non posse in medio resistente, sed requiri vt cor-
 pus a medio promoueatur. At dum corpus per
 arcum NA ascendit, quia fit ds negatiuum, resi-
 stentia R erit affirmatiua. Hanc ob rem si corpus est
 in N, erit resistentia $R = \frac{2g.CO.NT}{2\Delta C^2}$.

Corollarium 3.

928. Ex natura hyperbolae est $CQ : AC =$
 $AC : CT$. Itaque erit resistentia in N seu R
 $= \frac{3g.NT}{2CT}$. Vel erit resistentia R ad potentiam ab-
 solutam g vt 3NT ad 2CT. In vertice ergo
 A resistentia euanescit, crescitque quo magis N
 ab A distat.

Corollarium 4.

929. Altitudo debita celeritati corporis in M vel N, est $= \frac{g \cdot CQ^2 \cdot MT^2}{2 \cdot AC^2 \cdot QT}$ vti ex valore ipsius v et natura hyperbolae facile deducitur. Cum autem sit $MT=NT$ et $CQ \cdot NT = \frac{2R \cdot AC^2}{3g}$, erit $v = \frac{2R^2 \cdot AC^2}{9g \cdot QT}$.

Corollarium 5.

930. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis et exponens resistentiae sit q , erit $R = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$ et $v = R^2 q$. Quare inuenietur $q = \frac{2AC^2}{9g \cdot QT}$. Hac igitur hypothesi exponens erit reciproce vt subtangens QT.

Corollarium 6.

931. At si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis sitque exponens resistentiae q erit existente corpore in N hic exponens $q = \frac{NT \cdot CQ}{3 \cdot TQ}$. Seu ducta ex C parallela CR tangenti NT occurrens applicatae QM productae in R erit $q = \frac{CR}{3}$.

Scholion.

932. Quod ante in circulo et nunc in hyperbola obseruauimus resistentiam in altero arcu fieri affirmatiuam in altero negatiuam, id in omnibus curuis circa supremum punctum A duos arcus similes et aequales vt AN et AM habentibus locum ob-

ti-

tinet. Nam cum generaliter pro arcu AM sit resistētia $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, quia in arcu AN sit ds negatiuum erit in N resistētia $R = -\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, ita vt resistētia in N sit negatiuum resistētiaē in M. Quare cum in rerum natura non detur resistētia negatiua, qua motus corporis acceleratur, fieri non potest, vt corpus in medio resistente curuam describat, quae circa summum punctum A habeat duos ramos similes et aequales. Altitudo vero generans celeritatem tam in M quam in N est eadem, eius enim valor $\frac{gds^2}{2ddy}$ non mutatur, etiam si ds fiat negatiuum. Cum igitur istius modi curuae a *Newtono* ideo sint consideratae, vt aliquam erueret, pro qua medii resistētis densitas non multum variaret; seu nostro tractandi modo in qua exponens resistētiaē vbique fere sit eiusdem valoris; quo talem curuam pro proiectoria in medio resistēti vniformi habere posset sine sensibili errore; alias curuas non diametro verticali praeditas cum *Newtono* considerabimus, cuius modi sunt hyperbolae affymtoton verticalem habentes, quippe quae propius accedunt ad logarithmicam, quae a corpore in medio resistēte in simplici celeritatum ratione eoque vniformi describitur. In alia enim resistētiaē hypothesi *Newtonus* proiectorias non determinauit, sed contentus fuit veris proximas assignare. Quod institutum, cum verae proiectoriae a nobis datae tam sint implicatae, vt vix quicquam ex iis ad praxin possit deduci, etiam sequemur.

PRO-

PROPOSITIO II4.

Problema.

Tabul. XII.

Fig. 2.

933. Sit curva NM hyperbola cuiuscunque gradus alteram habens asymptoton CP verticalem, determinare resistantiam, quae efficiat ut corpus perpetuo vi g deorsum sollicitatum in hac hyperbola possit moveri.

Solutio.

Consideretur asymptotos CP tanquam axis, ad eumque ex M normalis ducatur MP. Posita CP = y et MP = x, quae supra generaliter tradidimus haec locum habebunt, si modo ibi dx sumatur negativum. Sit RC altera asymptotos et C centrum hyperbolae; sinus ang. RCP = α , eiusque cosinus $\sqrt{1-\alpha^2} = \xi$. Erit ergo producta PM in R, PR = $\frac{\alpha y}{\xi}$ et CR = $\frac{y}{\xi}$. Ex M ducatur MQ parallela asymptoto CR, erit MQ = $\frac{x}{\alpha}$ et PQ = $\frac{\xi x}{\alpha}$; ideoque CQ = $\frac{\alpha y - \xi x}{\alpha}$. At ex natura hyperbolarum erit $a^n = \frac{x^{n-1}(\alpha y - \xi x)}{a^n}$, atque hinc $y = \frac{\xi x}{\alpha} + \frac{\alpha^{n-1} a^n}{x^{n-1}}$ et $dy = \frac{\xi dx}{\alpha} - \frac{(n-1)\alpha^{n-1} a^n dx}{x^n}$. Ducta tangente MT erit PT = $-\frac{x dy}{\alpha x} = -\frac{\xi x}{\alpha} + \frac{(n-1)\alpha^{n-1} a^n}{x^{n-1}}$, MT = $\frac{x ds}{dx}$, ita ut sit $ds = \frac{MT \cdot dx}{x}$. Hoc vero casu quo x in altera parte sumitur fit MT

ne-

negatiua. Porro ob dx constans erit $d^2 y = \frac{n(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx^2}{x^{n+1}}$ et $d^3 y = \frac{(n+1)(n-1)n\alpha^{n-1}a^n dx^3}{x^{n+2}}$

Ex his oritur $\frac{g ds d^3 y}{2 d d y^2} = - \frac{g(n+1)x^{n-1} \cdot MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$

qui valor facto MT negatiuo aequatur resistentiae

$R = \frac{g(n+1)x^{n-1} \cdot MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ (908).

atque altitudo debita celeritati in M seu $v = \frac{g x^{n-1} \cdot MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$.

Si medium resistere ponatur in ratione $2m$ *cuplicata* ratione celeritatum et exponens resistentiae sit q , erit $R = \frac{v^m}{q^m}$ ideoque $q = \frac{v}{R^{\frac{1}{m}}}$

Ex quo fiet $q = \frac{g^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}} \cdot MT^{\frac{2m-1}{m}}}{2^{\frac{m-1}{m}} (n^2-n)^{\frac{m-1}{m}} (n+1)^m \alpha^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}} a^{\frac{n(m-1)}{m}}}$

seu $q^m = \frac{g^{m-1} x^{(m-1)(n-1)} M T^{2m-1}}{2^{m-1} (n^2-n)^{m-1} (n+1) \alpha^{(m-1)(n-1)} a^{n(m-1)}}$

Q. E. I.

Corollarium I.

934. Quia est $x^{n-1} = \frac{\alpha^n a^n}{\alpha y - \beta x}$, erit resistentia

$R = \frac{g(n+1)\alpha \cdot MT}{2n(n-1)(\alpha y - \beta x)} = \frac{g(n+1)MT}{2n(n-1)CQ}$. Vnde erit resistentia R ad potentiam g vt $(n+1)MT$ ad Fff 2n(n

$2n(n-1)CQ$. Simili modo hoc loco x^{n-1} valore substituto erit $v = \frac{g \cdot MT^2}{2n(n-1)CQ}$ et $q^m = \frac{g^{m-1} MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)CQ^{m-1}}$.

Corollarium 2.

935. Descendente corpore in infinitum fiet $x=0$, et $MT=PT = \frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, euanescente x . In profunditate ergo infinita erit $R = \frac{g(n+1)}{2n}$, ideoque finitae magnitudinis, at erit $v = \frac{g(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{2nx^{n-1}}$. Quare cum necessario fit $n > 1$, euanescente x fiet corporis celeritas infinitae magnae.

Corollarium 3.

936. Posita igitur resistentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, in profunditate infinita, debet etiam q esse infinite magna; his itaque locis corpus in vacuo mouebitur. Ex quo sequitur quo magis corpus descendat eo minorem fore resistentiam, seu potius medium eo rarius.

Corollarium 4.

937. In hyperbola appolloniana fit $n = 2$. Pro hac igitur curua inuenitur $R = \frac{3gx \cdot MF}{4aa^2}$.

$$= \frac{3g \cdot MT}{4 \cdot CQ}, \text{ et } \psi = \frac{g \cdot MT^2}{4 \cdot CQ}, \text{ atque } q^m = \frac{g^{m-1} \cdot M T^{2m-1}}{3 \cdot 2^{2m-2} \cdot C Q^{m-1}}.$$

Corollarium 5.

938. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis, erit in omnibus his hyperbolis exponens resistentiae directe vt CQ, ob $m = \frac{1}{2}$ hoc casu. Hac igitur resistentiae hypothefi corpus omnes hyperbolas poterit libere describere.

Corollarium 6.

939. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione vt fit $m = 1$, erit exponens resistentiae in $M = \frac{MT}{n+1}$. Quo magis igitur MT variatur, eo magis quoque medium erit difforme.

Corollarium 7.

940. Tempus praeterea quo elementum Mm describitur seu $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \frac{\sqrt{2} ddy}{\sqrt{g}}$. Tempus igitur, quo corpus in M vsque peruenit, est vt $\int \frac{dx}{\frac{dx}{n+1}}$ i. e. vt

$$C - \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}, \text{ seu potius vt } \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}} - C. \text{ Quare tem-}$$

pus, quo corpus ex N in M peruenit, erit vt $\frac{1}{MP^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{NP^{\frac{n-1}{2}}}$.

Corollarium 8.

950. In parabola igitur appolloniana in qua $n=2$ erit tempus, quo corpus ab N ad M peruenit vt $\sqrt{NP} - \sqrt{MP}$ ob NP.MP constans nempe $=\frac{aa^2}{g}$.

Scholion.

951. Ex his manifestum est corpus in medio resistente vniformi huiusmodi hyperbolas describere non posse, cum exponens resistantiae nimium sit variabilis, quippe qui tandem fit infinite magnus. Quamobrem *Newtoni* institutum, quo has hyperbolas loco verarum proiectoriarum in medio resistente vniformi substituere voluit probari non potest. In medio enim secundum quadrata celeritatum resistente, exponens est vt tangens MT, quae tam descendendo, quam ad punctum N regrediendo vehementer variatur. Intelligi etiam haec inconuenientia potest ex celeritate, quae descendendo in infinitum crescit, cum tamen in medio vniformi non vltra datum terminum crescere queat. Praeterea non satis liquet in resistantiae quadratis celeritatum proportionalis hypotesi curuam descriptam habere asynton verticalem, quemadmodum in medio resistente in simplici ratione celeritatum. Nam hac resistantia etiam, si corpus a nulla potentia vrgeretur, totius motus linea est finita; quae vero si resistantia quadratis celeritatum proportionalis ponitur, fit infinita. Ex quo etiam
con-

consequi videtur projectoriam in hac resistentia non esse habituram asymptoton. Hoc saltem certum est non habere hanc curuam asymptoton hyperbolicam. Interim tamen habet asymptoton verticalem alius generis, quae ex quadratura curuae, per rectificationem parabolae datae, determinatur. Sed relicta potentiae vniformis hypothesi, pergamus ad potentiam variabilem, cuius tamen directio vbique sibi sit parallela. Ex datis quidem potentia et resistentia curuam descriptam non inuestigabimus cum hoc Prop. 106 iam sit factum; sed data curua atque vel potentia vel resistentia vel celeritate reliqua determinabimus.

PROPOSITIO 115.

Problema.

953. *Sit potentia absoluta utcunque variabilis et vbique dorsum tendens iuxta MP, determinare resistentiam requisitam ad hoc, ut corpus in data curua AM moueatur.*

Tabula XII.
Fig. 3.

Solutio.

Sit $AP=x$, $PM=y$ et elementum arcus $AM = ds$: tum sit vis qua corpus in M secundum MP sollicitatur $=P$, et altitudo celeritati in M debita $=v$, atque resistentia in $M=R$. His positis erit $dv = -Pdy - Rds$ (870), et $v = -\frac{Pds^2}{2dy}$ (871), sum-

Fff 3 to

to dx constante. Ex hac ergo aequatione erit
 $dv = -P dy - \frac{dPds^2}{2ddy} + \frac{Pds^2d^2y}{2ddy^2}$; unde prodibit $R =$
 $\frac{dPds}{2ddy} - \frac{Pdsd^2y}{2ddy^2}$ seu $\frac{2R}{ds} = d \cdot \frac{P}{ddy}$. Inueniuntur ergo
 tam v quam R per datas quantitates P , x et y ex-
 pressa. Q. E. I.

Corollarium I.

953. Posito radio osculi in $M = r$ erit
 $ddy = -\frac{ds^3}{rdx}$, et $d^2y = -\frac{3dsdyddy}{rdx} + \frac{ds^3dr}{r^2dx} =$
 $\frac{3ds^4dy}{r^2dx^2} + \frac{ds^3dr}{r^2dx}$. Unde prodit $v = \frac{Prdx}{2ds}$ et $R =$
 $-\frac{rdPdx - Pdxdr - 3Pdsdy}{2ds^2}$.

Corollarium 2.

954. Si lex resistantiae sit celeritatum ratio
 duplicata et exponens $= q$ erit $R = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{R}$.
 Quocirca reperietur $q = \frac{Pdsddy}{Pd^2y - dPdy}$, seu $q = -$
 $\frac{Prdxds}{rdPdx + Pdxdr + 3Pdsdy}$.

Corollarium 3.

955. Sit vis P ad grauitatem $\propto y$ ad f
 erit $P = \frac{y}{f}$, ideoque $R = -\frac{rdxdy - ydxdr - 3ydsdy}{2fds^2}$ et
 $v = \frac{yrdx}{2fds}$, atque $q = -\frac{yrdxds}{rdydx + ydxdr + 3ydsdy}$.

Corollarium 4.

956. Si curua AM fuerit circulus radii
 $AC = a$, erit $r = a$, $dr = 0$, $dy = \frac{(a-x)dx}{y}$ et
 $ds =$

$$ds = \frac{a dx}{y}. \text{ Unde prodit } v = \frac{Py}{2}, \text{ et resistentiæ}$$

$$R = -\frac{y dP}{2ax} - \frac{3P(a-x)}{2a}, \text{ atque } Q = -\frac{aPy dx}{y^2 dP + 3P(a-x) dx}.$$

Exemplum 1.

957. Sit curva AM circulus cuius centrum C et radius AC = a. Corpus autem perpetuo ad axem AC attrahatur in ratione distantiarum ita vt sit $P = \frac{y}{f}$; erit $v = \frac{y^2}{2f}$, ideoque celeritas in M erit ut applicata MP. Deinde resistentiæ R fiet $= -\frac{y(a-x) - 3y(a-x)}{2af} = -\frac{2y(a-x)}{af} = -\frac{2PM \cdot CP}{f \cdot AC}$ et $Q = -\frac{PM \cdot AC}{4 \cdot CP}$. Celeritas autem in puncto A erit = 0, et resistentiæ, dum corpus in quadrante ascendit negatiua, seu corpus a medio accelerabitur. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit infinite magnum, fit enim $\int \frac{ds}{v} = \int \frac{a dx \sqrt{2f}}{2ax - x^2} = -V \frac{f}{2} / 0 + V \frac{f}{2} / \frac{x}{2a-x}$. Id quod etiam per se intelligitur, nam cum celeritas in A sit = 0, et hic tam vis sollicitans $\frac{y}{f}$, quam vis medii euanescat, corpus perpetuo in A debeat perseverare.

Exemplum 2.

958. Manente curva AM circulo, si vis absoluta fuerit reciproce vt distantia PM seu $P = \frac{f}{y}$, erit $v = \frac{f}{2}$. Quare celeritas corporis vbique erit eadem, seu corpus feretur motu aequabili per circuli peripheriam et tempus, quo arcus quiuis AM absoluitur erit vt ipse arcus AM. At resistentiæ in M erit $= -\frac{f(a-x)}{ay} = -\frac{f \cdot CP}{AC \cdot PM}$. Resistentiæ igitur dum corpus

pus per quadrantem ascendit erit negatiua; dum autem per sequentem quadrantem descendit, resistentia fiet affirmatiua seu erit vera resistentia. Ex resistentia porro inuenitur $q = -\frac{\Delta C \cdot PM}{2 \cdot CP}$. In puncto igitur A resistentiae vis promouens erit infinite magna; vt et potentia sollicitans, quae resistentiae est aequalis.

Exemplum 3.

959. Manente AM circulo fit vis sollicitans vt potestas quaecunque distantiae MP, seu $P = \frac{y^n}{f^n}$;

erit $dP = \frac{ny^{n-2}(a-x)dx}{f^n}$. Ex his igitur prodi-

bit $v = \frac{y^{n+1}}{2f^n}$ et resistentia $R = -\frac{(n+3)y^n(a-x)}{2af^n}$

Vnde fit $R:P = -(n+3)CP:2AC$. Quare si fuerit $n = -3$, seu potentia P reciproce vt cubus distantiae MP, euanescet resistentia R, corpusque ab hac potentia sollicitatum in vacuo moueri poterit in circulo AM. Deinde si $n+3$ est numerus affirmatiuus resistentia per quadrantem ascensus erit negatiua. At si $n+3$ est numerus negatiuus resistentia per hunc quadrantem fit affirmatiua.

Exemplum 4.

Tabula XII.
Fig. 4.

960. Si curua AMB fuerit talis, vt radius osculi in M fit reciproce, vt applicata PM, id quod omnes

omnes curvas elasticas competit erit $r = \frac{a^2}{y}$ et $dr = -\frac{a^2 dy}{y^2}$. Fiet igitur $v = \frac{a^2 P dx}{2y ds}$, et $R = \frac{a^2 P dx dy}{2y^2 ds^2} - \frac{a^2 dP dx}{2y a^2} - \frac{3P dy}{2 ds}$. Cum autem sit $-\frac{ds^2}{dx dy} = \frac{a^2}{y}$, atque integrando $2 a^2 dx = ds (y^2 + b^2)$, et $dy = \frac{dx \sqrt{4a^4 - (y^2 + b^2)^2}}{y^2 + b^2}$. Hinc erit $v = \frac{P(y^2 + b^2)}{4y}$. Atque $R = \frac{P(b^2 - y^2) \sqrt{4a^4 - (y^2 + b^2)^2}}{8 a^2 y^2} - \frac{dP(y^2 + b^2)^2}{8 a^2 y dx}$. Sit nunc $P = \frac{y}{f}$, et $dP = \frac{dx \sqrt{4a^4 - (y^2 + b^2)^2}}{f(b^2 + y^2)}$, erit $v = \frac{y^2 + b^2}{4f}$ et $R = -\frac{3y \sqrt{4a^4 - (y^2 + b^2)^2}}{4 a^2 f} = -\frac{3y dy}{2 f ds}$. Ideoque $R : P = -3 dy : 2 ds$. Quam diu igitur corpus ascendit resistentia est negatiua, at quando descendit erit affirmatiua.

PROPOSITIO II6.

Problema.

961. Si data sit curua AM et resistentia Tabula XII.
 per quantitates ad curuam pertinentes; inuenire potentiam absolutam P perpetuo normaliter ad axem Fig. 3.
 AC tendentem, quae faciat ut corpus in hac curuum libere moueri possit.

Solutio.

Sit AP = x, PM = y et elementum curuae = ds. Deinde sit resistentia in M = R, quae ergo per x, y et s dabitur; potentia quaesita sit = P et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit; $P = -\frac{2v dy}{ds^2}$ (871), et $dv = \frac{2v dy}{ds^2} - R ds$ (cit.).

G g g Ex

Ex hac aequatione ob dx constans reperitur integrando $v = \frac{ads^2}{dx^2} - \frac{ds^2}{dx^2} \int \frac{Rdx^2}{ds}$. Inuenta autem v innotescet P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$. Q. E. I.

Corollarium I.

962. Erit igitur $P = -\frac{2addy}{dx^2} + \frac{2dly}{dx^2} \int \frac{Rdx^2}{ds}$. Per meras igitur quantitates datas determinatur P .

Corollarium 2.

963. Quia constans addita a pro lubitu potest accipi, ita ea poterit determinari, ut corpus in puncto A vel alio quodam dato puncto datam habeat celeritatem.

Corollarium 3.

964. Si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae q erit $q = \frac{ads^2}{Rdx^2} - \frac{ds^2}{Rdx^2} \int \frac{Rdx^2}{ds}$.

Corollarium 4.

965. Tempus quo arcus AM percurritur est $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$, in qua expressione si valor ipsius v substituitur proueniet tempus per $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{(a - \int \frac{Rdx^2}{ds})}}$.

Corollarium 5.

966. Si resistentia ponatur ad vim grauitatis \mathbf{r} vt tangens in M ad subtangentem seu vt ds ad dx , erit $v = \frac{ds^2}{dx^2} (a-x)$ et $P = -\frac{2ddy}{dx^2} (a-x)$ atque tempus per $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{a-x}$. At porro erit $q = \frac{ds}{dx} (a-x)$.

Exemplum.

967. Sit curua circulus cuius radius $AC = b$, erit $y = \sqrt{(2bx - xx)}$ et $dy = \frac{dx(b-x)}{y}$ et $ds = \frac{bdx}{y}$, atque $ddy = -\frac{b^2 dx^2}{y^3}$. Ex his habebitur $v = \frac{b^2}{y^2} (a - \int \frac{Ry dx}{b})$ atque $P = \frac{2b^2}{y^3} (a - \int \frac{Ry dx}{b})$. Ponatur resistentia $= \frac{ds}{dx}$ seu $R = \frac{b}{y}$, erit $v = \frac{b^2}{y^2} (a-x)$, et $P = \frac{2b^2}{y^3} (a-x)$, atque $q = \frac{b}{y} (a-x)$. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit $= 2\sqrt{a} - 2\sqrt{c-x}$. Si vterius fit $b = a$, erit $v = \frac{AC^2 \cdot PC}{PM^2}$, et $P = \frac{2AC^2 \cdot PC}{PM^3}$, et $R = \frac{AC}{PM}$. Celeritas igitur corporis in supremo circuli puncto erit $= 0$, et potentia P ibidem euanescit. Corpus autem vltra hoc punctum non poterit progredi, quia alias celeritas fieret imaginaria, inde igitur reuertetur ad punctum A , quia a resistentia quae in recessu fit negatiua acceleratur. Dum autem peruenerit in A , quia hic celeritas est infinite magna, hoc motu suo describet quadrantem infra AC , in quo ob potentiam P negatiuam sursum vrgebitur.

PROPOSITIO II7.

Problema.

Tabula XII.
Fig. 3.

968. Si medium fuerit uniforme atque resistat in duplicata ratione celeritatum determinare potentiam absolutam deorsum tendentem, quae faciat ut corpus in hoc medio resistente describat curuam datam AM.

Solutio.

Posita $AP=x$, $PM=y$, elemento arcus $AM=ds$, celeritate in $M=Vv$, exponente medii resistantis $=c$, et potentia absoluta $=P$, erit igitur $R=\frac{v}{c}$. His positis erit $P=-\frac{2vddy}{ds^2}$ et $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-\frac{vds}{c}$ (871). Quare habebitur $\frac{dv}{v}=\frac{2dyddy}{ds^2}-\frac{ds}{c}$ et

integrando $lv=l\frac{ads^2}{dx^2}-\frac{s}{c}$ seu $v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}$. Valore

igitur ipsius v inuento erit $P=-\frac{2ae^{-\frac{s}{c}}ddy}{dx^2}$.

Data ergo curua tum v tum P inueniuntur. Q. E. I.

Corollarium I.

969. Tempus quo corpus arcum AM absoluit seu $\int\frac{ds}{v}$ erit $=\int\frac{e^{\frac{s}{2c}}dx}{\sqrt{a}}$. Data ergo curua seu

aequa-

aequatione inter s et x , habebitur quoque tempus saltem per quadraturas. Eae igitur curvae ad hoc sunt commodissimae, pro quibus datur aequatio inter s et x .

Corollarium 2.

970. Quia a pro lubitu potest accipi, utpote quantitas integratione adiecta, eius determinatione effici potest, ut vel celeritas in dato curvae loco sit data, vel potentia sollicitans.

Corollarium 3.

971. Si curva AM versus axem AP est concava, tum est ddy negativum, his igitur casibus potentia corpus ad axem AP trahet. At si curva erit conuexa versus AP , quia tum ddy fit affirmativum, potentia P fit negatiua, seu corpus ab axe AP repellitur.

Exemplum I.

972. Sit curva AM parabola axem habens normaliter insistentem rectae AP , qualis in vacuo a corpore ex A oblique proiecto describitur, erit $by = fx - x^2$, ideoque $dy = \frac{f dx}{b} - \frac{2x dx}{b}$ atque $ddy = -\frac{2 dx^2}{b}$. His substitutis erit potentia sollicitans $P = \frac{4a}{be^c}$. Ex quo intelligitur quo diutius motus

continuetur, eo magis decrescere potentiam P. Facto autem c infinite magno id quod fit in vacuo erit $c^{\frac{s}{c}} = 1$ atque potentia $P = \frac{4a}{b}$ et idcirco constans.

Exemplum 2.

973. Sit curva AM talis vt eius aequatio sit $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3$, erit $dy = a dx - 2\beta x dx - 3\gamma x^2 dx$ et $d^2y = -2\beta dx^2 - 6\gamma x dx^2$. Hinc erit $P = \frac{4\beta a + 12\gamma ax}{e^{\frac{s}{c}}}$. In puncto A est $dy = a dx$, et $\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + a^2$. Altitudo igitur debita celeritati initiali in A est $a(1 + a^2)$ quae si dicatur b erit $a = \frac{\beta}{1 + a^2}$ et a est tangens anguli sub quo corpus ex A proicitur. Deinde ex ipsius dy valore reperitur $ds = dx \sqrt{(1 + a^2 - 4\alpha\beta x + 4\beta^2 x^2 - 6\alpha\gamma x^2 + 12\beta\gamma x^3 + 9\gamma^2 x^4)}$ $= dx \sqrt{(1 + a^2) - \frac{2\alpha\beta x dx}{\sqrt{(1 + a^2)}}}$ etc. Neglectis igitur reliquis terminis foret $s = x \sqrt{(1 + a^2) - \frac{\alpha\beta x^2}{\sqrt{(1 + a^2)}}}$, atque $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{x\sqrt{(1 + a^2)}}{c} - \frac{\alpha\beta x^2}{c\sqrt{(1 + a^2)}} + \frac{x^2(1 + a^2)}{2c^2}$ etc. qui termini quoque reici possunt si c fuerit valde magnum. Quare quo P fiat quam proxime constans nempe $= g$, debet esse $4\beta a = g$, et $\frac{3\gamma}{\beta} = \frac{\sqrt{(1 + a^2)}}{c}$. Atque si assumpta fuisset haec aequatio $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4$, prodiisset $\frac{6\delta}{\beta} = \frac{(1 + a^2)}{2c^2} - \frac{\alpha\beta}{c\sqrt{(1 + a^2)}}$. Erit ergo $\beta = \frac{g(1 + a^2)}{4b}$, $\gamma = \frac{g(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc}$ et $\delta = \frac{g(1 + a^2)^2}{48bc^2} - ag$

$-\frac{ag^2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}{96b^2c}$. Haec igitur curua quarti ordi-
nis erit quam proxime proiectoria in medio valde raro vniformi, quod resistit in duplicata cele-
ritatum ratione, et potentia vniformi g deor-
sum tendente.

Corollarium 4.

974. Quia aeris resistentia est quadratis cele-
ritatum proportionalis, si in aere valde grauis glo-
bus atque magnus ingenti vi proiciatur, tum b et c
erunt quantitates maximae. Quare pro proiectoria
huius corporis accipi poterit haec aequatio $y = a$

$x - \frac{g(1+a^2)}{4b}x^2 - \frac{g(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc}x^3$, quae curua a ve-
ra proiectoria quam minime differet.

Corollarium 5.

975. Sit AMDB haec proiectoria; in qua Tabula XIII
vt inueniatur punctum B, quo corpus proiectum Fig. 5.
incidit in horizontalem AB pono $y=0$, eritque

$$x^2 = -\frac{3cx}{V(1+a^2)} + \frac{12abc}{g(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ hincque } x = -$$

$$\frac{3c}{2V(1+a^2)} + V\left(\frac{9c^2}{4(1+a^2)} + \frac{12abc}{g(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right). \text{ Erit}$$

ita-

itaque $AB = \sqrt{\left(\frac{9c^2}{V(1+\alpha^2)} + \frac{12abc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{3c}{2\sqrt{(1+x^2)}}$. Innotescit igitur ex hac aequatione longitudo iactus ex data celeritate initiali, et inclinatione.

Corollarium 6.

976. Punctum iactus summum D reperietur faciendo $dy=0$. Fiet autem $0 = \alpha - \frac{g(1+\alpha^2)}{2b} x - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4bc} x^2$ seu $x^2 = -\frac{2cx}{V(1+\alpha^2)} + \frac{4abc}{g(1+\alpha^2)^3}$

Atque ex hac aequatione $AC = \sqrt{\left(\frac{c^2}{1+\alpha^2} + \frac{4abc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{c}{V(1+\alpha^2)}}$.

Corollarium 7.

977. Iactus longissimus, qui eadem celeritate initiali Vb producitur, prodibit si anguli inclinationis tangens α ex ista aequatione determinatur $3acV(1+\alpha^2) - \frac{8b(1+\alpha^2)}{g} + \frac{24\alpha^2b}{g} = \alpha V(9c^2(1+\alpha^2) + \frac{48abcV(1+\alpha^2)}{g})$ seu hac $4b(1-2\alpha^2)^2 - 3agc(1-2\alpha^2)V(1+\alpha^2) = 3\alpha^3gcV(1+\alpha^2)$ seu ista simpliciore $4b(1-2\alpha^2)^2 = 3agc(1-\alpha^2)V(1+\alpha^2)$.

Co-

Corollarium 8.

978. Si sinus anguli quem curua in A cum horizontali AC constituit, sit $=\varepsilon$, posito sinu toto $=1$ erit $9\varepsilon^4 - 6\varepsilon^2 + 1 = \frac{3gc\varepsilon}{4b}(1 - 2\varepsilon^2)$. Ex qua aequatione valor ipsius ε erutus, dabit directionem pro iactu longissimo. Ex hac autem aequatione reperitur quam proxime $\varepsilon = \sqrt{\frac{5b + gc\sqrt{2}}{12b + 2gc\sqrt{2}}}$.

Corollarium 9.

979. Angulus igitur, qui iactum longissimum producit, aliquantulum est minor quam semi-rectus, qui in vacuo satis facit. Nam si esset $\varepsilon = \sqrt{\frac{6b + gc\sqrt{2}}{12b + 2gc\sqrt{2}}}$ foret $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ideoque angulus semi-rectus. At cum hic in numeratore habeamus tantum $5b$, parumper erit minor.

Corollarium 10.

980. Si corpus in A horizontaliter proiciatur celeritate Va , fiet $a = 0$, atque y negativa. Quamobrem positis $AP = x$ et $PM = y$, istius proietoriae natura hac exprimetur aequatione $y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2}$. Pro curua autem AN in qua corpus ascendit erit $y = \frac{gx^2}{4b} - \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2}$.

Corollarium II.

981. Si adhuc plures termini quam quatuor accipiantur prodiret aequatio pro curua AM haec

H h h

y =

$y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2} + \frac{gx^5}{240bc^3} + \text{etc.}$ qui termini cum seriem summabilem constituent, quam minime a vero aberrabitur, si y ponatur aequalis summæ huius seriei. Erit autem $2by = c^2g(e^{\frac{x}{c}} - 1) - cgx$. Pro arcu vero ascensus AN erit $2by = cgx - c^2g(1 - e^{-\frac{x}{c}})$.

Corollarium 12.

982. Tempus quo arcus AM percurritur est $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2} ddy}{\sqrt{g}}$, cum sit $g = \frac{2v ddy}{ds^2}$. Est vero $2bdy = cge^{\frac{x}{c}} dx - cge^x$ et $2bddy = ge^{\frac{x}{c}} dx^2$. Prohibet igitur $\int \frac{\sqrt{2} ddy}{\sqrt{g}} = \int \frac{e^{\frac{x}{c}} dx}{\sqrt{b}} = \frac{2c}{\sqrt{b}} (e^{\frac{x}{c}} - 1)$. Atque si b et c in scrupulis pedis rhenani exprimuntur erit tempus per AM $= \frac{c}{125\sqrt{b}} (e^{\frac{x}{c}} - 1)$ minutis secundis (222).

Scholion.

983. Hac igitur ratione vero proxime determinauimus projectoriam in aere a corporibus proiectis descriptam, quæ non difficulter locò parabolæ, quæ vulgo adhiberi solet, potest substitui. Hanc quidem eandem æquationem deducere potuiffemus ex vera æquatione $ds ddy = cd^3y$ (875), harum projectoriarum supra inuenta. Sed cum ibi haec

haec reductio esset omissa, hic eam afferre maluimus, praecipue quod hoc loco clarius appareat aequationis assumptae terminos posteriores vehementer decrescere. Denique simili quoque modo curuae cum projectoriis in aliis mediis resistentis hypothesebus proxime conuenientes possunt inueniri; sed cum aliae hypotheses in mundo locum non habeant iis inueniendis hic non immorabimur.

PROPOSITIO II8.

Problema.

684. Inuenire tam resistentiam in singulis locis M, quam potentiam absolutam deorsum secundum MP tendentem, quae faciant ut corpus in data curua AM et data cum celeritate in singulis punctis M moueri possit. Tabula XII.
Fig. 3.

Solutio.

Positis ut ante $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus $AM = ds$ et altitudine celeritati in M debita $= v$, quae igitur omnia dantur. Deinde sit potentia corpus in M deorsum trahens $= P$ et resistentia $= R$. His positis statim reperitur P ex aequatione $P = -\frac{2v \frac{d^2 y}{ds^2}}{ds^2}$ (871). At resistentia R inuenietur ex aequatione $dv = \frac{2v \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2}}{ds^2} - R ds$ (cit.). Quare erit $R = \frac{2v \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2}}{ds^3} - \frac{dv}{ds}$. Si resistentiae lex ponatur duplicata celeritatum ratio, eiusque exponens $= q$; erit

Hhh 2

erit $R = \frac{v}{q}$, ex quo prodibit $q = \frac{v ds^3}{2v dy ddy - dv ds^2}$
 sumto dx pro constante. Q. E. I.

Corollarium 1.

985. Quia dx est constans erit $dyddy = dsdds$.
 Hanc ob rem erit $R = \frac{2vdds}{ds^2} - \frac{dv}{ds}$, seu $R = dsd. - \frac{v}{ds^2}$.
 Atque hinc erit $q = \frac{v ds^2}{2vdds - dvds}$ seu $q = \frac{v}{dsd. - \frac{v}{ds^2}}$.

Corollarium 2.

986. Si corpus debet motu vniformi per
 curuam AM ferri ita vt sit $v = b$, proueniet $P = -\frac{2bddy}{ds^2}$ et $R = \frac{2bddy}{ds^3} = \frac{2bdds}{ds^2}$, atque $q = \frac{ds^2}{2ddds}$.

Corollarium 3.

987. In motu igitur vniformi, dum corpus
 in curua AM ascendit, resistentia R semper est ne-
 gatiua seu motum corporis accelerat. At quando
 corpus iterum descendit, medium reuera resistet.

Corollarium 4.

988. Posito radio osculi in $M = r$, quia
 est $r = -\frac{ds^3}{dxddy}$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{r dx}$. Hanc ob
 rem habebitur $P = \frac{2vds}{r dx}$ et $R = -\frac{2vdy}{r dx} - \frac{dv}{ds}$, at-
 que $q = -\frac{rv dx ds}{2vdy ds + r dx dv}$.

Co-

Corollarium 5.

989. Posito iterum $v=b$ et $dv=0$, erit $P=\frac{2bds}{rdx}$ et $R=-\frac{2bdy}{rdx}$, atque $q=-\frac{rdx}{2dy}$. In supremo igitur puncto quo fit $dy=0$ et $ds=dy$ erit $P=\frac{2b}{r}$ atque resistentia ibi euanescit, nisi forte curuatura ibi sit infinite magna seu $r=0$.

Exemplum.

990. Sit curua AM circulus cuius centrum in C, qui motu aequabili seu celeritate \sqrt{b} debeat describi. Posito eius radio $AC=a$, erit $dy=\frac{dx(a-x)}{y}$, $ds=\frac{adx}{y}$ et $r=a$. Ex quibus inuenitur potentia absoluta deorsum tendens $P=\frac{2b}{y}$, seu erit reciproce vt distantia PM. Resistentia vero erit $-\frac{2b(a-x)}{ay}$. Dum igitur corpus ascendit resistentia erit negatiua atque reciproce proportionalis tangenti arcus AM. Ac si resistentia sit quadratis celeritatum proportionalis, erit eius exponens $q=-\frac{ay}{2(a-x)}=-\frac{AC \cdot PM}{2PC}$. Est itaque q negatiua atque aequalis dimidia tangenti arcus AM. Quando autem corpus versus horizontem AC accedit, fiet tum resistentia R tum q affirmatiua, seu medium reuera resistet.

PROPOSITIO II9.

Problema.

991. Si medium sit uniforme atque resistat Tabula XIII
in quacunque multiplicata celeritatum ratione: detur- Fig. 1.

que praeterea motus corporis progressivus secundum horizontalem AP; inuenire potentiam deorsum tendentem et curuam quam corpus describet.

Solutio.

Posita $CP = x$, $PM = y$, arcu $AM = s$, sit celeritas horizontalis corporis, dum est in M, debita altitudini u , erit verae celeritatis in M altitudo debita $= \frac{uds^2}{dx^2} = v$. Sit porro exponens medii resistentis $= c$ et lex ratio $2m$ plicata celeritatis,

erit resistentia $R = \frac{v^m}{c^m} = \frac{u^m ds^{2m}}{c^m dx^{2m}}$. His positis erit

$P = \frac{2vddy}{ds^2} = \frac{2uddy}{dx^2}$ (871), pono enim ddy loco

$-ddy$, quia in nostro casu y deorsum cadit. De-

inde erit $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - R ds$ (cit.). At vero

est $dv = \frac{duds^2}{dx^2} + \frac{2udsdds}{dx^2}$. Hinc ergo ob $dsdds =$

$= dyddy$ habebitur $\frac{duds}{dx^2} = -\frac{u^m ds^{2m+1}}{c^m dx^{2m}}$ seu $c^m d$

$x^{2m-2} du + u^m ds^{2m-1} = 0$. Datur autem u in x ;

et hanc ob rem ds ex hac aequatione per x tantum poterit determinari; erit scilicet $ds =$

$\frac{c^{\frac{m}{2m-1}} dx^{\frac{2m-2}{2m-1}} (-du)^{\frac{1}{2m-1}}}{u^{\frac{m}{2m-1}}}$. Vnde inuenire licet

aequationem pro curua inuenta. Hac vero in-

uenta simul innotescit $P = \frac{2uddy}{dx^2}$.

Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

992. Motus igitur horizontalis non potest esse vniformis, foret enim ob $du=0$, etiam $ds=0$; nisi in vacuo quo $c=\infty$, vbi semper et necessario est aequabilis. Multo minus quoque in medio resistente motus horizontalis poterit esse acceleratus, tum enim ds vel negatiuum vel imaginariuum obtineret valorem, quod vtrumque absurdum. Motus ergo horizontalis debet esse retardatus, quo fiat du negatiuum.

Corollarium 2.

993. Si resistentia fuerit ipsis celeritatibus proportionalis, fiet $m=\frac{1}{2}$ et aequatio pro curua abit in $du\sqrt{c}+dx\sqrt{u}=0$. Quae autem, quia non continet s vel y , ad curuam pertinere non potest. Haec autem aequatio ipsum motum horizontalem determinat. Id quod indicio est in hac resistentiae hypothesi, non quemuis motum horizontalem pro lubitu accipi posse, sed necessario eum esse accipiendum, qui hac aequatione determinatur.

Corollarium 3.

994. Iste autem motus horizontalis congruit cum motu corporis horizontali in AP in eodem medio resistente, sed a nulla potentia sollicitatum. Ex quo cognoscitur, quaecunque fuerit potentia corpus sollicitans, modo eius directio vbique de-

orsum tendat, in medio resistente, in simplici celeritatum rationem motum horizontalem perpetuo effe eundem. Qua in re motus in hac resistentiae hypothefi similis est motui in vacuo, in quo motus horizontalis semper est aequabilis, quantum cunque potentia deorsum tendens fit variabilis.

Corollarium 4.

995. Assumto igitur hoc motus horizontalis valore, altera aequatio $P = \frac{2u \, dy}{dx^2}$ curuam descriptam determinabit, in qua pro P vero quamcunque quantitatem assumere licebit. In hac igitur resistentiae hypothefi, hoc problema generaliter est solutum: ut inueniatur curua, quam corpus utcunque deorsum sollicitatum describit.

Corollarium 5.

996. Cum autem fit $-\frac{du \sqrt{c}}{\sqrt{u}} = dx$, erit $2\sqrt{bc} - 2\sqrt{cu} = x$, posita celeritate initiali in $A = \sqrt{b}$. Fiet ergo $2\sqrt{cu} = 2\sqrt{bc} - x$ et $u = \frac{(2\sqrt{bc} - x)^2}{4c}$. Pro curua ergo descripta haec habebitur aequatio $2cP \, dx^2 = dd y (2\sqrt{bc} - x)^2$.

Corollarium 6.

997. Hae igitur omnes curuae asytmoton habebunt verticalem in distantia $2\sqrt{bc}$ a vertice A . Namque x maius esse nequit quam $2\sqrt{bc}$ et cum

cor-

corpus horizontaliter motum ultra hunc terminum progredi nequeat, etiam corpus in curua latum non ultra pertingere poterit.

Corollarium 7.

998. Si in aliis quoque resistentiae hypothesibus motus horizontalis in curua AM cum motu horizontali in recta AP in eadem resistentiae hypothesi congruens accipiatur, ita ut ponatur $du = -\frac{u^m dx}{c^m}$; prodibit pro curua AM haec aequatio $ds = dx$ et $P = 0$. Illa igitur congruentia in aliis resistentiae hypothesibus nequidem locum habet.

Corollarium 8.

999. Sit igitur resistentia ut quadratum celeritatis seu $m = 1$. Quare erit $ds = -\frac{c du}{u}$, et integrando posita b altitudine celeritati in A debita, $s = c \log \frac{b}{u}$. In hac igitur resistentiae hypothesi erit arcus AM diuisus per $2c$ aequalis differentiae logarithmorum celeritatum horizontalium in A et M.

Corollarium 9.

1000. In hac ergo resistentiae hypothesi erit $u = e^{-\frac{s}{c} b}$. Ex quo prodibit $P = \frac{2b ddy}{e^{\frac{s}{c}} d x^2}$.

Iii

Seu

Seu cum sit $ds = -\frac{c \cdot du}{u}$ erit $dds = -\frac{c u ddu + c du^2}{du^2} = -\frac{dy ddy}{ds}$.

At est $dy = \frac{\sqrt{(c^2 du^2 - u^2 dx^2)}}{u}$. Unde habebitur $ddy = \frac{c^2 u d u d d u - c^2 d u^3}{u^2 \sqrt{(c^2 du^2 - u^2 dx^2)}}$. Consequenter erit $P = \frac{2 c^2 u d u d d u - 2 c^2 d u^3}{2 dx^2 \sqrt{(c^2 du^2 - u^2 dx^2)}}$.

Corollarium IO.

1001. Si aequatio inter u et x accipiatur ista $du = -\frac{u^n dx}{f^n}$, seu $\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)b^{n-1}}$ $= \frac{x}{f^n}$, erit $dx = -\frac{f^n du}{u^n}$ et $ddu = \frac{n du^2}{u}$. His substitutis prodibit in medio resistente in duplicata celeritatum ratione $P = \frac{2(n-1)c^2 u^{3n-2}}{f^{2n} \sqrt{(c^2 u^{2n-2} - f^{2n})}}$.

Pro curua autem quaesita haec habebitur aequatio $dy = \frac{du \sqrt{(c^2 u^{2n-2} - f^{2n})}}{u^n}$.

Corollarium II.

1002. Hoc igitur casu u^{2n-2} maius esse debet quam $\frac{f^{2n}}{c^2}$ seu u maius quam $\frac{f^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}$. Quare

si motus horizontalis fieri potest minor quam haec quantitas, motus in curua non toti motui horizontali dato respondebit. Nam si curua ulterius tenderet foret tam dy quam P imaginarium.

Co-

Corollarium 12.

1003. Ad inconueniens hoc euitandum de-
 bebit n minus esse vnitatem, fiat ergo $n-1=-k$, seu
 $n=1-k$. Hoc posito erit $u^k=b^k-f^{k-1}kx$. Existente
 vero AP tangente curuae in A erit vbi $ds=dx$, ibi
 $u=b$. Hinc erit $b^{n-1}c=f^n$ seu $\frac{c}{b^k}=f^{1-k}$, ideo-
 que $u^k=b^k\left(1-\frac{kx}{c}\right)$. Porro autem fit P =
 $\frac{2kb^3ku^{1-2k}}{c\sqrt{(b^{2k}-u^{2k})}}$ et $dy=\frac{dx}{u^k}\sqrt{(b^{2k}-u^{2k})}$
 $\frac{dx\sqrt{(2kcx-k^2x^2)}}{c-kx}$.

Scholion.

1004. Nulla igitur huiusmodi hypothesis
 motus horizontalis in proiectoriam in fluido potest
 quadrare. Quicquid enim sit k potentia in A vbi
 fit $u=b$, est infinite magna; deinde vero perpetuo
 decrescit. Hae curuae etiam omnes habent tan-
 gentem verticalem vbi est $x=\frac{c}{k}$, quae est asymp-
 tota curuae. Ceterum hoc problemate finem im-
 ponimus huic primae tractationi, qua directionem
 potentiae sibi semper parallelam posuimus; atque
 progredimur ad vires centripetas considerandas,
 examinaturi, quomodo medium resistens motum
 corporum ad fixum punctum attractorum turbet.

PROPOSITIO 120.

Problema.

1005. *Attrahatur corpus in medio quocunque resistente perpetuo ad punctum fixum C vi quacunque; determinare curuam AM, quam corpus utcumque proiectum describit.*

Solutio.

Cum corpus est in M ponatur eius distantia a centro $MC = y$, elementum $Mm = ds$; celeritas in M sit debita altitudini v . Ducatur mC et ex M in eam normalis Mr , erit $mr = dy$. Porro ducta tangente MT , sit ex C perpendicularum in eam demissum $CT = p$, et radius osculi in M $= r$, qui erit $= \frac{ydy}{dp}$. Iam sit vis qua corpus in M ad C trahitur $= P$ et vis resistentiae in M $= R$. Ex potentia autem P resoluta prodit vis normalis $= \frac{Pp}{y}$ et tangentialis $= -\frac{Pdy}{ds}$, retardabit enim corporis motum. Ex vi autem normali habebitur haec aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pp}{y}$ seu $2vdp = Ppdy$ (552). Cum praeterea vis tangentialis resistentia minuta sit $-\frac{Pdy}{ds} - R$ erit $dv = -Pdy - Rds$ (cit.). Ex quibus aequationibus coniunctis tum celeritas corporis in singulis locis, tum ipsa curua AM cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium I.

1006. Ob similia triangula Mmr , CMT erit $ds:dy=y:\sqrt{y^2-p^2}$ ideoque $ds=\frac{y dy}{\sqrt{y^2-p^2}}$. Quo substituto prodibit $dv=-Pdy-\frac{Ry dy}{\sqrt{y^2-p^2}}$. Eliminata igitur v obtinebitur aequatio inter y et p , quae sufficit ad curuam determinandam.

Corollarium 2.

1007. Quia est $P=\frac{2vdp}{pdy}$; substituatur hic valor in altera aequatione. Quo facto prodibit $dv+\frac{2vdp}{p}=-Rds=-\frac{Ry dy}{\sqrt{y^2-p^2}}$. Ex qua aequatione si R fuerit potentia ipsius v poterit valor ipsius v inueniri.

Corollarium 3.

1008. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis et medium vniforme, ita vt sit $R=\frac{v}{c}$. Hinc igitur erit $dv+\frac{2vdp}{p}=-\frac{vds}{c}$, quae aequatio integrata dat $vp^2=bb^2e^{-\frac{s}{c}}$, vbi b est altitudo debita celeritati in initio A , et h est perpendicularum ex C in tangentem in A demissum.

Corollarium 4.

1009. Cum igitur in hac resistentiae hypothese sit $v=\frac{bh^2}{e^{\frac{s}{c}}p^2}$, erit vis $P=\frac{2bb^2dp}{e^{\frac{s}{c}}p^3 dy}$. Quando igitur P in y datur, haec aequatio erit aequatio
 Iii 3 quae-

quaesita pro curua AM, celeritas autem in quouis loco M est reciproce vt perpendicularum in tangentem et vt numerus cuius logarithmus est via descripta per $2c$ diuisa coniunctim.

Corollarium 5.

1010. In hac igitur resistentiae hypothesi corpus eandem curuam describet sollicitatum a vi

centripeta $\frac{V}{e^c}$, quam describit in vacuo sollicitatum a vi V.

In utroque enim casu aequatio pro curua quaesita erit haec $Vdy = \frac{2bh^2d p}{p^3}$. Quare quo corpus in hoc medio resistente eandem quam in vacuo curuam describat, vis centripeta perpetuo debet decrescere in ratione, cuius logarithmus est spatium descriptum ad c applicatum.

Corollarium 6.

1011. Sit resistentia potestati exponentis $2m$ celeritatum proportionalis et medium vniforme ita vt sit $R = \frac{v^m}{c^m}$.

Erit igitur $dv + \frac{2vdp}{p}$

$= -\frac{v^m ds}{c^m}$. Quae integrata dat $v^{1-m} =$

$\frac{(m-1)p^{2m-2}}{c^m} \int \frac{ds}{p^{2m-2}}$

Co-

Corollarium 7.

1012. Sit resistentia celeritatibus proportionalis seu $m = \frac{1}{2}$, erit $Vv = -\frac{1}{2pv} \int p ds$. Exprimit autem $\int p ds$ duplam aream ACM , quae nobis fit S . Et detracta constante erit $Vv = \frac{c-2S}{2pv} = \frac{h\sqrt{bc}-S}{pv}$. Habentibus b et h eosdem quos ante Coroll. 3. valores.

Corollarium 8.

1013. In hac igitur resistentiae hypothesei celeritas corporis evanescit, quando corpus sectorem seu aream absoluerit aequalem ipsi $b\sqrt{bc}$. Hoc igitur spatium tantum est, ut corpus nunquam possit aream ipsi aequalem abscindere. Atque celeritas corporis in M est directe ut hoc spatium area iam absoluta minutum et reciproce ut perpendicularum in tangentem.

Corollarium 9.

1014. In eadem resistentiae hypothesei est $v = \frac{(h\sqrt{bc}-S)^2}{cp^2}$. Vis igitur centripeta erit $\frac{2(h\sqrt{bc}-S)^2 dp}{cp^3 dy} = P$. Deinde vero tempus, quo arcus AM absoluitur est $\int \frac{p ds \sqrt{c}}{h\sqrt{bc}-S} = \int \frac{2 ds \sqrt{c}}{h\sqrt{bc}-S} = 2\sqrt{c} \int \frac{b\sqrt{bc}}{h\sqrt{bc}-S}$. Tempore ergo infinito opus est, antequam corpus aream abscindat $= b\sqrt{bc}$, seu antequam omnem motum amittat.

Scho-

Scholion.

1015. Hæ igitur sunt generales leges, quas corpus in medio resistente a vi centripeta quacunque sollicitatum obseruat. Eas autem pro resistentia ipsis celeritatibus et celeritatum quadratis proportionali fusius deduxi, tum quia licuit, quod in aliis hypothesibus fieri non potuisset, tum quia in sequentibus has duas resistentias, vt hactenus fecimus, potissimum sumus consideraturi. Nunc autem datas sumemus vires centripetas vt quæ sint distantiarum potestatibus proportionales, et inuestigabimus, quales differentias resistentia curuis descriptis inducat. Deinde iuxta institutum in præcedentibus adhibitum, curuam datam ponemus vna cum vel vi centripeta vel resistentia vel celeritate atque in reliqua inquiremus.

PROPOSITIO 121.

Problema.

Tabula XIII
Fig. 2. 1016. *Si vis centripeta fuerit distantiarum potestati cuiunque a centro proportionalis, corpusque moueatur in medio resistente vniiformi, quod resistat in duplicata celeritatum ratione: determinare curuam A M quam corpus describet, et motum corporis in ea.*

Solutio.

Manentibus vt ante $AM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, celeritate in M debita altitudini v , erit
 $P =$

$P = \frac{y^n}{f^n}$ et $R = \frac{v}{c}$. Hinc habebitur pro curua

quaesita haec aequatio $\frac{y^n}{f^n} = \frac{2bb^2dp}{e^c p^3 dy}$ et $v = \frac{bb^2}{e^c p^2}$

$= \frac{y^n p dy}{2f^n dp}$. Ex illa autem aequatione non multum

ad curuam cognoscendam proficitur ob $e^{\frac{s}{c}}$ inuolutum; quare sumtis logarithmis erit $\frac{s}{c} = l 2 b f^n b^2 + l dp - nly - 3lp - ldy$, atque $\frac{ds}{c} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$ sumto dy constante. Quia vero est $ds = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - p^2}}$, erit $\frac{ydy}{c\sqrt{y^2 - p^2}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Quae est aequatio inter y et p pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

1017. Quenam proditura sit aequatio, si vis centripeta fuerit vel distantis vel reciproce quadratis distantiarum proportionalis, ex aequatione inuenta facile apparet, si modo 1 vel -2 loco n substituatur. Huiusmodi autem substitutiones omnes nihil iuuant ad aequationem generalem tractabiliorem efficiendam.

Corollarium 2.

1018. Si medium non positum fuisset vni-
forme sed eius exponens variabilis q , loco $e^{\frac{s}{c}}$ pro-
diis-
Kkk

diffet $e^{\int \frac{ds}{q}}$ (873). Atque pro curva descripta haec aequatio $\frac{y dy}{q\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. Vbi si q distantiae y fiat proportionalis aequatio ad differentialem primi gradus poterit reduci.

Corollarium 3.

1019. Sit igitur exponents resistentiae $q = \frac{y}{\alpha}$, atque curva descripta sequente aequatione exprime-
 $\frac{\alpha dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{ddp}{dp} - \frac{ndy}{y} - \frac{3dp}{p}$. In qua cum in singulis terminis dimensionum numerus euanescat, reductio ad differentialem primi gradus locum habet.

Corollarium 4.

1020. Hoc autem modo reperietur aequatio differentialis primi gradus. Ponatur $y = e^{szdt}$ et $p = e^{szdt}t$; erit $dy = e^{szdt}zdt$, et $ddy = e^{szdt}(zddt + dzdt + z^2dt^2) = 0$. Quare erit $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$. Porro erit $dp = e^{szdt}(dt + ztdt)$ et $ddp = e^{szdt}(ddt + ztddt + tdt dz + 2zdt^2 + z^2tdt^2) = e^{szdt}(-\frac{dzdt}{z} + zdt^2)$. Ex quibus reperietur $\frac{\alpha zdt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{dz + z^2dt}{z + z^2t} - n z dt - \frac{3dt}{t} - 3z dt$

$$\frac{tdz - 3zdt - (n+5)t z^2dt - (n+3)t^2 z^3dt}{tz(1+tz)} = -\frac{tdz - zdt}{tz(1+tz)}$$

$$= \frac{2dt}{t} - (n+3)zdt.$$

Corollarium 5.

1021. Si vis centripeta reciproce proportionalis ponatur cubis distantiarum, erit $n = -3$.
 Cur-

Curva ergo descripta continebitur hac aequatione

$$\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2 dt}{t}.$$

Corollarium 6.

1022. Si vis centripeta fuerit reciproce proportionalis quadratis distantiarum erit $n = -2$. Atque curva descripta sequente exprimetur aequatione $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2 dt}{t} - z dt$. Eodem modo si vis centripeta ipsis distantiiis seu $n = 1$ posita esset prodisset $\frac{\alpha z dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\frac{t dz - z dt}{tz(1+tz)} - \frac{2 dt}{t} - 4 z dt$.

Corollarium 7.

1023. Omnes hae aequationes curvas in vacuo descriptas dabunt, si ponatur $\alpha = 0$. Hoc enim casu fit resistentiae exponens infinite magnus atque ideo resistentia infinite parua. Habebitur autem haec aequatio $\frac{t dz + z dt}{tz(1+tz)} + \frac{2 dt}{t} + (n+3) z dt = 0$.

Scholion.

1024. Quando igitur exponens medii resistentis, quod in duplicata celeritatum ratione resistere ponitur, proportionalis est distantiiis a centro, aequatio pro curva descripta ad differentialem primi gradus reduci potest; id quod in aliis exponentis resistentiae q hypothefibus vix fieri potest. Intellego autem tales ipsius q valores, qui a folis distantiiis y pendent, quippe quae positio so-

la admitti potest ratione. Incongruum enim esset q per p i. e. per ipsam curuam, quae adhuc est incognita, dare. Interim tamen aequatio differentio-differentialis semper ad differentialem primi gradus potest reduci, quoties q fuerit functio vnus dimensionis ipsarum y et p coniunctim. Sed cum hae aequationes, tametsi sunt differentiales primi gradus, neque integrari neque separari queant, nihil praestant vtilitatis. Hanc ob rem resistentiam, quae celeritatibus ipsis est proportionalis, considerabimus cum vi centripeta cuicunque distantiarum potestati proportionali coniunctam.

PROPOSITIO 122.

Problema.

Tabula XIII
Fig. 2.

1025. *In medio vniformi, quod resistit in simplici celeritatum ratione, moueatur corpus attractum ad centrum C vi potestati cuicunque distantiarum proportionali: determinare curuam AM quam corpus describet.*

Solutio.

Positis $CM=y$, $CT=p$, $Mm=ds$, celeritate in M debita altitudini v , et exponente resistentiae $=q$, sit vis centripeta $=\frac{y^n}{f^n}$, et area $ACM=\frac{1}{2}sp$
 $ds=S$. His praemissis erit $\sqrt{v}=\frac{b\sqrt{bc-S}}{p\sqrt{c}}$, et $\frac{y^n}{f^n}$
=

$\frac{2(b\sqrt{bc-S})^2 dp}{c p^3 dy}$ (1012 et 1014), vbi b est altitudo celeritati in A debita, et h perpendiculum ex C in tangentem in A demissum. Quo eliminetur S , aequationi inuentae haec induatur forma

$$b\sqrt{bc-S} = \frac{\sqrt{c p^3 y^n dy}}{\sqrt{2 f^n dp}}.$$

Ex qua differentian-

$$\text{do posito } dp \text{ constante oritur } -\frac{p^2 ds}{2} = -\frac{y p dy}{2\sqrt{(y^2-p^2)}}$$

$$= \frac{c p^3 y^n ddy + 3 c p^2 y^n dy dp + n c p^3 y^{n-1} dy^2}{2\sqrt{2 f^n c p^3 y^n dy dp}} \text{ seu } 0 =$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}} + \frac{c p y^{\frac{n-2}{2}} ddy + 3 c y^{\frac{n-2}{2}} dy dp + n c p y^{\frac{n-4}{2}} dy^2}{\sqrt{2 f^n c p dy dp}}$$

Quae aequatio naturam curuae descriptae AM exprimit. Hac vero cognita statim innotescit celeritas corporis ex area curuae et perpendiculo p .
Q. E. I.

Corollarium I.

1026. Si loco dp assumtum fuisset elementum dy constans, prodisset ista aequatio $\frac{d p}{\sqrt{(y^2-p^2)}} =$

$$\frac{c p y^{\frac{n-2}{2}} ddp - 3 c y^{\frac{n-2}{2}} dp^2 - n c p y^{\frac{n-4}{2}} dy dp}{\sqrt{2 f^n c p dy dp}}.$$

Ex qui-

bus aequationibus autem, quia ad differentiales primi gradus reduci nequeunt, nihil potest concludi.

Corollarium 2.

1027. Reductio supra (1020) adhibita semper locum habet, si in aequatione differentio-diffe-

rentiali indeterminatae p et y eundem dimensionum numerum constituunt. Hoc autem accidit si $n=1$, i. e. si vis centripeta fuerit ipsis distantibus a centro proportionalis. Erit tum enim pro curua quaesita $\frac{y dp}{\sqrt{(y^2-p^2)}} = \frac{c p y d p - 3 c y d p^2 - c p d y d p}{\sqrt{2 f c y p u y d p}}$. Posito dy const.

Corollarium 3.

1028. Hac igitur hypothese ponatur $y=e^{fzdt}$ et $p=e^{fzdt}t$; vnde fit $dy=e^{fzdt}zdt$; $dp=e^{fzdt}dt(1+zt)$ et $ddp=e^{fzdt}dt(-\frac{dz}{z}+zdt)$. His substitutis

habebitur $\frac{dt(1+tz)^2 \sqrt{2ftz}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdz}{z} - 3dt - 6tzt - 4t^2z^2dt = -\frac{tdz-zdt}{z} - 2dt(1+tz)(1+2tz)$. Seu

posito $tz=u$ prodibit $\frac{dt(1+u)^2 \sqrt{2fu}}{\sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{tdu}{u} - 2dt(1+u)(1+2u)$.

Corollarium 4.

1029. Aequatio haec integrationem admittit si diuidatur per $tt(1+u)^2 \sqrt{u}$, prodibit enim

$\frac{dt \sqrt{2f}}{tt \sqrt{c(1-tt)}} = -\frac{du}{tu(1+u)^2 \sqrt{u}} - \frac{2dt(1+2u)}{tt \sqrt{(u+u^2)}}$

Cuius integralis est $C - \frac{\sqrt{2f(1-tt)}}{t\sqrt{c}} = \frac{2(1+2u)}{t\sqrt{(u+u^2)}}$, seu

$Ct - \frac{\sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{2c}} = \frac{1+2u}{\sqrt{(u+u^2)}} = \frac{1+2tz}{\sqrt{(tz+t^2z^2)}}$.

Co-

Corollarium 5.

1030. Est vero vi substitutionum factarum $t = \frac{p}{y}$, $z = \frac{y dy}{ydp - pdy}$ et $u = \frac{p dy}{ydp - pdy}$ ac $1 + u = \frac{y dp}{ydp - pdy}$
 Quamobrem pro curua quaesita erit $\frac{Cp}{y} \frac{\sqrt{f(y^2 - p^2)}}{y\sqrt{2c}}$
 $= \frac{y dp + p dy}{\sqrt{py dp dy}}$.

Corollarium 6.

1031. Quo autem differentialia fiant ratio-
 nalia est $2u + 1 = \frac{Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)}}{\sqrt{(Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)})^2 - 8c}} = \frac{y dp + p dy}{ydp - pdy}$
 $= \frac{y^2 dt + 2y t dy}{y^2 dt}$ restituto $p = yt$. Habebitur ergo
 sequens aequatio in qua indeterminatae y et t sunt
 a se inuicem separatae $\frac{Ct dt \sqrt{2c} - dt \sqrt{f(1-tt)}}{t \sqrt{(Ct\sqrt{2c} - \sqrt{f(1-tt)})^2 - 8c}} = \frac{dt}{t} =$
 $\frac{2dy}{y}$. Ex qua aequatione curua construi poterit.

Scholion.

1032. Huic aequationi vltierius reducendae
 non immoror, etsi suspicor eam denuo posse in-
 tegrari. Hoc quidem certum si fuerit $C\sqrt{2b} = f$,
 quo casu integrale tam fit compositum, vt huc
 transferre noluerim. Ex quo intelligi potest in-
 tegrale generaliter sumtum maxime fore perple-
 xum, ita vt vix quicquam ad motum cognoscen-
 dum inde deduci posset. Quamobrem his mis-
 sis ad inuersa problemata pergo.

PRO-

PROPOSITIO 123.

Problema.

Tab. III

Fig. 2.

1033. Si data fuerit curua AM quam corpus describit et resistentia in singulis locis M, determinare vim centripetam ad centrum C perpetuo directam, et celeritatem in singulis locis.

Solutio.

Ponantur vt ante $CM=y$, $Mm=ds$, $CT=p$, altitudo debita celeritati in $M=v$, resistentia $=R$, et vis centripeta $=P$. His positis habebitur ista aequatio $dv + \frac{2vdp}{p} = -R ds$ (1007), ex qua cum curua AM et resistentia R dentur, inuenietur v ex aequatione integrali $p^2v = -\int R p^2 ds$, nempe $v = -\frac{\int R p^2 ds}{p^2}$. Inuenta autem v reperietur $P = \frac{2vdp}{p^3 dy} = -\frac{2d p \int R p^2 ds}{p^3 dy}$ (1005). Q. E. I.

Corollarium I.

1034. Si celeritas in initio A ponatur \sqrt{b} et perpendicularum in tangentem in A ex C demissum $=b$, in casu nullius resistentiae seu in vacuo prodiissent hae aequationes $p^2v = bb^2$ et $P = \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$.

Corollarium 2.

1035. In medio igitur resistente si $\int R p^2 ds$ ita capiatur, vt euanescat, euanescente arcu AM, erit $v = \frac{bb^2 - \int R p^2 ds}{p^2}$ et $P = \frac{2d p (bb^2 - \int R p^2 ds)}{p^3 dy}$.

Co-

Corollarium 3.

1036. Si corpus in vacuo moueretur in curua AM eadem celeritate initiali in A, et si dicatur celeritas, quam in M habiturum effret \sqrt{u} , et vis centripeta in M $= V$, tum foret $u = \frac{bb^2}{p^2}$ et $V = \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$. Quare erit $u : u - v = bb^2 : \int R p^2 ds$ et $V : V - P = bb^2 : \int R p^2 ds$.

Corollarium 4.

1037. Cum igitur hoc problema, quo curua AM et celeritas initialis in A datur, vis centripeta vero quaeritur, iam sit solutum in cap. praec. ex eadem solutione simul hoc problema soluitur. Inuenta enim $\int R p^2 ds$, statim innotescit differentia virium centripetarum in vacuo et medio resistente, atque ideo ipsa vis centripeta in medio resistente.

Exemplum I.

1039. Si curua AM fuerit circulus radii a , centrum in C habens, et resistentia vbique eadem seu $R =$ constanti λ ; erit $y = p = a$ et $b = a$. Quare habebitur $\int R p^2 ds = \lambda a^2 s$, ideoque $v = b - \lambda s$ et $P = \frac{2b - 2\lambda s}{a}$. Celeritas ergo perpetuo decrescit, et prorsus euanescit descripto arcu $= \frac{b}{\lambda}$, quo loco etiam vis centripeta in nihilum abit. Est autem vis centripeta vbique vt quadratum celeritatis.

Tempus praeterea, quo arcus AM percurritur est $\frac{2\sqrt{b} - 2\sqrt{(b-\lambda s)}}{\lambda}$, et tempus quo corpus ad quietem redigitur est $\frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$.

Exemplum 2.

Tabula XIII
Fig. 2.

1039. Sit curva AMC logarithmica spiralis, cuius centrum in C, et resistentia sit potestas quaecunque distantiae CM, nempe $R = \frac{y^n}{f^n}$. Erit

ergo $p = ay$ et posito $\xi = \sqrt{1 - \alpha^2}$, $ds = -\frac{dy}{\xi}$. Ponatur vero $AC = \alpha$, erit $b = \alpha a$.

Fiet igitur $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 a^{n+3} - \alpha^2 y^{n+3}}{(n+3)\xi y^n}$, hinc-

que $v = \frac{(n+3)\xi a^2 b f^n - a^{n+3} + y^{n+3}}{(n+3)\xi f^n y^2}$. Atque

$P = \frac{2(n+3)\xi a^2 b f^n - 2a^{n+3} + 2y^{n+3}}{(n+3)\xi f^n y^3}$. In

casu vero quo $n = -3$, qui a logarithmis pendet est $\int R p^2 ds = \frac{\alpha^2 f^3}{\xi} l \frac{a}{y}$. Atque $v = \frac{\xi a^2 b - f^3 l \frac{a}{y}}{\xi y^2}$

et $P = \frac{2\xi a^2 b - 2f^3 l \frac{a}{y}}{\xi y^3}$.

Corollarium 5.

1040. Sit aucta corpori in A imprimatur celeritas initialis ut sit $b = \frac{a^{n+1}}{(n+3)\xi f^n}$; erit etiam

vbi-

vbique $v = \frac{y^{n+1}}{(n+3) \xi f^n}$ et $P = \frac{2y^n}{(n+3) \xi f^n}$

Hoc igitur casu vis centripeta P erit ad resistantiam R vt 2 ad $(n+3) \xi$. i. e. in data ratione.

Corollarium 6.

1041. Eodem hoc casu est $y = (n+3)^{\frac{1}{n+1}}$
 $\xi^{\frac{1}{n+1}} f^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{1}{n+1}}$ atque $\frac{y^n}{f^n} = \frac{(n+3)^{\frac{n}{n+1}} \xi^{\frac{n}{n+1}} v^{\frac{n}{n+1}}}{f^{n+1}}$

= R. Resistentia igitur erit in $\frac{2n}{n+1}$ *plicata* ratione celeritatum medio existente vniformi, quippe cuius exponens est $\frac{f}{(n+3) \xi}$.

Corollarium 7.

1042. Si $n=1$, erit resistentia in ratione celeritatum, et medii exponens $\frac{f}{4 \xi}$. In hoc igitur medio corpus spiralem logarithmicam describere poterit, si vis centripeta fuerit distantiiis proportionalis nempe $= \frac{y}{2 \xi f}$ et si initio in A proiciatur celeritate $\frac{a}{2 \sqrt{\xi f}}$. In quocunque praeterea medio resistente vniformi spiralis data poterit describi a corpore, excepto casu, quo resistentia est quadratis celeritatum proportionalis.

Scholion.

1043. Qualis vis centripeta et qualis resistentia requiratur ad id, vt corpus in spirali logarithmica moueatur, Viri iam saepius citati *Newtonus* et *Bernoullius* in Princip. Phil. et Act. Lips. 1713 exposuere. In sequentibus deinde exemplis plura hac de re afferemus.

PROPOSITIO 124.

Problema.

Tab. XIII.
Fig. 2.

1044. Si resistentia fuerit cuicumque celeritatum potestati proportionalis eiusque exponens in singulis locis detur: inuenire vim centripetam, quae faciat vt corpus in data curua AM moueatur.

Solutio.

Manentibus vt ante $CM = y$, CT , p , Mm , ds , celeritate in $M = Vv$, et exponente resistentiae $= q$, sit resistentia $R = \frac{v^m}{q^m}$ et vis centripeta $= P$. His positis erit $P = \frac{2vdp}{p^2y}$ (1005), et $dv + \frac{2vdp}{p} = -\frac{v^m ds}{q^m}$ (1007). Haec aequatio integrata dat $v^{1-m} = -\frac{(1-m)}{p^{2(1-m)}} \int \frac{p^{2(1-m)} ds}{q^m}$. Casu vero quo

quo $m=1$ est $v = \frac{1}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$. Inuenta autem v simul innotescit P ex aequatione $P = \frac{2vdp}{p^3 y}$. Q. E. I.

Corollarium I.

1045. Sit celeritas, qua corpus in A proiicitur, debita altitudini b , et perpendicularum ex C in tangentem in A demissum $= b$. Atque $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)} ds}{q^m}$, ita sumatur ut euanescat facto $s=0$ seu M in A incidente; hocque integrale ponatur $= S$. Addita igitur constante erit $v^{1-m} = \frac{C+S}{p^{2(1-m)}}$. Fiat nunc $S=0$, erit $p=b$ et $v=b$, ideoque $C = b^{1-m} b^{2(1-m)}$. Determinata ergo constante C habebitur $v^{1-m} = \frac{b^{1-m} b^{2(1-m)} + S}{p^{2(1-m)}}$.

Corollarium 2.

1046. In casu $m=1$, qui peculiarem integrationem requirit, si $\int \frac{ds}{q}$ ita sumatur ut euanescat facto $s=0$; erit $v = \frac{bb^2}{p^2 e^{\int \frac{ds}{q}}}$, ideoque

$P = \frac{2bb^2 dp}{e^{\int \frac{ds}{q}} p^3 dy}$. In vacuo prodisset $P = \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$

Erit ergo vis centripeta in vacuo ad vim centripetam in hoc medio resistente ut 1 ad $e^{-\int \frac{ds}{q}}$.

Corollarium 3.

1047. Denotante autem m quemcunque alium numerum praeter 1 est $v = \frac{(b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}}{p^2}$

Ex quo prodit $P = \frac{2(b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}} dp}{p^3 ay}$. In

vacuo vero prodiret vis centripeta $= \frac{2bh^2 p}{p^3 dy}$, quae

si dicatur $= V$ erit $V : P = bh^2 : (b^{1-m}h^{2(1-m)} + S)^{\frac{1}{1-m}}$.

Atque hinc $V^{1-m} : P^{1-m} = V^{1-m} = b^{1-m}h^{2(1-m)} : S$.

Corollarium 4.

1048. Quare si reperta fuerit vis centripeta, quae in vacuo datam curuam AM producit, ex ea ope huius analogiae inuenietur vis centripeta, quae idem in medio quocunque resistente praestabit, si modo determinetur valor ipsius $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)} ds}{q^m}$

Exemplum 1.

1049. Si curua data fuerit circulus centrum in D habens, cuius radius $MC = a$, erit $y = p = a$

et

et $b = a$. Sit praeterea medium vniforme seu $q = c$; erit $\int \frac{(m-1)p^{2(1-m)}ds}{q^m} = \frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m} = S$ et $V = \frac{2b}{a}$. Habebitur igitur $\frac{2b}{a} : P = a^{2(1-m)} b^{1-m} + \frac{(m-1)a^{2(1-m)}s}{c^m}^{\frac{1}{1-m}}$, seu $P : 1 = (b^{1-m} +$

$$(m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}} : \frac{a}{2}. \text{ Vnde oritur } P = \frac{2(b^{1-m} + (m-1)c^{-m}s)^{\frac{1}{1-m}}}{a}.$$

Si resistentia fuerit

in simplici ratione celeritatum erit $m = \frac{1}{2}$ et $P = \frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{2ac}$, et $v = \frac{(2\sqrt{bc}-s)^2}{4c}$, vnde ipsa celeritas erit $= \frac{2\sqrt{bc}-s}{2\sqrt{c}}$ et tempus, quo arcum AM absoluit $2\sqrt{c} \int \frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-s}$. Opus ergo est tempore infinito, antequam corpus arcum absoluat $= 2\sqrt{bc}$, quo, cum peruenerit omnem motum amittit et simul vis centripeta euanescit. Si resistentia fuerit quadratis ce-

leritatum proportionalis erit $v = be^{-\frac{s}{c}}$ et $P = \frac{2b}{ae^{\frac{s}{c}}}$. Ceterum motus corporis in peripheria cir-

culi prorsus congruit cum motu rectilineo, quo corpus motum impressum a resistentia amittit. Vis enim centripeta quia semper est normalis celeritatem prorsus non afficit, sed tantum motum in circulum inflectit.

Exem-

Exemplum 2.

Tabula XIII
Fig. 3.

1050. Descendat corpus ex A versus centrum C in logarithmica spirali AM, sitque exponentis resistantiae q vt dignitas quaecunque distantiae

MC, y ita vt sit $q = \frac{y^{n+1}}{f^n}$. Ex natura logarithmicae est $p = \alpha y$, atque facta AC = a erit $s = \alpha a$, et posito $\xi = V(1 - \alpha^2)$ erit $ds = -\frac{dy}{\xi}$.

Hinc erit $\int (m-1) \frac{p^{2(1-m)} ds}{q^m} = \frac{(1-m) \alpha^{2(1-m)} f^{mn}}{(3-3m-mn) \xi}$

$(y^{3-3m-mn} - a^{3-3m-mn}) = S$. Sit praeterea $b^{1-m} =$

$\frac{(1-m) a^{1-m-mn} f^{mn}}{(3-3m-mn) \xi}$ erit $v = \frac{(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{\frac{1}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}} \xi^{\frac{1}{1-m}}}$

atque $P = \frac{2(1-m)^{\frac{1}{1-m}} f^{\frac{mn}{1-m}} y^{\frac{mn}{1-m}}}{(3-3m-mn)^{\frac{1}{1-m}} \xi^{\frac{1}{1-m}}}$. Vis centripeta

igitur erit reciproce vt potestas distantiae] cuius exponentis est $\frac{mn}{1-m}$.

Corollarium 5.

1051. Si vis centripeta est constans $\frac{2}{(3\xi)^{\frac{1}{1-m}}}$, corpus in spirali logarithmica, cuius anguli intersectionis radiorum cum curua co-
sinus est ξ , moueri poterit, si existente exponen-
te

te resistentiae = y , et celeritate initiali debita alt.

$$(3g)^{\frac{1}{1-m}}$$

Corollarium 6.

1052. Si vis centripeta fuerit vt distantia y eleuata ad k , erit $-\frac{mn}{1-m} = k$ et $n = -\frac{k(1-m)}{m}$; vnde

$$P = \frac{2y^k}{(3+k)^{\frac{1}{1-m}} g^{\frac{1}{1-m}} f^k}$$

Resistente ergo exponens
debet esse = $\frac{y^{\frac{m+mk-k}{k}}}{f^{\frac{mk-k}{m}}}$, et $v = \frac{y^{k+1}}{(2g+gk)^{\frac{1}{1-m}} f^k}$

vnde $b = \frac{a^{k+1}}{(3g+gk)^{\frac{1}{1-m}} f^k}$.

Corollarium 7.

1053. Tempus praeterea, quo arcus AM

absoluitur est $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2g^{\frac{2m-1}{2}} f^{\frac{k}{2}}}{1-k} (a^{\frac{1-k}{2}} - y^{\frac{1-k}{2}})$.

Tempus igitur, quo in centrum C vsque descendit est finitum si $k < 1$, infinitum vero erit si vel $k = 1$ vel $k > 1$.

Corollarium 8.

1054. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae = $\frac{y}{g}$ erit

$$M m m \quad \int \frac{ds}{g}$$

$$\int \frac{ds}{q} = \frac{\delta}{\epsilon} \int \frac{a}{y} \quad \text{et} \quad e^{\int \frac{ds}{q}} = \frac{a^{\frac{\delta}{\epsilon}}}{y^{\frac{\delta}{\epsilon}}} = \frac{a^i}{y^i} \quad \text{posito} \quad i = \frac{\delta}{\epsilon}$$

Hinc erit $v = \frac{by^{i-2}}{a^{i-2}}$ et $P = \frac{2by^{i-3}}{a^{i-2}}$. In medio igitur hoc resistente corpus quamcunque logarithmicam spiralem describere poterit, si fuerit vis centripeta $= \frac{2by^{i-3}}{a^{i-2}}$ et exponens resistantiae $= \frac{\gamma}{\epsilon}$.

Scholion.

1055. In hoc igitur exemplo et corollaribus annexis omnes continentur casus, quibus corpus in medio quocunque resistente logarithmicam spiralem describere potest, sollicitatum a vi centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionali. Vbi casus quo resistantia proportionalis est quadratis celeritatum et eius exponens distantiam a centro hoc habet peculiare, ut statim det vim centripetam potestati distantiarum proportionalem, quod in aliis resistantiae hypothesebus demum post certo modo determinatam celeritatem initialem obtinebatur. In illa autem resistantiae hypothese, existente exponente resistantiae $\frac{\gamma}{\epsilon}$, si corpus in A celeritate quacunque \sqrt{b} secundum directionem, cuius cum AC inclinationis cosinus est ϵ proiciatur, et vis centripeta in A fuerit $= \frac{2b}{a}$, corpus semper in logarithmica spirali mouebitur, si praeterea vis centri-

tri-

tripeta fuerit ut y^{i-3} , datur autem i quia est $i = \frac{\delta}{e}$. In his igitur satis sunt exposita, quae motum in spirali logarithmica spectant.

PROPOSITIO 125.

Problema.

1056. Si detur curua AM, quam corpus de- Tab. XIII.
scribit et vis centripeta ad centrum C tendens; in- Fig. 2.
uenire resistentiam requisitam in singulis locis M et
celeritatem corporis.

Solutio.

Posita $MC=y$, $CT=t$, $Mm=ds$, sit vis cen-
tripeta in $M=P$. Deinde ponatur resistentia in
 $M=R$, et altitudo debita celeritati in $M=v$. His
positis erit $P = \frac{2vdp}{pdy}$ (1005) et $dv + \frac{2vdp}{p} = -Rds$
(1007). Ob datam curuam et vim centripetam
ex illa aequatione inuenitur $v = \frac{Ppdy}{2dp}$, et differenti-
ando posito dy constante est $dv = \frac{3Pdy}{2} + \frac{pdpdy}{2dp} -$
 $\frac{Ppdyddp}{2dp^2}$. Quibus loco v et dv valoribus substitutis
erit $R = \frac{Ppdyddp}{2dsdp^2} - \frac{pdpdy}{2dsdp} - \frac{3Pdy}{2ds}$. Si resistentia fuerit
quadratis celeritatum proportionalis eius exponens
ponatur q erit $R = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{R}$. Quare habebitur
 $q = \frac{Ppdsdp}{Ppddp - pdP - 3Pdp}$. Ex data ergo curua
seu aequatione inter y et p , et vi centripeta tam
M m m 2 resi-

resistentiam R , quam celeritatem in singulis locis determinauimus. Q. E. I.

Corollarium I.

1057. Alio exprimendi modo erit resistentia $R = -\frac{1}{p^2 ds} d. \frac{P p^3 dy}{2 dp}$ et $q = -\frac{P p^3 dy ds}{2 dp. d. \frac{P p^3 dy}{2 dp}}$

Ex quo perspicitur si fuerit P vt $\frac{dp}{p^3 dy}$, euanescere resistentiam. Hoc enim casu vis centripeta sola sufficit ad curuam datam producendam.

Corollarium 2.

1058. Posita celeritate initiali in $A = Vb$ et perpendicularo ex C in tangentem in A demisso $= b$ fit vis centripeta, quae in vacuo faciat est corpus in hac curua moueatur, $= V$ erit $V = \frac{2bb^2 dp}{p^3 dy}$ (592).

Hanc ob rem $R = -\frac{bb^2}{p^2 ds} d. \frac{P}{V}$, et $q = -\frac{P ds}{V d. \frac{P}{V}}$

Atque $v = \frac{bb^2 P}{V p^2}$.

Corollarium 3.

1059. Si corpus in hac curua in vacuo a vi V sollicitatum moueretur, fit eius celeritas in M debita altitudini u ; eritque $u = \frac{bb^2}{p^2}$. Vnde haec habebitur analogia $u:v = V:P$. Atque generalitet hoc theorema obtinet: celeritates corporis in eodem loco M sunt in subduplicata ratione virium centripetarum.

Co-

Corollarium 4.

1060. Si vis centripeta fuerit constans seu $P = g$, erit $R = \frac{bb^2 g d v}{v^2 p^2 ds}$ et $q = \frac{v ds}{d v}$. Atque $v = \frac{b b^2 g}{v p^2}$.

Exemplum.

1061. Descendat corpus in spirali hyperbolica AM, cuius natura hac aequatione exprimitur; $p = \sqrt{\frac{a y}{a^2 + y^2}}$, et sit vis centripeta vt dignitas quae-

cunqve a centro spiralis C; scilicet $P = \frac{y^n}{f^n}$. Erit

$ds = -\frac{dy \sqrt{a^2 + y^2}}{y}$, et $\frac{p^3 dy}{dp} = y^3$. Vnde prodit

$R = \frac{(n+3)y^{n+1} \sqrt{a^2 + y^2}}{2a^2 f^n}$ et $v = \frac{y^{n+3} (a^2 + y^2)}{2a^2 f^n}$

atque ex his $q = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{n+3}$. Si medium ergo resistit in duplicata celeritatum ratione erit exponens resistentiae $= \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{n+3}$. At si medium resistat in simplici ratione celeritatum, et exponens resistentiae

sit q erit $V q = \frac{V v}{R} = \frac{a f^{\frac{n}{2}} \sqrt{2}}{(n+3) y^{\frac{n+1}{2}}}$, atque $q =$

$\frac{2 a^2 f^n}{(n+3)^2 y^{n+1}}$. In hac igitur resistentiae hypothesi

medium erit vniforme si $n = -1$; hoc est si vis centripeta est in reciproca ratione distantiarum. Fit enim $q = \frac{a^2}{f}$.

At si vis centripeta est reciproce vt quadratum distantiae, fiet resistentiae expo-

nens $= \frac{2a^2y}{f^2}$ seu erit proportionalis ipsis a centro distantis.

Scholion.

1062. Sequi hic deberet iuxta nostrum institutum problema, quo ex data curua et celeritate in singulis locis quaeruntur tam vis centripeta, quam resistentia; sed cum huius solutio sit facillima et ex ipsis canonibus supra (1007), datis sponte fluat; atque praeterea ex eo nihil notatu digni deduci queat, hic praetermitto. Inuenitur autem $P = \frac{2vdp}{pdy}$ et $R = -\frac{pdv - 2vdp}{pds}$, quae formulae problema solvunt. Adicio vero loco huius problematis aliud affine, quo praeter curuam motus angularis circa centrum virium datur et tam vis centripeta quam vis resistentiae quaeruntur.

PROPOSITIO 126.

Problema.

1063. Si detur curua AM in qua corpus mouetur et motus angularis circa centrum virium C , inuenire tam vim centripetam ad A tendentem, quam resistentiam in singulis locis.

Solutio.

Positis vt haecenus $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$ celeritate in M debita altitudini v , vi centripeta $= P$ et vi resistentiae $= R$, concipiatur centro C radio $EC = r$ descripta peripheria circuli EL , in
qua

qua corpus eodem motu angulari circa C feratur, quo corpus in curua AM. Elementum ergo Ll eodem tempore absoluitur, quo elementum Mm. Sit nunc celeritas per Ll debita altitudini u ; erit u data, quia motus angularis datur. Atque habebitur $\frac{Ll}{\sqrt{u}} = \frac{Mm}{\sqrt{v}}$. Est vero $Ll : mr = 1 : y$ seu $Ll = \frac{mr}{y}$, porroque est $mr : Mm = p : y$, ideoque $mr = \frac{p \cdot Mm}{y}$, et consequenter $Ll = \frac{p \cdot Mm}{y^2}$. Hanc ob rem habebitur $\frac{p}{y^2 \sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{v}}$, hincque $v = \frac{y^4 u}{p^2}$. Inuenta iam hac ratione v erit $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ (1005), et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds}$ (1007). Atque si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens resistentiae = q , erit $q = -\frac{y u ds}{y^4 du + 4u dy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

1064. Si vis centripeta P proportionalis est ipsi $\frac{dp}{p^3 dy}$, id quod accidit, quando corpus mouetur in vacuo; erit u reciproce vt y^4 . Quare celeritas angularis tum est reciproce vt quadratum distantiae corporis a centro. Facto autem $y^4 u$ constante ex aequatione altera perspicitur euanescere resistentiam R.

Corollarium 2.

1065. Si corpus ad centrum C accedit ita vt y decrescat erit $ds = -\frac{y dy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Quare erit resistentia $R = \frac{(y^3 du + 4y^2 u dy) \sqrt{(y^2 - p^2)}}{p^3 dy}$, et $q = \frac{y^2 u dy}{(y^4 du + 4u dy) \sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Ex quo intelligitur si $y^4 u$ fuerit potestas ipsius y ,

cuius exponens est numerus affirmatiuus, resistentiam fore affirmatiuam. At si exponens illius potestatis ipsius y fuerit negatiuus resistentia quoque erit negatiua.

Corollarium 3.

1066. Si motus angularis debeat esse aequalis seu u constans, erit $du = 0$ ideoque $R = \frac{4y^2 u \sqrt{(y^2 - p^2)}}{p^2}$ et $q = \frac{y^2}{4\sqrt{(y^2 - p^2)}}$.

Corollarium 4.

1067. Sit celeritas angularis vt potestas exponentis n distantiae y seu $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ erit resistentia $R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(y^2-p^2)}}{f^{2n-1}p^2}$, vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+4}dp}{f^2 p^3 dy}$; et $v = \frac{y^{2n+4}}{f^{2n-1}p^2}$ atque pro medio resistente in duplicata ratione celeritatum erit exponens resistentiae $q = \frac{y^2}{2(n+2)\sqrt{(y^2-p^2)}}$.

Exemplum.

1068. Sit curua AM iterum spiralis hyperbolica aequatione $p = \frac{a y}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$ expressa, et celeritas angularis sit vt y^n seu vt ante $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$ Cum autem sit $\sqrt{(y^2 - p^2)} = \frac{y^2}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$, erit $R =$

$$R = \frac{2(n+2)y^{2n+2}\sqrt{(a^2+y^2)}}{a^2 f^{2n-1}}; \quad v = \frac{y^{2n+2}(a^2+y^2)}{a^2 f^{2n-1}}$$

et vis centripeta $P = \frac{2y^{2n+1}}{f^{2n-1}}$. Si resistentia ponatur ipsis celeritatibus proportionalis erit, exponens resistentiae $= \frac{a^2 f^{2n-1}}{(2n+4)^2 y^{2n+2}}$. Sin resistentia quadratis celeritatum ponatur proportionalis, et exponens resistentiae sit q , erit $q = \frac{\sqrt{(a^2+y^2)}}{2n+4}$. Quae prorsus conueniunt, cum iis quae superiore exemplo (1061) sunt tradita.

PROPOSITIO 127.

Problema.

1069. Si detur resistentia per quamuis celeritatum potestatem simulque exponens resistentiae, praeterea etiam datus sit motus angularis corporis circa centrum C: ex his inuenire curuam, quam corpus describet et vim centripetam ad centrum C tendentem. Tabula XIII
Fig. 4.

Solutio.

Positis $CM = y$, $CT = p$, $Mm = ds$, altitudine celeritati in M debita $= v$, vi centripeta $= P$, resistentia $= R$; sit resistentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, vbi q detur per y . Deinde motus angularis consideretur vt ante

N n n te

te tanquam motus puncti factus in peripheria circuli ELl , cuius radius $CE=1$. Posita nunc celeritate, qua Ll describitur, debita altitudini u , erit vt in praec. Prop. elicuimus $v = \frac{y^4 u}{p^2}$, $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$ et $R = -\frac{y^4 du - 4y^3 u dy}{p^2 ds} = \frac{v^m}{q^m} = \frac{y^{4m} u^m}{p^{2m} q^m}$. Haec posterior

aequatio autem, quia u et q sunt quantitates datae, exprimet naturam curuae quaesitae, pro qua ergo habebitur $y du + 4 u dy + \frac{y^{4m-3} u^m ds}{p^{2m-2} q^m} = 0$ seu $y du + 4 u dy = \frac{y^{4m-2} u^m dy}{p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Cognita vero curuae descriptae natura, seu aequatione inter p et y innotescet statim vis centripeta P quippe est $P = \frac{2y^4 u dp}{p^3 dy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

1070. Si celeritas angularis debeat esse aequabilis, quod in vacuo nisi in circulo fieri nequit, erit $du = 0$, haecque prodibit pro curua quaesita aequatio $4p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)} = y^{4m-2} u^{m-1}$. Data ergo q per y , aequatio haec est integralis inter p et y , ex qua curua potest construi.

Corollarium 2.

1071. Si fuerit u per y data vt $u = \frac{y^{2n}}{f^{2n-1}}$, erit $(2n+4)p^{2m-2} q^m \sqrt{(y^2 - p^2)} = y^{2m+2n}$

$\frac{y^{2mn+4m-2n-2}}{f^{(m-1)(2n-1)}}$. Quae quoque est integralis inter y et p , ideoque ad curuam construendam est idonea.

Corollarium 3.

1072. Si celeritas angularis detur per arcum EL, seu du per eius elementum $Ll = \frac{p \cdot M^m}{y^2}$ (1063)

$$= -\frac{p dy}{y \sqrt{(y^2 - p^2)}}, \text{ ita vt fit } du = \frac{u^k p dy}{g^k y \sqrt{(y^2 - p^2)}};$$

erit $\frac{dy}{\sqrt{(y^2 - p^2)}} = \frac{g^k y du}{u^k p}$. Hoc valore substituto

$$\text{habebitur } y du + 4 u dy = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{p^{2m-1} q^m} \text{ atque}$$

$$p^{2m-1} = \frac{g^k y^{4m-1} u^{m-k} du}{q^m y du + 4 q^m u dy}.$$

Ex qua aequatione valor ipsius p substitutus in aequatione $du = \frac{u^k p dy}{g^k y \sqrt{(y^2 - p^2)}}$, determinabit u in y . Vnde quoque aequatio inter p et y obtinebitur.

Corollarium 4.

1073. Si resistentia fuerit in simplici ratione celeritatum seu $m = \frac{1}{2}$; aequatio 1

$$\frac{g^k y u^{\frac{1}{2}-k} du}{(y du + 4 u dy) \sqrt{q}}$$

statim dabit u per y .

Qui va-

lor

lor in aequatione $du = \frac{u^k p dy}{g^k y \sqrt{(y^2 - p^2)}}$ substitutus
dabit aequationem inter y et p .

Exemplum I.

1074. Resistat medium in duplicata ratione
distantiarum sitque medii exponens $q = \frac{y}{a}$. Mo-
tus vero angularis sit aequabilis seu $u = b$. Erit $m = 1$,
atque $4\sqrt{(y^2 - p^2)} = ay$ (1070). Vnde prodit $p =$
 $\frac{y\sqrt{(16 - a^2)}}{4}$. Quare curua descripta erit spiralis loga-
rithmica, in qua anguli quem radius cum tangente
conficit sinus est $\frac{\sqrt{(16 - a^2)}}{4}$ et cosinus $= \frac{a}{4}$. Vis cen-
tripeta vero erit $= \frac{3 \cdot 2by}{16 - a^2}$. Sin autem medium po-
natur vniforme seu $q = c$, erit $4c\sqrt{(y^2 - p^2)} = y^2$,
et $p = \frac{y\sqrt{(16cc - yy)}}{4c}$.

Exemplum 2.

1075. Resistat medium in simplici ratione
celeritatum, sitque id vniforme: ponatur vero
etiam motus angularis vniformis, erit $m = \frac{1}{2}$, $q = c$,
 $u = b$. His substitutis habebitur pro curua descripta
haec aequatio $p = 4\sqrt{bc}(y^2 - p^2)$ seu $p = \frac{4y\sqrt{bc}}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$.
Quae curua quoque est spiralis logarithmica, in qua
anguli intersectionis sinus est $\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$, cosinus $=$
 $\frac{1}{\sqrt{(1 + 16bc)}}$ atque tangens $= 4\sqrt{bc}$. Vis centripeta ve-
ro erit $= \frac{y(1 + 16bc)}{8c}$. Quod in his formulis vnifor-
mitas dimensionum non obseruetur ratio est, quod
radium circuli EC posuimus $= 1$. Hac igitur vnitate
vniformitas dimensionum est restituenda.

Scho-

Scholion.

1076. Plura centra virium in hoc capite non considerabimus, cum in vacuo etiam pro hoc casu vix quicquam ad motum determinandum deduci potuerit. Si centra quidem attrahant in simplici ratione distantiarum, quotcunque centra plus non habent difficultatis quam vnum in eadem ratione attrahens, quemadmodum ostendimus supra (702). Haecque convenientia in medio resistente aequè locum habet ac in vacuo. Quamobrem cum iam vnum centrum in simplici ratione distantiarum attrahens considerauerimus, non opus est vt de pluribus eiusdem naturae verba faciamus. Progrediemur igitur ad casum latissime patentem, in quo omnes motus, qui sunt in eodem plano, comprehenduntur. Considerabimus scilicet duas vires absolutas, quarum directiones sunt ad se inuicem normales, singulae vero inter se parallelae. Ad huiusmodi enim duas vires quasuis potentias in eodem plano existentes resolui posse constat. Praeterea in hac tractatione non solum omnes casus potentiarum absolutarum complectemur, sed etiam quaedam eximia pro vacuo obseruare licebit circa vires centripetas, quae in praecedentibus difficulter patent. Namque hic statim curuam descriptam ad aequationem inter coordinatas orthogonales reducemus, quod ibi inter distantiam a centro et perpendicularum in tangentem est factum.

PROPOSITIO 128.

Problema.

Tab. XIII.
Fig. 5.

1077. Si corpus in M a duabus viribus sollicitetur, quarum una habeat directionem MP normalem ad datam AC, altera vero directionem MQ parallelam ipsi AC seu normalem in BC, determinare curvam AM quam corpus in quocunque medio resistente ab his potentiis sollicitatum describet.

Solutio.

Vocetur $CM = MQ = x$, $PM = CQ = y$, elementum $Mm = ds$: ductisque mp et mq , erit $Pp = -dx$ et $Qq = dy$; atque $ds \sqrt{=} (dx^2 + dy^2)$. Sit vis qua corpus secundum MP trahitur $= P$ et vis qua corpus secundum MQ trahitur $= Q$, resistentia vero fit $= R$, et celeritas in M debita altitudini v . Resoluantur nunc vires P et Q in normales et tangentiales ope demissorum perpendicularorum ex P et Q in tangentem Tt; erit ergo vis normalis ex P orta $= \frac{P \cdot Pt}{PM} = -\frac{P dx}{ds}$, et vis tangentialis $= \frac{P \cdot Mt}{MP} = \frac{P dy}{ds}$. Ex vi Q vero resoluta oritur vis tangentialis $= \frac{Q \cdot Mt}{MQ} = -\frac{Q dx}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Q \cdot Qt}{MQ} = \frac{Q dy}{ds}$. Tota ergo vis normalis erit $= \frac{Q dy - P dx}{ds}$; et vis tangentialis promouens $= -\frac{Q dx - P dy}{ds}$; quae vi resistentiae R debet diminui, quo tota vis motum accelerans prodeat. Ex his, ergo posito r radio osculi in M, erit $\frac{Q dy - P dx}{ds} = \frac{2v}{r}$
et

et $dv = -Qdx - Pay - Rds$ (866). Eliminata ergo v ex his aequationibus orietur aequatio naturam curvae descriptae exprimens. Q. E. I.

Corollarium I.

1078. Si ponatur elementum curua ds constans erit radius osculi $r = \frac{ds dy}{d dx} = \frac{ds dx}{d ay}$. Hoc igitur valore substituto erit $\frac{2v d dx}{d y} = P dx - Q dy$.

Corollarium 2.

1079. Ex aequationibus inuentis coniungendis reperietur $P = -\frac{2v d dy - d v dy - R d y ds}{d s^2}$ et $Q = -\frac{2v d dx - d v dx - R d x ds}{d s^2}$. Ex quibus si relatio inter P et Q datur, statim habetur aequatio, in qua v per solam curuam inuenitur.

Corollarium 3.

1080. Si corpus perpetuo a vi quacunque ad centrum C attrahatur erit $P:Q = y:x$. Tunc igitur habebitur ista aequatio $2vx d dy + x d v dy + R x dy ds = 2v y d dx + y d v dx + R y dx ds$. Quae posito $y = px$ abit in hanc $2vx d dp + 4v d p dx + x d v dp + R x dp ds = 0$, seu $d \cdot v x^4 dp^2 + R x^4 dp^2 ds = 0$.

Corollarium 4.

1081. In vacuo, quo R euanescit et corpus ad centrum C attrahitur, erit $v x^4 dp^2 = A ds^2$ seu $v = \frac{A ds^2}{x^4 dp^2}$. Praeterea vero erit $\int P d y = \frac{v dy^2}{ds^2}$ et

$v = -\frac{ds^2 f p dy}{dy^2}$. Quare habebitur ista aequatio $-\frac{A dy^2}{x^4 d p^2} = \int P dy$, seu assumpto Q loco P haec aequatio $-\frac{A dx^2}{x^4 d p^2} = \int Q dx$.

Corollarium 5.

1082. Si vis centripeta ad C tendens fuerit

$$= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1 + pp)^{\frac{n}{2}}}{f^n}, \text{ erit } Q = \frac{x^n (1 + pp)^{\frac{n+1}{2}}}{f^n}$$

In vacuo igitur pro curua descripta habebitur haec

$$\text{aequatio } -\frac{A dx^2}{x^4 d p^2} = \int \frac{x^n dx (1 + pp)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n}. \text{ Posi-}$$

to B pro $-A f^n$, et dx constante, orietur differen-

ando haec aequatio $2B x dx d p + 4B dx^2 dp + x^{n+5} dp^3$

$(1 + pp)^{\frac{n-1}{2}} = 0$. Posito vero dp constante prodi-

ffet haec aequatio $2B x d dx - 4B dx^2 = x^{n+5} dp^2 (1 +$

$pp)^{\frac{n-1}{2}}$. Fiat $x = \frac{1}{q}$; erit $2B q^{n+2} ddq + dp^2 (1 +$

$pp)^{\frac{n-1}{2}} = 0$. Harum aequationum quamvis integratio

non appareat, tamen integralis est $x^{n+5} dp^2 (1 +$

$pp)^{\frac{n+1}{2}} = C ds^2$, quae ex cap. praeced. inuenitur.

Corollarium 6.

1083. Quanquam autem haec aequatio $2B$

$q^{n+2} ddq + dp^2 (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} = 0$ est differentialis

secundi gradus, tamen commodior est quam diffe-

ren-

rentialis primi gradus ad curvas determinandas, quas corpus proiectum describit attractum vel in simplici distantiarum ratione vel in reciproce duplicata. In simplici enim ratione habebitur $n=1$ atque $2Bq^3 ddq + dp^2 = 0$. Fiat $dp = wdq$ ob dp constans erit $ddq = -\frac{dw dq}{w}$, vnde $2Bq^3 dw = w^3 dq$, et $\frac{B}{w^2} = \frac{1}{q^2} + C$. Erit ergo $w = \frac{q\sqrt{B}}{\sqrt{1+Cq^2}}$ atque $p + \alpha = \frac{\sqrt{B(1+Cq^2)}}{C} = \frac{\sqrt{B(x^2+C)}}{Cx} = \frac{y}{x} + \alpha$ seu $\alpha x + \xi y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Quia B est quantitas negatiua.

Corollarium 7.

1084. Si est $n=-2$ seu si corpus in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahitur, erit in

vacuo curua descripta $2Bddq = \frac{dp^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ sumto B

negatiuo, vt oportet. Integrando ergo erit $2Bdq + Cdp = \frac{p \cdot 1 \cdot p}{\sqrt{(1+pp)}}$, denuoque integrando $2Bq + Cp = D + \sqrt{(1+pp)}$ seu $2B + Cy = Dx + \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Quarum curuarum vtraque est sectio conica, illa quidem ellipsis tantum, haec vero omnes complectitur.

Scholion I.

1085. In Capite praecedente, quo de motu corporum in vacuo egimus, curvas quoque determinauimus, quas corpus a vi centripeta vel ipsis distantibus vel reciproce earum quadratis proportionali describit; easque conuenientes inuenimus cum his in corollariis datis. Modi quidem maxime sunt

O o o

di-

diuerſi, nam ibi ex comparatione arcuum circularium aequationes algebraicas ſumus adepti, hic vero ipſa integratio ſponte aequationem algebraicam inter coordinatas dedit. Haec vero methodus, quamuis in praefatis caſibus duobus multo fit commodior, tamen aliis laborat defectibus. Nam in aliis viſ centripetae hypotheſibus nequidem hac methodo aequatio differentialis dari poteſt pro curua deſcripta, quod tamen illa directa methodo ſemper aeque facile fieri poteſt. Hoc tamen ipſius analyſeos defectui potius eſt adſcribendum quam methodo, cum aequationis differentio-differentialis

$2Bx\,ddx - 4B\,ddx^2 = x^{n+5} dp^2 (1+pp)^{\frac{n-1}{2}}$ integralem
 $x^{n+5} dp^2 (1+p^2)^{\frac{n+1}{2}} + Cds^2 = 0$ eſſe ſciamus ex ipſa methodo cap. praeced. viſitata, hanc vero integralem ex ipſa aequatione differentio-differentiali erudere nequeamus.

Scholion 2.

1086. Problematum reciprocorum, quae circa has potentias proponi poſſunt, hoc iam eſt ſolutum coroll. 2. quo ex data curua, medio reſiſtente et celeritate in ſingulis punctis quoque data, quaeruntur vires ſecundum MP et MQ tendentes, quae hunc motum producant. Vt ſi curua AMB fuerit circulus centrum in C et radium $AC = a$ habens, et reſiſtentia ſit $= \frac{v}{c}$, atque celeritas conſtans nempe $v = b$, erit $x^2 + y^2 = a^2$ et $P = \frac{2bcy - abx}{a^2c}$ et

Q =

$Q = \frac{2bcx + aby}{a^2c}$. Simili modo cum sint quinque res, quae in considerationem veniunt, nempe duae potentiae P et Q, tertio resistentia R, quarto celeritas in singulis locis seu v , et quinto natura curvae descriptae seu aequatio inter x et y ; semper tria horum tanquam data accipi possunt et duo reliqua ex iis inueniri. Hanc ob rem decem formari possent problemata pro numero combinationum, quo tria ex quinque accipi possunt. Sed ne nimis detineamur in his euoluendis, e quibus non multum ad usum deduci poterit, vnicum problema quo in medio resistente in duplicata ratione celeritatum ex data vi centripeta curua descripta quaeritur.

PROPOSITIO 129.

Problema.

1087. *Si corpus moueatur in medio, quod in duplicata ratione celeritatum resistit; et si potentia P fuerit ad Q vt MP ad MQ, seu quod idem est, si corpus trahatur ad centrum C vi quacunque determinare curuam AMB, quam corpus describet.*

Tab. XII.
Fig. 5.

Solutio.

Positis vt ante $CP = x$, $PM = y$, $Mm = ds$, et $y = px$, sit celeritas in M debita altitudini v et exponens resistentiae q , erit $R = \frac{v}{q}$. Et cum sit P:

$$Q = y : x \text{ erit } 2vx ddp + 4vdpdx + xdvdp + \frac{vxdpds}{q} = 0$$

000 2 (1080).

(1080). Quae aequatio diuisa per $vxdp$ abit in hanc $\frac{2ddp}{dp} + \frac{4dx}{x} + \frac{dv}{v} + \frac{ds}{q} = 0$; cuius integralis est

$$e^{\int \frac{ds}{q}} x^4 v dp^2 = A ds^2; \text{ seu } v = \frac{A e^{-\int \frac{ds}{q}} ds^2}{x^4 dp^2}. \quad \text{Haec}$$

vero aequatio $Q ds^2 + 2v ddx + dv dx + \frac{v dx ds}{q} = 0$

(1079) per $e^{\int \frac{ds}{q}} dx$ multiplicata et integrata dat

$$\int e^{\int \frac{ds}{q}} Q dx + \frac{e^{\int \frac{ds}{q}} v dx^2}{ds^2} = 0; \quad \text{in qua ille valor ipsius}$$

v inuentus substitutus dat $\int e^{\int \frac{ds}{q}} Q dx + \frac{A dx^2}{x^4 d p^2} = 0$. Differentietur haec aequatio posito dx constante erit

$$e^{\int \frac{ds}{q}} Q x^5 dp^2 = 5 A dx^2 dp + 2 A x dx ddp. \quad \text{Quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.}$$

Corollarium I.

1088. Aequatio haec pro curua descripta non differt ab aequatione in vacuo inuenta (1081)

nisi quod hic habeatur $\int e^{\int \frac{ds}{q}} Q dx$, cum ibi ipsi $\frac{A dx^2}{x^4 d p^2}$ aequaretur tantum $\int Q dx$.

Corollarium 2.

1089. Si elementum dp pro constante fuisset assumtum, tum prodisset haec aequatio $e^{\int \frac{ds}{q}} Q x^5 dp^2 = 4A$

$= 4A dx^2 - 2A x ddx..$ In qua si ponatur $x = \frac{1}{z}$, ori-
etur $e^{\int \frac{ds}{q}} Q dp^2 = 2A z^2 d dz.$

Corollarium 3.

1090. Si vis centripeta ad C tendens fuerit

$$= \frac{MC^n}{f^n} = \frac{x^n (1 + p^2)^{\frac{n}{2}}}{f^n}, \text{ erit } Q = \frac{x^n (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}}}{f^n} \frac{1}{(1 + pp)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Quare pro curua descripta habebitur

ista aequatio $e^{\int \frac{ds}{q}} dp^2 = \frac{2A f^n z^{n+2} d dz}{(1 + pp)^2}.$ Quae

sumtis logarithmis et differentiata dat $\frac{ds}{q} = \frac{(n+2)dz}{z} + \frac{d^2 z}{dz^2} - \frac{(n-1)pdp}{1+pp}.$ Est vero $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dz^2 + p^2 dz^2 + z^2 dp^2 - 2pzdpdz)}.$

Corollarium 4.

1091. Iisdem manentibus sit $q = \frac{MC}{\alpha} \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\alpha z},$
erit $\frac{\alpha \sqrt{(dz^2 + p^2 dz^2 + z^2 dp^2 - 2pzdpdz)}}{z \sqrt{(2+pp)}} = \frac{(n+2)dz}{z} + \frac{d^2 z}{dz^2} - \frac{(n-1)pdp}{1+pp}$

Ponatur $z = e^{\int u dp},$ atque prodibit ista aequatio
 $\frac{\alpha dp \sqrt{(1 - 2pu + u^2 + p^2 u^2)}}{\sqrt{(1+pp)}} = (n+3)udp + \frac{d du + 2u du dp}{du + u^2 dp} + \frac{(n-1)pdp}{1+pp}$

Scholion.

1092. Hanc aequationem differentialem se-
cundi gradus dubito, an in quoquam casu ad differen-

tialem primi gradus possit reduci; id quod tamen supra, vbi vires centripetas ex instituto considerauimus, fecimus (1020). In medio igitur resistente haec operandi ratio non tantam vtilitatem afferre videtur, quantam in vacuo attulit, saltem pro pro casibus quibus n est vel 1 vel -2 . Quamobrem cum in hac re vix quicquam amplius sperari possit, hic motum in medio resistente, qui in plano fit relinquo atque ad motus non in plano factos considerandos progredior, coniuncta cum potentiis absolutis corpus sollicitantibus vi resistentiae. Quo in negotio, cum facile intelligatur, parum ad euiden-tem cognitionem perducere licere, contentus ero regulas generales tradidisse, quibus pro quouis problemate proposito ad aequationem peruenire poterimus.

PROPOSITIO 130. Problema.

Tabula XIII
Fig. 6.

1093. *In medio quocunque resistente sollicitetur corpus a tribus potentiis, quarum vna sit tangentialis, reliquae duae normales ad directionem corporis et in duobus planis inter se normalibus ad se inuicem normales, determinare motum corporis et curuam quam describet.*

Solutio.

Ex elementi Mm quod corpus describit, terminis M et m in planum fixum APQ demittantur per-

perpendiculara QP et qp . Deinde ponatur $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, altitudo celeritati in M debita $=v$. Iam sit vis tangentialis $=T$. Normalium altera cuius directio in plano Mq est sita, sit $=N$, et altera cuius directio ad planum Mq est normalis sit $=M$. Vis resistentiae vero sit $=V$. Quia autem vis resistentiae V vires normales non afficit, sed tantum effectum vis tangentialis minuit; effectus virium N et M immutatus manet, sed in effectu vis tangentialis definiendo loco T poni debet $T-V$. Quare cum harum virium effectus iam supra (809) determinauerimus, eadem aequationes ibi datae et hic valebunt si modo $T-V$ loco T ponatur. Hanc ob rem pro medio resistente prodibunt hae aequationes $dv=(T-V)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $2vdy dzddy-2vddz(dx^2+dy^2)=N(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; atque $-2vdxddy=M(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (809). Ex quibus eliminata v duae habebuntur aequationes tres coordinatas x , y et z inuoluentes, quae naturam curuae quaesitae expriment. In illis autem aequationibus elementum dx constans est assumtum. Q. E. I.

Corollarium I.

1094. Duae posteriores aequationes coniunctae eliminanda v dant aequationem hanc; $\frac{adz(dx^2+dy^2)}{dxddy} - \frac{dydz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{M}$. Quae pro medio quocunque aequae ac pro vacuo valet (810).

Co-

Corollarium 2.

1095. Perspicitur ex hac aequatione, si vel N vel M evanescit, qualis sit motus corporis. Nam posito $N=0$ erit $\frac{dz}{dx} = \frac{dydy}{dx^2 + dy^2}$ seu $adz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Est vero $\frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ tangens anguli, quo elementum Mm inclinatur ad Qq . Quare hic angulus est constans, propterea QM habet ad projectionem BQ curvae descriptae in plano APQ datam rationem.

Corollarium 3.

1096. Si $M=0$ erit $ddy=0$, ideoque projectio BQ erit linea recta. Totam igitur curvam a corpore descriptam positam erit in plano ad planum APQ normali, idque secante recta BQ .

Corollarium 4.

1097. Ex aequatione § 1094 erit $ddz(dx^2 + dy^2) = dydzddy + \frac{Ndx dy^2 \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{M}$. Quare cum sit $-2vdxddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ erit $-2vdxddz(dx^2 + dy^2) = Mdydz(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + Ndx(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Corollarium 5.

1098. Quare si fuerit $\frac{Mdydz}{dx} + N\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0$, corpus etiam movebitur in plano, cum tunc sit $ddy=0$ et $dz=adx$. Projectio enim
cur-

curvae descriptae in plano ad planum APQ in AP normali erit linea recta.

Corollarium 6.

1099. Planum autem in quo posita sunt duo Tab. XIV.
 elementa Mm et $m\mu$, quae corpus describit, simili Fig. 1.
 modo quo in vacuo determinatur, cum eius deter-
 minatio tantum a coordinatis x , y et z pendeat.
 Nempe si hoc planum sit SMR et secet planum A
 PQ recta OR , erit $AO = x - \frac{zdxddy + ydxddz}{dzddy - dyddz}$; tan-
 gens ang. $POR = \frac{dxddy - dyddz}{dxddz}$. Atque tangens an-
 guli quem planum RMS cum plano APQ constituit
 seu $\frac{MQ}{QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2 + (dzddy - dyddz)^2)}}{dxddy}$ (812).

Corollarium 7.

1100. Erit igitur tangens anguli, quem pla-
 num RMS cum plano APQ constituit, aequalis se-
 canti anguli POR ductae in $\frac{ddz}{ddy}$.

Corollarium 8.

1101. In casu igitur, quo vis N evanescit
 cum sit $ddz:ddy = dydz:dx^2 + dy^2$, erit tangens an-
 guli $POR = \frac{dx}{dy}$, seu $POR = RQS$. Tum igitur QV
 in QS incidet. Tangens vero anguli quem RMS
 cum RQS constituit est $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Quare hic an-
 gulus est constans ob $adx = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (1095).
 Reperitur vero $AO = \frac{zdx + ydy - a^2zdz}{dx}$.

Ppp

Co-

Corollarium 9.

1102. Cum in coroll. 1 ratio detur inter ddy et ddz , per vires normales M et N, si eorum proportionalia ipsorum loco substituantur, determinabitur positio plani RMS per differentia prima gradus. Sed haec omnia non magis ad medium resistens respiciunt, quam ad vacuum. Quare etiam haec prorsus conueniunt cum iis, quae supra Prop. 98 sunt tradita.

PROPOSITIO 131.

Problema.

Tab. XIV.
Fig. 2.

1103. Si corpus M in medio quocunque resistente trahatur a tribus viribus, quarum vnus directio sit Mf parallela axi AR alterius directio Mg parallela ipsi PQ applicatae in plano APQ positaе, et tertiae directio sit ipsa MQ ex M in planum APQ normaliter demissa: inuenire motum corporis et lineam quam describet.

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, atque celeritate in M debita altitudini v , sit vis secundum Mf trahens $= P$, vis secundum Mg trahens $= Q$ et vis secundum MQ trahens $= R$ atque vis resistentiae in M $= V$. Hae tres vires si resoluantur in tres alias, quarum directiones cum iis in Prop. praec. conueniunt, prodit vis

tan-

tangentialis $T = \frac{Pdx - Qdy - Rdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$; $N = \frac{Pdx dz - Qdy dz + R(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ atque $M = -\frac{Pdy + Qdx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ (823). Iisdem enim hic denominationibus utimur, quibus ibi Prop. 99. His igitur valoribus in formulis praec. Prop. iuuentis substitutis habebuntur sequentes tres aequationes $dv = -Pdx - Qdy - Rdz - V\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; $\frac{2vdydzddy - 2vddz(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = -Pdx dz - Qdy dz + R(dx^2 + dy^2)$; atque $\frac{2vdxddy}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = Pdy - Qdx$. Quae tres aequationes eliminata v dabunt duas aequationes coordinatas x, y et z continentes, quae naturam curuae descriptae exprimunt. In his autem formulis elementum dx constans est assumtum. Q. E. I.

Corollarium I.

1104. Duae posteriores aequationes cum iis quas pro vacuo inuenimus (823) perfecte conueniunt. Quare quae ex iis sequuntur tam in vacuo quam medio quocunque resistente locum habent. Discrimen autem totum, quod inter motum in vacuo et medio resistente interest, a prima pendet aequatione.

Corollarium 2.

1105. Ex duabus posterioribus aequationibus autem coniunctis oritur haec analogia $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$. Quamobrem loco secundae aequationis, quae reliquis magis est composita sub-

stitui potest haec: $\frac{2vdxddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdz - Rdx$, vel $Pdyddz - Qdxddz = Pdzddy - Rdxddy$, quae v non in-
voluit.

Corollarium 3.

1105. Ope analogiae $ddy:ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$ inuenitur determinatio plani RMS in differen-
tialibus primi gradus vt sequitur; $AO = x - \frac{Pdyz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy}$; tangens anguli POR $\frac{Qdz + Rdy}{Pdz - Rdx}$ atque tangens anguli inclinationis plani
RMS ad planum fixum $RQS = \frac{\sqrt{(Pdz - Rdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2}}{Pdy - Qdx}$
(825).

Corollarium 4.

1106. Si virium P, Q, R duae euanescent motum corporis in plano fieri necesse est. Nam
si P et Q euanescent fit $ddy = 0$, si P et R euanes-
cunt fit $azddy = dyddz$ seu $dz = ady$. Quae omnia
indicant motum fieri in plano.

Corollarium 5.

1107. Si P, Q et R sint proportionales ip-
fis x, y et z , corpus perpetuo ad punctum A tra-
hetur, ideoque motus eius fiet in plano. Hoc
idem indicant formulae, fiet enim $AO = 0$. At ob
 $ddy:ddz = xdy - ydx : xdz - zdx$, est $\frac{xddy}{xay - ydx} = \frac{xddz}{xaz - zdx}$
et integrando $x dy - y dx = ax dz - az dx$. Quare est
 $ax dz = a dy$, vnde constat propositum.

Co-

Corollarium 6.

1108. Si vis P euanescit erit $ddy:ddz=Q:R$,
 atque $R = -\frac{2vldz}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $Q = -\frac{2vldy}{dx^2+dy^2+dz^2}$. His
 valoribus loco P, Q et R in aequatione, qua dv
 definitur, substitutis oritur $dv = \frac{2vdyddy+2vldzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} - VV$
 $(dx^2+dy^2+dz^2)$. Vbi si resistentia V fuerit $=\frac{v}{c}$
 ponaturque $V(dx^2+dy^2+dz^2)$ seu $Mm = ds$, erit
 $lv = l \frac{ads^2}{dx^2} - \frac{s}{c}$; seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dx^2}$.

Corollarium 7.

1109. Si vis R euanescit erit $ddy:ddz=Pdy$
 $-Qdx:Pdz$, atque $P = \frac{2vdxddz}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$ et Q
 $= \frac{2v(dyldz-dzddy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz}$. Erit igitur $dv =$
 $\frac{2vix^2ddz-2vdy^2ddz+2vlydzddy}{(dx^2+dy^2+dz^2)dz} - VV(dx^2+dy^2+dz^2)$.
 Vbi si $V = \frac{v}{c}$ erit $lv = l \frac{ads^2}{dz^2} - \frac{s}{c}$ seu $v =$
 $\frac{ae^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dz^2}$. Simili modo si Q euanescit prodit
 $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}} ds^2}{dy^2}$.

Scholion.

1110. Ad has tres vires P, Q et R omnes
 potentiae, quaecunque excogitari queant, reduci
 possunt. Quamobrem quodcunque problema pro-

positum fuerit, [duae aequationes erui possunt naturam curvae descriptae continentis. Harum vero altera erit differentialis secundi gradus altera differentialis tertii gradus, si quidem valor ipsius v inuentus ex aequatione $\frac{2vdxdy}{dx^2+dy^2+dz^2} = Pdy - Qdx$ differentietur; et differentiale loco dv in aequatione $dv = -Pdx - Qdy - R dz - VV(dx^2+dy^2+dz^2)$ substituatur.

PROPOSITIO 132.

Problema.

Tabula XIV
Fig. 2.

IIII. In medio uniforni, quod resistit in simplici ratione celeritatum, trahatur corpus perpetuo normaliter ad rectam AP; definire curuam quam corpus utcumque proiectum describet.

Solutio.

Ponantur ut hactenus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, celeritas in $M = v$, exponens resistentiae $= c$, vis qua corpus in M iuxta MP trahitur $= S$. His positis erit resistentia $V = \frac{vv}{vc}$, $P = 0$, $Q = \frac{Sy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Sz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$, vnde fit $Q:R = y:z$. Quamobrem habebitur $ddy:ddz = y:z$, atque $yddz - zddy = 0$. Cuius aequationis integralis est $yz - zy = adx$. Porro quoque ob $P = 0$ haec habebitur aequatio $dv = \frac{2vlds}{ds} - Vds = \frac{2vlds}{ds} - \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}} (1108)$, posito $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Cuius integralis est $2\sqrt{cv} = \frac{ds}{dx} (b-x)$, seu $v = \frac{ds^2(b-x)^2}{4cdx^2}$. Hoc valore substituto prodibit $\frac{dy(b-x)^2}{2cdx} = -\frac{Sydx}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Ponatur $z = py$; habebuntur se-

sequentes duae aequationes, ex quibus natura curvae descriptae debet determinari, $y^2 dp = adx$ et ddy
 $(b-x)^2 = -\frac{2cs\sqrt{cx^2}}{\sqrt{1+pp}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

1112. Cum sit $2\sqrt{cv} = \frac{ds}{dx}(b-x)$ erit elementum temporis $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{b-x}$. Integrum ergo tempus, quo corpus motu horizontali secundum AP est promotum erit $= 2\sqrt{c}l\frac{b}{b-x}$. Motus igitur horizontalis conuenit cum motu corporis in eodem medio resistente per rectam AP a nulla potentia sollicitati, celeritate initiali in A debita altitudini $bb:4c$.

Corollarium 2.

1113. Neque vero haec temporis proprietas tantum locum habet, si corpus secundum MP trahitur; seu si fuerit $Q:R=y:z$, sed semper valet si modo est $P=0$. Sequitur enim ex § 1108, quo non nisi $P=0$ ponebatur.

Corollarium 3.

1114. Motus igitur progressius corporis secundum AP est retardatus, et non ultra datum terminum qui est $x=b$, fieri potest. Tempus autem est infinite magnum, quo corpus ad hunc terminum pertingere potest.

Exem-

Exemplum.

1115. Ponamus vim, qua corpus ad rectam AP attrahitur esse ipsis distantis MP^o proportionalem seu $S = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{f} = \frac{2\sqrt{(1+pp)}}{f}$. Ad curvam igitur determinandam habebuntur hae aequationes $fddy(b-x)^2 = -2cydx^2$, et $y^2dp = adx$, in illa ponatur $y = e^{fudx}$, fietque $du + u^2 dx = -\frac{2cdx}{f(b-x)^2}$. Quae aequatio separabilis fit ponendo $u = \frac{q}{b-x}$; prodit enim $\frac{fdq}{2c+fq+fq^2} = -\frac{dx}{b-x}$. Dabitur igitur q et propterea etiam u in x . Consequenter etiam y per x cognoscetur, ex quo habebitur projectio curvae descriptae in plano APQ. Deinde ex dato y per x , dabitur quoque p ob $dp = \frac{adx}{y^2}$ per x , et propterea simul z per x . Quocirca tota curua a corpore descripta poterit construi.

Corollarium 4.

1116. Si b evanescit, simul quoque motus progressivus corporis secundum AP evanescit, et hanc ob rem corpus in plano in A ad AP normali mouebitur attractum ad A in ratione distantiarum. Curvam autem quam hoc casu corpus describit quoque consruere licuit §. 1027 et seqq.



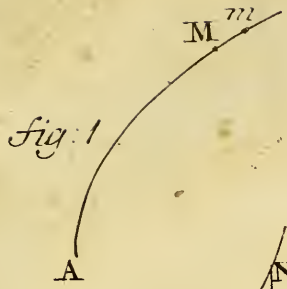


Fig: 1

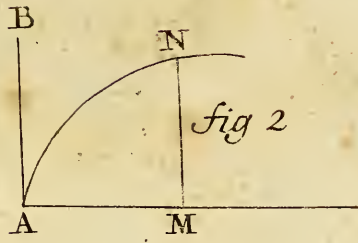


Fig: 2

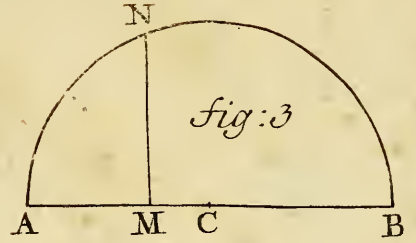


Fig: 3

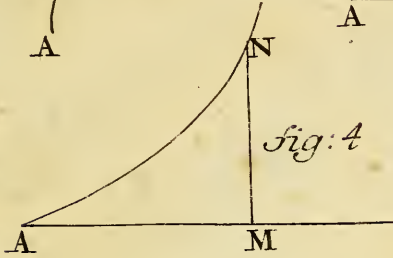


Fig: 4

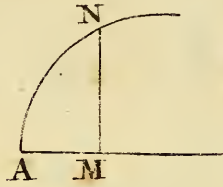


Fig: 5

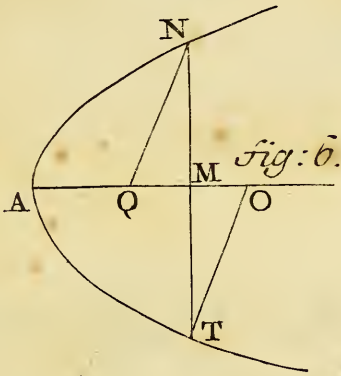
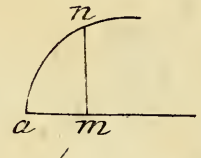


Fig: 6.

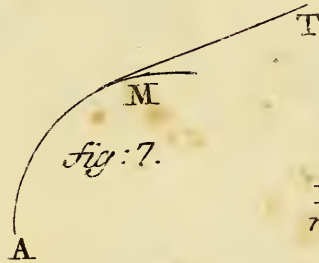


Fig: 7.

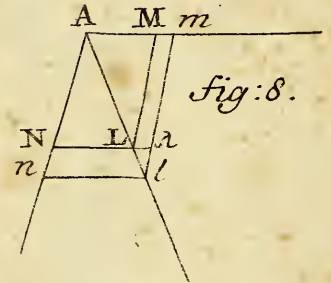


Fig: 8.

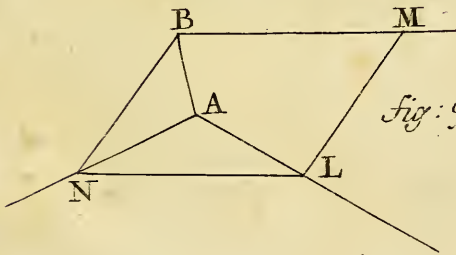


Fig: 9.

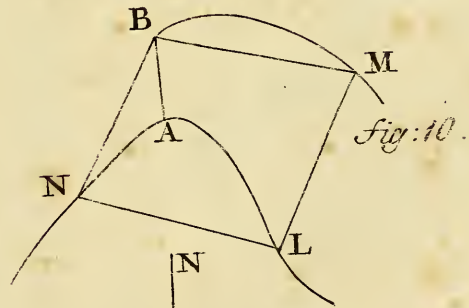


Fig: 10.

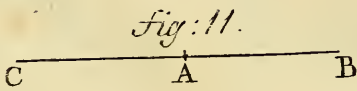


Fig: 11.

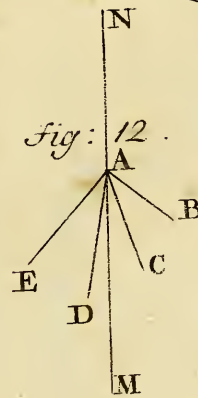


Fig: 12.



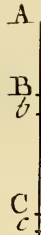
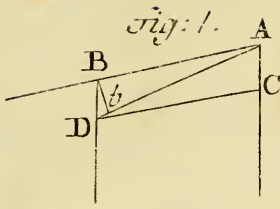


Fig: 2.

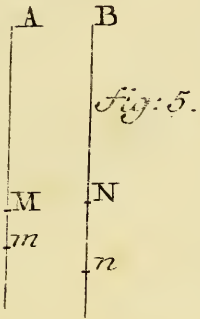


Fig: 5.

Fig: 3.

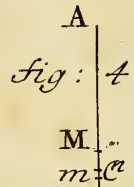
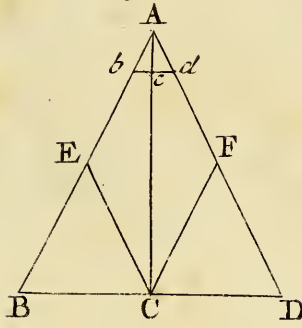


Fig: 4

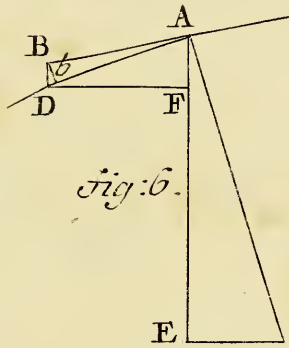


Fig: 6.

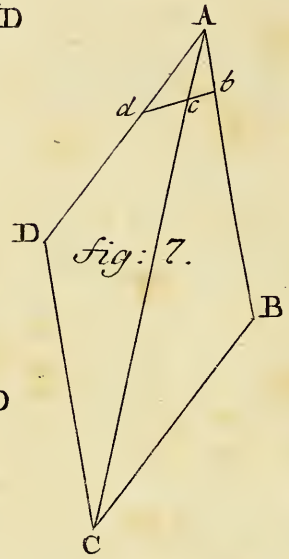


Fig: 7.

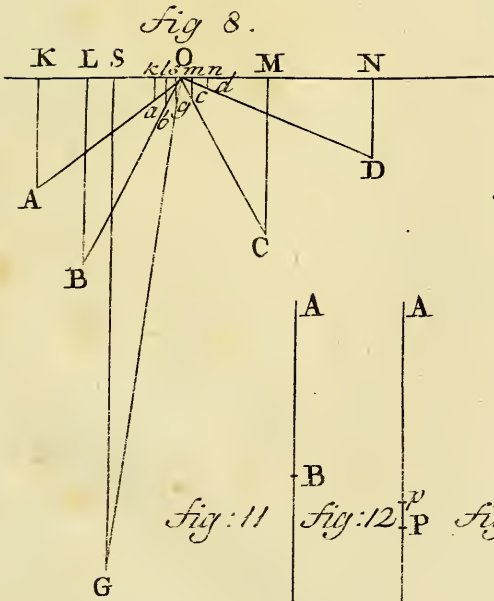


Fig 8.

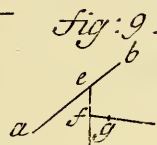


Fig: 9.

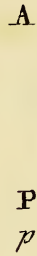


Fig: 10.

Fig: 11

Fig: 12

Fig: 13.

Fig: 14.

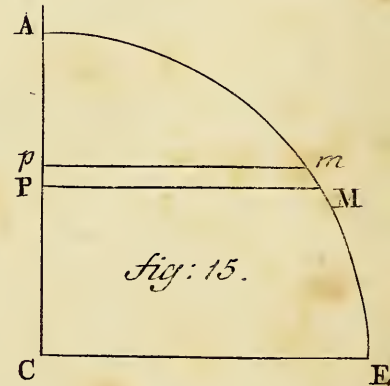
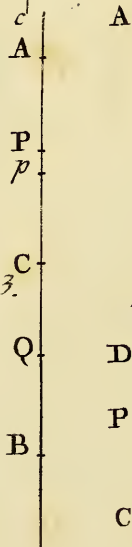
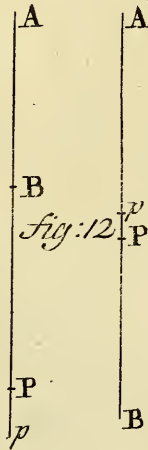
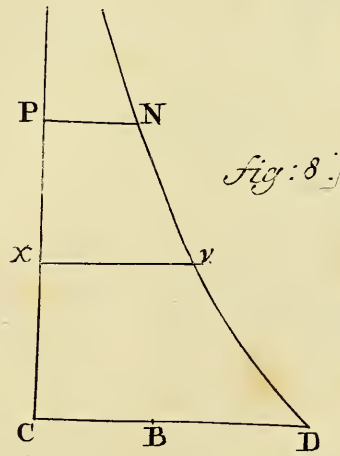
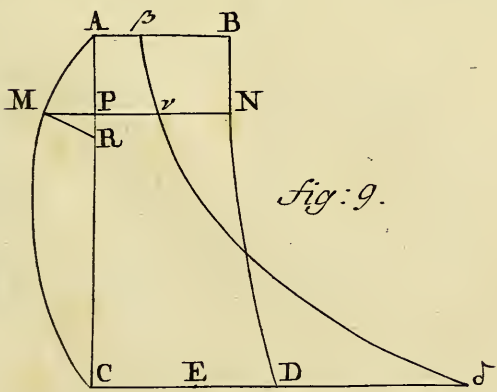
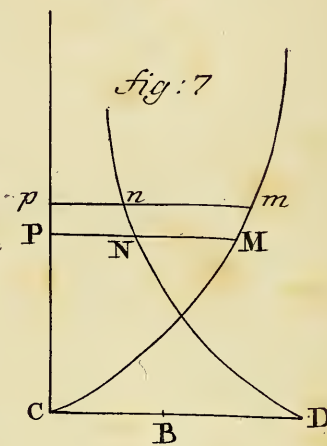
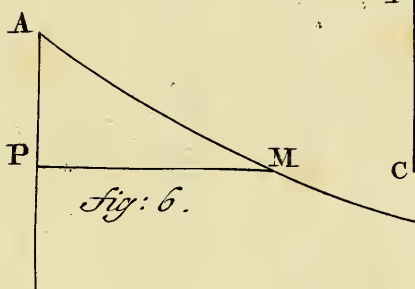
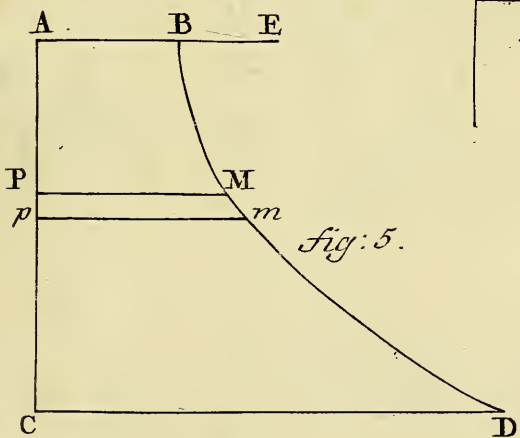
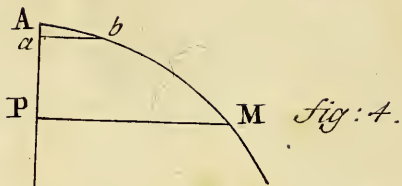
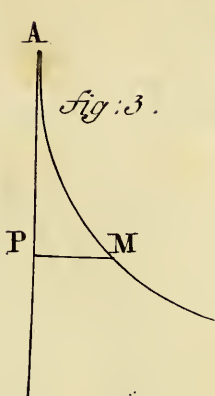
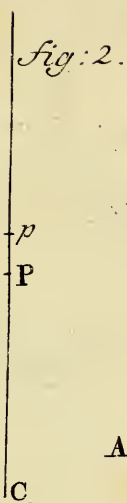
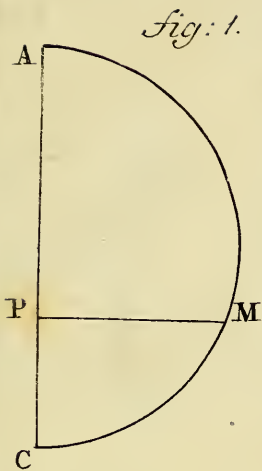


Fig: 15.





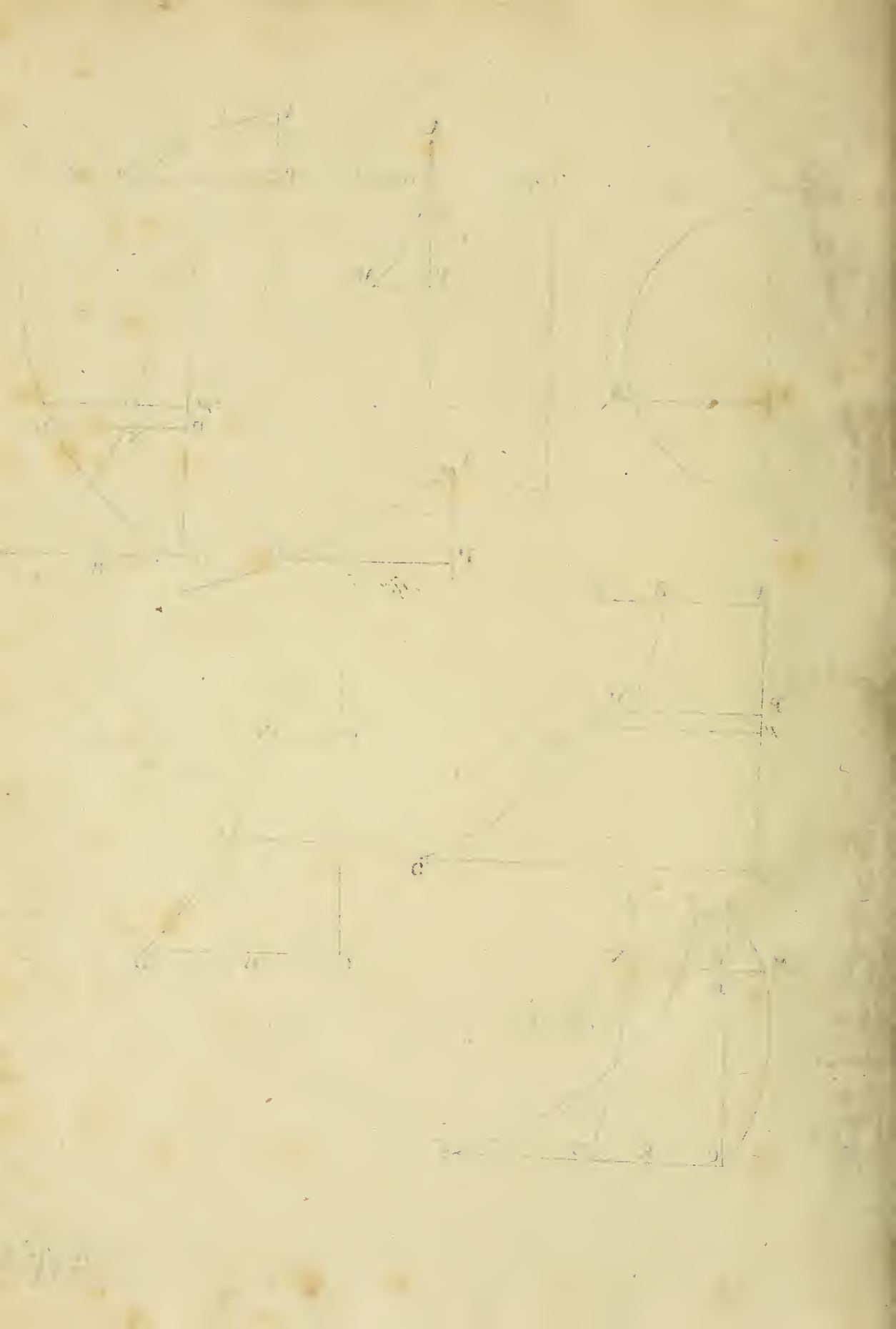


Fig:1.

Fig:2.

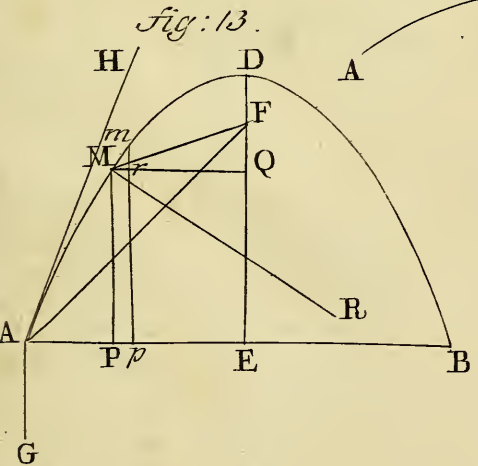
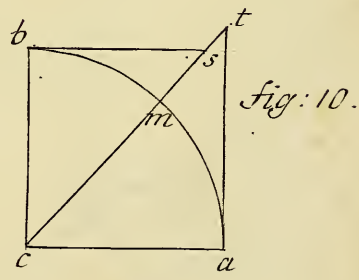
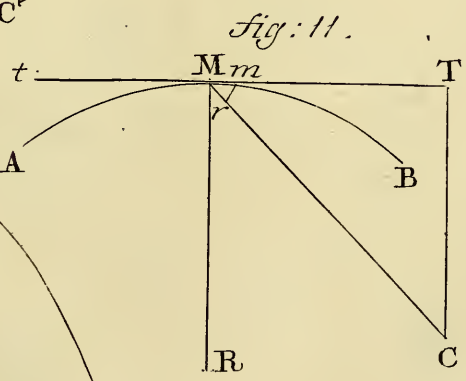
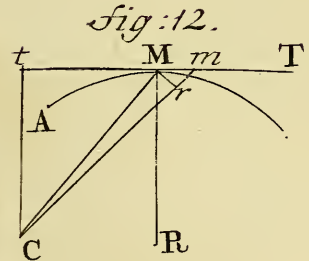
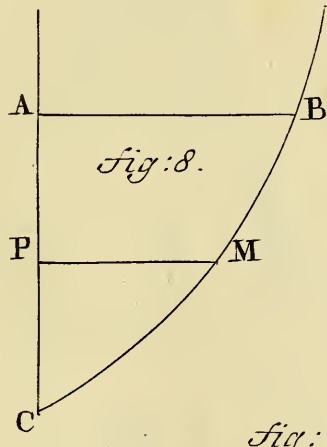
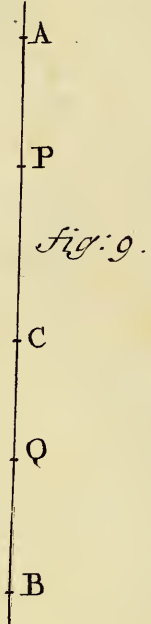
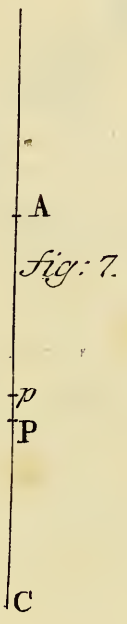
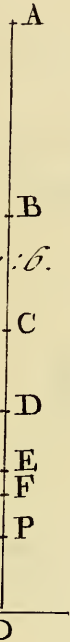
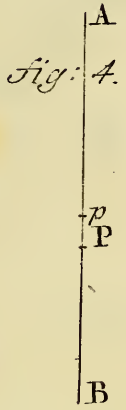
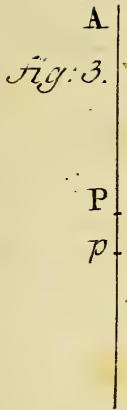
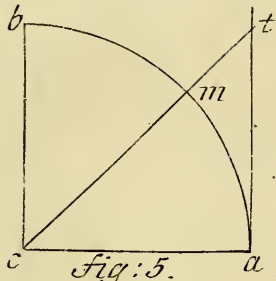
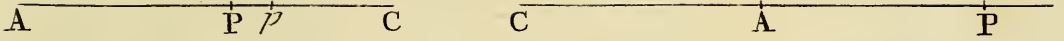
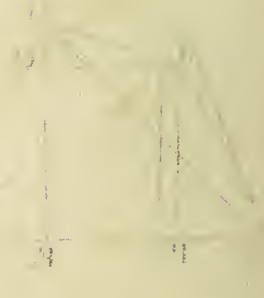
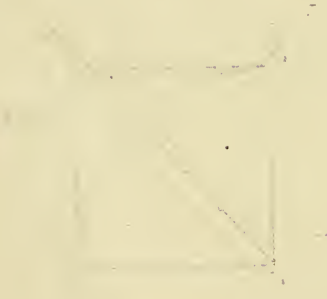
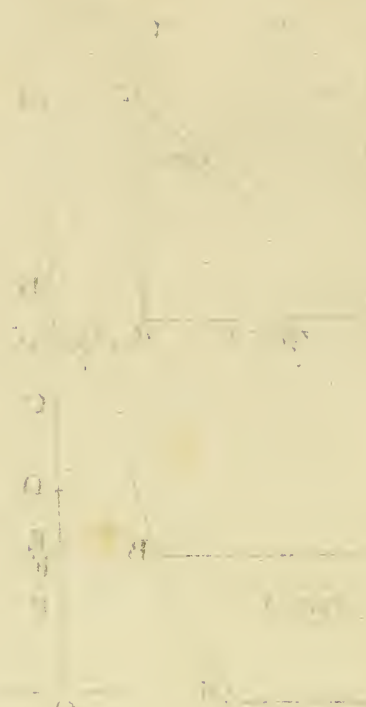
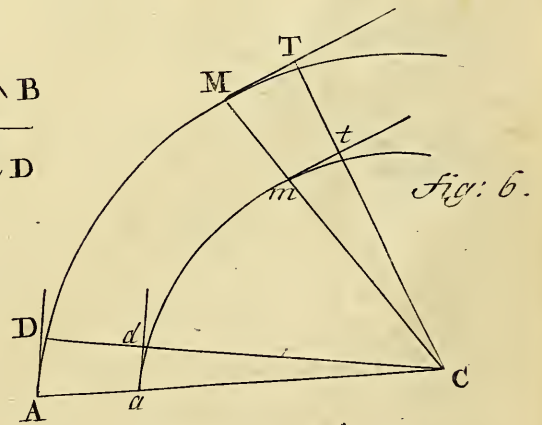
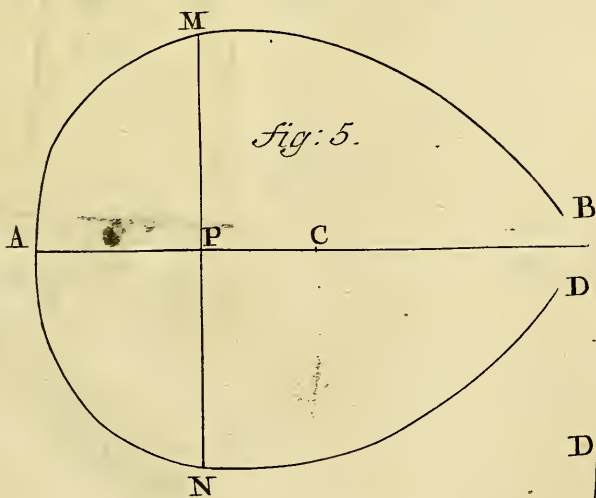
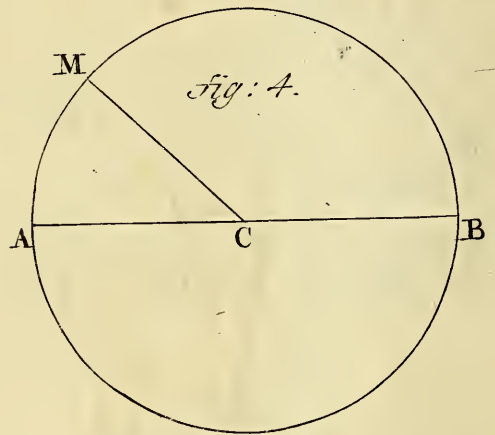
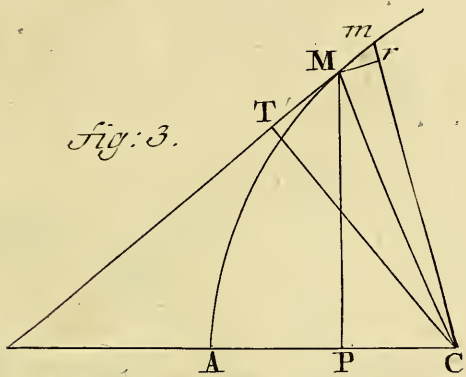
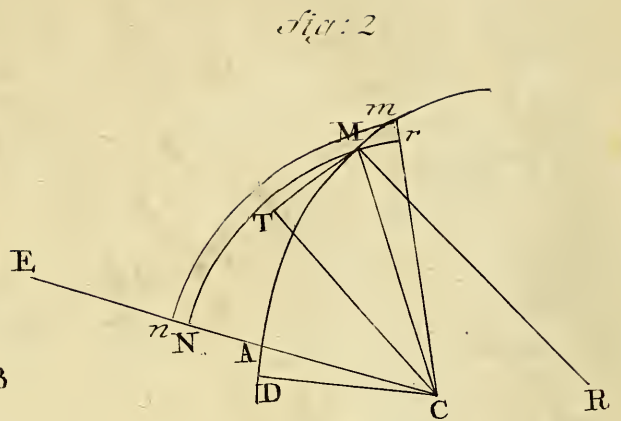
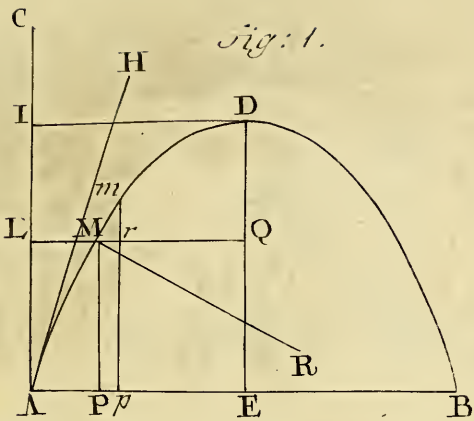


Fig. 1

Fig. 2





11

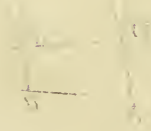


Fig: 1.

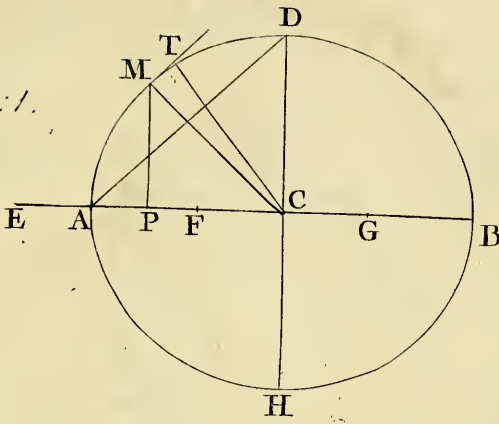


Fig: 3.

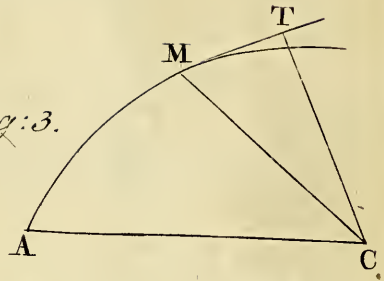


Fig: 2.

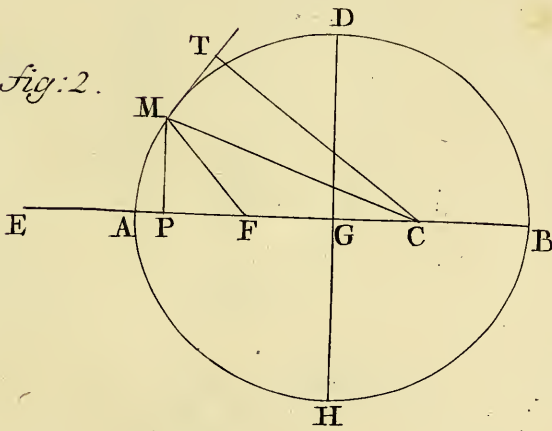


Fig: 4.

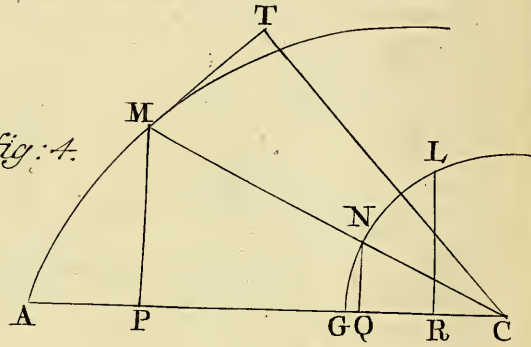


Fig: 5.

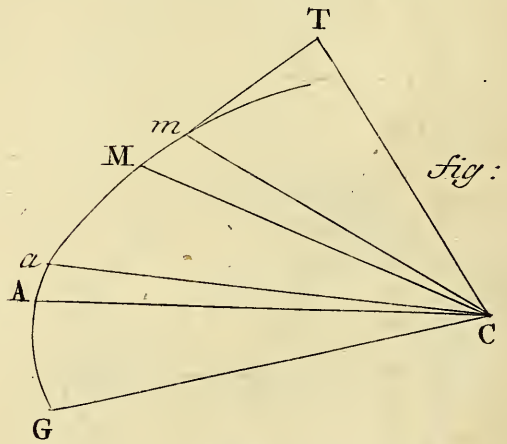
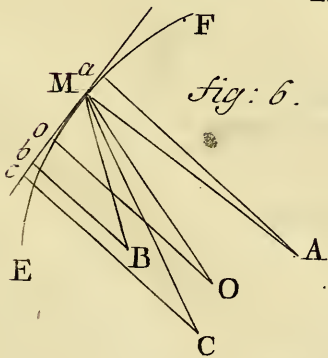
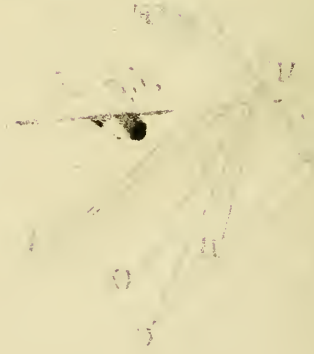
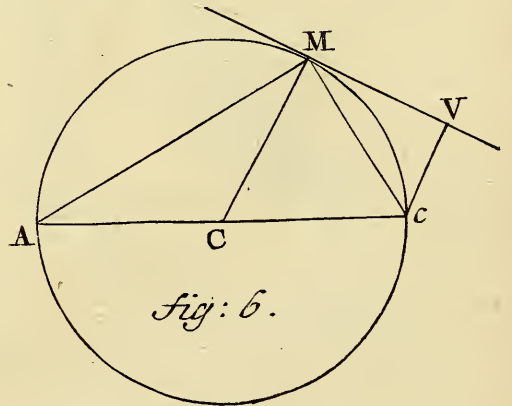
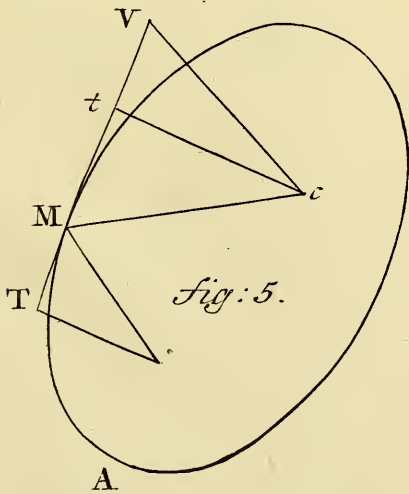
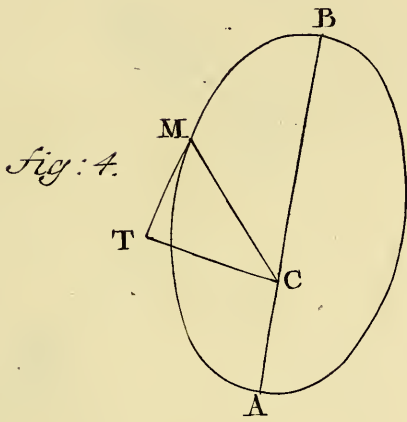
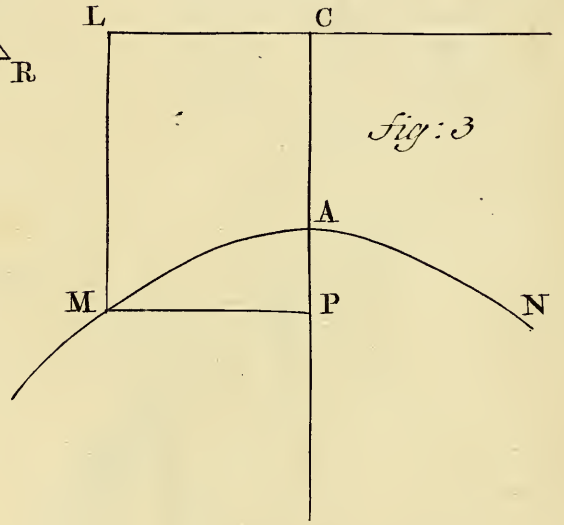
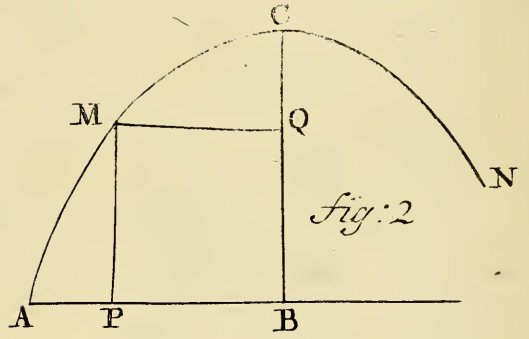
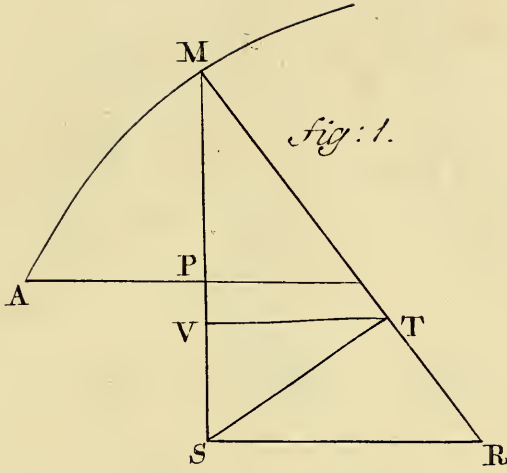


Fig: 6.







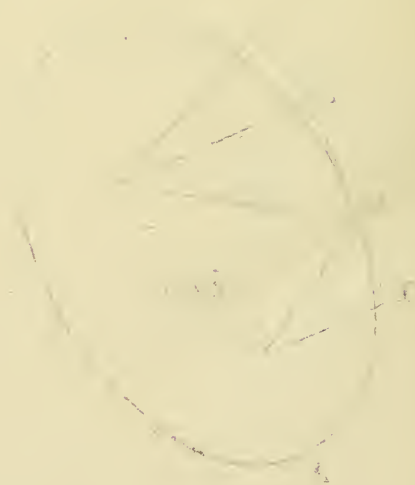
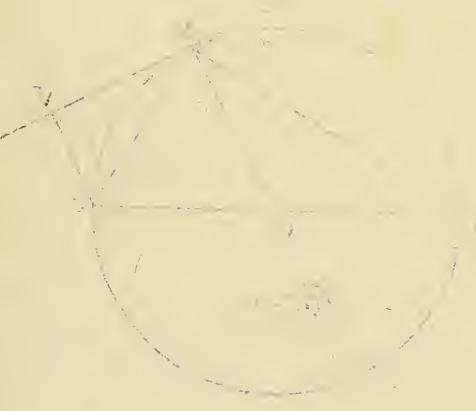
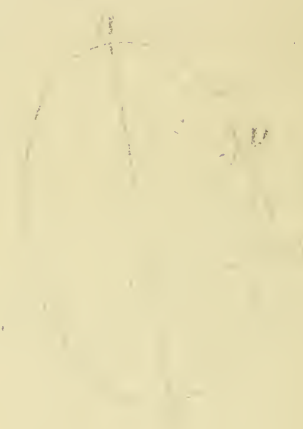
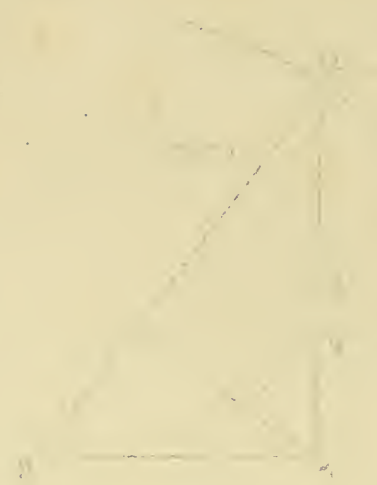
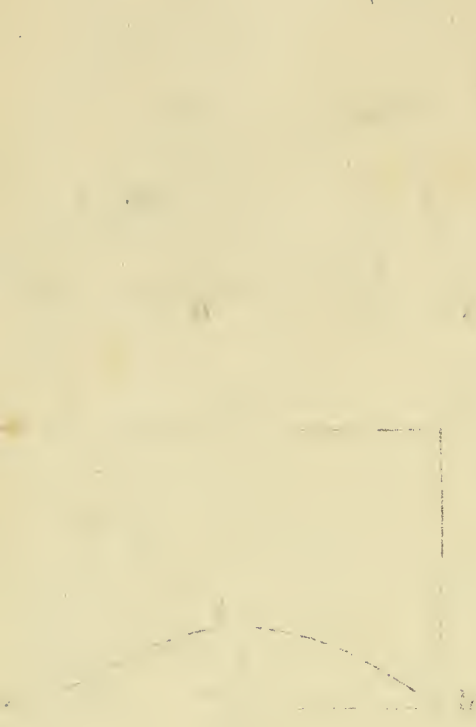


Fig: 1.

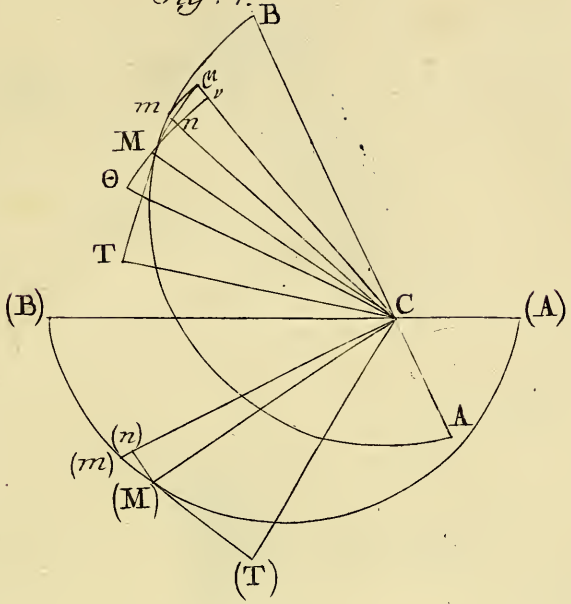


Fig: 2.

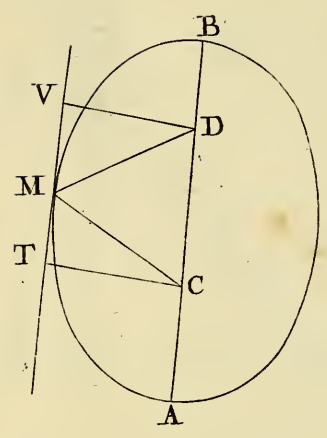


Fig: 3.

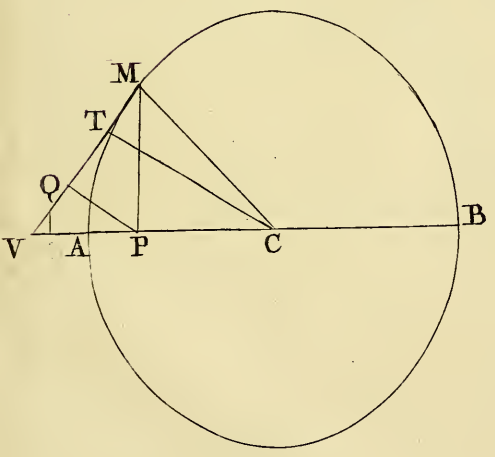
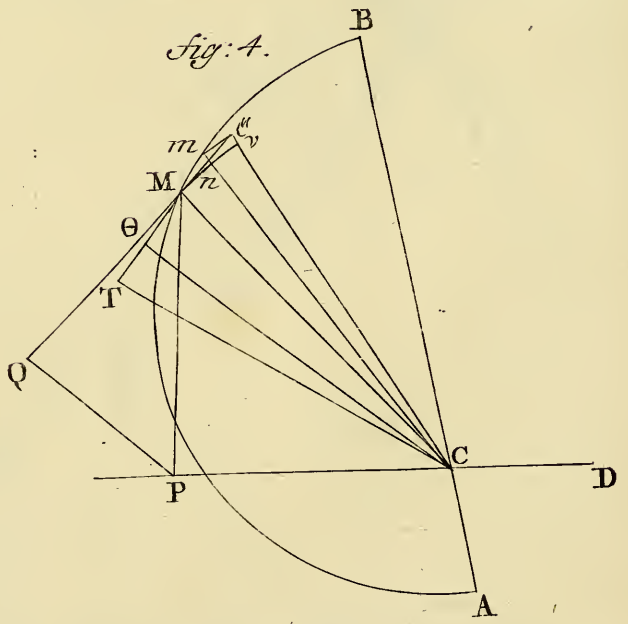
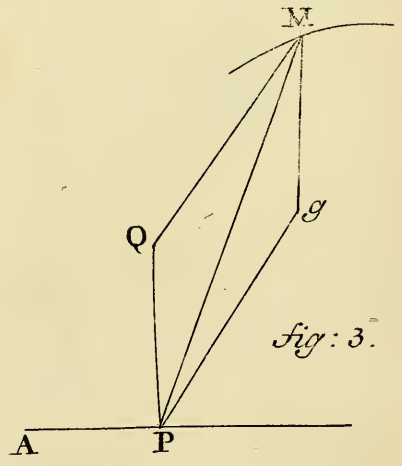
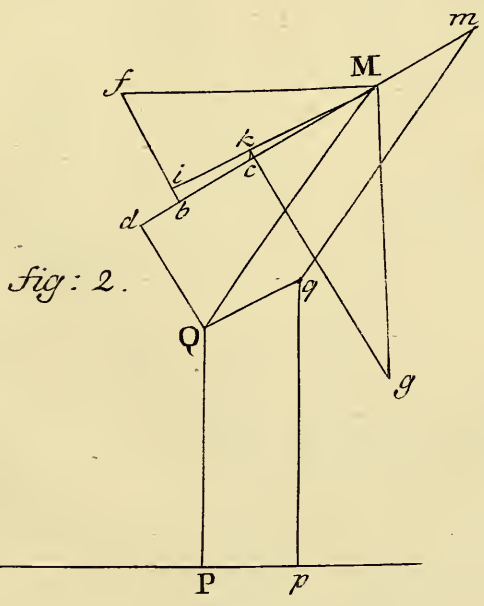
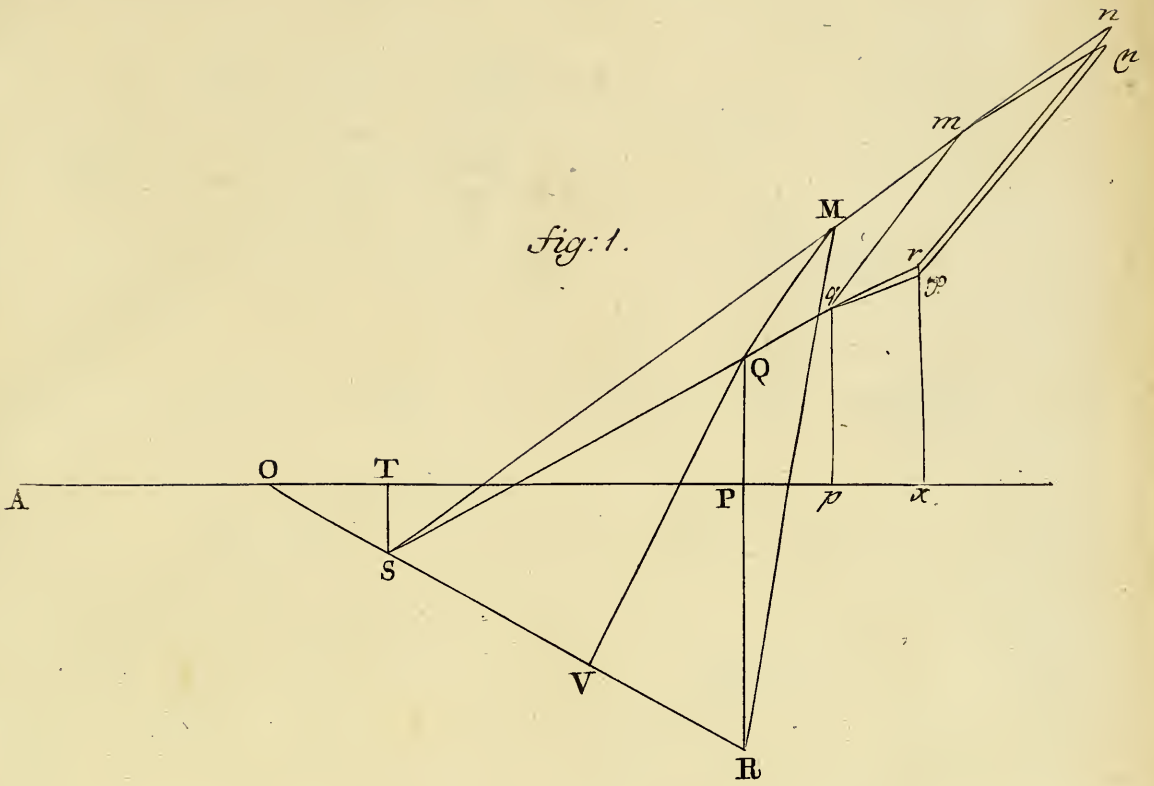
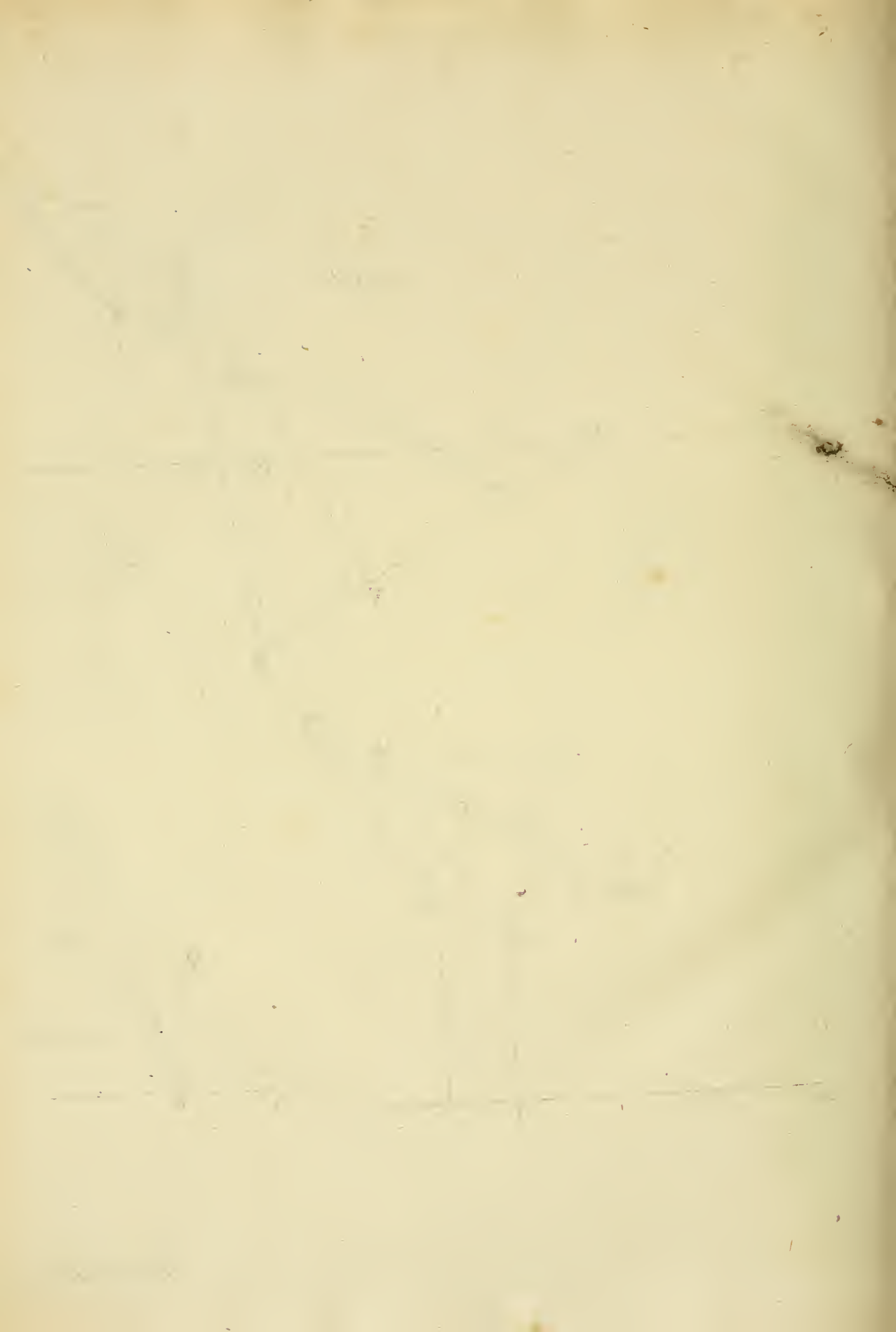


Fig: 4.









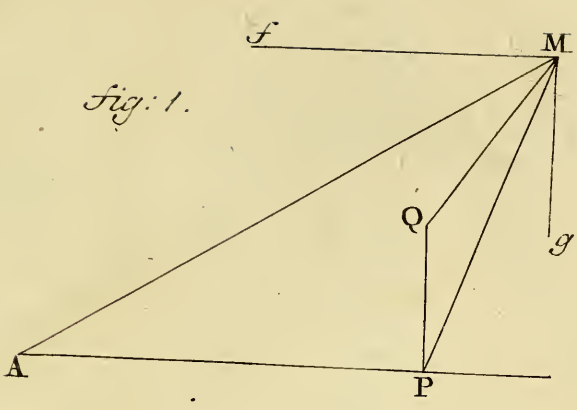


Fig: 1.

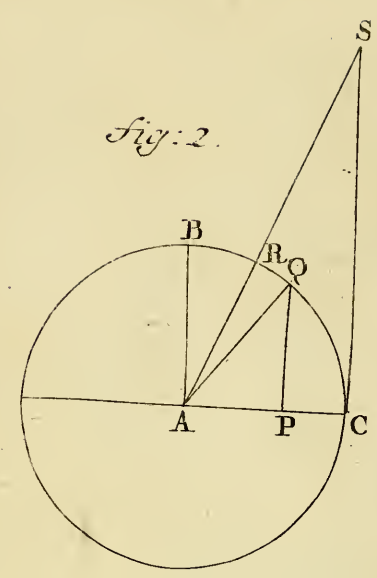


Fig: 2.

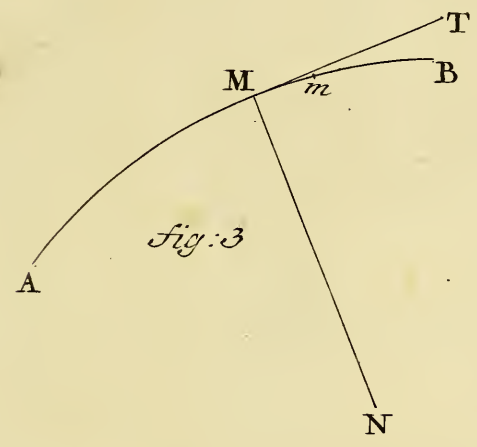


Fig: 3.

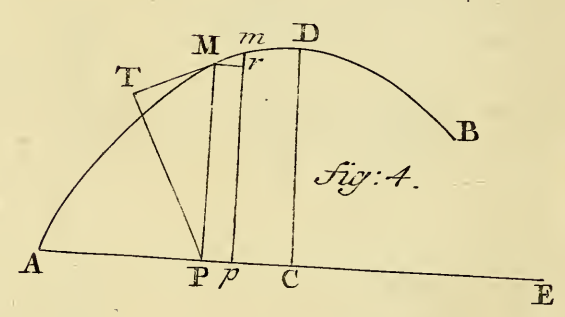


Fig: 4.

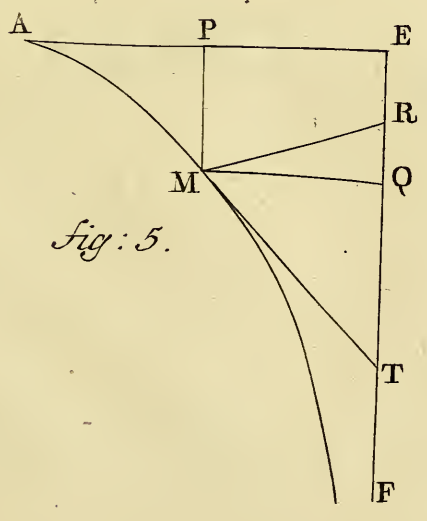


Fig: 5.

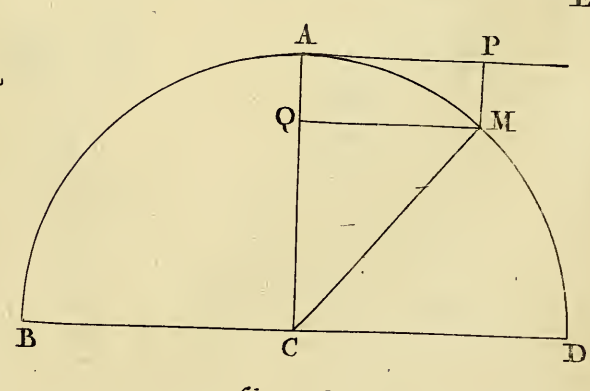
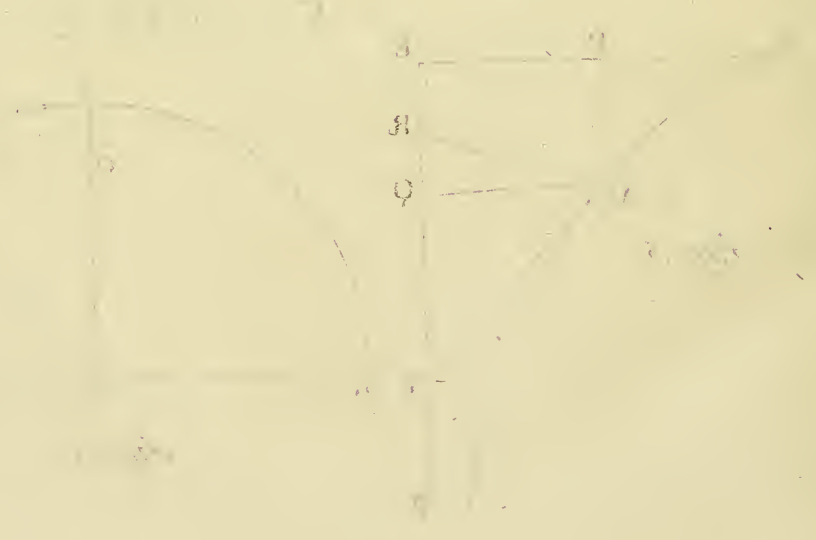


Fig: 6.



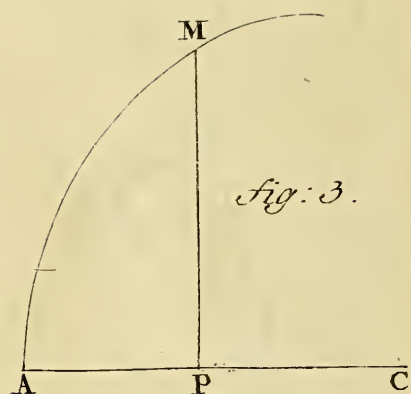
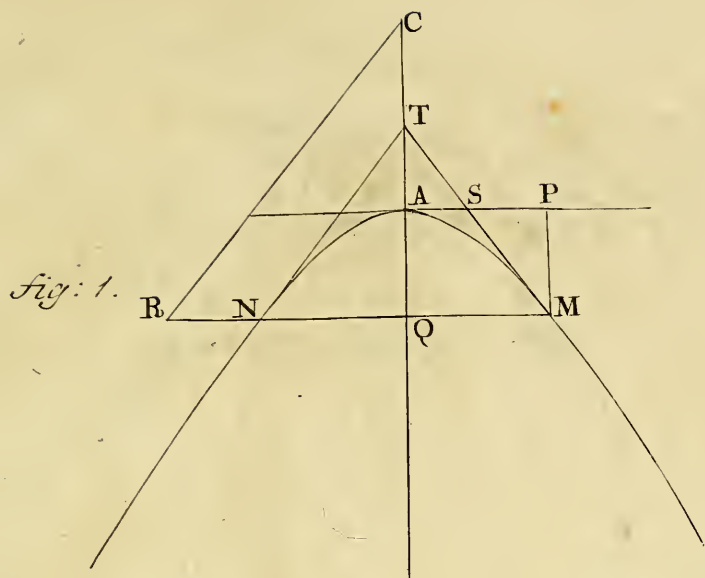


Fig: 2.

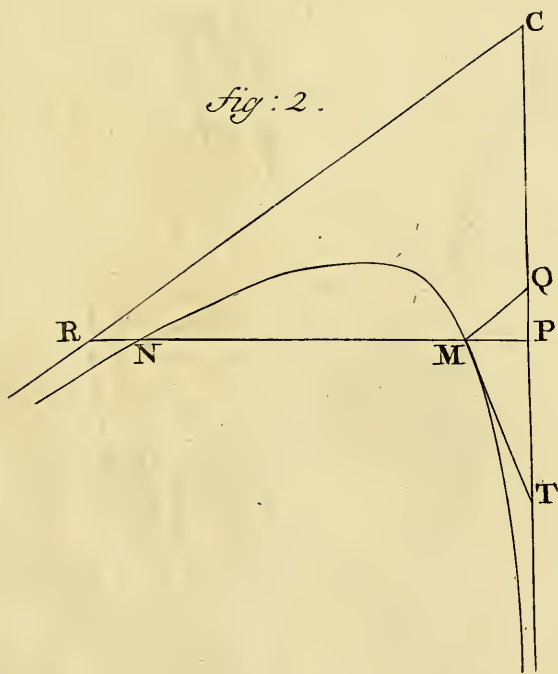


Fig: 4.



Fig: 5.

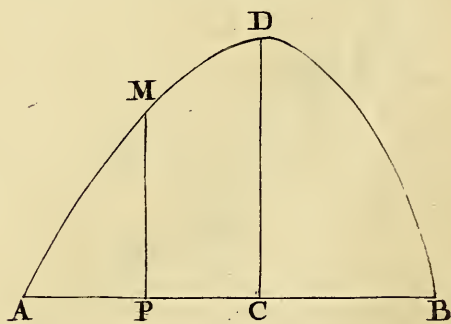




Fig: 1.

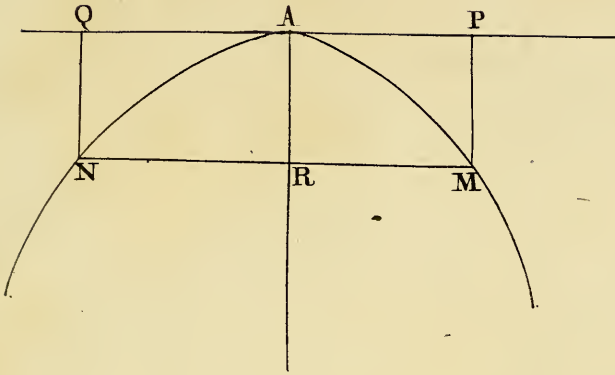


Fig: 2.

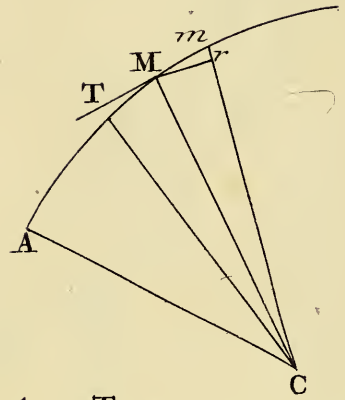


Fig: 3.

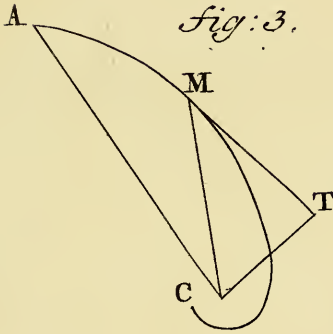


Fig: 4.

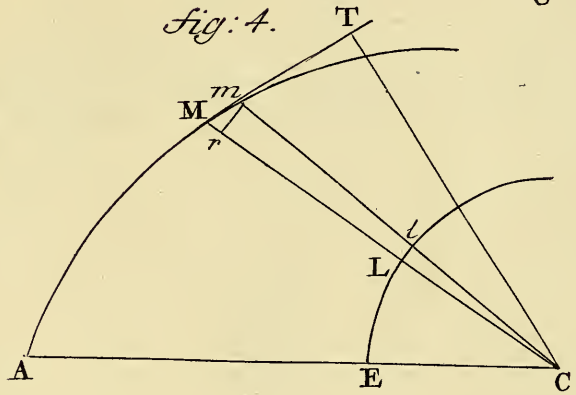


Fig: 5.

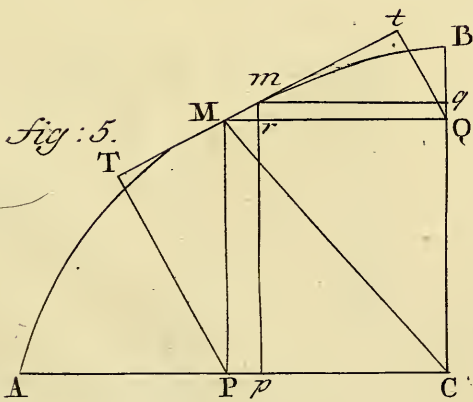


Fig: 6.

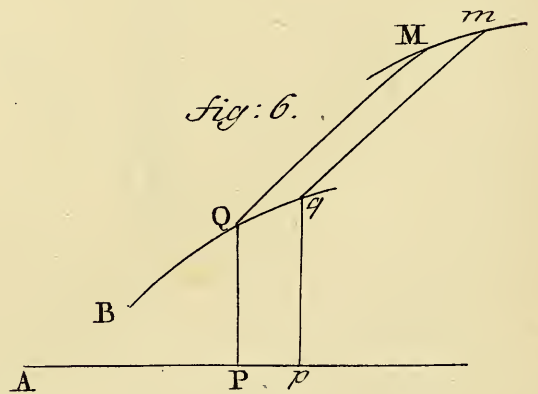


Fig: 1.

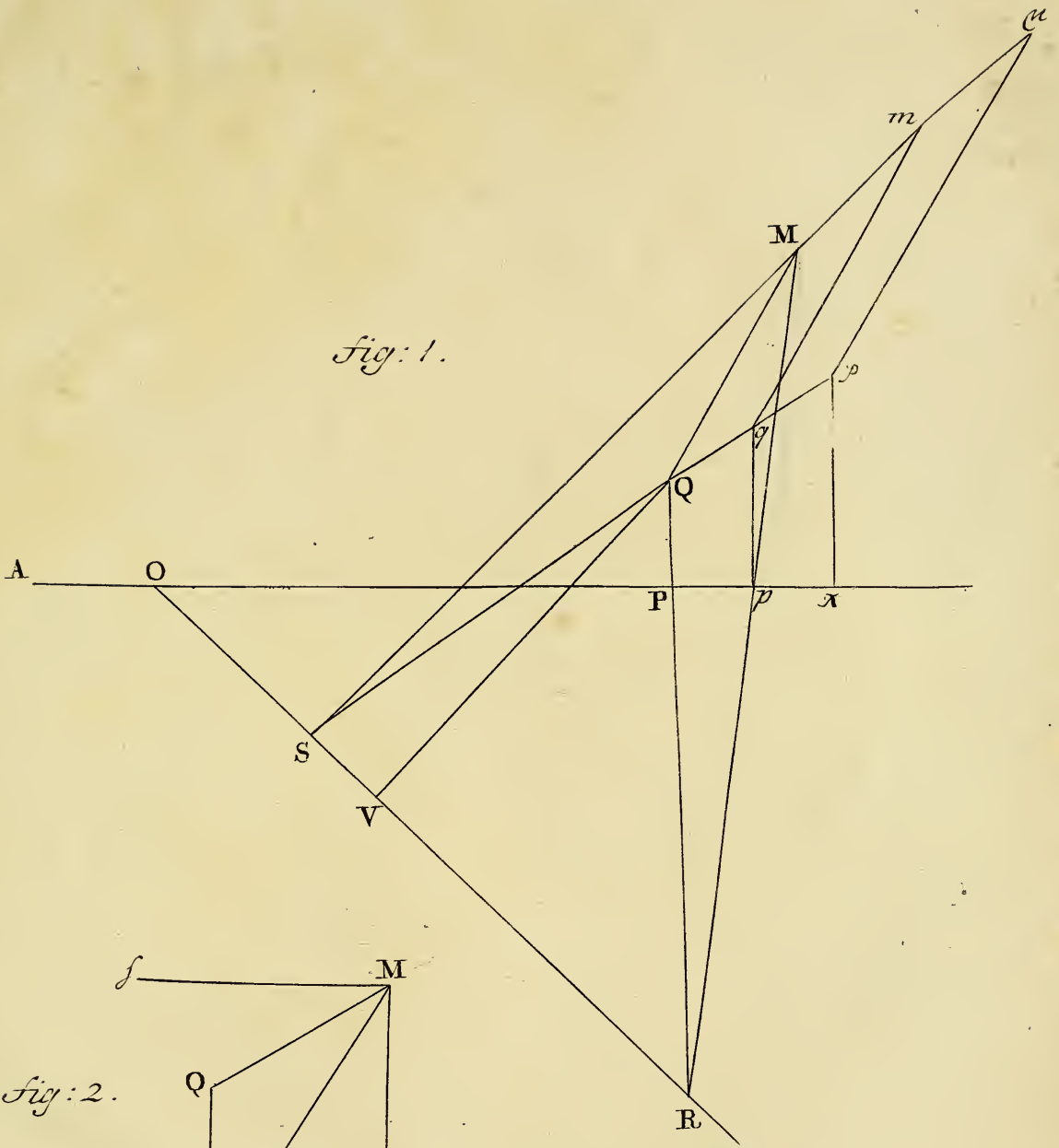
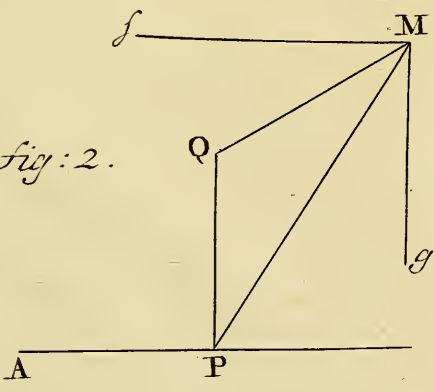


Fig: 2.





> < use ~~proportionally~~ p. 27

1-x-
2 ✓ used once was middle block

19568

Vault

200
100

