

1000





MEMORIE  
DI  
MATEMATICA  
E FISICA  
DELLA  
SOCIETÀ ITALIANA  
TOMO II. PARTE I.



V E R O N A  
P E R D I O N Ì G I R A M A N Z I N I  
M D C C L X X I V .





# E L O G I O

## DI GIUSEPPE TORELLI

*Scritto*

Dal Sig. Cavaliere PINDEMONTÉ.

**S**E felice veramente è quel letterato, a cui uno studio costante delle scienze astratte non estinse il gusto per l'arti le più gentili, che le pagine d'Omero ha così spesso tra mano come quelle di Newton, e del quale torna proprio ugualmente e lo scuoprire la natura d'una curva, e il produrre l'incanto amabile della poesia, noi diremo che fu felice il Torelli, di cui scriviamo l'Elogio, e che possedette tutto quel bene, cui lice in terra aspirare, e necessario anch'esso a costituire il carattere d'una vita celebre e rara, quale venir suole dalla savia antichità per modello rappresentata. Perciocchè nè mancò a lui la virtù, nè l'osservanza della religion sua, nè la cara salute, parte anch'essa essenzialissima della umana felicità; ed ebbe, in giusta equazione de' suoi desiderj, que' due che molto fra gli esterni beni risplen-

dono, le belle ricchezze, e la fama, ch'è certo ancora più bella. Una tal vita ben meritava di venir posta sulle carte, ed anche di venir posta su quelle, che dalla *Società Italiana* son pubblicate. Egli era membro di questa: quindi, appunto perchè non fu a tempo di affaticarsi per essa, crede aver più ragione la *Società* di lagrimarne la perdita, e lo fa pubblicamente, amando di premiare anche le ottime volontà de' suoi membri, e stimando di onorar nel Torelli se stessa. Quantunque poi s'occupi solamente delle scienze gravi, gode se alcuno si distinse ancora nelle lettere belle, e vuole che per queste eziandio venga qui celebrato, e perchè non si defraudi alcuno della debita lode, e perchè non rifiuta la compiacenza di far vedere, che possiede ne' suoi quelle ricchezze ancora, di cui ella non usa.

Giuseppe Torelli nacque in Verona li 3. Novembre dell'anno 1721. Luca fu il padre, negoziante di fortuna mediocre, e la madre Angela Albertini Veneziana, donna di più che mediocre indole, e colta oltre l'usanza del sesso a que' tempi: a lei confessava il Torelli di dover tutto, rimasto privo del padre in tenera età; essa gli diede l'educazion prima; e fatto adulto nel Collegio il pose qui retto allora da' PP. Somaschi, poscia in casa de' dotti fratelli Ballerini, e finalmente, sapendo con amor coraggioso e vero privarsene, all'Università di Padova lo mandò. Terminati appena suoi studj, parve subito ciò ch'esser dovea, e ch'io qui dichiaro: dico che mostrò subito un certo senso dell'ottimo in ogni cosa, un'anima armonica e veramente geometrica, ma nel tempo stesso di finissima e delicatissima temperatura; onde l'amor del bello non meno che il bisogno del vero, ed il fior del gusto e la squisitezza del tatto non men che il sapore della proporzione e del retto; ciò in fine che mi piace comprendere nelle sole parole *senso dell'ottimo in ogni cosa* a lui naturale, e colla buona disciplina perfezionato: dal quale



condotto venne per la difficile carriera delle lettere , e per la più difficile della vita , di cui parlerò dopo , ma brevissimamente , perchè non trattasi qui che dell' uom letterato . Dissi che questo senso di perfezione mostrò sin d' allora , perchè gli uomini primarj di Padova a quel tempo , i Morgagni , i Pontedera , i Poleni , i Dandini , i Volpi , ed i Facciolati non solamente ammiravano in lui un giovinetto che molto di sè promettea , ma eziandio accarezzavano un consigliere sagace , cui potevano negli affari delle lettere interrogare . Del che fa prova saper che il Morgagni leggeva a lui nella stanza quelle orazioni che poi dovea dalla cattedra recitare ; come fa testimonio dell' altro veder che il Dandini compiacque d' indirizzargli per via d' epistole una sua opera , chiamandolo pieno di erudizione e di dottrina in una età che gli altri ti dispongono ad esserlo , e per cui vedesi che la buona coltura non gli fu men primaticcia del buon giudizio .

Ripatriato , pare che solo delle belle lettere ornasse quegli anni primi , ma non già come s' usa oggidì ; perocchè esercitavasi nel latino sermone , coltivava il greco , amareggiava l' ebraico , avvicinando il severo e l' amenità , e nutrendo i fiori del gusto colla sostanza del buon sapere . Frutto primiero di questi studj fu la versione latina , non però mai pubblicata , di quell' aureo libretto greco di morale , più utile e grande che trattati molti non sono di tale scienza , e libretto d' ogni età , d' ogni sesso , d' ogni nazione e d' ogni secolo , *gli apologhi di Esopo* ; i quali vestire della più casta latinità , e fregiar volle di note opportune e di prefazione erudita , formandone un elegantissimo volumetto , non men che riguardo al costume , profittevole ai giovani rispetto alla lingua , la quale , non men che quello secondo i Teologi , vassi ora più sempre secondo i Grammatici corrompendo . E del tempo medesimo , e non meno saporiti e ben prosperati sono altri frutti di gentile letteratura , di cui tosto ragiono .

Tra' greci scrittori a sè particolarmente lo trasse Luciano, dalla conversazione del quale partì egli dopo averne non pur gustati, ma in sangue convertiti que' pensamenti, e fatto una eleganza sua propria di quelle graziosità. Testimonio ne sono tre Dialoghi ed una Esercitazione accademica. Ha questa per titolo *Sogno di Giacomo Pindemonte*; e si tratta di persuadere il coltivamento delle lettere ad un giovinetto inclinato più a quello delle armi, fingendosi che due donne vegga in dormendo, la Milizia, e la Letteratura, ambedue desiderose di possederlo, ed i suoi comodi e beni vantando ciascuna: il tutto non che preparato alla maniera de' Greci, ma di sapore, greco veramente, condito. I Dialoghi poi, latini pur essi, e stampati senza nome in Colonia, due portano in fronte *Del principale incomodo della gola e del suo rimedio*, l'altro è sulla dottrina in generale del *Probabilismo*, dottrina che allor più che mai facea perdere il tempo ai Teologi dell' Italia. Ciascun sa quanto torni opportuno lo stile del dialogo, ove piaccia vestir di ridicolo le cose più gravi, o che tali son riputate: ma quanto anche non è malagevole il conseguirne la semplice ed insieme varia andatura, i moti improvvisi e nulla meno naturali, e quella piccante, e nobile a un tempo ed ingenua giocondità che tutto dee rallegrarlo? o io m'inganno, o questi Dialoghi non sono nel genere loro meno eccellenti delle celebri Lettere Provinciali: pratica somma di que' cortesi e condiscendenti Casisti, faviezza, temperanza e disinvoltura nel farne uso, le grazie innocenti a tempo, a tempo le grazie pungenti, facile tessitura e variata, gemme di lingua le più lustranti, e il garbo per ogni dove e la urbanità. Diede anche pruova del suo profitto nella ebraica lingua con una Dissertazione latina indiritta sotto forma di lettera al Marchese Massèi, e contenente parecchie comparazioni tra l'ebraico libro dell' Esodo, e la greca interpretazion dei Settanta. S'oppose a que-

sta operetta il P. Carmeli reputato Professore a quel tempo in Padova di lingue orientali, sostenendo esser cosa pericolosa ed audace e quasi sacrilega il por mano senza necessità ed autorità nell'ebraico testo dietro le riprovate traccie di Riccardo Simone, del Clerc, e di Lodovico Capello: ma condannando l'assunto, l'ingegno per altro del giovine Critico commendò. Comunque sia riguardo al primo, ci contenteremo di dire quanto al secondo, che solo ancora in que' pochi passi diede a divedere abbastanza, quanto sarebbe nella sacra filologia proceduto, ove continuato avesse a darci opera, e quando mancati non gli fossero i libri necessarj, massime quelli de' Protestanti, de' quali i paesi cattolici, e massime l'Italia, per non dir che il vero, scarseggia. E qui mi piace notare che questi lavori son piccioli, è vero, di mole; ma la finitezza e perfezion loro, come fa onor grande all'Autore, così la mia cura giustifica in ricordarli.

Benchè però coltivassè in quegli anni le più dolci arti singolarmente e la filologia, tanto è però lungi che trascurassè le scienze e le arti più gravi, che sappiamo anzi che addottorato a Padova in legge, sebben non l'abbia mai professata, molto vi applicò nondimeno in quella sua giovinezza, e appare da lettere scritte a lui, che due Dissertazioni, indarno poi ricercate tra le sue carte, steso egli avesse su propositi importanti assai di giurisprudenza. Ma nè questa con tutte le altre scienze che dette son metafisiche, nè la fisica stessa che spesso, tolta universalmente, o ci lascia anch' ella nelle tenebre, o le dirada per lasciarci poi, com' è de' lampi notturni, in anche maggiore oscurità, potea contentare uno spirito di contentatura in tutte le cose difficilissima, la qual non nasce che da quel senso di perfezione sopraindicato, e dal quale venia propriamente costretto a non si appagare che di quel vero sol degno del nome, come non si acquetava nella poesia ed oratoria che a quel puro bello e perfetto, che

può dirsi il vero delle buone arti . Quindi abbracciar dovea di necessità le matematiche , e quelle singolarmente che diconsi pure , le quali poi sempre aggiunse colle belle lettere giudicate per lui non men vere appunto di quelle nell' esser loro , perchè sicure di conseguire in mano di chi trattarle sappia il lor fine , o con dilettar l' intelletto , o con isvolgere la volontà . E però egli era solito lodar particolarmente questi due studj , e raccomandarne il coltivamento ; e per quella opinione , che anch' ei tenea , fosse quasi un perder l' opera e il tempo in parecchj altri , e per un diletto naturale di vedere in considerazione ed in pregio ciò che si pregia e considera , diletto che torna in lode , perchè sol cade in coloro che di oscurare non temono all' altrui luce : molto più che concesso è a pochi nodrire sotto un medesimo tetto , e congiunti d' amicizia due studj non tanto forse nemici di lor natura , quanto creduti tali perchè rare volte , e quindi con maggior vanto di chi gli unisce , insieme convengono .

Per la medesima ragione poi , che tra le scienze avea scelto le matematiche , elesse tra queste l' antica geometria , e fece poi sempre le delizie sue di quel metodo , che per la diligenza a guidarci di passo in passo , e per quel lume che sparge su la via tutta , dovea singolarmente allettarlo ; e come l' anima sua non era meno gentile che geometrica , è il veder facile quanto in ciò pura amar dovesse gli antichi , di cui fu sempre grandissimo osservatore , e nelle dimostrazioni de' quali la precisione ed il rigore vanno a maraviglia del pari colla semplicità ed eleganza . Rivolse l' animo da principio anch' egli a quel metodo che per altri pregi risplende e tanto tiene ora , veduti ch' egli ebbe quegli elementi di geometria , che mostrare si sogliono nelle scuole ; ma poi mutò di consiglio . Perchè avventosi in Vicenza con dotto Matematico che lo avvisò di volgere addietro per rifar meglio la strada

strada che corsa avea , e forse anche ricordatosi di Newton , che ritornò sui Geometri antichi da lui troppo tosto per l' amor dell' Algebra abbandonati , prese a studiare di nuovo Euclide , ma in Euclide medesimo , secondo il detto dello stesso Newton ; e questo fece cogli altri tutti e singolarmente con Archimede , di cui tanto invaghì , che gli tenne poi sempre la più irreprensibile fedeltà . E quanto a Euclide , come rife avea prima di sè , così degli altri era solito ridere che sui moderni libri lo studiano , e di quegli Autori che pretefero riordinarlo , rompendo quella catena mirabile di proposizioni che passano necessariamente dall' una nell' altra , e che formando un ordine , di cui non può darfi il più nobile , formano insieme la delizia degli amatori del rigor geometrico ; rigore , che solo può vincere uno spirito risoluto di non si dare che all' evidenza . Ma questo è il vezzo comune ora di agevolare la scienza debilitandola ; al che non poco contribuisce quella nazione , per altro illustre e grandissima , e non mai lodata abbastanza che fa di assicurarsi in tal modo la da lei affettata universale monarchia nelle lettere , e che insegna ad abbandonare le lingue antiche per far parlare alle scienze la propria solo : mentre la sua rivale aspira tuttavia ad una gloria negli studj men rilucente , ma più ferma e più dai savj ammirata ; e le antiche lingue coltiva , ed ancora conserva il gusto della severa geometria .

Primo saggio di questi studj nel nostro Torelli fu l' ingegnoso trovato d' una macchina idraulica , spiegata molto semplicemente ed elegantemente con Lettera latina al Marchese Poleni indiritta ; e trattasi d' una ruota girante sotto acqua , ed utile in questo che non ristarebbe , come le altre , sempre che i fiumi o per le pioggie autunnali , o per la neve ingrossano di primavera . E' noto che per due cagioni starebbe ; o mancando la forza impulsiva , o la stessa forza ugualmente in ogni sua parte operando . Quest' ultimo accade nella ruota sotto acqua ; perchè quantunque sia vero che le acque correnti

non muovano e sopra e sotto d' un corso eguale, pur non è quella diversità che basti a rivolgerla . Per far dunque che la forza delle acque non così operi nella superior parte della ruota come nella inferiore , spezzò i raggi di quella in due parti, ond'è che gl' inferiori compongon sempre una retta , due rette i superiori fatti per una specie di contrazione più brevi; e però volgendo la ruota, ciascun raggio cade pel proprio peso, e torna dall' una parte intero di rotto, e rotto d' intero dall' altra, ciascuno raggio allungandosi o contraendosi con perpetuo ed equabile avvicendamento .

Dopo questa Lettera pubblicò egli un tratto geometrico in lingua italiana col titolo *Scala de' meriti a capo d' anno*; imitando con questo il Leibnizio, di cui pure lo scioglimento d' un bel problema a mercatura pertinente negli Atti abbiamo di Lipsia . *Merito* si chiama presso i mercatanti quel frutto, che da un capitale ci viene prodotto in un dato tempo; e *merito a capo d' anno* quello che sebben prodotto equabilmente per tutto l' anno, pur solo in fine dell' anno stesso dimandasi intero. Ma suppongasi, dice l' Autore, che se ne dimandi fra l' anno senza l' altrui pregiudizio una qualche parte: qual farà ella? Ora per isciogliere questo problema basta considerare che il dimandarsi per patto intero un tal merito solamente in fine dell' anno non altro importa, se non che nel giro d' un anno nulla oltre lo stesso può ricavarfi: ond' è manifesto che in altro modo dee concepirsi prodotto, dimandandosi in fine dell' anno, ed in altro modo, dimandandosene fra l' anno una parte. Nel primo caso dee concepirsi prodotto dal solo capitale, nel secondo e dal capitale e da quella parte, qualunque siasi, che fra l' anno se ne dimanda. Questa parte adunque, che nel tempo trascorso si vuol supporre essere stata dal capitale prodotta, dee esser tale che unita a quella tale altra, cui può produrre pur colla stessa legge nel tempo, che riman da trascorrere, il predetto ca-

pitale , della stessa accresciuto , adegui precisamente l' intero merito . Le quali parti , o sia meriti parziali volendo generalmente determinare , ricorre l' Autore ad una curva , le cui dimensioni e proprietadi a dimostrar tolse , e che appunto è la scala sopraindicata . Il problema è da tenerfi in pregio non lieve e per l' ufo che nella vita civile se ne può trarre grandissimo , e perchè sciolto con quella nitidezza e perspicuità tutte proprie del nostro Geometra .

Ma benchè l' Autor nostro coltivasse studiosamente ed acremento sostenesse la sinteti degli antichi , meritò per altro assai bene della moderna analisi ; e ciò , tentando di trasportare il rigore e la certezza dell' antica geometria nella più sublime e più utile parte di quel metodo : dico nel calcolo infinitesimale . La idea , che delle infinitesime quantità reca il Wolfio ne' suoi Elementi , rappresentandole quali quantità incomparabili alle più grandi , a quel modo che un granello d' arena incomparabil si dice rispetto a un monte , come non può certamente alcuno ingegno matematico , per indulgente ch' ei sia , tranquillare , così agitare dovea sommamente colui che alla sana indole dello ingegno aggiungea la rigida educazione dell' antica geometria . Cominciò pertanto a meditare , giusta il pensamento proprio , sulle quantità infinitesime . Le considerò egli quali differenze che a poco a poco giungono ad annichilarfi , e nell' atto dell' annichilamento fanno che certe relazioni tra d' altre sussistenti linee a verificare si vengano ; e considerò insieme che avendo gli Analisti distinto due calcoli , l' uno per le quantità positive , per le negative l' altro , essere ci dovea un calcolo ancora pel Niente posto all' une e all' altre di mezzo . Dietro codeste tracce avvissò non altro essere il calcolo degl' infinitesimi , che il calcolo del Niente tra le positive e le negative quantità collocato , sebbene con altri riguardi , e di sotto ad altra sembianza da' primi Autori suoi instituito . Ma un annientamento traente

fecero la verità di relazioni che prima non erano , non è già un nulla che meriti d' esser confuso col nulla metafisico ed assoluto ; il perchè trovossi egli necessitato a caratterizzarlo col titolo di Nulla geometrico , e questo titolo a porre in fronte d' una sua opera latina , divisa in due libri , nel primo de' quali se ne rischiara la natura , nell' altro l' applicazione se ne dimostra . In quello , come questo Niente si formi , come a varj ordini salga , come sopra esso adoperare si debba vien ragionato , e la sottigliezza dell' ingegno particolarmente risplendeva ; come pompeggia la industria nel libro secondo , ove contienfi l' applicazione , ed ove d' ogni specie di problemi geometrici soliti ad essere sciolti dal calcolo infinitesimale si recano esempj , in cui sciolgonsi felicemente colla nuova teoria del Nulla geometrico . Or chi crederebbe che un' opera lavorata con tanto raffinamento di arte , ed a sì utile fine condotta , come quella che i fondamenti dimostra d' una parte tanto importante dell' analisi , qual è il calcolo differenziale , chi crederebbe che accolta non fosse con applauso , con gratitudine , con diletto ? Eppure non fu così : il titolo di Niente geometrico disgustò molti ; ma quanto a torto , rendesi chiaro abbastanza dalla nozione di questo Niente poc' anzi esposta . Era dovere pertanto non si arrestare alla nuova iscrizione del tempio , ma entrare , ma esaminare il tutto e le parti , che avrebbero e giustificato loro quella iscrizione , e data insieme bastevole idea della sagacità e del sapere dell' architetto . Lo stesso intervenne al celebre Autore *dello Spirito delle leggi* ; il qual titolo rivolto subitamente in ischerzo dalla non seria nazione fece che la più parte , scrivono i Signori Maupertuis e d' Alembert , non si curasse a principio del libro stesso , lodatissimo poi , cioè letto che fu da que' giudici , che la voce del pubblico indirizzarono : e non dubito che letto da giudici buoni il nostro libro , possa la debita proporzione tra opera ed opera , non ne ripor-



tasse gli applausi grandi , e avuto il peso de' voti , non ne ottenesse il numero ancora .

Vide pertanto l' Autore che quella opera o stata non era ben letta , o intesa non bene ; e però a vie più far chiara la solidità e utilità della sua teoria dettò nuovo libro anch' esso latino , e col titolo di *Cose Geometriche* pubblicollo : nel quale tre problemi propone e scioglie prima sinteticamente coi principj della greca geometria , poi analiticamente colla dottrina sua del Nulla geometrico . E veramente le prime risoluzioni mostrano il sommo vigore di raziocinio , che dall' esercizio della sintesi avea ritratto , onde sostenere le più composte e laboriose dimostrazioni delle verità più difficili ed avviluppate ; come le risoluzioni seconde manifestano ciò in che l' analisi vince la sintesi , cioè la speditezza di giungere a meta , per nulla dire ora della fecondità , e ciò in che dalla sintesi è vinta , cioè la luce , che illumina e indora tutto il cammino . Buon Critico appare ancora , inferendo tra quelle dimostrazioni ciò che sulla quadratrice di Dinostrato nelle collezioni si riferisce di Pappo , e servendosi ei primo del manoscritto codice Vaticano per lui emendato accortamente e tradotto , male soddisfacendosi della versione del Commandino . Finalmente elegantissimo Scrittore veder si fa ; e in vero due libri di acuta e profonda matematica , annunziati ciascuno da prefazione e da lettera dedicatoria piene l' una e l' altra di tutte le grazie e le veneri del pensare e dello scrivere , parmi cosa rara veramente ed attissima ad umiliarne e lo Scrittore superficiale , ed il rozzo Matematico ; ma nel tempo stesso è cosa però da aspettarfi in colui che reca dalla natura il senso vero dell' ottimo : perchè chi al bello s' educa solo , giungerà solo a quello dell' arte che particolarmente coltiva ; ma chi propriamente al bello è nato anche , cosa non vede o tocca che tosto non ve lo scuopra od infonda , o perchè generale è la disposizione , o perchè il primo coglie

tale o tale beltà, il secondo coglie sempre sotto varie modificazioni la beltà stessa.

Conoscitore dunque sicuro del vero bello, così nelle arti più dolci come nelle più austere, caldissimo amante di quello per conseguenza, non potea a meno di non anche essere artefice in questa ora, ed ora in quella officina; e però mi si permetta, che siccom' egli passava da lavoro a lavoro assai facilmente, benchè diverso, così faccia io pure parlando di lui, e torni alle belle lettere dalle matematiche, che poi di nuovo riprenderò. L' amor per la madre lo condusse all' amore per la più bella delle figliuole; dico, che amando la lingua latina, amò anche la italiana moltissimo, e scrisse in questa con eguale purità, e con leggiadria non comune: ma pure, ragguagliando gli scritti, vedesi che la madre gli era più familiare e che feco egli usava liberamente, ove la conversazione colla figlia era più alquanto studiata, ed elegante sì bene, ma d'una men facile alquanto e men disinvolta eleganza. Quattro Lettere abbiamo stese in tal lingua; la prima che uscì delle quali s' intitola: *della denominazione del corrente anno volgarmente detto 1760*; ed è una di quelle scritture che prodotte vengono da quelle contese, le quali se discompagnate non sono dalla urbanità, fanno il saporito ed il vivo della civil compagnia. La quistion veramente era manifesta per sè, e non pare che bisogno ci fosse d' uno scritto per terminarla: perchè quale Astronomo ne' suoi calcoli andar non sa, per grazia d' esempio, gli scorsi mesi di genajo, febbrajo ecc. per l'anno 1785? ma come io penso che quella conversazione composta non fosse di Astronomi, e nè manco di gente, che delle usanze loro sapesse, correndo gran differenza tra un ritrovo di Caffè, e quel di una Specola; così fu necessario il dettar quella Lettera, e fu bello con erudizione pari alla gentilezza il dettarla, rilevando l' errore di Beda, cui malamente, in cambio di Dionigi Esiguo, noi fe-

guitiamo . Una confimile origine ebbe quell' altra fua al celebre Autore delle lettere Virgiliane , condita veramente di forti falì e di molto brio illuminata ; ma che qui bafia citare, ficcome quella, ove non trattafi propriamente d' affar letterario, ma di personali e civili cofe , che non fono importanti, fe non quanto fon nuove e calde le circoftanze , onde nacquero, raffreddate le quali, quelle pure raffreddano . Maggiore confiderazione fi meritano quelle altre due che verfano fopra Dante, dell' onor del quale non era il noftro Torelli men tenero di quello che foffe della beltà fua innamorato . Gran cura pertanto ei ci pofe dietro, e quantità di paffi ne interpretò nuovamente, con animo di comporne una novella edizione , di cui gli pareva, e non a torto, che facelfe Dante richiefta : e veramente i due paffi del Purgatorio , che in una fpiegò di codefte Lettere, fan fofpirare agli amatori del gran Poeta l' abito intero, ond' effer dovea per mano del Torelli veftito . Ad un vero amante poi non foffre l' animo che gli fi oltraggi la cofa amata, anche ove incompetente fembri e da meno chi oltraggia . Uno scrittore, com' è il Sig. di Voltaire , che fpeffo non fai fe dica per dire o per ifcherzare, che mira più al paffatempo che all' iftruzione, e che o trafcura o diffimula la verità, non meritava certamente una rifpofta feria e adeguata, allorchè parla giufta quello ftile del noftro Dante : lasciando ch' ei pure non avea quell' efercizio di lingua italiana, che per giudicar gli bafteffe dell' italiana poefia . Malgrado ciò, non diede il cuore al noftro Torelli di comportare una ingiuria, non autorevole è vero, ma però lanciata da bocca di autorità grande , e meritamente , nelle cofe del Gufto, e però quella nell' altra fua lettera ribattè ; la quale gioverà fempre, fe non foffe per altro, a mostrare vie più, qual conto fi voglia far de' Francefi nella bella noftra letteratura, utile avvertenza in un tempo che molti ftudiano eziandio quella ne' francefi libri , e non s' accorgono che parecchj di que-

gli spiriti, ed anche di que' precetti son buoni per loro, che a noi o non servono punto, o pregiudicano, chiaro essendo che le scienze si rimangon le stesse in ogni nazione, ma che le lettere, diversamente parlando, si muovono ancora e si atteggiano diversamente.

Ma il nostro Torelli al giudizio accompagnò l'attitudine, e se fu Critico eccellente, fu anche eccellente Poeta: molto esercitossi poi nel tradurre, a che portato era naturalmente e dall'amor suo per gli antichi, e dalla voglia di giovare ai moderni, mostrando loro i ritratti di quelle beltà, che sì crudelmente e non meno a torto abbandonano. E soleva dire tanto esser lunge che tal mestiero s'abbia a tener per servile, che anzi vi si occuparono spesso gl'ingegni sovrani, e sempre gran conto da' più savj ne venne fatto; e nominati alcuni Latini ed Italiani, ricordava eziandio que' due lumi del Parnaso inglese Drayden, e Pope, al primo de' quali non fece men torto la men che buona version dell' Eneide, oscurata poi affatto dal lume di quella di Trap, che onor facessero le Favole sue e le sue Odi, ed al secondo la version dell' Iliade, cui niuno tentò levare di seggio, non fu men di gloria che il poema sulla Critica, e quello sull' Uomo. Voltò il nostro Traduttore i due primi libri dell' Eneide, il Pseudolo di Plauto con alcuni Idilj di Teocrito e di Mosco, il Poemetto sulle nozze di Peleo e Teti, ed il secondo Epitalamio di Catullo, ed altre minori cose; e così avesse ripulita come compita avea la traduzione di Teocrito, che però non vuolsi mettere a luce, meno per quello che è, onde onore ne avrebbero molti, che per quello che non ha potuto essere, non dovendo del Torelli uscir cosa non fatta a pennello, e da esso medesimo licenziata. Tradusse ancora per soddisfare a ragguardevole personaggio della Inghilterra quella bella Elegia di Tommaso Gray scritta sopra un cimitero campestre, e degna veramente di esser tenuta qual cosa antica:

al

ai qual proposito non saprei non rilevare una novella testimonianza dell' amor suo verso il bello necessariamente originato da quel suo senso in conoscerlo ed in sentirlo. Perciocchè non fu contento veder molto innanzi nella francese e nella inglese letteratura; ma leggendo un tratto nelle traduzioni l'incomparabile Romanzo del Don Chisciotte, parvegli che quegli spiriti, quel sale, quella forza, e diciam pure quella specie di bello perdesse troppo in terra non sua trapiantato, e pigliandone sdegno, non potè temperarsi dall' applicar subito alla lingua spagnuola; e non prima si tranquillò, che gustata non ebbe nell' originale la saporitissima opera del Cervantes, dal quale passò ai poeti di quella nazione, e di Garcilasso della Vega singolarmente invaghì. Non è gran cosa il sapere più lingue; ma il saperle, non per una certa curiosità, non per far poscia dell' erudito, ma per un desiderio, e voglio dir anche bisogno di conoscere le varie sembianze che dalle varie lingue e nazioni il Bello sempre uno nella sua essenza ritragge, è indizio certo d' un' anima nata fatta per esso, ed alla più interna conoscenza di lui naturalmente e da insuperabile impeto trasportata. Ma venendo alle traduzioni, il nostro Torelli avvisava essere la traduzione un ritratto che non vuoll' apprezzare, se non quanto rappresenta l' originale; e però non solamente i concetti, ma dover ritenersi, quanto altri può e permette eleganza, le forme ancora, dalle quali dipende il togliere o aggiungere, l' infiorare o sfiorare, il metter luce nell' ombra, che non pare minor peccato che il metter ombra nella luce; e va discorrendo. Se così debbasi, o altrimenti, cioè con maggior libertà adoperare, è quistion grande, e che probabilmente non farà mai distinta, perchè non vedrem mai traduzione probabilmente, che o nell' un modo camminando o nell' altro affatto aggiunga suo testo, e quindi servir ci possa di modello. Sembra però che dir si potesse così: gli uomini di gusto sottile

in pittura prepongono le buone impressioni in rame non solo alle carte fatte coll' arte , *Che alluminare è chiamata in Parisi* , come dice Dante , e molto più alle stampe colorate del le *Bloud* , tentativo ancor molto dalla sua perfezione lontano ; ma eziandio alle copie solite de' pittori le preferiscono , veduto che abbiano o non veduto l' originale : perchè dall' una parte queste copie mandano troppo altro colorito che quello che io cerco , e dall' altra le semplici stampe dan meglio il disegno , e l' occhio in nulla ci offendono . Ora i concetti non sono il disegno , e le forme il colorito d' una poesia? il qual colorito , anche ove nelle versioni molto inerenti non altro più rimanesse che un chiaroscuro , sembra però che questo preferir debbasi alle false e bugiarde tinte d' una traduzione , che trasforma e svifa con quelle i concetti ancora , e l' indole sempre meno è il carattere dell' autor suo rappresenta . Ma comunque sia e di questo confronto , e della strada dal nostro *Volgarizzatore* tenuta , noi ci contenteremo di dire ch' ei fece di ottimi passi nella via , qualunque la siasi , da lui scelta ; il che bastando alla lode sua , basterà , credo , per la ragione medesima al mio discorso .

Non era però egli di coloro , che fan traduzioni , perchè non bene creando verseggiano , e che per questo nè ben pure il più delle volte traducono : ma quando a quando anche di per sè camminava , e de' sonetti particolarmente si compiacea , cioè d' un componimento , ove il più timido arbitrio non si concede , ove non si perdona una macchia , un neo , e colpa non cade che grave non sia e irremissibile . *Purgatezza* adunque di lingua , atteggiar tutto con grazia o muovere con robustezza , melodia accomodata , e quella sua compagna men conosciuta , benchè indivisibile , l' armonia ; ed in oltre la diligenza , il non temere le caffature , l' amor della lima : cose tutte che non mancavano al nostro Poeta , e che però gli aprivano questo campo de' *Sonettisti* , quanto più an-

gusto tanto più difficile a farvi dentro sua pruova. Dal che si vede com' egli era in punto di ottener quello che sembra il più arduo in poesia, cioè di piacere senza dir nulla; non ch' egli, dotto com'era, non sapesse arricchir di cose i suoi versi, e fatto assai volte non l'abbia; e così non dico che generalmente non sien da estimarsi sopra tutto que' componimenti che alla lucentezza de' fiori la sostanza temperano delle frutta; ma si dirà però sempre esser uno de' maggiori sforzi dell' arte l' adescar l' animo senza occupar l' intelletto, cosa fuor di confronto più difficile, che questo il far senza quello, perchè un pensamento acuto o profondo può cader in mente d' ogni uom bennato, ma uscir non può ben vestito e canoro che dalla bocca del vero poeta. Di fatti l' esporre, diceva il Torelli, solamente in versi ed in rima sì facili a farsi ed a trovarsi in lingua italiana quello che ogni colta persona parlando espone al bisogno nell' umano convitto, o anche quello che nella illustrata età nostra ciascun può trarre dal grembo della filosofia, non è egli un comperarsi a troppo buon prezzo il diploma di cittadinanza in Parnaso? e per questo veggiamo in Italia così desolante inondamento di poesie, cioè dopo che a trascurar cominciassi il vezzo della espressione, ed il fiore dell' armonia. Quindi la corruzione, seguitava il Torelli, d' un' arte così difficile e ad un tempo così confidenzialmente trattata, quindi i falsi giudizj, e la lode ed il biasimo ugualmente male rivolto; e di vero non meraviglia: che per poco che altri tenga uno spirito gentile e chiaro comprende tosto la forza d' un pensamento; ma quanto pochi non sono, anche tra poeti stessi, coloro che intendano la vera poesia e quelle infinite e minute, nè però meno importanti, differenze rilevino di stile e di numero, primo costitutivo dell' arte, quali non giunge ad annoverarle tutte il filosofo, e che tanto volentieri si fan sentire dal cuore, quanto mal soffrono venir disputate dall' in-

telletto? Perfuaso pertanto il nostro Poeta, che rarissimi anche tra gli artisti giudicar possano di quest' arte, della quale al contrario non che gli artisti, ma ciascuno vuol dar giudizio, di pochi lettori, come dee fare con Orazio ogni favio, si contentava: ed io credo che mancandogli talora i suoi giudici, ei s'immaginasse dover presentarsi al tribunale di Dante, o del Casa, e quindi facesse ogni che, onde partirne assoluto; dissi Dante ed il Casa, perchè di questi compiacevasi il più, ammirando nel secondo singolarmente la bellezza del numero e pel rompimento de' versi e per altri rispetti sì grave e forte e variato; e nel primo, oltre queste cose, la proprietà, e il fugo e nervo del dire, e quella celerità ed evidenza maravigliosa in rappresentare e dipingere.

E qui mi piace di aggiunger quello, che già dalle cose riferite può comodamente conghietturarsi, e che finisce per avventura di bene caratterizzarlo: dico che in quelle facoltà ancora, ove erudita non fu la mano, erudito però sempre fu l'occhio; intanto che d'ogni liberale arte e meccanica delicatissimamente sentiva ed assai maestrevolmente disputava. Certo non era pittore tra nostri, che degli stranieri, non avendo viaggiato, aver non potea gran notizia, di cui egli non sapesse rilevar subito il gusto e l'anima; e non solamente nella scultura ed architettura, ma in qualsivisia suppellettile e arnese domestico subalternato al disegno, era così sottile e difficile, che non potea comportare una forma men ch' elegante, ed una esecuzione men che precisa: e particolarmente, com' uom letterato, delle volgari impressioni in rame, e di ciò tutto che l'arte tipografica disonora, graziosamente sdegnavasi. La quale scontentezza e difficoltà anche nelle piccole cose, tanto è lunge che picciola sia in se medesima, che anzi considerazion grande si merita, e sempre meglio dimostra quel senso in ogni cosa di perfezione, che a formar viene di lui col più vero carattere l'elogio ancora



più bello . E perchè non fosse più cosa , ch' ei non avesse , se non gustata , assaggiata almeno o lambita , volle sapere alquanto di musica , imitando per questo pure i suoi cari antichi , ed il Galilei che gli era caro quanto gli antichi , i quali a tutte le discipline ( che le coltivavano tutte ) univan pur questa : e però non contento egli di aver l' orecchio musico e l' anima , che tale in lui di necessità esser dovea , volle averne anche l' intelletto , e come vago ch' egli era d' ogni bell' arte , ed eziandio come matematico , tra gli studj del quale può riporsi la musica , e sotto il quale aspetto io ritorno ancora per poco a considerarlo .

E' noto non esserci nella fisica teorema più fecondo di quello della composizione di due moti , secondo i lati d' un parallelogrammo , in un sol moto , giusta la diagonale di esso : nella meccanica particolarmente l' incontriam sempre , e l' astronomia stessa certo `è che ad alcun altro più non appoggia . Istrutti di questo gli uomini prima dalla esperienza , *fonte* , come scrisse il Poeta filosofo , *ai vizj di nostre arti* , ed applicata che fu poi la fisica alla matematica , cercossi d' ornarlo anch' esso di geometrica dimostrazione : ma in un vero altronde sicuro delicati più che tanto non furono i Matematici , e paghi si tennero di quelle dimostrazioni , che d' essere così dette non meritavano . Ma non così l' Autor nostro , che non era di tanta condiscendenza . Il perchè amico sempre fedele ch' ei fu degli antichi , ad essi ricorse , sperando riceverne quella risposta , di che i moderni inutilmente prima avea domandato . Ma la speranza gli andò fallita ; nulla trovando da vantaggio che la proposizione di Aristotele , e quella di Gemino , riferita da Proclo , ambedue troppo limitate , e quella in oltre del primo sopra la base viziosa d' un inconcludente raziocinio inalzata . Non rimanea dunque che tentar di per sè nuova e rigorosa dimostrazion geometrica ; e veramente con assai favorevoli auspici tentolla in quella ope-

retta latina sul moto composto non ha molti anni pubblicata, potendo anche fervir di pruova al felice riuscimento l'esserli nel pensare incontrato col celebre Ab. Frisi, che si era alla stessa ricerca contemporaneamente rivolto. Le dimostrazioni dell'uno e dell'altro sono in fondo le stesse, ma i modi di stabilirne i principj, di combinarli, e di dedurne le conseguenze distinguono i due sapienti; e forse rimane in dubbio, se quel teorema resti più grato al trattamento spedito dell'Analista frettoloso, o alle cure più lunghe e quindi più lusinganti del riposato Geometra.

Questo fu l'ultimo lavoro suo in geometria; ma prima avea già composto due opere tuttavia inedite, nell'una delle quali un suo Trattato contiene di prospettiva. Così non è vero, che nuovo sia questo campo dopo le fatiche degli s' Gravefande, dei Tailor, degli Zanotti succedute a molte altre più o men fortunate secondo i tempi e gl'ingegni, che pare anzi niuno ora mai più desiderarne i trattati; se non che nuovo può dirsi che fatto è il nostro dalla nuova maniera, con cui è condotto, non avendo egli solamente svolto colla solita cura il solito filo sintetico, ma imposto essendosi ancora di non fervirsi che dei pochi semi gettati sopra un tal campo da Euclide. Questa opera verrà certo prodotta in luce, ma priva andrà di un grande ornamento, di cui l'Autor suo fregiata l'avrebbe, vivendo. Perciocchè avea egli fermo nell'animo di accompagnarvi un ragionamento, in cui stabilire anche meglio, e con perfetta evidenza, che la prospettiva ottimamente dagli antichi fu conosciuta; sdegnato ei pure, com'era ben naturale, contra il maggior nimico agli antichi, e nimico suo proprio per conseguenza, il Sig. Perrault, e non ben contento di quanto in loro favore l'Ab. Sallier e il Conte di Caylus, e poi il Conte Algarotti e il Sig. Dutens hanno su tal materia indicato. E certo che la dissertazion critica stata non farebbe men bella della geometrica trattazio-

ne, potendosi dire di lui, che fu eruditissimo tra i Matematici, e matematico, s' io così posso spiegarmi, tra i Critici. Così le discipline tutte s' uniscono insieme e s' ajutano, ma però solamente in capo di chi sappia cambiarne le voci diverse, e regolare gli uffizj di ciascheduna, e però tutte le conosca bene, ed in oltre dotato sia d' una sicura e generale squisitezza di senso.

Ma questa unione in lui e congiura amichevole di facultadi meglio anche potè dimostrare coll' altra sua opera, dico colla edizion di Archimede, che vedrà il giorno ella pure, e certo per non più abbandonarlo, e di cui forse non farà discaro che intanto qui si premetta qualche notizia. Rivoltosi dunque ad emendare l' intero testo dell' autor suo, cominciò egli dal leggere e ponderare la edizione di Basilea dell' anno 1544, la quale trascritta per Tommaso Venatore da un antico codice così fedelmente che intatta serbò la scrittura anche ove corrotta manifestamente appariva, può quindi tenerli in conto di quello stesso codice antico. Il perchè vedesi se di mancamenti e di errori ridondar dee, e se mestieri v' abbia d' ingegno, e d' opera critica. Ora tutti questi supplì egli e corresse parte coll' ajuto d' un codice della Biblioteca di S. Marco, e parte della traduzione fatta da Giovanni Cremonese per comando del Pontefice Niccolò V., la quale comechè barbara, pur da codice diverso da quello ritratta, potea guidarlo, ove quello lo abbandonava. Abbandonato poi dall' uno e dall' altra, come gli accadeva spessissimo, ebbe ricorso alla conghiettura o sua propria, o de' valentuomini che il precedettero, quali sono il Commandino, il Rivalto, il Barovvio, ed il Vallisio, a cui egli più debbe che a ciascun altro, massime nelle opere della *misura del cerchio*, e dell' *arenario*, mettendo a piè di pagina i passi de' codici, onde sia libero a tutti il giudizio di quelle conghiette. Emendato il testo, e le opere secondo il tempo

della loro nascita riordinate, ne intraprese la versione latina renduta necessaria dalla imperfezione di quelle del Cremonese e del Commandino, e compiuta con quella esatta eleganza ch'era sua propria, e tanto più bella, quanto a carpirsi difficile e per la materia, e per la lingua d'un popolo che negletto avea quella scienza. Nè qui ristettero le sue fatiche; ma pose la stessa cura eziandio intorno ad Eudocio d'Ascalona, che scrisse un commento sopra i due libri della *Sfera e del Cilindro*, e d'altre opere d'Archimede, commento per altro utile più che necessario a chi prima letto abbia Euclide ed Apollonio, cioè fatto come si debbe al parer del Torelli e de' savj lo studio della geometria; e però non supplì egli, ove manca il commento di Eudocio, come alcun forse potrebbe desiderare, e dimostrò solo alcuni teoremi che Archimede propone, e di cui perdute si sono le dimostrazioni. E forse gli costò più la restituzione di quello che non di questo, perciocchè a quello veruna medica mano prima della sua non s'era accostata. Finalmente si chiude il lavoro colle opere meccaniche, secondo che di ciascuna fanno menzione gli antichi scrittori. Precedelo poi una dottissima Prefazione, ove in un colla vita d'Archimede si dà contezza delle sue macchine, delle quali intento, come narra Plutarco, alla sola speculazione, non degnò di lasciar memoria in iscritto; si prova essere suoi i due libri delle *cose portate sul fluido*, benchè solo ne resti, perduto il greco originale, un'antica version latina; ed al contrario si mostra che male ascriveasi a lui il libro dei *lemmi* conservatici in arabo, ma che nondimeno avrà luogo coi due sopraddetti nella edizione. In oltre più cose opportune vi sono sparfe, e belle ricerche vi si fanno spettanti ad erudizione, alla greca lingua, ed alla scienza matematica; come qual fosse il metodo veramente, onde Archimede scoperse quello che coll'ajuto del calcolo integrale trovafi ora, e se mai fu colla brevità portato anche la oscurità dagli indivisibili

indivisibili del Cavalieri , che usò di principj per avventura meno che lucidi ; se ricevute fossero dall' antica severità le infinitesime quantitati , ciò che pur vorrebbero alcuni ; se Archimede ammettesse , ciò che dicono altri , que' sussidj per l' arte analitica , che i moderni Geometri si procacciarono ; quanto nel passato secolo per nuovo si diede che stabili Archimede sono due mille e più anni , e quanto a lui debbeñ non men riguardo alla fisica che alla geometria ; e conchiude , che gli antichi s' ebbero gli stessi metodi quasi , che usiamo noi , se non quanto sopra di fondamenti più sodi e più sicuri gli fabbricarono . La dotta Inghilterra , che sola mantiene il gusto tuttora de' sani studj , sembra disposta a pubblicare questa opera Veronese per insinuazione de' Signori Strange , Stanhoupe , e Stormont commendabilissima : e dalla fiorente Univerità di Oxford , onde già uscirono l' Euclide di Davide Gregory , e l' Apollonio di Edmondo Allejo , l' Archimede anche di Giuseppe Torelli sperasi che uscirà , degno certamente della immortale compagnia , ed attissimo a far vedere che se l' Italia manca talora di buoni instituti , non mancano però mai gl' ingegni buoni all' Italia .

Ed ecco le opere tutte , così di varia letteratura come di scienza , lasciateci dal Torelli . Che molto egli abbia operato , massime se alla finitezza miriam de' lavori , che tanto più vale della lunghezza , non credo poter essere in dubbio ad alcuno : nondimeno mi convien dire che manco operò egli di ciò che avrebbe potuto , il che se nulla fa veramente all' utilità pubblica , fa però molto alla privata sua gloria , e se non ioddisfa il popolo che rozzo non giudica che dagli effetti , può nondimeno il Filosofo che le cagioni ancora disamina soddisfare . Or che si vuole ch' io dica ? la rettitudine stessa della sua mente , la fina tempera stessa dell' animo suo fece , convien crederlo , che più innanzi ancora non procedesse : tanto gli è vero che siam sempre uomini , e che le

doti eziandio più alte e divine prendono sempre del basso e terrestre che proprio è di questa nostra natura . Quel senso dell' ottimo in ogni cosa più volte da noi ricordato gli faceva tosto comprendere le difficoltà tutte che in ogni cosa s' incontrano ; e quindi la perfezione all' occhio di lui era in affai più sublime ed inaccessibil luogo , che all' occhio degli altri , riposta . Conformato a tal modo , pigliava tra mano le opere ancora più celebri , e vedeva che quanto più rilevanti e più lunghe , tanto erano ancora più gremite di errori e più testificanti la umanità , quindi anche per se stesso oltra ciò che d' altra parte gli si conveniva , temea , e però il veder più era cagione che osasse meno ; nè si commetteva mai alla fortuna , che pur essa ha gran parte nel mar letterario , e salva talora chi per troppo ardire all' incontro meritato s' avrebbe il naufragio . Aggiungasi in oltre che la presente anarchia nel regno delle lettere , corrotte per conseguenza , cadere gli faceva l' animo e quindi la penna ; onde mi dicea spesso che applicava per erudire e dilettar se medesimo , e curavasi meno di farsi noto al comune de' letterati , cui sapea non dover piacere i suoi parti , veggendo approvarsi da loro ciò ch' ei non potea che disapprovare , e quindi la lode più ancor del biasimo paventando . E però solamente o per regalare un amico , o per compiacere a qualcuno , o per altra civil convenienza e riguardo alcuna cosa tratto tratto mandava a stampa , che però non era che un faggio di quel che potea maggiore affai di quel che mostrava , ma che ancor tale palefa ai giudici buoni quel più che fatto avrebbe volendo , perciocchè l' occhio erudito vede il danzatore da un solo passo , e del musico s' accorge in due note l' orecchio dotto . E tutto ciò intendasi delle sue profe di bella letteratura e di filologia ; nel che per vedere se potea più , basta eziandio considerare il gusto suo nello scrivere , la sua perizia delle lingue antiche e moderne , la sicurezza della

critica , e l' istancabilità nello studio . Riguardo alla poesia , sentiva io stesso di molti lagnarli che faceva poco , e folamente uscía a quando a quando con qualche suo breve componimento : l'agno singolare in vero e grazioso ! quasi che l' Italia scarseggiasse di tal merce , e che anzi non sia necessaria nelle più dolci e fine cose per appunto una certa economia e sobrietà . Che se maggior numero di versi avrebbero dal Torelli desiderato per una particolare e maggior beltà che in quelli scorgevano ; quale più bello elogio posso io mai fargli di questo ? di fatto dicasi pure che un tal desiderio è pruova sempre di merito , perchè niuno domanda versi ai Bavj ed ai Mevj , e questi , per poco ch' e' facciano , il troppo sempre faranno . E per verità se indubitato è , che ben fare , non il far molto , sia la verace misura dell' eccellenza , indubitatissimo è questo poi nella poesia : e ottimamente fu scritto da quel maestro , che un sonetto senza mancanze val più che un lungo poema . Ma forse quanto alle matematiche , di cui formò egli lo studio suo più grave ed assiduo , dirassi con più color di ragione che le sue stampe non risposero totalmente all' applicazione di lui ed all' altrui aspettazione , che potea curar meno le minori cose , e darli maggiormente alle grandi , e che dopo le tante visite e lunghe agli antichi dovea starsi un po' più , che fatto non ha , co' moderni , superbi essi pure di bei tentativi ed utilissimi ritrovamenti . Quanto al curar meno le minori cose , egli credea veramente che in geometria così , come in poesia , nulla ci fosse di piccolo ed indifferente , e che poi si potesse attendere a quelle senza pregiudizio delle maggiori , onde anzi la massima lode così nel Letterato , come nel Ministro , o nel Capitano ; e ciò credendo , a me pare che ben credesse . Rispetto poi alle cose grandi , io confessò che benchè pur queste trattate egli abbia , potea però trattarle ancor più , potea maggiormente tentare , osare , maneggiar più ,

senza danno della sua tintesi , la sola chiave , che abbiamo adesso , de' tesori novelli , l' analisi algebrica , ciò tutto è vero ; ma io lo ripeto , è il popolo grosso ed ignaro che solamente giudica dagli effetti , perchè in se stesso non mai confida l' uomo . Lasciamo a lui dunque il pesare le cose e gli uomini secondo l' utile che alla civil compagnia ne deriva , abuso più che mai grande oggidì , ed abuso che porta oltraggio gravissimo alla virtù , come non fosse bella e risplendente in se medesima , ma solo per que' raggi di utilità , che schizzano d' essolei . Io non dico che da stimar non sia sopra gli altri quel letterato compagnevole e pubblico , per così dirlo , e accademico , ch' s' argomenta con novelle prove di renderne più agiati e meno infelici ; ma perchè ancora non loderemo l' uom solitario e privato e lontano da ogni accademia , che adorna se medesimo di tutte le scienze , e queste coltiva a quel modo che più gli aggrada , modo però che non esige minore chiarezza , acume , e forza d' intendimento ? e veramente dietro la falsa regola dell' utilità ciascun vede che farebbe più da pregiarsi il muratore che n' alza la casa , che non il dipintore che de' suoi quadri ne l' orna , come da un gran Savio fu detto , e come di tante altre facoltà ed arti può dirsi . Ma lasciando anche questo , io vi dico che un letterato , come fu il nostro Torelli , è anche di gran giovamento al vero progresso delle scienze , sebben non appaja così tosto la parte ch' ei v' ha ; perciocchè nel tempo che altri le avanza , è non men necessario chi sappia regolarne l' avanzamento , e con quel gusto che proprio è della scienza tenga in cammino quelle dottrine che nel lor corso potrebbero traviare ; ed io lodo quel filosofo che quasi vento forte e propizio la gran nave del sapere spinge oltre , ma non loderete voi l' altro che al timone sta della nave e il difficil corso ne regge ? ed io so bene che questi non opera senza l' opera di quello , ma quegli la spingerebbe al precipizio e alla



morte senza la guida e l'avvedimento dell'altro. In oltre fatto e disposto com'era, non potea necessariamente altro di quello riuscire. Perciocchè ciascun fa che promovendo una scienza è necessario assai spesso di cominciar quello che non si può compiere, e di lasciare alcune cose meno perfette ai posteri che le perfezionino poi: ma il Torelli, che quanto diligente ed esatto era, tanto, e a ragione, dell'esattezza e diligenza altrui diffidava, non avea cuore di lasciar crescere nell'altrui mano i proprj suoi parti, e però amava meglio di fabbricare un palagio solo ed ornarlo in ogni sua parte e compirlo, che i fondamenti gittare d'una intera città, e poi al lavoro e alla discrezione de' posteri abbandonarla. Ed in oltre ancora, non sembra egli che prestato abbia utilità e comodo grande ai matematici col presentar loro purgato e netto, e meglio parlante una lingua notissima, il padre di que' trovati, in promuovere i quali, come dice il Wallisio, gloriasi più l'età nostra, Archimede? Ma io già temo non venga sospettato di me, quasi m'assatiichi troppo a cercare gli argomenti della lode in un tempo ch'ei non abbisogna veramente di tale ansietà; e però dico solo e non più, che gli fa elogio eziandio la costanza sua in non aver punto ceduto al tempo così nella grave come nella gentile letteratura, ferbando una sanità di gusto nel generale contagio maravigliosa; la qual resistenza contra il tempo, che i più forti anche strascina, non può derivare da altro che da quel suo naturale e colla buona disciplina perfezionato senso dell'ottimo, da quell'armonia e temperatura di animo bene educato ed ottimamente nodrito, in una parola dal vero gusto, che gli fu sempre guida fedele nella difficil via delle lettere.

Quello che abbiain detto come letterato, dir possiamo anche come uomo solamente; perciocchè io crederò sempre che un uomo nato ed allevato alla verità e alla bellezza abbia ad essere necessariamente virtuoso, e che però quello che ben lo

guida nel cammin delle lettere , deggia ben anche guidarlo in quel più difficile della vita , ciò che in poche righe a dir resta . Nè vi faccia ombra il vedere , spesso pur troppo , alla filosofia ed alle arti la turpitudine congiunta ed il vizio ; perciocchè rarissimo è quell' amor verace ed universale del bello di cui vi parlo , amore così ben veggente , che tosto coglie le relazioni tutte ed i vincoli del fisico col morale , della scienza colla sapienza , e così potente , che lega tosto con quella mirabile e direi più che aurea catena , da cui tanto impossibile cosa è sciogliersi poi , quanto è cosa rara venirne una volta annodati . E come era pari nell'anima del Torelli alla rettitudine e all' armonia , onde il vero gusto per le scienze gravi , la fina tempera e delicata , onde il sapor vero per l' arti belle , così riguardo alla qualità prima fu sempre nimicissimo d' ogni discordanza nella vita , e di quanto anche per poco turbasse l' ordine della civil compagnia , e riguardo alla seconda , fu dolce ed umano di affetti , ed ebbe quella gentilezza di cuore , che sparfa sulle opere della vita rende nell' uomo più amabile la virtù , come sulle opere sparfa dell' ingegno rende più amabile la scienza nel letterato . E veramente come la perfezion letteraria par risultare dalla colleganza del bello spirito e del forte intelletto , delle lettere e della scienza ; così può dirsi che la perfezion civile risulti dalla colleganza de' gentili affetti e degli onesti pensieri , della sensibilità e della virtù .

Fino da' suoi più verdi anni operò cosa che ben merita di essere ricordata , e che mostra , che se premature furono le sue lettere , furono ancor prematuri i costumi suoi . Perciocchè sendo tuttora in Padova a studio , compose insieme e riunì due celebri uomini , il Facciolati ed il Volpi , d' ambo i quali amico era , e tra cui , come pericolo è dei correnti alla stessa meta , dissidio e nimistà vide forta ; egli giovinetto due quasi vecchj , egli scolare due cattedratici . Ed una lode

di simil fatta , ma più bella , perchè in occasione assai più difficile e dura , riportò egli molti anni dopo nella sua patria, quando contribuì di tanto a sopire quelle discordie che tra i Nobili di questa città non aveano sì debile e tepida fiamma levato .

Quanto alle amicizie, due sole, tra le molte ch' ei n' ebbe, io ricorderò: quella col dotto ed elegante Abate Sibiliani , amicizia di ben quaranta anni , e nondimeno coltivata sempre, malgrado l' assenza, coi vivi trasporti del tempo primo; e quella coll' ornatissimo Cavaliere Marchese Ottavio di Canossa , amicizia ch' io qui ricordo , non perchè ei fosse uno de' più ragguardevoli Signori d' Italia , ma perchè dopo il giorno della sua morte nacque nel Torelli quella fisica indisposizione , che a poco a poco cambiata in morbo , lo trassè finalmente al sepolcro . Ed altro non aggiungo; che i cuor gentili m' intendono, e i rozzi io non curo . Di me non parlo; tanto più che non so veramente, s' egli mi fosse o amico, o padre più tosto: questo so bene che il padre mio vero mi raccomandò poco prima della sua morte al Torelli, e però mi piace notare a debita lode dell' uno e dell' altro, che io certo non potea essere ad altre migliori e più paterne mani raccomandato . Lascio parecchj altri amici ch' egli ebbe ed estimatori grandissimi in Italia e fuori, e massime tra gl' Inglese, nazione in singolar pregio e osservanza da lui avuta; e due nominerò solamente, anche per una certa analogia tra loro di carattere e stato, il Conte di Firmian, e Milord Stormont, ambidue ministri ad altre Corti prima, indi presso la propria, ed ambidue Mecenati veri delle arti, perchè diraffi di loro che alla munificenza accoppiarono le cognizioni, ed a queste il gusto, senza cui poco vagliono le cognizioni, e meno ancora la munificenza . Lascio anche l' amor non comune che portò sempre alla madre , e la bontà non ordinaria che sempre tenne ai domestici : alle quali doti del gentile animo

quelle a maraviglia unì dell' onesto , antica severità nel costume , modestia nel culto esterno , e non minor temperanza nell' interno suo trattamento , fermezza ne' propositi buoni , giustizia nelle azioni la più scrupolosa , filosofia cristiana in un detto ; la quale unione di tali doti ed alleanza a formar viene quella civil perfezione che abbiamo sopra indicato .

Ma eziandio nella civile sua vita , come l' uomo è sempre lo stesso , dobbiam condannare ciò che nella vita sua letteraria ripreso abbiamo ; perciocchè siccome in questa non operò tutto quello che avrebbe potuto , così lo stesso fu in quella , rifiutati avendo tutti quegli impieghi che spontaneamente in patria e fuori gli si appresentarono . Il Conte Cristiani Governatore allora di Milano desiderava di averlo presso di sè , e Marcantonio Priuli patrizio Veneto lo voleva presidente degli studj in questo Militare Collegio , che venne allora giusta i consigli del Torelli riordinato , ed a tal carico invitato l' avrebbe il Senato stesso con assai largo stipendio , e col titolo di Colonnello , cosa di cui non può darsi sotto a questo cielo la più degna di essere vagheggiata . E da Padova ancora , per leggere in quella Università , e da Mantova per essere Segretario di quell' Accademia , invito più volte e richiamo gli venne fatto . Ma ricusò egli ogni cosa : o fosse in grazia di quella sua fina e acuta prudenza , che si può chiamare il gusto delle opere della Morale , in grazia io dico di quella prudenza , per cui vedesse le difficoltà tutte , e temesse non poter quello che avrebbe potuto , come gl' incontrò nella letteratura , o fosse che allo splendore dell' oro , e all' incantesimo dell' ambizione ei preferisse i piaceri puri e costanti dell' ozio letterario , della vita privata , e della libertà . E veramente riguardo al primo e le persone che lo invitavano , e più la durezza sua , in altro sperimentata , promettea tutto anche per le cose maggiori , come si disse di lui nel

nel fatto delle lettere, e riguardo al secondo, se dall'una parte non volle più ancora impiegarfi a vantaggio degli uomini, seppe dall'altra però vincere l'amabilità delle ricchezze, e la tirannia della vanità, alla quale spesso, non men che a quelle, vien dato il nome di amore dell'util pubblico. Nondimeno noi condanniamo in questo il nostro Torelli, preferendo le virtù morali che stanno tra gli uomini a quelle che vivono nella solitudine, così veramente però che si conceda non esser queste men belle in se stesse, anzi più esserlo ancora, perchè solitarie conservan meglio quella purezza, che alquanto imbruna tra gli uomini nel tempo stesso, che a loro è di utilità: come per tale rispetto il letterato pubblico abbiamo al privato antiposto, benchè sembrar possa più bella nel bello intelletto la scienza solitaria, siccome quella che lontana dai pregiudizj delle scuole e delle accademie, non soggetta alla moda ed alla corruzione del gusto, più assai facilmente pura si conserva ed intatta.

Quest'ozio erudito, questa vita libera e chiusa eran dunque le sole delizie sue; non così però che suggisse la conversazione, ma non pareva dilettersene, se non quanto con persone usava di studio, e di cose di studio s'interteneva. Nè gli mancavano di bei motti, massime ove cadeva sulle moderne cose il discorso, contro le quali parve procedere veramente alquanto più là che non si voleva, come procedette forse anche troppo in favor delle antiche: benchè la stessa conoscenza sua degli antichi tanto profonda vaglia non poco ad escusarlo. Colui che Archimede intenderà bene, dice il gran Leibnizio, stimerà molto meno le scoperte de' moderni più rinomati: e chi ben conosce, mi si permetta l'aggiungere, un Omero, un Tucidide, ed un Demostene; un Virgilio, un Sallustio, ed un Tullio; un Longino ed un Quintiliano; un Dante ed un Machiavello; è forse condannato, convien compatirlo, a non gustar più che tanto i moderni scrit-

tori ; e così vien meno sorpreso dalla moderna filosofia chi sa vederla e riconoscerla in volto all'antica . Che poi un po' troppo a disfavore sentisse degli oltramontani , e singolarmente de' Francesi in fatto di bella letteratura , è men da stupirfene , mirando alla molta sua consuetudine e familiarità col Marchese Maffei ; sostenuto avendo quest' uomo grandissimo , ma spesso dall' amore , per altro così laudevole , della sua nazione signoreggiato troppo , che è mestier nostro la poesia ed oratoria dai Greci e dagli antichi Italiani esclusivamente ereditato .

Ed eccomi giunto a quel termine colle parole , a cui giunto era colla vita il Torelli , che già mal disposto da qualche tempo , e d' una salute fluttuante ed ambigua , fu in seguito preso da morbo acuto e violento , onde fu tolto di vita li 18. Agosto dell' anno 1781. fugli anni 59. dell' età sua . L' amico e parente suo Signor Alberto Albertini , uomo di sapere e d'ingegno , bel monumento con busto in marmo gli ha fatto inalzare nella Chiesa di S. Anastasia , ove fu sepolto ; quest' Accademia Filarmonica , di cui era membro , tener gli fece pubblico Elogio e solenne ; e questo Capitolo , la cui Biblioteca lasciò erede de' libri suoi , di bella memoria egli pure volle onorarlo : e pensava di far lo stesso il Comune di questa città , alla quale mi do libertà di ricordare in queste ultime righe scritte per lei , che nulla le procurò mai tanta lode , come l' aver posta al Marchese Maffei una statua , e che il possedimento d' uomini grandi , de' quali è più copia laddove s' onorano , rende con usura quell' oro , che la fabbricazione fa spargere d' un monumento .



# E L O G I O

DI TOMMASO PERELLI

*Scritto*

Da Monsignor ANGELO FABRONI.

NELL' intraprendere l'elogio di Tommaso Perelli Pubblico Professor di Pisa abbiám creduto di render giustizia al merito d' un Filosofo, le ceneri del quale non sono state rispettate dall' invidia , che non contenta di ferire i vivi , si compiace egualmente , secondo che l' esige il suo interessè , di lacerare i morti, o di caricarli di soverchie lodi. Il pubblico ci perdonerà questo sfogo , che non può dispiacere se non a quegli' ignoranti, che non conobbero il merito del Perelli, o a quei semidotti che ebbero interessè di deprimerlo. Nacque egli in Firenze nel 1704 da Bernardino Girolamo Perelli e da Settimia Cherici di Bibbiena . Il padre di lui, nato in Premalcore piccolo castello della Romagna , venne in Firenze per esercitarvi la profession d' Avvocato, e aveva sì gran reputazione d' uomo dotto ed onesto , che il Gran

e ij

Duca Cosimo III. l'avea destinato a succedere all' Auditore Fiscale Girolamo Venuti carico d'anni e di fatiche. Ma una gangrena in un piede lo tolse di vita prima di occupare una sì onorifica ed importante carica. Il giovane Tommaso fece i suoi primi studj presso i Gesuiti, poi passò a Pisa destinato dal padre alla giurisprudenza. Frequentò pertanto il celebre Giuseppe Averani, ma non in modo che non attendesse con maggiore ardore ad altri studj. In questi non aveva altra guida che il suo talento, e dal rapido progresso, ch'ei fece nella geometria degli antichi, ben dette a divedere che era nella strada, a cui il suo genio il chiamava. Come egli aveva ricevuto dalla natura quell'attività di spirito, che non dà riposo, finchè resta qualche cosa a scoprire, domandò all' Ab. D. Guido Grandi, reputato con ragione uno de' più solenni maestri in matematica, qual cammino gli rimaneva a fare. Il Grandi indovinò il suo genio. Gli servì di padre, ricevendolo ospite nel suo Monastero di S. Michele, e di maestro, comunicandogli i suoi scritti d' algebra, e godè di vederlo sì rapidamente correre in questa difficil carriera da superare, non che uguagliare un giorno i più esperti. Ecco come il Grandi medesimo incapace di adulazione, come lo era d' invidia per uno scolare, che lo precorreva, si espresse in una lettera al suo amico Celestino Galliani. *Il suddetto giovane è tutto innamorato dell' analisi moderna, e ne ha un maneggio mirabile, di maniera che scioglie i problemi più ardui di fisico-matematica da sè, nè vi è cosa astrusa negli Atti di Lipsia, nel Newton, nell' Ermanno, nel Bernoulli, o altri autori, che egli solamente letta la proposta, subito non ne trovi la dimostrazione analitica in poche righe di calcolo, dimostrando e le leggi delle forze centrali per qualunque curva, e le curve che soddisfanno a diverse leggi delle forze centrali, e le catenarie in qualunque supposizione di gravità variabile, e le velarie, e le elastiche, e le traiettorie per mezzi di varia re-*



*sistenza, e assai più facilmente che non farei io, perchè non ha il capo distratto come io in altre cose.* Cinque anni e mezzo confundò in Pisa il Perelli, e poichè dopo il secondo abbandonò interamente la legge, gli piacque di ricever la laurea in filosofia e medicina. Gliela dette uno scolar del Bellini, che era nominato più per la fama del maestro che per la propria, e questi fu il Dott. Antonio Domenico Gotti. Ognun de' luoi precettori lo desiderava o compagno o successore, e per fino nella notomia fu creduto dallo Zambecari degno di succedergli. La morte del padre e gli affari domestici, che ne furon la conseguenza, l'obbligarono di trattenerli da tre anni in circa in Firenze. La matematica però, la botanica, l'erudizion greca e latina, la storia antica e moderna, le ricerche d' antichi monumenti in quel ricco deposito della biblioteca Laurenziana occupavano assai più il Perelli che le cure domestiche. Viaggiava spesso col celebre Micheli, riputato meritamente allora il Tournefort Italiano, ed ebbe quasi con lui comune la gloria di molte scoperte erbarie. La profonda cognizione, che aveva nelle lingue dotte, e specialmente nella greca, il Salvini, l'acume con cui Filippo Bonarroti paragonava e illustrava le preziose reliquie dell' antichità, il genio poetico del Buondelmonti e del Crudeli eran per lui tanti diletti di genial conversazione e occasioni di studio e di profitto. E poichè ebbe nella patria sua soddisfatto all' infaziabile avidità di sapere, e di saper tutto, se ciò fosse concesso ad un uomo solo, passò a Bologna, nella qual città fiorivano per tal modo le scienze fisiche e matematiche, e sì celebri erano in esse i nomi dei Manfredi, dei Beccari, e degli Zanotti, che reputò a sua gran ventura il vivere domesticamente con essi per lo spazio di quasi quattr'anni. Volle anche conoscere i principali luminari dell' Università di Padova, e negli undici mesi, che passò in quella sede fortunata delle scienze, fu intimo del Poleni, del Morgagni, e del

Facciolati. Questi lo persuase d' aspirare alla vacante Cattedra di lingua greca , gli promise il suo favore , e lo lusingò di un felice esito , sol che prima desse al pubblico un saggio del suo sapere in questa lingua . Non ricusò la condizione il Perelli , e si volse ad Antonio Cocchi suo amico per ottenere da lui la copia di un manoscritto greco di Caritone Afrodiseo , in cui si descrivono gli amori di Cherea e di Calliroe . Il Cocchi negò al Perelli quel che poi concesse al meschin guadagno di cinquanta zecchini (che tanto pagò l'opera il Sig. d'Orville), e ciò fu cagione, che si sciogliesse fra loro un' amicizia , che l' amor nelle lettere e una reciproca stima avea conciliata . Tornato il Perelli in Toscana dopo molte erudite peregrinazioni offerì l' opera sua a chi presedeva all' Università di Pisa, e nell' anno 1739 fu fatto Lettore d' Astronomia . Era poco men che nuova questa Cattedra , come lo era interamente l' Osservatorio eretto dalla munificenza di Gio. Gastone Gran Duca di Toscana per servire ai progressi della scienza e al decoro dell' Università . Doveva far maraviglia , che in quella scuola , in cui il Galileo avea il primo dimostrato il sistema del mondo , e annunziato tante sue celesti scoperte , e l' uso mirabile per la geografia e nautica di quelle dei Satelliti di Giove , tutto lo studio della astronomia si fosse ridotto a spiegare il Quadripartito di Tolommeo , che vuol dire ad una pretta astrologia giudiziaria . Il Perelli nella sua orazione inauguratoria piena di eleganza latina , d' entusiasmo , d' erudizione e di dottrina fisica , recitata due anni dopo la sua elezione , provò la necessità di restituire il primiero decoro , esposè i felici progressi dell' astronomia fatti fin allora , e quanto largo fosse il campo , che ella presentava per farne de' nuovi , animando sè , gli scolari , e tutti gli zelanti della gloria d' Italia a batter questa carriera , in cui sì lodevolmente correvano le due in ogni illustre impresa sempre emule nazioni , l' Inglese e la Francese .

I progressi di questa scienza dipendono dal tempo, dalla perfezione dei metodi matematici, e da quella degl' istrumenti, i quali posson dare un' esattezza tale all' osservazioni, che quelle di pochi anni vagliano assai più delle inesatte di molti secoli. Fu pertanto cura del nuovo Astronomo di provvedere il suo Osservatorio di quegli istrumenti, che i più rinomati artisti Inglesi eran soliti di costruire; nè in ciò gli fu avara l'anima grande di Francesco I., che non ricusò mai spesa alcuna, quando credè che potesse servire alla gloria della sua Toscana. E quanto ai metodi, niuno certamente al pari del Perelli maneggiava gl' inventati fin allora, e niuno più di lui era in istato di perfezionare i già noti, e d' inventarne de' nuovi. Quanto poi all' osservazioni, la sua memoria che era una viva biblioteca, e una copiosa raccolta dei più rari libri gliene somministravano tal copia, che si farebbe detto essere a lui presente come in vivo quadro la storia tutta dell' antica e della moderna astronomia. A un sì dovizioso corredo null' altro mancava, che un' istancabile pazienza nell' osservare e nel notare, e una certa agilità e destrezza nel saper fare il miglior uso degl' istrumenti. Perchè mancarono queste doti al Perelli, il suo nome non è registrato tra quelli, che chiamansi i maestri della scienza, al qual onore poteva con sicurezza aspirare sol che avesse saputo frenare il suo troppo fervido ingegno, che lo portava in un tempo a più e disparatissimi studj. Qualche osservazion d' eclissi, una porzion dell' Almagesto di Tolommeo da lui elegantemente tradotta in latino, una seconda prefazione fatta per osservazioni non sue, ma di chi gli doveva servir d' ajuto, in cui si fa la storia dell' Osservatorio Pisano, sono i soli scritti, che ei consacrò ad Urania. Ma non credasi perciò, che la fama di quest' uomo raro fosse ristretta dentro i soli confini dell' Italia. La soluzione di un sol problema Ottico di trovar una curva, in cui i raggi di luce, che vi si intende

emanata , ritornino sempre dopo due riflessioni ad un punto solo preso nel mezzo , mandata all' Accademia delle Scienze di Francia da chi n'era il Ministro in Firenze , fu come l'ungghia del leone , da cui il Clairaut , il Bouguet , ed il de la Lande , nomi illustri nelle scienze matematiche , giudicarono in esse potere il Perelli gareggiar coi primi . Questa testimonianza lo fe coraggioso , o per meglio dire ottenne da lui una meno interrotta applicazione alle cose geometriche , e potè così somministrare all' Estensore d' un Giornal letterario Toscano la soluzione d' alcuni problemi , che un Anonimo Francese aveva proposto ai matematici Fiorentini . La maggior parte di essi era di una facilità da incoraggiare anche i volgari geometri , e alcuni eran già stati sciolti . Credè pertanto il Perelli di doverli rendere alquanto più difficili , e di dar loro un' aria di novità , procedendo nella soluzione per via più ristretta , e del tutto differente dalle altre fin allora battute , e in ciò non volle servirsi che della geometria lineare , imitando così il gran Newton , il quale benchè benemerito più d' ogni altro dell' analisi e dei moderni calcoli , ciò non ostante stimò sempre ed ebbe in venerazione l' opere e i metodi degli antichi geometri fino a dolersi amaramente , che dopo l' introduzione fatta dal Cartesio del calcolo nella geometria erano a torto quasi generalmente trascurati . Quanto però il Perelli valesse nella sintesi , non si può meglio conoscere , che dalla soluzione di quel problema , in cui si cerca il raggio di un cerchio , il quale esternamente tocchi tre altri cerchj , di cui sian cogniti i centri ed i raggi ; problema , che ha meritato un luogo nell' Aritmetica universale del Newton , e che , dopo molt' altre antiche e moderne soluzioni , è stato sciolto dal nostro Geometra con magistrale semplicità ed eleganza . Dopo di ciò si volse ad alcuni dei più difficili e dei più utili problemi meccanici , che se fossero stati pubblicati nel loro tempo , avrebbero affrettato i progressi della

della scienza, a cui appartenevano, e ci farebbero ora conoscere a qual segno era capace il Perelli di contribuire a questi progressi. In sì fatte scienze le cognizioni ogni giorno più s' aumentano, i metodi si semplicizzano, e ogni età aggiunge qualche cosa alle scoperte dell' età precedente. Onde è che chi non fu sollecito a dar fuori le proprie, merita che i posteri non abbian cura di ricercarle, perchè non posson più fervire alla loro istruzione, essendo la sostanza di esse non sol passata, ma anche cresciuta negli scritti di coloro, che ai medesimi succedettero. Uno spirito creatore, com' era quel del Perelli, non isdegnò di trattare ancora cose puramente elementari per fervire all' altrui istruzione; e merita specialmente d' esser ricordato un trattato delle sezioni del cono, che ottenne da lui chi presedeva in nome di Cesare alla Toscana per uso di un suo figliuolo, il quale destinato a gran fortune pei meriti del padre e pei proprj talenti, credè di non poterli meglio coltivare, che cogli scritti e colla voce dei Professori di Pisa. Ella è ugualmente rara tra dotti l' arte di sapere profittare dei lumi degli eguali o dei superiori, come è l' arte di saper comunicare i proprj agl' inferiori. Se uno ha difficoltà per un certo amor proprio a ricevere, ne ha ancora maggiore a dare con facilità e modestia, cui rare volte inspira la sicurezza della propria superiorità. Queste due doti erano possedute sovranamente dal Perelli. Egli entrava in quello, che era proposto dagli altri, come se non avesse saputo che quella tal cosa, ma con una specie d' omaggio, che lungi dall' offendere, lusingava anzi que' pochi che erano in istato d' istruirlo, e rare volte accadeva, che non aggiungeffe qualche cosa all' altrui idee. Quando poi doveva comunicare le proprie, lo faceva con una chiarezza e naturalezza mirabile, e senza abusar d' alcuno, non si negò mai ad alcuno, e coll' istesso impegno parlava col giovane principiante e coll' uomo consumato. Così la sua casa fu quat

in ogni ora aperta a tutti , e se non potè mai ottenere da sè di prestarsi ai regolari doveri della pubblica scuola , compensò quella mancanza con istruzioni continue , che erano tanto più premurosamente ricercate , perchè senza il più piccolo fatto Accademico sembravano , e realmente lo erano , tante familiari conversazioni . Questa facilità e naturalezza dipendeva in gran parte dalla semplicità de' suoi costumi e dalla bontà del suo carattere , cui non poterono mai alterare nè il profondo sapere , nè il rispetto , nè la lode degli uomini . Ei non voleva che servire all' utilità di questi con una maniera tutta sua , che non poteva dispiacere se non a certe anime piccole o soverchiamente scrupolose , che pongono i doveri tutti della società nell' ordine e nella regolarità delle occupazioni . Tra le utilità , che apportò il Perelli agli uomini , non fu l' ultima quella della felice applicazione del suo profondo saper matematico all' idrostatica . Disgraziatamente per l' Italia ella ha sovente bisogno di chi regoli l' abbondanza delle sue acque , e provvegga alla sicurezza di quei popoli , che l' abitano , massime da che il vario interesse di differenti Principi , che dominano in essa , e le operazioni dal lor voler prodotte , han cangiato per tal modo il natural corso delle medesime , che senz' arte mal potrebbero contenerli dal non sommergere intere provincie . Da questa necessità è nata una scienza tanto propria degl' Italiani , che non dividono con altri la gloria d' averla creata e promossa . Il Perelli formato nella scuola del Grandi e del Manfredi , ai quali tanto è debitrice questa stessa scienza , doveva aver la gloria , e l' ebbe in fatti , di avanzarne i progressi . Si può dire che dopo l' estinzione di quei gran lumi non vi fu affare di rilievo , in cui egli non fosse o adoperato o consultato . Il maggior bene per altro apportato dal Perelli mediante la sua scienza idrostatica , lo provò la Toscana , che ricorderà sempre con animo grato *il Ragionamento sopra la campa-*

*gna Pisana, la Relazione sopra il modo di liberare la campagna del Valdarno inferiore dall' inondazioni dell' Usciana, l' altra Relazione della maniera di dare scolo alle acque stagnanti del Pian del Lago*, che fanno una parte del volume IX. della *Raccolta d' Autori, che trattano del moto dell' acque* pubblicato in Firenze l' anno 1774. Se Pisa e la sua campagna avessero scoli più facili per le acque e proprie e straniere, che vi son portate dai fiumi Arno e Serchio, sarebbe certamente una delle più floride e fertili provincie d' Italia. Ma la poca inclinazione del terreno verso il mare, e lo scorrer che fanno quei due fiumi in letto o superiore o eguale al terreno medesimo, producono in diverse parti sì forte ostacolo al moto delle sue acque naturali, che queste sono sottoposte a frequenti stagnamenti, altri temporali, altri perpetui; oltre di che è sì grande tal volta la copia dell' acque straniere, che il loro inondamento arreca danni e pericoli gravissimi. Come questi mali, poichè il rimoverli è impossibile, si possano scemare, e si possa migliorar la condizione della campagna tutta, l' insegna per tal modo il Perelli, che niuna cosa sembra essere alla sua avvedutezza sfuggita. Nè solamente espone il proprio sentimento, ma esamina anche l' altrui, riportando ogni proposizione ai principj della scienza. Se s' ingannò qualche volta nel calcolar la somma della spesa (imperocchè chi può prevedere gli ostacoli tutti, cui apporta la natura, o la malizia, o la negligenza degli uomini?) come accadde nel taglio d' Arno in vicinanza di Pisa, nel foro del monte, per cui dovevano scolarli le acque del Pian del Lago, e in altre operazioni; furon però sempre queste dirette da un saper profondo e da un' illuminata prudenza, che sa distinguere nell' incertezza di molte dottrine e nella varietà di molte sperienze il vero dal verisimile. Noi ricordiamo il Ragionamento sopra la campagna Pisana in tempo, che la Repubblica di Lucca ha consultato i più abili i-

drostatici dell' Italia per sapere qual farebbe il modo il più facile e il meno dispendioso da condur le acque , che scolaro nel lago di Bientina, al mare; e chi fa che nella discrepanza dei pareri e nella difficoltà d' eseguirli non sia finalmente costretta di abbracciar quello proposto in detto Ragionamento dal Perelli, che è di far traversare quelle acque per mezzo di una volta sotterranea l' Arno , e di scaricarle nel più basso letto del Calambrone? Sarebbe poi cosa lunga a ridire le utilità tutte, che furono una felice conseguenza dell' idee eseguite del Perelli , e che egli esposè o negli scritti di sopra ricordati , o in altri , che non videro la pubblica luce \* . E servivagli mirabilmente a ciò la notizia dell' antichità per paragonare lo stato presente col passato , e per dedurre da questo paragone i rimedj i più opportuni : ed una prova ne sia la lettera al Senatore Buondelmonti intorno all' inondazioni d' Arno e ai mezzi per ripararvi , in cui si fa la storia di tutte le piene, dalle quali la più bella delle città d' Italia fu più volte miseramente deformata . Così potè convincere d' errore coloro , che sostenevano rialzarsi di più braccia il letto d' Arno nel corso di un secolo, ed essere più frequenti e più desolanti le inondazioni di questo fiume nei presenti, che nei trapassati tempi; e potè altresì più apertamente provare che farebbe riuscito inutile, e in alcune cir-

\* Non farà discara una nota di quelli, che sono a noi pervenuti.

Relazione sopra il fiume Marroccia pel Sig. March. Antonio Niccolini. = Sopra una nuova inalveazione della Girota. = In causa Silvatici e Norci. = Intorno alla macchia di Pietrafanta. = Sopra il fosso reale. = Sulla quantità dell' acqua della fonte Donata sotto Treggiaja. = Sopra il mantenimento del fosso di Ripafratta. = Sopra l' unione dell' acqua della

Barra , Fossa Nuova , Fossa di Malaventre ecc. = Sopra la bonificazione del padule del Bellino. = Sopra le oppolizioni fatte al suo progetto intorno all' emisario del lago Trasimene stampato in Firenze l' anno 1771. = Sopra le colmate dell' Ajaccia e del piano d' Acquaviva in Valdichiana. = Sopra il taglio d' Arno , e voltata di esso in Barbarecina. = Sopra il progetto del canale navigabile da Firenze fino allo sbocco di Ombrone.



coftanze ancora dannoso il divertimento di una porzion dell' acque nella parte fuperiore alla città . Si farebbe voluto da lui non folamente l' efame degli altrui penfieri fopra quefto importante oggetto e l' efpoftione dei proprj , il che efeguitò copiofamente , ma ancora una geometrica determinazione di pendenza e larghezza , per le quali un fiume nel fuo letto fi riduce in uno ftato di permanenza inalterabile : ma confeffò effer quefto un problema tanto difficile , che tutte le dottrine fin allora acquiftate nella fcienza dell' acque correnti erano insufficienti a rifolverlo . Tra tutte le mutazioni però , che per legge di natura o per opera umana han fofterte i diverfi fiumi dell' Italia , niuna havvene forse maggiore di quella accaduta al Po ed al Reno , per la quale le tre provincie di Bologna , di Ferrara , e di Ravenna , le più amene , le più fertili e forse le più popolate dello Stato Pontificio han ricevuto danni graviffimi , e ne temono anche dei maggiori . Le controverfie poi nate per rimediare a quefti mali fono ftate sì lunghe , sì varie , e sì vive , che poftò dirfi d' aver fervito fe non al follievo di quelle provincie , certamente al progreflo e perfezione dell' architettura dell' acque . Anche il Perelli ebbe parte in effe , allorchè fu prefcelto ad affiftere come matematico il Card. Pietro Paolo Conti , a cui era ftato commeffo di vifitare diligentemente quell' eftefe regioni , e di provvedere alla loro falvezza . La Relazion del Perelli a quefto illuminato vifitatore non fi diparte mai dai principj univerfalmente ricevuti d' idrometria ; e nella neceffità di condurre il Reno unito col rimanente dei torrenti del Bolognefe e della Romagna per un fol alveo al mare , reputato unico rimedio a tanti mali , propone quella linea , che poi in gran parte felicemente efeguita da un franco domatore dei pubblici mali e pregiudizj ha provato la fingolar prudenza del fuo Autore . Appena meriterebbero d' effer ricordate le oppofizioni fatte alla Relazione del noftro Idroftatico , per-

chè dettate più da umane passioni, che dall'amore del vero, se la risposta, che ei dette alle medesime, non appartenesse al corredo della scienza dell'acque. Alla quale mentre serviva viaggiando per diversi luoghi, che doveva visitare, da per tutto ricercava monumenti d'antichità, opere d'eccellenti artisti, e specialmente pittori, scultori, ed architetti, de' quali conosceva il bello ed il buono, rari manoscritti e libri, facendo di tutte queste cose e di altre simili sua cura e delizia. Nè ricusava richiesto d'eternar la memoria di qualche fatto o persona con eleganti iscrizioni Latine, o di supplire l'antiche, nel che era di una mirabile sagacità, bastandoli poche lettere per indovinare o le corrose o le smarrite, o d'interpetrare quelle che eran reputate della più difficile intelligenza. Tra queste ci piace di ricordare la più celebre di tutte per la sua antichità, che fa un singolar ornamento del ricchissimo museo Nani, e intorno la quale si sono occupati gl'ingegni dei più valenti antiquarj. La insolita forma delle lettere, con cui è scritta, ne rende incerto il senso, e pensa il Perelli, che esprima il dono di un tripode fabbricato da Trifone, ed offerto da Ecfante ad Apollo. Alla maniera degli antiquarj rende ragione d'ogni suo detto, e lo fa con quella copia di Greca erudizione, che serve unicamente all'argomento, non alla pompa dello scrittore. Promette in fine dell'operetta altre spiegazioni d'iscrizioni Greche; ma poichè in sue letterarie promesse era sovente vano lo sperare, non valse la noiosa importunità di chi lo stimolava ad arricchire di questi doni una sua Miscellanea a vincere la naturale incostanza del medesimo. Nè tampoco riuscì a me di vinceria per ottenere una compita edizione dell'opere inedite del Torricelli, l'autografo delle quali mi era fortunatamente venuto alle mani, nè altri lavori, ch'io credeva poter servire alla gloria dell'Università di Pisa, a cui con vincolo comune eravamo legati. Una Memoria sul mo-

do di migliorarla, un' altra full' erezione di una nuova cattedra d' idrostatica, e sulla opportunità dell' agro Pisano per fare in grande l'esperienze appartenenti alla stessa, varj estratti di opere matematiche, e la soluzione di alcuni problemi barometrici proposti dal P. Fontana, che furono da me inseriti nel Giornal Pisano, sono i soli scritti, i quali a fatica impetrai dal medesimo, e di cui il debito di gratitudine ne esige da me un' onorevol ricordanza. Ma se è interessante il conoscere l' opere di un gran genio, come quelle che determinano il giudizio, che si deve formare dei suoi talenti, non è meno importante lo spettacolo della sua condotta, dei suoi costumi, e per fino delle sue debolezze, dalle quali, come da una scuola di filosofia, si posson cavare utili insegnamenti. Già si sa, che o la gloria, o l' interesse, o tutti e due insieme sono i due grandi stimoli, che fanno agire gli uomini; e le persone di lettere non sono esenti dal pagare questo tributo all' umanità. La semplicità dei costumi, che fu propria del carattere del Perelli, doveva allontanar da lui, come lo allontanò, il desiderio d' accumular denari. Egli era povero non ostante un' annua provvisione di sopra 400. scudi, che ritraeva dall' Università, e una rendita vitalizia di 240, perchè soddisfatto che egli aveva il desiderio di acquistar libri rari in ogni maniera di scienze, e qualche istrumento matematico, ed in specie astronomico, che mai non adoperò, null' altro curava, e rinunciando senza avvedersene ai comodi della vita, dava a ciascun di quelli, che lo servivano, o lo frequentavano, il dritto di partecipare del frutto delle sue fatiche. Si farebbe detto che non conosceva l' uso e il valore della moneta, se non allor quando per soverchia generosità o inconsideratezza mancava del necessario. Se fu il Perelli esente dall' amore dell' interesse, non lo fu egualmente da quel della gloria, che secondo l' espression di Tacito è l' ultima passione dei sapienti. Nel soddisfarla era lon-

tano non meno da quella delicatezza d' amor proprio , che è un vero supplizio per molti dotti , perchè non soffre la più piccola contraddizione , come da quegli artifizj , che tanti e tanti impiegano per ottenere i suffragj del pubblico , e da quella vil gelosia , che ci fa deprimere il merito altrui per inalzare il proprio . Il Perelli giusto verso degli altri , domandava per sè la medesima equità ; e persuaso , che il numero dei buoni giudici in ogni scienza ed arte è piccolo , si contentava dell' approvazione di persone illuminate , abbandonando tranquillamente il rimanente alla loro ignoranza o invidia . Fu però in lui una sorta di contraddizione , di cui con difficoltà si può render ragione , ed è che non essendo esente dal desiderio di fama , trascurasse poi di condurre a fine e di dare al pubblico quelle produzioni che gliene avrebbero accresciuto ed eternato il possesso . Una certa natural pigrizia , la varietà dei suoi studj , e la stessa fama , che godeva in Toscana di non aver pari nelle scienze matematiche , e pochi eguali nella varia erudizione e nella cognizione della Greca lingua , e che annorzava , se pur non toglieva affatto in lui l' operoso sentimento di emulazione , sono a mio credere i motivi , che han privato la posterità dei frutti , che il singolar talento del Perelli avrebbe potuto produrre . Pien di rispetto per l' antichità non sapeva accomodarsi ad un certo gusto dominante , che divenendo ogni giorno più stravagante par che annunzi la vicina decadenza delle lettere ; onde se o per servire a sè medesimo o alle richieste d' amici compose qualche cosa in proposito d' amena letteratura , procurò sempre , e l' ottenne mirabilmente , che ella avesse impresso il carattere della grandezza , facilità , ed eleganza antica \* . Non deve far maraviglia che avesse il Perelli per gli altri

---

\* Darem qui un saggio del valore del Perelli in poesia Latina e Greca .

altri l'indifferenza, che aveva per se medesimo. Lo spettacolo vario delle passioni, che agitano gli uomini diverte la

*Tomo II.*

g

*Per l'Obelisco, che si voleva alzare in monte Citorio  
da Benedetto XIV.*

Ille olim Augusto meritus Caesare foles  
Niliacus jacuit faecula plura lapis;  
Praefule nunc idem Benedetto furgere jussus  
Admonet antiquos, Roma, redire dies.

*Sopra la Signora Sofia N. N.*

Dum spectat Juno Sophian, auditque loquentem,  
Vincor, ait, nec de judice victa queror.  
Una trium nequeo junctis certare duabus,  
In Sophia Pallas jungitur atque Venus.

*Per la morte ai un giovanetto.*

*Traduzione dal Greco.*

Nuntia Persephores, ales Cyllenia, qualem  
Ducis ad infernos, tristia regna, lacus!  
Sorte mala eripitur luci septennis Ariston,  
Quem tenet & medium spectat uterque parens.  
Si te cuncta manent quot sunt mortalia, Pluto,  
Poma quid immiti carpis acerba manu?

*Traduzione del Sig. Metafasio.*

O della Dea d' Averno  
Mercurio messaggier, dal cieco mondo  
Chi mai conduci al tristo orror profondo!  
Di sett'anni Aristone  
Dalla barbara Parca al ciel rapito,  
Che in mezzo ai genitori è qui scolpito.  
Oh se d' ognun che nasce  
La matura vendemmia a te si ferba,  
Pluto crudel, perchè la cogli in erba?

*Sopra un dito del Galileo staccato dal suo cadavere.*

Lipfana ne spernas digiti quo dextera coeli  
Mensa vias, nunquam vivos mortalibus orbes  
Monstravit parvo fragilis molimine vitri.

maggior parte de' filosofi , e come Democrito , molti ne ridono . Ma il Perelli non sol non si burlava del ridicolo de' fuoi simili, ma nè pur si degnava d' osservarlo ; forta d' indulgenza, che se fosse stata a lui concessa, non si ricorderebbero ora con riso alcuni avvenimenti , che furono l' effetto di una soverchia credulità unita al desiderio di piacere per fino al bel sesso . Si rammenta ancora la singolarità delle sue astrazioni . Imperocchè pensava ordinariamente nel mezzo di una conversazione , di una camera piena di gente , e anche in compagnia di Dame . Faceva naturalmente e senza affettazione quello , che per una prova o per una ostentazione delle sue forze era solito di fare un antico filosofo , che si ritirava in un pubblico bagno per meditare . Quantunque però alcuni si burlassero di queste distrazioni di mente , non per questo lo rispettavano meno, e tutti ricercavano avidamente la sua conversazione , perchè era lontana da burbanza e vani-

Ausa prior facinus, cui non Titania quondam  
Suffecit pubes congestis mollibus olim  
Sydereas frustra conata adscendere in arcus.

*Per la Signora Ottavia Pepi.*

Τὴν ξανθὴν κορυφὴν, ρ' ὀρέντά τε κύκλα παρειῶν  
καὶ εἰς τοῖθ' ἄγρ' αἰθ' ὀμματα μαρμαρυγῆ,  
καὶ τόμῳ μαλίσσον ὑποπερὶ τένον ἠδίου οὐραν,  
κλόπον τ' ἀρτιπαχῆς λευκότερον χιόσιος  
πάντ' εἰσερῆς Πεπίης αἰ χείροισι, μέμφιο τέχνην,  
οὐδέ γράφεις γε τυτῶν ἠέλιον ἰύνηται.

*Versione del Sig. Ab. Guarducci.*

Flavescentes crines, circlos roseosque genarum,  
Quaeque udum vibrant lumina viva jubar;  
Floribus & ridens vernis os dulcius halans,  
Concreta pectus candidiusque nive,  
Cuncta vides Pepiae, quae si hic minor, arguito artem;  
Nec solem artificis pingere dextra queat.

Chi poteva per se medesimo comporre un' antologia, sappiamo essersi ancora occupato in tradurre alcuni epigrammi della Greca.

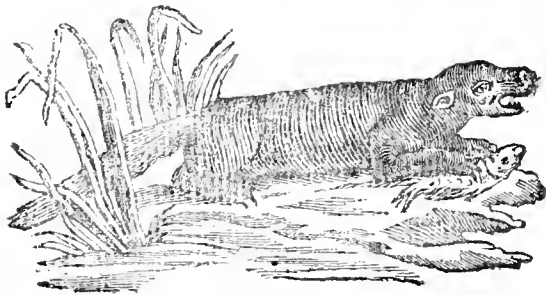
tà anche quando istruiva, e perchè era condita spesso di fatti e di opportuni racconti di detti e di fatti, e di una naturalezza, bontà, e giovialità che seduceva. Nel raccontare una piacevole storia sapendo, che la fine ne è l'oggetto, si affrettava di giungervi, e produceva l'effetto senz'averlo promesso. E' incredibile la copia di aneddoti galanti, politici, militari, e letterarj che eran sempre presenti alla sua memoria, e si farebbe detto, che la storia antica e moderna fosse stata l' unica sua occupazione. Aveva profondamente meditato quello che grandi Autori, come un Locke, un Montesquieu, un Chesterfield, hanno scritto sopra la metafisica, la politica e la morale, e applicando i loro principj alle circostanze dei tempi giudicava, e prevedeva con una sagacità degna di un gran Ministro. Era solito di dire, che si farebbe potuto facilmente moltiplicare il numero dei profeti, se da persone illuminate si ricercasse per tal modo l' origine delle nazioni, delle loro lingue, dei loro costumi, delle loro opinioni, e tutto quello, che appartiene alla storia dello spirito umano, che si venisse a scoprire una successione ed una catena di pensieri, che nascono nei popoli gli uni dopo gli altri o piuttosto gli uni degli altri. Egli è certo, che uno spirito metafisico, come quello del Perelli, sapeva dallo studio della storia cavare certe generali riflessioni, che sembravano inalzarsi sopra la storia medesima. Anche la teologia entrava spesso ne' suoi discorsi; imperocchè egli aveva letto molti degli antichi SS. Padri, e specialmente Greci, e conosceva il forte e il debole di quelle dispute teologiche, che uno spirito di partito ha infelicemente suscitato, e che senza farci migliori hanno per tanti anni non solo occupate le scuole, ma anche agitata con grave scandalo degli Eterodossi la cristiana repubblica. Egli era assai illuminato per non isposarsi ad alcun partito, e persuaso delle verità di nostra Santa Religione, la coltivò con culto più interno che esterno, quantun-

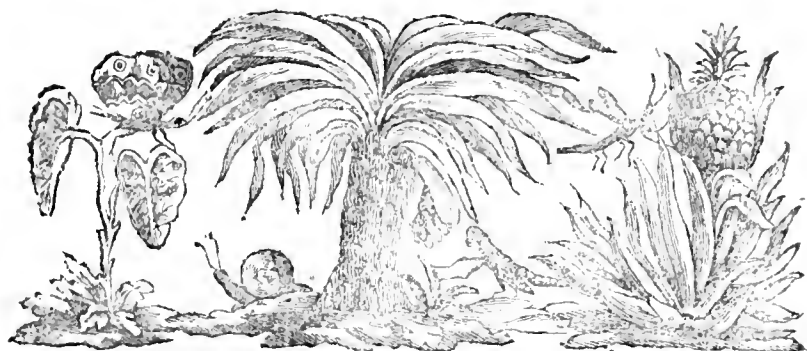
que però non trascurasse mai anche quegli esteriori doveri che ella prescrive ai suoi seguaci. Ciò non ostante non sono mancati chi dalla sua costante tranquillità e dall' astrazioni, che l' accompagnavano anche nell' adempimento di quei doveri religiosi, che dovrebbero più di tutti escluderle, han preso motivo di mettere in dubbio la religiosità di lui; tanto è vero, che la malignità sa profittar di tutto, e che vi farà sempre una moltitudine di uomini, che si compiace di abbassare il merito dei gran genj, e di trovare il più leggier pretesto per dispensarsi dal rendere ad essi giustizia. Quantunque non fosse indifferente alle grazie del bel sesso, non pensò mai ad ammogliarsi. Sortì dalla natura una forte complessione, cui solamente nell' età la più avanzata poterono alterare le irregolarità del vivere, la continua meditazione, e l' assiduo studio. Questo divorator di libri, per servirmi dell' espressione, con cui Cicerone caratterizzò M. Catone, quante volte non solo nella propria, ma anche nell' altrui casa fu sorpreso dal nuovo giorno, allorchè erasi abbandonato nella sera alla lettura di qualche opera per lui interessante! E raramente accadeva, che ne dispregiasse alcuna, onde faceva maraviglia, che a un mondo di libri mediocri, e quasi assolutamente sconosciuti avesse accordata la grazia di leggerli. Rare volte prendeva la penna per notare, fidandosi della sorprendente sua memoria, in cui ciascuna idea occupava il posto, che le conveniva, e che lo serviva a segno, che era pronto a rispondere sopra quasi tutte le materie, e a citare i luoghi dei principali Autori che le trattavano. L' abbandonò poi quasi del tutto per l' abuso fattone negli ultimi tre anni della vita, che furon quasi una morte anticipata, perchè fu tolto agli amici, ai parenti, alle sue abituali occupazioni, e per fino a que' sentimenti, che son proprj ancora dell' uomo animale. Questo triste spettacolo lo dette in Arezzo, che riguardava come sua patria, perchè vi fu ascrit-



ta tra le nobili la sua famiglia , nel seno di cui si rifugiò l'anno 1779. Sentì forse allora già vacillante, o per meglio dire , gli fu fatto sentire , che l'Università di Pisa non avrebbe potuto più servirli, come per lo avanti, di glorioso teatro; onde dimandò di ritirarsene senza scapito d'assegnamenti. L'ottenne dalla clemenza di PIETRO LEOPOLDO nato alla felicità della Toscana , e al sollievo de' miseri , persuaso che da una palestra , dove tutto deve essere stimolo alla fervida gioventù per correre vigorosamente la difficile e lunga carriera degli studj, deve allontanarsi la vista di quegli oggetti , che ne potrebbero troppo sensibilmente palesare la vanità. Finalmente un' apoplessia tolse affatto il Perelli al mondo nel dì 5. d' Ottobre dell' anno 1783. E' a noi venuta dall' antichità la moda di far paralleli, e chiuderemo quest' elogio col farne uno , che sorprenderà a prima vista , e che ci farà reputare per troppo parziali della memoria del Perelli. Non dubitiamo di porlo a lato del gran Leibnitz, di quel raro e mirabil genio , che come scrisse graziosamente il Sig. de Fontenelle , simile agli antichi , che avevan l' abilità di condurre fino a otto cavalli di fronte, conduceva anche egli di fronte tutte le scienze, e che scomposto e diviso in tutte le scienze, che sapeva , di un sol uomo si farebber fatti più dotti di prima sfera . Il Perelli , come Leibnitz , aveva del gusto e del talento per la poesia , era versatissimo nell' antichità , era profondo nella storia e negl' interessi dei Principi, che ne sono il resultato , e sapeva il dritto pubblico con una non leggiera tintura di teologia; come quegli era eccellente filosofo e matematico e conoscitore sommo della storia dei pensieri degli uomini , certamente sempre curiosa per lo spettacolo d' una varietà infinita, e spesse volte ancora istruttiva . A somiglianza di lui non ebbe nè fine, nè regola nella sua lettura, e divenne per così dire tutto quello che aveva letto; sapeva più lingue morte, e le più culte delle vive,

e da tutto quello che leggeva ed osservava sapeva trar linee di comunicazione, che approssimavano mirabilmente differenti scienze tra loro. Era ancora comune a tutti e due quello spirito metafisico, che sa farsi padrone di tutti i principj più sublimi, e i più generali, e una singolar disposizione a prender tutte le forme, e a ricevere tutte le forte d' idee. Convenivano anche nella facilità di trattare con ogni genere di persone, cortigiani, artisti, contadini, soldati, ignoranti non men che dotti, persuasi, che da tutti si può imparar qualche cosa, e niun dei due reputò tempo perduto quello che dettero alla conversazion delle donne. Se il Leibnitz superò il Perelli nell' invenzione di nuovi metodi matematici e nell' illustrazione dell' oscurissima storia de' bassi tempi, fu anche vinto dal nostro Italiano in un maggior criterio, che questi portò nelle cose metafisiche, e nella contemplazione della natura, e in un gusto più delicato per tutto ciò che appartiene ad amena letteratura. Ma il Leibnitz lasciò copioso numero di monumenti del suo raro ingegno e sapere, scarsissimo il Perelli, onde si può a ragione temere, che la posterità, la quale sarà eternamente grata al primo, divenga ingiusta verso il secondo, o mettendone in dubbio il merito sovravagrande, o deponendone la memoria.





I N D I C E  
D E L L E M E M O R I E  
P R I M A S E Z I O N E.

P A R T E I.

*Introduzione a nuovi principj della Teoria elettrica  
dedotti dall' analisi de' fenomeni delle elettriche  
punte*

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Professore di  
Fisica nell' Università di Pavia . . . . . pag. 1

*Sopra l' equazione d' una Curva, sopra la falsità di  
due famosi Teoremi, e sopra le serie armoniche a  
termini infinitamente piccioli*

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubbli-

co Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia . . . . .	123
<i>Sopra la pressione de' fluidi</i>	
Del Medesimo . . . . .	142
<i>Indagini nel calcolo integrale</i>	
Del Sig. Cavaliere LORGNA . . . . .	177
<i>Delle progressioni reciproche delle potenze affette</i>	
Del Medesimo . . . . .	210
<i>Esposizione Anatomica delle parti relative all' Encéfalo degli Uccelli</i>	
Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo del Real Presidio di Torino . . . . .	237
<i>Delle Osservazioni solstiziali, fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina nell' Anno 1782, e de' loro Risultati paragonandole colle simili Osservazioni del 1756, 1764, e 1775.</i>	
Del Sig: Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toscana . . . . .	256

## S E C O N D A S E Z I O N E .

*Osservazione della congiunzione inferiore di Venere  
col Sole a dì 20. Marzo 1782. con alcune Ri-  
flessioni*

Del Sig. Ab. ANGELO DE CESARIS R. Astronomo all'  
Osservatorio di Milano . . . . . 313

*Sopra la forza Centrifuga*

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico  
Professore delle Matematiche Superiori nella R. Università  
di Pavia . . . . . 325

*Sopra le Serie*

Del Medesimo . . . . . 386

## P A R T E II.

*Nuova Teoria intorno al movimento de' navigli a  
remi*

Del Sig. Cavaliere LORGNA . . . . . 457

*Memoria seconda ed ultima sopra la riproduzione  
della testa nelle Lumache terrestri*

DEL Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore  
di Storia naturale nell' Università di Pavia . . . 506

*Lettera Prima relativa a diverse produzioni marine*

Del Medesimo

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illustri Accademie d' Europa . . . . . 603

*Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietra-Mala in particolare*

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nell' Università di Pavia . . . . . 662

TERZA SEZIONE

*Saggio di una Nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e*

*Nuovo metodo per trovare colla speranza la quantità dell' acqua corrente per un fiume*

Del Sig. TEODORO BONATI Matematico di Ferrara 676

*Dimostrazione della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebraica alla forma  $A \pm B \sqrt{-1}$ , adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni*

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze di Bologna . . . . . 720

*Saggio di Osservazioni anatomiche intorno agli Organi della respirazione degli uccelli*

Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professore primario della medesima e di Notomia

Al Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesti, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino . . . . . 732

*Delle formole differenziali, la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni coniche*

Del Sig. GIAN-FRANCESCO MALFATTI Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara . . . . . 749

*Memoria sull' equazioni a differenze finite e parziali*

Del Sig. PIETRO PAOLI Pubblico Professore nella Università di Pavia . . . . . 787

*Osservazione anatomica sopra un vitello-vacca detto dagli Inglesi Freemartin*

Del Sig. ANTONIO SCARPA Pubblico Professore di Notomia, ed Operazioni chirurgiche nella R. Università di Pavia . . . . . 846

*Opposizione del Nuovo Pianeta osservata nel 1781.*

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore  
d' Astronomia nell' Università di Pisa . . . . . 853

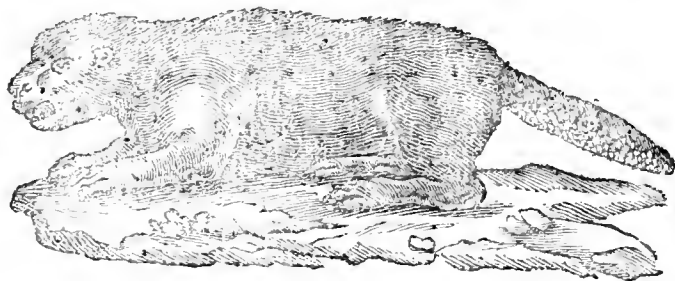
*Lettera seconda relativa a diversi Oggetti fossili e  
montani*

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore  
di Storia Naturale nell' Università di Pavia

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illustri Ac-  
cademie di Europa . . . . . 861

*Appendice alla Memoria sopra i Fuochi de' Terre-  
ni e delle Fontane ardenti in generale , e sopra  
quelli di Pietra-Mala in particolare*

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Spe-  
rimentale nell' Università di Pavia . . . . . 900





---

---

# INTRODUZIONE

*A nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall'analisi  
de' fenomeni delle elettriche punte*

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Professore  
di Fisica nell' Università di Pavia.

## P A R T E S E C O N D A

**S**Orgente di fallace evidenza, e di erronee induzioni fu sempre mai in Fisica la prevenzione. Lungi da simili incanti, e da ogni illusorio splendore proseguirò la proposta analisi de' fenomeni delle elettriche punte indipendente da qualsivoglia ipotetica idea, e con tali combinazioni di sperienze, che ne rendano assolutamente distinti, e costanti i risultati in qualunque ipotesi. Sia pur questa la *Frankliniana* d' un solo fluido espansivo nelle due specie di elettricità; o la *Nollettiana* di due materie effluente, ed affluente in una sola specie di elettricità, della quale specie non sieno che gradi varj la vitrea, e resinosa; o la *Simmeriana* di due opposte potenze, dalle quali vengano le opposte elettricità vitrea, e resinosa costituite; o altra, che delle specie stesse determini i caratteri, e le qualità; o in fine qualsivoglia opinione, che con sistematici, e tecnici nomi definisca in alcun modo, e riduca a principj la varietà degli elettrici fenomeni. Tutte le considero in pari grado possibili coteste ipotetiche, e sistematiche idee; e non riputerei, che un vano trionfo tanto l' adottarne, che il ripudiarne una a preferenza dell' altra, se tali preferenze non pervertissero le vie della scienza naturale, e non ritardassero i progressi delle utili e vere cognizioni.

Ad oggetto unicamente di oppormi a siffatti pregiudizj mi permisi in fine della prima Parte alcune riflessioni contro la *Frankliniana* superstizione; e pel medesimo oggetto sul bel principio di questa dichiaro apertamente l' indifferenza mia per

qualivoglia maniera di sistematica persuasione, acciò limpido, e presto s' intenda, quanto sieno diversi i sistemi, e le ipotesi dalle teorie, e si preveda nel tempo stesso di qual forma, e e tempra sieno que' nuovi teorici principj, ai quali mi propongo di aprir l' adito con l' analisi delle elettriche punte.

Ed esaminando a tenore della proposta divisione i fenomeni delle punte opposte a punte, e delle superficie opposte a superficie ne dedurrò come nella prima, così nella presente seconda Parte i particolari corollarj più immediati per comprenderne indi ne' teoremi la generale, e costante espressione. Porgeranno adunque le distinte combinazioni delle punte, e delle superficie materia dei primi due capi; e nel terzo coll' appoggio di nuove sperienze ne estenderò l' applicazione alle apparenze di elettrica luce; preparando così la via alla terza, ed ultima Parte, che il termine comprende e dell' analisi delle punte, e della Introduzione ai nuovi principj dell' elettrica Teoria.

## C A P O I.

*Combinazioni di punte opposte a punte nella resinosa, e nella vitrea elettricità.*

**L'**attività della macchina, e la quantità di elettrica potenza, che si eccita ad ogni giro del disco, e si estende alle varie distanze, su per me in tutte le precedenti, siccome pure lo farà nelle seguenti serie di sperienze, la misura, e il modulo comune, a cui si riducono le proporzioni delle elettriche forze. Niuno, che nuovo affatto non sia nelle Fisiche e Matematiche ricerche, ignorar può, che ogni genere di forze, e di effetti non si riconosce egualmente collo stesso modulo, ossia unità di misura. Quanto è necessaria la riduzione a comune misura per conoscere esattamente le proporzioni di qualunque termine, ed effetto nelle serie diverse, altrettanto è indispensabile di variar misura per discernere tra loro gli effetti diversi, o gli elementi varj d' un effetto composto; poichè senza simili ripieghi, e varietà si compongono insieme gli effetti diversi, e gli elementi de' composti effetti vie più si confondono sotto certe misure.

In due modi si presentano gli elementi d' una forza, o di un effetto naturale; o sono quelli già composti, e confusi in ogni parte, o termine, da cui l' effetto risulta; ovvero si compongono, e si uniscono insieme colla successiva addizione di parti, o termini, che compiono, e soggettano ai sensi l' effetto medesimo. Nel primo caso l' ingrandire, o diminuire la misura non porta veruna distinzione in quegli elementi; anzi si rendono essi tanto più confusi, e indiscernibili, quanto si riportano a misure, ovvero a termini soverchiamente maggiori, o minori. Nel secondo caso all' opposto quanto può ridursi più minuta la misura, tanto più idonea diventa per dividere, e discernere que' successivi elementi, che si accumulano per accrescere, e compiere i termini, e lo stato vario del proposto effetto. Talchè siccome nel modo primo prendono in fine l' aspetto di eguaglianza, e similitudine le cose più ineguali, e dissimili, perchè coll' aumento, o diminuzione non si risolvono, nè si distinguono punto, ma soltanto si sommano, o si sottraggono confusi come sono in se stessi i loro elementi; così nel secondo modo si scorgono ne' successivi termini, e gradi separatamente i diversi elementi; e può indi ciascuno paragonarsi con gli altri in ragione, che passano essi dal primo fino all' ultimo stato più composto, e confuso.

A norma di sì giusti principj, che mi basta qui di accennare, non solamente varia i le preparazioni, e le combinazioni di sperienze, ma in ciascuna preparazione, e serie applicai ordinatamente a tutti i termini la varia attività della macchina, e la minima, e la massima quantità di elettrica potenza, che ad ogni giro del disco m' ingegnai di eccitare con uniformità di successione, per ottenere così distinti non solo i confronti d' ogni termine, ed effetto diverso colla comune misura, ma di più i confronti delle misure diverse con ogni termine, ed effetto comune. Poichè in fine le misure, e i confronti sono le sole vie d' ogni distinta idea.

## CON ELETTRICITA' RESINOSA.

### PREPARAZIONE.

Un disco affai maggiore del consueto , che usai nelle serie precedenti , mi porge ad ogni giro tanto più grande elettricità , che quindici soli giri bastano per imprimere nel solito quadro verticale descritto nella prima serie viva forza di carica ; e collo stesso numero di giri s' induce verso gli ultimi giri del disco a scarica spontanea una boccetta , che mi serve continuamente di confronto , e di prova per i successivi termini d' ogni serie. Di questo disco , e di quindici giri faccio uso in ogni termine della presente , e delle seguenti serie , quando non avviso altrimenti di averne scemata l'attività , o fatto cambio con altro minore .

La boccetta poco fa indicata non solo mi porge , siccome accennai , il confronto per la successiva attività della macchina , ma di più nel cavare la scarica dal quadro mi somministra una misura della quantità , o grado di ciascuna carica , che alle varie distanze corrisponde : della quale nuova maniera di misure parlerò in seguito più distintamente .

Non ometterò qui di spiegare il giuoco , ossia la pratica di tale misura . In vece di cavar dal quadro la scarica applicando prima , come si usa , un capo dell' arco alla faccia esteriore , e appressando poi con prontezza l' altro capo all' anteriore armatura , tengo in mano quest' ultimo capo dell' arco , e lo stringo sull' esteriore armatura di quella boccetta , che tengo insieme impugnata . E presento poi all' anteriore armatura del quadro quel globo , che fa la comunicazione , e il termine dell' interna armatura della boccetta ; sicchè non può se non attraverso di questa boccetta trarsi dal quadro la scarica . Così in vece di trarre tutto insieme la scarica dal quadro , si divide questa nella boccetta , che scarico immediatamente servendomi dell' arco stesso . E replicando lo stesso atto di prima sul quadro , si divide nuovamente quel primo residuo di scarica nella boccetta , che scarico similmente a parte coll' arco . Con tali atti replicati esaurisco in fine l' intera carica impressa nel quadro ; ed intendo , che questa si esaur-

risca , quando più non imprime carica sensibile nella frappa boccetta . Ed è col numero di tali atti , che io misuro la carica impressa nel quadro nelle varie distanze ; e s' intende- rà sempre in questo senso , quando dico *finì* , o si esaurì la ca- rica in quattordici , in dieci , in quattro , in una scarica della boccetta .

L'isolamento in questo apparato è per ogni verso perfet- to di quattordici pollici . Nel rimanente replico la *prepara- zione* della serie prima collo stesso tubo , e punta , e quadro similmente opposto , e con resinosa elettricità . Per introdurre ampia comunicazione dell' esteriore armatura col suolo , ap- plico alla stessa ai fianchi due fili metallici , che col suolo comunicano . Serve questa serie di vincolo , e di mezzo ter- mine delle precedenti colle seguenti ; e comprende in oltre in se stessa nuovi fenomeni , ai quali non si ebbe verun ri- guardo nella serie prima , e perciò si computa in ordine co- me serie distinta .

## S E R I E 5.

1. Dal contatto del quadro colla punta fino alla distanza d' un pollice s' impressè nello stesso con quindici giri carica presso a poco eguale , che si finì con quattordici scariche del- la boccetta .

2. A' pollici due finì in tredici ; ai quattro in dodici ; ai pollici otto in nove ; ai quattordici in cinque ; ai diciotto in tre ; ai ventiquattro in una scarica della boccetta : ai trenta pollici tentando la scarica del quadro non è più capace d'im- primerne veruna parte nella boccetta , e non ne mostra fe non l' ultimo grado applicando l' arco immediatamente alle opposte armature del quadro stesso ; nel quale alcun sospetto di luce pungente arriva talvolta a sentirsi fino ai pollici tren- tasei . Se però ai trenta pollici finisce la serie della scuotente forza impressa nel quadro , non finiscono i moti del pendole- to cadente lungo la sua armatura opposta alla punta . Hanno que' moti distinta espressione pel confronto delle serie seguen- ti , e per l' applicazione de' corollarj alla generale teoria . Per- ciò ne ripiglieremo l' osservazione dal contatto fino alle più remote distanze per determinare così senza ambiguità i no-

mi, che comunemente si usano troppo confusi di elettrica *ripulsione, attrazione, e adesione.*

3. Posta la punta in contatto dell'armatura al primo girar del disco oscilla, e si agita rapidamente il filo del pendoletto intorno alla punta, e s'inalza, e si estende un feno del filo stesso secondo la lunghezza della punta. Indi finchè si gira il disco tanto il filo, come il globetto si combacia con forza coll'armatura stessa, e similmente si combacia lungo la punta quel feno, che sporge dal filo.

Abbiamo pertanto nelle parti dello stesso filo due adesioni contemporanee, una del globetto e della maggior parte del filo coll'armatura, l'altra col corpo della punta per quel feno del filo, che in fuori lungo la stessa si estende.

4. Per discernere da qual cosa dipendano, e d'onde nascano queste due adesioni, osservo, che finiti i giri cessano esse immediatamente; e il filo si tende, e resta vibrato in fuori dalla faccia del quadro in proporzione della carica impressa. Onde si conclude, che dipendono, e nascono dalla azione stessa, che si eccita coi giri del disco.

5. Ma per distinguere, se quelle adesioni derivino dalla sola azione della punta, o da altra azione insieme procedente, o accumulata dal quadro; e per tentare in oltre qual cosa abbiano di comune, e quali modi, o cause distinte; mentre si gira il disco io tocco insieme colle dita le due opposte armature del quadro, sicchè da questo possa sol tanto procedere qualche azione, ma non possa in esso accumularsi. E succedono quelle oscillazioni, che notai da principio, del filo intorno al corpo della punta; anzi crescono quelle assai notabilmente, e il filo, e il pendolo s'inalza, e si estende per fino al tubo lungo la punta, colla quale tutto talvolta si combacia in certa dose di elettricità. Talchè in questo stato del quadro per quanto continuino i giri del disco resta sempre qualche adesione del filo, e del globetto colla punta, o col tubo; e niuna mai del filo, nè del globetto coll'armatura del quadro.

Indi concludo, che l'adesione della parte del filo al corpo della punta dipende dall'azione dei giri per la via della punta, o del tubo, e da qualche cosa, che procede dal quadro, ma non da ciò, che sul quadro si accumula.

6. E viceversa l'adesione del filo, e del pendoletto coll'armatura del quadro, siccome non sussiste, che nella successione dei giri, nè mai ha luogo, nè si mantiene se non senza quel contatto delle opposte armature, il qual contatto impedisce ogni accumulamento di azione, e di carica nel quadro; perciò l'adesione stessa dipende dall'atto, con cui si fa quella successiva accumulazione nel quadro.

7. Ma non perciò nasce dalla materia stessa nel quadro accumulata. Poichè col finir dei giri, benchè quella materia accumulata sussista, più non sussiste con essa nè la prima, nè questa adesione. Che anzi si scosta il pendolo e dalla punta, e dall'armatura, e passa in divergenza dall'armatura, della quale divergenza parleremo più opportunamente nella serie seguente.

8. Seguirò in questa serie a notare gli accidenti delle adesioni, e de' moti nelle successive distanze. Scostando il quadro segue nel cominciar dei giri l'agitazione, e segue indi il combaciamento del filo sull'armatura fino oltre la distanza di quattro pollici; e quel seno ristretto, e sporto in fuori si fa or più, or meno esteso, e si dirige quasi che fosse un'altra punta secondo l'asse della punta del tubo. Ma al di là dei quattro pollici comincia quel seno a gonfiarsi, e si stacca così il filo dall'armatura a poco a poco nelle ulteriori distanze, finchè tutto il filo si gonfia in arco verso la punta, restando, come è per la superior parte, attaccato all'armatura, e rimanendo il pendolino aderente verso il fondo dell'armatura stessa, quasi che ivi pure fosse attaccato.

9. Quando però arriva verso i limiti dell'isolamento ai quattordici pollici finisce anche l'adesione del pendoletto, e questo insieme col filo si vibra in fuori dell'armatura verso il tubo con grande divergenza, finchè continuano i giri del disco. Finiti questi succede qui al contrario di sopra al numero quarto. Poichè ivi col finir dei giri passa dall'adesione ad ampia divergenza; qui cade col finir dei giri, e resta quasi inerte soltanto teso dal proprio peso; se non che ritiene alcuna tenue divergenza in proporzione della carica, che a tale distanza ancor s'imprime nel quadro.

10. Nelle successive distanze poi, ove la carica è minore, e poi oltre i trenta pollici, ove è nulla, continua nell'atto

dei giri a mantenersi vibrato ampiamente , ma col finir di essi cade affatto , come inerte .

E' una tal divergenza notabile fino ai pollici trenta sei , indi si fa successivamente minore ; e ai quaranta non oltrepassa più d' un pollice e mezzo la distanza dall' armatura ; e finalmente ai cinquanta pollici si riduce lo scostamento a poche linee , e più in là non è d' ordinario sensibile .

11. E siccome nelle minori distanze notate al numero quinto ha luogo l' adesione del filo alla punta , e al tubo fino verso i limiti dell' isolamento ; così nelle maggiori ha luogo nell' atto dei giri l' inclinazione , o tendenza dello stesso filo verso il tubo , anche quando si toccano in tal atto insieme le opposte armature del quadro .

12. Nè si debbe lasciare di ben distinguere questa tendenza da quella , di cui parlai al numero quarto , e settimo . Che questa non ha verun rapporto a ciò che nel quadro si accumula , mentre sussiste nelle maggiori distanze , quando nulla giammai si accumula nel quadro , e quando pel contatto delle armature nulla può accumularsi , e sussiste soltanto insieme ai giri , e colla continuata azione della punta , o del tubo ; e perciò si dice *attrazione* del tubo . Quella per opposto non è se non proporzionata a ciò , che nel quadro si è accumulato di carica ; e siccome sussiste finiti i giri , non sembra punto dipendere dall' azione , o presenza del tubo , e perciò si dice *ripulsione* del quadro .

#### O S S E R V A Z I O N E I .

Ritenendo la stessa attività della macchina variati in due modi l' opposto quadro . Sostituii in vece del primo sottile un altro di eguale grandezza in superficie armata , ma di grossezza assai maggiore ; e la carica a distanze eguali al primo s' impressè in questo notabilmente minore . Indi posta eguale la grossezza del vetro , variati la grandezza di superficie del vetro armato ; e trovai , che quanto la superficie armata si fa minore tanto più prontamente a distanze eguali al primo ascende a maggior vivacità , e si accosta al sommo in proporzione della capacità la carica impressa . Per opposto niuna carica s' imprime nei quadri più grandi a tali distanze dalla punta ,



ta , alle quali ancor si carica una bozzetta , o un quadro affai piccolo .

Onde ne seguono due corollarj

1. *Nei più sottili quadri ancor s' imprime alcuna carica colla stessa elettricità , e alle stesse distanze , nelle quali niun cenno se ne imprime nei più gvossi quadri .*

2. *Ed i quadri di minore armatura ancor ricevono carica con tale forza di elettricità , e a tali distanze , nelle quali nulla ne ricevono i quadri di più estesa armatura .*

#### O S S E R V A Z I O N E 2.

Dovrebbe in oltre provarsi in simile serie la varietà delle paste , o dosi de' vetri , o cristalli diversi sotto le medesime dimensioni , e distanze , e dovrebbero ridursi a dimensioni eguali altre lamine di varie sostanze atte a ricever la carica , come le resine , i zolfi , e simili per soggettarle del pari a tal sorta di sperienze , e riconoscerne la rispettiva capacità fra loro , e con le eguali lamine di vetro . Nascerebbero così insieme alle due della precedente osservazione quattro nuove serie di sperienze , cioè la prima dei quadri variati nella sola *grosfezza* del vetro ; la seconda dei medesimi variati nella sola *grandezza di superficie armata* ; la terza delle varie *paste* , o *dosi* di vetri nella stessa *grosfezza* , e *grandezza* : la quarta in fine di somiglianti lamine di tutte le *sostanze dal vetro diverse* , che atte sono a ricever carica . Ardua per verità , e lunga è la via nella preparazione , e nel compimento di tante serie ; ma fuori di questa altra non ve n' ha , che stia fra i confini del vero .

#### O S S E R V A Z I O N E 3.

Oltre alle due prime serie , che nella prima osservazione incominciai , e le due altre , che nella seconda non feci che proporre da farsi , ne ho cominciata una nuova serie , che fu tutte le precedenti si estende ; ed è il cangiamento di attività nella macchina per ridurre così gradatamente minore l' elettrica quantità procedente dal tubo , e dalla punta . Trovai in tal modo , che *quanto si fa minore l' elettricità , tanto diventa più*

*insufficiente ad imprimere carica ne' quadri più grandi in pari distanze, che in altri minori; e in fine posta certa grandezza del quadro, neppure a contatto più non s' imprime verun cenno di carica collo stesso numero di giri, che è sofficiente per far carica notabile in un quadro minore.*

## O S S E R V A Z I O N E 4.

Ed a questa differenza di carica impressa con la minore elettricità corrispondono le differenze de' moti nella quinta serie descritti principalmente ai numeri terzo, ottavo, e seguenti. Poichè quel filo del pendolo, che con forte elettricità si comprime sull' armatura, e stende fuori un seno ristretto in forma di punta, quel filo stesso appena nelle minori distanze si gonfia, e poi non fa che vibrarsi in fuori, quando l' elettricità della punta è allai debole, nè è capace d' imprimere se non tenue, o niuna carica nell' opposto quadro. Talchè accade in proporzione con minore elettricità nelle minori distanze lo stesso, che con maggiore elettricità succede nelle distanze maggiori.

## O S S E R V A Z I O N E 5.

Tentai in questo stesso degradamento di attività della macchina, se con minore quantità di eccitamento si potessero nel quadro imprimere cariche proporzionali a quelle, che con maggiore s' imprimono; e se coll' accrescere tanto più il numero de' giri, quanto è minore l' eccitamento, si ragguagliassero al fine le cariche. E qui riconobbi più che mai fallace il ragionar per analogia. Poichè ben lungi da simili ragguagli col reciprocare il numero de' giri alla quantità di eccitamento non incontrai di fatto se non aberrazioni da tutto ciò, che sembrava più conforme all' analogia, e al raziocinio. Il che m' indusse a diffidare di quelle semplici, e facili ragioni, e leggi, alle quali pur si vorrebbero ridurre gli elettrici principj. *Simili aberrazioni sono prove dirette della falsità, e insufficienza de' principj, che si suppongono semplici.* Non è l' analogia che c' inganni; ma noi vogliamo ingannarci soggettando alla semplicità delle nostre supposizioni i complicati fenomeni della natura.

## P R E P A R A Z I O N E.

Fisso nell' armatura del quadro una punta verticale di filo d'ottone in grossezza eguale a quella del tubo, e lunga quattro pollici, la quale punta mira direttamente l' opposta secondo l' asse del tubo . Il filo del pendolino non è più attaccato all' armatura, ma al fondo della punta, sicchè pende verticale discosto circa due linee dall' armatura stessa. E ripiglio nel rimanente colla stessa preparazione, e attività della macchina, che usai nella precedente serie, la seguente

## S E R I E 6.

1. Dal contatto delle due punte fino alla distanza d' un pollice s' impressè con quindici giri nel quadro sempre uguale forza di carica , che si estinse con quattordici scariche della consueta boccetta .

2. Ai due pollici finì in tredici; ai quattro in dieci; agli otto in otto; ai quattordici in tre; ai diciotto in due scariche della boccetta . Ai ventiquattro pollici è ancor sensibile tra il pollice, e l' indice la scarica del quadro; ma nulla imprime nella boccetta. Ai pollici trenta d' ordinario più niun senso di scarica nel quadro , e soltanto alcuna volta qualche cenno di puntura, e di luce.

3. Qui pure i moti hanno particolare espressione pel contrasto colla serie precedente . Dal contatto delle punte fino alle ultime distanze, nelle quali sono sensibili que' moti, succedono essi blandamente , e progrediscono con uniformità di accidenti senza veruna oscillazione , o agitazione impetuosa. Al primo girar del disco si scosta alquanto il pendoletto, indi si accosta all' armatura senza che però il filo resti notabilmente gonfio in fuori finchè continuano i giri; col finir dei quali continua a restar aderente, nè si stacca, nè si vibra alquanto in fuori se non nell' atto , che si fa per cavar la scarica dal quadro . Questi moti non sono più allatto sensibili al di là dei quaranta due pollici fra le due punte.

4. Quando però nel contatto delle medesime, e nelle minori loro distanze s' imprime ancor notevole carica nel qua-

dro , precedono nel pendolo le stesse vicende , ma in fine si stacca da sè nell'atto che continuano i giri del disco , e si conserva vibrato anche finiti i giri , finchè dura tal forza di carica , che si estingue con tre , o quattro scariche della boccetta . Talvolta però resta aderente anche finiti i giri , benchè nel quadro vi sia maggior forza di carica ; e in tal caso si vibra in fuori alla prima scarica , che la frapposta boccetta cava dal quadro , e si mantiene vibrato in fuori perfino alle tre , o quattro ultime , siccome poco fa notai .

5. Provai qui similmente a toccare di continuo col pollice , ed indice le opposte armature del quadro nell'atto , che continuano i giri del disco , come feci nella serie quinta al n. 5. Ma non comparve così verun moto nel pendolo , siccome neppur un cenno di elettricità si raccolse nel quadro .

Quella divergenza adunque del pendolo , che chiamai di attrazione , e che sussiste colà tanto notevole in simil caso senza la punta , resta qui tolta affatto per la sola addizione della punta .

6. Siccome pure per questa sola addizione svanì nell'atto dei giri ogni adesione , e combaciamento del filo coll'armatura , benchè assai forte s' imprimeffe nel quadro la carica ; nè restò se non fino a certo limite la blanda adesione del solo globetto coll'armatura .

7. All'opposto quella divergenza , che da forza della carica impressa nel quadro dipende , e che chiamai di *ripulsione* , comincia qui d'ordinario , e sussiste dentro i limiti dell'isolamento , e nelle minori distanze in proporzione , che cresce la carica anche nell'atto , che continuano i giri , siccome notai al numero quarto .

8. Rimane da cercarsi , se questa divergenza di ripulsione nasca realmente da sola forza espansiva della carica impressa , e permanente nel quadro . Dalla precedente serie già è manifesto il contrario , mentre finchè ivi continuano i giri del disco , e vie più si accumula piena forza scuotente nel quadro dal contatto fino oltre la distanza di quattro pollici , ben lungi dal comparire simile ripulsione restano il filo , e il globo combaciati , e compressi sull'armatura istessa ( *Ser. 5. n. 3. 8.* ) . Finiti poi i giri si vibra ivi in fuori il pendolo in proporzione della carica , come qui si vibra nella stessa proporzione molto prima , che finiscano i giri .

9. Per accertarmi dunque vie più, che sì fatta ripulsione non dipende altrimenti da veruna forza espansiva della carica impressa nel quadro, osservo, che continua fin verso le tre, o quattro ultime scosse, che restano ancor da cavarfi dal quadro, e perciò con tale residuo di carica più non rimane sensibile quella ripulsione. Osservo di più, che anche nella piena forza della carica siffatta ripulsione dipende dalla comunicazione, che per mezzo dei due fili di ottone ritiene col suolo l' opposta faccia del quadro. Poichè ritirando que' fili, e rendendo così isolate ugualmente ambedue le facce armate del quadro, basta che si tocchi la faccia, da cui sembra ripulso quel pendolo, perchè esso cada inerte senza veruna vibrazione; e per eccitar nuovamente, e accrescere assai più, che non era da principio tale vibrazione, basta che si tocchi l' opposta armatura.

Onde non dipende da veruna forza espansiva propria dell' intera carica, nè di verun residuo di carica; ma da certa corrispondenza di azione dell' opposta faccia del quadro.

10. Con questo quadro così isolato provo in oltre, che quando il pendolo è vibrato in fuori, siccome decade accostando il dito all' armatura, e cade poi affatto pel contatto della stessa, così quando è vibrato in fuori, se in vece di accostare il dito all' armatura, l' accosto al globetto del filo, io lo inalzo, o lo vibro di più, e lo guido, e lo dirigo in qualunque parte, verso la quale lo invito con presentare il dito. Onde siccome nel precedente numero si mostrò sussistere l' intera carica, e qualunque suo residuo senza veruna forza espansiva esterna efficiente di quella ripulsione; così dalla presente osservazione risulta, che nasce da vera azione mutua di attrazione fra il dito, e il pendolo quella esterior vibrazione, e perciò meglio si riduce ad un cambio di relazione, ossia ad attrazione con qualche esterna materia, che non a meccanica forza espansiva del corpo, a cui appartiene.

E ciò s' intende non solo dalle facce dei quadri carichi, ma similmente si applica a tutti i moti, che si dicono di elettrica *ripulsione*.

11. E per l' opposta ragione apparisce, perchè colla punta al quadro si estenda appena ai quaranta due pollici (sopra n. 3.) un cenno di que' moti, che senza punta arrivano assai

notabili fino ai cinquanta (*Ser. 5. n. 10.*). Poichè siccome senza punta al quadro la mutua azione colla punta del tubo si fa principalmente per via del pendolo, che sporge innanzi all'armatura; così la punta spinta assai più innanzi, che non è il pendolo, raccoglie in se stessa, o porta previamente nel quadro quella mutua azione, che più non può estendersi nè al globetto, nè al filo.

12. Per rendere superiore ad ogni scrupolo la presente induzione, replicai col quadro da ambe le parti isolato, e senza punta le sperienze ora descritte nei numeri 9, e 10, nè vi fu altra differenza, se non che senza punta succedono que' moti più continui, e veementi. Onde la punta non fa che dividere, o raccogliere in se la mutua azione esteriore, che si fa per la sola via del filo, e del globetto nel quadro senza punta.

#### P R E P A R A Z I O N E.

Ritenendo la stessa della precedente serie non altro cangio, se non la punta di quattro pollici, alla quale altra ne sostituisco in tutto similmente posta, e simile; fuorchè nella lunghezza, la quale è qui di pollici dodeci.

#### S E R I E 7.

1. Nel contatto s' imprime carica, che si estingue in tredici della boccetta.

2. Ad un pollice si estingue in dodici; ai due in dieci; ai quattro in nove; agli otto in sette; ai quattordici in tre; ai diciotto in una scarica della boccetta. Ai ventiquattro ancor carica sensibile nel solo quadro; e fino ai trenta talvolta è sensibile la luce, e puntura tentando di cavar la scarica.

3. I moti di adesione del pendoletto finiscono qui ai pollici trentasei; e fino ai quaranta durò qualche accostamento; poichè vi fu scostamento nel toccare finiti i giri le opposte facce del quadro.

## P R E P A R A Z I O N E .

A questa punta d' un piede altra ne sostituisco d' ottone simile, del doppio più lunga, cioè di pollici ventiquattro; e con quindici giri ad ogni atto rinnovo altra serie, come la precedente.

## S E R I E 8.

1. A contatto non è più la carica, se non capace di sussistere fino alle dodici scariche della boccetta.

2. Ad un pollice finisce in undeci; ai due in dieci; ai quattro in nove; agli otto in sei; ai quattordici in tre; ai diciotto in due; ai ventiquattro nel solo quadro; ai trenta vi fu ancor luce pungente toccando le opposte armature del quadro.

3. I moti non si estesero più oltre dei pollici trentasei.

## P R E P A R A Z I O N E .

Volendo in fine meglio discernere gli effetti di mutua azione delle sole punte senza verun sospetto di azione diretta della punta del tubo colla opposta armatura del quadro; e volendo vie meglio determinare fino a quanto si estenda la diretta azione della prima punta, che dal tubo procede nell' opposta punta, che parte dall'armatura, frapposi una lamina di vetro più grande del quadro ben pulita, e senza veruna armatura, distante otto pollici dal quadro stesso, sopra la quale piegai la punta lunga due piedi, e presentai questa al solito a quella prima nelle seguenti distanze.

## S E R I E 9.

1. Nel contatto con quindici giri di fortissima elettricità non oltrepassò mai le undeci scariche della boccetta.

2. Ad un pollice finì in dieci; ai due in nove; ai quattro in otto; agli otto in sei; ai quattordici in tre; ai diciotto più nulla s' imprime nella boccetta, e nel solo quadro

è sensibile la scossa. Ai ventiquattro appena è sensibile la scintilla toccando immediatamente le opposte armature: ai ventisei non vi è più il minimo indizio di luce.

3. I moti non si discernono più in là dei pollici ventiquattro, e sono di tenuissimo scostamento, e accostamento; e progrediscono nelle minori distanze que' moti assai tenui. Ai pollici otto continua il globo a star aderente, nè si scosta, se non cavata la prima scarica della boccetta con divergenza d'arco d'un pollice. Ai pollici quattro si scosta in fine da sè, quando è assai forte la carica impressa. Ma tanto qui, come nelle minori distanze la sua divergenza non è più sensibile, quando più non restano nel quadro, che tre scariche della boccetta. Siccome in tutte le serie precedenti non comincia mai nell'atto dei giri, nè col finir di essi tal divergenza, quando la carica impressa non è capace di dar almeno quattro scariche della consueta boccetta.

#### O S S E R V A Z I O N E 6.

Dopo le prime due, e le due seguenti serie di sperienze calcolai nella prima Parte i fenomeni delle elettriche punte in ciascuna specie di elettricità secondo le semplici ragioni diretta delle distanze, e inversa degl'isolamenti; e con quelle proporzioni calcolai similmente ne' primi otto teoremi i fenomeni delle punte medesime nelle opposte specie di elettricità. Se in quelle semplici ragioni d'isolamento, e distanze si terminassero le differenze di ogni elettrica azione, proseguirei ora a calcolar similmente le cinque ultime serie. Ma ben altre vie di calcolo forza è d'intraprendere e per determinare precisamente gli elementi delle punte, e per internarci così nella cognizione delle elettriche potenze. Poichè quanto quelle ragioni sono distinte, e certe in riguardo a que' particolari fenomeni, tanto sono limitate, e ipotetiche per l'applicazione loro alla generale teoria. Onde non altro io ne derivai ne' teoremi della prima Parte, se non i principali elementi delle punte, e ne riservai le teoriche applicazioni dopo le ultime ricerche da farsi nella seconda, e terza Parte.

Ora per entrare ordinatamente in simili ricerche aggiungerò alle precedenti serie di resinosa elettricità alcune osservazioni,



zioni, che le ragioni comprendono di tutti gli elementi, che concorrono a compiere l'azione delle punte nella stessa specie di elettricità; nè punto ci occuperemo a calcolarne alcuno singolarmente.

Due cause mi muovono a proceder in simil guisa. Primieramente le composte ragioni, che nelle presenti osservazioni raccolgo, mi porgono più adeguato, e spedito confronto con le corrispondenti ragioni, che dedurrò dalle cinque serie seguenti di vitrea elettricità; e tutte queste insieme possono poi similmente confrontarsi colle ragioni, che dedurrò nel capo seguente dalle serie di superficie opposte a superficie non meno nella resinosa, che nella vitrea.

L'altra causa poi, che mi determina a raccogliere così quelle composte ragioni, ha principalmente per oggetto di ben distinguere i termini, e le differenze tutte, che in qualsivoglia modo concorrono a comporre le stesse ragioni; essendo che unitamente con questa distinta cognizione, e non altrimenti ci è lecito di calcolare que' termini, e quelle differenze ciascuna per se stessa secondo le distinte serie di sperienze, che singolarmente faranno fatte, o proposte da farsi. Onde ne risulteranno gli ultimi teoremi, che all'analisi delle punte daranno compimento.

**COROLL. 1.** Nella stessa specie di resinosa elettricità la punta procedente dal tubo imprime nell' opposto quadro maggior forza di carica, e ne estende nello stesso gli elettrici segni a maggiori distanze, quando è fornito d'armatura piana, e senza punta, che quando dall'armatura stessa parte un'altra punta opposta alla prima.

**COROLL. 2.** E similmente la carica, e gli altri elettrici segni estesi nel quadro dalla stessa punta di resinosa elettricità si fanno minori, quanto più cresce la lunghezza della punta procedente dall'armatura, e opposta alla prima del tubo.

**COROLL. 3.** E in fine la carica, e gli elettrici segni impressi nel quadro dalla stessa punta di resinosa elettricità si fanno ancor minori, se s'impedisce ogni mutua azione fra la punta del tubo, e l'opposta armatura del quadro, benchè intera sussista l'azione delle due opposte punte fra loro.

## O S S E R V A Z I O N E . 7.

Per immediata osservazione delle ultime precedenti ferie risulta

1. Che la punta procedente dal conduttore di resinoso elettricità non fa veruno scoppio di scintilla contro l' opposta armatura, e contro l' opposta punta oltre la distanza di tre linee; indi nelle maggiori distanze fino ai pollici 24 segue ad indurre nel quadro la carica senz' altro strepito di scintilla.

2. Che se a fianco del tubo si presenti una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice, resta per tal modo scemata l' elettricità del tubo anche a distanza d' un pollice, e mezzo; ma non perciò scoppia veruna scintilla tra il tubo, e il globo presentato neppure alla distanza di due linee.

3. E soltanto quando la punta opposta, e il quadro sono lontani dalla punta del tubo più d' un piede, scoppia la scintilla fra il tubo, e il globo presentato alla distanza di tre in quattro linee.

## O S S E R V A Z I O N E 8.

Or quali sono le differenze, e i modi, che maggiore, o minore ci rendono la carica impressa, e gli altri elettrici segni? Poichè in fine in quelle differenze, e in que' modi s' involge la composta ragione, che stiamo rintracciando. Tentiamo prima d' ogni altra indagine di riconoscere ad una ad una partitamente quelle differenze e que' modi.

E quanto alla elettricità in se stessa soggiace a tre principali differenze.

1. Sotto la stessa quantità può variare la specie, e la qualità, che dicemmo ne' precedenti teoremi *forza specifica*.

2. In ciascuna specie è varia in oltre la *quantità*, che ad ogni giro del disco si eccita.

3. E posta anche la stessa quantità, e la specifica forza può variare secondo la *grandezza*, e la *figura* del conduttore, in cui si raccoglie, e da cui all' opposto quadro procede.

E queste tre differenze di *specifica forza*, di *quantità*, e di

*grandezza*, e *figura del conduttore*, siccome tutte riguardano l'interiore stato della elettrica azione, che indi passa nel mezzo ambiente, e nell' opposto quadro, le comprenderò insieme col comune nome di *interne differenze*.

Alle interne succedono le altre, che dal mezzo ambiente dipendono, il quale per essere frapposto tra il conduttore, e il quadro ci dà luogo di esprimerle tutte col nome solo di *frapposte, o ambienti differenze*. E proseguendo a numerarle dopo le prime appartengono qui, 4. la specie, e l'estensione dell'isolamento, ossia de' corpi, che il conduttore sostengono, e circondano; 5. le qualità dell'aria, o di altro corpo ambiente, spettante all'isolamento; e tali qualità particolarmente si riducono a densità, o rarità; 6. a calore, o freddo; 7. umidità, o siccità; 8. purità, o mistura di arie o particelle diverse; 9. alla grossezza stessa dello strato frapposto tra l'estremità del conduttore, e l'estremità della superficie, o di altro, che dalla superficie proceda dell'opposto quadro, la quale grossezza si esprime colle distanze, che in ogni atto di ciascuna serie vengano segnate.

Sono adunque sei le *differenze frapposte*, come tre da principio si notarono le interne.

Rimangono le differenze spettanti all'opposto quadro, che perciò si diranno *opposte*. Quando non vi è quadro dipendono le opposte differenze dai conduttori, che naturalmente s'incontrano negli esteriori limiti del mezzo ambiente, ed i medesimi uniscono l'azione loro con quella del quadro, quando questo si rimuove oltre i limiti dell'isolamento. E per numerar queste insieme alle precedenti, farà 10. la figura varia dell'opposta armatura, cioè o piana come nella serie quinta; 11. o fornita di punte di varia lunghezza, come nelle serie sesta, settima, ottava, e nona; 12. in oltre sotto la stessa figura può variarsi la grandezza, o estensione della superficie del vetro armata, come nella serie, che in secondo luogo accennai nelle osservazioni prima, e seconda; 13. e può in fine ridursi a nulla l'armatura, e restar nuda la faccia del quadro; 14. e ritenendo questa faccia armata può l'esteriore, e inversa faccia del quadro stesso essere armata egualmente; 15. ovvero inegualmente più, o meno; 16. ovvero ridursi l'esteriore sola affatto nuda, e senza veruna armatura; 17. e poi ritenendo egual-

mente armate le due facce del quadro, ora si toglie l'isolamento delle due armature fra loro, siccome abbiamo fatto nelle ferie quinta, e sesta al n. quinto; 18. ora si toglie l'isolamento dell'armatura sola, che guarda il conduttore, e si fa comunicare col suolo; 19. ora similmente si toglie il solo isolamento esteriore dal suolo con applicare all'esteriore armatura due fili metallici, come ho fatto in tutte le ferie precedenti; 20. ed ora si rende anche la stessa armatura isolata ritirando que' fili; 21. Restando in fine uniformi tutte le precedenti differenze, si presentano le altre, che insieme alla duodecima indicate abbiamo nella osservazione seconda, e sono la diversa grossezza del vetro; 22. o le diverse paste, o dosi del vetro stesso; 23. e le altre sostanze dal vetro diverse, che atte sono a formar lamine resistenti, o quadri armati secondo le loro varietà. 24. ed esaurite infine, e rese pari tutte queste opposte differenze, che hanno luogo nella stessa, come nelle diverse specie di elettricità, rimane l'ultima differenza, che ne' precedenti teoremi indicai col nome di specifica mobilità.

Separando queste dalle tre prime interne, e dalle sei frapposte, quindici rimangono le *opposte* differenze.

Ma la prima delle interne, che è la *specifica forza*, e l'ultima di queste, che è la *specifica mobilità*, non hanno luogo nella stessa specie, e costituiscono perciò le specifiche differenze della resinosa, e della vitrea elettricità. Prima dunque di ridurre a calcolo distinto le differenze delle cinque precedenti ferie seguirò ordinatamente le corrispondenti di vitrea, che le combinazioni esauriscono di punte opposte; e ripiglierò nel capo secondo le combinazioni di superficie opposte a superficie nell'una, e nell'altra specie di elettricità, dopo le quali tenterò di stabilire le vie, e i termini per calcolare tutte insieme le interne frapposte, e opposte differenze, che comuni sono alle due specie, acciò possano libere, e spogliate da simili differenze riconoscersi la specifica forza, e la specifica mobilità della resinosa, e della vitrea. Onde concluderò queste prime serie di resinosa col seguente

## L E M M A P R I M O .

D' uopo è calcolare distintamente le differenze tutte , che ridotte abbiamo ad interne , frapposte , ed opposte nella stessa specie di elettricità , e dedurne con particolari serie l' esatta misura per farci strada a calcolare in fine per se stessa la specifica forza , e la mobilità delle opposte elettricità , e stabilire così non equivoci principj della nuova Teoria .

## C O N V I T R E A E L E T T R I C I T À .

## P R E P A R A Z I O N E .

Rinnovo la preparazione della serie quinta , e comincio a replicare con vitrea elettricità quelle cinque consecutive serie già fatte colla resinosa . Non vi è altra differenza , se non che nella resinosa ridussi tutte le serie a quantità di elettricità eccitata pressochè uguale , ed uniforme con uguale numero di giri . In queste di vitrea ritengo dal principio al fine di ciascuna serie l' uguaglianza , ed uniformità di eccitamento , e del numero dei giri ; nelle serie poi consecutive cangio dall' una all' altra la quantità di eccitamento , e non serbo per comune misura , se non il numero dei giri , che sono quindici in ciascun atto . Con ciò non restano più interamente comparabili le serie fra loro per difetto di uniformità della prima misura , che alla quantità corrisponde in ciascun giro eccitata ; sono però tuttavia comparabili per l' altra misura , e per le proporzioni corrispondenti alla varietà della prima misura , ossia alla varia quantità di eccitamento .

## S E R I E 10.

1. A contatto finì la carica in tredici scariche della consueta boccetta .

2. Ad un pollice finì alle undeci ; ai due alle nove ; ai quattro alle sei ; agli otto alle tre ; ai quattordici ad una ; ai diciotto non imprime più il quadro veruna carica nella boccetta , e soltanto rende per sè una scossa ancor sensibile .

Ai ventiquattro pollici dà il quadro appena un cenno di scintilla pungente; ai trenta appena un cenno di luce.

3. I moti progrediscono qui come nella serie quinta. Se non che lo scostamento del pendolo dall'armatura comincia più presto, cioè a minori distanze, e finisce poi alquanto più tardi, cioè si rende più notevole alle maggiori distanze.

P R E P A R A Z I O N E .

*La stessa della serie stessa.*

S E R I E     11.

1. A contatto finisce la carica in tredici.

2. Ad un pollice arriva alle undeci; ai due alle dieci; ai quattro alle otto; agli otto alle quattro; ai quattordici ad una. Ai diciotto non ha, che il primo grado di carica, nè imprime neppur un cenno nella boccetta. Ai ventiquattro il primo cenno di scintilla pungente nel quadro. Ai trenta appena un cenno di luce.

3. I moti qui pure procedono come nella serie sesta; se non che qui finiscono più presto, che nella corrispondente resinosa; cioè alla distanza di trentasei pollici non vi è che talvolta un sospetto di accostamento, e comincia per opposto la divergenza anche più presto, che nelle corrispondenti di resinosa; cioè si scosta il pendolo in proporzione, che cresce la carica nell'atto, che continuano i giri del disco anche nelle minori distanze.

P R E P A R A Z I O N E .

*Come nella serie settima.*

S E R I E     12.

1. E' tanto minore l'eccitamento di elettricità, che a contatto delle punte con quindici giri non imprime nel quadro se non tanta carica, che finisce in otto scariche della consueta boccetta.

2. Ad un pollice finisce in quattro ; ai quattro in due ; agli otto in una. Ai quattordici l' ultimo grado di scuotente nel quadro , che non è capace d' imprimere verun cenno nella boccetta. Ai pollici sedeci apparisce nel quadro l'ultimo cenno di luce.

3. Si scosta qui pure il pendolo dopo i primi giri in proporzione , che cresce la carica fino ai pollici quattro , oltre i quali non vi è più verun moto , siccome non vi è più forza di carica maggiore di due scariche della boccetta.

## O S S E R V A Z I O N E. 9.

Prefelgo in questa serie la minor copia di elettricità eccitata per la regolarità della sua progressione di carica impressa perfino ai limiti dell' isolamento. La costante osservazione mi dimostra , che ogni modo di preparazione contempera i suoi effetti con certa grandezza di elettricità , la quale cresciuta , o scemata turba , e confonde egualmente la regolarità de' varj termini , che alle successive distanze corrispondono. Onde questa copia di elettricità eccitata sembra la più conveniente alla regolare successione de' suoi termini in questa preparazione.

## P R E P A R A Z I O N E.

*Come nella serie ottava.*

## S E R I E 13.

1. Contrappongo al precedente affai tenue un vivissimo eccitamento di elettricità , che fa esplosione spontanea della consueta boccetta ai dodeci giri ; e con quindici giri consueti imprime col contatto delle punte tanta forza di carica nel quadro , che non si estingue se non con quindici scariche della boccetta.

2. Ad un pollice finì in undeci ; ai due in nove ; ai quattro in otto ; agli otto in sei ; ai quattordici in quattro ; ai diciotto in due ; ai ventiquattro in una ; e perfino ai trenta su ancor l' ultimo grado di scossa nel quadro.

3. I moti tanto in questa , come nella seguente serie cominciano ai primi giri in proporzione , che cresce la carica ; e continuano , finchè dura tanta forza nel quadro , che sia capace d' indurre in circa due scariche nella boccetta ( *vedi Ser. 12. n. 3.* ). Ma oltre la distanza di ventiquattro pollici in questa serie , e oltre i diciotto nella seguente non vi è più verun indizio neppur di accostamento .

## P R E P A R A Z I O N E .

*La medesima della serie nona.*

## S E R I E 14.

1. A contatto finì in quattordici scariche della boccetta .
2. Ad un pollice in nove ; ai due in otto ; ai quattro in sette ; agli otto in sei ; ai quattordici in due ; ai diciotto in una . Ai ventiquattro è ancora scuotente nel solo quadro ; e fino ai trenta si manifesta nello stesso la scintilla pungente .

## O S S E R V A Z I O N E 10.

Dedurrò qui pure a norma della osservazione 6 alcuni corollarj .

COROLL. 1. Nella stessa specie di vitrea elettricità la punta procedente dal conduttore imprime a pari distanze nell' opposto quadro alquanto minore forza di carica , quando l' opposta armatura è piana , e senza punta , che quando dall' armatura stessa parte una punta opposta alla prima .

COROLL. 2. Nè la carica impressa si fa notabilmente minore , quantunque cresca la lunghezza di quella opposta punta .

COROLL. 3. E comunque in fine si frapponga fra la prima punta , e l' opposta armatura del quadro un vetro nudo , che impedisce ogni loro mutua azione , purchè al solito sussista l' azione delle due punte fra loro , si rende a pari distanze di poco minore la carica impressa nel quadro .



## O S S E R V A Z I O N E 11.

Per immediata osservazione dalle cinque ultime serie precedenti risulta

1. Che la punta procedente dal tubo fa quasi continuo scoppio di scintilla contro l'armatura, o punta opposta fino oltre la distanza di nove linee; indi segue ad imprimere la carica senza altro strepito di scintilla.

2. Che se a fianco del tubo si presenti una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice, non diminuisce questo notabilmente l'elettricità del tubo, finchè non si sente fra loro qualche stridore di scintilla.

3. E questa scoppia viva tra il tubo, e il globo presentata fino alla distanza d'un pollice, quando il quadro, o la punta dallo stesso procedente sono lontani dalla punta del tubo anche meno d'un piede.

## O S S E R V A Z I O N E 12.

E donde procede, che in questi corollarj la carica si estende alquanto più notevole con punta, ed anche più lunga opposta alla prima, che non a pari distanze colla sola piana armatura del quadro? Mentre ne' corollarj dopo la sesta osservazione il contrario si notò colla resinosa elettricità. Gioverà qui trattenerci a rintracciarne la causa con qualche distinzione; e procederò in questa ricerca a norma della osservazione ottava considerando più distintamente quelle differenze interne, frapposte, ed opposte, che ivi soltanto accennai.

(a) Ed abbiamo occasione d'incominciare dalle opposte differenze riflettendo che la decima, e l'undecima appunto (che tra quelle sono le prime) esaurite furono nelle serie precedenti, e ci guidarono a quella varietà di corollarj, i quali la resinosa dalla vitrea elettricità sembrano per sè soli distinguere.

(b) E per le differenze di estensione delle armature, e d'isolamento delle medesime, le quali si comprendono dalla duodecima fino alla ventesima, troppo mi trasporterei fuori del titolo di questo capo, se per ciascuna volessi intraprenderne se-

rie distinte, e perciò ne accennerò soltanto alcuni termini principali; e quanto alla estensione, o grandezza della superficie armata del vetro, che notai in duodecimo luogo, ci porgerebbe per sè stessa argomento di molte ferie, e di singolari induzioni. Poichè se la stessa lamina con minore armatura a distanze maggiori riceve più notevole carica, la stessa poi a minori distanze colla medesima elettricità non ne riceve, nè può riceverne se non minore, che non ne riceverebbe, quando avesse armatura più estesa. Nè in ciò vi è uniformità alcuna di effetti, che ridur si possa a ragione costante, ma ciascuna determinata grandezza di armatura ci presenta nell'uguaglianza non meno, che nella varietà dell'altre differenze interne, frapposte, ed opposte una distanza, o un limite, nel quale è massima secondo la capacità di quella grandezza la carica impressa; oltre il qual limite con minori distanze non cresce la carica altrimenti, ma o si rompe, o si scarica spontaneamente il quadro, e con distanze maggiori si fa sempre minore la carica. E paragonando poi le diverse grandezze d'armatura sulla stessa lamina colla quantità varia di elettricità in ciascun giro procedente dal tubo, vi è tale grandezza d'armatura, colla quale neppure a contatto con tenue elettricità non s'imprime cenno di carica.

(c) E nelle seguenti combinazioni fino alla decima sesta tutti i casi, ne' quali manca l'armatura sopra l'una, o l'altra, o sopra ambedue le facce del quadro, rendono qualsivoglia elettricità procedente dal tubo inetta ad imprimere nel quadro stesso la carica. Poichè questa soltanto s'imprime con la conveniente elettricità, e distanza in ragione delle eguali armature, o in ragione della minore, quando sono ineguali. E nella stessa ragione delle armature può trarsi lo scoppio, o la scarica, quantunque il quadro sia carico; qualora o l'una o l'altra, o ambedue le facce si spogliano di tutta l'armatura, o d'alcuna sua parte.

(d) Nelle differenze poi notate dal numero diciassette fino al venti, che le combinazioni riguardano dell'isolamento delle stesse armature, non vi è, che la decima nona, in cui si raccolga, e resti nel quadro impressa la forza di carica corrispondente alla elettricità del tubo e alla grandezza, e alla distanza del quadro. Nelle altre niuna carica si raccoglie, nè

s' imprime in esso giammai, se non nel caso, in cui la stessa estremità del tubo si faccia successivamente ne' diversi punti disarmati servire di armatura.

(e) Nulla aggiungerò delle differenze comprese dal numero ventuno al ventitre, dopo che già osservai precedentemente, quanto esse pure influiscano nella varia capacità di ricevere la carica. Noterò bensì, che tanto in queste, come nelle precedenti differenze anche quando niuna s' imprime, nè resta la carica nel quadro, compariscono tuttavia al di là del quadro gli elettrici moti, e somiglianti segni di elettricità, dei quali ci occorrerà parlare tra poco (i).

(f) Anzi per fino nelle differenze frapposte, che dal numero quarto fino al nono si comprendono, similmente sussistono i movimenti, quando niuna più sussiste la carica, o la scarica, e ciò non solo nella varietà delle distanze, ma anche sotto la stessa distanza, e vicino al contatto. In vero se tra il conduttore, e l' armatura del quadro si frappone una lamina resistente, come un vetro nudo, impedisce questo soltanto la carica, ma non i moti; e viceversa se una simile lamina si frappone tra le opposte armature di un quadro carico, s' impedisce per tal modo lo scoppio, o la scarica, ma non s' impediscono i moti. Il che parimenti accade colle differenze interne, che notate abbiamo al numero secondo, e terzo; poichè in molte ferie di questo capo vedemmo sussistere i moti, ove più non sussisteva la carica, e lo stesso ci occorrerà d' osservare più volte.

(g) Nè la considerazione dei moti è perciò sostanzialmente diversa dalle cariche, o scariche. Poichè vedemmo già in alcuni casi più oltre estendersi i moti, che non la carica; ed ascendere questa al sommo, e sussistere negl' infimi gradi senza scostamento (*ser. 5, e 9*). Ed in altri casi all' opposto più oltre estendersi alcun segno di scintilla scuotente, che non i moti (*ser. 6, e 11, e seguenti*). E in somma le punte quanto per un verso scemano gl' intervalli, e la facilità, e prontezza dei moti, tanto crescono i limiti, e la facilità della carica. Onde gli accidenti dei moti soggiacciono a vicende non diverse dalle cariche, o scariche, poichè vi sono del pari nei moti certe combinazioni, e certi limiti per renderli più, o meno sensibili, e per fargli svanire in fine, o richiamarli.

(b) Come dopo i corollarj spettanti alla resinosa elettricità giovò della enumerazione delle differenze dedurne un lemma fondamentale per le seguenti investigazioni ; così gioverà qui l' applicazione più distinta , che fatto abbiamo di quelle differenze alle corrispondenti serie di vitrea elettricità per guidarci ad un nuovo lemma , che più complete renda le ricerche dell' una , e dell' altra specie , e ci somministri in fine i veri termini pel confronto loro , e per la reciproca estimazione . Tre riflessioni aggiunte a quelle , che finora abbiamo esposto , ci porranno in chiara luce il nuovo lemma , che ricerchiamo .

(i) E primieramente in tutti i capi delle proposte differenze notar conviene quale , e in fino a quanto ciascuna influisca in aumento , e quale poi si rivolti , e influisca all' opposto in diminuzione di carica , o di moti , o di altro effetto sensibile , e ciò non solo per sè stesse , e nella porzione di apparato , che a ciascuna immediatamente appartiene , ma anche intorno a sè , e nella porzione di apparato , che a ciascuna si riferisce . Sembra talvolta svanire ogni esterno segno e nel conduttore , e nell' annesso apparato , come quando si presenta un grande quadro , o una batteria da caricarsi ; eppure le elettriche potenze agiscono allora vicendevolmente più che mai , e in vece di svanire si raccolgono così nelle opposte facce del vetro .

All' opposto l' elettrica azione , che esteriormente non apparisce , si esterna , e si fa notabile staccando , o allontanando l' armatura dallo strato resistente elettrico , a cui stava unita , come nell' epiniano elettroforo . Or questa elettrica virtù non procede altrimenti dallo strato resistente , ma dall' armatura , ed è realmente di specie a quella opposta , che nello strato si raccoglie . Che se si esternano poi in fuori dall' armatura , quando sta unita al quadro , segni omologhi a quei della faccia resistente , non sono mai questi per elettricità , che alla carica appartiene , ma sono effetti di elettricità respinta , o frenata per azione della opposta armatura , i quali necessariamente o scemano la carica stessa , o ne cominciano l' esplosione . Ond' è , che simili effetti si chiamano secondo le diverse relazioni or *laterali* , or *obliqui* , or *inversi* ; perchè sebbene procedano da elettrica potenza , non sono giammai prodotti dal primo strato

attraverso del quale a vicenda si frenano, e si equilibrano le opposte specie, che costituiscono la carica. Simili potenze quanto più per l'interiore via dello strato resistente si esercitano vicine fra loro, tanto meno si esternano; e viceversa tanto meno ritengono di mutua azione, e di collisione reciproca quanto più si scoltano, e si estendono esteriormente a fianco, o in opposto.

Quindi nel descrivere, e valutare tale sorta di azioni troppo è facile prendere abbaglio, e cadere in contraddittorie illusioni.

(k) In oltre ciascuna delle anzidette differenze non ha d'ordinario andamento uniforme, nè preciso in sè stessa; ma soggiace a vicende, e inversioni di effetti, o perchè appunto è variabile, o perchè si compone, e si collide con altre. Per accennarne qualche esempio comincerò dalle interne differenze, nelle quali la punta accresce l'idraulico momento qualora si rivolge contra il corpo, in cui raccogliere si vuole tale azione, per quanto esso ne è capace. Ma se la punta stessa, o altre punte si rivolgono altrove, si trasforma l'idraulico momento in virtù dispersiva, e non concorre così che a scemare l'effetto della prima forza secondo la capacità, e vicinanza degli altri corpi, ai quali le punte si rivolgono.

Similmente le punte non meno coll'idraulico, che col meccanico loro momento spezzano il mezzo frapposto; e servono così or a scemare, or ad accrescere le consuete vie d'isolamento, e di accumulazione.

Il calore poi, che su tutte quelle differenze estende la sua influenza, fino a certo grado migliora la resistente virtù; più oltre poi la debilita, e la estingue affatto riducendo qualsivoglia resistente al comune officio di conduttore. Il calore stesso accresce la siccità de' corpi, e dispone in oltre le elettriche sostanze a più facile scioglimento; ma nel tempo stesso dispone il vetro, la seta, e l'aria a concepire in seguito più pronta umidità, e inducendo varietà nel mezzo ambiente facilita per questa via la dispersione delle elettriche forze.

L'armatura in fine accresce e la capacità di accumulamento, e di mutua azione, ma colla sua stessa grandezza rarefa l'elettricità movente; e perciò quando questa è tenue, diventa per la stessa grandezza dell'armatura inetta altrettanto a imprimer segni di carica, o di moti in quella maggiore capacità (vedi *off.* 1. e 2).

Quindi nell' applicare ai particolari casi qualsivoglia fra le proposte differenze, d' uopo è determinarne l' andamento, e la collisione, e compozion sua con le altre, che nei casi stessi influiscono.

(1) Niuna per fine delle stesse differenze vi è, che non sia di ostacolo, e di resistenza alle elettriche potenze; o non soggiaccia ad ostacoli, e resistenze. Or chi non sa rarissimi essere i casi, ne' quali pienamente la potenza s' impiega contro la resistenza, talchè essendo quella incognita possa bene valutarsi colla sola cognizione dell' effetto suo sulla resistenza? Chi non sa l' effetto della potenza comunque accresciuta per la via delle macchine contro la resistenza non essere mai, se non l' eccesso dell' intero momento sopra i frapposti ostacoli? Che se quest' eccesso scemi, e perfine diventi negativo, allora l' effetto della potenza, e d' ogni suo momento rintracciare ne' frapposti ostacoli si debbe, e non più nella resistenza. Chi non sa quanto spesso i soli ostacoli superano le resistenze, e come poi quelli reagiscono del pari contro la potenza, e la resistenza? Nel qual caso se i momenti di varie potenze dall' effetto loro misurar ti piaccia contro le resistenze, cadrai in illusioni, e rovescj non meno nella qualità, che nelle proporzioni di quelle misure. E quante fiate non sostituirai l' ostacolo alla potenza, e tal parte di reazione dell' ostacolo non prenderai per misura della prima potenza? Che se ciò ad ogni tratto interviene nel valutare dagli effetti le potenze, che ci sono più familiari, e che sono in sè stesse trattabili, come sono le animate potenze, la gravità, l' acqua, l' aria, e altri fluidi: che farà di quelle, che non operano se non per vie insensibili, e per accumulazione di particelle tenuissime inaccessibili all' attività de' sensi, e alla perfezione degli stromenti? Tali sono le azioni tutte di chimica affinità, che come ampiamente dominano in ciascun ramo della Fisica più delicata, così particolarmente reggono le elettriche potenze. Vi è di più tra le comuni azioni di affinità, e le elettriche il divario, che in quelle si riconoscono in fine, e si raccolgono d' ordinario i prodotti separati, e distinti; in questa i distinti prodotti non si riscontrano, se non a ondate, a soffj, e quasi a salti, nè altrimenti si raccolgono, se non nell' atto di mutua azione, ed in continuo sforzo per

collidersi a vicenda, e riunirsi. E questa singolare natura, o maniera delle elettriche potenze esige un nuovo genere d'investigazione, che è riservato per le particolari Memorie spettanti all'elettrica teoria.

Frattanto raccogliendo insieme le avvertenze sparse nella presente osservazione dedurremo il seguente

### L E M M A S E C O N D O .

Qualunque sia la specifica forza delle elettriche potenze non può estimarsi, nè talvolta discernersi colle consuete vie del loro eccitamento, e confronto; molto meno può ridursi ad immediate misure di comuni stromenti, o ad effetti uniformi. Ma occorrono ne' diversi gradi loro tali modi, e momenti di aumento, e viceversa tali ostacoli di resistenze per diminuirne, e rovesciarne la vera loro grandezza, che se questi non sono in ogni caso riconosciuti, e distinti, confondono le assolute potenze coi momenti, e cambiano gli effetti delle potenze colle resistenze, nè ci lasciano veruna forma di esatto, e preciso calcolo della specifica loro ragione.

### O S S E R V A Z I O N E 13.

A fronte delle molteplici difficoltà, e combinazioni, che il calcolo ci ritardano e delle specifiche forze, e delle altre mentovate differenze, non v'ha però dubbio, che ciascuna di esse dalla seconda fino alla ventesima terza non sia in sè stessa certa, e determinata ne' suoi effetti, e nelle sue qualità. E perchè non dovrà la prima, e l'ultima di quelle ventiquattro differenze del pari sicuramente conoscersi nella sua esistenza, e ne' suoi effetti? Benchè non ci sia ancor permesso di calcolare l'una, e l'altra assolutamente per quelle vie, che non sono altrimenti accessibili, che dopo lunghe, e delicate preparazioni. Ne calcolai gli effetti dopo le prime quattro serie a norma di quelle preparazioni, e volli a bello studio esprimerle in numeriche proporzioni, e in fenomeni notissimi per colpire così più vivamente l'immaginazione, e scuotere con veemenza le comuni prevenzioni, e le triviali usanze di sperimentare. In vero nulla di assoluto esprimono quelle proporzioni,

e non altro sono in sè stesse, che il primo passo, ed una in somma delle molte speciali induzioni, colle quali a termine vuole condursi l'analisi delle punte. Profeguiamo dunque, come nella prima Parte, a raccogliere in teoremi le nuove induzioni, che dalle dieci ultime serie risultano.

#### T E O R E M A XIV.

In ciascuna serie delle punte di resinosa elettricità la progressione della carica impressa nell' opposto quadro eccede in ciascun termine successivo la corrispondente progressione delle punte di vitrea.

E dovrà dunque il Fisico ridursi in fine ad implorar l' attenzione di chi legge, o ascolta, come è costume dell' Oratore? Tutta si richiede l' attenzione de' più penetranti ingegni a ben comprendere il senso, e le prove del presente teorema per la novità e per l' estensione de' termini, che insieme raccoglie, e confronta. M' ingegnerò di sollevarne, e sostenerne lo sforzo esprimendone colla maggiore chiarezza, e coll' ordine più distinto le idee.

I. Distinguo in ciascuna serie il primo termine dai successivi, che ne formano la progressione. Quel primo determina la quantità di elettricità, che costituisce la seconda differenza notata nell' osservazione 8, quantità, che in ciascun giro si eccita, e in quindici giri si raccoglie, quando la punta, e l'armatura, o le due punte fra loro sono a contatto. E siccome si mantiene da quel primo fino all' ultimo termine d' ogni serie collo stesso numero di giri la stessa quantità, perciò quel primo termine serve di base, e fissa l' assoluto valore di ciascuna serie.

Ne' diversi apparati, e nelle diverse specie di elettricità non fu possibile di ridurre quel primo termine a ragione di eguaglianza in tutte le distinte serie, massime ascendendo queste a tanto numero. Sarebbe tale impresa superiore o alla umana condizione, o alla qualità stessa della materia, che a tante differenze, e a tanta incostanza soggiace, siccome abbiamo più volte osservato. Avrebbe in vero quella comune uguaglianza del primo termine somministrato più facile, e regolare il confronto e di tutti i primi nelle diverse elettricità, e de' successivi termini in ogni loro progressione.

A questo



A questo essenziale difetto di facilità, e di regolarità non vi è altro riparo, che soggettarsi a calcolo più composto, e rintracciarne le proporzioni secondo l' inevitabile varietà di ciascun termine primo. La semplicità del calcolo è vana qualunque volta alla natura delle cose non corrisponde; e il Filico del pari, che il Matematico secondo l' indole, e la natura de' soggetti diversi è ad ogni passo forzato di variar metodi, e formole di calcolare. A questo fine restringiamo in tavole tutti i numeri delle precedenti serie di resinosa, e di vitrea elettricità segnando nella prima linea orizzontale i nomi di ciascun termine dal contatto fino alle ultime distanze, e nelle seguenti linee sottoponendo a ciascuno di que' nomi il numero delle scariche, colle quali si esaurì la carica impressa nel quadro in ogni serie distinta.

CON RESINOSA ELETTRICITA'.

A contatto. Poll. I. Poll. II. Poll. IV. Poll. VIII. Poll. XIV. Poll. XXVIII. Poll. XXIV. Poll. XXX. Poll. XXXVI.

<i>Ser. 5</i>	= 14	...	14	...	13	...	12	...	9	...	5	...	3	...	1	...	X	...	x
<i>Ser. 6</i>	= 14	...	14	...	13	...	10	...	8	...	3	...	2	...	X	...	x	...	o
<i>Ser. 7</i>	= 13	...	12	...	10	...	9	...	7	...	3	...	1	...	X	...	x	...	o
<i>Ser. 8</i>	= 12	...	11	...	10	...	9	...	6	...	3	...	1	...	X	...	x	...	o
<i>Ser. 9</i>	= 11	...	10	...	9	...	8	...	6	...	3	...	X	...	X	...	o	...	o
<hr/>																			
Totale 64... 61... 55... 48... 36... 17... 7... 1																			

2. Abbiamo espresso colla X majuscula l' ultimo grado di scossa, che si sente toccando immediatamente le opposte armature del quadro, quando non è più capace d' imprimere veruna forza scuotente nella boccetta; e colla x minore gli ultimi cenni di scintilla pungente, o di luce senza espresso senso di scossa.

Sommati abbiamo in oltre sotto ciascuna colonna i numeri pel confronto composto di tutte le serie insieme di resinosa, e di vitrea, siccome pel semplice confronto di ciascuna serie colla sua corrispondente dovremo riportarle alternamente da una tavola alla corrispondente dell' altra. Dei moti non occorre per ora farne uso, e perciò non ne ascendiamo ulteriormente la tavola; e passiamo all' altra tavola corrispondente.

## CON VITREA ELETTRICITA'.

A contatto. Poll. I. Poll. II. Poll. IV. Poll. VIII. Poll. XIV. Poll. XVIII. Poll. XXIV. Poll. XXX. Poll. XXXVI.

<i>Ser.</i> 10 = 13 .. 10 ... 9 ... 6 . . . 3 . . . 1 . . . X . . . . x . . . . x . . . . 0
<i>Ser.</i> 11 = 13 .. 11 ... 10 ... 8 . . . 4 . . . 1 . . . X . . . . x . . . . x . . . . 0
<i>Ser.</i> 12 = 8 .. 4 ... 2 ... 1 . . . X . . . . x . . . . 0 . . . . 0 . . . . 0 . . . . 0
<i>Ser.</i> 13 = 15 .. 11 ... 9 ... 8 . . . 6 . . . 4 . . . 2 . . . . 1 . . . . X . . . . 0
<i>Ser.</i> 14 = 14 .. 9 ... 8 ... 7 . . . 6 . . . 2 . . . 1 . . . . X . . . . x . . . . 0
Totale 63 .. 45 ... 38 .. 30 . . . 19 . . . 8 . . . 3 . . . . 1

3. Un' occhiata su queste tavole, e l'immediato confronto de' termini corrispondenti in ciascuna serie compie la dimostrazione del Teorema proposto. Ma per dirigere questo colpo d'occhio non solo nelle somme totali, che sono d'immediata evidenza, ma nelle corrispondenti, riduciamo in quelle tavole alternamente a confronto i termini, che esprimono eguale, o più prossimo il numero delle scariche colle rispettive distanze fino all'ultima scossa tratta dal quadro. Quando non vi è il numero esatto nella serie corrispondente prendiamo la distanza di mezzo fra i due termini più prossimi.

<i>Ser.</i> 5. Dalle scariche 13 fino ad una sono poll. . 22 . .
<i>Ser.</i> 10. Dalle 13 all'ultima . . . . . poll. . . . . 14
<i>Ser.</i> 6. Dalle 13 all'ultima . . . . . poll. . 19 . .
<i>Ser.</i> 11. Dalle 13 all'ultima . . . . . poll. . . . . 14
<i>Ser.</i> 7. Dalle 8 all'ultima . . . . . poll. . 12 . .
<i>Ser.</i> 12. Dalle 8 all'ultima . . . . . poll. . . . . 4

Totale poll. 53 . . 32

Ed è qui tanto nelle maggiori distanze di ciascun termine, come nelle somme loro evidente la superiorità della resinosa.

4. Ed è questa del pari evidente, se si paragonino le somme totali corrispondenti a ciascun termine in eguali distanze. Le somme dei primi termini sono 64:63, e si succedono le corrispondenti come segue.

Resinosa	Distanze comuni	Vitrea
61 . . .	Poll. I . . .	45
55 . . . . .	II . . . . .	38
48 . . . . .	IV . . . . .	30
36 . . . . .	VIII . . . . .	19
17 . . . . .	XIV . . . . .	8
7 . . . . .	XVIII . . . . .	3
1 . . . . .	XXIV . . . . .	1
Totale 225 . . . . .		144

5. Riducendo adunque a' fenomeni le ragioni di queste somme totali de' numeri corrispondenti alle uguali distanze abbiamo la seguente analogia. Se le somme de' termini primi siano in numeri prossimamente uguali cioè 64:63; le somme de' termini successivi corrispondenti ascendono alla numerica espressione di 225:144. Onde quantunque le forze costituenti i primi termini non abbiano differenza, che d' unità, le somme de' successivi termini nella resinosa eccedono quelle della vitrea, come il numero 225 eccede il numero 144, e per esprimere lo stesso con fenomeni di cariche, la resinosa eccede la vitrea quanto una carica espressa con 225 di quelle unità eccede altra carica espressa con 144.

6. Nè faccia nella precedente tavola eccezione l'apparente uguaglianza degli ultimi termini ai pollici xxiv. Poichè nella serie 5 non comincia il primo termine che con 14 scariche, e nella serie 13 il primo termine comincia con 15 scariche; e con tutto ciò non estende l'ultima scossa se non quanto quel termine primo della serie 5.

Nasce in oltre quella apparente uguaglianza degli ultimi termini da altra cagione, la quale ci obbligò a interrompere nel numero 3 precedente il confronto fra i termini corrispondenti delle due ultime serie 8, e 9 di resinosa colle ultime 13, e 14 di vitrea. S' interruppe adunque simile confronto, perchè quelle ultime serie non hanno termini comuni, nè possono come le precedenti raggugliarsi, e ridursi a' termini prossimi. Il che acciò chiaramente s' intenda d' uopo è osservare tra le serie di resinosa, e di vitrea elettricità due singolari contrapposizioni, le quali se costanti sono nelle prime serie, con maggior espressione poi nelle due ultime si manifestano.

7. Primieramente è insigne la decadenza della vitrea sopra la resinosa dall' uno all' altro dei primi termini d' ogni ferie. E per trattenermi soltanto nelle ultime la vitrea nella fer. 13 in un pollice dalle 15 decade alle 11; ed ai due pollici alle 9, e nella ferie 14 dalle 14 decade in un pollice alle 9. Mentre la resinosa in un pollice nella fer. 8 dalle 12 non decade, che alle 11, ed arriva fino ai quattro pollici prima di cader alle 9, e nella ferie 9 dalle 11 non decade che alle 10, ed arriva fino ai due pollici prima di cader alle 9.

All' opposto negli ultimi termini decade più insignemente la resinosa, che non la vitrea. E per ristringermi qui pure alle ultime ferie, la resinosa nella ferie 8 in quattro pollici decade dalle 3 ad 1, e nella ferie 9 nello stesso termine dalle 3 a niuna. Mentre la vitrea nella ferie 13 nello stesso termine decade gradatamente dalle 4 a 2; e nel seguente di sei pollici dalle 2 ad 1. E nella fer. 14 in quattro pollici non cade che dalle 2 ad 1.

Ma queste contrapposizioni meglio, e immediatamente si scorgono nelle somme corrispondenti dalla tavola del n. 4 precedente. In esse dal contatto ad un pollice la resinosa è  $\equiv 64:61$ , e la vitrea  $\equiv 63:45$ , così ne' seguenti fino ai pollici otto la resinosa decade pochissimo in confronto della vitrea. Indi comincia la decadenza a farsi presso poco eguale; poichè dagli otto ai quattordici pollici la resinosa è  $\equiv 36:17$ , e la vitrea  $\equiv 19:8$ . Ma dai pollici quattordici ai diciotto quella è  $\equiv 17:7$ , questa  $\equiv 8:3$ , e in fine dai diciotto ai ventiquattro quella è  $\equiv 7:1$ , questa  $\equiv 3:1$ , cioè decade la resinosa insignemente più della vitrea.

E siccome queste differenze, e contrapposizioni comprendono in sè stesse importanti applicazioni per la teoria, perciò le ridurremo nella seguente tavola esprimendo in frazioni più prossime le successive differenze de' rispettivi termini col precedente

	Resinosa	A contatto	Vitrea	
Differenze	64 . .	Primo termine	63	Differenze
$\frac{1}{11} = 3 = 61$ . .		Poll. 1 . . .	45 = 18 = $\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{10} = 6 = 55$ . . . .		II . . . .	38 = 7 = $\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{8} = 7 = 48$ . . . .		IV . . . .	30 = 8 = $\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{4} = 12 = 36$ . . . .		VIII . . . .	19 = 11 = $\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2} = 19 = 17$ . . . .		XIV . . . .	8 = 11 = $\frac{1}{2}$	
$\frac{10}{17} = 10 = 7$ . . . .		XVIII . . . .	3 = 5 = $\frac{5}{1}$	
$\frac{6}{7} = 6 = 1$ . . . .		XXIV . . . .	1 = 2 = $\frac{2}{1}$	

8. E in proposito nostro l' ultima contrapposizione quanto accorcia le distanze degli ultimi termini della resinosa, tanto allunga le stesse nei corrispondenti della vitrea. Onde comparando nel num. 3 precedente colla ragione delle distanze la resinosa, e la vitrea elettricità nella maggior forza, che in quella comparisce per le sole distanze un'altra se ne include, che per ora non può calcolarsi. E perciò ragguagliando i termini ultimi della resinosa coi corrispondenti di vitrea prevediamo, che l' errore cospira ad accrescerne la superiorità più che non apparisce dalle semplici distanze. Al contrario se ragguagliassimo i termini primi della resinosa cogli ultimi della vitrea, cospirerebbero le semplici ragioni delle distanze a indurci doppiamente in errore, perchè la superiorità di que' primi verrebbe in tal modo a confondersi colla più lenta decadenza degli ultimi di vitrea.

Qualunque sia pertanto la cagione di simili contrapposizioni, che altrove si esplorerà, rimane e col confronto de' termini corrispondenti alterni, e colle somme totali de' medesimi, e colle somme de' termini simili compiuta la dimostrazione del teorema proposto.

9. Mal si apporrebbe però chi ne credesse compiuta egualmente l' intelligenza. Per giungere a questa d' uopo è riconoscere dal primo all' ultimo il valore di que' numeri, che ciascun termine esprimono delle due tavole. Nè si può senza manifesta petizione di principio assumere, che il numero 14,

o 13 del primo termine d'una serie di resinosa sia eguale al num. 14, o 13 del primo termine della corrispondente di vitrea, benchè si esprimano con numeri eguali; il che similmente s' intenda delle somme loro, e dei successivi termini comunque con eguali numeri espressi in ogni loro progressione.

10. Sussiste soltanto con questa eguaglianza de' numeri l'eguaglianza del loro valore ne' termini corrispondenti della stessa specie di elettricità, ma sotto siffatta eguaglianza si mantiene una disuguaglianza grandissima di ciascuna unità componente que' numeri. Poichè per esempio le dieci unità, che il secondo termine esprimono della serie decima, non sono altrimenti omogenee, come niuna lo è di quante altre esprimono o i primi, o i successivi termini di qualsivoglia serie. Anche a solo senso manifestamente si riconosce sempre maggiore l'unità precedente, che non la seguente in tutta la successione di ciascun numero.

11. Due ricerche adunque si presentano da farsi per compiere l'intelligenza del teorema, e dei numeri, che lo dimostrano. Si debbono nella prima valutare le unità componenti i primi termini delle due specie di elettricità; e si valuteranno nella seconda ricerca le unità, che i successivi termini compongono in ciascuna di quelle serie. A questi due oggetti soddisfaremo nel seguente

### T E O R E M A XV.

I numeri, che l'eccesso esprimono della carica impressa nel quadro in tutta la progressione de' termini con punta di resinosa sopra la punta di vitrea elettricità, non s'intendono, nè sono comparabili altrimenti, che con nuove induzioni.

1. Or quale induzione ci guiderà a valutare quelle unità, ed a ridurle omogenee, e per tal via chiare, e comparabili? Non altro che una nuova applicazione, e il compimento di quella stessa, che ci guidò a ritrovare que' numeri, ed a risolverli in quelle unità. Risolviamo adunque ciascuna unità nell'istesso modo, che le cariche abbiamo distinte, le quali a ciascuna specie, e a ciascun termine delle loro serie appartengono; ed avremo così que' numeri chiari, e distinti, e perciò comparabili fra loro, come lo sono fra loro i termini di quelle cariche.

Quanto però ad immaginarsi piana, e facile sembra questa nuova induzione, tanto è intralciata, e ardua ne' dettagli, che ne compiono l' esecuzione. Ciascuna unità de' primi termini, e di tutti i successivi di tante serie vuol essere valutata distintamente; il che altro non significa in fine se non di risolverla in numeri formati di nuove unità omogenee, e comparabili. Nè ciò altrimenti si ottiene, che con suddividere la prima misura in parti minori finchè arriviamo ad eguali elementi primi, e nascenti, dai quali tutte quelle unità, e quelle cariche sono in sè stesse composte. Così in ogni genere di calcolo si riduce a minimi termini qualsivoglia varietà di numeri, pesi, o misure.

2. Ritorniamo pertanto al principio di questo capo, e ripigliamo l' operazione descritta nella preparazione della serie quinta. Con una boccetta applicata all' estremità dell' arco l' arte ivi insegnai di esprimere con numeri in tutte le future serie dal primo all' ultimo termine le cariche impresse nel quadro. Nelle tavole poi del precedente teorema chiamai *X* quell' ultimo grado di forza scuotente, che si trae immediatamente dal quadro stesso, quando più niuna ne imprime nella boccetta. Or se arriverò ad esprimere ogni unità di que' numeri con altri numeri composti dell' ultimo grado di forza scuotente nell' una, e nell' altra specie di elettricità, non ci approssimeremo per tal via quanto più è possibile a quella comune, e comparabile misura, che in tutti que' termini ricerchiamo?

3. Per tal uopo in ciascuna unità di que' numeri applico alla boccetta l' operazione stessa, che replico nel medesimo tempo, e similmente sul quadro procedendo nella seguente forma.

Ho pronte tre boccette simili, ed eguali alla prima, e due archi. Uno di questi archi colla prima boccetta insieme impugnata ad una estremità nella sinistra mano la tiene un compagno previamente agguerrito in simili sperienze, mentre io traggio al solito coll' altro arco la prima scarica del quadro nella seconda boccetta. Questa così caricata la passo immediatamente nella destra mano del compagno, il quale la impugna come la prima nell' altra estremità dell' arco; ed appressandone il globo a quella prima subito la scarica in essa. Subito abbassa il globo di questa contro l' arco sotto la destra mano,

e per tal via la scarica interamente. Indi ripete la stessa operazione di prima, finchè la seconda boccetta non sia ridotta all'ultimo grado di forza scuotente, e tien numerate le scosse, che ne cavò.

Frattanto io sostituendo a quella seconda la terza boccetta nell'estremità del mio arco, numero similmente le scariche, finchè si esaurisca al solito la carica impressa nel quadro; ed ottengo così la prima suddivisione di quelle unità componenti i numeri, nei quali ad ogni termine fu divisa la carica impressa nel quadro.

4. Carico nuovamente il quadro in tutti i termini d'ogni specie di elettricità, cominciando dalla carica divisa in quindici scariche della boccetta (per essere questa la maggiore che occorra ci sia nelle serie medesime a contatto, ossia nel più alto loro termine), e numero in ciascun termine la corrispondente suddivisione colla prima, e seconda boccetta, come nella seguente tavola, che leggere si vuole dalla colonna di mezzo a dritta, e sinistra.

Resinosa.	Termini del quadro.	Vitrea.
4 . . . . .	15 . . . . .	6
4 . . . . .	14 . . . . .	5
4 . . . . .	13 . . . . .	5
4 . . . . .	12 . . . . .	4
4 . . . . .	11 . . . . .	4
3 . . . . .	10 . . . . .	4
3 . . . . .	9 . . . . .	4
3 . . . . .	8 . . . . .	4
3 . . . . .	7 . . . . .	3
2 . . . . .	6 . . . . .	3
2 . . . . .	5 . . . . .	3
2 . . . . .	4 . . . . .	3
1 . . . . .	3 . . . . .	2
X . . . . .	2 . . . . .	1
0 . . . . .	1 . . . . .	X
<hr/>		
39 . . . . .		51

5. Comprendo in un colpo d'occhio nella presente tavola i risultati di trenta nuove serie di sperienze, cioè quindici con resinosa, e altrettante con vitrea elettricità. La maggior



gior parte di esse sono state ripetute per fino a sei, e otto volte in tempi diversi, e niuna mai meno di tre volte; e secondo il complesso di tante ripetizioni ne ho ragguagliati i numeri, che a ciascun termine corrispondono. Nei tempi di aria ben secca ebbi numeri assai maggiori, ma presso a poco proporzionali ai precedenti. Ne' tempi più umidi occorrono maggiori irregolarità, massime nella resinosa, che scema, e si disperde con incredibile prontezza.

6. Ciò, che ho fatto colle tre boccette sul quadro, forza è ripeterlo nei nuovi numeri in ciascun termine delle due boccette. Ed a questo fine non altro ci vuole, che una quarta boccetta simile, ed eguale alle prime. Tosto che ho cavata colla seconda boccetta la prima scarica dal quadro, lo abbandono; e subito colla terza boccetta io cavo similmente da questa la prima scarica. Passò immediatamente quella terza alla destra mano del compagno, che non esaurisce al solito, come qui sopra, il numero delle scariche nella prima boccetta.

Ed io frattanto sostituendo a quella terza la quarta boccetta esaurisco insieme, e similmente il numero delle scariche della seconda boccetta; ed ottengo per tal modo la nuova, ed ultima suddivisione di que' numeri, come nella seguente tavola.

Resinosa.	Termini della seconda boccetta.	Vitrea.
3 . . . . .	6 . . . . .	5
3 . . . . .	5 . . . . .	4
2 . . . . .	4 . . . . .	3
1 . . . . .	3 . . . . .	2
2 . . . . .	2 . . . . .	1
0 . . . . .	1 . . . . .	2
<hr/>		
9 . . . . .		15

7. Ristringo similmente nella presente tavola i risultati di dodici nuove serie di sperienze, cioè sei di resinosa, e sei di vitrea elettricità, ripetute, e ragguagliate secondo le avvertenze, che più sopra indicai (n. 5.)

8. Poteva bastare la prima tavola, se l'ultimo grado di forza scuotente *X* nel quadro fosse stato uguale all'ultimo grado di forza scuotente nella boccetta. Ciò per altro sarebbe stato un assunto arbitrario, e volli perciò ridurre le scariche stesse della boccetta all'ultimo grado loro, che chiamerò *z*.

Ed è così dichiarata, e ridotta in tavole la nuova induzione, che sola guidar ci può alla distinta comparazione, e intelligenza di que' numeri, che le proporzioni comprendono stabilite nel teorema precedente. Passiamo ora ad investigarne l'espressione col seguente

### T E O R E M A XVI.

Le tavole di nuova induzione esprimono distintamente il valore delle parti, ond'è composta ciascuna carica in tutti i termini delle precedenti serie di resinosa, e di vitrea elettricità.

1. In tutti i termini delle precedenti serie si ridusse la carica all'ultimo grado di forza scuotente  $X$  per via di scosse successive tratte dal quadro; le quali espressero in numero le parti stesse di ciascuna carica. Se eguali fossero le unità, che questi numeri compongono, sarebbe nella semplice ragione di essi il valore delle parti, onde ciascuna carica è composta.

Ma siccome da principio osservai (*teor. XIV. n. 9., e 10.*) sono quelle unità disuguali in due modi; l'uno de' quali riguarda la diversità della specie di elettricità, l'altro la diversa intensità d'ogni successiva scarica della boccetta, il che per fino col semplice senso è manifesto.

Per valutare adunque l'una e l'altra disuguaglianza, due nuove suddivisioni si richiedevano, una pel confronto delle diverse specie, e l'altra pel confronto di tutte le successive scariche tratte dal quadro in ciascun termine delle specie diverse di elettricità. Or quelle suddivisioni espresse sono distintamente nella prima tavola del teorema precedente (*n. 4.*); nella quale e le unità corrispondenti di specie diversa, e le successive di ciascuna specie ridotte sono in numeri minori, ossia parti di quelle prime unità.

2. Sommando adunque le serie di tali numeri minori, ovvero parti ne risultano le proporzioni di tutti i termini dell'una e dell'altra specie, e dei successivi termini di ciascuna fra loro.

3. Il metodo di valutar quelle cariche non è che di approssimazione per la via di risoluzione, o esaurimento delle medesime. E siccome in Fisica non è quanto in Matematica

agevole il replicare le suddivisioni per approssimarne ognora più l'espressione, e il valore; perciò soddisfare potrebbe all'intento nostro la suddivisione compresa nella precedente tavola, trattandosi massimamente di cosa tanto ardua in sè stessa, e di vie tanto nuove, nelle quali non si era fin qui tentato, non che fatto un solo passo neppure nelle prime divisioni raccolte nel teorema XIV.

Contuttociò volli ben più innanzi inoltrarmi per approssimare quanto meglio possibil fosse il valore di quelle proporzioni. Considerai le differenze fra le unità de' nuovi numeri, o delle parti minori; e con nuova suddivisione le distinsi in altre di ordine ancor minore. Come quelle unità prime esprimenti il numero delle scariche tratte dal quadro furono divise in altre minori tratte colla seconda boccetta; così furono queste similmente divise in altre ancor minori tratte dalla stessa colla terza boccetta; e sono queste ordinatamente espresse nella seconda tavola del teorema precedente (n. 6.) in ambedue le specie di elettricità.

4. Sommando adunque nuovamente la serie di questi numeri, o parti minori, che suddividono le somme precedenti, risulterà quanto più prossimo sperar si può il valore delle ricercate proporzioni.

Cadrebbe però in errore, chi ampliasse incautamente l'uso di queste tavole per estimare il valore di qualsivoglia carica, e volesse così troppo rapidamente generalizzare. Non sono queste che particolari induzioni, nè si estendono forse più oltre delle presenti preparazioni, e dei modi loro. Altre ricerche, e nuove induzioni a tal uopo si richiedono, delle quali alcuna ne accenneremo nel seguente

## T E O R E M A XVII.

Le proporzioni delle cariche valutate secondo le tavole precedenti non si estendono ad altri modi, nè generalizzare possono le ragioni d'ogni carica elettrica, se non col sussidio di nuove, e moltiplicate induzioni.

Non ripeterò qui le varietà corrispondenti alle differenze, che numerai nelle osservazioni preve ai due lemmi più sopra stabiliti. Ci porterebbero quelle a tanta moltiplicità d'indu-

zioni, quanto opportune per la comprensione della teoria, altrettanto dai limiti del presente capo aliene. Può agevolmente a ciascuna di quelle differenze adattare le convenienti induzioni, chiunque voglia inoltrarsi in simili ricerche. Accennerò piuttosto alcuni modi da altri, ch' io sappia, non osservati nel variar le proporzioni delle cariche impresse.

1. Cercai primieramente, se, poste le altre cose pari, fossero le cariche proporzionali al semplice numero dei giri, coi quali esse s' imprimono. Non solo tale proporzione variò nelle diverse, ma anche in ciascuna specie di elettricità. Se per esempio con un giro s' impressè carica equivalente a due scariche di boccetta; con due giri fu quella maggiore di quattro, con tre maggiore di sei, con dieci assai maggiore di venti delle stesse cariche ridotte, e così in seguito. Non ho tant' oltre promossa l' induzione da fissarne fin qui veruna legge; posso però accertare, che cresce la carica in proporzione maggiore del semplice numero dei giri.

2. Cresce in oltre la carica secondo certa proporzione della celerità, colla quale si succedono que' giri medesimi.

3. Onde con elettricità, che minore sia in ciascun giro, s' imprime, e si estende fino a certe distanze la piena carica, purchè si accresca il numero, e la rapida successione dei giri. Il che non si ottiene con minor numero di giri, benchè fino a certo grado maggiore sia l' elettricità, e più rapida la successione loro.

4. E viceversa al di là di certe distanze tra il conduttore e il quadro, per quanto cresca il numero, e la celere successione, e la quantità di eccitamento di ciascun giro, non s' imprime giammai piena, ed in fine poi a nulla si riduce la carica.

5. Siffatte distanze non sono fin qui ridotte a limiti certi in nessuna specie di elettricità, nè si è trovato con quale ragione que' limiti corrispondano o al numero, o alla celerità, o alla quantità di eccitamento de' successivi giri del disco.

I tre ultimi numeri risultano immediatamente dal confronto della serie prima colla quinta, e della terza colla decima, e dalle molteplici combinazioni, che colle precedenti preparazioni in vano io cimentai per dedurne qualche lume di ragione costante.

6. Esporrò nel seguente capo altri modi, coi quali l'elettricità eccitata nel conduttore si porta al sommo grado; e ciò nonpertanto la carica nell' opposto quadro non s' imprime in veruna costante proporzione, che corrisponda alla grandezza di eccitamento, o al solo numero, o alla rapidità dei giri, nè alla sola grandezza delle superficie terminanti il conduttore, o l' opposta armatura, nè alle sole distanze.

7. Talchè ogni grado maggiore di eccitamento sembra esigere una determinata grandezza di superficie terminante non meno il conduttore, che l' opposta armatura, acciò quel grado o si mantenga nel conduttore, o si estenda ad imprimere maggior carica nell' opposto quadro. Onde senza conoscere l' intera serie, e successione in ciascun apparato, possono ne' particolari suoi termini confondersi quelle diverse ragioni di eccitamento, o di superficie, o di carica.

8. Sembra in oltre, che a ciascun grado maggiore di elettricità eccitata corrisponda certa capacità d' isolamento, o di resistenza del mezzo ambiente accresciuta per frenarla, e raccogliarla nel proprio conduttore, o diminuita per disperderla, e derivarla altrove. Quindi occorrer debbono nelle serie, che si fanno con gradi varj di eccitamento, certe distanze, nelle quali apparisce massima l' elettricità del conduttore, e minimo l' effetto suo nell' opposto quadro; e viceversa minima nel conduttore, e massimo l' effetto suo nel quadro. E perciò se in ciascun grado non si esaurisce l' intera serie, e si giudichino que' gradi, e gli effetti loro con termini particolari, e solitarj, si confonderà un grado con l' altro, e si prenderanno al rovescio le misure della intensità, e degli effetti loro.

9. Qualunque volta adunque ci proponiamo di confrontare in parità di apparato la forza delle specie diverse, o ne' diversi apparati la forza di ciascuna, è necessario esaurirne dal primo fino all' ultimo termine le intere serie non meno in ciascuna specie, che in ciascun diverso apparato per dedurne in somma le particolari loro proporzioni. In vero se conosciute fossero le ragioni distinte, e i limiti fissi di tutte le varietà, che fin qui notate abbiamo, anche i fatti isolati, e i fenomeni solitarj condurci potrebbero a qualche precisa conseguenza. Poichè secondo le tavole di quelle cognite ragioni

si ridurrebbero que' fenomeni ad espressione, che fosse al termine loro corrispondente.

10. Ora finchè somiglianti tavole di riduzione non sono che desiderate, nè altrimenti cominciate, non che perfette, non avremo giammai per la consueta e triviale maniera di fatti isolati comunque costanti, se non risultati affatto insignificanti, e per fino contraddittorj; nè troveremo in essi altra espressione fuori di quella delle nostre prevenzioni. E quindi è che con arbitrarie, e supposte leggi per mero scambio di mezzo termine dedurremo da que' fatti le conclusioni, che dalle sole supposizioni, e non altrimenti da que' fatti derivano. E perciò nella dovizia di sperienze, e di macchine saremo poverissimi di giuste idee, perchè non arriveremo mai neppure a sospettare la genuina interpretazione di que' fatti, che tutto di ci passano per mano, e molto meno concluder potremo da essi la proporzione delle incognite forze, e l'andamento delle incognite leggi, che incautamente prima di cominciare a rintracciarle pretendemmo di stabilire.

### T E O R E M A XVIII.

Le prime tavole altre ne somministrano in fine, e ci pongono una formola generale per calcolare, e ridurre a confronto, e a comune misura le serie precedenti con le seguenti nuove induzioni.

1. Le somme 39, e 51 esprimono il valore d'una carica di quadro equivalente a quindici scariche della boccetta (*teor. xv. n. 4.*), e si dovrebbe similmente sommare ciascuna carica successiva equivalente, e i successivi termini di scariche per esprimerne il corrispondente valore. Ma se dalla prima somma si sottragga il numero delle scariche di boccetta, che al primo termine corrisponde, si avrà per residuo la somma corrispondente al secondo termine; e così procedendo collo stesso canone in tutti i successivi termini, si esprimerà distintamente il loro rispettivo valore, come nella seguente tavola, che si leggerà al pari delle precedenti dalla colonna di mezzo a dritta, e sinistra.

Resinofa	Termini del quadro		Vitrea
39 . . . . .	15 . . . . .		51
35 = 4 —	39 = 14 =	51 — 6 =	45
31 = 4 —	35 = 13 =	45 — 5 =	40
27 = 4 —	31 = 12 =	40 — 4 =	36
23 = 4 —	27 = 11 =	36 — 4 =	32
19 = 4 —	23 = 10 =	32 — 4 =	28
16 = 3 —	19 = 9 =	28 — 4 =	24
13 = 3 —	16 = 8 =	24 — 4 =	20
10 = 3 —	13 = 7 =	20 — 4 =	16
7 = 3 —	10 = 6 =	16 — 3 =	13
5 = 2 —	7 = 5 =	13 — 3 =	10
3 = 2 —	5 = 4 =	10 — 3 =	7
1 = 2 —	3 = 3 =	7 — 3 =	4
	X = 2 =	4 — 2 =	2
	0 = 1 =	2 — 1 =	1

229 . . . . . 329

2. Nello stesso modo si valuterà ciascun termine successivo della seconda boccetta a norma della tavola premessa nel teor. XV. n. 6. dichiarata nel teor. XVI. n. 4.

Resinofa. Termini della seconda boccetta. Vitrea.

9 . . . . .	6 . . . . .	15
6 = 3 —	9 = 5 =	15 — 5 = 10
3 = 3 —	6 = 4 =	10 — 4 = 6
1 = 2 —	3 = 3 =	6 — 3 = 3
	2 = 2 =	3 — 2 = 1
	0 = 1 =	2 — . . .

19 . . . . . 35

3. Il distinto valore del primo termine espresso in queste tavole si raccoglie riducendo a norma delle prime tavole (teor. XI. n. 4. e 6.) tutti i termini corrispondenti del quadro, e della seconda boccetta in una tavola comune, che è la seguente.





Tavola ridotta del distinto valore di ciascun termine succedivo .

Resinosa . . . . . Vitrea .

$$264 = 15 = 430$$

$$206 = 14 = 344$$

$$168 = 13 = 289$$

$$134 = 12 = 239$$

$$104 = 11 = 197$$

$$78 = 10 = 159$$

$$58 = 9 = 125$$

$$41 = 8 = 85$$

$$27 = 7 = 69$$

$$16 = 6 = 50$$

$$9 = 5 = 34$$

$$4 = 4 = 21$$

$$1 = 3 = 11$$

$$2 = 4$$

$$1 = 1$$

---


$$1110 . . . . . 2058$$

5. Sono così dal fommo all'imo risolti in distinte ragioni tutti que' termini, che proposti abbiamo.

## C A P O II.

*Combinazioni di superficie a vicenda opposte nell'indurre la carica colla resinosa, e vitrea elettricità.*

**M**oltiplichiamo le induzioni, ed opponendo a vicenda diverse forme di superficie compiamo le gradazioni varie del relativo nome delle punte, e riduciamole perfino al contrapposto di maggiori, ed eguali grandezze. Si compie così l'oggetto della prima, e seconda Parte in tutte le combinazioni, e ne' modi, coi quali s' induce nell' opposto quadro, e si raccoglie la carica colle due specie di elettricità.

Fra tanta varietà di cariche, e fra tante differenze nel comporle, e raccoglierle un modo unico e sempre uniforme

( qual è la successiva loro scarica nella boccetta ) adopriamo per disfarle , ossia per risolverle , e ridurle a comune misura . Nella terza Parte procederà la cosa inverfamente ; e nulla curando la varietà dei modi d' indurre le cariche , le raccoglieremo per qualunque via ci fi presenterà più fpedita ad accrefcerle . Ma ci occuperemo all' oppofito delle combinazioni varie , che fcemano le cariche , e le fcompongono , rintracciando diftintamente di que' modi varj le mifure , e le proporzioni . Profeguiamo intanto colla fequente ferie .

## CON ELETTRICITA' RESINOSA.

### P R E P A R A Z I O N E .

Termina il tubo o conduttore nel folito globo fenza veruna punta ; ed a quefto oppongo direttamente il confueto quadro verticale per modo , che quel globo ne guardi l' armatura in mezzo ai due terzi d' altezza . Il rimanente tutto fta come nelle ferie del precedente capo , ed applico qui pure ad ogni termine quindici giri del difco , e di refinofa elettricità .

Alle due bai ifolanti , che fof tengono il quadro , fottopongo in quefta , e in tutte le ferie del prefente capo un' ampia laftra di vetro nudo , e pulito per meglio confervare l' ifolamento del quadro , e delle più ampie fuperficie , che nelle fequenti ferie terminano l' oppofito conduttore .

### S E R I E 15.

1. Col globo a contatto dell' armatura fi finì la carica in cinque fcariche della confueta boccetta ; a mezzo pollice in quattro ; ad un pollice in tre ; ad un pollice e mezzo in una ; a due pollici non vi fu nel quadro fe non luce pungente fenza veruna forza fcuotente .

2. Fino alla diftanza d' un pollice ad ogni due in tre giri fcoppiò la fcintilla tra il globo e il quadro , ma ad un pollice e mezzo non vi fu più indizio di fcintilla .

3. Dal principio de' giri fino all' atto , che fcoppia la fcintilla , il quadro è tratto al globo , e s' inclina ad effo notabilmente . Ma nello fcoppio della fcintilla refa il quadro in

libertà, e si restituisce per sè alla prima sua positura oscillando indietro quasichè fosse rispinto. E ciò si ripete similmente in ciascuna delle scintille, che sono tanto più frequenti, quanto è minore la distanza tra il globo e l' armatura.

4. Non ha qui luogo tra il globo e l' armatura del quadro il solito pendoletto. Rimane soltanto quel filo, e globetto, che pende dall' esteriore armatura, e questo nell' atto dei giri si vibra alquanto in fuori, benchè quell' armatura comunichi ampiamente col suolo per mezzo di due fili metallici, fra i quali a distanza di tre pollici dall' uno e dall' altro pende quel filo:

## P R E P A R A Z I O N E.

Non più il conduttore termina in globo, ma in una superficie piana di legno grossà dieci linee, tutta coperta di foglia di stagno, di figura simile all' armatura del quadro, e di grandezza un quarto della stessa, e perciò la chiamo *superficie d' un quarto*. Sta questa fissà all' estremità del globo in modo, che si presenta, e si conserva parallela in mezzo alla opposta armatura del quadro.

## S E R I E 16.

1. A contatto finì la carica in sette scariche della boccetta; a mezzo pollice in cinque; ad un pollice in quattro; ad un pollice e mezzo in due; a due pollici in una. A due pollici e mezzo vi è sola scossa nel quadro. A pollici tre più niuna luce affatto.

2. Si fanno qui a pari distanze più frequenti, che nella precedente serie, e prendono un tuono più grave le scintille; talchè fino a mezzo pollice scoppiano vive ad ogni giro.

3. Ad ognuna di esse precede l' accostamento, o inclinazione; e nell' atto, che scoppia, succede la restituzione del quadro. Onde questo si vede in continue oscillazioni sulla sua base.

4. Ad un pollice e mezzo, e fino ai due in vece di scintilla non si sentì, che un certo spruzzo, e quasi friggimento, o stridore cupo continuo. Ed a questo corrispondono

tenuissimi moti di accostamento , e restituzione del quadro , che sembrano tremori .

P R E P A R A Z I O N E .

Sostituisco in fondo del globo una superficie simile , e posta similmente , che la precedente , ma del doppio più grande , e perciò *la metà* dell' armatura del quadro , alla quale si presenta nel mezzo affatto parallela .

S E R I E 17.

1. A contatto finì la carica in otto scosse della boccetta ; a mezzo pollice in sei ; ad un pollice in quattro ; e ciò fino ad un pollice e mezzo ; a due pollici in tre ; a tre pollici in una ; a tre e mezzo , e perfino ai quattro vi è scossa nel quadro ; ai quattro e mezzo ancor luce scintillante ; e vi fu l' ultimo cenno di luce perfino ai pollici cinque e mezzo .

2. Segue a farsi più grave il tuono delle scintille ; ma qui si fanno più rare , che nella serie precedente ; cioè a mezzo pollice ad ogni tre giri soltanto scoppia la scintilla ; ad un pollice non più che ad ogni quattro in cinque giri . A due pollici più niuna scintilla , nè spruzzo , nè sfridore .

3. Alle scintille corrispondono previamente i moti d' inclinazione , e insieme di restituzione del quadro .

P R E P A R A Z I O N E .

Alla superficie di *metà* altra ne sostituisco simile , e similmente posta , che è *uguale* affatto all' armatura del quadro , a cui si presenta in eguale altezza , e parallela .

S E R I E 18.

1. A contatto finì la carica in nove della boccetta ; a mezzo pollice in sei ; ad uno in cinque ; ad uno e mezzo in tre ; a due in una ; ai tre l' ultima scossa nel quadro . Ai quattro nello stesso non altro , che luce , che ai cinque pollici appena diede l' ultimo cenno .

2. Cresce oltre modo la frequenza, e la forza delle scintille nelle prime distanze fino ad un pollice; al di là del quale si fanno più rare, cioè ad un pollice e mezzo appena una ogni tre giri; e a due pollici non altro si sente, che uno spruzzo, o stridore cupo.

3. A mezzo pollice s' inclina il quadro fino a contatto col più alto lato dell' armatura, e fino dalla distanza d' un pollice s' inclina tuttavia quasi a contatto. Siccome ad ogni scoppio di scintilla si restituisce in dietro con impeto, così previamente fu sempre tratto all' opposta superficie con forza, che superò la pressione di due diti, coi quali tentai di fermarlo premendo sopra gli angoli superiori del vetro nudo. Ad un pollice e mezzo benchè fossero più rare le scintille, furono tuttavia forti in ciascuna le oscillazioni di accostamento, e di restituzione del quadro.

#### O S S E R V A Z I O N E 1.

Raccolgo qui alcune osservazioni comuni a tutte queste serie.

1. Il pendoletto, che indicato abbiamo nel n. 4 della serie 15, segue nell' atto, che continuano i giri, a scostarsi anche oltre le distanze, nelle quali più non s' imprime nel quadro alcun cenno di luce. Tale scostamento, o divergenza non è mai molto grande, e ricade col finir dei giri.

2. Nel numero delle scariche della boccetta, e nei cenni di scossa, o luce tratti immediatamente dal quadro non riconobbi diversità veruna comunque nel trarre quelle scariche o scosse togliendoli previamente affatto, o lasciandoli intieri nel conduttore, e nell' annessa superficie la loro elettricità, che ivi lungamente si mantiene. Nel contatto si traggono le scariche dalla superficie stessa applicata sull' armatura del quadro; e nelle successive distanze si traggono le scariche al solito dalle opposte armature senza toccar quella superficie. Ed è indifferente spogliar quella, e il tubo d' ogni elettricità o prima, o dopo che si scarichi il quadro.

3. Le attrazioni tra le superficie terminanti il tubo, e il quadro (le quali nel contatto loro non solo si combaciano, ma si comprimono strettamente l' una sull' altra con vera adesione) sussistono soltanto fin che durano i giri, e fino al mo-

mento della scintilla, come accade nei comuni combaciamenti del filo, e del pendoletto nella ser. 5; e col finir dei giri, e collo scoppiar della scintilla svaniscono. Nel contatto però l'adesione è continua nell'atto, che si gira il disco, poichè non vi sono scintille.

4. Tanto l'adesione in contatto, come le attrazioni nelle successive distanze hanno certa proporzione, e colla quantità di elettricità, e colla grandezza di ambe le superficie, che a vicenda si oppongono. Talchè come col globo è minima, così è massima l'attrazione, e l'adesione colla intera superficie uguale all'opposta armatura.

5. Non ometterò le anomalie delle scintille, che si presentano ne' successivi aumenti da minore a maggior superficie. Poichè col globo le scintille cessano dopo la distanza d'un pollice (*ser. 15. n. 2.*), colla superficie di quarto ne estendono lo spruzzo per fino ai due pollici (*ser. 16. n. 2.*). Ma colla superficie di metà, benchè cresca l'elettrica quantità, si fanno più rare le scintille, nè più fino ai due pollici si estende lo spruzzo delle medesime (*ser. 17. n. 2.*). E colla superficie intera crebbe sul principio la vivacità loro, ma non ne estesero lo stridore più in là dei due pollici come nella superficie di quarto (*ser. 18. n. 2.*).

6. Paragonando queste distanze, alle quali si estende la scintilla, che non oltrepassano mai i due pollici, colle distanze alle quali segue ad imprimersi nel quadro elettricità scuotente, che arriva fino ai quattro pollici (*ser. 17. n. 1.*); è manifesto, che la resinosa elettricità si raccoglie nell'opposto quadro anche quando tra la superficie e l'armatura non passa più veruna scintilla, e ciò fino a distanze del doppio maggiori.

7. Presentai in tutte queste serie al conduttore, o all'annessa superficie una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice; ed osservai, che nell'avvicinarsi di questo globo quantunque fino dalla distanza di due, o tre pollici si scemasse nel tubo l'elettricità, nonpertanto la scintilla fra il globo stesso e il conduttore non iscoppiò mai a distanza maggiore d'un pollice, anzi d'ordinario assai minore. E siccome nel numero precedente si vide sprizzar la scintilla tra il conduttore stesso e il quadro fino alla distanza di due



## C O R O L L A R I .

**COROLL. 1.** Nella stessa specie di resinosa elettricità se si consideri la semplice ragione delle distanze nelle somme loro confuse, il conduttore terminante in punta imprime la carica nell' opposto quadro con forza ottupla, che non quando termina in globo, ossia sferica, o altra piana superficie.

Nella somma delle serie con punta di resinosa elettricità si trova fino ai pollici 24 l' ultima scossa tratta dal quadro (*teor. XIV. n. 1.*); e nella somma delle serie del conduttore terminante in globo, o in piana superficie non si trova l' ultima scossa simile al di là dei pollici 3 (*off. 2. prec.*). E' dunque come 24:3.

**COROLL. 2.** Se nella stessa ragione si paragonino i termini corrispondenti nelle somme delle serie di punta, e di superficie terminante il conduttore non ha la punta di resinosa elettricità se non forza circa quintupla della sferica, o piana superficie per imprimere la carica nell' opposto quadro.

Intendo per termini corrispondenti i numeri prossimi nelle somme delle scariche. Ora nelle serie di punta (*teor. XIV. n. 1.*) sotto i pollici otto vi è la somma 36, cioè la più prossima alla somma 29 del primo termine delle serie ultime (*off. 2.*). Ma dai pollici otto finisce ai 24 l' ultima scossa, che qui finisce ai pollici 3. Dunque le distanze sono come 16:3, le quali ragguagliate per la maggiorità del termine 36 sopra il 29, possono ridursi circa come 15:3.

**COROLL. 3.** Se nello stesso modo si paragoni distintamente l' azione della punta con certa grandezza di sferica, e piana superficie, si riconosce 1. la forza della punta poco meno di settupla del globo; 2. quintupla della superficie di quarto; 3. poco più di quadrupla della superficie di metà; 4. e più di settupla dell' intera superficie uguale all' opposta armatura.

1. Nella serie 5 (*teor. XIV. n. 1.*) il termine di scosse cinque è ai pollici 14; e l' ultima scossa arriva fino ai 24, e benchè nelle serie seguenti non si trovi il preciso termine di cinque, pure se si prendano le distanze medie tra il termine prossimo e l' ultima scossa, può con sicurezza assumersi di pollici 10 la distanza fra il termine di cinque all' ultima scossa,



fa . Ma nella serie 15 (*off. prec.* ) dal termine primo di cinque scariche fino all'ultima col globo non vi è che la distanza di pollici  $1\frac{1}{2}$  ; dunque riducendo sono le distanze come 20 : 3 , cioè la prima poco meno di settupla .

2. Nella serie 7 il termine di sette scosse dai pollici 8 arriva fino ai 18 coll' ultima scossa ; e ragguagliando gli altri termini prossimi si trova poco più di dieci pollici la distanza loro dall'ultima . Ma nella serie 16 con superficie di quarto dal primo termine di sette scariche all' ultima scossa non vi sono che pollici 2 ; dunque non è che quintupla in ragione delle distanze .

3. Nella serie 6 ai pollici 8 vi è il termine di otto scosse , che estende fino ai 21 l' ultima scossa ; ed è perciò la distanza di pollici 13 . Ma nella serie 17 con superficie di metà dal primo termine di otto arriva fino ai pollici 3 l'ultima scossa ; dunque la ragione delle distanze è come 13 : 3 , cioè poco più di quadrupla .

4. Nella serie 7 e 8 ai pollici 4 vi è il termine di nove scariche , e nella serie 5 è ai pollici 8 . Ora come in quelle dai quattro all' ultima scossa vi sono 14 pollici , così in questa dagli otto all' ultima vi sono pollici 16 : che per adeguato si riducono ai pollici 15 . Ma nella serie 18 dal primo termine di nove scosse fino all'ultima sono pollici 2 . Dunque è la ragione delle distanze come 15 : 2 , cioè più di settupla .

COROLL. 4. Ma la punta stessa nell' imprimere nell' opposto quadro la carica non estende nel frapposto mezzo lo strepito di scintilla se non a distanza subquadrupla , e perfino subottupla della rotonda , o piana superficie .

Poichè colle punte lo strepito della scintilla non oltrepassa la distanza di tre linee (*Cap. I. off. 7. n. 1.* ) . All' opposto col conduttore terminante in globo si estende tra questo e il quadro la scintilla per lo meno ad un pollice , e con piana superficie per fino ai due pollici (*off. 1. n. 6.* ) .

COROLL. 5. Ed un globo di mezzo pollice , che esteriormente a fianco si presenta al conduttore terminante in punta , non comincia a scemarne notabilmente l' elettricità , se non a distanza subdupla , che non quando il conduttore imprime nell' opposto quadro la carica con rotonda , o piana superficie .

Finchè verso l' opposto quadro vi è punta quel globo, che di fianco si presenta, non comincia a scemar notabilmente l' elettricità del conduttore se non a distanza d' un pollice e mezzo (*Cap. I. off. 7. n. 2.*), e quando al quadro quel conduttore oppone la rotonda, o piana superficie, ne scema quel globo stesso l' elettricità per fino alla distanza di tre pollici (*off. 1. n. 6. 7.*).

**COROLL. 6.** E tra quel globo e il conduttore quando termina in punta non iscoppia la scintilla, se non a distanza subdupla, e per fino subtripla, che non quando il conduttore stesso imprime nell' opposto quadro la carica con rotonda, o piana superficie.

Quando il conduttore oppone all' opposto quadro la punta non iscoppia la scintilla tra il conduttore e il globo, che a fianco si presenta, se non a distanza di due linee, e al più di quattro (*Cap. I. off. 7. n. 2. 3.*); e scoppia la scintilla stessa anche a distanza maggiore d' un pollice, quando il conduttore stesso imprime nell' opposto quadro la carica con rotonda, o piana superficie (*off. 1. n. 7.*).

## CON VITREA ELETTRICITA'.

### P R E P A R A Z I O N E .

*La stessa, che nella serie 15.*

### S E R I E 19.

1. A contatto con quindici giri s'impresse tanta carica, che finì in nove scariche della boccetta; a mezzo pollice in otto; ad uno in sette; ad uno e mezzo in tre; ad uno e tre quarti più niuna scossa neppur nel solo quadro. A due pollici non si ottenne più dal quadro neppure il menomo cenno di luce.

2. Fino a mezzo pollice ad ogni giro scoppiò vivissima la scintilla tra il globo ed il quadro. Ad un pollice fu egualmente forte, e non molto più rara, cioè ogni tre giri scoppiarono incirca due scintille. Ad un pollice e mezzo si fece più grave il tuono, e più raro lo scoppio della scintilla,

talchè appena una ne faltò ogni tre , o quattro giri : ad un pollice e tre quarti svanì ogni scintilla , nè vi fu indizio di spruzzo veruno .

3. Anche qui alle scintille precede l' inclinazione , o accostamento del quadro , e la sua restituzione nell' atto dello scoppio . Fu l' inclinazione , o accostamento assai più notevole , che nella resinosa , che a questa corrisponde .

4. Il pendoletto , che qui pure sta all' esteriore armatura del quadro in mezzo ai due fili metallici , si scostò nell' atto dei giri , e continuò a scostarsi anche al di là di due pollici , quando più non s' impressè nel quadro neppure cenno di luce . Dalle prime alle ultime distanze fu qui lo scostamento del pendolo assai maggiore , che non fu mai colla resinosa elettricità ; e si mantenne anche finiti i giri del disco .

#### P R E P A R A Z I O N E .

*La medesima della serie 16.*

#### S E R I E 20.

1. A contatto s' impressè carica , che finì in tredici scariche della boccetta ; a mezzo pollice in dieci ; ad uno in otto ; ad uno e mezzo in sette ; ad uno , e fino ai due e mezzo in cinque ; ai tre in due ; ai tre e un quarto in una ; ai tre e mezzo sola scossa nel quadro . Ai tre e tre quarti appena un cenno di luce nel quadro . Ai quattro più nulla .

2. Continuo fu lo scoppio di scintille vivissime fino ad un pollice ; nelle successive distanze si fecero alquanto più gravi , ma non molto più rare fino ai due pollici , e continuarono a spruzzo , e a scoppio serpeggiante perfino ai pollici tre e mezzo , ma ognora più gravi , e rare .

3. L' inclinazione , o l' accostamento del quadro corrisponde alla forza delle scintille fino alla distanza d' un pollice e mezzo ; ma più in là fu l' accostamento assai minore , che non furono le scintille , e la carica impressa nel quadro .

## P R E P A R A Z I O N E .

*Come nella serie 17.*

## S E R I E 21.

1. A contatto finì la carica in tredici della boccetta ; a mezzo pollice in nove ; ad un pollice , e ad uno e mezzo in otto ; ai due in sette , e fino ai tre pollici si ebbero poco di meno . Ai tre e mezzo in tre . Ma ai tre e tre quarti appena vi fu senfo di scossa nel solo quadro . Dai quattro poi fino ai cinque pollici appena vi fu un cenno di luce neppur pungente nel solo quadro .

2. Scintille stridenti , e acute fino ad un pollice e mezzo ; e continuano simili fino ai tre pollici , se non che si fanno successivamente di tuono più grave . Dopo i tre si fanno anche più rare fino ai tre e mezzo . Fino ai quattro si sente lo spruzzo d' una scintilluzza ; e più in là non resta senfo di spruzzo veruno .

3. L' accostamento del quadro fu ognora più norabile , che nelle serie precedenti . Ma dopo un pollice e mezzo fu assai indebolito , e s' indebolì vie più nelle successive distanze , benchè continuassero vive le scintille , e la carica impressa nel quadro .

## P R E P A R A Z I O N E .

*Come nella serie 18.*

## S E R I E 22.

1. A contatto finì la carica in tredici come sopra ; a mezzo pollice in nove ; ad uno in sei ; ad uno e mezzo in cinque ; ai due in tre ; ai due e mezzo in due ; ai tre in una ; ai tre e mezzo sola scossa nel quadro ; ai quattro ancor scintilla pungente ; e fino ai cinque appena un cenno di luce .

2. Fino a mezzo pollice furono vivissime , e continue le scintille . Si fecero gravi , e alquanto più rare ad un pollice .

Indi ad uno e mezzo furono gravissime, e ancor più rare, talchè ai due pollici una appena ne scoppìò ogni sei giri. Ai due pollici e mezzo non si sentì, che qualche spruzzo interrotto, e grave; e più in là dei tre pollici non vi fu neppur senso di spruzzo.

3. A mezzo pollice fu tanto forte la mutua attrazione della superficie, e del quadro, che quella si spingeva innanzi sollevando la base del conduttore, benchè si caricasse d'un grave peso; nè il quadro si poteva fermare premendone i due angoli superiori con tutta la forza dell' indice di ambedue le mani. Ad un pollice continuò assai forte; e tanto qui come ad un mezzo pollice ad ogni scoppio di scintilla si restituì al solito la superficie, e il quadro; onde furono continue, e grandi le loro oscillazioni. Ad un pollice e mezzo scemarono, e così successivamente in proporzione delle scintille, e della carica impressa nel quadro.

## O S S E R V A Z I O N E 4.

Raccogliendo qui pure alcune osservazioni comuni alle quattro ultime serie di vitrea elettricità le paragoniamo alle corrispondenti di resinosa.

1. Lo scostamento di quel pendoletto, che notato abbiamo nel n. 4 della ser. 19, segue in tutte queste, finchè continuano i giri, a mantenersi assai più notevole, che nelle precedenti di resinosa, e molto al di là delle distanze, nelle quali s'imprime carica, o luce nel quadro. Nè qui col finir dei giri cade subito tanto nelle prime, come nelle ultime distanze.

2. E similmente in tutte le distanze replicai le prove delle scariche, e delle scintille impressè nel quadro; nè trovai nel numero, e nella forza loro veruna differenza, comunque togliessi previamente ogni elettricità al tubo, e alla annessa superficie, ovvero ivi lasciassi tutta l'elettricità, che si conserva lungamente.

3. Le attrazioni, e adesioni tra la superficie e l'armatura del quadro sussistono soltanto, finchè durano i giri, e fino allo scoppio della scintilla, come accade nei combaciamenti del filo nella ser. 10. Nel che si distinguono dalle adesioni, e attrazioni tra l'armatura e la nuda superficie del

quadro, e da ogni genere di adesione tra il cuscinetto, il vetro con esso strofinato, e tra molte lamine resistenti, o anche fogli di carta strofinati insieme uno sopra l'altro. Nei quali casi, e altri simili sussiste l'adesione anche finiti i giri, e dopo tratta la scintilla.

4. Crescono qui quelle attrazioni con forza sorprendente, e assai più che nelle corrispondenti di resinosa. Conservano però similmente certa proporzione colla maggior estensione delle opposte superficie, e colla quantità di elettricità procedente dal conduttore. Talchè non sembrano sostenersi, che per la viva, e continua permutazione di sostanze, ovvero dei soggetti della loro mutua azione, che in tal atto, e in conveniente quantità trapassano da una in altra superficie. In vero tanto nel filo della ser. 10, come nelle serie ultime fe debole si rende l'elettricità, tanto meno è notabile l'adesione, e in fine diviene insensibile e nulla.

Sembra impossibile, che nascere possa, o sostenersi l'idea di fluido unico, ed espansivo in mente di chi veduto abbia da principio, o in fine veder voglia fenomeni tanto insigni, e costanti di mutua azione. Avrei desiderato di misurare con qualche precisione la forza corrispondente alle successive grandezze di superficie, e alla quantità di elettricità; ma non ebbi campo di fare per ciò le opportune preparazioni.

5. Le anomalie, che notate abbiamo nella frequenza, e nella forza delle scintille tra la superficie e 'l quadro nelle successive distanze, non cominciano qui dalla superficie di metà, come nella resinosa, ma dalla ultima superficie intera. Poichè nella ser. 20, e 21 si estesero le scintille, e gli spruzzi per fino ai quattro pollici (ivi n. 2.), e nella ser. 22. n. 2. non arrivano più in là dei tre pollici.

6. Paragonando le distanze, nelle quali scoppiano, o spruzzano le scintille tra la superficie e il quadro in tutte le serie di vitrea elettricità, corrispondono quelle appunto alle distanze, nelle quali segue ad imprimerfi alcuna forza scuotente nello stesso quadro. Poichè dalla ser. 19 alla 22 n. 1, e 2 svanisce questa nel momento, che finiscono gli ultimi spruzzi delle scintille. Onde la vitrea elettricità non si raccoglie qui nell'opposto quadro, se non a distanze, e in copia proporzionali al numero, e alla forza delle scintille.

7. Presentando qui pure al tubo, o all' annessa superficie una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice ne ebbi scintille vivissime, e veramente scuotenti, e ferpeggianti fino alla distanza di tre pollici massime nell' ultima serie. Non ho mai altrimenti osservato verun modo di elevare al sommo la capacità d' un conduttore, quanto nell' ultima preparazione, in cui questo presenta a certa distanza un' uguale superficie all' opposto quadro. E in quest' ultima serie la scintilla dalla superficie al quadro non iscoppiò notabilmente al di là di tre pollici; onde sembra, che le anomalie di maggiori distanze nella serie 20, e 21 notate più sopra al n. 5, siccome le corrispondenti, che notate abbiamo al n. 5. della oss. 1, dipendano da certa grandezza di superficie opposte, o presentate. E perciò restringendoci all' ultima preparazione troviamo, che nella vitrea elettricità la scintilla tra il conduttore e l' opposto quadro non iscoppia a distanze molto maggiori, che non tra il conduttore medesimo e tale globo, che esteriormente si presenta.

8. Questo globo però, che al conduttore si presenta, non fa in esso notabile diminuzione di elettricità nelle maggiori distanze, finchè non incomincia a trarre qualche spruzzo o stridore di scintilla. Siccome dal conduttore stesso non si spinge nell' opposto quadro veruna forza di carica, se non a distanze corrispondenti allo scoppio, o spruzzo delle scintille (sopra n. 6.). Onde anche in tali forme di conduttori la vitrea elettricità non si disperde, nè passa tacitamente, come la resinosa, nell' opposto quadro, o in altro conduttore se non a distanze proporzionate allo strepito, e scoppio delle scintille.

## O S S E R V A Z I O N E 5.

Riduciamo similmente in una tavola i numeri, che esprimono la forza scuotente nel quadro impressa con vitrea elettricità nelle successive distanze.

A contatto. Poll.  $\frac{1}{2}$ . Poll. 1. Poll.  $1\frac{1}{2}$ . Poll. 11. Poll.  $11\frac{1}{2}$ . Poll. 111. Poll.  $111\frac{1}{2}$ . Poll. 1v. Poll.  $1v\frac{1}{2}$ . Poll. v. Poll.  $v\frac{1}{2}$ . Poll. vi.

Ser. 19 =	9..	8..	7..	3...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0	...	0
Ser. 20 =	13..	10..	8..	7...	5	...	5	...	2	...	X	...	0	...	0	...	0	...	0
Ser. 21 =	13..	9..	8..	8...	7	...	7	...	6	...	3	...	x	...	x	...	x	...	0
Ser. 22 =	13..	9..	6..	5...	3	...	2	...	1	...	X	...	x	...	x	...	x	...	0
Totale =	48..	36..	29..	23..	15	...	14	...	9	...	3	...		...		...		...	

Paragonando la serie 21 colla precedente 20, e colla seguente 22, nelle quali i primi termini a contatto sono eguali, resta evidente, come qui sopra accennai (n. 7.), che le distanze, alle quali s' estendono le scintille, e le cariche corrispondenti tra il conduttore e l'opposto quadro, o altro conduttore, dipendono da certa grandezza, e proporzione delle superficie opposte, e presentate, e non dalla sola quantità di elettricità.

#### O S S E R V A Z I O N E . 6.

E confrontando queste, che alle quattro ultime serie appartengono, colle tavole, e osservazioni delle serie precedenti di vitrea elettricità deduciamo i rapporti della stessa specie nelle diverse preparazioni ne' seguenti

#### C O R O L L A R I .

COROLL. 1. Nella stessa specie di vitrea elettricità se si consideri la semplice ragione delle distanze nelle somme loro confuse il conduttore terminante in punta imprime la carica nell'opposto quadro con forza poco più di quintupla, che non quando termina in globo, ossia sferica, o altra piana superficie.

Nella tavola delle serie con punta di vitrea elettricità si trova soltanto ai pollici xviii il termine sommato di 3 scariche tratte dal quadro (*teor. xiv. n. 2.*). E nella tavola delle serie di simile elettricità col conduttore terminante in globo, e in piane superficie si trova il termine di tre scariche ai pollici  $111\frac{1}{2}$  (*off. 5. prec.*). E' dunque la relativa forza come  $18:3\frac{1}{2}$ , e riducendo come  $36:7$ ; cioè poco più di quintupla.

COROLL.



COROLL. 2. Che se nella stessa ragione distintamente si paragonino i termini corrispondenti nelle somme di quelle tavole, non hanno le punte di vitrea elettricità se non forza poco meno di quintupla delle sferiche, o piane superficie per imprimerne la carica nell' opposto quadro.

Prendiamo nelle stesse tavole i numeri eguali, o più prossimi che nelle somme dei primi, ed ultimi termini si corrispondono. Nelle serie di punte ad un pollice vi è la somma 45, che è la più prossima alla somma 48 del primo termine delle serie di superficie. Ma in quelle arriva fino ai pollici  $III \frac{1}{2}$ . Dunque sono le distanze pollici  $17 : 3 \frac{1}{2}$ , le quali ridotte come  $34 : 7$  sono in minor ragione di quintupla. Può per altro accrescersi alquanto tale ragione per la differenza dei termini primi 48, e 45, che porterebbe di più una sedicesima d'un pollice nel numero 34, o di meno nel numero 7.

COROLL. 3. Che se nello stesso modo si paragoni distintamente la forza delle punte con ciascuna grandezza di sferica, o piana superficie, si riconosce la forza delle punte 1. circa quadrupla del globo; 2. e similmente quadrupla della piana superficie di quarto; 3. più di tripla della superficie di metà; 4. e quintupla dell' intera superficie uguale all' opposta armatura.

1. Nella serie 10 il termine di scosse 9 è ai pollici 11, e il termine di scosse 3 ai pollici VIII; e benchè nelle serie seguenti non s' incontrino in una stessa serie i termini precisi di 9, e 3, pure se si prendono le distanze medie tra il primo e l'ultimo dei termini prossimi, si trova in circa adeguata la distanza di quella prima serie di pollici VI.

Ma nella serie 19 col globo tra il primo termine 9 e l'ultimo 3 vi è la distanza di pollici  $I \frac{1}{2}$ . Dunque riducendo sono le distanze incirca come  $12 : 3$ , ed è perciò circa quadrupla la ragione loro.

2. Non si trovano in nessuna delle serie di punta esatti i termini di 13 scariche, e 2 in fine, come nella serie 20 con superficie di quarto, fra i quali termini la distanza è di pollici III.

Ma ragguagliando le serie 10, 11, e 14, nelle quali sono i termini più prossimi ai 13, e 2, si trova tale distanza tra i pollici VIII, e XIV, cioè verso i pollici XII. Onde risulta incirca quadrupla la ragione loro.

3. Nella serie 10 sono precisamente i termini 13, e 3 alla distanza di pollici VIII. Nella serie 11 tra i pollici VIII, e XIV; e nelle ultime sono pure verso i pollici XIV. Può quindi prendersi circa di pollici XII l'adequata distanza di que' termini.

Ma nella serie 21 con superficie di metà tra il primo 13 e l'ultimo 3 vi è la distanza di pollici III  $\frac{1}{2}$ . Dunque riducendo è la ragione loro come sono le distanze 24 : 7, cioè più di tripla.

4. Nella serie 10, e 11 in fine sono i termini precisi di 13, e 1 alla distanza di XIV pollici. Per le serie 13, e 14 sembra potersi estendere sicuramente di più oltre i pollici XV.

Ma nella serie 22 con superficie intera eguale all'opposta armatura non vi sono, che pollici III fra i termini 13, e 1. Dunque in ragione delle distanze sarebbe la relativa loro forza come 15 : 3 cioè quintupla.

COROLL. 4. Ma la stessa punta nell'imprimere nell'opposto quadro la carica non estende nel frapposto mezzo lo strepito di scintilla, se non a distanza subdupla, e perfino subquadrupla della rotonda, o piana superficie.

Dalla punta del conduttore all'opposta scoppia la scintilla fino alla distanza di linee nove (*Cap. I. off. 11. n. 1.*); e dal conduttore stesso terminante in globo, o in piana superficie scoppia a distanza d'un pollice e mezzo, colla quale è subdupla; e al più di tre pollici, coi quali è subquadrupla (*off. 4. n. 6.*).

COROLL. 5. Ed un globo di mezzo pollice, che esteriormente si presenta a fianco del conduttore terminante in punta, comincia a diminuirne l'elettricità a distanza subtripla, che quando il conduttore stesso imprime nell'opposto quadro la carica con rotonda, o piana superficie.

Col globo, che a fianco si presenta, non comincia nel primo caso a scemarsi l'elettricità del conduttore, se non alla distanza di un pollice (*Cap. I. off. 11. n. 2. 3.*); e nel secondo caso comincia a scemarsi fino alla distanza di pollici tre (*off. 4. n. 8.*), alla quale distanza segue ad imprimerli la carica (*ivi n. 6.*).

COROLL. 6. E tra quel globo, che si presenta, e l'conduttore terminante in punta scoppia la scintilla a distanza

subtripla , che non quando il conduttore stesso imprime nell' opposto quadro la carica con rotonda, o piana superficie .

Con punta al conduttore scoppia la scintilla a distanza d' un pollice (*Cap. I. off. 11. n. 3.*). Ma terminando il conduttore in rotonda , o piana superficie scoppia la scintilla tra questa e il globo , che si presenta, oltre la distanza di pollici tre (*off. 4. n. 7.*).

O S S E R V A Z I O N E 7.

Confrontiamo in fine le ultime tavole di resinosa , e di vitrea elettricità nelle opposte superficie per compiere le proposte induzioni , e dedurne i generali resultati , e le distinte loro proporzioni .

T E O R E M A XIX.

In tutte le serie con superficie di resinosa elettricità le progressioni della carica impressa nell' opposto quadro eccedono le corrispondenti progressioni con superficie di vitrea .

1. Riduciamo tutti i primi , ed ultimi termini alle rispettive distanze nelle tavole di resinosa (*off. 2.*) , e di vitrea elettricità (*off. 5.*).

Gli ultimi cenni di luce si estendono colla resinosa fino ai . . . . . poll. 6

Gli ultimi cenni simili colla vitrea non oltrepassano i . . . . . poll. . . . 5

L' ultimo grado di forza scuotente *X* nel quadro colla resinosa . . . . . poll. 4

L' ultimo grado simile colla vitrea non oltrepassa i . . . . . poll. . . . 3  $\frac{1}{2}$

L' ultima scossa nella boccetta arriva colla resinosa fino ai . . . . . poll. 3

L' ultima scossa simile colla vitrea si ha fino ai . . . . . poll. . . . 3  $\frac{1}{2}$

Totale poll. 13 : 12

2. Sarebbe maggiore della vitrea la somma delle distanze di resinosa, quando anche i primi termini dell' una e dell' altra fossero uguali. Ma nella resinosa la somma dei primi termini non è che 29, e la corrispondente alla vitrea è 48. Supponendo per ora il valore di questi numeri proporzionale alle loro unità (la quale supposizione scema anche più del giusto i mutui rapporti), e calcolandone le proporzioni colle semplici ragioni delle distanze, e delle forze supposte corrispondenti ai primi loro termini, dobbiamo invertire questi numeri, e comporli colla ragione delle distanze. Sarà dunque la resinosa alla vitrea come  $13 \times 48 : 12 \times 29 = 624 : 348 = 52 : 29$ .

3. Ed esprimendo questa ragione con fenomeni di cariche, farà la resinosa alla vitrea come una carica equivalente a 52 di quelle unità ad altra carica equivalente a 29 delle stesse unità.

4. Prima di confrontare i termini corrispondenti, osserviamo, che le contrapposizioni tra la resinosa e la vitrea elettricità non concorrono similmente, anzi in qualche modo si oppongono a quelle, che osservammo nel n. 7. del Teor. XIV. Per rendere ciò più evidente riduciamo in una tavola tutti que' numeri dal contatto fino alle ultime distanze colle frazioni prossimamente indicanti le rispettive differenze tra i termini, che immediatamente si succedono.

Resinosa	A contatto	Vitrea
Differenze	29 . Primo termine .	48 Differenze
$\frac{1}{7} = 9 = 20 \dots$	Poll.	$\frac{1}{2} \dots 36 = 12 = \frac{2}{3}$
$\frac{2}{5} = 4 = 16 \dots \dots \dots$	I	$\dots 29 = 7 = \frac{1}{7}$
$\frac{3}{3} = 6 = 10 \dots \dots \dots$	I $\frac{1}{2}$	$\dots 23 = 6 = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{5} = 6 = 4 \dots \dots \dots$	II	$\dots 15 = 8 = \frac{2}{7}$
$\frac{1}{2} = 2 = 2 \dots \dots \dots$	II $\frac{1}{2}$	$\dots 14 = 1 = \frac{1}{14}$
$\frac{1}{3} = 1 = 1 \dots \dots \dots$	III	$\dots 9 = 5 = \frac{2}{5}$
1 = X	III $\frac{1}{3}$	$\dots 3 = 6 = \frac{2}{3}$
0 = X	IV	$\dots \infty = 3 + X$

Rintraccieremo in seguito la causa tanto delle prime, che delle nuove contrappolizioni, e anomalie. E frattanto in proposito nostro vediamo, che nei successivi termini delle due specie è mal sicuro il confronto tanto in ragione del numerico loro valore, che delle distanze; poichè non seguono essi verun andamento costante secondo quelle semplici ragioni.

5. Contuttociò raccogliendo gli estremi delle somme corrispondenti sono nella resinosa dal primo termine all' ultima scossa di boccetta pollici tre, e all' ultima di quadro pollici quattro; e nella vitrea dal termine corrispondente 29, che nelle somme è alla distanza d' un pollice, fino alle ultime scosse tanto di boccetta, che di quadro, sono pollici due e mezzo. Onde riducendo le ragioni sono come . . . . 6: 5 e come . . . . . 8: 5 e nella somma totale come . . . . . 14: 10 e componendole sono come 48: 25.

6. E confrontando nelle serie distinte ciascun termine, o numero corrispondente sono le distanze

Ser. 15. Dalle cinque all' ultima pollici	$1 \frac{1}{2}$
Ser. 19. Fra i termini prossimi alle cinque all' ultima poll.	$0 \frac{1}{2}$
Ser. 16. Dalle sette all' ultima poll.	2
Ser. 20. Dalle sette all' ultima poll.	$1 \frac{1}{2}$
Ser. 17. Dalle otto all' ultima poll.	3
Ser. 21. Dalle otto all' ultima poll.	$2 \frac{1}{2}$
Ser. 18. Dalle nove all' ultima poll.	2
Ser. 22. Dalle nove all' ultima poll.	$2 \frac{1}{2}$
Totale . . . . .	$\text{Poll. } 8 \frac{1}{2} : 7 = 17 : 14$

E componendole sono come 288: 75, prossimamente = 4: 1.

7. Onde benchè i rapporti delle distanze, e del numerico valore de' termini non comprendano se non in parte le vere proporzioni delle due specie di elettricità; ciò non pertanto in qualsivoglia calcolo delle loro ragioni riconosciamo la resinosa maggiore della vitrea. Non altro pertanto ci rimane, che di raccogliere ne' seguenti teoremi le funzioni di tutti i termini, che a compiere quella maggior ragione concorrono.

## T E O R E M A XX.

Raccogliendo insieme le combinazioni di punte, e di superficie a vicenda opposte risultano le punte, e superficie di resinosa elettricità superiori alla vitrea 1. nelle semplici ragioni delle distanze; 2. nel confuso valore della numerica loro espressione; 3. e nelle complicate funzioni de' fenomeni.

1. Primieramente nelle combinazioni di punte, e di superficie opposte a punte (*teor. XIV. n. 3.*) sono le distanze nella somma de' termini corrispondenti dalla resinosa alla vitrea elettricità di pollici . . . . . 53 : 32

E nelle combinazioni di superficie a vicenda opposte secondo le ragioni degli ultimi cenni di luce, e delle ultime scosse della boccetta, e del quadro (*teor. 19. n. 1.*) sono poll. . . . . 13 : 12

E nelle somme de' termini corrispondenti all'ultima scossa della boccetta, e del quadro (*ivi n. 5.*) composte insieme sono . . . . . 48 : 25

E sommate (*ivi*) sono poll. . . . . 14 : 10

E nel confronto de' termini corrispondenti alternamente sommati insieme (*ivi n. 6.*) sono poll.  $8\frac{1}{2} : 7$ ,  
 ossia . . . . . 17 : 14

Onde nelle semplici ragioni delle distanze sono le somme . . . . . 145 : 93

2. E nuovamente nelle combinazioni di punte sono nel confuso valore della numerica loro espressione (*teor. XIV. n. 4.*) come . . . . . 225 : 144

E nelle combinazioni di superficie sono (*teor. prec. n. 2.*) come . . . . . 52 : 29

E perciò sommate insieme sono . . . totale 277 : 173

Le quali ridotte a minimi termini sono prossimamente come . . . . . 27 : 17

3. Ed esprimendone il valore con le complicate funzioni di fenomeni si ridusse la resinosa tanto superiore alla vitrea nelle combinazioni di punte (*teor. XIV. n. 5.*), quanto lo è una carica espressa con 225 ad altra espressa con 144 di quelle unità.

E fu similmente nelle superficie (*teor. prec. n. 3.*) la resinosa tanto superiore alla vitrea, quanto una carica equivalente a 52 lo è ad altra equivalente a 29 di quelle unità.

Quindi sommando e riducendo come sopra a minimi termini sono come 27:17.

4. E siccome non si cerca qui se non la complicata funzione de' fenomeni, si combineranno i precedenti numeri insieme colla moltiplicazione, invece della semplice somma; indi si esprimerà la proporzione loro in fenomeni di cariche equivalenti ai numeri  $225 \times 52$ , e  $144 \times 29 = 11700 : 4176$  che è più di dupla.

### T E O R E M A XXI.

Che se insieme si compongono le semplici ragioni delle distanze col confuso valore della numerica espressione, e colle complicate funzioni de' fenomeni, risultano in tutte le precedenti combinazioni vie più insigni le varie ragioni di superiorità della resinosa sopra la vitrea elettricità.

1. Per raccogliere insieme le precedenti ragioni sommando farebbero nel precedente Teorema n. 1, 2, e 3. .

$$\begin{array}{r} 145 : 93 \\ 27 : 17 \\ \hline 27 : 17 \end{array}$$

Totale 199:127

2. Ora moltiplicando le semplici ragioni delle distanze pel confuso valore della numerica espressione ridotta farà

$$145 \times 27 : 93 \times 17 = 3915 : 1581.$$

Che se questo si moltiplichi per l' espressione de' fenomeni ridotta similmente in numeri 27:17; risultano i prodotti

$$105705 : 26677.$$

I quali sono prossimamente in ragione quadrupla.

3. Se poi quel primo prodotto . . . . . 7840:2697 si sommi col prodotto de' fenomeni (*teor. prec.*

n. 4.) . . . . . 11700:4176

farà la ragione delle somme . . . . . 19540:6883 cioè prossimamente tripla.

Onde e sommando, e moltiplicando risultano vie più insigni, e varie le indicate ragioni.

## T E O R E M A XXII.

Non meno queste semplici ragioni sommate, che i loro prodotti si approssimano colle corrispondenti proporzioni, che dedotte abbiamo nella prima Parte, e si raggugliano insieme.

1. Se nella prima Parte (*teor. I.*) sommiamo le sole prime ragioni delle distanze di piena carica, di metà, e dell'ultimo termine della scossa senza verun riguardo alle seconde ragioni dell'isolamento, colle quali furono composte, abbiamo le ragioni . . . . .

4: 2  
8: 6  
7: 6

Totale 19:14

Similmente se nel Teor. XIV. n. 3., e nel Teor. XIX. n. 1, 5, e 6 si sommino le semplici distanze, e si lasci fuori la ragion composta di 48:25, abbiamo . . . . .

53:32  
13:12  
14:10  
17:14

Totale 97:68

Sommando colla precedente . . . . . 19:14  
abbiamo l'intera somma . . . . . 116:82

la quale divisa per due ci somministra la raggugliata ragione . . . . . = 58:41  
e ridotta a minori termini dividendo per tre resta =  $19\frac{2}{3}$ : $13\frac{2}{3}$ .  
poco diversa dalla prima.

2. Fu nel Teorema I. colla moltiplicazione delle distanze per l'inversa degl'isolamenti dedotta la ragione di que' fenomeni quadrupla.

E similmente nel precedente Teorema n. 2. per la moltiplicazione delle distanze colla numerica espressione de' fenomeni ridotti si ebbe la composta ragione prossimamente quadrupla; nel che si trovano raggugliate quelle ragioni.

3. In fine del Teorema III. si calcolò la ragione loro, secondo diversi riguardi, meno di quadrupla, e più di dupla.

E nel precedente Teorema n. 3, siccome pure nel Teorema

rema



rema XX. n. 4. si calcolò similmente in adeguato poco meno di tripla.

Onde tanto nelle somme, che nei prodotti concordano con quelli della prima i risultati della seconda Parte, e vengono prossimamente a raggugliarsi.

### T E O R E M A XXIII.

Le confuse ragioni, che dai fenomeni dedotte abbiamo tanto nella prima, che nella seconda Parte, si risolvono in ragioni distinte riducendone secondo le nuove tavole del Teorema XVIII a comune misura i termini corrispondenti di tutte le premesse induzioni.

### T E O R E M A XXIV.

E con queste distinte ragioni si raggugliano le proporzioni tutte corrispondenti alle diverse preparazioni in ciascuna specie di elettricità

### T E O R E M A XXV.

E quelle distinte ragioni, ed il ragguglio loro con le proporzioni di resinosa, e di vitrea elettricità nelle diverse preparazioni di ciascuna specie, e nelle corrispondenti opposte, riducono a piena evidenza gli elementi d'ogni elettrica azione, che fra le punte distinti abbiamo nella prima Parte, e ci porgono prevj lumi, e fondamenti stabili della nuova teoria, che andiamo rintracciando.

### O S S E R V A Z I O N E S.

Dei tre ultimi Teoremi non soggiungo veruna dimostrazione. In due aspetti può concepirsi la dimostrazione loro, o generalmente, o particolarmente; e nell' uno, e nell' altro aspetto giudico meglio di ommetterla. Poichè nel primo, sono abbastanza evidenti per sè stessi come canoni di ampissime induzioni distinte, che tutte comprender debbono, ed esaurire le ragioni d'ogni elettrico fenomeno. Dalla enumerazio-

ne, e dal compimento di quelle induzioni verranno que' teoremi più efficacemente comprovati, che non con generiche espressioni di raziocinio. Ed appunto l' estensione stessa, e la molteplicità di simili prove non ci lasciano qui luogo d' intraprendere nel secondo aspetto a dimostrarli particolarmente. Sono alla terza Parte riservate le ragioni delle cariche, e scariche elettriche, ed alla stessa si aggiungono altre Memorie sulle ragioni della adesione, e dei moti elettrici, e sopra ogni maniera di eccitamento, e di estinzione delle elettriche potenze. Ma quanto ai fenomeni dell' elettrica luce cercherò di ridurli a distinte ragioni nel seguente Capo terzo, con cui fin da principio proposti di por termine alla seconda Parte della presente Introduzione.

## C A P O III.

*Dei Fenomeni dell' elettrica luce.*

**P**rima delle luminose sperienze di *Hauksbee*, *Gray*, *Du-Fay*, e *Bose* non distinsero comunemente i Filici l' elettrica dalla fosforica luce; e restò tuttavia dopo quelle tanta prevenzione per la supposta mancanza di calore nell' elettrica del pari, e nella fosforica luce, che fredde si credertero perfino le metalliche fusioni fatte con elettrica scintilla; nè vi andò meno de' nuovi, e palpabili cimenti di *Kinnersley*, e di *Priestley* per concludere in fine, che sono esse infuocate, ed ardenti.

Non isfuggirono a *Du-Fay*, e a *Bose* quelle differenze di figura, di grandezza, e di colore ne' fiocchi, o raggi luminosi, che brillano nelle tenebre agli spigoli, o alle estremità degli elettrici conduttori; e ne trassero indi argomento per distinguere le due opposte specie di elettricità, che nominarono *vitrea*, e *resinosa*; le quali furono da *Kinnersley*, e da *le Roy*, e da *Symmer* con piena evidenza dimostrate meglio colla reciproca loro estinzione, e colle leggi dei moti loro, che non colle semplici varietà di luce.

Descriverò io pertanto l' impressione dell' elettrica luce secondo la realtà de' fenomeni prescindendo per quanto sia possibile da qualsivoglia espressione di ipotetico linguaggio, o di

sistematico criterio . E cominciando a ridurre sotto certi capi le circostanze , che costantemente , e generalmente producono , o accompagnano qualunque apparenza di elettrica luce , passerò indi a distinguerne ordinatamente la varietà , e le differenze di figura , di grandezza , e di colore ; e dal complesso in fine delle generali , e particolari leggi di que' fenomeni tenterò di dedurne alcun lume di teorica applicazione .

## A R T I C O L O I .

### *Leggi de' generali fenomeni della elettrica luce .*

**N**Iuno pensò fin ora a distinguere i generali dai particolari fenomeni dell' elettrica luce , non che a fissarne distinte leggi . Spererò io d' incominciarne , e di compierne in un sol tempo l' impresa ? Son certo d' incominciarla ; e sia nel rimanente libero ad altri il giudizio o di riconoscerla compiuta , o di compierla più felicemente .

*Legge Prima .* Non v' ha elettrica luce , se non in quanto sussiste , cioè o si eccita , o si rinnova il moto della stessa elettricità .

1. Or questo moto può farsi in due modi , o separando l'una dall' altra le opposte specie , che stanno insieme unite , e spente , ovvero riunendo insieme l'una coll' altra le due specie , che furono previamente divise , e sciolte . Si chiamò quel primo da' Frankliniani *turbamento di equilibrio* , come l' altro si appella *restituzione , o ritorno all' equilibrio naturale* .

2. E quanto al modo primo a niuno è ignoto , che nei lembi della mano , o del cuscinetto , con cui si strofina il cilindro , o il disco dell' elettrica macchina , apparisce luce , finchè colla rotazione di questi si mantiene vivo il moto della elettricità eccitata . Sprizzano similmente or più , or meno , finchè tal moto sussiste , dagli spigoli , o dalle punte del conduttore certe lucide fiammelle . Ma cessa ogni luminosa apparenza cessando la rotazione , che quel moto produce .

E nel secondo modo , se al conduttore elettrico si presenta altro corpo capace d' indurre moto in quella elettrica potenza , si ha secondo la proporzione del moto stesso l' elettrica luce .

3. Ma qui d'uopo è rilevare un capitale errore, che è comunemente invalso per mera illusione del Frankliniano linguaggio. Tra quel conduttore e un corpo resistente appressato non vi è luce secondo i Frankliniani, perchè in questo non può spandersi ad equilibrio il fluido condensato in quel primo; vi è bensì luce tra quello e un nuovo conduttore, che si appressi, perchè in questo quel fluido più denso si spande, e si divide.

4. Il fatto nella prima sua parte è ordinariamente vero, ma falsa è la ragione, da cui si ripete. E con questa falsità appunto si adottò per contraria ragione come un fatto la seconda parte, mentre questa è falsa in fatto, quanto false sono e quella prima, e questa contraria ragione, d'onde si derivò. Dico dunque, che una sfera metallica, che non oltrepassi il diametro di due pollici, purchè bene ed esattamente isolata si appressi fino a minima distanza a quel conduttore comunque elettrico, non ammette il menomo cenno di luce, come ritirandola dopo tale approssimamento non ritiene la menoma ombra di elettricità. Io l'ho provato più e più volte, e ne' tempi propizj alla ingenuità degli elettrici fenomeni mi è costantemente riuscita la cosa appuntino, come l'asserisco; e sono certissimo che non riuscirà mai altrimenti a chi vorrà debitamente convincersene colla propria esperienza.

5. Troppo mi scosterei dal proposto argomento se proseguir volessi gli accidenti, che in simil foggia di sperienze occorrono variando l'isolamento, e la grandezza, e la figura de' corpi, che si presentano. Saranno quelli più opportunamente distinti in altre Memorie; ed avvertirò frattanto, che brilla talvolta manifesta luce nel conduttore elettrico, o nel corpo isolato, che ad esso si presenta. Ma ben lungi che ciò accada come i Frankliniani la discorrono per semplice trapasso, ed espansione del primo fluido, si riconosce all'opposto per tal atto nel corpo presentato l'elettricità contraria alla prima del conduttore; quando dovrebbe pur trovarsi l'omologa in proporzione della luce, se nascesse questa, o si eccitasse per semplice moto e distribuzione d'un fluido solo.

*Legge seconda.* Ed è del pari necessario il moto della elettrica potenza, acciò luce si manifesti. 1. ne' conduttori; 2. ne' resistenti rispettivamente fra loro; 3. ovvero fra gli uni, e gli altri alternamente.

1. Nella consueta macchina elettrica tra il conduttore e il dito, o altro conduttore non isolato, che si avvicini, brilla continuo splendore, o scintillazion, finchè si gira il disco; cioè finchè la causa sussiste di moto dell'elettrica potenza fra l'uno e l'altro conduttore. Cessando i giri del disco non brilla tra il conduttore e il dito altra luce, o scintilla, se non in proporzione del moto, che nella elettricità residua s'induce col successivo accostamento d'un esterno conduttore.

Simili fenomeni si rendono più composti, ed insigni, se a proporzionate distanze del primo conduttore si collochi una serie di conduttori isolati di figure diverse, e s'induca indi, o si tolga la capacità, e successione di moto della elettrica potenza fra tutti, o parte di que' conduttori presentando or all'ultimo, or agli intermedj la mano. Poichè nell'atto stesso, che s'interrompe, o si apre l'adito al moto della loro elettricità, si rende nullo, o si manifesta, e si accresce ne' medesimi l'elettrico splendore.

In quella serie di macchinette attraverso delle quali io traggo la scarica di qualsivoglia elettrica batteria (*Nuove sperienze elettriche n. 43, e seg.*) non comparisce mai luce, se non in proporzione del moto, che s'induce tra le elettriche potenze, che sono previamente frenate a vicenda sulle opposte facce armate di quella batteria.

2. A rendere poi manifesta la necessità del moto delle elettriche potenze, acciò luce si ottenga fra i resistenti, niun genere di sperienze cade più in acconcio, quanto quelle, che brevemente descrissi nell'opera ora citata al capo ultimo *Della elettricità ne' fogli di carta bianca*. Gioverà qui combinarne su quel gusto alcune più convincenti.

(a) Prendo due sottili, ed eguali lastre di cristallo armate al solito da ambe le facce; e sovrapponendole in modo, che si adattino egualmente e le lastre, e le interne armature l'una full'altra, le carico in un sol atto presentandole, come se fossero una sola, al conduttore elettrico. E così come sono caricate le separo l'una dall'altra, e le riunisco senza vederne la minima luce; purchè nel separarle, e nel riunirle non tocchi l'una, o l'altra delle loro armature, e per tal modo non rivolga esteriormente alcun moto tra le opposte elettricità, che a vicenda si frenano nelle opposte facce di

quelle resistenti lamine , e non hanno perciò tra l' una e l' altra sufficiente commercio di moto , quanto si richiede per renderne sensibile la luce .

( *b* ) Frappongo alle stesse lastre ancor cariche due fogli di carta bianca ; e finchè seguò a riunirle , e a separarle in guisa , che non s' introduca notevole moto tra le opposte loro elettricità , non apparisce in tali atti veruna luce .

( *c* ) Che se mentre sono riunite con fogli di carta bianca frapposti io tocco o l' una , o l' altra , o ambedue in un sol tempo le opposte armature , come in tal atto sento colla scossa , e vedo nella scintilla l' esterior impressione del moto delle opposte elettricità , così nella successiva separazione d' una lastra dai frapposti fogli appariscono segni di luce corrispondenti all' interiore moto , che in tal atto succede tra le opposte potenze ; e seguono simili segni nella separazione del superiore foglio dall' inferiore , e poi di questo dall' ultima lastra .

( *d* ) Spoglio quelle lastre di cristallo d' ogni armatura , e frappongo più fogli di carta bianca tanto larghi , quanto sono le intere lastre , e le cuopro esteriormente di fogli eguali . Indi o si ecciti collo strofinamento assai viva elettricità tra quelle lastre , e que' fogli , ovvero si carichino tutti insieme alla macchina con applicare al solito esteriormente due opposte armature , abbiamo in seguito nella separazione di ciascun foglio , e di ciascuna lamina manifeste striscie di luce ne' successivi lembi , o limiti , che si separano in proporzione del moto , che in tal atto s' induce fra le opposte elettricità delle facce , che previamente sono a contatto .

( *e* ) Cercai se quel moto semplicemente , e direttamente si compia attraverso il mezzo resistente fra le opposte potenze previamente esistenti in quelle vicine facce , che si separano , e perciò il mezzo frapposto non faccia altro officio , che di meccanico impedimento ; ovvero se ciascuna di quelle potenze essendo posta per tale separazione piuttosto in necessità di azione coll' aria , che in moto coll' opposta , per tale nuova azione smuova nella vicina faccia dell' aria altre elettricità , le quali nel riunirsi insieme alle prime raddoppino quel moto come si raddoppiano le azioni . Imperciocchè ( dissi meco stesso ) stando quelle facce a contatto non è se non semplice , e immediata l' azione dell' una coll' opposta potenza , d' on-

de ne nasce la coesione. Essendo questa vinta per la forza con cui si distruggono , e si separano quelle facce resistenti , non acquistano perciò le contrarie potenze maggiore facilità di moto , se non nel caso , che si frapponesse un conduttore ; ma frapponendoli un mezzo resistente , come l'aria , non altro accade , se non che ciascuna sulla vicina faccia dell'aria esercita l'azione stessa , che full' opposta esercitava . Ora con questa raddoppiata azione si smove nelle opposte facce dello strato d'aria la nativa elettricità con doppia direzione , l'una fra le due specie rispettivamente opposte verso le vicine facce separate , l'altra fra le due similmente opposte , che indirettamente restano libere , e s' incontrano nell'interiore grossezza dell'aria frapposta . Mi parve adunque , che in questo doppio sforzo diretto , e indiretto delle contrarie potenze dovesse presentarsi tale grossezza del frapposto mezzo , per cui venissero esse determinate al moto di riunione ; e ciò massimamente , perchè il mezzo stesso passa successivamente per tutte le misure di grossezza , e per la somma sua mobilità si presta a convertire que' molteplici sforzi in vera azione di moto . E perciò conclusi ragionando , che non nel primo , ma nel secondo modo , che da principio indicai , si compiono que' moti , che a certi intervalli di tale separazione fanno le striscie luminose .

( *f* ) Nè dal raziocinio sembrommi discorde l'osservazione , e l'esperienza . 1. Se nascesse tal luce per semplice , e diretto moto delle opposte potenze , nell'aria più secca , che a tal moto maggiormente resiste , dovrebbe apparir meno luce , che nell'aria umida , che è meno resistente : eppure si osservava tutto l' opposto . 2. Nell'aria secca , per cui si fa più viva luce , dovrebbero indebolirsi tanto più le opposte elettricità che li suppongono sole , e direttamente riunite per risplendere ; al contrario nell'aria umida quanto meno vi è luce , tanto dovrebbero trovarsi meno indebolite . Il che nuovamente è contrario all'osservazione , essendo incredibilmente più vivi , e insieme più durevoli que' fenomeni nell'aria secca , che nell'umida . 3. E quanto è più viva la luce , non solo tanto maggiormente , e più presto dovrebbero indebolirsi quelle contrarie potenze ; ma nell'aria stessa più secca dovrebbero estendere a minori distanze l'azione loro laterale , e lasciar nell'aria minori residui di elettricità . Poichè quanto più di-

rettamente si unissero , tanto meno potrebbero agire lateralmente , e tanto minor porzione non unita rimarrebbe nell'aria . Ora in tali esperienze e i laterali effetti , e le residue elettricità divise , e sparse per l'aria sono senza paragone maggiori nella secca , che nell'umida . E ciò basti per ora , mentre ci occorrerà di parlarne alquanto più estesamente nella Legge sesta qui appresso .

( g ) Comunque però immediato sia , o indiretto siffatto moto non nasce certamente quella luce , se non pel moto stesso , e per mutua unione delle opposte elettricità ne' limiti di separazione di que' fogli . E di ciò ne abbiamo manifesto incontro nella riunione de' medesimi ; poichè presentati nuovamente ad uno ad uno fra loro , o alle stesse lastre in proporzione , che si rinnova il moto , o la mutua unione fra le residue opposte potenze rendono manifesta luce nei successivi limiti di riunione ; ma non si attraggono , nè si comprimono l' uno sull' altro , se non tanto meno , quanto minore è il residuo delle opposte elettricità , che in tal atto non passano a riunirsi .

( b ) E se fra quelle facce finitime non si rinnovi il moto delle contrarie potenze ( poichè esse come da principio osservai ( a. b. ) a vicenda si frenano fralle opposte facce di ciascun foglio , e di ciascuna lastra , e perciò non possono far moto esteriormente ) come non si eccita se non tenue attrazione , così niuna luce fra quelle si manifesta .

( i ) Or mentre que' fogli , e quelle lastre stanno così finitime , e sovrapposte con niuna , o con tenue adesione , se con nuovo stroffinamento , o col contatto delle opposte armature , io rinnovo , o rivolgo esteriormente fra le vicine loro facce alcun moto di contrarie potenze , siccome più sopra accennai ( c ) , si spianano e si stringono in quell'atto l' une sulle altre , ed in proporzione del moto stesso si rinnovano nella loro separazione , o accostamento quelle striscie , o lembi luminosi .

3. Per dimostrare in fine , che tra i conduttori e i resistenti luce non nasce altrimenti se non per moto , o mutua unione delle elettriche potenze , sono nati fatti que' molti esperimenti , che narrai ne' *Dubbj* , e *pensieri sulla teoria degli elettrici fenomeni* cominciando dal numero 127 , e seguenti . Poichè in tutti i casi , nei quali fra lo scudo e la sottoposta faccia



faccia di cristallo s' introduce colla separazione, o coll' accostamento, o col contatto, o collo strofinamento alcun notevole moto delle elettricità, si manifesta in essi proporzionata luce. E niuna se ne manifesta giammai senza tale modo, che il freno sciolga, e il moto determini delle elettriche potenze.

*Legge terza.* Nè tal moto, che per l' elettrica luce è necessario, ha luogo mai altrimenti se non fra le opposte potenze, o contrarie specie di elettricità.

1. Benchè sembri questa un immediato corollario delle precedenti, meglio però sia dichiararla con dirette sperienze. E primieramente coll' apparato descritto nell' opera in ultimo luogo citata al numero 127, come luce si osserva ogni volta che s' introduce moto fra le contrarie potenze, o ciò si faccia colla separazione, o colla restituzione, o col contatto dello scudo sul cristallo; così niuna luce apparisce qualunque volta si separa lo scudo, o si restituisce sull' elettrico cristallo, quando quello è spogliato di elettricità (*ivi n. 133. 138.*), e quando non è fornito, che di omologa alla sottoposta faccia del cristallo (*ivi n. 121. 136.*), finchè in somma niun moto ha luogo tra le contrarie potenze.

2. E qui con maggiore distinzione ripiglierò quell' esperimento, che ivi in fine semplicemente come un paradossò accennai (*ivi n. 168.*). L' esperimento è questo. Sta sul disco di cristallo uno scudo, che nel separarlo dispiega la virtù contraria a quella del disco. Se prima di separarlo io scarico sullo stesso una, o più bocce assai cariche, e per tal modo accresco altamente la forza esplodente di quel disco, quattro fenomeni in proposito nostro appariscono principalmente degni di osservazione. 1. Lo scudo stesso stando a suo luogo mostra esteriormente elettricità omologa alla faccia stessa del disco; 2. ed omologa segue a dimostrarla anche dopo che da questa viene separato; 3. ma tanta è l' adesione tra il disco e lo scudo, che per separarlo vi vuole forza tripla, o quadrupla, che non ne' casi precedenti; 4. nè si fa mai quella prima separazione senza forte stridore, e viva luce di scintille tra lo scudo e il disco, da cui si stacca.

3. L' analisi di simile esperimento avrà luogo in altre Memorie, e ci guiderà a reconditi principj della teoria. Sembra in vero a prima vista contrario alla stessa legge, che ora

dichiariamo dell' elettrica luce. Poichè se nello scudo e prima, e dopo la separazione, altro non rifiede, che elettricità omologa alla vicina faccia del disco; d' onde mai nella separazione nascono quelle stridenti scintille per opera delle contrarie potenze, che a tal uopo si esigono? Ma per poco che si rifletta anzichè contrario si troverà più che altro mai conforme alla stabilita legge. Nasce in questo, come in ogni altro complesso di fenomeni, la contraddizione, e il paradosso dalla incapacità di ben comprenderli, o dalla imperfetta, e tronca forma di esprimerli, non mai dall' ingenuo linguaggio della natura.

4. Per verità se nella separazione dello scudo l' ultimo fenomeno di luce e di scintille non si riferisca che al primo, e secondo di omologa elettricità, nasce il paradosso; ma svanisce tosto che si fa ragione al terzo fenomeno, e tutto si comprende l' esperimento nella sua integrità. D' onde tanta adesione, se non per mutua efficacia delle opposte potenze? Se dunque tali e tante sono nel disco, e nello scudo, quanto più forti si mostrano colla maggior resistenza nel separarli; perchè col moto delle stesse, che in tal atto si determina, non faranno luce, e strepito corrispondente?

5. Essendo adunque che coll' esteriore comparfa di virtù omologa a quella del disco, ciò non ostante acquista lo scudo con esso maggior adesione, non v' ha dubbio, che nello scudo stesso non ve n' abbia tanta copia di contraria, quanta necessariamente per la stessa adesione si richiede. Proverò altrove con ogni genere di sperienze, che sempre e per necessità l' una insieme all' altra s' incontrano le contrarie elettricità non solo nelle opposte facce degli strati, o lamine resistenti, ma in ciascuna faccia di qualsivoglia corpo resistente, o conduttore; che ove non ha luogo tale simultaneo incontro, ivi non ha luogo nè lo sviluppo, nè la raccolta, nè verun segno di elettricità; che qualsivoglia elettrico segno non è se non l' immediato effetto di tale simultanea presenza, ed incontro delle opposte potenze. Ma siccome siffatte induzioni ai generali principj appartengono della teoria, perciò riservandole per altre Memorie, mi restringerò qui a considerarne soltanto i modi, e le circostanze, che l' elettrica luce immediatamente riguardano.

Distinti sul bel principio (*legg. 1. n. 1.*) due modi nel moto delle elettriche potenze, che luce producono. Or que' due modi vogliono più intimamente considerarsi, e ridurli a più esatta espressione. Due sono realmente, e diversi fra loro i modi, e gli atti, che il moto fanno di separazione, o di riunione delle elettriche potenze, un solo però è il moto che in que' diversi modi eccita l' elettrica luce. Non è il moto di separazione diverso dal moto di riunione, anzi non è quella che la riunione stessa d' una parte di quelle potenze nell' atto che si sciolgono, e si dividono.

6. Imperciocchè niuna specie può sussistere senza certa, e determinata azione, ossia senza l' esercizio della propria forza. Or questa finchè immediatamente si esercita con proporzionata dose di contraria specie, non dà, nè può altrimenti dare esteriori indizj di azione nè su i sensi nostri, nè su i corpi ambienti; essendo che quella interiore, ed immediata loro azione non ha altro rapporto nè coi sensi nostri, nè coi corpi ambienti, se non in ragione delle differenze, che tra quell' interiore conflitto, e mutua collisione direttamente, o indirettamente s' introducono. Acciò esteriormente si manifesti, un atto vi vuole, che alteri l' opposizione, o l' eguaglianza di quelle forze, e ne scomponga così quell' immediata unione; ed in tal atto consiste il primo eccitamento dell' elettrica virtù; del quale non è questo il luogo di far altre parole.

Dirò soltanto, che a scomporre quella previa, e naturale unione ( dico *naturale* per esser quella, da cui comincia, e in cui finisce naturalmente ogni fenomeno di elettricità ) d' uopo è di concepire un corpo, o il concorso di più corpi, o di più moti insieme, che una di quelle forze traggan fuori dall' altra con eccesso, e predominio di azione. È quell' eccesso, e predominio con una di quelle specie sopra l' opposta o è costante, ovvero non è che passeggero, e momentaneo. Nel primo caso entrerà la specie stessa in nuova composizione con que' corpi, d' onde tale eccesso proviene, e indurrà in essi mutazione corrispondente al nuovo acquisto, o modo di unione. Nel secondo farà quella specie pronta a trapassare in altri corpi, che per poco superino quel primo eccesso; ovvero scemando in que' primi in qualsivoglia modo quel complesso, d' onde tale eccesso nacque, resterà per naturale virtù la specie

stessa pronta, e spinta a riunirsi colla sua prima opposta, e farà perciò fino al compimento di tale unione capace di dar segni, e prove esteriori della sua forza.

7. Nè deve trascurarsi frattanto, nè porsi in dimenticanza l' opposta specie, da cui fu separata, e tratta fuori la prima. Poichè quella dispiega in tal atto esteriormente tutta l' energia delle proprie forze, e ne fa prova o con altri corpi, come nel caso precedente, o immediatamente con altra elettricità preesistente nella naturale sua quiete, e unione, colla quale s' incontra. Non sarebbe al certo quella capace di sciorre la naturale unione di questa, se l' incontro loro non fosse, che in eguaglianza di particelle, o di masse le une sciolte, le altre fisse, ed unite. Ma vi è la differenza, che continuando gli atti del primo eccitamento, le particelle, o masse, che indi sono sciolte, crescono incessantemente con progressione a quegli atti proporzionata, e in oltre acquistano momento per la figura de' conduttori; e perciò investono, e attaccano da ogni parte in un sol tempo ad una ad una le quiete particelle, e non possono far meno di non smoverle, e separarle. Ed in ciò consiste il giuoco di continuo smovimento, e soluzione di nuova elettricità, che succede ad ogni atto del primo eccitamento, e che prosegue, e cresce, o scema in proporzione, che quello continua, e prende vigore, o si rallenta.

8. Abbiamo dunque in ogni atto, o eccitamento di elettricità due serie, o vie d' azioni; la prima diretta, come nel numero 6 spiegai; indiretta l' altra, siccome dissi in ultimo luogo. E ciascuna di queste serie diretta, o indiretta, immediata, o mediata presenta due opposti andamenti, uno di aumento colla successiva, e continua soluzione di quelle specie, che costituiscono per tal via l' intensità dell' elettrica potenza; l' altro di decremento colla riduzione delle spezie stesse a mutua riunione, la quale costituisce il degradamento de' segni, ossia le resistenze, che ad ogni specie di elettrica potenza si oppongono. Talchè siccome non crescono i segni, se non per l' eccesso di elettrica virtù, che si esterna; così non decrescono se non pel successivo ritorno della virtù stessa alla interiore direzione: e in somma come l' intensità di que' segni risulta dagli eccessi di una sola specie, che rimane sciolta, e forzata di

accumularsi insieme; così la degradazione, e le resistenze, che si oppongono a quella intensità, non dipendono, se non dalla opposta specie, che similmente sciolta, e forzata di accumularsi restituisce gradatamente, e compie in fine la pristina loro riunione.

9. E restringendo queste considerazioni all' elettrica luce, dico, che qualsivoglia azione, o moto tanto della prima sola, come dell' opposta specie di elettricità colle parti di qualsivoglia genere de' corpi si riconosce affatto inetto a dar segni di luce; nè questa ha luogo altrimenti, se non pel moto di riunione d' una specie colla sua opposta, comunque poi si faccia tal riunione o per la prima diretta, o per la seconda indiretta via, che più sopra ho divisato. Onde non v' ha luce altrimenti, finchè la prima scorre nella passeggera unione de' conduttori, e finchè la seconda non è in tale eccesso da smoverne altra, e indi trarre a sè la contraria; e finchè per fine non si riducono all' atto di vicendevole riunione le parti della prima con altre della seconda: nel che consiste l' unità del moto, che più sopra accennai (n. 5.) in mezzo alla varietà dei modi, e delle vie che al moto stesso dispongono, o conducono.

*Legge Quarta.* E le contrarie potenze, che nella riunione loro fanno l' elettrica luce, risiedono senza luce insieme non meno ne' conduttori, che ne' resistenti; e secondo varj rapporti or tutte, ora in parte soltanto si frenano, o si determinano al moto di riunione.

1. In principio a siffatto moto si oppone e la passeggera unione d' una specie con altri corpi, e la tenue quantità dell' opposta, che non è capace di vincere con prevalente forza la naturale unione delle due specie sparse ne' corpi ambientali: come per opposto a siffatto moto di riunione conduce tutto ciò, che o libera la prima da quella passeggera unione, o accresce la somma della seconda; e rende così e l' una, e l' altra capace di smoverne intorno a sè, ed unirsi rispettivamente all' opposta; ovvero di riunirsi a parte a parte direttamente fra loro.

Ma in progresso a questi unicamente non si restringono i modi, che o si oppongono, o riconducono a quel moto di elettrica luce. Ben diversi, e molti sono altri modi che fre-

nano le elettriche potenze, comunque accresciute, e le ritengono in mero sforzo, e pressione; e molti che per opposto le rendono capaci di moto, e di riunione, siccome altrove dirò più opportunamente.

2. Or come non vi è luce, nè altro segno di elettricità, quando immediatamente riposano nella nativa loro unione le opposte specie (*legg. 3. n. 6. in principio*); così quando le specie stesse comunque divise si frenano a vicenda per frapposti ostacoli, e non esercitano le forze loro se non in continuo sforzo, o pressione, possono bensì far moti, e adesione fra i corpi, che le ritengono, e le dividono, ma non fanno mai luce, se non in proporzione dell' effettivo loro moto, e riunione. E qui più che in altre considerazioni è indispensabile non ordinaria distinzione d' idee, e sagacità d' intelletto per ben discernere i varj rapporti delle potenze, che si frenano, e degli ostacoli, che le riducono a semplice pressione; e per riconoscere in oltre secondo que' rapporti le parti, che or solitarie, ora insieme, or con lenta, or con rapida successione passano a riunirsi. Sono adunque in più modi intralciate, e miste insieme le opposte elettricità, ora saturate a parte a parte in ciascuna particella, e si dicono *spente*, nè danno perciò verun segno; ora con tendenza mutua, o *pressione*, e fanno insensibile unione fra le loro particelle, onde non inducono sensibile luce, ma soltanto manifestano sensibili moti, e adesione; ora per fine s' incontrano con notabile moto di riunione, e fanno luce, e scoppio; ed è ciò appunto, che al presente stiamo dichiarando.

3. In fatti nell' esperimento, che nella precedente legge narrai (*n. 2.*), si manifestano per sè stesse evidentemente tre porzioni distinte, ossia tre diversi rapporti di vicendevole freno, e pressione. Il primo fra lo scudo e l' aria ambiente. Il secondo tra lo scudo e la vicina faccia del disco. Il terzo tra le opposte facce del disco. Quanto al primo fra la potenza dello scudo e dell' aria ambiente si manifesta nello scudo stesso e prima, e dopo della sua separazione con moti, che dimostrano la sua specie omologa alla vicina faccia del disco, e si conserva in esso finchè non sia spenta. Si spegne questa con presentare un conduttore immerso nell' aria ambiente allo scudo; poichè fra questi per la condottrice loro na-

tura si muovono per ogni verso quelle opposte potenze, e perciò giunti a certa distanza ne facilitano il moto, e ne compiono la riunione con proporzionata luce, e scintilla.

4. Segue il secondo rapporto tra l'altra porzione di elettricità dello scudo opposta a quella della vicina faccia del disco; le quali porzioni finchè si frenano fanno l'adesione, e colla separazione del disco si pongono in moto, e ne danno corrispondenti segni di scintilla, e di luce (*legg. 3. n. 4. 5*). Ma per intendere e come si frenino finchè lo scudo è a contatto col disco, e come si pongano in moto, quando lo scudo vien rimosso a certa distanza, si rifletta, che nel primo caso ciascun punto della faccia del disco immediatamente agisce contro il sovrapposto punto dello scudo, e perciò l'azione di questo resta così divisa, e diffusa egualmente non fa notabile, nè prevalente moto contro l'uno o l'altro de' sottoposti punti, benchè sieno dotati di contraria elettricità. Rimovendosi poi dal contatto lo scudo, due mutazioni accadono nella sua elettricità, le quali debbono qui partitamente esaminarsi. Le mutazioni sono queste. 1. L'elettricità omologa di ciascun punto nella faccia dello scudo diventa col rimuoverli di questo più vicina fra di sè, che non colla contraria de' sottoposti punti del disco; 2. la faccia stessa in tale separazione non resta più necessariamente piana, e parallela sulla faccia del disco, ma presenta, o prende qualche inclinazione, o prominenza più verso una, o alcune, che verso le altre parti.

5. E in primo luogo nel rimuoversi lo scudo ciascun punto dell'inferiore sua faccia ritiene la primiera sua posizione, e vicinanza per rapporto alla sua specie di elettricità, ma quanto più si rimuove, tanto più ciascuno di que' punti si allontana dai corrispondenti della faccia del disco, ne quali risiede la contraria. Quindi tanto questi della faccia del disco, quanto quelli dello scudo non esercitano più gli uni cogli opposti immediatamente la loro azione, ma bensì per mezzo dell'aria, che fra loro subentra. Frattanto però ritenendo la relativa loro posizione per rapporto alle specie di elettricità, che in ciascuna faccia risiedono, rimane l'azione di quelle nella sua integrità; e perciò quanto più lo scudo si scosta dalla faccia del disco, tanto meno l'una coll'altra si frenano quel-

le opposte potenze , e tanto maggior vigore ciascuna prende per sè stessa , e lo esercita contro l' aria frapposta , e contro i corpi in essa immersi .

6. E benchè ciò si riconosca apertamente dagli elettrici moti , che in simile apparato altrove descrissi (*loc. cit. n. 161. 162.*) , mi piace di confermarlo direttamente con fenomeni di elettrica luce . Dopo che si è spenta nello scudo la omologa virtù coll' opportuno accostamento d' un conduttore (*n. 3.*) , stacco lo scudo dal disco , ma con tale avvertenza , che si scosti egualmente dalla sua faccia appena una linea ; e fermandolo in tale posizione , la prima volta che accosto il dito per toccarlo ne ho una scintilla tenue di luce , ma stridente , e pungente ; e comunque segua poi a toccarlo , finchè si mantiene a quella distanza non riporto più mai altro senso di luce , nè di scintilla . Che se alzo prontamente di più lo scudo dalla distanza di una linea fino ai quattro o sei pollici , al primo accostamento del dito ne riporto una nuova scintilla più lucida , e meno pungente della prima . Se in un sol atto inalzo da principio lo scudo a quest' altezza , ne riporto col dito una scintilla equivalente per sè sola alle due , nelle quali col precedente modo fu divisa .

Nel che è manifesto , che le opposte potenze fra lo scudo e la vicina faccia del disco , siccome interamente si frenano col mutuo contatto , così proseguono a frenarsi in parte a certa distanza ; e in fine tanto meglio per sè stesse si dispiegano , quanto l' una dall' altra si allontana .

7. Passa ciò non ostante tra lo scudo e il disco la differenza , che in quello come conduttore ha facile moto per ogni verso l' elettricità della sua faccia ; il che per opposto non accade nella faccia del disco per essere di resistente natura . Quindi è , che combinandosi questa differenza colla seconda mutazione , che nella separazione accade (*n. 4.*) , e consiste in qualsivoglia inclinazione , o prominenzza della faccia dello scudo verso la sottoposta faccia del disco , per questa via si toglie l' eguaglianza delle distanze , e del vicendevole freno fra ciascun punto di contraria potenza nelle opposte facce ; e perciò quella elettrica forza , che per ragione delle distanze e per la conducente natura dello scudo si trova in esso mobile , passa per quella inclinazione , o prominenzza coll' eccesso suo



fuo a riunirli con l' opposta ne' sottoposti punti dello scudo, e fa in tal atto luce, e scintilla.

8. Ciò che direttamente diciamo delle potenze dello scudo, e della sottoposta faccia del disco, in simil modo s' intenda dello strato d' aria frapposto nella loro separazione secondo le reciproche, e indirette azioni previamente dichiarate nella Legge seconda ( *ivi n. 2. e. f.* ). Nè fra queste e quelle considerazioni passa altra differenza, se non che tutte ivi sono di resistente natura le facce separate, mentre qui già osservammo ellere lo scudo un conduttore. Onde pel raddoppiamento, e l' interposizione del mezzo, che oltre alle corrispondenti differenze di grossezza, e di figura, e di varia capacità resistente nelle sue parti, introduce la mobilità somma delle medesime, ne risultano indi nuove combinazioni di moto fra le opposte potenze per far luce, e scintille.

9. Dipende il numero di tali scintille dal numero de' casi, che nella separazione introducono qualche eccesso di forza fra le finitime potenze. La grandezza di ciascuna scintilla corrisponde alla quantità, e mobilità di quegli eccessi di forze. Ed è in simili eccessi da notarsi una reciproca proporzione colle resistenze del mezzo frapposto. Poichè quanto maggiore si fa la distanza fra le contrarie forze nelle facce del disco, e dello scudo, tanto cresce la grandezza del frapposto mezzo resistente. Onde da questa stessa reciprocità nascono altre varietà nel numero, e nella grandezza delle scintille; e in conformità di tali variazioni sono nuovamente varj i residui di elettriche potenze, che si trovano nello scudo, e nel disco separati in fine a prima distanza.

10. Che se queste colle osservazioni si confrontino espresse in fine della precedente Legge ( *ivi n. 6. 7. 8. 9.* ) comprendiamo universalmente il modo d' ogni luce, e scintilla, che dalla elettricità dipende. Poichè i conduttori, che ad un corpo elettrico si presentano, allomigliare si debbono allo scudo or appressato, or rimosso dalla faccia del disco; e non altrimenti, che questo le stesse vicende subiscono di elettricità omologa, e contraria; e similmente secondo il diverso loro stato d' isolamento, distanza, e figura contraggono tale moto di contrarie elettricità, quale per l' elettrica luce si richiede. Troppo mi dipartirei dallo scopo presente, se ciò imprendessi

a dimostrare più estefamente, che avrà luogo nell' analisi del premesso esperimento.

11. Ma per compiere al proposito nostro que' rapporti, che nell'esperimento stesso da principio accennai (n. 3.) non rimane che l' ultimo rapporto fra l' elettricità delle opposte facce del disco. Fra le quali s' introduce moto coll' arco, o con altra somigliante via, che dall' una all' altra armatura si applichi, o si frapponga. L' arco però è sopra ogni altro modo attissimo per la sua figura a dar cominciamento al moto di vicendevole unione, ed a continuarlo con tale rapidità, che si manifesta colla scintilla, e collo scoppio.

12. Si distinguono evidentemente l' uno dall' altro questi tre rapporti, e partizioni di elettricità non meno nel precedente esperimento, che in ogni altra maniera di elettrica luce, purchè in debita figura, e distanze, e isolamento si presentino i corpi, e si esplorino le loro vicende con ordine conveniente. Poichè qui per esempio, se cominciate dal terzo rapporto, confondete con questo insieme il primo, e non distinguete più, se non il secondo. Se incominciate dal secondo, confondete questo col primo, e indebolite frattanto ad ogni atto vie più anche il terzo. Al contrario riconosciuta la prima porzione nello scudo posto a suo luogo, e spenta questa col contatto, passate colla separazione a riconoscere la seconda; indi riposto lo scudo, e appressando allo stesso l' arco procedente dall' opposta faccia, riconoscete la terza porzione, ed in tal atto rinnovate il secondo rapporto nelle successive separazioni.

13. A rendere in fine sensibile con facilità, e costanza l' elettrica luce due circostanze principalmente concorrono, e sono 1. certa quantità di elettriche potenze, 2. e certo intervallo fra l' una e l' altra. E' necessaria la distanza, o la divisione d' intervallo perchè l' una, e l' altra si ponga in libertà di moto, come più sopra spiegai (n. 1. 6. 7.); ed è necessaria del pari certa quantità, acciò coll' eccesso suo direttamente, o indirettamente quel moto determini, che ivi pure dichiarai (n. 8. 9.); ed è pur necessaria in fine tale grandezza d' intervalli, e di azioni, che faccia notabile impressione su i nostri sensi. Poichè le indicate circostanze nella facilità, e costanza loro a produrre l' elettrica luce soggiacciono

a molte vicende non meno per la grandezza, figura, e qualità de' corpi, che per le qualità del mezzo resistente, e per lo stato dei sensi, onde gioverà considerarle alquanto più distintamente nelle seguenti Leggi.

*Legge Quinta.* Nè in qualsivoglia moto di riunione delle contrarie potenze è visibile l' elettrica luce, se non fra certi intervalli, entro, e oltre de' quali il moto stesso si compie senza altro senso di luce.

1. Primieramente per le superficie de' conduttori, come sono i tubi, gli archi, e simili, si riuniscono le contrarie elettricità senza verun senso di luce, benchè tali superficie abbiano innumerabili pori, che altro non sono, se non tenui intervalli, che ne interrompono la continuità. Si caricano per via di tubi, o archi, che siano a contatto con le alterne armature, più bocce, o quadri successivi, e si scaricano similmente senza luce, ove non s' incontrino le opposte elettricità a certe distanze fra l' una e l' altra estremità, o finitima superficie di que' conduttori, e delle armature.

2. E per dimostrare, che tanto nelle superficie de' conduttori, come nelle armature de' quadri si fa tal moto di riunione, il quale non rende sensibile impressione di luce per la indicata tenuità de' loro pori, o intervalli, abbiamo in pronto alcuni facili artifizj per rendere quegli intervalli gradatamente capaci di porre in vista la luce delle contrarie potenze, che ne' medesimi si riuniscono. Sostituite al tubo, o all' arco di unita superficie una catena di sottil filo metallico, la quale non sia punto tesa, e faccia perciò intorno al tenue contatto de' suoi anelli ogni varietà d' intervalli successivamente maggiori; ed osserverete tra l' uno e l' altro anello in certa grandezza di quegli intervalli manifesta luce. Applicate dopo ciò successivamente alcuni peli a quella catena, i quali rendendola grado grado più tesa accrescano il contatto de' suoi anelli, e scemino il numero, e la grandezza di que' primi intervalli, e vedrete nella proporzione stessa scemarsi, e in fine sparire que' punti luminosi, che tra essi brillavano.

3. Se poi vi piaccia più vago, e grande spettacolo di lucidi punti, in luogo della foglia di stagno, di cui si fa l' ordinaria armatura de' quadri, sostituite nella faccia superiore uno strato uniforme, e molto raro di limatura metallica, tal-

chè vi formi tra que' briccioli un tessuto d' intervalli di ogni grandezza; e nell' atto che si scarica il quadro in moltissimi intervalli di tutta quella faccia comparirà viva luce di riunione. In una fascia della faccia stessa accrescete lo strato di limatura, sicchè non lasci se non pochi, e tenuissimi intervalli; e resterà per la tenuità loro quella sola fascia priva di luce. Rarefate in un' altra fascia assai più quella limatura, sicchè tra que' briccioli non restino, che intervalli vie più grandi de' primi; e vedrete in questa fascia stessa scemare, e mancar in fine ogni luce per soverchia grandezza di quegli intervalli.

4. Che se in fine l' intera faccia si cuopre di tanta limatura, che equivalga nella tenuità de' suoi intervalli ad una ordinaria superficie metallica, si avrà per essa la piena scarica con tenuissima, o niuna luce. Che se all' opposto nell' intera faccia si renda rarissima quella limatura, ogni volta che si tenta di aver la scarica, non si avrà se non in parte; ma a questa parte non corrisponderà giammai altrettanta luce per essere quegli intervalli di soverchio grandi per non renderla abbastanza sensibile.

5. Nè ci mancano dirette sperienze per confermare quest' ultimo assunto, cioè, che oltre certa misura d' intervalli si compie ne' medesimi senza notabile senso di luce la riunione delle contrarie potenze. Qualunque volta tentiate di cavar la scarica tra le opposte facce d' una boccia, o d' un quadro carico, presentando lentamente l' estremità dell' arco a certa distanza fuori dei limiti dello scoppio, s' indebolisce ad ogni atto la forza della carica; nè per tale indebolimento, che pur si fa colla riunione d' una parte delle contrarie potenze, apparisce verun indizio di luce, purchè tra l' estremità dell' arco e l' armatura resti certa distanza conveniente alla residua forza di carica; talchè con simili atti con qualche pratica replicati resterà in fine esaurita l' intera carica senza aver dato senso di luce. Ma in tutte le distanze alquanto minori cominciano tra l' arco e l' armatura a comparire ad ogni atto fossj, e sprizzi di luce, i quali poi a distanze ancor minori scoppiano in fine in piena scintilla.

6. Che se queste, e somiglianti sperienze per se stesse la necessità dimostrano di certa grandezza d' intervalli, perchè il moto delle elettriche potenze si manifesti con fenomeni di

luce ; se poi si compongano colle osservazioni premesse nella Legge quarta (*ivi n. 5. 6. 7. 8. 9.*) ci fanno universalmente conoscere con qual legge in que' diversi intervalli il moto stesso si determina fra le opposte potenze, che previamente si frenano a vicenda con mutua tendenza, e pressione. Imperciocchè siccome la *pressione* sussiste, finchè tutti i punti d'una specie sono più vicini ad altrettanti della specie opposta, che non sono molti insieme d'una specie stessa vicini fra loro ; così la pressione si cangia in *moto* tostochè per qualsivoglia causa o di mutate distanze, o di mutate figure molti insieme i punti d'una specie sono più vicini fra loro, che non con altrettanti dell'opposta specie: onde ne risulta l'eccesso, e preponderanza di forze libere da ostacoli, e per conseguenza il moto.

7. E fra le indicate differenze richiamiamo qui distintamente quella fra i conduttori e i resistenti; per cui in quelli ciascun punto, che per mutate distanze resta libero dalla contraria potenza, può per la condottrice sostanza muoversi in ogni verso insieme agli altri punti simili, e liberi egualmente; ne' resistenti al contrario, benchè ciascun punto resti libero dalla contraria potenza, non ha perciò libertà di moto insieme agli altri per la resistente natura della sostanza, in cui risiedono, la quale è incapace di condurli, e di raccoglierne insieme l'azione. Quindi niuno v'è, che non intenda, come si abbia più viva e forte luce dai conduttori, che dai resistenti non armati; e come per la stessa ragione in quelli tanto più presto, che in questi, si estingua la facoltà di dar luce, mentre ne' primi in un sol atto si compie ciò che ne' secondi non si esaurisce talvolta neppur con sei, nè con dieci.

8. E per la differenza medesima tra le particelle di qualsivoglia resistente sia fluido, o solido, e tra le facce di resistenti diversi a tenuissime distanze restano frenate le contrarie potenze, essendo queste così divise, e separate per la natura stessa di quelle sostanze in minimi punti quasi solitarij, e incapaci di cospirare in un sol atto, o momento. All'opposto i conduttori immersi in quelle fluide particelle, o applicati su quelle facce resistenti ne raccolgono intorno a sè le parti divise, e ne compongono i momenti di maggior azione. On-

de la preponderanza di momento, e perciò il moto tra quelle contrarie potenze procede d' ordinario, e si determina per la via de' conduttori.

9. Ma per dedurre con qual legge progrediscono que' moti, e come si compiono or con niuno, or con tenue, or con vivido senso di luce, d' uopo è unire insieme varie considerazioni, 1. tanto della attività, e uso degli occhi, e dello stato di oscurità previa e presente in ogni particolare osservazione; 2. quanto della quantità stessa di elettricità, che in tal atto si pone in moto; 3. e in fine della qualità, e resistenza de' mezzi frapposti. La prima considerazione sarebbe estranea al nostro proposito, appartenendo all' Ottica, e alla teoria della visione, onde basterà qui averla accennata, nulla potendosi aggiungere alle cautele già descritte da *Newton* per la solare, e da *Beccari* per la fosforica luce; e delle due ultime profugiamo a dire nella seguente Legge.

*Legge Sesta.* E gl' intervalli di elettrica luce non dipendono infine, che dalla quantità delle contrarie potenze, che per quelli si muovono, e dalla qualità delle sostanze, che que' mezzi costituiscono.

1. Dal complesso d'ogni genere di sperienze, che ne' precedenti capi tentate abbiamo per rapporto agli intervalli di elettrica luce, risulta, che seguono essi certa diretta proporzione colla quantità delle elettriche potenze, che per que' medesimi intervalli prendono moto. Poichè siccome nelle serie di que' capi notai diligentemente le distanze corrispondenti alla grandezza delle cariche impresse; così del pari osservai, che colla grandezza stessa delle cariche progrediscono a maggiori intervalli le apparenze di luce, talchè come ne' più grandi intervalli si estendono con accrescere la somma, e la mobilità delle contrarie potenze, così ne' minimi si rende la luce stessa insensibile con diminuire la somma, e la mobilità delle medesime.

2. E quanto alla somma si riconosce essa, e si misura col numero de' giri elevato a certa potenza, e moltiplicato pel valore di ciascun giro. E la mobilità non meno dipende dalle specie loro, e dalla qualità, e forma de' corpi, ne' quali esse risiedono, che dalla qualità de' mezzi, pei quali si uniscono. Della specifica loro mobilità, e della forma de' corpi

oltre a ciò, che detto ne abbiamo ne' precedenti capi, diremo più opportunamente nell' articolo seguente rintracciando le particolari leggi di que' fenomeni . E circa la qualità dei mezzi si distinguono questi comunemente in conduttori , e resistenti , e a tenore di simile partizione si stabiliscono gli ultimi unicamente idonei a procurar elettrica luce , e inetti que' primi . Simili conclusioni però non sembrano dedotte che per illusione di vocaboli , e per mal concepite sperienze ; assumendosi troppo di leggeri , che non nasca elettrica luce , se non per densità di un fluido cagionata dagli ostacoli , o per attrito dello stesso , o per altro somigliante giuoco contro le resistenze .

3. Più ragionevole sarebbe di ripeter tal luce dalla accensione causata nell'unione delle contrarie potenze , secondo che più plausibilmente a' nostri tempi si spiegano simili apparenze lucide in ogni altro genere di combustione . Che così entrando l' elettrica luce nella propria , e più vera teoria della combustione , rimarrebbe sincera ogni altra espressione di elettrica teoria , nè saremmo forzati di moltiplicare in questa le contraddizioni , e gli errori cogli avanzi di antiche prevenzioni erronee dell' altra . E per tal modo considerando la mutua azione delle elettriche potenze tanto fra di loro , quanto colle parti de' corpi , ne' quali s' incontrano , siccome accennato abbiamo a suo luogo ( *legg. 2. n. 2. legg. 3. n. 6. 7.* ) non resterebbe altra principale differenza tra i conduttori e i resistenti , se non che in quelli si fa la semplice , o diretta azione delle elettriche potenze già sciolte , e diffuse ; in questi si fa doppia per l' indiretto smovimento , e soluzione di simili potenze , che ne' medesimi s' incontrano . Onde ne' primi non resiste , nè si oppone alla loro riunione , se non la passeggera , e parziale combinazione delle stesse colle parti de' conduttori ; ne' secondi al contrario incontrandosi l' elettriche potenze già sciolte invece d' impiegare a vicenda le mutue forze si trovano forzate ciascuna dalla sua parte a smoverne altre , colle quali non si riuniscono se non per raddoppiamento di quella prima diretta azione .

4. Ed a questo raddoppiamento si riduce la distinzione de' resistenti da' conduttori ; e nasce indi in que' primi la difficoltà di porgere immediato , e diretto passaggio alle contrarie potenze ,

nel che consiste la resistente natura, e la maggior somma, e rapidità di effetto, quando in fine tal passo si apre con simile raddoppiamento di azioni, e la capacità di raccogliere, e dividere nelle facce di lamine resistenti le cariche, siccome più distintamente vedremo nella Teoria delle elettriche scosse. Ne' conduttori all'opposto vi è pure qualche grado di resistenza, ma per diversa ragione, che non tende, se non a scemare in parte la mutua diretta azione delle elettriche potenze, nè può mai accrescerla, o raccogliarla con partirne indirettamente gli effetti.

5. Quindi sussisterebbe la distinzione di gradi varj tanto ne' resistenti, come ne' conduttori; ma nella varietà de' loro gradi procederebbero essi in serie contraria. Talchè la stessa dose di elettriche potenze darebbe tanto meno luce nel riunirsi fra la sostanza d'un conduttore, quanto questo fosse condottor più eccellente; e per opposto luce tanto maggiore nel riunirsi tra la sostanza d'un resistente, quanto questo fosse nel più alto grado di resistente natura. Il che si troverà coerentissimo alle sperienze, quando in queste di proposito ci occuperemo.

6. Sarebbe poi in manifesta contraddizione coi fatti più insigni, e costanti, chi non conoscendo altro, che sperienze inadeguate, e confuse persistesse tuttavia nell'errore che le elettriche potenze, quando pel mezzo de' conduttori si riuniscono, non facciano in essi veruna luce. Risplende vivissima l'elettrica scintilla attraversando l'acqua, e il vapore, corpi conduttori, come attraverso dell'olio, e dell'aria, che sono resistenti. E nel risplendere trasforma simili sostanze in altre finora non osservate, nè conosciute. Nel vapore poi, e nell'aria, quando è ridotta a tale rarità, che incapace sia di frenare una carica nascente, si riuniscono le opposte potenze a grandi intervalli, ed empiono di luce tutta la capacità di grandi tubi, o globi di vetro, nei quali l'aria sia opportunamente rarefatta per prestarli a quel facile raddoppiamento di azione, ed a questo si riducono i fenomeni di elettrica luce da *Canton*, e da *Wilson* descritti, i quali furono poi chiamati *atmosfere*, o *conduttori luminosi*.

7. Ma ritornando ai conduttori delle elettriche potenze con grandi scariche s'infuocano, e si fondono, e si disperdono  
in



in fine con vivissima luce i metallici fili, non altrimenti che i sottili strati di resina, o di vetro. Conobbe *Priestley* con particolari cimenti, che maggior carica vi vuole ad infuocare, e fondere quel metallo, che è più conduttore, come maggior forza vi vuole per rompere un sottile strato di vetro, che non un eguale di resina. Onde accrescendo con certa legge la somma delle forze, ossia la carica reciprocamente colla conduttrice facoltà de' metalli, e direttamente colla resistente natura delle resine, e de' vetri, avremo luce in tutti i gradi de' conduttori del pari, che in tutti i gradi de' resistenti pel moto delle contrarie potenze; e pel solo aumento di queste si ragguaglieranno i fenomeni di elettrica luce attraverso quelle differenti sostanze. E sarà per tal modo la differenza loro ridotta a soli gradi, come la proporzione loro non consiste, che nel diverso modo di resistere.

8. Le elettriche potenze adunque e quando sono tenui, e quando sono grandissime, e quando sciolte, e accumulate si trovano in conduttrici sostanze, e quando intralciate restano, e divise fra i punti, o strati delle sostanze resistenti, non fanno luce giammai, finchè si frenano a vicenda o l'una coll' altra, o colle particelle di altre sostanze. Nasce qui naturalmente la questione, *se risplendano esse quando sono solitarie, cioè l'una dall' altra distinta, e indipendenti?*

Prima di entrare in tale questione più, e più altre si suppongono previamente definite, e sono:

(a) Se sia la luce semplice effetto d' una sola sostanza, ovvero risulti da mutua, e composta azione di più sostanze.

(b) Se possa l'una, o l' altra *specie* di elettricità sussistere, o raccogliersi distinta, e indipendente dall' altra, e quali sieno i mezzi di ottenere siffatta separazione.

(c) E quanto ai *mezzi conduttori*, se non concorrano essi che passivamente con mera permeabilità meccanica, ossia col prestare libero passo pei loro pori.

(d) Se concorrano in oltre con mutua azione permanente, o momentanea.

(e) Se la loro presenza, o figura, o azione concorra a modificare l' azione delle resistenti particelle, o sostanze fraposte, o ambienti.

(f) E quanto ai *mezzi resistenti*, se la loro influenza sul-

la elettricità non sia che di meccanica impermeabilità , ossia di mero impedimento di trapassò.

(g) Se in oltre influiscono con mutua azione.

(b) Se questa si faccia colle particelle stesse componenti di quelle resistenti sostanze , ovvero con altre per esse sparse .

(i) E per comporre tutte insieme le considerazioni delle elettricità, e dei mezzi, se tal sorta di azione si distingua dall' azione mutua colle condottrici sostanze.

(k) Quali mutazioni nascano e nelle condottrici, e nelle resistenti sostanze per simili azioni.

(l) Se le mutazioni stesse non consistano che in differenze de' gradi .

(m) Se questi gradi sieno principj di trasformazione, talchè ogni elettrica azione cominci a sciorre, e ad alterare le sostanze, colle quali si esercita; e perciò tali alterazioni accresciute in fine risolvano, e distruggano non meno le condottrici, che le resistenti sostanze. Onde non sia l' eccitamento di elettricità, se non l' incominciamento di alterazione, e distruzione delle sostanze, che a tal atto concorrono.

(n) Se tali risoluzioni per elettrica virtù nascano da maggiore, o da minore affinità colle prime parti risolvanti, cioè se più facile sia la risoluzione, e trasformazione delle resistenti, o delle condottrici sostanze.

(o) E per fine se, e come ciò concorra ad accrescere, o a scemare, e spegnere gli esteriori segni di elettricità.

9. Ad altre Memorie la discussione appartiene di tante questioni; e si riducono in esse a precisa espressione que' comuni termini troppo confusi *di dare, e ricevere; condurre, e resistere; condensare, e rarefare; frenare e muovere; eccitare, e spegnere; torre, e restituir l'equilibrio*. Nè previamente possiamo dir nulla in proposito della questione da principio accennata. E perciò ritenendo la considerazione della elettrica luce, come un fenomeno, concludiamo dal complesso de' fatti espressi nelle precedenti leggi, che non ha essa luogo altrimenti, se non nell' atto, e pel moto, con cui l' una all' altra si riuniscono le contrarie elettricità. Comunque poi diretto, o indiretto, semplice, o duplicato sia quel moto nella varia natura, e forma de' mezzi, o intervalli frapposti, non vi è altra differenza per rapporto alla loro quantità, cioè

quando sono grandi, o raccolte, e quando sono tenui, o intralciate, se non che nel primo caso molte insieme delle opposte particelle si rivolgono, e si muovono in fuori, o attraverso le resistenze, e gli ostacoli, e perciò fanno vivo senso di scintilla; nel secondo caso per opposito non sono capaci che di moto lento, e diviso, il quale perciò si compie senza notabile impressione di scintilla, e di luce.

## A R T I C O L O II.

### *Leggi de' particolari fenomeni della elettrica luce.*

**N**EL precedente articolo non incontrai vestigio di altrui pedate; qui molte si presentano, ma piuttosto a salti, e a passi consuli, che per traccia di previa direzione. Gioverà pertanto andar circospetto, e senza trattenerci di soverchio in qualche sentieruolo più trito, e senza paventar l'accesso delle più ardue, ed inospite vie.

*Legge Prima.* Occorrono nella stessa specie di vitrea elettricità apparenze di luce, che sono varie in grandezza, figura, suono, e colore.

1. Oltre alle scintille, che scoppiano brillanti in pieno e tra gli elettrici conduttori, e tra i limiti delle elettriche scariche, si manifestano nelle tenebre con maggior distinzione le differenze di elettrica luce. Benchè tra quelle prime non manchino differenze d'ogni genere, siccome ne' precedenti Capi notai, e dovrò più distintamente notare nella terza Parte; ciò non ostante le ultime sole sembrano proprie del presente articolo sì perchè nelle tenebre più compiutamente si discernono i lucidi fenomeni, sì ancora perchè le ultime, e non le prime d'ordinario s'introducono come prove, e criterj delle opposte specie di elettricità, e si producono per definirne la diversa natura.

Cominciando adunque dal conduttore di vitrea elettricità è certo, che sulla metallica punta da esso procedente, a cui si presenti a certa distanza altra sferica, o piana superficie condottrice, comparisce nelle tenebre un fascio di lucidi raggi 1. ampiamente divergenti in forma conica coll'apice alla

punta metallica, 2. instabili con vago fridore, o croscio errante verso l' esteriore base, 3. di colore non candido, ma di varie tinte fra il giallo, rosso, e violetto.

Al contrario sulla metallica punta, che dal suolo si presenta allo stesso conduttore, splende una luce 1. ristretta di sferoidea figura, 2. costante nella sua forma con un sibilo, e quasi ronzio continuo all' apice della punta stessa, 3. di candido, vivo colore.

Quel primo fascio si chiamò *pennello*; questa seconda luce si disse *stelletta*.

2. Sarà quello adunque il criterio di vitrea; e questa il criterio di resinosa elettricità? ed anche ciò supposto, farà il pennello sufficiente prova di un fluido solo, che esce; e la stelletta argomento dello stesso fluido, che entra per quelle punte? Non lascierebbe di essere un gran salto dalla prima alla seconda conclusione. Ma innanzi di misurar la connessione di queste illazioni, chiederò in ordine alla prima, se per fissare un criterio di specie diverse basti un fatto isolato comunque certo, e costante? ovvero se d' uopo sia di accertare, ed estendere il fatto stesso del pari costante in tutte le varietà di modi, e di circostanze? Poichè se ad un solo modo si restringe, farà criterio di quel modo, e non mai della specie, nè degli altri modi. E dovrà perciò rintracciarsi tale criterio della specie, che adeguato sia per ispiegare non meno quel modo, che gli altri quanti sono diversi, e del pari certi, e costanti. Altrimenti a quante specie non andiamo incontro, se per ciascun modo s' induce un criterio di specie diversa? Rintracciamo dunque le principali differenze de' modi prima d' ingolfarci ne' criterj, e nella specie.

3. A quella punta, che dal conduttore procede, altra ne presento direttamente in distanza più di due piedi, e comincia a comparir in quella una stelletta; indi un tenue pennello non altrimenti, che quando si presentano alla stessa in minori distanze le sferiche, o piane superficie. Ma appressando passo passo la punta presentata dirette, che la stelletta di questa divora l' opposto pennello. Poichè si contrae esso notabilmente, e presto si riduce a non mostrar di pennello altro vestigio, che i colori. E la stelletta coll' avvicinarsi ingrossa,

e toglie infine anche i colori a quell' *avanzo di pennello*, talchè si confondono l' una coll' altra le loro apparenze.

*Abbiamo dunque sulla punta procedente da vitreo conduttore per lungo tratto un tenue avanzo di pennello, ed in principio, e in fine la stelletta in tutto pari all' opposta.*

4. Tolgo via ogni punta, nè altro pongo in opera, che globi di varie grandezze, e piane superficie. (a) Presento al globo grande terminante il conduttore la piana armatura del quadro, come nella preparazione della serie 19. nè mai da esso, nè dall' opposta armatura apparisce pennello. (b) Sostituisco al più grande gli altri globi succellivamente minori; e da questi parte un vero pennello contro l' opposta armatura. (c) Quanto il globo è minore segue a dar pennello, e ad imprimere carica nell' opposto quadro in distanza maggiore.

*Non nasce pertanto il pennello dalle punte sole, ma anche dai globi terminanti il vitreo conduttore. Soltanto dipende da certa grandezza de' globi, e da certe distanze dell' opposta superficie.*

5. Collo stesso apparato ora scemo, ora accresco la dose, ossia quantità di eccitamento a ciascun giro del disco. (a) Scemando cessa in fine il pennello anche ne' globi più piccioli; (b) accrescendo comparisce il pennello ne' globi succellivamente più grandi; (c) e lo stesso ne' più piccoli suffiste anche rimosso il quadro a distanze tanto maggiori.

*Onde il pennello ne' globi procedenti dal vitreo conduttore non solo da certe grandezze, e distanze dipende, ma in oltre da certa quantità di elettrica potenza.*

6. Presento or al globo grande, or ai fianchi dello stesso conduttore un globo grosso mezzo pollice (a) nè mai da quel globo grande, nè dal conduttore vedo pennello: (b) all' opposto su questo globetto presentato splende, e stride più dell' ordinario fino alla distanza di due pollici un ampio pennello; (c) ed ho simile pennello con globi presentati anche grossi due pollici a distanze minori.

*Quindi il pennello non è proprio soltanto de' globi di vitrea elettricità, ma anche de' globi opposti.*

7. Sul giogo dello stesso conduttore fisso un globo grosso mezzo pollice, e presentando a questo verticalmente or l' uno, or l' altro de' globi precedenti, (a) non solo in que-

sti, che si oppongono, ma insieme nel primo, che sul conduttore fissai, brillano a certe distanze ampj, ed opposti pennelli, (*b*) nè vi è differenza, se non che nel globo di vitrea sono anzi meno vivaci, e meno stridenti, e non scompaiono, che a minori distanze.

*E si raddoppia così in un sol atto nelle opposte specie, ed in ciascuna insieme il pennello.*

8. Cangiai l'apparato, e feci terminare il conduttore in superficie piana coll'armatura di quarto opposta al quadro verticale, come nella preparazione 20, e presentando globi di varia grandezza al tubo, e all'armatura di quarto (*a*) non mai comparisce pennello nè da questa al quadro, nè da questa, o dal conduttore verso i globi presentati; (*b*) e sbuffa, e frigge per opposto strepitosamente a distanza fino di tre pollici il pennello dai globi stessi, che si presentano.

*Ed è così invertita la sede, e l'espressione del pennello.*

9. Ritorno alle punte non più acute, ma smussate, e scabre. Per raccoglierne in breve i risultati, vedo ampj pennelli non solo in quelle, che dal conduttore procedono, ma dalle stesse presentate a varie distanze or al globo, or ai fianchi, or a simili punte del conduttore. Insigni oltre modo sono, e stridenti i pennelli sulla punta di uno, o anche di più diti, che disgiunti si presentano (*a*) all'armatura di quarto descritta nel numero precedente; (*b*) ovvero alla piana superficie del disco in quella parte, che girando esce fuori dei cuscini, quando è assai viva l'elettricità.

*Non è in somma il pennello soltanto proprio delle punte di vitrea elettricità, ma anche delle opposte.*

10. E quanto alla stelletta ben lungi di essere unicamente addetta alle punte, che al vitreo conduttore si presentano, riduco io ai caratteri, ed alle apparenze di semplice stelletta ogni luce, che dal vitreo conduttore procede, purchè opportunamente (*a*) o si scemi la dose di elettricità; (*b*) o si accresca il numero, lo smussamento, e la scabrezza delle punte da esso procedenti; (*c*) o infine or più, or meno si accostino i conduttori presentati, e si variino così i limiti, e la perfezione del mezzo isolante.

*Nè la stelletta è altrimenti propria delle sole punte, o scabrezze presentate, ma delle punte ancora, e scabrezze spettanti al conduttore di vitrea elettricità.*

*Legge Seconda.* Nella stessa vitrea elettricità si tolgono, s' invertono, e si raddoppiano le apparenze di pennello col variare 1. la figura, 2. o la grandezza de' conduttori, 3. o la quantità di eccitamento, 4. o gli intervalli, e la perfezione del mezzo ambiente.

In somma tutto ciò, che scema la prevalenza del momento in qualsivoglia preparazione, e ne accresce il momento nell' opposta preparazione, o nel mezzo ambiente, tutto cospira a trasformare in quella prima la stelletta in pennello.

*Legge Terza.* E con somiglianti modi nella specie stessa s' invertono, si tolgono, e si raddoppiano le apparenze di *stelletta*.

1. Questa, e la precedente legge risultano ad evidenza dalla dimostrazione della prima. Ed in ciò che riguarda la varia proporzione di elettrica potenza per torre, o raddoppiare, o invertire le apparenze di pennello, e di stelletta, lo verificai non solo nella preparazione 4 e 5, ma similmente in tutte le corrispondenti.

2. E per rapporto alla perfezione del mezzo ambiente debbono qui richiamarsi le osservazioni premesse nell' Art. 1. Legg. 6. n. 5. e 7. Poichè siccome per la diversa perfezione dei mezzi variano le generali apparenze di elettrica luce, così riconobbi nelle particolari forme della luce stessa le mutazioni corrispondenti.

3. Onde per trasformare il pennello in stelletta non altro si richiede, che accrescere il momento nei rispettivi conduttori, o diminuirlo nel mezzo ambiente.

*Legge Quarta.* Nè minori sono le varietà dei modi di togliere, invertire, e raddoppiare le differenze di luce, per le quali si vorrebbe distinguere la resinosa dalla vitrea elettricità.

1. La punta procedente da conduttore di resinosa elettricità presenta nel suo apice la *stelletta*; e per opposto la punta al conduttore stesso opposta estende innanzi a sè il *pennello*. E queste differenze, che si oppongono alle prime di vitrea elettricità (*legg. 1. n. 1.*) sono al pari di quelle certe, e costanti nel modo loro. Non basta però un modo solo per caratterizzare la specie, massime quando in tutti gli altri modi si tolgono, s' invertono, e si raddoppiano le differenze del primo. Indicano al certo le differenze di ciascun modo qualche differenza nella specie, di onde quel modo procede, e

ben lungi dall' indebolire questo canone di fisica investigazione, ammetto anzi, e stabilisco generalmente, che per rintracciare le specifiche differenze delle cose non ha il Fifico altre vie sicure, se non per le differenze dei modi loro. Ma dico infine, che per fissarne in un sol modo il criterio della specie forza è, che quell'unico modo sia tanto costante, quanto lo è la specie medesima; e che unico sussista in tutte le altre varietà, alle quali la specie stessa soggiace. Or come ciò non ebbe punto luogo nella vitrea, vediamo qual costanza serbi nella resinosa.

2. Alla punta, che dal conduttore di resinosa elettricità procede, oppongo un' altra punta procedente dal quadro, come nella preparazione della serie 6. E cominciando dalle più remote distanze (*a*) sulla punta del quadro, che alla resinosa si oppone, non vedo il minimo indizio di luce, non che di pennello, finchè non arriva quella punta a distanza dell' altra circa d' un piede. (*b*) Quindi comincia su quella a comparire una tenue stelletta, che va lentamente accrescendosi mentre più si appressa, senza però mai prendere il minimo cenno di pennello appressandosi perfino al contatto della prima. (*c*) Al contrario sulla punta di resinosa elettricità brilla, benchè il quadro sia distantissimo, una viva stelletta con sibilo già notevole, quando l' opposta è ancor più distante d' un piede, ed imprime così a questa distanza nell' opposto quadro notevole carica. (*d*) Ed appressandosi vie più l' opposta punta col rinvigorirsi in questa la stelletta, dirette, che trae fuori dalla resinosa un' *orditura di pennello*, che tale si manifesta in fine colla figura, benchè non tanto grande, collo stridore, e colla varietà de' colori.

*Abbiamo dunque la punta opposta alla resinosa senza veruna apparenza di pennello, e colla sola stelletta dai primi fino ai minimi intervalli; e per opposto nella punta resinosa coll' appressarsi di quella prende vigore l' orditura di pennello.*

3. Tralascio per brevità altre analoghe combinazioni di punte; e passo ai globi di varie grandezze, e alle piane superficie. Oppongo al conduttore terminante in grosso globo il quadro verticale come nella preparazione della serie 15. (*a*) Talvolta dal centrale punto opposto dell' armatura sbuffa da principio un pennello verso il globo; ma il più delle volte



volte nel successivo accostamento dal globo stesso stride , e si estende dal globo resinoso verso l' opposta armatura un ampio pennello. (b) Presento al globo del tubo un globo grosso due pollici , e poi altri minori ; e da questi più di raro , e più breve , e soltanto a data minor distanza sprizza il pennello ; sprizza all' opposto più frequente , e più continuo , e in maggiori distanze dal globo grande resinoso . (c) Adatto sul giogo del conduttore un globetto di mezzo pollice , come nella Legge 1. n. 7. , e presentando a questo altri globi di varia grandezza non mai in questi , e sempre in quello a varie distanze apparisce il pennello .

*Si ha pertanto il pennello non solo dalle punte , ma dalle piane superficie , e da' globi opposti alla resinosa elettricità . E viceversa da' globi di resinosa elettricità parte con più costanza , e a maggiori distanze il pennello , che non dagli opposti . Ma nell' uno e nell' altro caso dipendono quelle apparenze da certa distanza , e grandezza di que' globi , e delle superficie .*

4. Collo stesso apparato , e nelle stesse combinazioni facendo or più , or meno vivo l' eccitamento di elettricità in ciascun giro del disco , riconosco , che non dalle sole grandezze , e distanze di que' globi , ma da certa quantità di elettrica potenza il pennello , e la stelletta dipendono .

*Talchè tutto ciò , che accresce momento in una preparazione , cospira a tener in essa la stelletta .*

5. Faccio terminare il conduttore in piana superficie colla armatura di quarto opposta al quadro verticale , come nella preparazione della serie 16 , e dal contorno di quella stridono lunghi , e ampj pennelli estesi verso l' opposto quadro anche a distanza di due pollici ; nè mai si vede orma di pennello procedente dall' armatura del quadro .

*Ed abbiamo così i pennelli procedenti dalle sole resinose superficie , e non dalle opposte .*

6. In vece d' intertenermi in altre combinazioni di punte smuffate , e di apparenze or di stelletta , or di pennello , che io induco non meno ne' resinosi , che negli opposti conduttori con le cautele , e preparazioni somiglianti a quelle , che in fine della Legge 1. indicai ; raccoglierò alcuni termini più costanti delle proporzioni di figura , grandezza , distanza , e quantità , che influiscono in que' modi varj di elettrica

luce . Poichè in tante varietà non altro , che le giuste proporzioni guidar ci possono a specifici criterj , e a distinte illazioni . Dirò adunque nelle seguenti Leggi ordinatamente della figura , e delle grandezze de' conduttori ; indi delle distanze , e delle quantità delle elettriche potenze confrontando nella identità di specie diverse preparazioni , e colla identità di preparazione le specie diverse .

*Legge Quinta.* Nelle diverse preparazioni di figure , e di grandezza de' conduttori colla stessa specie di elettricità prevale l' azione della punta acuta alla smuffata , e questa ai globi minori ; e in genere prevalgono ordinatamente le minori convesse , o piane superficie alle maggiori .

1. Prevale , come in ogni genere di potenze , così nelle elettriche quella , che determina il moto . Ora nella stessa specie la prevalenza di azione non può d'altronde ripetersi , che per momento acquistato dalla stessa potenza . E siccome la luce nasce dal moto stesso delle elettriche potenze , non v' ha dubbio , che ove comincia a manifestarsi luce , ivi non sia prevalente il momento dell' elettrica potenza .

2. Si distinguano adunque i conduttori di vitrea , e di resinosa elettricità , e rispettivamente gli opposti a ciascuna con ordine di punte acute , e smuffate , e di globi minori , e maggiori ; e di piane superficie similmente minori , e maggiori . Comincerà in tutti la luce , e perciò il moto ordinatamente dalla punta acuta prima , che non dalla smuffata , e così in seguito prima dalla minore , che non dalla maggiore convessa , o piana superficie .

*Legge Sesta.* Nella identità di preparazione colle diverse specie di elettricità prevale alla vitrea l' azione della resinosa .

1. Questa colla precedente Legge sono corollarj de' Teoremi della prima , e seconda Parte ; poichè con simili proporzioni s' imprimono le cariche a distanze tanto maggiori con punte , e coi conduttori terminanti in minore convessa , o piana superficie ; e similmente più colla resinosa , che colla vitrea elettricità si estendono le cariche impresse .

2. Si provano in oltre direttamente coi fenomeni di luce . E in ordine alla quinta Legge tanto il pennello , come la stelletta compariscono a distanze tanto maggiori dalle pun-

te acute, che non dalle smuffate, e da queste che non dalle convesse, o piane superficie; e ciò non meno ne' conduttori di resinosa, o di vitrea elettricità, che nei conduttori a queste rispettivamente opposti.

3. E quanto alla festa non meno dalle punte, o superficie resinose, che dalle opposte alla vitrea si hanno i segni di luce a distanze assai maggiori, che non da simili punte, o superficie vitree, o rispettivamente opposte alla resinosa.

*Legge settima.* E nella identità di preparazione, e di specie prevalgono gli eccelli di eccitamento, o di masse sopra le specifiche forze della resinosa, o della vitrea elettricità.

1. Con minore eccitamento si hanno segni di luce nella resinosa elettricità, e nei conduttori opposti alla vitrea, che non colle stesse preparazioni, ed eguale eccitamento nella vitrea, e ne' conduttori opposti alla resinosa.

2. Per ottenere segni di luce a pari distanze dai conduttori di vitrea, o dagli opposti alla resinosa elettricità d'uopo è di accrescere in proporzione l' eccitamento, ossia la massa, che a ciascun giro corrisponde nella rispettiva specie.

3. Ed appunto perchè più pronti, e vivi compariscono i segni di luce colla resinosa, che non colla vitrea elettricità, quella più prontamente di questa s'indebolisce, e si disperde; non altro essendo que' segni, se non l'atto stesso della sua dispersione, ossia il moto di riunione coll' opposta.

4. L' eccitamento maggiore, o eccesso di masse necessario per rendere a pari distanze visibile la luce con vitrea elettricità, che non colla resinosa, compensa la minore forza specifica della vitrea; e l' aumento necessario nella resinosa per rendere a pari distanze visibile la luce nell' opposto conduttore compensa la minore mobilità dell' opposta, che da quello procede.

5. E nell' uno e nell' altro caso si esige quel maggiore eccitamento per ridurre a riunirsi intorno a que' conduttori tanta dose di elettricità o dall' ambiente, o dall' opposto mezzo, quanta è necessaria per far senso di luce più o meno vivo, ed esteso.

*Legge ottava.* E confrontando le specie fra loro nelle diverse preparazioni 1. la punta acuta vitrea corrisponde alla resinosa smuffata; 2. la punta smuffata vitrea ad un piccolo

globo resinoso; 3. e il piccolo globo vitreo alle maggiori convessè, o piane superficie; e così ordinatamente.

1. Quegli eccessi di eccitamento per rendere in distanze pari alla resinosa visibili i segni di luce, che nella precedente Legge osservai necessarj e nella vitrea elettricità in sè stessa, e nella resinosa per rapporto agli opposti conduttori, che non nella vitrea per rapporto ai suoi conduttori opposti, dimostrano direttamente nella identità di preparazione e la maggiore efficacia della resinosa, e la maggiore mobilità della opposta alla vitrea. Nella presente Legge si confermano le stesse verità in tutte le diverse preparazioni dell' una e dell' altra specie, e nei conduttori, che a ciascuna rispettivamente si oppongono; poichè si riduce questa in ciascuna parte ad evidenza di fatto.

2. E quanto alle semplici apparenze di luce ciò è manifesto in due modi. In primo luogo la punta acuta resinosa, e l' opposta alla vitrea come risplendono a maggiori distanze, che non la vitrea, o l' opposta alla resinosa, così certo smuffamento di quelle prime rende in esse il cominciamento di luce a distanze eguali delle seconde acute. Queste adunque hanno bisogno del momento, o prevalenza di punta acuta per corrispondere alle resinose smuffate (*legg. 5.*).

3. In secondo luogo nei globi, e nelle superficie vitree non splende mai luce se non a distanze minori (*legg. 1. n. 4. 6. 7. 8.*), che non da simili globi, o superficie resinose (*legg. 4. n. 3. 4.*); e per opposto i globi, e le superficie maggiori resinose hanno luce, quando ancor non ne hanno i globi, e le vitree superficie assai minori (*ivi*). Lo stesso accade ne' globi, e nelle superficie rispettivamente opposte. Onde vi vuole nella vitrea, e nell' opposta alla resinosa il momento, o la prevalenza di minore convessa, o piana superficie (*legg. 5.*) per ragguagliarne gli effetti.

4. E quanto alle differenze di lucide forme dalle precedenti citazioni è del pari manifesto l' indicato ragguaglio di punte acute colle smuffate, e delle minori colle maggiori superficie per ottenere eguali forme di luce. Così per trasformare il pennello della punta vitrea al fine in vera stelletta, basta diminuire il momento del mezzo appressando in vece di convessa, o piana superficie (*legg. 1. n. 1.*) una punta acuta (*ivi n. 3.*).

5. All'opposto per avere pennello su i resinosi conduttori d' uopo è accrescere la resistenza del mezzo con dilatare i termini, e le estremità de' conduttori stessi, e scemare per tal modo insieme il momento e la prevalenza di punte acute, o di minori superficie (*legg. 4. n. 3. 5.*). Nè sulla punta acuta resinosa altro si vede mai, che una tenue orditura di pennello (*legg. 4. n. 2.*) perchè in qualsivoglia confronto di punte acute vitree, e in qualsivoglia diminuzione del mezzo resistente prevale sempre la specifica forza della resinosa.

*Legge nona.* Nella comparazione delle specie fra di loro non si deve indistintamente confrontare la resinosa colla opposta alla vitrea, nè colla vitrea confondere l' opposta alla resinosa; ma e ciascuna specie coll'altra direttamente, e le opposte a ciascuna rispettivamente fra loro debbono paragonarsi nelle particolari preparazioni.

1. Benchè in realtà la specie opposta alla vitrea sia resinosa, e l' opposta a questa sia vitrea; ciò non ostante, quando si tratta di proporzioni, non possono alla rinfusa compararsi, mentre non è la specie, ma la quantità, e il momento di ciascun termine col suo omologo, e opposto, che cade in confronto. Ora è manifesto per la Legge prima, e quarta, che di gran lunga prevalgono i termini di vitrea, e di resinosa ai termini, che a ciascuna si oppongono in qualsivoglia preparazione. Ed è ciò coerente alla natura stessa delle cose; poichè que' primi riguardano le potenze già sciolte, eccitate, e raccolte; e gli ultimi non riguardano se non le potenze stesse appena smosse, e nell' iniziale loro eccitamento, e capacità di raccogliersi. In somma nei primi termini si confronta l' efficacia, e la forza di ciascuna specie, e nei secondi la loro mobilità.

2. Somma è l' importanza di questa Legge non solo per ovviare le vane contraddizioni, e i paradossi, che nascer potrebbero dal confuso paragone di que' termini, ma perchè ci somministra vera, e piana spiegazione delle contrarietà osservate fra i corollarj del Capo primo, e del diverso andamento di decadenza fra i primi e gli ultimi termini delle cariche impresse, che furono calcolate nel Teor. XIV. al n. 7., e nel Teor. XIX. al n. 4., siccome altrove dimostrerò, massimamente se con questa si aggiungano le considerazioni della seguente Legge.

*Legge decima.* E in queste combinazioni d'identità, o diversità di specie, di opposte a ciascuna, di preparazione, o eccitamento influiscono le differenze de' mezzi conduttori, o resistenti con tali proporzioni d' intervalli, i quali come per i conduttori più perfetti si estendono ai limiti indefiniti, così cominciano a ristringersi in certi limiti ne' conduttori meno perfetti, e si fanno que' limiti sempre minori, quanto gradatamente i mezzi frapposti si scostano dalla perfezione di conduttori, e passano per successivi gradi a maggior perfezione di resistenti.

1. Se le elettriche potenze eccitare, e raccogliere si potessero indipendenti dalle modificazioni del mezzo, si ridurrebbero non meno i fenomeni di luce, che gli altri segni loro, a ragioni costanti de' semplici elementi di specie, di opposizione, di quantità, e di preparazione. Ma tanta è nelle cose elettriche l' influenza del mezzo, che lungi dal poterse ne prescindere giammai, sembra piuttosto che ogni elettrica ricerca debba in fine risolversi in più intime considerazioni del mezzo stesso, e delle sue modificazioni. Nascono d' ordinario le false induzioni per *errore di relazione*, quando da fenomeni, e fatti verissimi si conclude il falso, perchè si riferiscono a soggetti, o cause non vere, o almeno non adeguate, nè solitarie. Ora non vi è in Fisica altro capo, quanto l' elettrica materia, in cui si cada più comunemente in simili errori; perchè appunto si vuol presumere semplice ciò, che è composto, e si vuole introdurre qual mero ostacolo, o resistenza il mezzo, che in mille forme regge le elettriche potenze, e l' azione sua con esse compone.

2. Siccome però del mezzo già molte cose notai e ne' Capi precedenti, e nell' articolo primo di questo Capo, perciò basterà qui richiamarne soltanto la memoria. Agisce dunque il mezzo come veicolo ne' conduttori, e come ostacolo nei resistenti, e segue nell' azione sua una inversa ragione della perfezione de' primi, e diretta de' secondi (*art. 1. legg. 6. n. 5. e 7.*).

3. Ma queste azioni, e queste ragioni di condottrice, e resistente natura non si presentano mai nè semplici, nè solitarie; ma si compongono cogli elementi delle elettriche potenze, che distinti abbiamo nella prima Parte. E viceversa

questi stessi elementi non debbono precisamente ristringersi a certe elettriche potenze eccitate, o mosse qualschè esse per sè sole compieffero la loro azione; ma d' uopo è riflettere, che non si compie l' azione di quelle se non componendoi con simili elementi di nuove porzioni, e potenze elettriche eccitate, e mosse nel mezzo stesso resistente. Talchè qualsivoglia elettrico fenomeno benchè sembri più semplice, e piano non segue mai la sola ragione o dei conduttori, o dei resistenti, o d' una specie, o quantità di elettrica potenza eccitata; ma risulta dal complesso di tutte le ragioni di conduttori, e resistenti, e di contrarie, ed omologhe specie, e quantità eccitate intorno a quella prima.

4. L' arte di riconoscere ciascuna di quelle semplici ragioni consiste in renderne l' azione, quanto più si può, prevalente sopra gli altri elementi, sicchè per l' eccesso suo si conosca, giacchè non può sola assolutamente conoscerli.

5. E nel caso nostro le acute punte condottrici sono la più prevalente via di porre in moto le elettriche potenze, e di render minima l' influenza dei mezzi resistenti sopra di loro, e perciò con simili punte si ha luce alle maggiori distanze.

6. All' opposto le ampie superficie condottrici presentano maggior influenza al frapposto mezzo resistente non solo di semplice ostacolo, ma di nuove soluzioni; le quali si frenano a vicenda, finchè la prevalente azione dell' una o dell' altra superficie non ne determini il moto (*artic. 1. legg. 4. n. 4., e seguenti*).

7. Ed è appunto questa l' influenza de' mezzi, per cui i limiti del moto divengono tanto minori, e all' opposto tanto maggiori divengono le quantità di contrarie potenze a vicenda frenate, quanto sono più ampie, ed eguali fra loro le opposte superficie condottrici, e quanto è più perfetto il frapposto mezzo resistente.

*Legge undecima.* E le apparenze di pennello, e di stelletta 1. non nascono da veruna specie particolarmente più che dall' altra, 2. ma provengono da certa somma di azione, o da certo momento di ciascuna contro le frapposte, ed opposte resistenze.

1. La prima parte di questa è immediata conseguenza delle precedenti Leggi, e principalmente della prima, quarta,

fettima, e ottava. Onde non resta che di fogggiungere qualche dichiarazione della seconda parte. Per intendere che cosa sia *certa somma di azione, o certo momento*, da cui il pennello, o la stelletta proviene, d'uopo è formarfi chiara idea dell' uno e dell'altra. La stelletta sibila stabilmente sull'apice della punta, in cui splende; il pennello stride instabilmente verso la sua base, cioè in parte opposta, e in fuori della punta, o dalla superficie, da cui procede (*legg. 1. n. 1.*). Ora e il sibilo, e lo stridore non sono altro, che vibrazioni impresse nell'aria ambiente in ciascun punto, ove la riunione, e lo scoppio succede delle contrarie elettricità; nè quel sibilo, e stridore è differente dallo scoppio strepitoso delle grandi scariche, se non in proporzione di quantità. Nella stelletta adunque si riuniscono le contrarie potenze stabilmente, e continuamente full'apice della punta; e nel pennello non si riuniscono, che vagamente in varj punti più esterni, e nella base del medesimo.

2. Il moto poi fra le contrarie potenze comincia, e si mantiene dalla parte prevalente (*art. 1. legg. 5. n. 6.*). E l'ordine, e la progressione delle parti prevalenti già è fissato nelle precedenti Leggi quinta, sesta, settima, e ottava. Quindi quella *certa somma di azione, o momento* non altro significa, se non il numero de' punti, e la distanza de' medesimi dalla estremità degli opposti conduttori, fra i quali a preferenza si determina, e si compie l'incontro, e la riunione delle contrarie potenze.

3. E perciò non è la stelletta se non l'effetto di quell'incontro, che si mantiene raccolto, e ristretto per prevalente costanza di azione full'apice delle punte, e degli spigoli de' conduttori; e non è il pennello se non l'effetto del moto stesso, che comincia, e progredisce incostantemente diviso, e sparso in più punti, e in varie distanze dalla estremità de' conduttori, fra i quali di continuo si mutano i limiti di azione prevalente. Il numero de' punti ne dilata la figura; la continua varietà delle distanze rende que' punti per la loro celerità simili a striscie, o raggi lucidi. E perciò non è il pennello, che una partizione di stelletta in continuo moto.

4. E quanto alle resistenze, nell'aria più rara si fa tanto



to minore il sibilo, e lo stridore di que' segni; e per opposto si fa ne' medesimi tanto più estesa, e divisa la luce.

*Legge duodecima.* Nè in tutte queste differenze ha veruna influenza la supposta contrarietà nella semplice direzione di un fluido solo.

1. In vano tentarono abilissimi Fisici di scorgere la direzione dell' elettrica luce. Per quanto sia facile di travedere, quando s' immagina prima di osservare, tanta però è l' evidenza del fatto, che niuno portò l' illusione fino a tal segno di asserire definita, e visibile la direzione costantemente più da una, che dall' altra parte. I lucidi pennelli, e i conduttori luminosi furono soltanto posti in opera per dimostrarne la presenza dalla parte di vitrea elettricità; ma in mezzo alle prevenzioni, e alle induzioni incautissime non si produssero mai come visibili prove di luce procedente da quella stessa parte.

2. Ora non rimane più verun dubbio dopo le induzioni distinte, che compiute abbiamo nella Legge prima, e quarta, che le stesse apparenze non si presentino del pari dalla parte di elettricità resinosa; mentre tutto quel giuoco non dipende, se non dalla varia combinazione di preparazioni per ragguagliare i momenti di quelle potenze (*legg. 8.*). Onde nulla in quelle differenze influisce nè la semplice direzione invano ricercata, nè la contraria apparenza fallacemente prodotta di un supposto fluido solo.

*Legge decimaterza.* Nella varietà, e incostanza della sua direzione ha l' elettrica luce costantissima legge di cominciare dalla parte prevalente.

1. Comincia, come vedemmo nella seconda parte della Legge decimaprima, l' elettrica luce dalla parte prevalente. E perciò se questa prevalenza sia stabile sull' una, o sull' altra metallica punta, o sopra ambedue insieme, su quelle comparisce in forma di viva stelletta; ed ivi si mantiene immobile, finchè non nasce progressione di quel moto dall' una, o dall' altra parte. Che se tale prevalenza si estende tra i limiti delle metalliche punte, o superficie, ivi similmente comincia l' elettrica luce; ma per la mobilità del mezzo, e per la varietà, che in que' limiti prevalenti nasce coll' atto stesso, che comincia la luce, mutano essi di continuo sede, e

alternano con incredibile celerità le distanze in punti sempre varj or più , or meno discosti dalle metalliche punte , o superficie , e formano colla loro rapidità , e molteplicità quella simultanea impressione di luce degradata in tanti colori , ed incoostante nella sua grandezza , come è il pennello .

2. Consiste adunque il pennello nella continua mutazione dei limiti di prevalenza fuori delle metalliche punte , o superficie . E perciò finchè que' limiti cadono entro le metalliche punte , o superficie , non può se non mantenersi immobile sulle loro estremità quella impressione di luce , che alla quantità corrisponde delle elettriche potenze in moto di riunione .

3. Ma que' limiti prevalenti vogliono considerarsi in due modi , siccome distinti abbiamo due modi nella mutua azione , e nel moto delle elettriche potenze . Primieramente vi è un limite tra la specie , che in ciascuna punta , o superficie risiede , e le finitime potenze del mezzo ambiente ; e quindi ne risulta quel moto di contrarie elettricità , che spieghiamo nell' articolo 1. Legge seconda n. 2. lett. e , ed ivi Legge terza , e sesta . In secondo luogo poi vi è un limite tra le due specie stesse , che nelle opposte punte , o superficie risiedono , le quali per la via stessa del mezzo , e delle frapposte elettricità a vicenda tendono a riunirsi ; e nuovamente in queste cade altra distinzione , per la quale ora in parte , ora pienamente si determinano al moto di riunione , secondo che nell' articolo stesso dichiarammo nella Legge quarta .

4. Ora tanto il primo di questi modi , come la prima parte del secondo non determinano mai la piena unione di quelle contrarie potenze , nè l' intero scoppio fra i limiti delle opposte punte , o superficie , nelle quali esse risiedono , ma non producono se non soffj , o sprizzi luminosi in proporzione o delle parti smosse nel frapposto mezzo per azione delle opposte , o delle parti di queste , che cominciano a riunirsi . Del pieno scoppio , e de' suoi limiti fra quelle opposte potenze diremo più opportunamente nella terza Parte ; e qui proseguiremo a considerare que' modi , che finiscono in soffj , o sprizzi luminosi , e in varie forme di stelletta , e di pennello si manifestano .

5. Sarà pertanto il soffio uniforme come sibilo , o ronzio ,

e farà la luce stabile sull' estremità delle punte, o degli spigoli de' conduttori, finchè entro questi si conservano i limiti prevalenti, che quel foggio, e quella luce producono. E farà per opposto in continuo moto a foggia di stridore, e di luce incostante, quando que' limiti per essere esternati in fuori de' conduttori foggiacono a continue mutazioni, siccome da principio notato abbiamo (*n. 1, e 2*).

6. Rimane in oltre da investigare in quale delle due parti a preferenza si esternino fuori de' conduttori que' limiti prevalenti, dai quali prende cominciamento l' elettrica luce. Poichè se per essere que' limiti entro i conduttori si mantiene alla loro estremità la stelletta, così non comincerà questa a trasformarsi in apparenza di pennello se non da quella parte, nella quale que' limiti s' inoltrano più prontamente nel fraposto mezzo fuori de' conduttori.

*Legge decimaquarta.* I limiti prevalenti, che il moto determinano della elettrica luce, cominciano prima, e si mantengono più costanti entro le punte, o superficie de' conduttori di resinosa; cominciano all' opposto più tardi, e più prontamente finiscono con esternarsi in fuori a preferenza dalle punte, o superficie de' conduttori di vitrea elettricità.

1. Risulta questa dai fenomeni descritti nelle precedenti Leggi sesta, settima, e ottava. Poichè in parità di preparazioni la punta, o superficie resinosa è sempre la prima a splendere con luce di stelletta, ed è poi l' ultima a prender forma, o cominciamento di pennello; e viceversa la punta, o superficie vitrea comincia più tardi a dar luce di stelletta, ma più prontamente passa alle forme di lucidi pennelli. Lo stesso con proporzione si verifica nelle punte, o superficie opposte alla vitrea, e resinosa elettricità, che a quelle sono corrispondenti.

2. E rapportando questi fenomeni ai diversi modi, che distinti abbiamo nella precedente Legge (*n. 3. e 4.*) debbono que' prevalenti limiti considerarsi non meno fra le rispettive potenze di ciascun conduttore, e del mezzo ambiente, che fra le porzioni spettanti agli opposti conduttori. Talchè non si esterna giammai in fuori di uno di que' conduttori l' apparenza di pennello, se non per diminuito momento nella preparazione, che al conduttore stesso appartiene, e per ac-

cresciuto momento o nel mezzo ambiente, o nell' opposto conduttore (*legg. 5. e 7.*).

3. E quando quell' opposto momento cresce a tal segno da comporsi colle frapposte potenze, e introdurre pel mezzo stesso un libero, e continuo moto fra quelle degli opposti conduttori, allora si ha scintilla piena fra loro e lo scoppio corrispondente alle somme delle intere potenze, che in que' conduttori, e nel frapposto mezzo riliedono. Che se per qualunque freno, o resistenza sia quel momento ristretto o fra i limiti della rispettiva faccia del mezzo frapposto, o soltanto in parte determini i moti dell' opposta, non si ha mai piena scintilla, nè intero lo scoppio, ma brillano nei termini dell' uno e dell' altro conduttore quelle lucide forme, che fin qui abbiamo distinte.

4. Onde si può in fine dedurre la progressione de' momenti, che atti sono a cominciare, e sostenere ne' loro termini l' elettrica stelletta; ed estenderla poi, e dividerla in forma di pennello oltre i loro termini nel mezzo frapposto, finchè arrivino ai limiti dell' intero scoppio, ed accresciute per opposto le distanze, o le estese superficie si rende quella luce tenuissima e insensibile alla vista; nè altrimenti è notabile, se non direttamente al tatto pel senso di *aura*, o *venticello*, e indirettamente alla vista *pel moto di leggeri corpicelli* nel mezzo stesso immersi, come esponiamo nella seguente, ed ultima Legge.

*Legge decimaquinta.* Nasce la stelletta ne' termini de' conduttori per momento prevalente di moto colla contraria elettricità del mezzo ambiente; e in que' termini si mantiene, finchè entro que' conduttori s' inchiudono i limiti di quella prevalente azione. Scema questa gradatamente nelle maggiori distanze, e cessa in fine di far luce. Ma nelle distanze minori si esterna in varj punti del mezzo frapposto, e si estende, e divide per esso in apparenza di pennello, finchè non arriva ai limiti d' intero scoppio colla piena unione delle opposte potenze.

1. Tutto ciò che cresce i momenti di azione d' un conduttore, come sono le punte, o gli spigoli, la specifica forza, o il maggiore eccitamento, o il diminuito momento nel mezzo ambiente tutto cospira a far comparire, e sostenere ne'

termini di esso la stelletta (*legg. 3. legg. 4. n. 4. legg. 8. n. 4.*). All' opposto tutto ciò, che scema il momento di qualsivoglia preparazione, e lo accresce nell' opposta, o nel mezzo ambiente, tutto cospira a trasformare la stelletta in pennello (*legg. 1. n. 3. e 9. legg. 2. legg. 4. n. 5. legg. 8. n. 5.*).

2. Che la stelletta sia effetto di prevalente, e costante momento, lo manifesta la vivacità, e l' integrità della sua luce non mai divisa in varietà di colori, come lo è il pennello; in oltre il sibilo, o ronzio continuo sull' apice della punta è sempre più notevole, che non nella corrispondente base del pennello; di più la maggior forza di carica, che nell' opposto quadro s' imprime colle apparenze di stelletta, che non di pennello; e viceversa s' indebolisce assai più, qualunque eccitamento, o ammasso di elettricità quando la stelletta, che quando il pennello da essa procede. E in fine per essere la stelletta sempre il primo, e l' ultimo termine d' ogni elettrica luce, mentre non è il pennello, che un modo instabile, e d' una intermedia combinazione, ed espansione della stessa.

3. In due modi poi quel prevalente momento di azione va degradandosi nelle successive maggiori, o minori distanze degli opposti conduttori. E quanto al primo nelle distanze successivamente maggiori di conduttori opposti si rende a grado a grado più tenue la mutua loro azione, e diventa in fine incapace di smovere nel frapposto mezzo tanta elettricità da far senso di luce. Ed anche nelle minori distanze, se molto si estenda la superficie degli opposti conduttori, e cresca la perfezione del mezzo frapposto, si frenano le elettriche potenze in proporzione che si smuovono; nè perciò sono capaci di fare attraverso lo stesso tanto moto per dare impressione di luce (*legg. 7. n. 6. e 7.*).

4. Queste potenze però o smosse in tenue quantità, o frenate nell' ampiezza delle conduttrici superficie secondo la perfezione del frapposto mezzo, benchè non si manifestino con lucidi segni, producono altri effetti di moto intestino fra le parti del mezzo; i quali effetti secondo la solida, o fluida, opaca, o trasparente natura dello stesso, si rendono or più, or meno sensibili *con adesioni, con mutazioni di figura, con moti, e con venticello*, come a suo luogo diremo.

5. Resta che qui diciamo del secondo modo, e degradamento, con cui quel prevalente momento si esterna in fuori de' conduttori nel mezzo ambiente. Qualunque volta si paragonano due forze in mutua opposta azione si trova fra di loro un punto, in cui i loro momenti si equilibrano, fuori del quale l'una o l'altra necessariamente prevale. Ora se quel punto, in cui farebbero equilibrio, si trovi entro i termini di un conduttore, anche i punti, che fuori di quel punto comincino a costituire i momenti prevalenti dall'una e dall'altra parte, proseguiranno per maggiori distanze a trovarsi entro que' termini, e faranno così entro del conduttore istesso i limiti di prevalente azione. In parità di preparazioni si conserva più costantemente il prevalente momento entro i termini dei conduttori di resinosa, che non di vitrea elettricità (*legg.* 14.). Onde per ragguagliare que' termini d' uopo è reciprocare gli eccessi de' momenti nelle rispettive preparazioni. E perciò qualora nel successivo accostamento degli opposti conduttori nelle stesse, o diverse preparazioni s'inducono i limiti di prevalente momento fuori de' termini dell' uno, o dell' altro, o di ambedue i conduttori nel mezzo frapposto, si trasforma così ne' modi, che già divisati abbiamo nell' uno, o nell' altro, o in ambedue insieme la stelletta in apparenza di pennello; e si mantiene questo, finchè tutti insieme que' momenti non cospirano a compiere l' unione delle opposte potenze nei limiti della piena scintilla, o dello scoppio fulminante, del quale proposto abbiamo di trattare nella terza Parte.

### A R T I C O L O III.

#### *Applicazione delle generali e particolari Leggi precedenti alla elettrica Teoria.*

**R**iducendo a generali, e particolari Leggi distinte la varietà delle apparenze di elettrica luce non altro io feci ne' precedenti articoli, che una continua, e fedele applicazione ai fenomeni stessi di que' principj, ed elementi d' ogni elettrica azione, che previamente stabiliti furono ne' Teoremi della prima, e seconda Parte della presente Analisi. Avrei in tal modo per rapporto all' elettrica luce cominciata

quella dimostrazione degli ultimi teoremi , che rimandai alle singolari induzioni , e alle ragioni proprie d' ogni capo d' elettrica dottrina , se in molti de' più recenti Scrittori delle cose elettriche non dominassero sulla significazione di que' lucidi segni quelle sinistre interpretazioni , e prevenzioni fallaci , che accennate abbiamo , e delle quali ragion vuole che diciamo alquanto più distintamente . Così d' ordinario accade nelle vie della verità , che si rendano piane , e sicure non meno con fissarne la direzione , e stabilirne i fondamenti , che con troncargli i bivj , e spianare gl' inciampi , che per esse s' incontrano .

Gioverà pertanto riandare fedelmente con brevità per la storia di que' lucidi segni , quali a mano a mano si presentarono all' ingenua osservazione de' più gravi , e sagaci Maestri . Conobbe quelle differenze di luce *Boße* , e le distinse coi nomi di luce maschia , e luce femmina , per illusione di aver creduta più debole questa , che anzi più potentemente si disperde , e perciò lascia minor residuo ; e più forte l' altra , appunto perchè meno si disperde , e indebolisce meno l' eccitamento , o l' ammasso della rispettiva potenza . Cadde *Nollet* nella stessa illusione ; e indi stimò quelle diverse apparenze insufficienti a stabilire le differenze di specie , che già erano state indicate da *Gray* , e *Du-Fay* , e distinte coi nomi di resinosa , e di vitrea elettricità . Prese in fine *Le Roy* a dimostrare con ampia discussione la differenza di codeste specie , e descrisse la stelletta per criterio della resinosa , come il pennello della vitrea .

Di quanta sede sien degni simili criterj ciascuno Io comprende dall' analisi de' medesimi riferita nella prima , e quarta Legge del precedente articolo . Ma in proposito nostro niuno fra tanti Osservatori vi fu , che riconosciuto abbia in que' diversi segni ragionevole indizio di contrarietà nella direzione della materia , onde sono prodotti . *Watson* medesimo , che prima , e più d' ogni altro s' inoltrò colla scorta della esperienza a rintracciare le direzioni delle elettriche potenze , non ne riconobbe giammai veruna direzione conforme o all' uno , o all' altro di que' segni ; nè in conto alcuno gl' indusse per testimonj di contrarietà .

Fu il primo *Franklin* , che dopo di aver precariamente ad-

ottata la sua prima idea di *positiva*, e di *negativa* natura delle opposte elettriche potenze, azzardò coerentemente l'altro pensiero sulla espressione di que' segni; e sospettò, che il pennello procedesse da esito, o emanazione, e la stelletta da ingresso, o assorbimento di quell' unico fluido, che egli presupposto avea qual sola cagione, e base d' ogni elettrico effetto. Vero è, che egli non propose simili idee, che a foggia di mere possibilità, o di semplici sospetti; e protestò espressamente, che quanto a fior di pelo sono esse lusinghiere, e sembrano a primo lancio plausibili, altrettanto poi si trovano infide, e discordi coll' evidenza de' fatti particolari, e ben distinti, qualora si ha la pazienza per internarsi di proposito ne' loro confronti (\*). Tale in somma è di que' lucidi segni la storica deduzione dai primi tempi, che cominciarono a coltivarli gli elettrici studj, fino all' epoca di *Franklin*.

Prefero yoga le Frankliniane idee, e diventò *Franklin* Capo scuola, e duce di sistematica Setta, e tanto bastò perchè tutte le sue congetture, e per fino i suoi più azzardati sospetti venissero dai Frankliniani Settarij trasformati in dogmi, e proposti, e difesi con linguaggio di fanatica persuasione. Si definì pertanto *la luce di partenza*, e *la luce di ritorno*; *si decise, che il pennello dà, e la stelletta riceve*; e si stabilì quello quasi presidente all' *esito*, questa all' *introito* d' ogni elettrica sostanza. In mezzo però a tante definizioni, e tanti stabilimenti non acquistò l' elettrica scienza, che ampie parafrasi de' primi fatti indicati da *Franklin*, pronunciate con altrettanta confidenza, e persuasione, quanta fu la perplessità, e l' incertezza del loro Autore.

Non

(\*) *Franklin Oeuvres* Vol. I. pag. 59. Ces explications du pouvoir, et de l' operation des pointes lorsqu' elles se presenterent a moi pour la premiere fois, et qu' elles rouloient dans mon esprit, me parurent satisfaire parfaitement à tout. Mais depuis que je les ai mises par écrit, et rappellées à un examen plus sévère, et réfléchi, j' avoue de bonne foi qu' il me rest quelques doutes a cet égard. Mais n' ayant rien de mieux pour le present à vous offrir à la pla-

ce, je ne les rejette pas absolument; car c' est souvent utile de lire même une mauvaise solution ecc.

Ibid. pag. 150. Ces pensées, mon cher ami, ne sont que hazardées, et ébauchées pour la plupart; e si je n' avais que l' ambition de me faire quelque réputation dans la philosophie, je le garderois par devers moi jusqu' a ce qu' elles fussent perfectionnées, et rectifiées par le tems, et par des nouvelles expériences. ecc.



Non farebbe pregio dell'opera d'intertenermi qui nella difamina di simili prevenzioni . Un errore finchè non diventa pubblico , e non turba il libero andamento della verità , non merita di effere folennemente conteffato . Ma quando pubblicamente fi produce sotto le divife della verità , e ne confonde le ingenue fемbianze , non fi può far meno di non fegnarlo a dito , e sfatare quegli incanti , coi quali nella ricerca del vero ai meno accorti fa illufione , e l' incauta moltitudine feduce . Non è punto neceffario , nè opportuno di affociare all' errore i nomi degli Autori , che hanno contribuito a propagarlo ; maffimamente quando i loro nomi non influifcono nella realtà delle cofe ; e tanto meglio quando , come ebbero effi l' ingenuità di confeffare di aver errato nel definir la luce di partenza , così è fperabile , che con più matura difcuffione de' fatti potellero egualmente riconofcere il loro abbaglio nella luce di ritorno , ed in ogni altra fomma d' *introito* , e di *efito* delle elettriche azioni .

Sarebbe un vero morale paradoffo , che illuftri Autori , i quali la vita loro confumano negli fudj delle scienze naturali , fi fcorgeffero in fine dominati piuttosto dall' intrattabile fanatismo di partito , o di fetta , che animati dal tranquillo , e docile fpirito della verità . Non è mai fenza pericolo , ed è fenza fallo perfettamente inutile intraprender difputa con teffe di partitante , o di fettario . Per nulla d' immifchiarmi intendo con fiffatti Difputatori ; e come nulla offervo , o fcrivo per effi , così alle opinioni , e ai giudizj loro io nulla attendo . Ai pacifici feguaci del vero , che foli meritano il nome , e il pregio di Filofofi , prefento di buon grado le precedenti mie rifleffioni per avvertirli nei bivj , e negli inciampi , che indur potrebbero traviamiento , o ritardo nelle elettriche ricerche , ed ai medefimi propongo le analitiche mie produzioni per dirigermi infieme con effi a qualche ficuro termine di elettrica Teoria .

Ed in ciò , che i molteplici fenomeni riguarda dell' elettrica luce ne riftringerò per ultimo i rifultati delle precedenti generali , e particolari Leggi nel fequente

## T E O R E M A . XXVI.

L' elettrica luce nei comuni rapporti colla generale teoria della luce , e della visione non ha maggiore espressione delle già note induzioni, e incertezze degli Ottici principj; e nei generali rapporti cogli elettrici fenomeni nasce al pari degli altri segni per certa proporzione di moto delle contrarie elettriche potenze; e ne' particolari suoi accidenti di figura , grandezza, strepito, e vivacità, o varietà di colori si riduce alle combinazioni de' molteplici elementi, che modificano, e compiono i momenti d' ogni elettrica azione.



# SOPRA L' EQUAZIONE

D' U N A C U R V A ,

*Sopra la falsità di due famosi Teoremi ; e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccioli .*

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia .

AL SIGNOR.....

**E**Ccomi a mantener la parola. Io le promisi di voler pensare ne' momenti, che mi lasciano di libertà le ordinarie mie occupazioni, alla Curva, di cui ella mi parlò nel Carnovale scorso, invitandomi a ricercarne l'equazione ad effetto di poterla in qualche modo descrivere per una serie continua di punti quanto si voglia vicini, e quindi determinare quelle proprietà, che possono renderla degna della curiosità degl' intendenti, e raccomandabile ai Geometri. E siccome parvemi, che ella allora mi dicesse, che qualora avesse in suo potere l'equazione di una tal curva, non piccioli vantaggi poteva riprometterli nell' applicazione, che divisava di farne ad alcuni principj della Scienza Armonica esposti nell' opera, che intorno a questo argomento da molto tempo ella sta preparando per le stampe; perciò tanto più volentieri mi sono fatto premura di compiacerla, applicandomi con qualche sorta d' impegno a questa difficile e laboriosa ricerca. Io mi posi da principio al lavoro con poca speranza di riuscita; massime dopo avere da lei compreso, che molti altri di me più esperti avevano tentato di rompere questo istmo, ma sempre inutilmente. Pare in fatti sulle prime, che le condizioni del Problema escludano quella serie continua di punti, la quale costituisce il carattere di ogni linea curva, la di cui equazione,

Q ij

qualunque ella sia, indica sempre in ogni ramo della Curva o un' assoluta e rigorosa continuità, o per lo meno una tal vicinanza fra due punti qualunque consecutivi, che la loro distanza sia minore di ogni dato picciolissimo intervallo. La Curva richiesta all' opposto sembra a prima vista dover ammettere una vera interruzione nelle sue parti, ed una distanza assegnabile da un punto all' altro successivo; nel qual caso i suoi punti a maggior ragione si direbbono *punti discreti*, che non si dicono quelli delle Curve esponenziali rappresentate dall' equazione  $y = (-a)^x$ , dove una quantità negativa viene elevata ad un esponente indeterminato e variabile. Ma il fatto sta che questa prima apparenza svanisce poi subito per poco che uno s' interni nell' indole della quistione, offrendosi allora allo spirito del Geometra investigatore quella perfetta continuità che da prima non si aspettava, e le condizioni del Problema non parevano promettere. Ma ella già mi dimanda, *questa Curva è ella algebraica, oppur trascendente?* Io vorrei poterle rispondere, che la Curva è del genere delle *algebraiche* o *geometriche*, ma sono costretto a dirle, che essa appartiene alla sublime famiglia delle *hypergeometriche* o *trascendenti*. E' però vero, che in compenso di ciò ella è d' altra parte così pellegrina e singolare, e nel tempo stesso la sua equazione è così semplice ed elegante che non si potrebbe desiderare di più.

Per altro la cosa per me più inaspettata nel maneggiare un tal soggetto non è già stata quella di essermi imbattuto in un' equazione tanto semplice e facile, ma bensì di aver riscontrato nella forma di tal equazione quella Curva medesima, che io ora sono circa tre anni avea già pubblicata nelle mie *Disquisitiones Physico-Mathematicæ* nel Problema II della *Disquis. IX*, dove cerco la Curva, cui percorre il centro di gravità della circonferenza d' un cerchio, qualora da questa si va levando di mano in mano un arco, e poi l' altro sino a che non resti più alcun residuo. Certamente non è stata picciola la mia meraviglia nell' osservare, che due curve a prima vista tanto diverse non sono poi altro in fine che una medesima curva, e nel trovarla dotata della bella proprietà meccanica consistente nell' esser quella il luogo geometrico de'

centri di gravità degli archi circolari fminuiti successivamente dall'intera circonferenza fino all'arco evanescente. Venghiamo pertanto al Problema.

### PROBLEMA.

In una retta indefinita  $MQ$  dato un punto  $A$ , e fuori di essa un punto qualunque  $B$ , sicchè la retta  $AB$ , e l'angolo  $BAQ$  riescano noti, si meni ad  $AB$  la perpendicolare  $BC$ ; e si divida l'angolo  $BAQ$  per metà colla retta  $AC$ , la quale incontra in  $C$  la detta perpendicolare  $BC$ : parimente guidata ad  $AC$  la perpendicolare  $CD$ , si divida per metà l'angolo  $CAQ$  colla retta  $AD$ , che somministra un altro punto d'intersezione  $D$ , e così guidata alla  $AD$  la normale  $DE$ , e dividendo colla  $AE$  per mezzo l'angolo  $DAQ$ , si avrà un terzo punto d'intersezione  $E$ . Procedendo di questo tenore all'infinito, sempre con la perpendicolare all'ultima retta, e bipartizione eguale dell'angolo rimanente, si avranno infiniti punti fino all'ultimo punto  $H$ , che viene a cascare sulla retta indefinita  $MQ$ , ed è l'ultima intersezione della perpendicolare, e della bisecante l'angolo residuo. Ciò stante si dimanda 1. La posizione di questo punto  $H$  sulla indefinita  $AQ$ , ovvero il modo di subito determinarlo. 2. L'equazione o algebrica, o trascendente, qual più ella sarà, della Curva, che passa pe' punti  $B, C, D, E, F, H$ .

### SOLUZIONE.

Un raggio vettore indefinito  $AD$  della Curva facciasi  $=z$ , e l'angolo pur indefinito  $DAQ$  compreso da esso e dalla  $AQ$  dicasi  $=u$ , o piuttosto sia  $u$  l'arco di cerchio descritto col raggio arbitrario 1, e misurante il detto angolo. Ciò fatto, è manifesto dalle condizioni del Problema, che nel triangolo  $DAE$  rettangolo in  $D$ , l'angolo  $AED$ , che è complemento di  $DAE$ , è pur complemento di  $\frac{1}{2} DAQ$ : onde il coseno di  $\frac{1}{2} DAQ$  sta al seno tutto, come  $DA$  ad  $AE$ , ovvero

cof.  $\frac{1}{2}u : 1 :: z : \frac{z}{\text{cof. } \frac{1}{2}u} = AE$ . Per simil modo nel triangolo

lo rettangolo  $AEF$  sta il cofeno di  $EAF$ , ovvero di  $\frac{1}{2}EAQ$ ,

ovvero di  $\frac{1}{4}DAQ$  al seno tutto, come  $AE$  ad  $AF$ , vale a dire

cof.  $\frac{1}{4}u : 1 :: \frac{z}{\text{cof. } \frac{1}{4}u} : \frac{z}{\text{cof. } \frac{1}{2}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u} = AF$ . Così il raggio

vettore consecutivo ad  $AF$  troverebbesi

$$= \frac{z}{\text{cof. } \frac{1}{2}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u}, \text{ il consecutivo a questo verrebbe}$$

$$= \frac{z}{\text{cof. } \frac{1}{2}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{8}u}, \text{ onde per fine si ottiene}$$

$$\text{l' ultimo } AH = \frac{z}{\text{cof. } \frac{1}{2}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{8}u \text{ cof. } \frac{1}{16}u \dots \text{ cof. } \frac{1}{2^n}u}$$

preso per  $n$  un numero infinito.

Ora è noto dalla teoria delle funzioni circolari, che  $\text{sen. } u = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}u \text{ cof. } \frac{1}{2}u$ ,  $\text{sen. } \frac{1}{2}u = 2 \text{ sen. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{4}u$ ,  $\text{sen. } \frac{1}{4}u$

$= 2 \text{ sen. } \frac{1}{8}u \text{ cof. } \frac{1}{8}u$ ,  $\text{sen. } \frac{1}{8}u = 2 \text{ sen. } \frac{1}{16}u \text{ cof. } \frac{1}{16}u$ , e così

discorrendo: dunque fatta nella primitiva equazione  $\text{sen. } u = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}u \text{ cof. } \frac{1}{2}u$  la sostituzione del valore di  $\text{sen. } \frac{1}{8}u$ , e

così appresso degli altri, nascerà  $\text{sen. } u = 2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n}u \text{ cof. } \frac{1}{2}u$

$\text{cof. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{8}u \text{ cof. } \frac{1}{16}u \dots \text{ cof. } \frac{1}{2^n}u$ , ovvero  $\frac{\text{sen. } u}{2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n}u} = \text{cof. } \frac{1}{2}u$

$\text{cof. } \frac{1}{4}u \text{ cof. } \frac{1}{8}u \text{ cof. } \frac{1}{16}u \dots \text{ cof. } \frac{1}{2^n}u$ , dove  $n$  indica un numero qualunque. E di qui si vede, che il prodotto d' un

numero qualunque di fattori espressi da' coseni di angoli decrescenti in progressione dupla è uguale al quoziente, che nasce, se il seno dell'angolo primitivo si divide pel numero ultimo, a cui si vuol arrestare la progressione, moltiplicato pel seno dell'ultimo angolo corrispondente.

Che se in vece de' coseni si volesse far uso delle secanti, allora per essere il coseno eguale al quadrato del raggio diviso per la secante, si fa manifesto, che si presenta

$$\frac{2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n} u}{\text{sen. } u} = \text{sec. } \frac{1}{2} u \text{ sec. } \frac{1}{4} u \text{ sec. } \frac{1}{8} u \text{ sec. } \frac{1}{16} u \dots \text{sec. } \frac{1}{2^n} u .$$

Tornando pertanto al valore del prodotto de' coseni, cioè  $\frac{\text{sen. } u}{2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n} u}$ , e riflettendo, che il seno di un arco infinitesimo

non differisce dall'arco se non per una quantità infinitesima rispetto all'arco medesimo, ne viene in conseguenza, che quando sia  $n$  un numero infinito, come lo è nel presente

Problema, diventa  $\text{sen. } \frac{1}{2^n} u = \frac{1}{2^n} u$ , e quindi  $2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n} u = u$ .

Perlochè sarà  $\frac{\text{sen. } u}{u} = \text{cos. } \frac{1}{2} u \text{ cos. } \frac{1}{4} u \text{ cos. } \frac{1}{8} u \text{ cos. } \frac{1}{16} u \dots \text{cos. } \frac{1}{2^n} u$ . E poichè si è trovato il raggio vettore ultimo

$$AH = \frac{z}{\text{cos. } \frac{1}{2} u \text{ cos. } \frac{1}{4} u \text{ cos. } \frac{1}{8} u \text{ cos. } \frac{1}{16} u \dots \text{cos. } \frac{1}{2^n} u}$$

sostituzione di  $\frac{\text{sen. } u}{u}$  in luogo del denominatore, si raccoglie

$$AH = \frac{z u}{\text{sen. } u}$$

si determina col pigliare da  $A$  sopra la indefinita  $AQ$  una quarta proportionale  $AH$  dopo il seno dell'arco di cerchio, che misura l'angolo compreso da un raggio vettore qualunque e dalla  $AQ$ , dopo quest'arco istesso, e dopo il detto

raggio vettore. Se pertanto il dato raggio vettore  $AC$  si farà  $=\theta$ , e l' arco, che misura il dato angolo  $CAQ$ , si porrà  $=\phi$ , se ne ritrarrà per  $AH$  il valore tutto noto  $\frac{\theta\phi}{\text{sen.}\phi}$ . Dal

che apparisce, che l' invenzione del punto  $H$  dipende dalla rettificazione del cerchio, ma ne dipende in un modo così poco complicato, che non può cagionare a chicheffia il minimo imbarazzo, massime avendosi alla mano le Tavole calcolate delle lunghezze di tutti gli archi circolari in parti del raggio, come sono per esempio quelle, che pubblicò ultimamente il Sig. *Schulze* in Berlino.

Il secondo punto del Problema, concernente l' equazione della Curva, non ammette più ora veruna difficoltà. Imperciocchè essendosi trovato generalmente  $AH = \frac{zu}{\text{sen.}u}$ , se si pren-

de la stessa  $AH$  uguale alla quarta proporzionale dopo le tre date quantità, come si è avvertito, diviene ancor essa nota e determinata, e però uguale ad una quantità data, che dirassi per esempio  $a$ . Laonde l' equazione polare della Curva

farà  $\frac{zu}{\text{sen.}u} = a$ , ovvero  $z = \frac{a \text{sen.}u}{u}$ , equazione di tal semplicità ed eleganza, che ben poche curve trascendenti godono di questo vantaggio. E questa equazione è poi quella stessa, che io trovai già competere alla Curva, la quale rappresenta il viaggio, che va facendo il centro di gravità della circonferenza del cerchio descritto col raggio  $= a$ , quando dalla medesima si vanno togliendo successivamente altri, ed altri archi fino a ridurla al nulla, siccome ho esposto nel Libro citato.

Intanto dalla detta equazione si raccoglie immediatamente, che i raggi vettori della Curva stanno tra loro nella ragione composta della diretta de' seni degli archi, che misurano gli angoli formati da essi colla retta indefinita data di posizione, e dell' inversa degli archi istessi. Così i due raggi vettori  $AD$ ,  $AF$  stanno tra sè direttamente come i seni degli archi misuranti gli angoli  $DAQ$ ,  $FAQ$ , ed inversamente come i detti archi. Si raccoglie pur anco, che svanendo l' angolo del raggio vettore e dell' indefinita  $AQ$ , e però diventando



tando  $\text{fen. } u = u$  (poichè il seno dell' arco evanescente è sempre uguale all' arco , come è noto dalla Geometria Infinitesimale); si otterrà  $y = u$ , vale a dire il raggio vettore indeterminato acquista la posizione della indefinita  $AQ$  cadendo sopra essa, e si cangia nella retta dianzi trovata  $AH$ .

La descrizione di questa Curva per punti quanto si voglia vicini si effettua speditamente, concessa la rettificazione degli archi circolari, la lunghezza de' quali in parti del raggio si trova già calcolata nelle Tavole di Berlino da 1 fino a 360 gradi. Condotta per esempio sotto qualunque angolo con  $AQ$  una retta indefinita  $AN$ , si determina su di essa il punto  $D$  spettante alla Curva con prendere  $AD$  quarta proporzionale dopo l' arco, che misura l' angolo  $DAQ$ , dopo il suo seno, e dopo la retta già prima determinata  $AH$ . In tal modo si troveranno quanti altri punti della Curva ci piacerà.

Per poco, che si consideri l'equazione, si vede pur anco, che la Curva sarà composta di due rami perfettamente simili ed uguali di qua e di là dalla  $AH$ , la quale li divide per metà. Imperciocchè la medesima costruzione, che si è fatta alla sinistra di  $AH$ , si fa parimenti alla destra, dove gli angoli negativi de' raggi vettori colla  $AH$ , e gli archi pur negativi, che ne sono la misura, non alteran punto nell' equazione  $z = \frac{a \text{ fen. } u}{u}$  i valori di  $z$ , i quali sotto angoli uguali

da una parte e dall' altra di  $AH$  si ritrovano rispettivamente gli stessi a motivo del valor negativo così dell' arco, come del suo seno alla destra di  $AH$ , il che rende sempre positivo anche da questa parte il valore di  $z$ , e sempre uguale al suo corrispondente sotto il medesimo angolo dalla parte opposta.

La forma di questa Curva ha una gran somiglianza alla figura d' un cuore, ed è evidente, che resta divisa per metà dall' asse  $AH$ , il quale scuopresi essere il *massimo* fra tutti i raggi vettori: in fatti se il differenziale dell' equazione

$z = \frac{a \text{ fen. } u}{u}$  si fa uguale a zero, risulta

$$dz = \frac{adu \cos. u - a du \text{ fen. } u}{u^2} = 0, \text{ vale a dire } u = \frac{\text{fen. } u}{\cos. u}$$

tang.  $u$ , dal che è facile l' inferire  $u = 0$ , cioè il raggio vettore allora diviene *massimo* quando cade sopra la retta indefinita  $AQ$ .

E' pur facile il vedere, che l' asse  $AH$  taglia la curva perpendicolarmente in  $H$ ; il che si scuopre anche col calcolo differenziale, giacchè se nella formola  $\frac{z^2 du}{dz}$  per la sottangente

delle curve riferite al fuoco si sostituiscono i valori opportuni ricavati dall' equazione della Curva, trovasi la sottangente  $= \frac{a \text{ sen. } u^2}{u \text{ cof. } u - \text{sen. } u}$ , che nel supposto di  $u = 0$  diven-

ta  $= \frac{0}{0}$ ; e se per evitare questo valore indeterminato si usa

il noto ripiego di prendere il differenziale del numeratore, e dividerlo pel differenziale del denominatore, sicchè abbiassi

$$\frac{2adu \text{ cof. } u \text{ sen. } u}{du \text{ cof. } u - u du \text{ sen. } u - du \text{ cof. } u} = \frac{2a \text{ cof. } u \text{ sen. } u}{-u \text{ sen. } u} = \frac{2a \text{ cof. } u}{-u},$$

nasce nel caso di  $u = 0$  la sottangente  $= \frac{-2a \text{ cof. } u}{u} = \infty$ .

E però la sottangente, cioè la perpendicolare condotta da  $A$  al raggio vettore  $AH$ , ed incontrata dalla tangente, che si guida da  $H$ , risultando infinita, si fa manifesto, che la tangente in  $H$  è parallela alla sottangente, e conseguentemente perpendicolare al raggio vettore  $AH$ , che è quanto dire il raggio vettore  $AH$ , ossia l' asse della Curva è ad essa normale in  $H$ .

Si rende inoltre manifesto, che l' asse stesso  $AH$ , che da una parte taglia perpendicolarmente la Curva in  $H$ , dall' altra riesce tangente di ambedue i rami della Curva in  $A$ , cioè

che apparisce dal valore della sottangente  $\frac{a \text{ sen. } u^2}{u \text{ cof. } u - \text{sen. } u}$ ,

che nel caso di  $u$  eguale alla semicirconferenza del cerchio si annulla, e mostra in conseguenza essere  $AH$  tangente de' due rami della Curva in  $A$ .

La forma della Curva indica fralle ordinate ortogonali all' asse  $AH$  doverfene trovare una *massima*  $IO$ , e questa si determina facilmente nel modo seguente: Essendo  $AI = z$ ,

$IAQ = u$ , ne viene  $IO = z \text{ fen. } u = \frac{a \text{ fen. } u^2}{u}$ , e l'ascissa  $AO$

$= z \text{ cof. } u = \frac{a \text{ fen. } u \text{ cof. } u}{u}$ . Preso pertanto il differenziale del

valore di  $IO$ , ed uguagliato a zero; risulta

$$\frac{2adu \text{ fen. } u \text{ cof. } u - adu \text{ fen. } u^2}{u^2} = 0, \text{ e quindi } u = \frac{\text{fen. } u}{2 \text{ cof. } u}$$

$= \frac{1}{2} \text{ tang. } u$ . Laonde il punto della Curva, al quale corrispon-

de l'ordinata massima, resta determinato con guidare un raggio vettore  $AI$ , il quale faccia coll'asse un tal angolo  $IAH$ , che l'arco misuratore di quest'angolo sia uguale alla metà

della sua tangente. Che se il valore di  $u = \frac{\text{fen. } u}{2 \text{ cof. } u}$  viene so-

stituito ne' valori dell'ordinata  $OI$  del raggio vettore  $AI$ , e dell'ascissa  $AO$ , apparisce  $OI = 2a \text{ fen. } u \text{ cof. } u$ ,  $AI = 2a \text{ cof. } u$ ,  $AO = 2a \text{ cof. } u^2$ , valori tutti semplicissimi e dipendenti dall'arco  $u$ . Ora il ritrovare un angolo  $IAH$ , il di cui arco misuratore  $u$  sia la metà della tangente, è un Problema di facile indagine, il quale si scioglie coll'ordinaria regola di falsa posizione nel seguente modo.

Supposto, che non si abbiano alla mano le Tavole di Berlino degli archi ridotti in parti del raggio, si può subito sup-

plirvi mediante la formola  $u = \frac{n\pi}{\gamma}$ , nella quale  $\pi$  indica la

lunghezza della semicirconferenza del cerchio descritto col raggio  $= 1$ ,  $u$  la lunghezza dell'arco proposto,  $n$  il numero de' gradi, minuti, ecc. di quest'arco,  $\gamma$  il numero de' gradi, minuti, ecc. della semicirconferenza  $\pi$ . Imperciocchè

nella formola  $u = \frac{n\pi}{\gamma} = \frac{n}{\gamma : \pi}$  dopo aver ridotti  $n$  e  $\gamma$  in numeri omogenei, cioè ambedue in minuti primi, o in secondi, o ecc. basta sottrarre il logaritmo di  $\pi$ , cioè

0, 4971499 dal logaritmo del numero  $\gamma$ , e sottrarre nuovamente questo residuo dal logaritmo del numero  $n$ , e si ottiene il logaritmo della lunghezza dell'arco proposto  $u$ . Ciò premesso, passo a fare le seguenti ipotesi per giugnere all'e-

quazione  $2n = \text{tang. } n$ , preso sempre  $n$  per esprimere il numero di gradi, ecc. dell' arco  $n$ :

## I P O T E S I I.

$$\begin{array}{r} n = 60^\circ \\ \log. 2n = 2, 0791812 \\ - \log. \frac{\gamma}{\pi} = 1, 7581226 \\ \hline \log. 2n = 0, 3210586 \\ \log. \text{tang. } n = 0, 2385606 \\ \hline \text{Err. } + 0, 0824980 \end{array}$$

## I P O T E S I II.

$$\begin{array}{r} n = 70^\circ \\ \log. 2n = 2, 1461280 \\ - \log. \frac{\gamma}{\pi} = 1, 7581226 \\ \hline \log. 2n = 0, 3880054 \\ \log. \text{tang. } n = 0, 4389341 \\ \hline \text{Err. } - 0, 0509287 \end{array}$$

## I P O T E S I III.

$$\begin{array}{r} n = 66^\circ \\ \log. 2n = 2, 1205739 \\ - \log. \frac{\gamma}{\pi} = 1, 7581226 \\ \hline \log. 2n = 0, 3624513 \\ \log. \text{tang. } n = 0, 3514169 \\ \hline \text{Err. } + 0, 0110344 \end{array}$$

## I P O T E S I IV.

$$\begin{array}{r} n = 67^\circ \\ \log. 2n = 2, 1271048 \\ - \log. \frac{\gamma}{\pi} = 1, 7581226 \\ \hline \log. 2n = 0, 3689822 \\ \log. \text{tang. } n = 0, 3721481 \\ \hline \text{Err. } - 0, 0031659 \end{array}$$

Facendo adunque come la somma di questi due ultimi Errori ad uno di essi, così la differenza delle Ipotesi al quarto proporzionale, si giugne pel valore di  $n$  ai due limiti più vicini  $66^\circ. 46'$ , e  $66^\circ. 47'$ . Pianto quindi due altre ipotesi:

## I P O T E S I V.

$$\begin{array}{r} n = 66^\circ. 46' = 4006' \\ 2n = 8012' \\ \log. 2n = 3, 9037409 \\ - \log. \frac{\gamma}{\pi} = 3, 5362739 \\ \hline \log. 2n = 0, 3674670 \\ \log. \text{tang. } n = 0, 3672499 \\ \hline \text{Err. } + 0, 0002171 \end{array}$$

## I P O T E S I VI.

$$\begin{array}{r} n = 66^\circ. 47' = 4007' \\ 2n = 8014' \\ \log. 2n = 3, 9038493 \\ - \log. \frac{\gamma}{\pi} = 3, 5362739 \\ \hline \log. 2n = 0, 3675754 \\ \log. \text{tang. } n = 0, 3675985 \\ \hline \text{Err. } - 0, 0000231 \end{array}$$

Laonde facendo come la somma  $0,0002402$  degli Errori all' Errore  $0,0002171$ , così la differenza  $1'$ , ovvero  $60''$  delle Ipotefi al quarto proporzionale, questo si trova  $= 54''$ ,  $14'''$ , che aggiunto a  $66^\circ, 46'$  fa conoscere l'angolo ricercato di  $66^\circ, 46', 54'', 14'''$ , e la sua tangente  $= 2,3311220$ , ossia due volte e un terzo il raggio, o seno tutto.

Finalmente l'equazione  $z = \frac{a \text{ sen. } u}{u}$  esaminata a dovere ci fa tosto scorgere, che la Curva aver dee un numero infinito di Foglie intorno al punto  $A$ , una sempre minore dell'altra senza fine, le quali vanno per ultimo a terminare e concentrarsi in un solo punto. Ciò si deduce dagl' infiniti valori dell' arco  $u$ , incominciando da zero sino all' infinito tanto dalla parte de' positivi, che da quella de' negativi, cioè denominati  $u$  gli archi che non forpassano la prima periferia  $2\pi$ , i detti valori vengono espressi dalla serie  $\pm u$ ,  $\pm 2\pi \pm u$ ,  $\pm 4\pi \pm u$ ,  $\pm 6\pi \pm u$ ,  $\pm 8\pi \pm u$ ,  $\pm 10\pi \pm u$ , ecc. *in infinito*.

Una Curva, che per la somiglianza colle figure d'un Cuore, viene denominata *Cardioide*, trovasi descritta nell' Enciclopedia Inglese all' articolo *Cardioid*, ma essendo essa algebrica, come la sua equazione lo dà a divedere, differisce essenzialmente dalla nostra.

Descrivesi quella con prolungare fuori del cerchio le corde, che partono tutte dal medesimo punto della sua circonferenza, e con prendere le parti esterne sempre uguali al diametro del cerchio. Le estremità delle corde con tal legge prolungate costituiscono il perimetro della *Cardioide*. Da una costruzione così semplice si ricava con estrema facilità l'equazione algebrica di questa Curva, la quale ascende al quarto grado.

Vengo ora all' altra dimanda, che ella mi fa intorno alle due famose Proposizioni, che nella dottrina delle Serie Infinite, e nel Calcolo Integrale trovansi da molti o semplicemente enunciate, o anche dimostrate, delle quali io le dissi, che ben lungi dall' ammetterle per vere io per l' opposto credevo di poterne provare rigorosamente la falsità.

La prima di queste proposizioni viene espressa così:

*Se il numero, c, che ha per logaritmo iperbolico l' unit.à, vie-*

ne elevato alla potenza, che ha per esponente la serie reciproca de' numeri primi  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{ecc.}$   
 in inf., ne nasce e eguale all' infinito ar-

monico  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ecc.}$

Si vuole dimostrare una tale proposizione, chiamando  $A$  la serie reciproca de' numeri primi,  $B$  la reciproca de' quadrati di questi numeri, cioè  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \text{ecc.}$ ,  $C$  la reciproca de' loro cubi,  $D$  la reciproca de' loro biquadrati, e così appresso, e siccome è noto dalla Teoria delle Serie, es-

serve  $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \text{ecc.} = \log. \frac{2}{1} + \log. \frac{3}{2} +$

$\log. \frac{5}{4} + \log. \frac{7}{6} + \log. \frac{11}{10} + \log. \frac{13}{12} + \log. \frac{17}{16} + \text{ecc.}$

$= \log. \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \text{ecc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \text{ecc.}}$ ; conseguentemente passando

$A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \text{ecc.}$

dai logaritmi ai numeri nasce e

$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \text{ecc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \text{ecc.}}$ . Ora questa frazione, la quale ha

per numeratore il prodotto infinito di tutti i numeri *primi*, e per denominatore il prodotto di tutti quelli, che mancano dell' unità dai numeri *primi*, è appunto uguale alla serie re-

ciproca de' numeri naturali  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ecc.}$  in inf.

Imperciocchè presa  $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

$+ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}$ , farà  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \text{ecc.}$ , e sottratta questa seconda dal-

la prima, resta  $\frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}$

dalla quale sono esclusi tutti i denominatori pari, cioè divisibili per 2. Tolgo da questa il suo terzo, cioè  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{1}{3}$

$$+ \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \text{ecc.}, \text{ ed ho per resto } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} x = 1 + \frac{1}{5}$$

+  $\frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}$ , da cui sono esclusi tutti i denominatori divisibili per 2, e 3. Da questa levo il quinto, ossia

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \text{ecc.}, \text{ ed ottengo il residuo}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}, \text{ dove non s' incontra}$$

più alcun denominatore divisibile per 5. A questo modo escludendo tutti i termini divisibili per 7, per 11, per 13, per 17, e per qualunque altro numero *primo*, si arriva finalmente all'uguaglià

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \text{ecc.}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \text{ecc.}} x = 1, \text{ ovvero}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ecc.}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \text{ecc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \text{ecc.}}. \text{ Per la qual cosa la quantità tra-$$

$$A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D + \text{ecc.}$$

scendente *e* trovata uguale alla frazione

$$\text{infinita } \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \text{ecc.}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \text{ecc.}}$$

$$\text{infinito armonico } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ecc.}$$

Siccome pertanto è già noto dalla dottrina delle Serie, che la Serie reciproca de' numeri primi, vale a dire *A* ha un

valore infinito, e la somma di  $\frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D + \text{ecc.}$  in inf.

non ha che un valore finito, ed anche assai piccolo; perciò

trafcurando la somma  $\frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D + \text{ecc.}$  in confronto di *A*, rispetto a cui essa franisce, nasce per ultimo l'equa-

$$\begin{aligned} \text{zione } e^A &= e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{ecc.}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\ &+ \frac{1}{6} + \text{ecc.}, \text{ che è la proposta.} \end{aligned}$$

Questo sottile ragionamento pecca nell' ultima parte, dove stabilisce, poterfi trascurare la somma  $\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D +$

$\frac{1}{5}E + \text{ecc.}$  in confronto di  $A$ , perchè quella finita, e questa infinita. Il gran principio dell' evanescenza della quantità finita rispetto all' infinita non può aver più luogo, ed induce infallibilmente in errore, allorchè l' infinito congiunto al finito forma l' esponente d' una data quantità, per esempio  $e$  nel caso presente. Allora (chiamato  $n$  il finito) è tanto lontano, che  $e^{\infty+n}$  sia lo stesso, che  $e^{\infty}$ , che anzi quello sta a questo nella ragione di  $e^n : 1$ , cioè in una ragione comunque ineguale finattantochè  $n$  seguita ad essere un numero finito ancorchè picciolissimo, non divenendo uguale una tal proporzione se non nel caso di  $n=0$ . Ciò si vede ancor meglio dal valore infinito, che ha la differenza delle due predette espressioni, la qual differenza è  $= e^{\infty+n} - e^{\infty} = e^{\infty}(e^n - 1)$ , valore visibilmente infinito fino a che  $n$  riman qualche cosa. E' dunque evidentemente falso il celebre Teorema sopra enunciato, e comunemente adottato per vero.

L'altra proposizione, che io trovo falsa, è il famoso Teorema, che s' incontra ne' trattati più estesi di Calcolo Integrale, in quella parte più delicata e profonda, che riguarda l' integrazione delle formole differenziali a *parziali differenze*. Il Teorema si suol esporre così:

*Se la funzione Z delle variabili x, y, u, ecc. è tale, che debba esser nulla 1°. nell' ipotesi di y eguale ad una costante a, tutte le differenze parziali di Z, eccetto  $\frac{dZ}{dy}$ , saranno necessariamente nulle nella medesima ipotesi. 2°. Se questa funzione è tale, che essa debba esser nulla nell' ipotesi di  $y=a$ , e di  $x=b$ , tutte le differenze parziali di Z eccetto  $\frac{dZ}{dy}$ , e  $\frac{dZ}{dx}$  saranno*



saranno necessariamente nulle nella stessa ipotesi. Quindi, se essendo  $Mdy$  un termine del differenziale esatto di  $Z$ , la formola integrale  $\int Mdy$  (fatta l'integrazione per rapporto ad  $y$  solamente) è nulla nel supposto di  $y$  uguale ad una costante, quest'altra formola integrale  $\int \frac{dM}{dx} dy$ , che è il coefficiente di  $dx$  nel differenziale della prima, è necessariamente nulla nello stesso supposto,

Per incominciare ora a dimostrare falsa la prima parte del Teorema, io osservo, che non può la funzione  $Z$  annullarsi nella supposizione di  $y=a$  senza avere la forma  $(y-a)^n P$ , essendo  $P$  un'altra funzione delle variabili  $x, y, u$ , ecc.

Se pertanto si prendono le differenze parziali  $\frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{du}$ , ecc.,

le quali non sono altro che  $\frac{dP}{dx}(y-a)^n, \frac{dP}{du}(y-a)^n$ , ecc.

si vede chiaro, che tali differenze si annullano ancor esse in quell'ipotesi di  $y=a$ . Ma per l'opposto la differenza parziale

$\frac{dZ}{dy}$  in vece di persistere ad essere qualche cosa, come esige il Teorema, diventa nulla essa pure in infiniti casi: imperciocchè trovasi

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{dP}{dy}(y-a)^n + nP(y-a)^{n-1},$$

la quale è manifestamente nulla tutte le volte che  $n$  supera l'unità; il che mostra l'insufficienza della prima parte del Teorema.

Quanto alla seconda parte, affinchè la funzione  $Z$  attualmente svanisca nell'ipotesi di  $y=a$ , e di  $x=b$ , doverà ella avere la forma seguente  $Z = (y-a)^n P + (x-b)^m Q$ , dove  $P$  e  $Q$  sono funzioni distinte delle stesse variabili  $x, y, u$ , ecc. Presa ora la differenza parziale

$\frac{dZ}{du}$ , trovasi questa

$$= \frac{dP}{du}(y-a)^n + \frac{dQ}{du}(x-b)^m, \text{ che è manifestamente } = 0$$

nella supposizione di  $y=a$ , e di  $x=b$ ; e così ogn'altra differenza parziale presa per rapporto a qualunque variabile diversa da  $y$ , e  $x$ , si troverà sempre nulla in quella suppo-

fizione. Ma ben lungi, che le differenze parziali  $\frac{dZ}{dy}$ ,  $\frac{dZ}{dx}$  non si annullino in quel supposto, come vuole il Teorema, trovati, che si annullano realmente ancor esse in infiniti casi. Ed in fatti  $\frac{dZ}{dy} = \frac{dP}{dy} (y-a)^n + nP (y-a)^{n-1}$   
 $+ \frac{dQ}{dy} (x-b)^m$ , e  $\frac{dZ}{dx} = \frac{dQ}{dx} (x-b)^m + mQ (x-b)^{m-1}$   
 $+ \frac{dP}{dx} (y-a)^n$ ; e queste due espressioni sono evidentemente nulle nell' ipotesi di  $y=a$ , e di  $x=b$  tutte le volte, che gli esponenti  $m$ ,  $n$  superano l' unita, vale a dire in infiniti casi; contro ciò, che si asserisce nella seconda parte del Teorema.

Finirò con rispondere all' ultima sua dimanda di comunicarle una nuova dimostrazione del bel Teorema concernente l' uguaglianza fra il logaritmo iperbolico del numero 2, e la serie armonica a termini infinitesimi, non parendole pienamente soddisfacenti le dimostrazioni da lei vedute. Ecco dunque il Teorema:

$$\text{Essendo } n = \infty, \text{ dico, che } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \\ + \frac{1}{n+5} + \dots + \frac{1}{2n} = \log. 2.$$

#### D I M O S T R A Z I O N E .

Lo sviluppo de' termini della serie armonica dà le seguenti equazioni.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{2^2}{n^3} - \frac{2^3}{n^4} + \frac{2^4}{n^5} - \frac{2^5}{n^6} + \frac{2^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{3^2}{n^3} - \frac{3^3}{n^4} + \frac{3^4}{n^5} - \frac{3^5}{n^6} + \frac{3^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4^2}{n^3} - \frac{4^3}{n^4} + \frac{4^4}{n^5} - \frac{4^5}{n^6} + \frac{4^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+5} = \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{5^2}{n^3} - \frac{5^3}{n^4} + \frac{5^4}{n^5} - \frac{5^5}{n^6} + \frac{5^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+6} = \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{6^2}{n^3} - \frac{6^3}{n^4} + \frac{6^4}{n^5} - \frac{6^5}{n^6} + \frac{6^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

ecc.

Dunque distribuiti ordinatamente i termini, che moltiplicano le potenze reciproche di  $n$ , se ne ritrarrà

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n} (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \text{ecc.})$$

$$+ \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + \text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + \text{ecc.})$$

$$+ \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 + 7^4 + \text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^6} (1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + \text{ecc.})$$

$$+ \text{ecc.}$$

E poichè è già nota dall' Algebra comune l'espressione della somma di qualunque serie composta delle potenze intere de' numeri naturali continuati quanto si vuole, perciò sostituendo siffatte espressioni in luogo delle rispettive serie precedenti, ritrovafi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n} (n) - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) + \frac{1}{n^3} \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) - \frac{1}{n^4} \left( \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \right)$$

$$+ \frac{1}{n^5} \left( \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \right) - \frac{1}{n^6} \left( \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{12} \right) + \text{ecc.} \dots$$

Ma essendo  $n$  infinito, svaniscono nel secondo membro di

quest' equazione le potenze di  $n$  inferiori in confronto delle superiori. Dunque farà

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^3} \cdot 3 - \frac{1}{n^4} \cdot 4 + \frac{1}{n^5} \cdot 5 - \frac{1}{n^6} \cdot 6 + \text{ecc.} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Ora la dottrina de' logaritmi insegna essere

$$\log. (1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \text{ecc.}$$

per modo che fatto  $x=1$ , proviene  $\log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$- \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ecc.}$  Per conseguenza la serie armonica proposta farà  $= \log. 2$ .

Con questo stesso metodo io arrivo a dimostrare, che la

serie armonica  $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \dots + \frac{1}{3n}$  è ugua-

le a  $\log. \frac{3}{2}$ ; e parimente  $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3}$

$+ \frac{1}{3n+4} \dots + \frac{1}{4n} = \log. \frac{4}{3}$ ; e così pure  $\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2}$

$+ \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \dots + \frac{1}{5n} = \log. \frac{5}{4}$ ; per modo che ci

si offre quest' elegante prospetto.

<i>Serie</i>	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{2n}$
<i>Somme</i>	$\log. \infty = \log. \frac{1}{0}$	$\log. \frac{2}{1}$
<i>Serie</i>	$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \dots + \frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \dots + \frac{1}{4n}$
<i>Somme</i>	$\log. \frac{3}{2}$	$\log. \frac{4}{3}$
<i>Serie</i>	$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} \dots + \frac{1}{5n}$	$\frac{1}{5n+1} + \frac{1}{5n+2} \dots + \frac{1}{6n}$
<i>Somme</i>	$\log. \frac{5}{4}$	$\log. \frac{6}{5}$
<i>Serie</i>	$\frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+2} \dots + \frac{1}{7n}$	ecc.
<i>Somme</i>	$\log. \frac{7}{6}$	ecc.

Da ciò ne deriva, che se si prende  $\lambda$  eguale ad un numero intero affermativo qualunque, la serie armonica  $\frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \dots + \frac{1}{\lambda n} \text{ riesce eguale} \\
 &\text{alla somma de' logaritmi } \log. \frac{2}{1} + \log. \frac{3}{2} + \log. \frac{4}{3} + \log. \frac{5}{4} \\
 &+ \log. \frac{6}{5} + \log. \frac{7}{6} \dots + \log. \frac{\lambda-1}{\lambda-2} + \log. \frac{\lambda}{\lambda-1} \\
 &= \log. \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots \lambda-1 \cdot \lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \lambda-2 \cdot \lambda-1} = \log. \lambda.
 \end{aligned}$$

Altre riflessioni nuove e interessanti potrebbero qui farsi intorno alle proprietà di queste serie; ma per non esserle tedioso io le rimetto alla sua sagacità.

# SOPRA LA PRESSIONE

D E' F L U I D I

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia.

**E**Saminando la pressione de' fluidi contro i corpi immersi, o contro le pareti de' recipienti, mi venne fatto di osservare, che nel Cilindro, e nella Sfera ad esso inscrivibile, se entrambi si sommergono nel fluido sino alla sommità, o se internamente scavandoli si riempie la loro capacità, risulta nelle pressioni esercitate dal fluido contro i detti due corpi quella medesima proporzione sesquialtera, che Archimede scoprì così nelle loro solidità, come nelle superficie. Quindi argomentai, non dover essere inutile o sterile l'idea di ridurre a formole generali la pressione de' fluidi ad effetto di ricavarne secondo la varia forma de' corpi sommersi, o de' vasi riempiti que' risultati più o meno curiosi e rimarchevoli, cui il soggetto sembra promettere. Restringendomi presentemente in questo breve Scritto ai fluidi *omogenei e incompressibili* verò esponendo succintamente il mio divisamento in questa importante materia senza assumere dall' Idrostatica altro principio fuori di quello altronde noto nelle molecole fluide per esperienza, vale a dire l'uguaglianza di pressione per ogni verso e secondo tutte le direzioni.

L E M M A.

Un fluido, che riempie un tubo infinitamente sottile  $FE$   $CD$  (*Fig. 1.*) o cilindrico o prismatico avente i lati perpendicolari alla base, e tenuto in una positura comunque obliqua all' orizzonte  $AD$ , preme il fondo o la base  $CD$  con uno sforzo equivalente al peso d' un prisma dello stesso fluido, che

ha per base la stessa  $CD$ , e per altezza la verticale  $FA$  terminata dall' orizzontale  $AD$ .

## D I M O S T R A Z I O N E .

Sia  $M$  il centro di gravità del filo d' acqua contenuto nel tubo infinitamente sottile  $FECD$ , e colla verticale  $MP$  condotta dal centro di gravità si rappresenti il peso di esso filo, e si risolva lo sforzo  $MP$  ne' due laterali  $MR$  perpendicolare alla base  $CD$ , ed  $MN$  perpendicolare al lato  $FD$ . Ciò posto è manifesto, che il filo d' acqua non preme il fondo  $CD$  se non collo sforzo rappresentato da  $MR$ , posciachè l' altro espresso da  $MN$  è tutto impiegato a premere le pareti del tubo. Starà dunque il peso del fluido, cioè il prodotto del suo volume nella gravità specifica  $g$ , alla pressione  $p$  esercitata sul fondo  $CD$ , come sta  $MP$  ad  $MR$ , ovvero per la similitudine de' triangoli  $PMR$ ,  $FAD$ , come  $FD$  ad  $FA$ , cioè  $FD : FA :: DC \times FD \times g : p$ ; e perciò  $p = DC \times FA \times g$ . Il che era ecc.

## S C O L I O .

E' di per sè chiaro, che qui si prescinde da quella qualunque aderenza, che le molecole del fluido aver possono colle pareti del tubo, come pure da quella forza, che ne' tubi minimi o *capillari* è già conosciuta, la qual opponendosi alle comuni leggi dell' Idrostatica altera e diversifica la pressione del fluido quando con diminuirne l' energia, quando con sospenderne l' esercizio.

## T E O R E M A I.

*In un vaso ADQB di qualunque forma (Fig. 2.) pieno di acqua sino in BA, la pressione, che soffre qualunque minima particella, o elemento delle sue pareti, equivale al peso d' un prisma d' acqua avente per base lo stesso elemento, e per altezza la sua profondità sotto il piano di livello AB.*

## DIMOSTRAZIONE.

L'elemento  $DC$  del vaso può avere tre differenti posizioni perchè 1. un tubo prismatico perpendicolarmente applicato al detto elemento può incontrare il piano di livello  $BA$  senza passare pel vaso, come si vede nel tubo  $DCEF$ : 2. può essere parallelo al piano di livello, come  $CDIL$ : 3. può concorrere col piano di livello, passando però attraverso il vaso, siccome accade nel tubo  $CDRS$ .

*Caso 1.°* Stando l'acqua così nel tubo  $CDFE$ , come nel vaso comunicante  $AQB$  alla medesima altezza, o allo stesso livello  $BAFN$ , ed essendo tutto equilibrato, ne viene in conseguenza, che il luogo  $DC$  è tanto premuto esteriormente dall'acqua del tubo  $DCFE$ , quanto lo è internamente da quella del vaso, e che però anche interiormente è premuto con uno sforzo, che vale il peso d'un prisma d'acqua compreso sotto la base  $CD$  e sotto un'altezza uguale alla distanza verticale di  $CD$  dal piano di livello.

*Caso 2.°* Si pieghi il tubo orizzontale  $CI$  in un altro verticale  $LN$  che arrivi al piano di livello. Nel tubo  $ONCD$ , e nel vaso comunicante  $AQB$  la superficie superiore dell'acqua stagnante e tranquilla occupa lo stesso piano orizzontale. Laonde  $CD$  è premuto esteriormente dall'acqua contenuta nel tubo ricurvo  $NOCD$  colla stessa energia, ond'è premuto internamente dall'acqua del vaso  $AQB$ . Ma egli è evidente, che  $CD$  è premuto collo stesso sforzo che  $LI$ , ovvero il suo uguale  $LM$ , e che  $LM$  porta tutto il peso dell'acqua contenuta in  $MO$ , che lo preme verticalmente, il qual peso appartiene ad un volume d'acqua  $= LM \times MN = CD \times MN$ . Dunque con questo stesso sforzo è altresì premuto interiormente  $CD$  dall'acqua del vaso.

*Caso 3.°* Si adatti al vaso  $AQB$  un altro vaso  $BCUT$  di qualunque figura per modo che entrambi si tocchino in  $CD$ . L'acqua arriverà in ambedue allo stesso livello, e  $CD$  farà premuto egualmente così dall'acqua del primo vaso al di dentro, come da quella del nuovo al di fuori, ed a questa seconda pressione equivale pel caso 1.° quella dell'acqua nel tubo  $CDRS$ , cioè a dire il peso d'un volume prismatico d'acqua,



qua, che ha  $CD$  per base, e per altezza la distanza del piano di livello. Il che era ecc.

## T E O R E M A II.

*In un vaso di qualunque figura  $ACDB$  ( Fig. 3. e 4. ) la pressione dell' acqua sul fondo orizzontale  $CD$  vale il peso d' un prisma d' acqua avente il fondo stesso per base, e la sua profondità sotto il pian di livello per altezza.*

## D I M O S T R A Z I O N E.

Ciascun elemento del fondo  $CD$  è premuto col peso d' un volume d' acqua, che si ha moltiplicando l' elemento per la sua profondità sotto il piano di livello  $AB$ , ovvero per la profondità del fondo stesso sotto quel piano. Dunque tutto il fondo porta una pressione equivalente al peso d' una mole di acqua eguale al prodotto del fondo per la sua distanza dalla superficie superiore dell' acqua. Il che era ecc.

Di qui si comprende come una picciolissima porzione d' acqua possa esercitare una pressione enorme sopra una data superficie.

## T E O R E M A III.

*La pressione, che esercita un fluido omogeneo contro una superficie qualunque, ha per misura il peso d' un volume di fluido uguale al prodotto di questa superficie per la distanza del suo centro di gravità dal pian di livello.*

## D I M O S T R A Z I O N E.

La pressione totale del fluido sopra una superficie qualunque, e comunque situata risulta dalla somma di tutte le pressioni sopra le parti infinitesime, ovvero gli elementi della stessa superficie, che è quarto dire dalla somma de' prodotti di questi elementi, moltiplicati ciascuno per la sua distanza dal pian di livello. Ma per la natura del centro di gravità, la somma de' prodotti di ciascun elemento della superficie per

la sua distanza da un piano fisso s'agguaglia al prodotto della superficie intera moltiplicata per la distanza del suo centro di gravità dallo stesso piano. \* Dunque la pressione contro la superficie totale è misurata dal peso di una mole di fluido prodotta dal moltiplicare la superficie per la distanza del suo centro di gravità dalla superficie superiore del fluido. Il che era ecc.

Quanto in appresso diremo circa la pressione interna contro le pareti de' vasi dall' acqua contenutavi vale ugualmente, com' è manifesto, per la pressione esterna contro le stesse pareti ne' vasi, o corpi immeriti nell' acqua, supposta uguale nell' un caso e nell' altro la rispettiva distanza degli elementi delle pareti dal pian di livello. Dunque

## I.

*Un vaso prismatico pieno d' acqua tenuto colla base orizzontale soffre nella superficie delle faccie laterali una pressione uguale al peso di tant' acqua, quant' è il prodotto della superficie laterale moltiplicata per la metà dell' altezza del prisma. Ciò è evidente dall' essere il centro di gravità della superficie del prisma alla metà della sua altezza.*

## II.

*Quindi si ricava, che la superficie laterale d' un vaso cubico pieno d' acqua prova una pressione, che vale due volte il peso dell' acqua; e che aggiuntavi la pressione contro la base, la pressione totale ha per misura il triplo del peso dell' acqua.*

\* Il Teorema della Statica è questo: sieno più pesi o masse  $M, M', M'', M'''$ , ecc., e le rispettive distanze dei centri di gravità di esse masse da un piano fisso sieno  $D, D', D'', D'''$ , ecc., e finalmente la distanza del loro comun centro di gravità dal medesimo piano sia  $\Delta$ ; farà sempre la somma

de' prodotti di ciascuna massa moltiplicata per la sua rispettiva distanza dal piano fisso uguale al prodotto della somma di dette masse moltiplicata per la distanza del comun centro di gravità dal piano medesimo, cioè farà  $MD + M'D + M''D'' + M'''D''' + \text{ecc.} = (M + M' + M'' + M''' + \text{ecc.}) \Delta$ .

## III.

*In un vaso piramidale pieno d'acqua, tenuto colla base orizzontale all'ingiù, e colla cima rivolta all'insù per modo che il pian di livello sia il piano orizzontale che passa per la cima, la pressione contro la superficie laterale ha per misura il peso di tant'acqua, quanta se ne ha con moltiplicare la detta superficie per due terzi dell'altezza della piramide. In fatti il centro di gravità di quella superficie sta a due terzi dell'altezza della piramide, computando dalla cima.*

## IV.

*Da ciò s'inferisce, che nella stessa piramide sta la pressione contro la superficie a quella contro la base, come stanno due terzi della superficie alla base.*

## V.

*Che se il vaso piramidale si tiene colla base orizzontale all'insù, e colla cima rivolta all'ingiù, allora la pressione contro la superficie è misurata dal peso di quel volume d'acqua, che risulta moltiplicando la superficie pel terzo dell'altezza della piramide.*

## VI.

*Dal che si deduce, che questa seconda pressione è la metà della prima; e che essa sta alla pressione fatta contro la base nella prima posizione del vaso, come sta un terzo della superficie alla base.*

## VII.

*Un vaso cilindrico pieno d'acqua situato con base orizzontale porta nella superficie curva tanta pressione, quanto è il peso d'un volume d'acqua risultante dal moltiplicare quella superficie per la metà dell'altezza del cilindro. Di fatti il centro*

di gravità della superficie curva del cilindro è nel mezzo della sua altezza.

## VIII.

Da ciò s' inferisce, che nel cilindro retto equilatero la pressione contro la superficie curva è doppia della pressione contro la base; ed aggiunta la pressione contro la base, la pressione totale contro tutta la superficie vale tre volte il peso dell' acqua premente; come appunto nel vaso cubico; e finalmente la pressione totale è sesquialtera della pressione contro la superficie curva.

## IX.

L' acqua, che riempie un vaso conico posato sulla sua base orizzontale, preme la superficie curva con uno sforzo uguale al peso di tant' acqua, quant' è il prodotto di questa superficie moltiplicata per due terzi dell' altezza del cono: perchè il centro di gravità della superficie curva del cono trovasi ai due terzi della sua altezza, contando dalla punta.

## X.

Ma se il vaso conico si capovolge, sicchè la base orizzontale sia superiore, allora la pressione contro la superficie curva è la metà della precedente.

## XI.

Se il vaso è un cono retto, tenuto nella prima situazione, sta la pressione contro la superficie curva a quella contro la base, come due terzi del lato al semidiametro della base, e al peso dell' acqua, che contiene, sta come il doppio lato allo stesso semidiametro.

## XII.

Capovolto il cono retto, in questa seconda situazione sta la pressione contro la superficie curva al peso dell' acqua, come il lato del cono al semidiametro della base.

## XIII.

*Circoscritto il cono retto al cilindro retto, sta la pressione contro la superficie curva del cono nella prima situazione alla pressione contro la superficie curva del cilindro, come due terzi del lato del cono al lato del cilindro; e nella seconda situazione, come un terzo del lato del cono al lato del cilindro.*

## XIV.

*Supposto il cono equilatero, la pressione contro la superficie curva nella prima situazione è d' un terzo più grande che la pressione contro la base, ed uguaglia quattro volte il peso dell' acqua.*

## XV.

*La pressione contro la base nella prima situazione del cono equilatero è sesquialtera della pressione contro la superficie curva nella seconda situazione.*

## XVI.

*L' acqua, che riempie una sfera, ne preme la superficie con uno sforzo, il quale ha per misura il prodotto della superficie moltiplicata pel semidiametro.*

## XVII.

*La pressione contro la superficie sferica fa tre volte il peso dell' acqua premente.*

## XVIII.

*Dal n.º VIII. si raccoglie, che la pressione contro tutta la premibile superficie del cilindro circoscritto alla sfera è sesquialtera della pressione contro la superficie della sfera. E per tal modo quella proporzione sesquialtera, che Archimede con tan-*

ta gloria discoprì fra le superficie e le solidità del cilindro circoscritto e della sfera , viene ora qui estesa da noi anche alle pressioni , che soffrono le superficie di questi due corpi o riempiti d' acqua o immersi nell' acqua fino alla loro sommità .

### *Delle Formole Generali delle Pressioni .*

Passiamo ora a rintracciare le formole generali della pressione de' fluidi contro un piano qualunque immerso nel fluido in qualsivoglia positura , come pure contro le superficie curve de' corpi , o de' vasi rotondi generati per rotazione. L' applicazione di queste formole a qualche eletto esempio ci guiderà alla cognizione di alcune eleganti proprietà , che chiameremo *idrostatiche* , delle figure geometriche , che ci sono più familiari .

### P R O B L E M A I .

*Determinare la pressione dell' acqua contro un piano qualunque , e comunque situato sotto il fluido premente .*

### S O L U Z I O N E .

Sia il piano  $ABDF$  (*Fig. 5.*) circoscritto dalla retta orizzontale  $BD$  , dalla  $DF$  perpendicolare alla  $BD$  , dall' altra orizzontale  $FA$  , e da una linea o retta , o curva  $AB$ . Per ritrovare l' inclinazione del piano all' orizzonte , tirisi da  $F$  la retta orizzontale  $FG$  perpendicolare alla  $FA$  sicchè il piano  $AFG$  sia orizzontale. Essendo ora alla comune sezione  $AF$  dei due piani  $BAFD$  ,  $AFG$  , perpendicolare la  $FG$  nel secondo piano , e la  $FD$  nel primo , farà l' angolo  $GFD$  l' inclinazione del piano proposto all' orizzonte . Suppongasi , che il livello dell' acqua giunga al punto  $N$  della retta prodotta  $DF$  , e guidisi  $NO$  parallela alla  $FG$  : e perchè  $AF$  è perpendicolare così alla  $FD$  come alla  $FG$  , farà anche il piano  $AFG$  perpendicolare al piano  $DFG$  , ovvero  $DNO$  , e però il

piano  $DNO$  farà verticale. Se ora dal punto  $O$  preso ad arbitrio nella retta  $NO$  casca al basso la verticale  $OH$ , si troverà questa nel predetto piano, e taglierà in  $H$  la retta  $DF$ , in  $G$  la  $FG$ . Guidate le ordinate infinitamente prossime  $HM$ ,  $bm$  perpendicolari alla  $FD$ , e posta l'ascissa  $FH = x$ , l'ordinata  $HM = y$ ,  $BD = a$ ,  $DF = b$ ,  $FN = c$ , l'angolo d'inclinazione  $GFD = ONH = \phi$ , farà  $OH = (c + x) \text{sen. } \phi$ , e l'elemento  $Hm$  del piano, moltiplicato per la sua distanza  $HO$  dalla superficie superiore dell'acqua, rappresenterà la pressione elementare contro lo stesso piano, ossia la pressione contro l'elemento  $Hm$ , la quale in conseguenza si troverà  $= (c + x)ydx \text{sen. } \phi = (cydx + yx dx) \text{sen. } \phi$ . Cercato quindi l'integrale di questa espressione per modo che esso si annulli insieme colla  $x$ , si otterrà la pressione contro il piano indeterminato  $AFIM$ ; e sostituito  $b$  in vece di  $x$  nel detto integrale, si ha l'intera pressione contro il dato piano  $FABD$ . Il che era ecc.

*Esempio I.* Il piano  $AFBD$  sia un rettangolo, e però  $y = a$ . La formola  $f(cydx + yx dx) \text{sen. } \phi$  diventa  $f(acdx + axdx) \text{sen. } \phi = (acx + \frac{1}{2}ax^2) \text{sen. } \phi$ , dove fatto  $x = b$ , l'intera pressione contro il rettangolo diventa  $(acb + \frac{1}{2}ab^2) \text{sen. } \phi$ .

Se l'acqua non oltrepassa il lato superiore del rettangolo, cioè se  $c = 0$ , la detta pressione si trasforma in  $\frac{1}{2}ab^2 \text{sen. } \phi$ , vale a dire nell'area del rettangolo moltiplicata per la metà dell'altezza dell'acqua sopra il lato inferiore del rettangolo.

*Esempio II.* Sia il piano proposto un triangolo rettangolo  $AFD$  (*Fig. 6*) colla punta rivolta in giù, e col lato superiore orizzontale  $FA$ . Sarà dunque  $a = 0$ , e posta  $FA = f$ , nascerà  $y = \frac{f(b-x)}{b}$ . Laonde  $\int (c+x)ydx \text{sen. } \phi$   
 $= \int \frac{f(b-x)}{b} (c+x) \text{sen. } \phi = (fcx + \frac{1}{2}fx^2 - \frac{fcx^2}{2b}$

$-\frac{fx^3}{3b}$ ) sen.  $\phi$  rappresenterà la pressione contro l'area indefinita  $AFHM$ ; e fatta  $x=b$ , trovasi la pressione contro tutto il triangolo  $= (\frac{1}{2}fcb + \frac{1}{6}fb^2)$  sen.  $\phi$ .

Se il triangolo ha la punta rivolta in su, e il lato orizzontale all'ingiu, come nella Fig. 7, allora si ha  $y = \frac{ax}{b}$ , e

$$\int (c+x)y dx \text{ sen. } \phi = \int (c+x) \frac{ax}{b} dx \text{ sen. } \phi$$

$$= (\frac{cax^2}{2b} + \frac{ax^3}{3b}) \text{ sen. } \phi = \text{ alla pressione contro l'area } FMH,$$

e quindi posta  $x=b$ , risulta la pressione contro tutto il triangolo  $= (\frac{1}{2}cab + \frac{1}{3}ab^2)$  sen.  $\phi$ .

Nella prima situazione del triangolo, supponendo  $c=0$ , ovvero che il lato del triangolo arrivi al piano di livello, la pressione ricercata diventa  $\frac{1}{6}fb^2$  sen.  $\phi$ , cioè il prodotto del triangolo moltiplicato per un terzo dell'altezza dell'acqua sopra la punta inferiore del triangolo.

Nella seconda situazione, fatto lo stesso supposto di  $c=0$ , la pressione si muta in  $\frac{1}{3}ab^2$  sen.  $\phi$ , cioè nell'area del triangolo moltiplicata per due terzi dell'altezza dell'acqua sopra il lato orizzontale inferiore.

*Esempio III.* Cerchisi la pressione contro il semicircolo  $FMD$  (Fig. 8), il di cui diametro  $FD=b$ ,  $a=0$ ,  $y = \sqrt{bx-x^2}$ ,  $x dx = \frac{1}{2}b dx - y dy$ . Perciò si ha  $\int (cy dx + yx dx)$  sen.  $\phi = \int (c + \frac{1}{2}b)$  sen.  $\phi y dx - \int y^2 dy$  sen.  $\phi$

$$= (c + \frac{1}{2}b) \cdot FHM. \text{ sen. } \phi - \frac{1}{3}y^3 \text{ sen. } \phi, \text{ e la pressione totale}$$

contro



contro il semicircolo risulta  $= (c + \frac{1}{2}b) \cdot FMD \cdot \text{fen. } \phi =$

$(c + \frac{1}{2}b) \frac{b^2 \pi}{8} \text{fen. } \phi$ , posta  $1 : \pi$  la ragione del diametro alla circonferenza; e il doppio di questo valore somministra la pressione contro tutto il cerchio  $FMDR$ .

*Esempio IV.* Sia il piano dato un quadrante  $GCD$ , il di cui semidiametro superiore  $GC$  sia orizzontale, ed  $= b$ ,  $CH' = x$ ,  $HM' = y$ ,  $a = 0$ . Per la natura del cerchio si ha  $y^2 = b^2 - x^2$ , ed  $ydy = -x dx$ . Dunque  $\int (cydx + yx dx) \text{fen. } \phi$

$$= \int cydx \text{fen. } \phi - \int y^2 dy \text{fen. } \phi = c \text{fen. } \phi \cdot GCHM' - \frac{1}{3} y^3 \text{fen. } \phi$$

$+ \text{cost.} = c \cdot GCHM' \cdot \text{fen. } \phi + (\frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} y^3) \text{fen. } \phi =$  alla pressione contro l'area indefinita  $GCHM'$ ; e però la pressione contro tutto il quadrante  $GCD$  farà  $= c \cdot GCD \cdot \text{fen. } \phi +$

$\frac{1}{3} b^3 \text{fen. } \phi = (\frac{c\pi}{4} + \frac{1}{3} b) b^2 \text{fen. } \phi$ , e questa raddoppiata dà la pressione contro il semicircolo  $GRD$ .

*Esempio V.* Sia il quadrante  $GFC$ , che ha il semidiametro inferiore orizzontale  $GC$ ; se ne dimanda la pressione. Si ha  $CG = CF = b$ ,  $FH = x$ ,  $HM = y$ ,  $y^2 = 2bx - x^2$ ,  $x dx = b dx - y dy$ . Adunque  $\int (cydx + yx dx) \text{fen. } \phi =$

$$\int (c + b) y dx \text{fen. } \phi - \int y^2 dy \text{fen. } \phi = (c + b) \cdot FMH \cdot \text{fen. } \phi - \frac{1}{3} y^3 \text{fen. } \phi =$$

alla pressione contro lo spazio indeterminato  $FMH$ . Laonde la pressione totale contro il quadrante diventa  $(\frac{(c+b)\pi}{4} - \frac{1}{3} b) b^2 \text{fen. } \phi$ , e il doppio esprime la pressione contro il semicircolo  $GFR$  col diametro inferiore orizzontale.

*Esempio VI.* Sia lo spazio parabolico  $FBD$  (*Fig. 9*) compreso dall'ordinata inferiore orizzontale  $BD = a$ , e dall'ascif-

fa  $DF = b$ . Supposto  $p$  il parametro della parabola si ha  $y = \sqrt{px}$ . Dunque  $\int (cydx + yxdx) \text{ sen. } \phi = \int cp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx \text{ sen. } \phi$

$$+ \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \text{ sen. } \phi = \left( \frac{2}{3} cx \sqrt{px} + \frac{2}{5} x^2 \sqrt{px} \right) \text{ sen. } \phi =$$

$\frac{2}{3} cxy \text{ sen. } \phi + \frac{2}{5} x^2 y \text{ sen. } \phi =$  alla pressione contro lo spazio  $FMH$  indefinito; e però la pressione contro tutto lo spazio  $FBD$  trovasi  $\left( \frac{2}{3} cba + \frac{2}{5} b^2 a \right) \text{ sen. } \phi$ , e il doppio rappresenta la pressione contro lo spazio parabolico  $BOF$  colla doppia ordinata inferiore orizzontale  $BO$ .

*Esempio VII.* Vogliasi la pressione contro lo spazio parabolico  $ADF$  (*Fig. 10*) circoscritto superiormente dall'ordinata orizzontale  $FA = a$ , e dall'ascissa  $FD = b$ . Essendo  $FH = x$ , ed  $HD = b - x$ , l'equazione della parabola trovasi essere  $y^2 = p(b - x)$ . Adunque  $\int (cydx + yxdx) \text{ sen. } \phi =$

$$\int cdx \sqrt{(pb - px)} \text{ sen. } \phi + \int xdx \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}. \text{ Pon-$$

gasi ora  $\sqrt{(pb - px)} = u$ , ed è  $\int cdx \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)} +$

$$\int xdx \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)} = \int -\frac{2cu^2 du \text{ sen. } \phi}{p}$$

$$+ \int -\frac{2bu^2 du \text{ sen. } \phi}{p} + \int \frac{2u^4 du \text{ sen. } \phi}{p^2} = -\frac{2cu^3 \text{ sen. } \phi}{3p}$$

$$- \frac{2bu^3 \text{ sen. } \phi}{3p} + \frac{2u^5 \text{ sen. } \phi}{5p^2} + \text{const.} = \frac{2(pb - px)^2 \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$$- \frac{2(c + b)(pb - px) \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{3p} + \text{const.}$$

$$= \frac{2}{3} b(c + b) \text{ sen. } \phi \sqrt{pb} - \frac{2}{5} b^2 \text{ sen. } \phi \sqrt{pb}$$

$$+ \frac{2(pb - px)^2 \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$\frac{2(c+b)(pb-px) \text{ sen. } \phi \sqrt{(pb-px)}}{3p}$ , perchè svanisce la

pressione annullandosi la  $x$ . Questo valore esprime la pressione contro lo spazio indefinito  $FAMH$ , e sostituendo in esso  $b$  per  $x$  risulta la pressione totale contro lo spazio parabolico  $FAD = \frac{(10bc + 4b^2) \text{ sen. } \phi \sqrt{pb}}{15}$ , e dal doppio di questo

valore si ha la pressione contro lo spazio  $FADQ$ .

*Esempio VIII.* Cerchisi la pressione contro la femiellisse  $FBD$  (Fig. 11.) situata coll' asse minore  $BQ$  orizzontale. Chiamato  $a$  l' asse maggiore  $FD$ ,  $b$  l' asse minore  $BQ$ , la proprietà dell' ellisse somministra l' equazione  $a^2y^2 = b^2(ax - x^2)$ , e quindi  $x dx = \frac{1}{2} a dx - \frac{a^2 y dy}{b^2}$ . Laonde farà la pressione contro lo spazio indefinito  $FMH = \int (cy dx + yx dx) \text{ sen. } \phi =$

$$\int \left( c + \frac{1}{2} a \right) y dx \text{ sen. } \phi - \int \frac{a^2 y^2 dy \text{ sen. } \phi}{b^2} = \left( c + \frac{1}{2} a \right) . FMH . \text{ sen. } \phi - \frac{a^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^2}$$

, e quindi la pressione totale contro la femiellisse  $= \left( c + \frac{1}{2} a \right) . FDB . \text{ sen. } \phi = \frac{1}{8} \left( c + \frac{1}{2} a \right) \pi ab \text{ sen. } \phi$ , il cui doppio esprime la pressione contro tutta l' ellisse in questa situazione, cioè coll' asse minore orizzontale.

*Esempio IX.* Sia da trovarsi la pressione contro il quadrante ellittico  $BDO$ , situato col diametro minore orizzontale, e rivolto all' insù. Chiamisi  $\frac{1}{2} b$  il semiasse minore  $BO$ ,

$\frac{1}{2} a$  il maggiore  $OD$ ,  $x$  la  $OH$ ,  $y$  la  $HM'$ , e si avrà  $a^2y^2$

$$= b^2 \left( \frac{1}{4} a^2 - x^2 \right), \quad \frac{a^2 y dy}{b^2} = -x dx . \text{ Perciò } \int (cy dx + yx dx) \text{ sen. } \phi$$

$$= c . OBM'H' \text{ sen. } \phi - \frac{a^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^2} + \text{cost.} = c . OBM'H' . \text{ sen. } \phi$$

$$+ \frac{1}{24} a^2 b \text{ sen. } \phi - \frac{a^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^2} = \text{alla pressione contro l' area in-}$$

definita  $OBMH$ . Perlochè la pressione contro tutto il quadrante  $BDO$  farà  $= c \cdot BDO \cdot \text{sen. } \phi + \frac{1}{24} a^2 b \text{ sen. } \phi = \frac{1}{16} \pi cab \text{ sen. } \phi$

$+ \frac{1}{24} a^2 b \text{ sen. } \phi$ , e il doppio di questo valore darà la pressione contro la femiellisse  $BDQ$  avente l'asse minore orizzontale rivolto all'insù.

*Esempio X.* Se fosse da cercarsi la pressione contro il quadrante ellittico  $FBO$ , situato col semiasse minore orizzontale  $BO$  rivoito all'ingìù, basterebbe nell'equazione (*Esemp. VIII.*)

$(c + \frac{1}{2} a) \cdot FMH \text{ sen. } \phi - \frac{a^2 y^2 \text{ sen. } \phi}{3b^2}$  sostituire  $\frac{1}{2} b$  in luogo di

$y$ , d'onde nascerebbe  $\frac{1}{16} (c + \frac{1}{2} a) \pi ab \text{ sen. } \phi - \frac{1}{24} a^2 b \text{ sen. } \phi =$

alla pressione contro il quadrante ellittico  $FBO$ , e il doppio di questo valore esprimerebbe la pressione contro la femiellisse  $FBQ$  coll'asse minore orizzontale rivolto in giù.

*Esempio XI.* Dimandasi la pressione contro la femiellisse  $FBD$  (*Fig. 12*) situata col semiasse maggiore  $BO$  orizzontale, e coll'asse minore  $FD$  inclinato all'orizzonte. Ritenute le denominazioni di prima, trovali per la natura dell'ellisse  $\frac{b^2 y^2}{a^2} = bx - x^2$ , e però  $x dx = -\frac{b^2 y dy}{a^2} + \frac{1}{2} b dx$ . Dunque

$\int (y dx + x dy) \text{ sen. } \phi = (c + \frac{1}{2} b) \cdot FMH \cdot \text{sen. } \phi - \frac{b^2 y^2 \text{ sen. } \phi}{3a^2}$

$=$  alla pressione contro lo spazio indefinito  $FMH$ , e in conseguenza la pressione totale contro la femiellisse risulta

$= \frac{1}{8} (c + \frac{1}{2} b) \pi ab \text{ sen. } \phi$ , il qual valore duplicato dà la pressione

contro tutta l'ellisse  $BFQD$  situata coll'asse maggiore orizzontale e col minore inclinato all'orizzonte.

*Esempio XII.* Se vuolsi la pressione contro il quadrante ellittico  $BDO$  col semiasse maggiore orizzontale rivolto all'

insù; posta  $OH = x$ ,  $HM' = y$ , si ha l'equazione  $\frac{b^2 y^2}{a^2} =$

$\frac{1}{4} b^2 - x^2$ , e quindi  $x dx = -\frac{b^2 y dy}{a^2}$ , e conseguentemente

$\int (cydx + yxdx) \text{ fen. } \phi = c \cdot OBM'H. \text{ fen. } \phi - \frac{b^2 y^3 \text{ fen. } \phi}{3a^2} +$   
 $\text{cost.} = c \cdot OBM'H. \text{ fen. } \phi + \frac{1}{24} b^2 a \text{ fen. } \phi - \frac{b^2 y^3 \text{ fen. } \phi}{3a^2} =$  alla  
 pressione contro lo spazio indefinito  $OBM'H$ ; e però la pres-  
 sione totale contro il quadrante  $BDO$  sarà  $= \frac{1}{16} \pi cab \text{ fen. } \phi$   
 $+ \frac{1}{24} b^2 a \text{ fen. } \phi$ , il qual valore duplicato rappresenta la pres-  
 sione contro la semiellisse  $BDQ$  situata coll' asse maggiore  
 orizzontale rivolto all' insù.

*Esempio XIII.* Se trattasi di trovare la pressione contro il  
 quadrante ellittico  $FBO$  situato col semiasse maggiore oriz-  
 zontale  $BO$  rivolto al basso, allora basta nell' equazione (*Esemp.*  
 XI.)  $(c + \frac{1}{2} b) \cdot FMH. \text{ fen. } \phi - \frac{b^2 y^3 \text{ fen. } \phi}{3a^2}$ , la quale rappre-  
 senta la pressione contro lo spazio indefinito  $FMH$ , sostituire

il quadrante  $FBO$  in vece di  $FMH$ , ed  $\frac{1}{2} a$  in luogo di  
 $y$ , ed hassi  $(c + \frac{1}{2} b) \cdot FBO. \text{ fen. } \phi - \frac{1}{24} b^2 a \text{ fen. } \phi =$   
 $\frac{1}{16} (c + \frac{1}{2} b) \pi ab \text{ fen. } \phi - \frac{1}{24} ab^2 \text{ fen. } \phi =$  alla pressione contro  
 il quadrante ellittico  $FBO$ ; e il doppio di questo valore rap-  
 presenta la pressione contro la semiellisse  $FBQ$  situata coll'  
 asse maggiore orizzontale rivolto all' ingiù.

*Esempio XIV.* Sia da trovarsi la pressione contro lo spa-  
 zio Iperbolico  $FBD$  (*Fig. 13*) circoscritto dall' ordinata oriz-  
 zontale inferiormente  $BD = b$ , e dall' ascissa  $FD = k$  incli-  
 nata all' orizzonte. Nominando  $a$  l' asse principale dell' Iper-  
 bola,  $b$  il conjugato, si fa, l' equazione di questa curva esse-  
 re  $\frac{a^2 y^2}{b^2} = ax + x^2$ , e quindi  $x dx = \frac{a^2 y dy}{b^2} - \frac{1}{2} a dx$ . Perciò

$\int (cydx + yxdx) \text{ fen. } \phi = (c - \frac{1}{2} a) \cdot FMH. \text{ fen. } \phi + \frac{a^2 y^2 \text{ fen. } \phi}{3b^2} =$   
 alla pressione contro lo spazio indefinito  $FMH$ . Laonde la

pressione totale contro lo spazio proposto  $FBD$  sarà =  
 $(c - \frac{1}{2}a) \cdot FBD \cdot \text{sen. } \phi + \frac{a^2 b^3 \text{ sen. } \phi}{3b^3}$ , e il doppio rappresen-  
 terà la pressione contro il doppio spazio  $FBC$ .

*Esempio XV.* Sia finalmente da determinarsi la pressione  
 contro lo spazio iperbolico inverso  $FBD$  (*Fig. 14*) compre-  
 so superiormente dall' ordinata orizzontale  $FB = b$ , e dall'  
 ascissa  $FD = k$ . Posta pertanto  $FH = x$ ,  $HM = y$ , la pro-  
 prietà dell' iperbola somministra l' equazione  $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a(k - x)$   
 $+ (k - x)^2 = ak + k^2 - ax - 2kx + x^2$ , dalla quale si  
 ottiene  $x dx = \frac{a^2 y dy}{b^2} + (\frac{1}{2}a + k) dx$ . Adunque

$$\int (cy dx + yx dx) \text{ sen. } \phi = (c + \frac{1}{2}a + k) \cdot FBMH \cdot \text{sen. } \phi$$

$$+ \frac{a^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^3} + \text{cost.} = (c + \frac{1}{2}a + k) \cdot FBMH \cdot \text{sen. } \phi$$

$$- \frac{a^2 b^3 \text{ sen. } \phi}{3b^3} + \frac{a^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^3} = \text{alla pressione contro lo spazio}$$

indefinito  $FBMH$ . Perlochè la pressione totale contro il da-  
 to spazio  $FBD$  trovasi =  $(c + \frac{1}{2}a + k) \cdot FBD \cdot \text{sen. } \phi$   
 $- \frac{a^2 b^3 \text{ sen. } \phi}{3b^3}$ , il doppio di cui esprime la pressione contro il  
 doppio spazio  $BCD$  situato colla doppia ordinata orizzontale  
 rivolta all' insù.

## PROBLEMA II.

*Nel vaso DAHGFEB (Fig. 15), che ha per base orizzon-  
 tale il rettangolo ADCB, e per uno de' suoi lati ha il rettan-  
 golo DAHG comunque inclinato all' orizzonte, arriva l' acqua  
 fino ad HF; e in un altro vaso DAHGQPRS situato sulla  
 predetta base prolungata ed avente lo stesso lato DAHG giugne  
 l' acqua fino al punto O: cercasi qual sarà la pressione, che sof-  
 fre quel lato secondo una sola e medesima direzione.*

## S O L U Z I O N E .

Tirisi per  $O$  la verticale  $MON$ ; e farà (*Esemp. I.*) la pressione esercitata dall'acqua del primo vaso  $X$  contro il lato rettangolare  $DAHG = DA \cdot AH \cdot \frac{1}{2} MN$ , e la pressione esercitata dall'acqua del secondo vaso  $Z$  contro il lato rettangolare  $OTDA$  sarà  $= DA \cdot AO \cdot \frac{1}{2} MO$ , ed esercitandosi questa seconda pressione in una direzione opposta alla prima si avrà in conseguenza la pressione contro tutto il lato  $DAHG$  verso una sola e medesima direzione  $= DA \cdot AH \cdot \frac{1}{2} MN - DA \cdot AO \cdot \frac{1}{2} MO$ , ovvero (essendo  $NM : MO :: HA : AO$ )  $= \frac{1}{2} MN \cdot DA \cdot AH$

$$= \frac{1}{2} \frac{DA \cdot HA \cdot MO^2}{MN} = \frac{DA \cdot AH}{2MN} (MN^2 - MO^2). \text{ Il che era ecc.}$$

La suddetta pressione seguita adunque la ragione della differenza dei quadrati di  $MN$  e di  $MO$ , cioè delle altezze dell'acqua ne' due vasi.

## P R O B L E M A III.

Sopra il piano inclinato  $NMPO$  (Fig. 16.) giace il vaso prismatico retto pieno d'acqua  $GADHFECB$ , del quale le due faccie opposte  $GADH$ ,  $BFEC$  sono due trapezj paralleli, simili ed uguali, i di cui lati  $BF$ ,  $CE$ ,  $AG$ ,  $DH$ , in questa giacitura del prisma vengono a riuscire verticali, e co' loro estremi  $G$ ,  $H$ ,  $F$ ,  $E$ , giungono allo stesso piano orizzontale; cercasi la pressione contro le due faccie rettangole verticali  $BA$ ,  $GF$ ,  $DHEC$ , e quindi lo sforzo, col quale il prisma tenderà a discendere pel piano inclinato.

## S O L U Z I O N E .

La pressione contro il rettangolo  $GABF$  si è trovata (Esemp. I.)  $= \frac{1}{2} AB \cdot BF^2$ , e quella contro il rettangolo  $DCEH$   $= \frac{1}{2} DC \cdot CE^2 = \frac{1}{2} AB \cdot CE^2$ ; e queste pressioni esercitandosi in direzioni opposte, risulta la pressione, colla quale il prisma viene orizzontalmente spinto alla discesa  $= \frac{1}{2} AB (BF^2 - CE^2)$ .

Il che era ecc.

Pongasi  $AB = a$ ,  $BF = b$ , l'angolo d'inclinazione  $MPQ = \omega$ , e tirata l'orizzontale  $CR = FE = f$ , farà l'angolo  $BCR = \omega$ ,  $BR = f \cdot \text{tang. } \omega = BF - FR = BF - CE$ , cioè  $CE = b - f \cdot \text{tang. } \omega$ . Sarà dunque il trapezio  $BFEC =$

$$\frac{1}{2} FE (BF + CE) = \frac{1}{2} f (2b - f \cdot \text{tang. } \omega), \text{ e quindi il volu-}$$

me del prisma  $= \frac{1}{2} af (2b - f \cdot \text{tang. } \omega)$ . Dicsi  $Q$  il peso di

questo prisma pieno d'acqua; e poichè abbiamo la pressione orizzontale, tendente a far discendere il prisma  $=$

$$\frac{1}{2} a (b^2 - (b - f \cdot \text{tang. } \omega)^2) = \frac{1}{2} af \cdot \text{tang. } \omega (2b - f \cdot \text{tang. } \omega),$$

farà perciò una tal pressione  $= Q \cdot \text{tang. } \omega$ .

Chiamato  $q$  il peso del vaso prismatico vuoto, è noto dalla Statica, che un peso  $Q + q$  situato sopra il detto piano inclinato viene tenuto in equilibrio sul piano stesso da una forza orizzontale  $= (Q + q) \text{ tang. } \omega$ . Ma per tenere in equilibrio il detto prisma pieno d'acqua, non basta una forza orizzontale, la quale sostenga sul piano inclinato il peso  $Q + q$  di quel prisma, richiedendosi inoltre un'altra forza per equilibrare la pressione orizzontale  $Q \cdot \text{tang. } \omega$ . Conseguentemente il prisma viene sostenuto sul piano inclinato da una forza orizzontale  $= (2Q + q) \text{ tang. } \omega$ .

SCOLIO.



## S C O L I O.

Avvertasi qui, che non si è voluto tener conto di quella pressione orizzontale, che risulta dalla pressione contro la base  $ADCB$ , la qual pressione orizzontale riscontrasi eguale e contraria alla già ritrovata, siccome appunto dee succedere, essendo noto, che le pressioni orizzontali si annullano sempre in tutti i vasi, o corpi esposti alla pressione dell'acqua. Rappresenti in fatti il trapezio  $BFEC$  la sezione verticale fatta con un piano verticale e perpendicolare alle due faccie  $GB$ ,  $HC$ ; e la pressione contro la base  $BC$  del trapezio espressa dalla normale  $TX$  si risolva nella verticale  $TY$ , e nella orizzontale  $XY$ , e starà  $TX:XY::BC:BR$ , e però  $XY = \frac{TX \cdot BR}{BC}$ .

Siccome poi la pressione  $TX = BC \cdot \frac{1}{2}(BF + CE)$ , farà  $XY =$

$$\frac{1}{2}(BF + CE) \cdot BR = \frac{1}{2}(BF + CE) \cdot (BF - CE) = \frac{1}{2}BF^2 -$$

$$\frac{1}{2}CE^2, \text{ e questa moltiplicata per } AB \text{ dà la pressione orizzon-$$

tale risultante dalla pressione contro la base  $ADCB$ , che si trova appunto uguale, e contraria alla precedente. E' un errore di non pochi acclamati Scrittori quello di credere, che l'acqua a motivo delle pressioni, con cui spinge ed incalza secondo tutte le direzioni le pareti de' vasi, che la contengono, possa produrre ne' vasi d'una data forma situati sulle loro basi orizzontali un rovesciamento, o capitombolo, laddove all'opposto la stessa acqua ghiacciata lascia il vaso ritto ed immobile sulla sua base; per modo che sia una differenza essenziale in ordine alla sua stabilità, che il vaso si trovi pieno di acqua fluida, oppure d'acqua ghiacciata. Per togliere un tal pregiudizio, e mostrare, che i due stati opposti dell'acqua, cioè di fluidità, e di solidità non possono cagionare la menoma alterazione o divario nello stato del vaso in riguardo al reggersi sulla sua base, o al rovesciarsi, basterà far vedere che la risultante di tutte le pressioni eserci-

tate dall' acqua fluida contro tutte le pareti del vaso perfettamente coincide colla *linea di direzione*, secondo la quale agisce tutto il peso dell'acqua o del ghiaccio. Sia a cagion d' esempio il triangolo verticale  $BAC$  (*Fig. 25*) colla base orizzontale  $BC$ , e suppongasi la sua aja formata d' uno strato di acqua premente contro i lati del triangolo. Tirisi dalla punta  $A$  del triangolo sulla base orizzontale prolungata  $BC$  la perpendicolare  $AM$ . E' noto, che la base  $BC$  soffre una pressione  $= BC \cdot AM$ , che questa pressione passa pel punto di mezzo  $N$  della base, e può rappresentarsi colla retta verticale  $QN$ . Parimente il lato  $AB$  risente una pressione  $=$

$\frac{1}{2} AB \cdot MA$ , la quale passa pel *centro di pressione*  $S$ , che è ai due terzi di  $AB$  contando da  $A$ , come si deduce dalla Teoria del centro di pressione che esporremo più sotto, e può rappresentarsi colla retta  $IS$  normale ad  $AB$ . Risolta poscia la pressione  $IS$  nella orizzontale  $IO$ , e nella verticale  $OS$  tendente all' insù, trovasi  $OS = \frac{BM \cdot IS}{BA} = \frac{1}{2} BM \cdot MA$ . Così pu-

re se la pressione contro il lato  $AC$ , la quale è  $= \frac{1}{2} AC \cdot AM$ , si concepisce applicata al centro di pressione in  $F$  ai due terzi di  $AC$  contando da  $A$ , e si esprime colla retta  $FR$  perpendicolare ad  $AC$ , e si risolve nell' orizzontale  $RP$ , e nella verticale  $FP$  tendente all' ingiù, se ne deduce tosto  $FP = \frac{CM \cdot FR}{AC} = \frac{1}{2} CM \cdot MA$ . Abbiamo dunque tre forze verticali,

che agiscono contro i lati del triangolo, cioè

$$1.^\circ + QN = BC \cdot MA,$$

$$2.^\circ - OS = -\frac{1}{2} BM \cdot MA,$$

$$3.^\circ + FP = \frac{1}{2} CM \cdot MA.$$

La distanza della prima dal punto  $M$  è  $= MC + \frac{1}{2} CB$ ; la

distanza della seconda è  $= \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB$ ; quella del-

la terza è  $= \frac{2}{3} CM$ . Dunque per la dottrina Statica de' Mo-  
menti la distanza della *risultante* di queste tre forze dallo stes-  
so punto *M* farà

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mathcal{Q}N(MC + \frac{1}{2} CB) + FP \cdot \frac{2}{3} CM - OS(\frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CB)}{\mathcal{Q}N + FP - OS} \\
 &= \frac{BC \cdot MA(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{2} CM \cdot MA \cdot \frac{2}{3} CM - \frac{1}{2} BM \cdot MA(\frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CB)}{BC \cdot MA + \frac{1}{2} CM \cdot MA - \frac{1}{2} BM \cdot MA} \\
 &= \frac{BC(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{3} CM^2 - \frac{1}{2}(BC + CM)(\frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB)}{\frac{1}{2} BC}
 \end{aligned}$$

$= \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} BC$ . Ora questa distanza è appunto quella della

linea di *direzione* *EG* dal detto punto *M*; poichè venendo  
essa condotta verticalmente dal centro di gravità *E* del trian-  
golo posto ai due terzi della *AN* che biparte la base, viene

ad essere, a motivo di  $AE = \frac{2}{3} AN$ ,  $GM = \frac{2}{3} NM = \frac{2}{3} MC$

$+ \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} CB$ . Dunque la *risultante* di tutte le  
pressioni contro il perimetro del triangolo coincide colla *li-  
nea di direzione*.

#### P R O B L E M A IV.

*Determinare la pressione dell' acqua contro le pareti curve de'  
vasi rotondi, ossia di rotazione.*

#### S O L U Z I O N E .

Rotili la linea *AMP* (*Fig. 17.*) intorno all' asse vertica-  
le *BD*, e descriva un vaso rotondo, il quale riempiasi d' ac-  
qua. Si cerca la pressione sopra la superficie curva del vaso.  
Condotte le ordinate ortogonali infinitamente vicine *MN*,  
*mn*, e fatta  $PD = a$ ,  $AB = b$ ,  $BD = c$ ,  $BF = x$ ,  $MF$

X ij

$= y$ ,  $AM = s$ , ed  $1:\pi =$  al rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, farà  $2\pi y =$  alla circonferenza del cerchio, che ha  $MF$  per raggio; e però l'elemento della superficie curva del vaso farà  $= 2\pi y$ .  $Mm = 2\pi y ds$ , e la pressione contro questo elemento farà  $= 2\pi y x ds = 2\pi y x \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ . Quindi integrata questa pressione elementare per modo che l'integrale si annulli colla  $x$ , si ottiene la pressione contro la superficie indefinita  $AMNC$ ; e posto poi  $c$  per  $x$  nell'integrale si ha la pressione contro tutta la superficie curva. Il che era ecc.

*Esempio I.* Vuolsi conoscere la pressione contro la superficie curva del cono retto troncato. In tal supposto egli è visibile, che la linea  $AMP$  è  $= \sqrt{(c^2 + (b-a)^2)}$ , cui diremo  $b$ . E' altresì manifesto, che si ha  $s:b::x:c$ , e perciò  $s = \frac{bx}{c}$ , e  $ds = \frac{bdx}{c}$ . Inoltre egli è visibile, che sta

$b-y:x::b-a:c$ ; laonde  $y = b - \frac{(b-a)x}{c}$ . Dunque

$$\int 2\pi y x ds = \int \left( 2bx - \frac{2(b-a)x^2}{c} \right) \frac{\pi b dx}{c} =$$

$\frac{\pi b}{c} \left( bx^2 - \frac{2(b-a)x^3}{3c} \right) =$  alla pressione contro la superficie

curva indefinita  $AMNC$ . Posto  $c$  in luogo di  $x$  si ricava  $2\pi bc \left( \frac{1}{6}b + \frac{1}{3}a \right) =$  alla pressione contro la superficie curva intera del cono troncato.

Il valore di questa pressione assegnato da alcuni celebri Idrostatici è palesemente erroneo, e l'errore è nato per aver essi supposto, che due lati del cono troncato infinitamente vicini rinchiudeffero fra di sè sulla superficie del cono un rettangolo, laddove essi comprendono un trapezio di basi parallele.

*Esempio II.* Si cerca la pressione contro la superficie curva  $BMILN$  (Fig. 18) del segmento sferico generato dalla rotazione dell'arco circolare  $BMI$  intorno al diametro verticale  $BD$ . Essendo  $BF = x$ ,  $MF = y$ , e il raggio del circo-

lo  $= r$ , si ha  $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ , e  $dy = \frac{(r-x) dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ ; e

quindi  $dx^2 + dy^2 = ds^2 = \frac{r^2 dx^2}{y^2}$ , ovvero  $ds = \frac{rdx}{y}$ ; e quest'

ultimo valore surrogato nella formola  $\int 2\pi y x ds$ , ella si tras-

forma in  $\int 2\pi r x dx = \pi r x^2 =$  alla pressione contro la super-

ficie indefinita  $BMN$ . Siccome poi è  $\pi r x^2 = 2\pi r x \cdot \frac{1}{2} x$ , cioè  $=$  alla superficie del segmento moltiplicata per la metà della faetta, o dell' altezza dell' acqua sopra  $MN$ , perciò un tal prodotto rappresenta la pressione suddetta.

*Esempio III.* Se la superficie del segmento sferico fosse  $PDS$  colla base orizzontale rivolta all' insù; allora posta  $RU = x$ ,  $UM' = y$ ,  $RD = b$ , e però  $DU = b - x$ , l'equazione del circolo dà  $y = \sqrt{(2r(b-x) - (b-x)^2)}$ , e quindi  $dy = \frac{-rdx + (b-x) dx}{\sqrt{(2r(b-x) - (b-x)^2)}}$ ,  $dy^2 + dx^2 = \frac{r^2 dx^2}{y^2}$ ,

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = ds = \frac{rdx}{y}$ . Dunque  $\int 2\pi y x ds = \int 2\pi r x dx$

$= \pi r x^2$ , vale a dire la pressione contro la superficie indefi-

nita  $PM'NS$  equivale al prodotto della superficie istessa moltiplicata per la metà della sua faetta, o ascissa  $RU$ , ovvero per la metà dell' altezza dell' acqua sopra  $M'N$ .

Laonde la superficie curva d' un segmento sferico pieno d' acqua, o sia esso a foggia di cupola, o sia rinchiuso fra due cerchj paralleli soffre una pressione, che ha per misura la stessa superficie moltiplicata per la metà della faetta. Osservisi qui, che sempre nel mezzo della faetta trovasi il centro di gravità della superficie curva del segmento.

La formola  $\int 2\pi y x ds$  dà la pressione contro la superficie curva del vaso soltanto nell' ipotesi, che l' acqua non oltrepassi l' orlo superiore del vaso, ed abbia  $x$  per altezza sopra

L'elemento della superficie: che se l'acqua giugnesse più su della superficie del vaso per modo che l'altezza di quella sopra l'orlo di questo fosse  $=b$ , è chiaro, che in tal caso la formola della pressione diverrebbe  $\int 2xy(b+x)ds$ , la quale si tratta con ugual facilità che la prima.

### PROBLEMA V.

*Nell'argine, o riparo rettangolare OPMN d'un fiume (Fig. 16.) giugne l'acqua da OP fino ad IK; cercasi lo sforzo, con cui l'argine sarà spinto dall'acqua orizzontalmente, e quello, con cui sarà spinto dalla medesima all'ingiù verticalmente.*

### SOLUZIONE.

Chiamato  $\omega$  l'angolo d'inclinazione  $MPQ$  dell'argine,  $PK=a$ ,  $KI=PO=b$ , e la verticale  $KU=b$ , risulta la pressione contro l'argine (*Probl. I. Esemp. I*)  $=\frac{1}{2}abb = \frac{bb^2}{2 \text{ sen. } \omega}$ .

Ma questa pressione si esercita in una direzione  $KS$  perpendicolare al piano dell'argine; perciò se ne faccia la risoluzione nelle due pressioni laterali  $KL$ ,  $KZ$ , quella orizzontale, questa verticale. Ora è noto dalla Statica, che sta  $KS:KL:LS :: 1:\text{sen } \omega:\text{cos. } \omega :: \text{Presf. perpend.}:\text{Presf. orizz.}:\text{Presf. vertic.}$   
 Dunque Presf. orizz.  $=\frac{bb^2}{2 \text{ sen. } \omega} \text{ sen. } \omega = \frac{1}{2}bb^2$ ; Presf. vertic.  $=\frac{bb^2}{2 \text{ sen. } \omega} \text{ cos. } \omega = \frac{1}{2}bb^2 \text{ cot. } \omega$ . Il che era ecc.

### PROBLEMA VI.

*Una cataratta, ossia una tavola rettangolare verticale chiude in un canale, o cisterna all'acqua l'uscita: cercasi quanta forza sia d'uopo per alzarla, e dar l'esito all'acqua.*

## S O L U Z I O N E.

Detta  $b$  la base della cataratta,  $a$  l' altezza,  $c$  la distanza del suo lato superiore dal pian di livello, che si suppone più alto, si fa per le cose già dimostrate, che la pressione contro la cataratta è  $= ab \left( \frac{1}{2} a + c \right)$ . Con siffatta pressione è dunque

direttamente spinta la cataratta contro gl' incastri. Laonde supposto l' attrito una parte  $n$ .<sup>esima</sup> della pressione, risulterà l' attrito della cataratta cogl' incastri  $= \frac{1}{2n} ab (a + 2c)$ , ed aggiunto a questo il peso  $p$  della cataratta, ci vorrà una forza

$= \frac{ab(a + 2c) + 2np}{2n}$  per far equilibrio colla resistenza della cataratta, e un pò maggiore per sollevarla. Il che era ecc.

Reca meraviglia il vedere presso alcuni celebri moderni Scrittori di Meccanica, che per calcolare la forza necessaria a sollevare la cataratta non solamente si mette in conto la resistenza dello sfregamento contro gl' incastri, ed il peso della cataratta, ma ben anche la pressione totale esercitata dall' acqua contro il piano della cataratta, e si stabilisce in conseguenza, dover essere la detta forza un pò maggiore della somma di queste tre. Ma essendo la pressione dell' acqua contro la cataratta perpendicolare alla medesima, ed anche alla direzione della forza, che tende a sollevarla, è cosa innegabile, che l' una non può nè punto nè poco impedire l' effetto dell' altra e non può quindi la pressione entrare nel calcolo se non per quella parte che costituisce lo sfregamento.

Se il lato superiore della cataratta giugne al pian di livello, ovvero è  $c = 0$ , egli è evidente, che a misura che la cataratta si va inalzando una minor parte di essa resta esposta alla pressione dell' acqua. Suppongasi inalzata di tanto, che la distanza del suo lato inferiore dal pian di livello sia  $= x$ ,

e però la pressione in tal caso diventi  $= \frac{1}{2} bx^2$ , e l' attrito  $=$

$\frac{bx^2}{2n}$ . La forza motrice, colla quale la cataratta tende a di-

scendere, qualora venga abbandonata, trovasi  $= p - \frac{bx^2}{2n}$ , e

l'acceleratrice  $= 1 - \frac{bx^2}{2np}$ . Perciò chiamato  $t$  il tempo, in cui

la cataratta discende per l'altezza  $x$ ,  $v$  la sua velocità nel termine del tempo  $t$ , si avrà  $(1 - \frac{bx^2}{2np})dt = dv$ , cioè, essen-

do  $dt = \frac{dx}{v}$ , si otterrà  $(1 - \frac{bx^2}{2np})dx = vdv$ , ed integran-

do  $x - \frac{bx^3}{6np} = \frac{1}{2}v^2$ ,  $v = \sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3np})}$ , e quindi

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3np})}}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3np})}}. \quad \text{Ma se } p < \frac{bx^2}{2n},$$

allora la cataratta non discende, e fa d'uopo d'una forza capace di vincer l'attrito per farla discendere. Sia questa forza

il peso  $q$ , ed avremo  $q + p - \frac{bx^2}{2n} =$  alla forza motrice

della discesa, e però  $1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)} =$  alla acceleratrice.

Laonde  $(1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)})dx = vdv$ ,  $x - \frac{bx^3}{6n(p+q)} = \frac{1}{2}v^2$ ,

$$v = \sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)})}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)})}}.$$

Qualora vogliasi sollevare la cataratta, dicasi  $f$  la forza impiegata per sollevarla, e sia  $a - x$  la di lei falita nel tempo  $t$  colla velocità  $v$ . La forza motrice della falita farà dunque

$f - p - \frac{bx^2}{2n}$ , e però  $\frac{2nf - 2np - bx^2}{2n(f+p)}$  farà la forza ac-

celeratrice. Conseguentemente si ottiene

$$\frac{(2nf - 2np - bx^2)dx}{2nf + 2np} = vdv, \quad \text{e quindi}$$

(2nf -



$$\frac{(2nf - 2np)x - \frac{1}{7}bx^3}{2nf + 2np} = \frac{1}{2}v^2 + \text{cost.}, \text{ ed essendo } v=0. \text{ quan-}$$

do  $x=a$ , si ha  $v^2 = \frac{(2nf - 2np)(x-a) + \frac{1}{7}b(a^3 - x^3)}{n(f+p)}$ , cioè

$$v = \sqrt{\frac{(2nf - 2np)(x-a) + \frac{1}{7}b(a^3 - x^3)}{n(f+p)}}; \text{ e finalmente}$$

$$t = \int \frac{dx \sqrt{(n(f+p))}}{\sqrt{((2nf - 2np)(x-a) + \frac{1}{7}b(a^3 - x^3))}}.$$

*Del Centro di Pressione.*

Una cosa degna di considerazione nella Dottrina della pressione dei Fluidi è quella, che riguarda il *Centro di Pressione*. Dicesi pertanto Centro di pressione quel punto della superficie premuta, nel quale si concepisce concentrata e raccolta l'intera pressione, che è distribuita e dispersa per tutti i punti della superficie; ovvero quel punto, al quale applicata una forza uguale e contraria all'intera pressione bilancia e distrugge tutto l'effetto di questa, per modo che se la pressione tende ad imprimere alla superficie un moto qualunque, la forza uguale e contraria applicata al centro della pressione impedisce e distrugge un tal moto.

P R O B L E M A VII.

*Ritrovare il Centro di pressione di qualunque superficie piana BAFG (Fig. 19) divisa in due parti uguali e simili dalla linea delle ascisse MI, ed immersa dentro un fluido omogeneo a qualunque profondità, e sotto qualunque inclinazione al pian di livello, purchè le ordinate AM, CE, ecc. siano parallele al detto piano.*

S O L U Z I O N E.

La comune fezione del pian di livello, e del piano proposto GFAB prodotto sia la retta OQ, e condotte le due dop-

pie ordinate infinitamente prossime  $CD$ ,  $cd$ , lo spazietto  $CDdc$  farà l'elemento dell'area indefinita  $ACDB$ . Ora questo elemento soffre dal fluido, che vi gravita sopra, una pressione equivalente al peso d'un volume di fluido che nasce dal moltiplicare l'elemento per la sua distanza dal pian di livello, la qual distanza è per ipotesi la stessa per tutti i punti di detto elemento. Si conduca  $EO$  normale ad  $OQ$ , e dal punto  $O$  si guidi nel pian di livello la  $OR$  normale all'istessa  $OQ$ , e finalmente alla  $OR$  s'inalzi dal punto  $E$  la perpendicolare  $ER$ : egli è manifesto, che  $ER$  farà la mentovata distanza, ed  $EOR$  l'angolo d'inclinazione del dato piano all'orizzonte; e conseguentemente l'elemento  $CDdc$  moltiplicato per  $ER$  rappresenta la pressione elementare contro il piano indefinito  $CABD$ . Considerata pertanto questa pressione elementare a guisa d'un peso, il quale si riferisce alla retta  $OQ$  come all'asse de' momenti, risulta per le dottrine della Statica il momento della pressione elementare con moltiplicare questa per la distanza  $EO$  dall'asse de' momenti. Presa dunque sulla linea delle ascisse la  $ME = x$ , l'ordinata  $EC = y$ ,  $MN = a$ , l'angolo delle coordinate ovvero  $ENO = \phi$ , l'inclinazione del piano all'orizzonte, ossia l'angolo  $EOR = \omega$ , si ottiene  $EO = (a + x) \text{sen. } \phi$ ,  $ER = (a + x) \text{sen. } \phi \text{ sen. } \omega$ ,  $CDdc = 2ydx \text{ sen. } \phi$ . Laonde il momento della pressione elementare trovati  $= 2ydx (a + x)^2 \text{sen. } \omega \text{ sen. }^3 \phi$ ; e quindi la somma de' momenti delle pressioni nell'area indefinita  $ABDC$  farà  $=$

$\int 2ydx (a + x)^2 \text{sen. } \omega \text{ sen. }^3 \phi$ . Una tal somma per le dottrine della Statica debb'essere uguale al momento, che ha tutta la pressione esercitata contro l'area medesima  $ABDC$ , qualora essa pressione si concepisca concentrata e raccolta nel centro di pressione, e riferita all'istesso asse  $OQ$ . Perciò essendo tutta la pressione contra l'area indefinita  $=$

$\int 2ydx (a + x) \text{sen. } \omega \text{ sen. }^2 \phi$ , se si chiama  $\Delta$  la distanza del centro di pressione dall'asse de' momenti si avrà l'uguaglià  $\int 2ydx (a + x) \text{sen. } \omega \text{ sen. }^3 \phi = \Delta \int 2ydx (a + x) \text{sen. } \omega \text{ sen. }^2 \phi$ ,

e conseguentemente  $\Delta = \frac{\int y dx (a+x)^2 \text{sen. } \phi}{\int y dx (a+x)}$ . Ritrovata per

tal modo la distanza del centro di pressione dall'asse de' momenti, ed essendo altronde evidente, che non può il detto centro uscire dalla linea delle ascisse  $MI$ , la quale divide per ipotesi il dato piano in due parti simili, ed uguali, resterà in conseguenza determinata la posizione del centro di pressione. Il che era ecc.

Supposte le ordinate ortogonali, cioè  $\phi = 90^\circ$ , ed oltracciò  $a = 0$ , il valore di  $\Delta$  si trasforma in quest'altro più semplice

$$\frac{\int y x^2 dx}{\int y x dx}.$$

*Esempio I.* Cercasi il centro di pressione nel parallelogrammo  $ABGF$  (*Fig. 20.*) nell'ipotesi, che il suo lato superiore  $AB$  sia nel pian di livello. Dicali  $ME = x$ ,  $CE = AM = y = b$ ,  $MI = c$ . Si avrà per l'area indefinita  $ACDB$  il valore di  $\Delta = \frac{\int b x^2 dx \text{sen. } \phi}{\int b x dx} = \frac{\frac{1}{3} b x^3 \text{sen. } \phi}{\frac{1}{2} b x^2} = \frac{2}{3} x \text{sen. } \phi$ , e per tutto il paral-

lelogrammo  $FABG$  si avrà  $\Delta = \frac{2}{3} c \text{sen. } \phi$ , cioè il centro  $P$  di pressione si trova a due terzi di  $MI$  contando da  $M$ , posciachè  $MP$  è  $= \frac{2}{3} MI$ .

Nel parallelogrammo  $QABR$ , la di cui base passa per  $P$  centro di pressione del dato, trovasi del pari il centro di pressione in  $O$  a due terzi di  $MP$ , cioè a quattro noni di  $MI$ , essendo  $MO = \frac{2}{3} MP = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} MI = \frac{4}{9} MI$ . La distanza  $OP$  de' due centri di pressione  $O, P$  è  $= \frac{2}{9} MI$ .

Volendosi poi il centro di pressione nel parallelogrammo  $FQRG$ , il di cui lato superiore  $QR$  passa pel centro di pressione del dato  $FABG$ , convien ricorrere alla formola

$$\frac{\int y (a+x)^2 dx \text{sen. } \phi}{\int y (a+x) dx}, \text{ e porre } a = MP = \frac{2}{3} c, \text{ donde si raccoglie } \Delta = \frac{\int b (\frac{2}{3} c + x)^2 dx \text{sen. } \phi}{\int b (\frac{2}{3} c + x) dx} = \frac{(\frac{4}{9} c^2 x + \frac{4}{3} c x^2 + \frac{1}{9} x^3) \text{sen. } \phi}{\frac{2}{3} c x + \frac{1}{2} x^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{7}(4c^2 + 6cx + 3x^2) \text{ sen. } \phi}{4c + 3x}. \text{ E perciò posto } x = PI = \frac{1}{3}c,$$

$$\text{risulta } \Delta = \frac{\frac{2}{7} \text{ sen. } \phi (4c^2 + 2c^2 + \frac{1}{3}c^2)}{4c + c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{19c \text{ sen. } \phi}{15} =$$

$\frac{38}{45} c \text{ sen. } \phi$ ; e in conseguenza il centro  $U$  di pressione del pa-

rallelogrammo  $\mathcal{Q}G$  è situato ai  $\frac{38}{45}$  della retta  $MI$ , contando

da  $M$ . Di qui si deduce, che  $PU$  è  $= \frac{8}{15} PI$ .

Stando sempre a quest' esempio, egli è manifesto, che essendo nel parallelogrammo  $AG$  il centro di pressione in  $P$ , e però uguali i momenti intorno a  $P$ , rimarrà fisso ed immobile il parallelogrammo qualora sia puntellato in  $P$ .

Se si costruirà una cataratta parallelogramma  $AG$  avente i lati  $AB$ ,  $FG$  orizzontali, e questa mobile intorno a due assi piantati in  $\mathcal{Q}$  ed in  $R$ , estremità della orizzontale  $\mathcal{Q}R$ , la quale passa per  $P$  ai due terzi  $MI$ , la cataratta rimarrà chiusa tutte le volte, che l'acqua ascenderà fino al lato superiore  $AB$ ; il che è manifesto dalle cose precedenti: per lo contrario ella si aprirà rotandosi intorno agli assi  $\mathcal{Q}$  ed  $R$  tanto se l'acqua non arriverà fino in  $AB$ , quanto se oltrepasserà  $AB$ . Imperciocchè se l'acqua resta al di sotto di  $AB$ , per esempio in  $CD$ , il centro di pressione del parallelogrammo  $CG$  trovasi ai due terzi di  $EI$ , come  $P$  è ai due terzi di  $MI$ ; e però il predetto centro di pressione casca al di sotto di  $P$ : onde avviene, che la cataratta per la spinta dell'acqua è costretta a rotarsi intorno ai due assi, la parte inferiore  $\mathcal{Q}G$  volgendosi dal di dentro al di fuori, e la superiore  $\mathcal{Q}B$  dal di fuori al di dentro per riguardo al luogo occupato dall'acqua. Che se l'acqua oltrepassa  $AB$ , e giugne fino in  $K$ , allora ricorrendo alla formola  $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y(a+x) dx}$ , e posto  $KM = a$ ,  $y = b$ , si ottiene  $\Delta = \frac{\int (a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int (a+x) dx} = \frac{(a^2 + ax + \frac{1}{3}x^2) \text{ sen. } \phi}{a + \frac{1}{2}x}$ , e fatto  $x = c$ , si ha  $\Delta = \frac{(a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2) \text{ sen. } \phi}{a + \frac{1}{2}c}$ . Laonde se

O è il centro di pressione della cataratta *AG* in questa ipotesi, farà  $KO = \frac{a^2 + ac + \frac{1}{7}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$ , valore manifestamente minore

di  $a + \frac{2}{3}c$ , vale a dire di *KP*. Dunque il centro di pressione della cataratta in questo caso casca al di sopra di *P*, e conseguentemente l'urto dell'acqua obbliga la cataratta ad aprirsi, e a volgerli intorno agli assi, movendosi in fuori la parte superiore *QB*, e in dentro l'inferiore *QG*.

*Esempio II.* Si vuol sapere il centro di pressione nel piano triangolare *FMG* (*Fig. 21*) situato colla base orizzontale all'ingiù. Essendo in questo caso  $CE = y = \frac{bx}{c}$ , si sosti-

tuisce questo valore nella formola  $\frac{\int y (a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y (a+x) dx}$ , e si ottiene  $\Delta = \frac{\int (a+x)^2 x dx \text{ sen. } \phi}{\int (a+x) x dx} = \frac{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{3}x^2) \text{ sen. } \phi}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}x}$   
 $= \frac{(6a^2 + 8ax + 3x^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 4x}$ , e fatto  $x = c = MI$ , si ha per

tutto il piano triangolare *FMG*,  $\Delta = \frac{(6a^2 + 8ac + 3c^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 4c}$ .

Se il pian di livello passa pel vertice *M* del triangolo sicchè sia  $MK = a = 0$ , risulta  $\Delta = \frac{3}{4}c \text{ sen. } \phi$ , il che indica, che in questo supposto il centro di pressione trovasi a tre quarti di *MI* contando d'alto in basso.

Situato il triangolo colla base orizzontale rivolta all'insù (*Fig. 22.*), e fatta  $KM = a$ ,  $MA = b$ ,  $MI = c$ ,  $ME = x$ ,  $EC = y = \frac{b}{c}(c-x)$ , la formola  $\frac{\int y (a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y (a+x) dx}$  diventa  
 $\frac{\int (c-x)(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int (c-x)(a+x) dx} =$   
 $\frac{\int (a^2c + 2acx - a^2x + cx^2 - 2ax^2 - x^3) dx \text{ sen. } \phi}{\int (ca + cx - ax - x^2) dx} =$

$$\frac{(a^2c + acx - \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{7}cx^2 - \frac{2}{7}ax^2 - \frac{1}{4}x^3) \text{ fen. } \phi}{ca + \frac{1}{2}cx - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{7}x^2} = \Delta \text{ per l' area}$$

indefinita  $ACDB$ . Quindi fatto  $x = c$ , si ha per tutto il triangolo  $AIB$ ,  $\Delta = \frac{(6a^2 + 4ac + c^2) \text{ fen. } \phi}{6a + 2c}$ ; e se vuolsi, che

l'acqua non ascenda oltre il lato superiore  $AB$ , sicchè sia  $a = 0$ , nasce allora  $\Delta = \frac{1}{2}c \text{ fen. } \phi$ , che è quanto dire, che il centro di pressione trovasi in tal caso nel mezzo della retta  $MI$ .

*Esempio III.* Cercasi il centro di pressione nella parabola Apolloniana  $CMD$  (*Fig. 23*) situata dentro il fluido colle ordinate all'asse orizzontali, e col vertice rivolto in alto. Chiamato  $p$  il parametro,  $y$  la  $CE$ ,  $x$  la  $ME$ , si ha  $y = \sqrt{px}$ ,  $\phi = 90^\circ$ ,  $MK = a$ . Laonde la formola

$$\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ fen. } \phi}{\int y(a+x) dx} \text{ diventa } \frac{\int (a^2\sqrt{px} + 2ax\sqrt{px} + x^2\sqrt{px}) dx}{\int (a\sqrt{px} + x\sqrt{px}) dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}a^2x\sqrt{px} + \frac{4}{7}ax^2\sqrt{px} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{px}}{\frac{2}{3}ax\sqrt{px} + \frac{2}{7}x^2\sqrt{px}} = \frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{7}ax + \frac{1}{7}x^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{7}x}$$

$$= \frac{35a^2 + 42ax + 15x^2}{35a + 21x} = \Delta. \text{ Nel caso che l'acqua non oltrepassi il vertice della parabola, ovvero che sia } a = 0 \text{ nasce}$$

scè  $\Delta = \frac{30}{42}x = \frac{5}{7}x$ ; vale a dire il centro di pressione trovasi a cinque settimi dell'ascissa  $ME$  contando dal vertice.

Ma se il piano parabolico si capovolge, e rimanendo colle ordinate orizzontali si riduce col vertice in giù (*Fig. 24*), allora posta  $MI = c$ ,  $ME = x$ ,  $CE = y$ , l'equazione della parabola somministra  $y = \sqrt{(pc - px)}$ ; ond'è, che surrogato questo valore nella formola nota, si deduce  $\Delta =$

$$\frac{\int dx(a+x)^2 \sqrt{(pc-px)}}{\int dx(a+x) \sqrt{(pc-px)}}. \text{ Per poter eseguire le integrazio-}$$

ni richieste, facciasi  $\sqrt{pc - px} = z$ , e si avrà  $x = c - \frac{z^2}{p}$ ;

$$dx = -\frac{2zdz}{p}, \quad a+x = a+c - \frac{z^2}{p}. \quad \text{Perciò si ricava } \Delta =$$

$$\frac{\int -z^2 dz \left( a+c - \frac{z^2}{p} \right)^2}{\int -z^2 dz \left( a+c - \frac{z^2}{p} \right)} = \frac{\frac{2}{5p}(a+c)z^5 - \frac{1}{7}(a+c)^2 z^3 - \frac{1}{7p^2} z^7 + \text{cost.}}{\frac{1}{5p} z^5 - \frac{1}{7}(a+c) z^3 + \text{cost.}}$$

Laonde sostituendo in quest' espressione il valore di  $z$ , si ottiene  $\Delta =$

$$+ c) (pc - px)^2 \sqrt{(pc - px) - \frac{1}{7}(a+c)^2 (pc - px) \sqrt{(pc - px) - \frac{1}{7p^2} (pc - px)^2 \sqrt{(pc - px) + \text{cost.}}}$$

$$\frac{1}{5p} (pc - px)^2 \sqrt{(pc - px) - \frac{1}{7}(a+c) (pc - px) \sqrt{(pc - px) + \text{cost.}}$$

Per determinare le costanti, avvertasi, che quando è  $x=0$  s'annulla così l'integrale del numeratore, cioè la somma de' momenti, come l'integrale del denominatore, cioè la somma delle pressioni. Conseguentemente la cost. del numeratore farà  $= \frac{1}{7} pc^2 \sqrt{pc} - \frac{1}{3} (a+c)^2 pc \sqrt{pc} - \frac{2}{5} (a+c) pc^2 \sqrt{pc}$ ,

e la cost. del denominatore farà parimente  $= \frac{1}{3} (a+c) pc \sqrt{pc}$

$$- \frac{1}{5} pc^2 \sqrt{pc}. \quad \text{Dunque } \Delta =$$

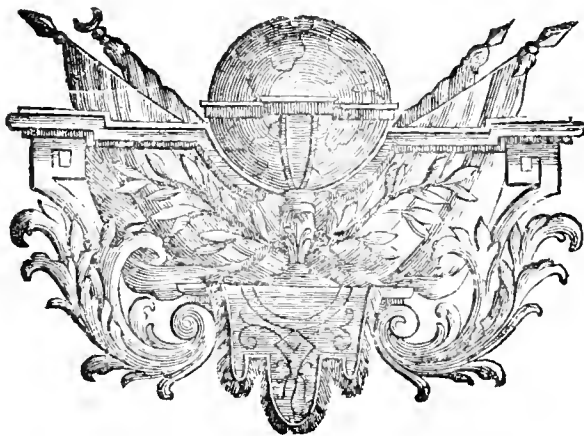
$$+ c) (pc - px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(a+c)^2 (pc - px)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7p^2} (pc - px)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{7} pc^2 \sqrt{pc} + \frac{1}{7}(a+c)^2 pc \sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c) pc^2 \sqrt{pc}$$

$$\frac{1}{5p} (pc - px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(a+c) (pc - px)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{7}(a+c) pc \sqrt{pc} - \frac{1}{5} pc^2 \sqrt{pc}$$

che dà il centro di pressione per lo spazio indefinito  $ACDB$ . Se pertanto in questa espressione si assume  $x=c$  per avere il centro di pressione di tutto lo spazio definito  $AIB$  si trova dopo le debite trasformazioni  $\Delta = \frac{8c^2 + 35a^2 + 28ac}{35a + 14c}$ .

Da ciò s' inferisce, che qualora l' acqua non salga oltre l' ordinata  $AM$ , e però si abbia  $a=0$ , il centro di pressio-

158      SOPRA LA PRESSIONE DE' FLUIDI.  
ne è situato a quattro settimi dell' ascissa definita  $MI$  contando dall' alto. Conseguentemente stando in questo supposto di  $a=0$ , il centro di pressione nella parabola diritta è d' un quarto più distante dal pian di livello, che nella parabola rivoltata.





# I N D A G I N I

## NEL CALCOLO INTEGRALE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

Essendomi proposto di applicare il metodo mio adoperato nella XIV. Prop. della Mem. sul Calcolo Integrale dell'equazioni differenziali finite, inferita nel I. Vol. della *Società Italiana*, all' integrazione dell' equazione differenziale

$$M = y + P \frac{dy}{dx} + Q \frac{ddy}{dx^2} + R \frac{d^2y}{dx^3} \text{ ecc.} \dots \dots + T \frac{d^n y}{dx^n};$$

e le prime operazioni avendone chiamato successivamente dell'altre, il lavoro di faggio in faggio prese forma, e questa n'è poi venuto, qualunque ella sia, non lunga indagine, che vo' credere non totalmente indegna dell' attenzione de' Geometri. Ogni passo, ogni nuova apertura d' integrabilità è somamente pregevole in questa sorta di equazioni, che vengono sì sovente in campo nelle Scienze Meccaniche, e nell' Astronomia fisica, e che non senza ragione hanno meritato lo studio de' Signori d' *Alembert*, *Eulero*, de la *Grange*, de *Condorcet*, *Bezout*, de la *Place*, e di altri illustri Matematici.

Trattando queste materie con nuovi artifizj, siccome ho fatto, traluce sempre raggio d' incognita verità, che mena a qualche avanzamento indubitatamente; del che potrà accertarli chi vorrà al progresso di questa Memoria attendere con qualche accuratezza.

### PROPOSIZIONE I.

§. I. *Trasformare l' equazione (A)*

$$(A) \dots M = y + P \frac{dy}{dx} + Q \frac{ddy}{dx^2} + R \frac{d^2y}{dx^3} \text{ ecc.} \dots \dots + T \frac{d^n y}{dx^n}$$

in cui  $dx$  è costante,  $M P Q R$  ecc. sono funzioni qualunque della variabile  $x$ , per modo che la sua risoluzione dipenda da due equazioni del grado  $n-1$ .

## R I S O L U Z I O N E.

Si ponga  $y = \mu^{\int z dx} \int (u dx \cdot \mu^{-\int z dx})$ , essendo  $z$  ed  $u$  due nuove variabili,  $\mu$  il numero di cui l'unità è il logaritmo iperbolico. Passando ai differenziali dell'ordine  $n$ , si avrà

$$\begin{aligned} d^n y &= z d^{n-1} y dx + \frac{n-1}{1} dz d^{n-2} y dx \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d^2 z d^{n-3} y dx \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 z d^{n-4} y dx \dots + d^{n-2} u dx. \end{aligned}$$

Dunque sostituendo successivamente 1, 2, 3 ecc. per  $n$  farà

$$\text{I. } dy = z y dx + u dx$$

$$\text{II. } ddy = z dy dx + dz y dx + d u dx$$

$$\text{III. } d^3 y = z ddy + 2 dz dy dx + ddz y dx + dd u dx$$

ecc.

Si sostituiscia nel II. differenziale il valore di  $dy$  tratto dal I. e si avrà

$$(\text{II.}) ddy = z^2 y dx^2 + z u dz^2 + y dz dx + d u dx$$

e similmente nel III. differenziale si ponga il valore di  $dy$  ricavato dal I., e il valore di  $ddy$  ricavato dal (II.) e così successivamente; ne risulterà per ordine

$$(\text{I.}) dy = z y dx + u dx$$

$$(\text{II.}) d^2 y = z^2 y dx^2 + z u dx^2 + y dx dz + d u dx$$

$$\begin{aligned} (\text{III.}) d^3 y &= z^3 y dx^3 + z^2 u dx^3 + z d u dx^2 + 3 z y dz dx^2 + 2 u dz dx^2 \\ &+ y d^2 z dx + d^2 u dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{IV.}) d^4 y &= z^4 y dx^4 + z^3 u dx^4 + z^2 d u dx^3 + 6 z^2 y dz dx^3 \\ &+ z d d u dx^3 + 5 u z dz dx^3 + 3 y dz^2 dx^2 + 3 d u dz dx^2 \end{aligned}$$

$$+ 4zyddzdx^2 + 3uddzdx^2 + yd^3zdx + d^3udx$$

ecc.

Si sostituiscano tutti questi valori nell'equazione (A); prenderà ella la seguente forma

$$M = y + P(z^2y + u) + Q\left(z^2y + zu + \frac{ydz}{dx} + \frac{du}{dx}\right) \\ + R\left(z^3y + z^2u + \frac{zdu}{dx} + \frac{3zydz}{dx} + \frac{zudz}{dx} + \frac{yddz}{dx^2} + \frac{ddu}{dx^2}\right) \\ + S\left(z^4y + z^3u + \frac{z^2du}{dx} + \frac{6z^2ydz}{dx} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{5uzdz}{dx} + \frac{3ydz^2}{dx^2} \right. \\ \left. + \frac{3dudz}{dx^2} + \frac{4zyddz}{dx^2} + \frac{3uddz}{dx^2} + \frac{yd^3z}{dx^3} + \frac{d^3u}{dx^3}\right) \\ + \text{ecc.}$$

Di questa equazione se ne faccian due, una delle quali contenga in ogni termine la variabile lineare  $y$ , e l'altra abbracci il complesso di tutti gli altri termini, che non la comprendono; e si avranno le equazioni (B) (C)

$$(B) \dots 0 = 1 + Pz + Q\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + R\left(z^3 + \frac{3zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right) \\ + S\left(z^4 + \frac{6z^2dz}{dx} + \frac{3dz^2}{dx^2} + \frac{4zdz^2}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

$$(C) \dots M = Pu + Q\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + R\left(z^2u + \frac{zdu}{dx} + \frac{zudz}{dx} + \frac{ddu}{dx^2}\right) \\ + S\left(z^3u + \frac{z^2du}{dx} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{5uzdz}{dx^2} + \frac{3dudz}{dx^2} + \frac{3uddz}{dx^2} \right. \\ \left. + \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

ognuna delle quali farà del grado  $n - 1$  relativamente all'equazione principale (A). Ma dalla risoluzione delle equazioni (B), (C) dipende manifestamente la risoluzione dell'equazione (A). Dunque si è trasformata ecc. Il che ecc.

## C O R O L L A R I O I.

§. II. Che se nell'equazione (A) si supponga la funzione  $M=0$ , e si faccia  $dy = z y dx$ , l'equazione (C) non ha più luogo, e ne risulta la sola equazione (B). Dunque reciprocamente l'equazione (B) può sempre trasformarsi nell'equazione (A), in supposizione di  $M=0$ , con la sostituzione  $z = \frac{dy}{y dx}$ .

## C O R O L L A R I O II.

§. III. E quanto all'equazione (C), ella si riduce agevolmente alla forma dell'equazione (A). Imperciocchè facendo tutti li coefficienti di  $u = \Delta$ , li coefficienti di  $\frac{du}{dx} = \Delta'$ , di  $\frac{d^2u}{dx^2} = \Delta''$  ecc. e di poi  $\frac{\Delta'}{\Delta} = P'$ ,  $\frac{\Delta''}{\Delta} = Q'$  ecc.  $\frac{M}{\Delta} = M'$ , e ordinando finalmente l'equazione per  $u$ , si avrà l'equazione (C).....  $M' = u + P' \frac{du}{dx} + Q' \frac{d^2u}{dx^2}$  ecc. .... +  $T' \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$  ch'è della forma (A).

## C O R O L L A R I O III.

§. IV. In conseguenza se nell'equazione precedente (C) si ponga  $du = z' u dx + u' dx$ ,  $z'$ ,  $u'$  essendo due nuove variabili, la si farà dipendere (§. I) dalle due equazioni (B') (C') del grado  $n-2$

$$(B') \dots \dots 0 = 1 + P' z' + Q' (z'^2 + \frac{dz'}{dx}) + \text{ecc.}$$

$$(C') \dots \dots M' = P' u' + Q' (z' u' + \frac{du'}{dx}) + \text{ecc.}$$

E con una simile introduzione di due nuove variabili  $z'' u''$  si farà dipendere l'equazione (C') da due (B'') (C'') del grado  $n-3$ , e così successivamente, di modo che si perverrà in fine ad un' equazione finita, siccome è manifesto.

## PROPOSIZIONE II.

§. V. L' integrale completo dell' equazione (A)

$$(A) \dots M = y + P \frac{dy}{dx} + \text{ecc.} \dots T \frac{d^n y}{dx^n}$$

dipende da un integrale particolare di ciascheduna delle equazioni successive e della stessa forma (B), (B'), (B'') ecc.

## DIMOSTRAZIONE.

Avendo in potere un integrale particolare o incompleto dell' equazione (B) (§. I.)  $z = X$  funzione di  $x$ , se ne faccia la sostituzione nelle equazioni

$$dy = z y dx + u dx$$

$$(C) \dots M = P u + Q \left( z u + \frac{du}{dx} + \text{ecc.} \right)$$

è manifesto, che avendo nello stesso tempo un integrale completo  $u = X'$  dell' equazione (C) del grado  $n - 1$ , il quale conterrà necessariamente  $n - 1$  costanti arbitrarie, si avrà

$$dy = X y dx + X' dx; \text{ e}$$

$y = e^{\int X dx} \left( A + \int X' dx e^{-\int X dx} \right)$  farà l' integrale completo dell' equazione (A). Ma se in vece dell' integrale completo dell' equazione (C) si avesse un integrale incompleto dell' equazione (B') (§. IV.)  $z' = X''$ , sostituendo questo valore nelle equazioni

$$du = z' u dx + u' dx$$

$$(C') \dots M' = P' u' + Q' \left( z'' u' + \frac{du'}{dx} + \text{ecc.} \right)$$

basterebbe che si avesse l' integrale completo  $u' = X'''$  dell' equazione (C') del grado  $n - 2$ , mentre l' equazione  $du = X'' u dx + X''' dx$  somministrerebbe l' integrale  $u = X''''$  comprendente  $n - 1$  costanti arbitrarie. Sostituendo pertanto questo valore nell' equazione  $dy = X y dx + u dx$ , si avrebbe l' integrale completo dell' equazione (A) come prima

$$y = e^{\int X dx} \left( A + \int X'''' dx e^{-\int X dx} \right).$$

Si dimostrerebbe nello stesso modo, che avendo un valor particolare dell'equazione ( $B'$ ) (§. IV.), e l'integrale completo dell'equazione ( $C''$ ) del grado  $n-3$ , si otterrebbe l'integrale completo dell'equazione ( $A$ ); e così successivamente. Ma discendendo alle equazioni successive ( $C'''$ ), ( $C''''$ ) ecc. del grado  $n-4$ ,  $n-5$  ecc. si perviene ad un valore finito. Dunque l'integrale completo dell'equazione ( $A$ ) dipende da un integrale particolare di ciascheduna delle successive equazioni ( $B$ ), ( $B'$ ), ( $B''$ ) ecc. Il che ecc.

### PROPOSIZIONE III.

§. VI. *L' integrale completo dell' equazione (A)*

$$(A) \dots M = y + P \frac{dy}{dx} + Q \frac{ddy}{dx^2} \dots + T \frac{dy^n}{dx^n}$$

*depende da un numero  $n-1$  di valori particolari di  $z$ , che soddisfacciano alla prima equazione (B) (§. I.)*

### DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè sostituendo successivamente nell'equazione ( $C$ ) del medesimo §.

$$(C) \dots M = Pu + Q \left( zu + \frac{du}{dx} \right) + \text{ecc.}$$

questi valori particolari di  $z$ , si ricaveranno tante equazioni in  $u$  ed  $x$  del grado  $n-1$ , quante ha unità il numero  $n-1$ . Ma il numero di queste equazioni essendo uguale al numero delle quantità

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \text{ ecc.}$$

si potranno queste discacciare, e potrà quindi pervenirsi ad un'equazione del primo grado di questa forma

$$Q = S + R \frac{dS}{dx}$$

la quale è risolubile generalmente, e perciò al valore di  $u$ . Posto ciò, sia  $X$  funzione di  $x$  quello che si verrà a trovare per sì fatto valore di  $u$ , la qual espressione conterrà in tal caso una costante arbitraria, e sieno  $\beta$ ,  $\beta'$  ecc. i valori parti-

colari di  $z$ . Facendo successivamente queste sostituzioni in luogo di  $z$  nell' equazione  $dy = zydx + Xdx$ , e integrando, si avranno gl' integrali

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left( A + \int X dx \mu^{-\int \beta dx} \right)$$

$$y = \mu^{\int \beta' dx} \left( A' + \int X dx \mu^{-\int \beta' dx} \right)$$

ecc. e per conseguenza

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left( A + \int X dx \mu^{-\int \beta dx} \right)$$

$$+ \mu^{\int \beta' dx} \left( A' + \int X dx \mu^{-\int \beta' dx} \right) + \text{ecc.}$$

farà l' integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

### PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se può integrarsi completamente l' equazione differenziale ( $\Delta$ )*

$$(\Delta) \dots \dots 0 = y + P \frac{dy}{dx} + Q \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots + T \frac{d^n y}{dx^n}$$

*potrà completamente integrarsi anche l' equazione differenziale (A)*

$$(A) \dots \dots M = y + P \frac{dy}{dx} + Q \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots + T \frac{d^n y}{dx^n}.$$

### DIMOSTRAZIONE.

Poichè sostituendo nell' equazione ( $\Delta$ )  $zydx$  in luogo di  $dy$ , ella si cangia nell' equazione (B) (§. II.),

$$(B) \dots \dots 0 = 1 + Pz + Q \left( z^2 + \frac{dz}{dx} \right) + \text{ecc.}$$

se si abbia in potere l' integrale completo dell' equazione ( $\Delta$ ), si potrà conchiuderne l' integrale completo dell' equazione (B), e però si avrà  $n-1$  valori particolari di  $z$ . Ma avendo  $n-1$  valori particolari di  $z$  nell' equazione (B), si ha l' integrale completo dell' equazione (A) (§. VI.). Per conseguenza se può integrarsi completamente l' equazione ( $\Delta$ ), potrà completamente integrarsi l' equazione (A). Il che ecc.

## C O R O L L A R I O I.

§. VIII. Si può di qua raccorre, che l'equazione (A) è tutte le volte integrabile, e ne' medesimi casi che può esserlo l'equazione ( $\Delta$ ), ch'è il Teorema del Sig. de la Grange.

## C O R O L L A R I O II.

§. IX. Ma non è neppur necessario il conoscere l'integrale completo dell'equazione ( $\Delta$ ), se sieno in poter nostro  $n-1$  valori particolari di  $y$  nella medesima equazione, potendo ciò bastare per l'integrazione completa dell'equazione (A), siccome è manifesto.

## C O R O L L A R I O III.

§. X. Similmente se si conoscano  $n$ , o  $n-1$  valori di  $x$ , che soddisfacciano all'equazione (B), sostituendoli successivamente nell'equazione (C) (§. I.), onde ottenere  $n$ , o  $n-1$  equazioni differenziali, si è veduto al §. VI. che l'equazione generale (A) è completamente integrabile per questa via. Si può dunque dispensarsi dal rintracciare un integrale particolare per ciascheduna di queste equazioni differenziali, come sembra richiedere il Sig. de la Place (*Memorie dell'Accademia R. di Torino* Vol. IV. §. III.).

## P R O P O S I Z I O N E V.

§. XI. Trovare l'integrale completo dell'equazione (A)  
 (A).....  $M=y+P\frac{dy}{dx}+Q\frac{ddy}{dx^2}+\dots\dots T\frac{dy^n}{dx^n}$   
 essendo P, Q.....T quantità costanti, ed M funzione di  $x$  qualunque.

RISOLUZIONE.



RISOLUZIONE.

Si ponga nell' equazione di sostituzione (R) (§. I).

$$(R) \dots y = \mu \int z dx - \int z dx \mu$$

la costante indeterminata  $K$  in luogo di  $z$ . Operando come s' è ivi prescritto, l' equazione (A) si risolverà nelle due (B'), (C')

$$(B') \dots 0 = 1 + PK + QK^2 + RK^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \dots M = Pu + Q\left(Ku + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

Essendo ordinata l' equazione (B') per rispetto a  $K$ , ascende ella al grado, il di cui esponente uguaglia quello dell' ordine dell' equazione proposta (A). Dunque risolta con l' Algebra comune l' equazione (B'), si mettano per  $K$  successivamente nell' equazione (C') le radici trovate. Si otterrà un numero di equazioni col mezzo delle quali potranno discacciarsi i differenziali di  $u$ , e si consegnerà il valore finito di  $u$ . Sia  $X$  questo valore. Sostituendo in seguito nell' equazione (R) il valore di  $u$ , e per  $z$  successivamente tutte le radici, per esempio  $a, a', a''$  ecc. dell' equazione (B'), si avrà, prendendone di mano in mano gl' integrali, l' espressione  $y = \mu^{ax} (A + \int X dx \mu^{-ax}) + \mu^{a'x} (A' + \int X dx \mu^{-a'x}) + \text{ecc.}$  che farà l' integrale completo dell' equazione (A), contenendo un numero  $n$  di costanti arbitrarie. Il che ecc.

PROPOSIZIONE VI.

§. XII. Integrare l' equazione (T)

$$(T) \dots M = Ay + B(h + Kx) \frac{dy}{dx} + C(h + Kx)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \text{ecc.}$$

del Sig. de la Grange (Miscell. Taurin. V. III. pag. 190),  $h, K, A, B, C$  ecc. essendo coefficienti costanti,  $M$  funzione di  $x$ .

## R I S O L U Z I O N E .

Posto, come nella I. Proposizione,  $dy = zydx + udx$ , col metodo ivi adoperato si trasformerà l'equazione (T) nelle due

$$(B) \dots 0 = A + B(b + Kx)z + C(b + Kx)^2 \left( z^2 + \frac{dz}{dx} \right) + \text{ecc.}$$

$$(C) \dots M = B(b + Kx)u + C(b + Kx)^2 \left( zu + \frac{du}{dx} \right) + \text{ecc.}$$

Si faccia  $z = \frac{r}{b + Kx}$ , essendo  $r$  una costante indeterminata.

Sostituendo questo valore nell'equazione (B), ella si ridurrà a questa forma (B'')

$$(B'') \dots 0 = A + Br + Cr(r - K) + Dr(r^2 - 3Kr + 2K^2) + \text{ecc.}$$

la quale ordinata per  $r$ , somministrerà tante radici  $r', r'', r'''$  ecc. quante sono le unità nell'ordine dell'equazione (T). Facendo la stessa sostituzione nell'equazione (C), vi si sostituiscano successivamente per  $r$  le radici  $r', r''$  ecc. trovate; con che si avrà un numero di equazioni eguale a quello delle quantità  $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$  ecc., le quali maneggiate, come nelle Propos. precedenti, ci faranno pervenire al valore di  $u = X$ .

Ripigliando pertanto l'equazione di sostituzione

$$y = \mu \int z dx \int u dx \mu - \int z dx$$

e posto  $X$  in luogo di  $u$ , se  $\pi, \pi', \pi''$ , ecc. rappresentino i valori  $\frac{r'}{b + Kx}, \frac{r''}{b + Kx}, \frac{r'''}{b + Kx}$  ecc.,

si mettano  $\pi, \pi'$  ecc. successivamente per  $z$ , e si avrà

$$y = \mu \int \pi dx \left( A + \int X dx \mu - \int \pi dx \right) + \mu \int \pi' dx \left( A' + \int X dx \mu - \int \pi' dx \right) + \text{ecc.}$$

per l'integrale completo dell'equazione (T). Il che ecc.

## S C O L I O.

§. XIII. Ancorchè le integrazioni ottenute ne' §. §. XI. XII. si considerino non avere altre difficoltà fuorchè quelle dell' Algebra comune, ridotte come sono a dipendere dalla risoluzione di equazioni algebriche determinate; ciò non ostante il caso principalmente delle radici eguali, che possono incontrarsi in queste equazioni, obbliga ad operazioni, che farebbe bene di evitare. Non conosco finora alcun metodo esente dalla necessità di avervi particolare considerazione, allorchè ha luogo questo caso. Eccone uno, che deriva necessariamente da quello che abbiamo adoperato nella risoluzione di queste equazioni differenziali; e fra poco ne daremo un altro ancor più semplice. Si ripigli l' equazione del §. XI. ponendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ecc. in luogo di  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ecc.

$$(A) \dots\dots M = y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{d^2y}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e sieno  $(B)$ ,  $(C)$  le due equazioni nelle quali ella si trasforma

$$(B) \dots\dots 0 = 1 + Aa + Ba^2 + Ca^3 + \text{ecc.}$$

$$(C) \dots\dots M = Au + B \left( au + \frac{du}{dx} \right) + \text{ecc.}$$

con la sostituzione  $dy = aydx + udx$ , essendo  $a$  una costante indeterminata. L' equazione  $(C)$  si trasforma nell' equazione

$$M' = u + A' \frac{du}{dx} + B' \frac{d^2u}{dx^2} + \text{ecc.}$$

della stessa forma di  $(A)$ , ma del grado  $n - 1$  (§. III.).

Sieno pertanto  $(B')$   $(C')$

$$(B') \dots\dots 0 = 1 + A'a' + B'a'^2 + C'a'^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \dots\dots M = A'u' + B \left( au' + \frac{du'}{dx} \right) + \text{ecc.}$$

le equazioni nelle quali si risolve l' equazione precedente con la sostituzione  $du = a'udx + u'dx$ , essendo  $u'$  una nuova variabile,  $a'$  una nuova costante indeterminata. E' manifesto che si trasformerà similmente l' equazione  $(C')$  nell' equazione

$M' = u' + A' \frac{du'}{dx} + B' \frac{ddu'}{dx^2} + \text{ecc.}$  della forma parimente di (A), e del grado  $n - 2$ . Inoltrando l'operazione successivamente, si perverrà all'equazione  $M^m = A^m u^m$  da cui si potrà avere il valore finito di  $u^m$ . Si tragga una radice o un valore di  $a^m$  dall'equazione prossima e determinata ( $B^m$ ), e avendolo sostituito nell'equazione  $du^{m-1} = a^m u^{m-1} dx + u^m dx$  insieme col valore di  $u^m$ , si avrà una prima parte integrale completa

$$u^{m-1} = \mu^{a^m x} \left( \text{cost.} + \int u^m dx \mu^{-a^m x} \right)$$

Conoscendo il valore di  $u^{m-1} = X$ , si ricavi una radice o un valore di  $a^{m-1}$  dall'equazione determinata ( $B^{m-1}$ ). Sostituiti questi valori nell'equazione

$$du^{m-2} = a^{m-1} u^{m-2} dx + u^{m-1} dx$$

si conseguirà una seconda parte integrale

$$u^{m-2} = \mu^{a^{m-1} x} \left( \text{cost.} + \int X dx \mu^{-a^{m-1} x} \right)$$

Procedendo così successivamente si perverrà al valore di  $u = X^n$ , che comprenderà  $n - 1$  costanti arbitrarie.

Ricavando in seguito una radice o un valore di  $a$  dall'equazione (B), se si faccia la sostituzione di questi valori nell'equazione  $dy = ay dx + u dx$ , se ne potrà concludere finalmente l'equazione finita

$$y = \mu^{ax} \left( \text{cost.} + \int X^m dx \mu^{-ax} \right)$$

integrale completo dell'equazione (A), senza che l'andamento sia turbato dalla considerazione delle radici eguali, che possono avervi nell'equazione (B). E questo metodo può applicarsi anche all'integrazione dell'equazione (T) (§. XII).

## PROPOSIZIONE VII.

§. XIV. Integrare l'equazione (A)

$$(A) \dots M = y + X \frac{dy}{dx} + \phi \cdot X \frac{d^2y}{dx^2} + \phi' \cdot X \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

in cui  $M, X$  sono funzioni di  $x$  qualunque,  $\phi.X, \phi'.X$  ecc. funzioni di  $X$  indeterminate.

RISOLUZIONE.

Suppongasi per maggior semplicità  $X=P, \phi.X=Q, \phi'.X=R$  ecc., e si faccia  $(K) dy = aydx + udx$ , essendo  $a$  una costante a piacere. Col metodo della prima Prop. si risolverà l'equazione  $(A)$  nelle due  $(B), (C)$

$$(B) \dots 0 = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3 + \text{ecc.}$$

$$(C) \dots M = (P + Qa + Ra^2 + \text{ecc.})u + (Q + Ra + Sa^2 + \text{ecc.}) \frac{du}{dx} + (R + Sa + Ta^2 + \text{ecc.}) \frac{d^2u}{dx^2} + \text{ecc.}$$

Facendo in seguito

$$\Delta = P + Qa + Ra^2 + \text{ecc.}$$

$$\Delta' = Q + Ra + Sa^2 + \text{ecc.}$$

$$\Delta'' = R + Sa + Ta^2 + \text{ecc.}$$

.....

$$\text{e } \frac{\Delta'}{\Delta} = P', \frac{\Delta''}{\Delta} = Q' \text{ ecc. } \frac{M}{\Delta} = M'$$

l'equazione  $(C)$  del grado  $n - 1$  prenderà la forma dell'equazione  $(A)$  in questo modo

$$M' = u + P' \frac{du}{dx} + Q' \frac{d^2u}{dx^2} + \text{ecc.}$$

Di nuovo ponendo in quest'equazione così preparata  $(K')$   $du = budx + u'dx$ , in cui  $b$  è un'altra costante a piacere,  $u'$  una nuova variabile, si risolverà ella in altre due  $(B') (C')$

$$(B') \dots 0 = 1 + Pb + Qb^2 + Rb^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \dots M' = (P + Qb + Rb^2 + \text{ecc.})u' + (Q + Rb + Sb^2 + \text{ecc.}) \frac{du'}{dx} + \text{ecc.}$$

la seconda delle quali del grado  $n - 2$  per una preparazione simile alla precedente diverrà

$$M'' = u' + P'' \frac{du'}{dx} + Q'' \frac{ddu'}{dx^2} + \text{ecc.}$$

la quale con la sostituzione  $(K'')$   $du' = cu'dx + u''dx$ , e con la stessa preparazione somministrerà le due equazioni del grado  $n - 3$

$$(B'') \dots 0 = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

$$(C'') \dots M''' = u'' + P''' \frac{du''}{dx} + Q''' \frac{ddu''}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e così successivamente. Procedendo in tal modo si perverrà all'equazione  $M^{n-1} = u^{n-2} + P^{n-1} \frac{du^{n-2}}{dx}$  coll'ultima sostituzione

$(K^n)$ , dall'integrazione della quale si avrà il valore di  $u^{n-2}$  con una costante arbitraria. Integrando quindi l'equazione  $(K^n)$  si otterrà il valore di  $u^{n-1}$ , e si giungerà finalmente con quest'ordine a trovare il valore di  $u$ . In conseguenza si potrà integrare l'equazione primitiva di sostituzione  $(K)$ , e conseguire il valore di  $y$ . Ma perchè questo valore sia l'integrale completo dell'equazione  $(A)$  bisogna soddisfare alle equazioni

$$(B) \dots 0 = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3 + \text{ecc.}$$

$$(B') \dots 0 = 1 + P'b + Q'b^2 + R'b^3 + \text{ecc.}$$

$$(B'') \dots 0 = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

.....  
che hanno luogo insieme con le equazioni  $(C)$ ,  $(C')$  ecc. Si consideri pertanto, che tante sono le funzioni indeterminate  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ecc. quante unità contiene il numero  $n$ , e che  $n - 1$  è il numero delle equazioni di relazione tra queste funzioni che debbono aver luogo. Dunque è manifesto, che una di queste funzioni può essere tutto quello che si vuole. Sia  $P$  questa funzione arbitraria. Maneggiando le altre come incognite, se ne potrà dedurre il valore in  $P$  e costanti con le solite regole dell'Algebra comune. E poichè  $P = X$ ,  $Q = \phi.X$ ,  $R = \phi'.X$  ecc. si perverrà a determinare le forme  $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $\phi''$  ecc. dell'equazione  $(A)$ , essendo  $X$  una funzione di  $x$  qualunque, e  $a, b, c$  ecc. costanti a piacere. Egli è viabile, che non la sola  $P$ , ma una qualsivoglia delle indeterminate  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ecc. può pigliarsi da principio per funzione di arbitrio,

e le altre si determineranno col mezzo delle equazioni (B), (B') ecc. Il che ecc.

E S E M P I O I.

Sia da integrare l'equazione differenziale (A)

$$(A) \dots M = y + X \frac{dy}{dx} + \frac{1+aX}{a^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

essendo M, X funzioni di x di qualunque forma.

Facendo  $X = P$ ,  $\frac{1+aX}{a^2} = -Q$ , si avranno con la sostituzione

(K)  $dy = aydx + udx$  le due equazioni

$$(B) \dots 0 = 1 + Pa + Qa^2$$

$$(C) \dots M = (P + Qa)u + Q \frac{du}{dx}$$

Prendendo l'integrale completo dell'equazione (C)  $u = V$ , si sostituisce il valore di u nell'equazione (K), e si avrà

$$(L) \dots y = \mu^{ax} (\text{Cost.} + \int V dx \mu^{-ax})$$

integrale completo dell'equazione (A), purchè si soddisfaccia all'equazione (B). Ma sostituendo in (B) X in luogo di P,

$-\frac{1+aX}{a^2}$  in luogo di Q, l'equazione svanisce. Dunque l'espressione (L) è l'integrale completo dell'equazione (A)

E S E M P I O II.

Sia da integrare l'equazione differenziale di terzo grado (A)

$$(A) \dots M = y + X \frac{dy}{dx} + \left( \frac{a^2 + a^2b - b^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2 - b)X}{ab} \right) \frac{d^2y}{dx^2} - \left( \frac{a + b + abX}{a^2b^2} \right) \frac{d^3y}{dx^3}$$

M, X essendo funzione di x qualunque, a, b costanti a piacere. Supponendo per maggior semplicità, che l'equazione sia

$$M = y + P \frac{dy}{dx} + Q \frac{d^2y}{dx^2} + R \frac{d^3y}{dx^3}$$

si avrà con la sostituzione (K)  $dy = aydx + u dx$  le due equazioni

$$(B) \dots 0 = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3$$

$$(C) \dots M' = u + P \frac{du}{dx} + Q \frac{d^2u}{dx^2}$$

essendo  $M' = M : (P + Qa + Ra^2)$ ,  $P' = (Q + Ra) : (P + Qa + Ra^2)$   
 $Q' = R : (P + Qa + Ra^2)$ ; e con la sostituzione  $(K') du = budx + u'dx$  nell'equazione (C) si avranno le equazioni

$$(B') \dots 0 = 1 + P'b + Q'b^2$$

$$(C') \dots M'' = u' + P'' \frac{du'}{dx}$$

essendo  $M'' = M : (Q + R(a+b))$ ,  $P'' = R : (Q + R(a+b))$   
 Prendendo l'integrale completo dell'equazione (C'), si avrà  $u' = V$ ; e sostituendo questo valore in (K') si avrà integrando  $u = V'$ . In conseguenza sostituendo questo valore per  $u$  nell'equazione (K), e integrando si otterrà

$$y = e^{ax} \left( \text{cost.} + \int V' dx \mu^{-ax} \right)$$

integrale completo dell'equazione (A), giacchè comprende tre costanti arbitrarie, purchè si soddisfaccia alle equazioni (B), (B'). Ma appunto mettendo  $X$  in vece di  $P$ ,

$$\frac{a^2 + a^3 b - b^2}{a^2 b^2} + \frac{(a^2 - b) X}{a b} \text{ in vece di } Q, \text{ e } - \frac{a + b + abX}{a^2 b^2}$$

in luogo di  $R$  entrambe quelle equazioni svaniscono. Dunque ecc.

### §. XV.

Ma su le tracce della Prop. precedente possiamo aprirci un campo di speculazione più vasto, e poggiare ad una più grande generalità coll'ajuto delle funzioni indeterminate. Per questa via prenderemo a fare qualche tentativo generale intorno all'integrazione dell'equazione (A) (§. I.) allorchè i coefficienti  $P, Q, R$  ecc. sono funzioni di  $x$ , nè più nè meno come s'è fatto nella Mem. sopra citata per le equazioni a differenze finite.

Si cominci primieramente dal mettere sotto le forme seguenti le equazioni differenziali di grado in grado, negletto il primo, comprese nell'equazione (A) (§. I.) in supposizione di  $M = 0$

$$(B) \dots 0$$



$$(B) \dots \circ = y + F(\phi, \nu) \frac{dy}{dx} + F'(\phi, \nu) \frac{ddy}{dx^2}$$

$$(B') \dots \circ = y + F(\phi, \nu, \Delta) \frac{dy}{dx} + F'(\phi, \nu, \Delta) \frac{ddy}{dx^2} \\ + F''(\phi, \nu, \Delta) \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$(B'') \dots \circ = y + F(\phi, \nu, \Delta, \lambda) \frac{dy}{dx} + F'(\phi, \nu, \Delta, \lambda) \frac{ddy}{dx^2} \\ + F''(\phi, \nu, \Delta, \lambda) \frac{d^3y}{dx^3} + F'''(\phi, \nu, \Delta, \lambda) \frac{d^4y}{dx^4}$$

ecc. essendo  $\phi, \nu, \Delta, \lambda$  ecc. funzioni di  $x$ ,  $F(\phi, \nu)$ ,  $F'(\phi, \nu, \Delta)$  ecc. funzioni di  $\phi, \nu$ , di  $\phi, \nu, \Delta$  ecc. Il numero delle funzioni  $\phi, \nu, \Delta$  ecc. introdotte in ogni equazione differenziale è uguale al grado dell'equazione da risolvere. Si concepisca poi, che l'equazione (K)

$$(K) \dots y = \mu \int \phi dx \left( A + \int dx \mu \int \nu dx \left( A' + \int dx \mu \int \Delta dx \right. \right. \\ \left. \left. + \int dx \mu \int \lambda dx \right) (A'' + \text{ecc.} \right)$$

all'infinito rappresenti l'integrale completo dell'equazione (A), essendo  $A, A', A''$  ecc. le costanti arbitrarie, di modo che, richiedendoli l'integrale di un'equazione differenziale del grado  $n$ , basta fare la costante  $A^{n+1}$ , e tutte le suffeguenti  $= 0$ . La serie allora s'interrompe, e l'equazione finita risultante comprende  $n$  costanti arbitrarie, e tante funzioni  $\phi, \nu, \Delta$  ecc. quante unità sono in  $n$ . In conseguenza pigliando la differenza  $n^{ma}$  di quest'equazione, dovrà ella rappresentare un'equazione (A) del grado  $n$ , cioè la forma (B), (B') ecc. corrispondente a quel grado, sì che le forme  $F(\phi, \nu)$ ,  $F'(\phi, \nu, \Delta)$  ecc. verranno ad essere determinate.

Sieno pertanto (P), (P') ecc. questi differenziali successivi dell'equazione (K)

$$(P) \dots \circ = (\phi(\phi + \nu) - \phi')y - (\nu + 2\phi) \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$$

$$(P') \dots \circ = ((\phi + \nu + \Delta)(\phi' - \phi^2 - \nu\phi) - \phi'' + 2\phi\phi' + \phi\nu' + \nu\phi')y$$

$$+ \left\{ (v + 2\phi) (v + \phi + \Delta) - v' - 3\phi' + v\phi + \phi^2 \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$- (\Delta + 2v + 3\phi) \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3}$$

ecc. ne' quali  $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$ ,  $\phi'' = \frac{d\phi'}{dx}$  ecc.  $v' = \frac{dv}{dx}$ ,  $v'' = \frac{dv'}{dx}$  ecc.

Questa differenziazione può continuarfi agevolmente, mentre

l'equazione (P) moltiplicata per  $\mu$  e differenziata somministra l'equazione (P'); l'equazione (P') moltiplicata per  $\mu$  e differenziata somministra l'equazione (P'');

tiplicata per  $\mu$  e differenziata somministrerebbe l'equazione prossima susseguente (P''); e così all'infinito. Ciò premesso è manifesto, che perchè l'equazione (K) affunta sia l'integrale completo dell'equazione (A) del grado  $n$ , quella delle equazioni differenziali (P), (P'), (P'') ecc. ch'è dello stesso grado, dee identificarsi coll'equazione (A). In conseguenza tutte le volte, che l'equazione (A) potrà ridursi alla forma (P), o (P') ecc. l'espressione (K) farà il suo integrale completo. Non farebbe difficile cosa il dimostrare, che in queste formule si contengono tutte le trasformazioni che possono darsi all'equazione generale (A), onde soggettarla ad integrali della forma (K). Ora, essendosi dimostrato, che l'equazione (A) in supposizione di M funzione di  $x$  è integrabile tutte le volte e ne' medesimi casi che può esserlo in supposizione di  $M=0$  (§. VIII.), è ben chiaro per sè, che il metodo ci conduce a una grandissima generalità, e abbraccia casi d'integrabilità senza confini per l'equazione (A) a coefficienti variabili. Ora mi restringo a risolvere il caso de' coefficienti costanti per un esemplo.

## P R O P O S I Z I O N E VIII.

§. XVI. Integrare l'equazione (A)

$$(A) \dots M = y + A \frac{dy}{dx} + B \frac{ddy}{dx^2} + \text{ecc.}$$

in cui M è funzione di  $x$ , A, B, C ecc. sono quantità costanti.

## RISOLUZIONE.

Pongasi  $M=0$ ; e poichè i coefficienti de' termini sono quantità costanti, dovranno parimente essere quantità costanti le funzioni indeterminate  $\phi$ ,  $\nu$ ,  $\Delta$  ecc.

Dunque la formola rappresentante l'integrale completo dell'equazione (A), in supposizione di  $M=0$ , farà

$$(K) \dots y = \mu^{\phi x} \left( A + \int dx \mu^{\nu x} \left( A' + \int dx \mu^{\Delta x} (A'' + \text{ecc.} \right. \right.$$

Ora nella differenza  $n^{mz}$ . di questa equazione i coefficienti di tutte le potenze differenziali  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{ddy}{dx^2}$ , ecc. sono funzioni di  $\phi$ ,  $\nu$ ,  $\Delta$  ecc. e  $n$  di numero, come risulta da quanto si è esposto nel §. precedente. Ed è pure  $n$  il numero de' coefficienti  $A$ ,  $B$  ecc. dell'equazione (A). Dunque identificando le equazioni differenziali, si potrà ricavare da' paragoni un numero  $n$  di equazioni in  $\phi$ ,  $\nu$ ,  $\Delta$  ecc.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ecc. col mezzo delle quali si potranno determinare i valori delle  $\phi$ ,  $\nu$ ,  $\Delta$  ecc. in  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ecc. Se dunque si sostituiranno questi valori nell'equazione (K), si otterrà l'integrale completo dell'equazione differenziale (A) nel caso di  $M=0$ . Ma dato l'integrale di (A) in supposizione di  $M=0$ , si ha pure l'integrale di (A) in supposizione di  $M$  funzione di  $x$  qualunque (§. VIII.). Dunque ecc.

## §. XVII.

Questa risoluzione dell'equazione (A) non è turbata dal caso delle radici eguali (§. XIII.) alle quali cogli altri metodi fa d'uopo avere considerazione particolare (Veggasi il II. Vol. del Calc. Integr. del Sig. *Eulero* pag. 429 e segg., e il III. Vol. degli atti di Torino nell'eccell. Mem. del Sig. de la *Grange*).

## E S E M P I O.

Sia da integrarsi l'equazione differenzio-differenziale

$$(\mathcal{Q}) \dots M = y - \frac{2dy}{adx} + \frac{ddy}{a^2 dx^2}$$

Si facciamo nell'espressione (K) (§. XVI.) le costanti arbitrarie  $A'$ ,  $A''$  ecc. = 0, e però l'integrale ricercato in supposizione di  $M = 0$  farà della forma seguente

$$(R) \dots y = \mu^{\phi x} \left( A + \int A' dx \mu^{\nu x} \right)$$

la quale differenziata due volte darà l'equazione (S)

$$(S) \dots 0 = y - \frac{v + 2\phi}{\phi^2 + v\phi} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\phi^2 + v\phi} \cdot \frac{ddy}{dx^2}$$

Dal suo paragone pertanto con l'equazione (Q) si otterrà

$$\frac{v + 2\phi}{\phi^2 + v\phi} = \frac{2}{a}, \quad \frac{1}{\phi^2 + v\phi} = \frac{1}{a^2}, \quad \text{e però } \phi = -a, \quad v = 0.$$

Sostituiti questi valori nell'equazione (R), l'integrale completo dell'equazione (Q), supposto  $M = 0$ , farà

$$y = \mu^{-ax} \left( A + \int A' dx \right) = \mu^{-ax} (A + A'x)$$

I metodi ordinari avrebbero fatto dipendere quest'integrazione dalla risoluzione dell'equazione

$$0 = 1 - \frac{2z}{a} + \frac{z^2}{a^2}$$

in cui due radici sono eguali. Ma essendo noto l'integrale in supposizione di  $M = 0$ , lo farà pure in supposizione di  $M$  funzione di  $x$ . Dunque ecc.

## §. XVIII.

Non essendomi proposto in questa Memoria, che d'indicare alcune vie, che mi sono aperto per l'integrazione di questa sorta di equazioni differenziali coll'intenzione di ripigliar, se sia possibile, la materia più di proposito, che ora per avventura non m'è concesso di fare, passiamo a fare qualche ricerca sull'equazione

$$(A) \dots Mdx^n = x^{\phi+1} (a + bX) ydx^n + x^{\phi+2} (c + eX) dydx^{n-1} \\ + x^{\phi+3} (f + gX) ddydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in cui  $M, X$  sono funzioni qualunque di  $x, \phi, a, b, c$  ecc. costanti a piacere. Non è ignoto a' Geometri di quanto uso sia la sola equazione di secondo grado  $Mdx^2 = x^2 (a + bx^n) ddy + x(e + fx^n) dx dy + (g + bx^n) ydx^2$  ch' è un caso particolarissimo dell' equazione (A), e su cui più di tutti ha diffusamente versato il Sig. *Eulero* nel X. Vol. de' nuovi Com. di *St. Pietroburgo*, e in appresso nel II. Vol. del suo *Calc. Integrale*. Ci fermeremo pertanto prima su questa, ed estenderemo poi le nostre indagini sull' equazione generale.

P R O P O S I Z I O N E. IX.

§. XIX. *Svolgere infiniti casi d' integrabilità dell' equazione*

$$(\Delta) \dots Mdx^2 = x^2 (a + bx^n) ddy + x(e + fx^n) dx dy \\ + (g + hx^n) ydx^2$$

*indipendenti dall' esponente n.*

R I S O L U Z I O N E.

I. Si supponga  $y = \frac{z}{x}$ , essendo  $z$  una nuova variabile, e si sostituisca questo valore nell' equazione (Δ). Ella prende questa forma

$$(B) \dots (a + bx^n) (x ddz - 2 dx dz + \frac{2z dx^2}{x}) \\ + (e + fx^n) (dz dx - \frac{z dx^2}{x}) + (g + bx^n) \frac{z dx^2}{x} - Mdx^2 = 0$$

Di questa equazione se ne faccian due nel modo seguente

$$(a + bx^n) \frac{2z dx^2}{x} - (e + fx^n) \frac{z dx^2}{x} + (g + bx^n) \frac{z dx^2}{x} = 0 \\ (a + bx^n) (x ddz - 2 dx dz) + (e + fx^n) dz dx - Mdx^2 = 0$$

le quali semplificate e ordinate divengono

$$(C) \quad 2a - e + g + (2b - f + b) x^n = 0$$

(D)  $x(a + bx^n) ddz + (e - 2a + (f - 2b)x^n) dx dz - M dx^2 = 0$ .  
 Posto nell' equazione (D)  $dz = u dx$ , si passi all' integrazione ..

$$\text{Si avrà } u = \frac{dz}{dx} = \mu \quad \left( A + \int \frac{M dx}{P} - \mu \int \frac{Q dx}{P} \right) = V$$

essendo  $Q = e - 2a + (f - 2b)x^n$ ,  $P = x(a + bx^n)$ . Per conseguenza  $z = A' + \int V dx$ , e però  $y = A' z^{-1} + x^{-1} \int V dx$  farà l' integrale completo dell' equazione ( $\Delta$ ), ognora che si soddisfaccia alle due equazioni  $2a - e + g = 0$ ;  $2b - f + h = 0$ , le quali non involgono l' esponente  $n$ .

II. Di nuovo si ordini l' equazione (B), e si supponga  $M = 0$ . Si avrà

$$(B') \dots 0 = x^2 (a + bx^n) ddz + x (e - 2a + (f - 2b)x^n) dx dz + (2a - e + g + (2b - f + h)x^n) z dx^2$$

Posto pertanto  $e - 2a = e'$ ,  $f - 2b = f'$ ,  $2a - e + g = g'$ ,  $2b - f + h = b'$ , l' equazione

$$0 = x^2 (a + bx^n) ddz + x (e' + f' x^n) dx dz + (g' + b' x^n) z dx^2$$

con la sostituzione di  $\frac{z'}{x}$  in luogo di  $z$  si cangerà in questa

$$x^2 (a + bx^n) ddz' + x (e' - 2a + (f' - 2b)x^n) dx dz'$$

+  $(2a - e' + g' + (2b - f' - b')x^n) z' dx^2 = 0$ , cioè in questa

$$(B'') \dots x^2 (a + bx^n) ddz' + x (e - 4a + (f - 4b)x^n) dx dz'$$

$$+ (6a - 2e + g + (6b - 2f + b)x^n) z' dx^2 = 0$$

Similmente si troverà che l' equazione ( $B''$ ) con la sostituzione di  $\frac{z''}{x}$  in luogo di  $z'$  si trasformerà in questa

$$(B''') \dots x^2 (a + bx^n) ddz'' + x (e - 6a + (f - 6b)x^n) dx dz''$$

$$+ (12a - 3e + g + (12b - 3f + b)x^n) z'' dx^2 = 0$$

Questa poi con la sostituzione di  $\frac{z'''}{x}$  in luogo di  $z''$  diverrà

$$(B''''') \dots x^2 (a + bx^n) ddz''' + x (e - 8a + (f - 8b)x^n) dx dz'''$$

$$\dagger (20a - 4e + g + (20b - 4f + b)x^n) z'' dx^2 = 0$$

e così successivamente in modo, che dopo  $m$  trasformazioni si perverrà all' equazione

$$(B^m) \dots x^2(a + bx^n) ddz^{m-1} + x(e - 2ma + (f - 2mb)x^n) dx dz^{m-1}$$

$$+ ((m + m^2)a - me + g$$

$$+ ((m + m^2)b - mf + b)x^n) z^{m-1} dx^2 = 0$$

Ma di questa equazione fatte due come nell' articolo precedente, si troverà ch' ella è integrabile qualvolta si verificano le due equazioni

$$m^2a + m(a - e) + g = 0$$

$$m^2b + m(b - f) + b = 0$$

Dunque in tutti questi infiniti casi di relazione tra i coefficienti, ove non entra l' esponente  $n$ , essendo  $m$  numero intero e positivo, e in supposizione di  $M = 0$ , si avrà l' integrale completo dell' equazione ( $\Delta$ ); e però (§. VIII.) anche in supposizione di  $M$  funzione della variabile  $x$ .

III. Ma di nuovo ancora si ripigli l' equazione ( $B$ ), e se ne combinino tre paja come segue in ipotesi di  $M = 0$

$$\{ (E) \dots x^2(a + bx^n) ddz + x(e - 2a + (f - 2b)x^n) dx dz$$

$$\{ \quad \quad \quad + (2a + 2bx^n) z dx^2 = 0$$

$$\{ (E') \dots g - e + (b - f)x^n = 0$$

$$\{ (F) \dots x^2(a + bx^n) ddz + x(e - 2a + (f - 2b)x^n) dx dz$$

$$\{ \quad \quad \quad - (e + fx^n) z dx^2 = 0$$

$$\{ (F') \dots 2a + g + (2b + b)x^n = 0$$

$$\{ (G) \dots x^2(a + bx^n) ddz + x(e - 2a + (f - 2b)x^n) dx dz$$

$$\{ \quad \quad \quad + (g + bx^n) z dx^2 = 0$$

$$\{ (G') \dots 2a - e + (2b - f)x^n = 0$$

Se nell' equazione ( $\Delta$ ) si ponga  $M = 0$ , e in luogo di  $g$ ,  $f$  in luogo di  $b$ , si che si soddisfaccia all' equazione ( $E'$ ), e ne risulti l' equazione

$$(\Delta') \dots x^2(a + bx^n) ddy + x(e + fx^n) dx dy$$

$$+ (e + fx^n) y dx^2 = 0$$

è certo, che qualvolta s' integri l'equazione (E) si potrà integrare l'equazione ( $\Delta'$ ). Si faccia pertanto in (E)  $e - 2a = e'$ ,  $f - 2b = f'$ . Si cangia l'equazione in questa ( $E''$ )....  $x^2 (a + bx^n) ddz + x (e' + f' x^n) dx dz$

$$+ (2a + 2bx^n) z dx^2 = 0$$

la quale è integrabile (*Art. I.*) ognora che si verificchino queste due relazioni  $6a - e = 0$ ;  $6b - f = 0$

Dunque in questi casi sarà pure integrabile l'equazione ( $\Delta'$ ).

Ma sostituendo  $\frac{z'}{x}$  in luogo di  $z$  nell'equazione ( $E''$ ), ella si trasforma per la stessa ragione nell'equazione seguente  $x^2 (a + bx^n) ddz' + x (e' - 2a + b (f' - 2b) x^n) dx dz'$

$$+ (2a + 2bx^n) z' dx^2 = 0$$

cioè nella seguente, facendo  $e' - 2a = e''$ ,  $f' - 2b = f''$ , ( $E'''$ )....  $x^2 (a + bx^n) ddz' + x (e'' + f'' x^n) dx dz'$

$$+ (2a + 2bx^n) z' dx^2 = 0$$

e così successivamente. Dunque dopo  $m$  trasformazioni si perverrà all'equazione

$$(E^{m+1}).... x^2 (a + bx^n) ddz^{m+1} + x (e - 2ma + (f - 2mb) x^n) dx dz^{m+1}$$

$$+ (2a + 2bx^n) z^{m+1} dx^2 = 0$$

della forma di ( $\Delta'$ ). Ma fatte due equazioni dell'equazione ( $E^{m+1}$ ) col metodo adoperato nel I. *Art.*, si troverà ch' ella è integrabile qualvolta si verificchino queste equazioni  $(2m + 4)a - e = 0$ ;  $(2m + 4)b - f = 0$

Dunque generalmente in tutti questi casi sarà integrabile completamente l'equazione ( $\Delta'$ ), essendo  $m$  numero intero e positivo.

Nello stesso modo mettendo nell'equazione ( $\Delta$ )  $M = 0$ ,  $-2a$  in luogo di  $g$ ,  $-2b$  in luogo di  $h$ , onde soddisfare all'equazione ( $F'$ ), si troverà che l'equazione ( $\Delta'$ )....  $x^2 (a + bx^n) ddy + (e + f x^n) dx dy$

$$- (2a + 2bx^n) y dx^2 = 0$$

con la sostituzione  $y = \frac{z}{x}$  si trasforma prima nell'equazione

(H)



$$(H) \dots x^2 (a + bx^n) ddz + x(e - 2a + (f - 2b)x^n) dx dz - (e + fx^n) z dx^2 = 0$$

questa con la sostituzione  $z = \frac{z'}{x}$  nell'equazione

$$(H') \dots x^2 (a + bx^n) ddz' + x(e - 4a + (f - 4b)x^n) dx dz' - (e + fx^n) z' dx^2 = 0$$

e così successivamente, sicchè dopo  $m$  trasformazioni si perviene all'equazione

$$(H^m) \dots x^2 (a + bx^n) ddz^m + x(e - 2am + (f - 2bm)x^n) dx dz^m - (e + fx^n) z^m dx^2 = 0$$

la quale essendo integrabile (*Art. I.*) ognivolta che si verificano le seguenti equazioni

$$(m + 1)a - e = 0; (m + 1)b - f = 0$$

lo farà pure negli stessi casi l'equazione ( $\Delta''$ ). E finalmente procedendo nella stessa guisa si dedurrà che l'equazione ( $\Delta''''$ ) ( $\Delta''''$ )  $\dots x^2 (a + bx^n) ddy + x(2a + 2bx^n) dx dy + (g + bx^n) y dx^2 = 0$  è integrabile qualora si verificano le due equazioni

$$2am + g = 0; 2bm + f = 0.$$

E questo per ora basti intorno all'equazione ( $\Delta$ ). Il che ecc.

## PROPOSIZIONE X.

§. XX. *Svolgere infiniti casi d'integrabilità dell'equazione* ( $Q$ )  $\dots x^{\phi+3} (a + bX) ddy + x^{\phi+2} (e + fX) dx dy$

$$+ x^{\phi+1} (g + hX) y dx^2 - M dx^2 = 0$$

in cui  $M, X$  sono funzioni di  $x$  qualunque,  $\phi$  a  $b$  e  $f$  ecc. costanti a piacere.

## RISOLUZIONE.

I. Suppongasi  $y = \frac{v}{x^{\phi+1}}$ . Fatta questa sostituzione nell'equazione ( $Q$ ), ne risulterà l'equazione ( $R$ )

$$(R) \dots (a + bX) (x^2 ddv - 2(\phi + 1)x dv dx + (\phi + 1)(\phi + 2)v dx^2)$$

$$+(e+fX)(xdvdx - (\phi+1)vdx^2) + (g+bX)vdx^2 \\ - Mdx^2 = 0$$

dalla quale se ne combinino due

$$(R') \dots x^2(a+bX)dv + x(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X)dvdv \\ = Mdx^2$$

$$(R'') \dots a(\phi+1)(\phi+2) - e(\phi+1) + g$$

$$+ (b(\phi+1)(\phi+2) - f(\phi+1) + b)X = 0$$

Avendo poi fatto  $dv = zdx$  nell' equazione  $(R'')$ , ella si riduce all' equazione

$$x^2(a+bX)dz + x(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X)zdx = Mdx$$

la quale integrata ci somministra  $z = Z$  funzione di  $x$  contenente una costante arbitraria. Dunque

$$v = \text{cost.} + \int Zdx; \text{ e però } y = \text{cof. } x^{-\phi-1} + x^{-\phi-1} \int Zdx$$

farà l' integrale completo dell' equazione  $(Q)$  sempre che si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2) - e(\phi+1) + g = 0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2) - f(\phi+1) + b = 0$$

II. Si ordini l' equazione  $(R)$  (*Art. preced.*) in questo modo, facendo  $M=0$ , e moltiplicando tutto per  $x^{\phi+1}$

$$x^{\phi+3}(a+bX)dv + x^{\phi+2}(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X)dvdv$$

$$+ x^{\phi+1}(a(\phi+1)(\phi+2) - e(\phi+1) + g$$

$$+ (b(\phi+1)(\phi+2) - f(\phi+1) + b)X)vdx^2 = 0$$

si che farà ella della forma  $(Q)$  in ipotesi di  $M=0$ .

Se dunque si faccia  $e-2a\phi-2a=e'$ ,  $f-2b\phi-2b=f'$ ,

$$a(\phi+1)(\phi+2) - e(\phi+1) + g = g', \quad b(\phi+1)(\phi+2)$$

$- f(\phi+1) + b = b'$ , farà ella integrabile (*Art. I.*) qualvolta si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2) - e'(\phi+1) + g' = 0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2) - f'(\phi+1) + b' = 0$$

e però negli stessi casi lo farà pure l' equazione  $(Q)$  supposto  $M=0$ , indi (§. VIII.) supposto  $M$  funzione di  $x$ . Ma

ponendo  $\frac{v'}{x^{\phi+1}}$  in luogo di  $v$ , l'equazione

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv + x^{\phi+2}(e'+fX)dvdx$$

$$+ x^{\phi+1}(g'+b'X)vdx^2 = 0$$

si trasforma come prima in questa

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv' + x^{\phi+2}(e'-2a\phi-2a+(f'-2b\phi-2b)X)dx dv'$$

$$+ x^{\phi+1}(a(\phi+1)(\phi+2)-e'(f+1)+g'$$

$$+ (b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+b')X)v'dx^2 = 0$$

la quale, posto  $e'-2a\phi-2a=e''$ ,  $f'-2b\phi-2b=f''$

$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=g''$ ,  $b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+b'=b''$ ,  
è integrabile ognivolta che abbiano luogo le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e''(\phi+1)+g''=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f''(\phi+1)+b''=0$$

Dunque negli stessi casi lo farà pure l'equazione (Q); e così successivamente. In conseguenza progredendo in questo modo dopo  $m$  trasformazioni, si conchiuderà, che l'equazione (Q) è generalmente integrabile qualvolta si verificchino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e^m(\phi+1)+g^m=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f^m(\phi+1)+b^m=0$$

Ed è ben facile cosa l'ottenere le forme  $e^m$ ,  $f^m$ ,  $g^m$ ,  $b^m$  in  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $b$  con le sostituzioni successive, essendo generalmente

$$e^m = e^{m-1} - 2a\phi - 2a, \quad f^m = f^{m-1} - 2b\phi - 2b$$

$$g^m = a(\phi+1)(\phi+2) - e^{m-1}(\phi+1) + g^{m-1},$$

$$b^m = b(\phi+1)(\phi+2) - f^{m-1}(\phi+1) + b^{m-1}$$

III. Ma di nuovo a questi infiniti casi d'integrabilità dell'equazione (Q) altri infiniti possono aggiungerli, come si è fatto nell'antecedente Proposizione, ricavando tre paja di equazioni dall'equazione (R), e procedendo in modo analogo a quello del §. XIX. Art. III., cosa, cui m'astengo dal fare, non implicando alcuna difficoltà.

## S C O L I O.

§. XXI. L'equazione ( $\Delta$ ) della Prop. IX. non è che un caso ben particolare di questa, com'è manifesto, cioè quando  $X = x^n$ ,  $\phi = -1$ . Ma si può estendere il metodo, come ho accennato di sopra, ad una più grande generalità cioè a tutti i gradi di questa speciale natura di equazioni differenziali.

## P R O P O S I Z I O N E X I.

§. XXII. *Svolgere infiniti casi d'integrabilità dell'equazione (A)*

$$(A) \quad Mdx^n = x^{m+1} (a + bX)ydx^n + x^{m+2} (c + eX)dydx^{n-1} \\ + x^{m+3} (f + gX)d^2ydx^{n-2} + x^{m+4} (h + kX)d^3ydx^{n-3} \\ + x^{m+5} (l + pX)d^4ydx^{n-4} + \text{ecc.}$$

*in cui M, X sono funzioni di x, a b c e ecc. m costanti a piacere.*

## R I S O L U Z I O N E.

Si faccia  $y = \frac{v}{x^{m+1}}$ . Sostituito questo valore nell'equazione (A) prende ella la forma (A')

$$(A') \quad \dots Mdx^n = (a + bX)vdx^n \\ + (c + eX)(xdvdx^{n-1} - (m+1)vdx^n) \\ + (f + gX)(x^2ddvdx^{n-2} - 2(m+1)xdvdx^{n-1} \\ + (m+1)(m+2)vdx^n) \\ + (h + kX)(x^3d^3vdx^{n-3} - 3(m+1)x^2ddvdx^{n-2} \\ + 3(m+1)(m+2)xdvdx^{n-1} - (m+1)(m+2)(m+3)vdx^n) \\ + (l + pX)(x^4d^4vdx^{n-4} - 4(m+1)x^3d^3vdx^{n-3} \\ + 6(m+1)(m+2)x^2ddvdx^{n-2} \\ - 4(m+1)\dots(m+3)xdvdx^{n-1} + (m+1)\dots(m+4)vdx^n)$$

$$\begin{aligned}
 & + (q + rX) (x^5 d^5 v dx^{n-5} - 5(m+1)x^4 d^4 v dx^{n-4} \\
 & + 10(m+1)(m+2)x^3 d^3 v dx^{n-3} \\
 & - 10(m+1) \dots (m+3)x^2 ddv dx^{n-2} \\
 & + 5(m+1) \dots (m+4)x d^2 v dx^{n-1} - (m+1) \dots (m+5)v dx^n) \\
 & + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

Da questa equazione se ne combinino tre nel seguente modo  
 (B) ...  $Mdx^n = x d^2 v dx^{n-1} (c - 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2) - 4l(m+1)(m+2)(m+3) + 5q(m+1) \dots (m+4) - \text{ecc.} + (e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1) \dots (m+3) + 5r(m+1) \dots (m+4) - \text{ecc.}) X + x^2 ddv dx^{n-2} (f - 3b(m+1) + 6l(m+1)(m+2) - 10q(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.} + (g - 3K(m+1) + 6p(m+1)(m+2) - 10r(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.}) X + x^3 d^3 v dx^{n-3} (b - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} + (K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}) X + \text{ecc.}$

(C) ...  $a - (m+1)c + (m+1)(m+2)f - (m+1)(m+2)(m+3)b + (m+1) \dots (m+4)l - (m+1) \dots (m+5)q + \text{ecc.} = 0$

(C) ...  $b - (m+1)c + (m+1)(m+2)g - (m+1)(m+2)(m+3)K + (m+1) \dots (m+4)p - (m+1) \dots (m+5)r + \text{ecc.} = 0$

E' certo che avendo luogo le equazioni (C), l' integrazione dell' equazione (A) dipende dall' integrazione dell' equazione (B), cioè dell' equazione (B')

$$\begin{aligned}
 (B') \dots Mdx^{n-1} & = xv' dx^{n-1} (c - 2f(m+1) + \text{ecc.}) \\
 & + x^2 d^2 v dx^{n-2} (f - 3b(m+1) + \text{ecc.}) \\
 & + x^3 ddv dx^{n-3} (b - 4l(m+1) + \text{ecc.}) + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

in cui si trasforma l' equazione (B), posto  $dv = v dx$ , e che è inferiore di un' unità all' equazione (A), cioè del grado  $m - 1$ .

Di nuovo l'equazione (B') con la sostituzione  $v' = \frac{v''}{x}$  si  
cambia in questa

$$\begin{aligned}
 (B'') \dots Mdx^{n-1} &= v'' dx^{n-1} (c - 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2) \\
 &\quad - 4l(m+1) \dots (m+3) + 5q(m+1) \dots (m+4) - \text{ecc.} \\
 &\quad + (e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1) \dots (m+3) \\
 &\quad + 5r(m+1) \dots (m+4) - \text{ecc.}) X) + (f - 3b(m+1) \\
 &\quad + 6l(m+1)(m+2) - 10q(m+1)(m+2)(m+3) + \text{ecc.} \\
 &\quad + (g - 3K(m+1) + 6p(m+1)(m+2) \\
 &\quad - 10r(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.}) X) (xdv'' dx^{n-2} - v'' dx^{n-1}) \\
 &\quad + (b - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} \\
 &\quad + (K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}) X) \\
 &\quad (x^2 ddv'' dx^{n-3} - 2xdv'' dx^{n-2} + 2v'' dx^{n-1}) \\
 &\quad + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

dalla quale combinandone similmente tre, come segue,

$$\begin{aligned}
 (B''') \dots Mdx^{n-1} &= xdv'' dx^{n-2} (f - 3b(m+1) + 6l(m+1)(m+2) \\
 &\quad - 10q(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.} - 2b + 2 \cdot 4l(m+1) \\
 &\quad - 2 \cdot 10q(m+1)(m+2) + \text{ecc.} + (g - 3K(m+1) \\
 &\quad + 6p(m+1)(m+2) - 10q(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.} \\
 &\quad - 2K + 2 \cdot 4p(m+1) - 2 \cdot 10r(m+1)(m+2) + \text{ecc.}) X) \\
 &\quad + x^2 ddv'' dx^{n-3} (b - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} \\
 &\quad + (K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}) X) \\
 &\quad + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (C') \dots c - 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2) - 4l(m+1) \dots (m+3) \\
 + 5q(m+1) \dots (m+4) - \text{ecc.} - f + 3b(m+1) \\
 - 6l(m+1)(m+2) + 10q(m+1) \dots (m+3) - \text{ecc.} \\
 + 2b - 2 \cdot 4l(m+1) + 2 \cdot 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0
 \end{aligned}$$

$$(C'') \dots e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)(m+2)(m+3)$$

$$\begin{aligned}
 &+ 5r(m+1)\dots(m+4) - \text{ecc.} - g + 3K(m+1) \\
 &- 6p(m+1)(m+2) + 10q(m+1)\dots(m+3) - \text{ecc.} \\
 &+ 2K - 2 \cdot 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0
 \end{aligned}$$

si può tornar a conchiudere, che ognora che si verifichino le relazioni (C), (C'), la risoluzione dell'equazione (A) dipenderà da quella dell'equazione (B''). Ma continuando simili trasformazioni, mentre il numero delle relazioni combinate tra coefficienti cresce, l'equazione da cui dipende successivamente l'integrazione dell'equazione (A) va digradando, dimodochè dopo  $n-1$  trasformazioni l'equazione ultima (B<sup>n</sup>) è di primo grado che si fa integrare generalmente.

Dunque l'equazione (A) è generalmente integrabile ognora che si verifichino  $n-1$  equazioni di relazioni combinate (C), (C'), (C'') . . . . . (C<sup>n-2</sup>).

II. Ma di nuovo si possono moltiplicare i casi d'integrabilità dell'equazione (A) all'infinito. Imperciocchè vi si faccia  $M=0$ ; l'equazione (A') (Art. preced.) in questo caso, essèndo ordinata e moltiplicata per  $x^{m+1}$ , prende la stessa forma di (A), cioè

$$\begin{aligned}
 0 = &x^{m+1} (a - (m+1)c + (m+1)(m+2)f - (m+1)\dots(m+3)b \\
 &+ (m+1)\dots(m+4)l - (m+1)\dots(m+5)q + \text{ecc.} \\
 &+ (b - (m+1)e + (m+1)(m+2)g - (m+1)\dots(m+3)K \\
 &+ (m+1)\dots(m+4)p - (m+1)\dots(m+5)r + \text{ecc.}) X) v dx^n \\
 &+ x^{m+2} (c - 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2) \\
 &- 4l(m+1)\dots(m+3) + 5q(m+1)\dots(m+4) - \text{ecc.} \\
 &+ (e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)\dots(m+3) \\
 &+ 5r(m+1)\dots(m+4) - \text{ecc.}) X) d v dx^{n-1} \\
 &+ x^{m+3} (f - 3b(m+1) + 6l(m+1)(m+2) \\
 &- 10q(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.} + (g - 3K(m+1) \\
 &+ 6p(m+1)(m+2) - 10r(m+1)\dots(m+3) \\
 &+ \text{ecc.}) X) d d v dx^{n-2} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

cioè la forma (A')

$$(A'') \dots 0 = x^{m+1} (a' + b'X) v dx^n + x^{m+2} (c' + e'X) d v dx^{n-1} \\ + x^{m+3} (f' + g'X) d d v dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

posto

$$a' = a - (m+1)c + (m+1)(m+2)f - (m+1)\dots(m+3)b + \text{ecc.}$$

$$b' = b - (m+1)e + (m+1)(m+2)g - (m+1)\dots(m+3)K + \text{ecc.}$$

$$c' = c - 2f(m+1) + 3b(m+1)(m+2) - 4l(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.}$$

$$e' = e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.}$$

Similmente l'equazione  $(A')$  con la sostituzione  $v = \frac{v'}{x^{m+1}}$

si trasforma nell'equazione  $(A''')$

$$(A''') \dots 0 = x^{m+1} (a'' + b''X) v' dx^n + x^{m+2} (c'' + e''X) d v' dx^{n-1} \\ + x^{m+3} (f'' + g''X) d d v' dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a'' = a' - (m+1)c' + (m+1)(m+2)f' - (m+1)\dots(m+3)b' + \text{ecc.}$$

$$b'' = b' - (m+1)e' + (m+1)(m+2)g' - (m+1)\dots(m+3)K' + \text{ecc.}$$

$$c'' = c' - 2f(m+1) + 3b'(m+1)(m+2) - 4l'(m+1)\dots(m+3) + \text{ecc.}$$

e questa, con la sostituzione  $v' = \frac{v''}{x^{m+1}}$ , nell'equazione  $(A''''')$

$$(A''''') \dots 0 = x^{m+1} (a''' + b'''X) v'' dx^n + x^{m+2} (c''' + e'''X) d v'' dx^{n-1} \\ + x^{m+3} (f''' + g'''X) d d v'' dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a''' = a'' - (m+1)c'' + (m+1)(m+2)f'' - (m+1)\dots(m+3)b'' + \text{ecc.}$$

$$b''' = b'' - (m+1)e'' + (m+1)(m+2)g'' - (m+1)\dots(m+3)K'' + \text{ecc.}$$

ecc. e così all'infinito.

Se dunque l'equazione  $(A)$  s' integra generalmente per l'Articolo preced. ognora che abbia luogo il sistema di relazioni tra' coefficienti  $(C)$ ,  $(C')$ ,  $\dots$ ,  $(C^{n-2})$ , per la stessa ragione potrà generalmente integrarsi l'equazione  $(A')$ , sempre che si verifichi il seguente sistema di relazioni

$$(CC) \dots a' - (m+1)c' + (m+1)(m+2)f' \\ - (m+1)\dots(m+3)b' + \text{ecc.} = 0$$

(CC)



$$(CC) \dots b' - (m+1)e' + (m+1)(m+2)g' \\ - (m+1) \dots (m+3)K' + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C') \dots c' - 2f'(m+1) + 3b'(m+1)(m+2) \\ - 4l(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C') \dots e' - 2g'(m+1) + 3K(m+1)(m+2) \\ - 4p(m+1) \dots (m+3) + \text{ecc.} = 0$$

Nello stesso modo si può conchiudere, che l'equazione ( $A'''$ ) potrà integrarsi qualvolta abbia luogo il seguente sistema di relazioni

$$(CCC) \dots a'' - (m+1)c'' + (m+1)(m+2)f'' \\ - (m+1) \dots (m+3)b'' + \text{ecc.} = 0$$

$$(CCC) \dots b'' - (m+1)e'' + (m+1)(m+2)g'' \\ - (m+1) \dots (m+3)K'' + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C'C') \dots c'' - 2f''(m+1) + 3b''(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C'C') \dots e'' - 2g''(m+1) + 3K''(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$

E così successivamente per tutte le altre trasformate ( $A^{v'}$ ), ( $A^{v''}$ ) ecc. all'infinito.

Dunque in tutti questi infiniti sistemi di relazione tra' coefficienti farà sempre integrabile l'equazione generale  $Mdx^n = x^{m+1}(a+bX)ydx^n + x^{m+2}(c+eX)dydx^{n-1}$

$$+ x^{m+3}(f+gX)d^2ydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in supposizione di  $M=0$ . Ma essendolo in questa supposizione, lo farà pure in quella di  $M$  funzione di  $x$  qualunque (§. VIII.). Il che ecc.

# DELLE PROGRESSIONI RECIPROCHE

## DELLE POTENZE AFFETTE

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

**E'** Tanto impenetrabile il valore delle progressioni reciproche di questa forma

$$\frac{1}{aK \pm b} \mp \frac{1}{aK^2 \pm b} + \frac{1}{aK^3 \pm b} \mp \text{ecc.} \dots \frac{1}{aK^n \pm b}$$

che l' illustre *Eulero* non dubitò di dire nel VI. Vol. de' primi Com. di Pietrob. pag. 97 „ *Quamvis vero hac methodus tam late pateat, tamen innumerae occurrere possunt progressiones per eam non summabiles, quarum quidem vel nullo alio modo summae assignari possunt, ut hujus*

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \text{ecc.} \dots \frac{1}{2^n - 1}$ , che è pur un caso particolare e semplicissimo della forma precedente. In fatti non sappiamo finora nè trattarle, nè esprimerle per alcun modo.

Vo' credere pertanto non discaro a' Geometri il veder fatto un primo passo in questo gineprajo, e suggeritata la somma di questa, e d' infinite altre progressioni di tal indole ad una qualche espressione finita. Non è facile per verità l' avvisarfi, che il maneggio di loro si riduce al far passaggio da quantità esponenziali reali a' seni e coseni d' archi immaginarj, se un' occasione propizia non concorra a mostrarcelo a dito. E tanto più che non è in uso questo passaggio come l' altro comune e trito dalle quantità esponenziali immaginarie a' seni e coseni d' archi reali. Ma restava ancora un nodo assai più difficile da sciorsi, dovendo l' analista rintracciare un metodo in appressò, onde sommare le serie reciproche de' seni e coseni, che mancava totalmente. Così fosse tra' vivi quel gran Maestro, cui le Scienze Matematiche, l' Analisi più fina e complicata, e il più de' Geometri viventi d' ogni Nazione debbono i lumi più preziosi, l' avanzamento attuale,

e innumerabili aperture a' nuovi progressi, come son certo, che avrebbe onorato quest' indagine di qualche attenzione.

§. I.

Sia la serie ( $\mu$ )

$$(\mu) \dots \frac{A}{K-1} + \frac{A}{K^2-1} + \frac{A}{K^3-1} \dots \frac{A}{K^n-1}$$

in cui  $A$  è una quantità invariabile qualunque,  $K$  una quantità qualunque maggiore dell' unità, e  $n$  l' esponente de' termini. Essendo arbitraria la base de' logaritmi, sarà lecito il prendere per base logarithmica la grandezza  $K$ , che ella sia, e farà sempre  $\log K = 1$ ,  $\log K^2 = 2$  ecc. e farà facile il passaggio dal sistema de' logaritmi con la base  $K$  al sistema comune delle Tavole. In conseguenza, se sia  $\pi$  la femicirconferenza di un cerchio che ha l' unità per raggio, e la lettera  $\omega$  rappresenti la quantità immaginaria  $\sqrt{-1}$ , farà pe' noti Canoni

$$\text{sen. } m\pi = (K^{m\pi} - K^{-m\pi}) : 2\omega, \quad \text{cos. } m\pi = \frac{1}{2} (K^{m\pi} + K^{-m\pi});$$

e posto  $m\pi = \frac{x}{\omega}$ , rappresentando  $x$  una grandezza reale; farà  $2\omega \text{ sen. } x : \omega = K^x - K^{-x}$ ,  $2 \text{ cos. } x : \omega = K^x + K^{-x}$ , sì che ove nelle precedenti formule si esprimono per quantità esponenziali immaginarie seni e coseni d' archi reali, in queste sono espressi seni e coseni d' archi immaginarj per quantità esponenziali reali. Ciò premesso si faccia passaggio dalle dirette alle espressioni reciproche, e farà

$$\frac{1}{2^n \text{ sen. } x : \omega} = \frac{1}{K^n - K^{-n}} = \frac{1}{K^{2n} - 1}; \quad \frac{1}{2 \text{ cos. } x : \omega} = \frac{1}{K^{2n} + 1}.$$

Ma  $\frac{K^n}{K^{2n} - 1} = \frac{K^n}{(K^n - 1)(K^n + 1)}$ ; dunque  $\frac{1}{2\omega K^n \text{ sen. } x : \omega} = \frac{1}{K^n + 1}$ ;  $\frac{1}{2\omega K^n \text{ cos. } x : \omega} = \frac{1}{K^n - 1}$ , e però essendo  $\frac{1}{K^n \pm 1}$  il termine generale di una serie, farà questa serie uguale a quella, che ha  $\frac{K^n \mp 1}{2\omega K^n} \times \frac{1}{\text{sen. } x : \omega}$  per termine generale, fa-

cendo che  $K$  rappresenti la base logaritmica. Se dunque il simbolo  $S.T$  esprima la somma della serie, di cui  $T$  è il termine generale; farà generalmente

$$S. \frac{A}{K^x \pm 1} = S. \frac{A(K^x \mp 1)}{2\omega K^x} \times \frac{1}{\text{fen. } x : \omega}; \quad S. \frac{AK^x}{K^{2x} - 1} = S. \frac{A}{2\omega \text{fen. } x : \omega};$$

$$S. \frac{A}{2\omega \text{fen. } x : \omega}; \quad S. \frac{AK^x}{K^{2x} + 1} = S. \frac{A}{2 \text{cof. } x : \omega}$$

## §. II.

Ed ecco intanto la somma della serie del Sig. *Eulero*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}$$

felicemente ridotta alla somma d'una serie, che ha per termine generale  $\frac{2^x + 1}{\omega 2^{2x} + 1} \times \frac{1}{\text{fen. } x : \omega}$ , essendo il  $2$  la base de' logaritmi.

## §. III.

Acciniamoci ora a determinare la somma in genere delle serie aventi sì fatte espressioni per termine generale. E' noto che le serie reciproche de' seni, e coseni ecc. d'archi procedenti in aritmetica progressione non erano state tocche da alcuno, e molto meno nel caso, che involgessero, come qui accade, moltiplicatori esponenziali. Il primo cimento in questa materia è quello, che ho fatto pubblico nel I. Vol. della *Società Italiana* nella Dissertazione intorno alle serie al Cap. X. pag. 368, avendo ivi ridotto tali somme alle leggi del Calcolo Integrale. A quel metodo pertanto soggetteremo anche queste più difficili, ed altre analoghe così, facendo vedere come da quelle espressioni integrali si passi non difficilmente a quantità sviluppate, e finite. Si riprenda da quel luogo la formola

$$\int \frac{z^m + z^{n-m}}{1 + z^n} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{n \text{fen. } \frac{m\pi}{n}}$$

da integrarli da  $z=0$  fino a  $z=1$ , in cui  $\pi$  è la femicirconferenza di un cerchio, che ha l'unità per raggio. Facendo  $n=1$ ,  $m\pi=x:\omega$ , come nel I. §., e posto  $\omega\pi=a$  per semplicità, si avrà generalmente

$$\frac{A}{\pi} \int \frac{z^{x:a} + z^{1-x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{A}{\text{fen. } x:a}$$

In conseguenza (6. I.)

$$(P) \dots \frac{A}{2a} \int \frac{z^{x:a} + z^{1-x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} \pm \frac{A}{2aK^n} \int \frac{z^{x:a} + z^{1-x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} \\ = \frac{A}{2a} \int \frac{z^{x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} + \frac{A}{2a} \int \frac{z^{1-x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} \pm \frac{A}{2aK^n} \int \frac{z^{x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} \\ \pm \frac{A}{2aK^n} \int \frac{z^{1-x:a}}{1+z} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{A}{K^n \mp 1}, \text{ posta } K \text{ qualunque la base}$$

de' logaritmi. Ora si richiami il metodo nostro di sommare le serie citato qui sopra, e però si moltiplichi, e si divida il primo termine per  $1-z^{1:a}$ , il secondo per  $1-z^{-1:a}$  sotto il segno integrale. Sarà

$$(Q) \dots \frac{A}{2a} \int \frac{z^{x:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)} \cdot \frac{dz}{z} - \frac{A}{2a} \int \frac{z^{x:a+1:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)} \cdot \frac{dz}{z}$$

la forma differenziale del primo; e la forma differenziale del secondo sarà

$$(R) \dots \frac{A}{2a} \int \frac{z^{1-x:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)} \cdot \frac{dz}{z} - \frac{A}{2a} \int \frac{z^{1-x:a-1:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)} \cdot \frac{dz}{z}$$

Similmente si moltiplichi, e si divida il terzo termine per  $1 - \frac{z^{1:a}}{K}$ , il quarto per  $1 - \frac{z^{-1:a}}{K}$  sotto il segno integrale; si avrà per forma differenziale del terzo la seguente espressione

$$(S) \dots \pm \frac{A}{2aK^n} \int \frac{z^{x:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)} \cdot \frac{dz}{z} \\ \mp \frac{A}{2aK^{n+1}} \int \frac{z^{x:a+1:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)} \cdot \frac{dz}{z}$$

e la seguente

$$(T) \dots \pm \frac{A}{2aK^n} \int \frac{z^{1-n:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$\mp \frac{A}{2aK^{n+1}} \int \frac{z^{1-n:a-1:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)} \cdot \frac{dz}{z}$$

per forma differenziale del quarto. Si faccia  $x=1$  ne' primi termini de' primi binarj (Q) (R), e riducendo farà l'espressione (D)

$$\frac{A}{2a} \int \frac{(z^{1:a} + z^{1-n:a})(1-z^{n:a})}{(1-z^{1:a})(1+z)} \cdot \frac{dz}{z} \dots (D)$$

la somma generale della serie avente per termine generale il primo termine della formula (P). Operando similmente sopra i secondi binarj (S), (T), si troverà essere l'espressione ridotta (E)

$$\pm \frac{A}{2aK^n} \int \left( \frac{z^{1:a}(K^n - z^{n:a})}{(K - z^{1:a})(1+z)} + \frac{z^{1-n:a}(K^n z^{n:a} - 1)}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)} \right) \frac{dz}{z} \dots (E)$$

la somma generale della serie avente per termine generale il secondo termine della formula (P). Dunque col mezzo delle due espressioni (D), (E) nel caso di  $z=1$  dopo l'integrazione si otterrà la somma generale della serie di cui è termine generale  $\frac{A}{K^n \mp 1}$ ; e posto poi  $x=\infty$  si avrà la somma della serie all'infinito, ch'è il caso in quistione.

Ora essendo  $a=\omega\pi=\pi\sqrt{-1}$ , e  $x:a=x:\pi\sqrt{-1}$  lo stesso che  $\frac{-x\sqrt{-1}}{\pi}$ , la formula (D) diverrà

$$\frac{A}{2a} \int \frac{(z^{1:a-1} + z^{n:a:\pi})(1-z^{n:a:\pi})}{(1-z^{1:a})(1+z)} dz$$

e nel caso contemplato di  $x=\infty$ , essendo  $z$  prima dell'integrazione minore dell'unità, tanto  $z^{n:a:\pi}$  quanto  $z^{n:a:\pi}$  farà sotto il segno quantità infinitamente piccola, e però per le serie all'infinito l'espressione (D) prenderà la forma

$$\frac{A}{2a} \int \frac{z^{1:a-1} dz}{(1-z^{1:a})(1+z)} \dots (M)$$

Nello stesso modo proveremo, che l'espressione (E) diverrà

$$\pm \frac{A}{2aK^n} \int \left( \frac{K^n z^{1:a} - 1 dz}{(K - z^{1:a})(1+z)} + \frac{K^n dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)} \right) =$$

$$\pm \frac{A}{2a} \int \frac{z^{1:a-1} dz}{(K - z^{1:a})(1+z)} \pm \frac{A}{2a} \int \frac{dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)} \dots (N)$$

nel caso di  $x = \infty$

§. IV.

Il passo fatto è quello pertanto di essere da nessuna immaginabile espressione finita pervenuti a trovarne una per questa sorta di progressioni, che può almeno costruirsi e ridursi a rettificazione, o quadratura finita di qualche curva, se si volesse, essendo stranissima pretesa il volere, che tutto si abbia a ridurre a funzioni d'archi o d'iperbole comuni, quasi tutte le trascendenze dovessero essere di una sola natura. Se fosse lecito il trascurare un residuo finito nelle divisioni spinte all'infinito, le formule trovate potrebbero trasformarsi in funzioni trascendenti familiari in questo modo. Si faccia  $z^{1:a} = y$ , e farà

$$\int \frac{z^{1:a-1} dz}{(1 - z^{1:a})(1+z)} = \int \frac{ady}{(1-y)(1+y^a)} = \int \frac{ady}{1+y^a - y - y^{a+1}}$$

Ma la frazione

$$\frac{1}{-y^{a+1} - y + y^a + 1} = -\frac{1}{y^{a+1}} + \frac{1}{y^{2a+1}} - \frac{1}{y^{3a+1}} + \frac{1}{y^{4a+1}} - \text{ecc.}$$

non computando l'ultimo residuo  $\frac{1}{y}$  che risulta inoltrando all'infinito la divisione. Moltiplicando dunque per  $ady$ , e integrando si avrà

$$\frac{y^{-a}}{1} - \frac{y^{-2a}}{2} + \frac{y^{-3a}}{3} - \frac{y^{-4a}}{4} + \text{ecc.};$$

sostituendo il valore di  $y$  in  $z$ , e ponendo  $z=1$ , perchè messo  $z=0$ , tutto svanisce, si avrà  $(\mu)$  pel valore della formula (D) nel caso di  $x = \infty$ , e di  $z=1$  dopo l'integrazione, cioè della formula (M)

$$\frac{A}{2a} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{ecc.} \right) \dots (\mu)$$

Ma  $K$  è la base, che abbiamo assunto pe' logaritmi iperbolici; ed è noto, che prendendo nelle tavole ordinarie il logaritmo iperbolico  $L$  di qualunque quantità  $K$ , e il logaritmo pure d' altra quantità qualsivoglia  $m$ , se si divida il  $Lm$  per  $L$ , il quoziente è il logaritmo iperbolico della quantità  $m$  con la base  $K$ .

Essendo dunque

$$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ ecc. con la base } e = 2.718281828459 \text{ ecc.}$$

e  $L = l.K$  con la stessa base  $e$ , farà  $\frac{l.2}{L} = \frac{l.2}{l.K}$  il logaritmo del numero 2 con la base  $K$ , cioè il valore della serie nel caso nostro. E perciò  $\frac{A}{2a} \cdot \frac{l.2}{l.K} = \frac{Al.2}{2\pi\sqrt{-1}l.K}$  sarebbe il valo-

re per approssimazione dell' espressione integrale ( $M$ ), essendo  $\pi$  la semicirconferenza d' un cerchio avente l' unità per raggio. Passiamo ora dagli esponenti immaginarj agli archi reali, e però essendo  $K$  la base de' logaritmi iperbolici, farà

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi\sqrt{-1}l.K}{K} = \cos. 2\pi l.K + \sqrt{-1} \text{ sen. } 2\pi l.K \\ & = (\cos. \pi l.K + \sqrt{-1} \text{ sen. } \pi l.K)^2, \text{ e però facendo ripassaggio} \\ & \text{ai numeri, farà} \end{aligned}$$

$$2\pi\sqrt{-1}l.K = 2l. (\cos. \pi l.K + \sqrt{-1} \text{ sen. } \pi l.K)$$

Ma questo logaritmo iperbolico è con la base  $K$ ; dunque dividendolo per  $l.K$  riferito alla base comune  $e$ , si avrà finalmente pel valore dell' espressione ( $D$ ) ne' casi contemplati di  $x = \infty$ , e di  $z = 1$ , dopo l' integrazione, la formula ( $D'$ )

$$(D') \dots \frac{Al.2 l.K}{2l. (\cos. \pi l.K + \sqrt{-1} \text{ sen. } \pi l.K)}$$

in cui  $K$  è il numero assoluto qualunque delle nostre serie maggiore dell' unità, e i logaritmi sono tutti gli ordinarj iperbolici riferiti alla base  $e$ .

Ma procedendo con un simile metodo integreremo per approssimazione la formula ( $N$ ) in questa guisa, trascurando l' ultimo residuo giunta la divisione all' infinito. Si faccia, come prima,  $z^{1-a} = y$  nel primo membro, e si avrà

$$z^{1-a-1} dz$$



$$\int \frac{z^{1:a-1} dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} = \int \frac{ady}{Ky^a + K-y-y^{a+1}}, \text{ e per\`o}$$

$\frac{1}{Ky^a + K-y-y^{a+1}} = \frac{1}{Ky^a} - \frac{1}{Ky^{1:a}} + \frac{1}{Ky^{1:a}} - \frac{1}{Ky^{2:a}} + \text{ecc.}$  all' infinito. Moltiplicando dunque per  $ady$ , integrando, sostituendo il valore per  $y$  in  $z$ , e ponendo  $z=1$ , far\`a in questo caso

$$\int \frac{z^{1:a-1} dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} = \frac{a}{K} \left( \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-2a} + \frac{1}{1-3a} \right.$$

$\left. - \frac{1}{1-4a} + \text{ecc.} \right)$ . Similmente essendo pel secondo membro

$\frac{1}{Kz^{1:a+1} + Kz^{1:a} - 1 - z} = \frac{1}{Kz^{1:a+1}} - \frac{1}{Kz^{1:a+2}} + \frac{1}{Kz^{1:a+3}} - \text{ecc.}$  all' infinito, far\`a moltiplicando per  $dz$ , e integrando da  $z=0$  fino a  $z=1$

$$\int \frac{dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)} = -\frac{a}{K} + \frac{a}{K} \left( \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+3a} - \text{ecc.} \right);$$

dunque  $\int \left( \frac{z^{1:a-1} dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} + \frac{dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)} \right)$  uguaglier\`a nel caso di  $z=1$  dopo l' integrazione

$$-\frac{a}{K} + \frac{a}{K} \left( \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1-2a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1-3a} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+3a} - \text{ecc.} \right) = -\frac{a}{K} + \frac{2a}{K} \left( \frac{1}{(1-a)(1+a)} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1-2a)(1+2a)} + \frac{1}{(1-3a)(1+3a)} - \text{ecc.} \right)$$

Si ricorra pertanto al metodo nostro di sommare le serie (Mem. della *Soc. Italiana* Vol. I. Probl. XI.), e si tragga pel caso di due fattori al denominatore l' integrale per la somma generale di questa serie a segni alternativi

$$\frac{1}{nq} \int z^{p:q-m;n-1} dz \int z^{m;n} dz \left( \frac{1-z^n}{1+z} \right)$$

il quale per la somma all' infinito, essendo spezzato e ridotto, si trasforma in questo

$$\frac{1}{nq \left( \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \right)} \int \frac{(z^{m:n} - z^{p:q}) dz}{1+z}$$

da integrarsi da  $z=0$  fino a  $z=1$ .

Ora nel caso nostro, essendo nel termine generale

$$\frac{1}{(m+nx)(p+qx)} = \frac{1}{(1-ax)(1+ax)}, \quad m=p=1, \quad n=-a,$$

$q=a$ , l' integrale diverrà  $-\frac{1}{2a} \int \frac{(z^{-1:a} - z^{1:a}) dz}{1+z}$ . Ma quest' integrale nasce dalla differenza de' due seguenti integrali

$$+\frac{1}{2a} \int \frac{(z^{1:a-1} + z^{1:a}) dz}{1+z} - \frac{1}{2a} \int \frac{(z^{1:a-1} + z^{-1:a}) dz}{1+z}; \text{ ed è}$$

poi  $\int \frac{(z^{1:a-1} + z^{1:a}) dz}{1+z} = \int z^{1:a-1} dz = az, = a$ , posto  $z=1$ , e in simil caso di  $z=1$  dopo l' integrazione

$$\int \frac{(z^{1:a-1} + z^{-1:a}) dz}{1+z} = \frac{\pi}{\text{fen. } \pi:a}$$

(Com. nuovi di S. Pietrob. Vol. XIX. pag. 32.). Dunque

$$\text{l' integrale nostro } -\frac{1}{2a} \int \frac{(z^{-1:a} - z^{1:a}) dz}{1+z} = -\frac{\pi}{2a \text{ fen. } \pi:a} + \frac{1}{2}.$$

In conseguenza questo farà pure il valore della nostra serie

$$\frac{1}{(1-a)(1+a)} - \frac{1}{(1-2a)(1+2a)} + \text{ecc.} \dots \frac{1}{(1-ax)(1+ax)}$$

e perciò

$$= \frac{a}{K} + \frac{2a}{K} \left( \frac{1}{(1-a)(1+a)} - \frac{1}{(1-2a)(1+2a)} + \text{ecc.} \right)$$

$$= -\frac{a}{K} + \frac{2a}{K} \left( \frac{-\pi}{2a \text{ fen. } \pi:a} + \frac{1}{2} \right) = \int \left( \frac{z^{1:a-1} dz}{(K - z^{1:a})(1+z)} \right)$$

$\pm \frac{dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)}$ ), posto  $z=1$  dopo l' integrazione.

Ma moltiplicando per  $\pm \frac{A}{2a}$  quest' espressione integrale, si ha l' espressione superiore (N), cioè l' espressione (E) nel caso di  $x=\infty$ . Dunque il valore di quell' espressione nel caso di  $x=\infty$ , e di  $z=1$  dopo l' integrazione farà

$$\pm \frac{A}{2a} \left( -\frac{A}{K} + \frac{2a}{K} \left( \frac{-\pi}{2a \text{ fen. } \pi:a} + \frac{1}{2} \right) \right) = \mp \frac{A\pi}{2aK \text{ fen. } \pi:a}$$

e posto per  $a$  il suo valore  $\pi\sqrt{-1}$  si avrà

$$\mp \frac{A}{2K\sqrt{-1} \text{ fen. } \pi : \sqrt{-1}}$$

Ma è  $K$  la base de' logaritmi per supposizione; dunque passando dagli archi immaginarj alle quantità esponenziali reali, come nel principio di questo §., farà

$$\mp \frac{A}{2K\sqrt{-1} \text{ fen. } \pi\sqrt{-1}} = \mp \frac{AK}{K(K^2 - 1)} = \mp \frac{A}{K^2 - 1} \dots (E')$$

e perciò per un' approssimazione farà

$$(D') \mp (E') = S. \frac{A}{K^2 \mp 1}$$

§. V.

Ma contentandoci della riduzione scoperta al §. III., e ripigliando le somme esatte, farà (M)  $\pm$  (N) la somma della serie

$$\frac{A}{K-1} + \frac{A}{K^2-1} + \frac{A}{K^3-1} + \text{ecc.} \dots \frac{A}{K^x-1}$$

e (D)  $\pm$  (E) la somma generale; sì che posto  $A=1$ ,  $K=2$ , si avrà tosto la somma della serie del Sig. *Eulero*, e (M)  $-$  (N) la somma della serie

$$\frac{A}{K+1} + \frac{A}{K^2+1} + \frac{A}{K^3+1} + \text{ecc.} \dots \frac{A}{K^x+1}$$

e (D)  $-$  (E) la somma generale. Parimenti sommando, e riducendo farà (M) la somma della serie

E e ij

$$\frac{AK}{K^2-1} + \frac{AK^2}{K^4-1} + \frac{AK^3}{K^6-1} + \text{ecc.} \dots \frac{AK^n}{K^{2n}-1}$$

e (D) la somma generale.

E perchè  $\frac{A}{K^n-1} - \frac{A}{K^n+1} = \frac{2A}{K^{2n}-1}$ , farà (N) la somma della serie

$$\frac{A}{K^2-1} + \frac{A}{K^4-1} + \frac{A}{K^6-1} + \text{ecc.} \dots \frac{A}{K^{2n}-1}$$

ed (E) la somma generale.

§. VI.

Essendo poi  $\frac{A}{K^n-1} + A = \frac{AK^n}{K^n-1}$ , e  $A - \frac{A}{K^n+1} = \frac{AK^n}{K^n+1}$ , si avrà l'aggregato (D) + (E) + Ax per somma generale della serie

$$\frac{AK}{K-1} + \frac{AK^2}{K^2-1} + \frac{AK^3}{K^3-1} + \text{ecc.} \dots \frac{AK^n}{K^n-1}$$

e l'aggregato Ax - (D) + (E) farà la somma generale della serie

$$\frac{AK}{K+1} + \frac{AK^2}{K^2+1} + \frac{AK^3}{K^3+1} + \text{ecc.} \dots \frac{AK^n}{K^n+1}$$

In conseguenza Ax + (E) farà la somma generale della serie

$$\frac{AK^2}{K^2-1} + \frac{AK^4}{K^4-1} + \frac{AK^6}{K^6-1} + \text{ecc.} \dots \frac{AK^{2n}}{K^{2n}-1}$$

§. VII.

Di nuovo essendo

$$\frac{1}{\text{sen.} \frac{\pi(p-x)}{2p}} = \frac{1}{\text{cos.} \frac{\pi x}{2p}}$$

se si faccia  $2p = \pi\omega = a$  (§. III.), farà

$$\frac{1}{\text{fen.} \left( \frac{a}{2} - x \right) : \omega} = \frac{1}{\text{cof. } x : \omega}$$

Dunque  $S. \frac{1}{\text{fen.} \left( \frac{a}{2} - x \right) : \omega} = S. \frac{1}{\text{cof. } x : \omega}$ , e però moltiplican-

do i membri per  $\frac{A}{2\omega}$  farà parimenti

$$S. \frac{A}{2\omega \text{ fen.} \left( \frac{a}{2} - x \right) : \omega} = \frac{1}{\omega} S. \frac{A}{2 \text{ cof. } x : \omega}$$

Ora essendo l'espressione (D) (§. V.) la somma generale della serie, che ha per termine generale  $\frac{AK^x}{K^{2x} - 1} = \frac{A}{2\omega \text{ fen. } x : \omega}$

(§. I.), se si metta in (D)  $\frac{a}{2} - x$  in luogo di  $x$  sì che (D) diventi (D<sub>1</sub>), farà

$$(D_1) = S. \frac{A}{2\omega \text{ fen.} \left( \frac{a}{2} - x \right) : \omega} = \frac{1}{\omega} S. \frac{A}{2 \text{ cof. } x : \omega}$$

Ma  $\frac{1}{2 \text{ cof. } x : \omega} = \frac{AK^x}{K^{2x} + 1}$  (§. I.). Dunque  $\omega (D_1)$  farà la somma generale della serie

$\frac{AK}{K^2 + 1} + \frac{AK^2}{K^4 + 1} + \frac{AK^3}{K^6 + 1} + \text{ecc.} \dots \frac{AK^x}{K^{2x} + 1}$   
 posta  $K$  qualunque la base de' logaritmi iperbolici.

§. VIII.

Quindi possiamo ricavare il modo di ridurre a legge le somme di altre innumerabili serie, che non erano state soggettate a verun calcolo per l'innanzi. Potremo pertanto sommare la serie

$$\frac{AK^2}{K^2 + 1} + \frac{AK^4}{K^4 + 1} + \frac{AK^6}{K^6 + 1} + \dots + \frac{AK^{2x}}{K^{2x} + 1}$$

in questo modo, qualunque cosa sieno  $A$  e  $K$ , purchè  $K$  sia maggiore dell' unita.

Essendo  $\frac{\text{sen. } x:\omega}{\text{cos. } x:\omega} = \text{tang. } x:\omega$  si sostituiscano pel seno, e coseno i valori corrispondenti esponenziali, posta  $K$  la base de' logaritmi iperbolici, e farà

$$\text{tang. } x:\omega = \frac{1}{\omega} \left( \frac{K^x - K^{-x}}{K^x + K^{-x}} \right) = \frac{1}{\omega} \left( \frac{K^{2x} - 1}{K^{2x} + 1} \right)$$

Ma la somma della serie

$$\text{tang. } 1:\omega + \text{tang. } 2:\omega + \text{tang. } 3:\omega + \dots + \text{tang. } x:\omega$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a} dz (1 - z^x) (z^{-x} - 1 - 1)}{(1 - z)(1 - z^{\pi:a})} = (F)$$

(Mem. della *Soc. Italiana* pag. 300.) posta  $a = 1:\omega$ ; e se nelle due espressioni  $(D)$ ,  $(E)$  del §. III. si metta  $2x$  in luogo di  $x$ , sì che  $(D)$  diventi  $(D'')$ ,  $(E)$  diventi  $(E'')$ , si trova

essere  $(D'') - (E'') = A\omega \cdot \frac{1}{K^{2x} + 1}$ . Dunque essendo

$$\omega S. \text{tang. } x:\omega = S. \frac{K^{2x}}{K^{2x} + 1} - S. \frac{1}{K^{2x} + 1}, \text{ farà}$$

$$A\omega (F) + S. \frac{A}{K^{2x} + 1} = S. \frac{AK^{2x}}{K^{2x} + 1} = A\omega (F) + (D'') - (E'')$$

Ma si è trovato (§. VI.)  $Ax - (D) + (E) = S. \frac{AK^x}{K^x + 1}$ ;

dunque mettendo, come qui innanzi,  $2x$  in luogo di  $x$ , farà

$$\text{parimenti } 2Ax - (D'') + (E'') = S. \frac{AK^{2x}}{K^{2x} + 1} = A\omega (F)$$

+  $(D'') - (E'')$ , e però avrà luogo nel caso di  $z = 1$  dopo l' integrazione l' equazione seguente

$$2Ax - A\omega (F) - 2(D'') + 2(E'') = 0$$

Similmente sommeremo la serie

$$\frac{AK^3}{K^4 - 1} + \frac{AK^6}{K^8 - 1} + \frac{AK^9}{K^{12} - 1} + \dots + \frac{AK^{3x}}{K^{4x} - 1}$$

giacchè il termine generale si risolve ne' due termini generali particolari

$$\frac{AK^x}{2(K^{2x} - 1)} + \frac{AK^x}{2(K^{2x} + 1)}$$

ed è  $\frac{1}{2}(D) = S. \frac{AK^x}{2K^{2x} - 1}$  (§. V.), e  $\frac{\omega}{2}(D_1) = S. \frac{AK^x}{2(K^{2x} + 1)}$  (§. VII.). Nello stesso modo conseguremo la somma della serie

$$\frac{AK}{K^4 - 1} + \frac{AK^2}{K^8 - 1} + \frac{AK^3}{K^{12} - 1} \dots \dots \frac{AK^x}{K^{4x} - 1}$$

rifolvendosi il termine generale di lei ne' due termini

$$\frac{AK^x}{2(K^{2x} - 1)} - \frac{AK^x}{2(K^{2x} + 1)}$$

§. IX.

Ma veggiamo di spignere più oltre la generalità per altra via, senza farlo a parte a parte combinando le espressioni ritrovate. Il faremo sopra alcune forme principali, e refterà così fatta strada a chi volesse applicare il metodo a casi particolari secondo l'occorrenza. Si ripigli perciò la formula

$$\frac{1}{2\omega \text{ fen. } x : \omega} = \frac{K^x}{K^{2x} - 1} \text{ (§. I.) , e posto } p + qx \text{ in luogo di } x,$$

affinchè gli esponenti possano procedere in qualunque progressione aritmetica, dando i valori convenienti a  $p$ , e  $q$ , fommeremo generalmente le serie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)} - 1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)} - 1} + \text{ecc.} \dots \frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)} - 1}$$

Si ricorra dunque alla nostra Memoria nel I. Vol. della Società pag. 369; ed essendosi ivi determinata la somma della

serie avente per termine generale  $\frac{1}{\text{fen. } (p + qx) a}$ , vi si metta

$\frac{1}{\omega}$  in luogo di  $a$ , e si moltiplichi l'espressione per  $A$ , e la si divida per  $2\omega$ ; farà

$$S. \frac{A}{2\omega \text{ fen. } (p + qx) : \omega} = S. \frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)} - 1}$$

224      D E L L E   P R O G R E S S I O N I

$$= \frac{A}{2} \int \frac{(1-z^{2n})(z^{p+q} + z^{2n-p-q})}{(1-z^q)(1+z^{2n})} \cdot \frac{dz}{z} = (Q)$$

Di nuovo essendo (§. I.)  $\frac{1}{2 \operatorname{cof.} x:\omega} = \frac{K^n}{K^{2n} + 1}$ , e

$$S. \frac{1}{\operatorname{cof.} (p+qx)a} = \frac{1}{a} \int \frac{z^{n:2a} (1-z^{2n})(z^{-p-qn} + z^{p+q})}{(1-z^q)(1+z^{2n})} \cdot \frac{dz}{z} = (R)$$

per semplicità di calcolo (ivi pag. 370), si metta  $\frac{1}{\omega}$  in luogo di  $a$  nell'espressione (R) sì che diventi (R'),  $p+qx$  in luogo di  $x$  nell'espressione  $\frac{1}{2 \operatorname{cof.} x:\omega} = \frac{K^n}{K^{2n} + 1}$ , farà

$$S. \frac{A}{2 \operatorname{cof.} (p+qx):\omega} = \frac{A}{2} (R') = S. \frac{AK^{p+qn}}{K^{2(p+qn)} + 1}, \text{ ch'è la somma delle serie}$$

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)} + 1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)} + 1} + \text{ecc.} \dots \dots \frac{AK^{p+qn}}{K^{2(p+qn)} + 1}$$

§. X.

Inoltre fommeremo con pari generalità le serie aventi per termini generali le espressioni

$$\frac{K^{2(p+qn)} - 1}{K^{2(p+qn)} + 1}, \quad \frac{K^{2(p+qn)} + 1}{K^{2(p+qn)} - 1}$$

Imperciocchè essendo  $\frac{\operatorname{sen.} x:\omega}{\operatorname{cof.} x:\omega} = \operatorname{tang.} x:\omega = \frac{1}{\operatorname{cof.} x:\omega} : \frac{1}{\operatorname{sen.} x:\omega}$ ,

$$\text{farà } \frac{1}{2 \operatorname{cof.} (p+qx):\omega} : \frac{1}{2\omega \operatorname{sen.} (p+qx):\omega} \\ = \omega \operatorname{tang.} (p+qx):\omega = \frac{K^{p+qn}}{K^{2(p+qn)} + 1} : \frac{K^{p+qn}}{K^{2(p+qn)} - 1} = \frac{K^{2(p+qn)} - 1}{K^{2(p+qn)} + 1}$$

Ma ripigliando la somma della serie  $\operatorname{tang.} (p+qx)a$  deter-

minata



minata nelle Mem. sopraccitate alla pag. 368, e ponendo  $\frac{1}{\omega}$  in luogo di  $a$  farà

$$A\omega^2 \int \frac{z^{p+q} (1-z^{q\alpha}) (z^{-p-q\alpha} - z^{p+q})}{(1-z^q)(1-z^{p\alpha})} \cdot \frac{dz}{z}$$

la somma della serie

$$\frac{AK^{2(p+q)} - A}{K^{2(p+q)} + 1} + \frac{AK^{2(p+2q)} - A}{K^{2(p+2q)} + 1} + \text{ecc.} \dots \dots \frac{AK^{2(p+q\alpha)} - A}{K^{2(p+q\alpha)} + 1}$$

Similmente effendo

$$\frac{K^{p+q\alpha}}{K^{2(p+q\alpha)} - 1} : \frac{K^{p+q\alpha}}{K^{2(p+q\alpha)} + 1} = \frac{1}{2\omega \text{ fen. } (p+q\alpha) : \omega} : \frac{1}{2 \text{ cof. } (p+q\alpha) : \omega}$$

=  $\frac{1}{\omega \text{ tang. } (p+q\alpha) : \omega}$ , se nell'espressione della somma di

$\frac{1}{\text{tang. } (p+q\alpha) a}$  (ivi pag. 371) si metta  $\frac{1}{\omega}$  in luogo di  $a$ , farà

$$A \int \frac{(1-z^{q\alpha})(z^{p+q} - z^{p+q\alpha})}{(1-z^q)(1-z^{p\alpha})} \cdot \frac{dz}{z}$$

nel caso di  $z=1$  dopo l'integrazione la somma generale della serie

$$\frac{AK^{2(p+q)} + A}{K^{2(p+q)} - 1} + \frac{AK^{2(p+2q)} + A}{K^{2(p+2q)} - 1} + \text{ecc.} \dots \dots \frac{AK^{2(p+q\alpha)} + A}{K^{2(p+q\alpha)} - 1}$$

Di nuovo poichè  $\frac{K^{(p+q\alpha)}}{2(K^{2(p+q\alpha)} - 1)} + \frac{K^{(p+q\alpha)}}{2(K^{2(p+q\alpha)} + 1)}$

=  $\frac{K^{2(p+q\alpha)}}{K^{4(p+q\alpha)} - 1}$ , farà manifestamente  $\frac{A}{2} (\mathcal{Q}) + \frac{A}{4} (R')$  la

forma della serie

$$\frac{AK^{3(p+q)}}{K^{4(p+q)} - 1} + \frac{AK^{3(p+2q)}}{K^{4(p+2q)} - 1} + \text{ecc.} \dots \dots \frac{AK^{3(p+q\alpha)}}{K^{4(p+q\alpha)} - 1}$$

Nello stesso modo si troverà essere  $\frac{A}{2} (\mathcal{Q}) - \frac{A}{4} (R')$  la som-

ma generale della serie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{4(p+q)} - 1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{4(p+2q)} - 1} + \text{ecc.} \dots \dots \frac{AK^{p+q\alpha}}{K^{4(p+q\alpha)} - 1}$$

## §. XI.

Veduto di una natura di potenze reciproche affette, resta che si faccia per occasione parola di un altro genere di simili potenze. In quelle che abbiamo maneggiato finora, assunto che siasi un numero qualunque per  $K$ , come base de' logaritmi iperbolici, egli è radice costante delle potenze successive d' ogni termine nella serie proposta. All' opposto è d' un' altra natura la serie, ne' di cui termini è bensì costante l' esponente delle potenze, ma la radice varia in ogni termine rappresentando ella l' esponente successivo de' termini, come farebbe per esempio la famiglia delle serie espresse dal-

la formula  $\frac{A}{ax^m \pm b}$ . Non abbiamo, ch' io sappia, altri ten-

tativi su quest' indole di serie, fuorchè alcuni di *Leibnitz*, di *Jacopo Bernoulli*, e di *Leonardo Eulero*, e niente più che oltrepassi le seconde potenze. Il primo negli Atti di Lipsia in occasione di parlare della quadratura del cerchio fa menzione di alcune serie infinite reciproche de' quadrati de' numeri naturali scemati di un' unità, tenendo secreto il metodo misteriosamente. Il secondo trova i valori delle stesse serie, essendo scemati i medesimi quadrati in genere di un comune quadrato, e quei pure di serie reciproche aventi al denominatore numeri trigonali diminuiti d' un costante numero trigonale nel Trattato delle serie infinite posto in calce del Libro che ha per titolo *Ars conjectandi*. L' *Eulero* finalmente nel I. Vol. dell' *Analisi degl' Infiniti* §. §. 181. 182.

somma le serie aventi per termine generale  $\frac{1}{n^2x^2 - m^2}$ , ove  $x$  è l' esponente de' termini.

Come da principio avea preso a credere, che simili serie fossero astruse, così mi feci a tentare la somma di loro all' infinito per una via, che mi condusse a farle dipendere dalle serie conosciute a fattori sempre crescenti. Ma tutto ad un tratto riconobbi, che non le sole seconde potestà maneggiate da' tre nominati illustri uomini, ma generalmente tutta questa Classe di serie, qualunque sieno le potestà, e co-

munque affette, è reducibile a quelle, di cui ho trattato nel V. Capitolo della Mem. citata intorno alle serie, e non richiegono al più, che le note quadrature dell' iperbola, e del cerchio, qualor non sono algebricamente sommabili. Questo schiarimento mi sè vedere, che non sempre i più semplici e migliori pensieri sono i primi ad offerirsi, di che si può avere una prova anche in questo caso rivedendo attentamente ciò che ne hanno lasciato *Leibnitz*, *Bernoulli*, ed *Eulero* successivamente. Ma mi sia concesso di passar prima di fuga sul primo tentativo, perchè ottenendo altri risultamenti col metodo più semplice e naturale, i quali debbono in fondo coincidere co' primi, si potrà trarne qualche nuova verità non dispregevole.

Sia primamente da sommarli la serie infinita

$$(A) \dots \frac{1}{1+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{9+1} + \text{ecc.} \dots \frac{1}{x^2+1}$$

S' instituisca la continua divisione del termine generale, e si avrà

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ecc.}$$

Se dunque potessero averli le somme all' infinito  $\mathcal{S} \cdot \frac{1}{x^2}$ ,  $\mathcal{S} \cdot \frac{1}{x^4}$  ecc. e tutte insieme espresse per una sola quantità finita  $M$ , farebbe  $M = \mathcal{S} \cdot \frac{1}{x^2+1}$ .

Ricorriamo dunque alla Mem. nostra intorno alle serie citata qui innanzi, e alla pag. 304 troveremo essere nel caso di  $z=1$  dopo l' integrazione

$$\mathcal{S} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1} \int \frac{dz}{1-z} \left( l \cdot \frac{1}{z} \right)$$

$$\mathcal{S} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{1.2.3} \int \frac{dz}{1-z} \left( l \cdot \frac{1}{z} \right)^3$$

$$\mathcal{S} \cdot \frac{1}{x^6} = \frac{1}{1.2 \dots 5} \int \frac{dz}{1-z} \left( l \cdot \frac{1}{z} \right)^5$$

.....

$$S. \frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{1.2\dots(-1+2n)} \int \frac{dz}{1-z} \left( l. \frac{1}{z} \right)^{-1+2n}$$

Posto pertanto  $l. \frac{1}{z} = Z$  per semplicità di calcolo, farà

$$\int \frac{dz}{1-z} \left( \frac{Z}{1} - \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2\dots5} - \frac{Z^7}{1.2\dots7} + \text{ecc.} \right) = S. \frac{1}{x^2 + 1}$$

Ma  $Z - \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2\dots5} - \text{ecc.} \dots = \text{sen. } Z$  in un cerchio avente l'unità per raggio. Dunque

$$\int \frac{dz}{1-z} \text{sen.} \left( l. \frac{1}{z} \right) = S. \frac{1}{x^2 + 1}$$

ch'è la somma ricercata all'infinito della serie (A)

§. XII.

Ma il valore di questa serie trovato dal Sig. *Eulero* alla

pag. 143, posto  $-1$  in luogo di  $a$ , è  $\frac{\pi \sqrt{-1}}{2 \text{ tang. } \pi \sqrt{-1}} - \frac{1}{2}$ .

Dunque abbiamo questo nuovo Teorema, che nel caso di  $z=1$  dopo l'integrazione

$$\int \frac{dz}{1-z} \text{sen.} \left( l. \frac{1}{z} \right) = \frac{\pi \sqrt{-1}}{2 \text{ tang. } \pi \sqrt{-1}} - \frac{1}{2};$$

ma  $\frac{1}{2\omega \text{ fen. } m:\omega} = \frac{K^m}{K^{2m} - 1}$  (§. I.), posto  $\omega = \sqrt{-1}$ ,  $m$  quan-

tità reale,  $K$  la base de' logaritmi; e  $\frac{1}{2 \text{ cof. } m:\omega} = \frac{K^m}{K^{2m} + 1}$ ; e

inoltre, essendo  $\frac{\text{cof. } m:\omega}{\omega \text{ fen. } m:\omega} = \frac{1}{\omega \text{ tang. } m:\omega}$ , se facciam  $\frac{m}{\omega} = \pi\omega$ ,

farà  $m = -\pi$ , e  $\frac{\pi \sqrt{-1}}{2 \text{ tang. } \pi \sqrt{-1}} = \frac{m}{2 \sqrt{-1} \text{ tang. } m:\sqrt{-1}}$

$$= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\omega \operatorname{tang.} m:\omega} = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{K^{2m} + 1}{K^{2m} - 1} \right) = -\frac{\pi}{2} \left( \frac{K^{-2\tau} + 1}{K^{-2\tau} - 1} \right)$$

$= \frac{\pi}{2} \left( \frac{K^{2\tau} + 1}{K^{2\tau} - 1} \right)$  e però di nuovo nel caso di  $z = 1$  dopo l'integrazione farà

$$\int \frac{dz}{1-z} \operatorname{fen.} \left( l. \frac{1}{z} \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{K^{2\tau} + 1}{K^{2\tau} - 1} \right) - \frac{1}{2}$$

quantità esponenziali reali, il che somministra un altro Teorema degno di considerazione

§. XIII.

Con un simile metodo fommeremo pure la serie avente per termine generale  $\frac{1}{x^2 - 1}$ . Imperciocchè essendo

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ecc.}, \text{ e lasciando sussistere}$$

$Z = l. \frac{1}{z}$ , farà

$$\int \frac{dz}{1-z} \left( Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2....5} + \text{ecc.} \right) = \int \frac{1}{x^2 - 1}$$

Ma, presa  $K$  per base de' logaritmi iperbolici,

$$K^Z - 1 = Z + \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

$$1 - K^{-Z} = Z - \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} - \frac{Z^4}{1.2....4} + \text{ecc.}$$

e però sommando

$$\frac{K^Z - K^{-Z}}{2} = Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2....5} + \text{ecc.} \text{ cioè passando agli}$$

archi immaginari, farà la medesima serie

$$Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \text{ecc.} = \omega \operatorname{fen.} Z : \omega$$

e però nel caso di  $z = 1$  dopo l'integrazione

$$\omega \int \frac{dz}{1-z} \text{fen.} \left( l. \frac{1}{z} \right) \omega = \mathcal{S}. \frac{1}{x^2-1}$$

E poichè in questo caso il valore della serie secondo il Sig.

*Eulero* è  $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2 \text{ tang. } \pi}$ ; farà integrando da  $z=0$  fino a

$z=1$

$$\omega \int \frac{dz}{1-z} \text{fen.} \left( l. \frac{1}{z} \right) \omega = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2 \text{ tang. } \pi}$$

nuovo Teorema da non trascurarsi.

#### §. XIV.

Ma generalmente

$$\frac{1}{x^m \pm 1} = \frac{1}{x^m} \mp \frac{1}{x^{2m}} + \frac{1}{x^{3m}} \mp \frac{1}{x^{4m}} + \text{ecc.}$$

ed è pel nostro metodo (Mem. della *Soc. Italiana* pag. 304)

$$\frac{1}{1.2....(m-1)} \int \frac{dz}{1-z} Z^{m-1} = \mathcal{S}. \frac{1}{x^m}$$

$$\frac{1}{1.2....(2m-1)} \int \frac{dz}{1-z} Z^{2m-1} = \mathcal{S}. \frac{1}{x^{2m}} \text{ ecc. Dunque}$$

$$\int \frac{dz}{1-z} \left( \frac{Z^{m-1}}{1.2....(m-1)} \mp \frac{Z^{2m-1}}{1.2....(2m-1)} + \frac{Z^{3m-1}}{1.2....(3m-1)} \mp \text{ecc.} \right)$$

$= \mathcal{S}. \frac{1}{x^m \pm 1}$ . Con che abbiamo l'espressione generalissima di queste serie ridotta alle serie conosciute a fattori crescenti.

#### §. XV.

Passiamo ora al metodo diretto e semplicissimo di sommare sì fatte serie con tutta la possibile generalità, e prendiamo per gradi la serie di *Leibnitz*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \text{ecc. all' infinito}$$

Si trovi il termine di lei generale, il quale farà manifesta-

mente  $\frac{1}{2x+x^2}$ . Ma  $\frac{1}{2x+x^2} = \frac{1}{x(2+x)}$ . Dunque è ella una serie algebrica reciproca di secondo ordine, che ha per fattori  $x$ ,  $2+x$ . Posto ciò ricorriamo alle formule generali della nostra Memoria, e si tragga dall'espressione della Prop. XI. pag. 294 i due ultimi integrali, cioè

$$\frac{A}{nq} \int \overline{z^{p:q-m:n-1} dz} \int \overline{z^{m:n} dz} \left( \frac{1-z^n}{1-z} \right), \text{ e poichè}$$

$A=1$ ,  $m=0$ ,  $n=q=1$ ,  $p=2$ , quest' espressione diverrà

$$\int \overline{z dz} \int \overline{dz} \left( \frac{1-z^n}{1-z} \right) = \frac{z^2}{2} \int \overline{dz} \left( \frac{1-z^n}{1-z} \right) - \frac{1}{2} \int \overline{z^2 dz} \left( \frac{1-z^n}{1-z} \right)$$

e fatto  $z=1$  fuori del primo segno, avremo, riducendo, integrando, e facendo  $z=1$ , la formula  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2(x+1)}$

$-\frac{1}{2(x+2)}$ , che farà la somma generale della serie; e posto

$x=\infty$  resterà  $\frac{3}{4}$  per la somma all' infinito, come quel gran

Geometra ha trovato. Di poi pigliamo a maneggiare un termine generale di questa forma  $\frac{1}{ax^2+b}$  qualunque cosa siasi

$a$ , e  $b$ . Tozzo veggiamo, che  $\frac{1}{ax^2+b}$

$= \frac{1}{(-\sqrt{-b+x\sqrt{a}})(+\sqrt{-b+x\sqrt{a}})}$ . Dunque ripi-

gliando lo stesso integrale precedente, e ponendo  $x=\infty$ , onde cercar tozzo la somma all' infinito, diverrà  $\frac{1-z^n}{1-z}$

$= \frac{1}{1-z}$ , e però dividendolo in due, e riducendolo, prenderà esso questa forma

$$\frac{1}{nq \left( \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \right)} \int \frac{(z^{m:n} - z^{p:q}) dz}{1 \mp z}$$

valendo il segno superiore per la serie

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{4a+b} + \frac{1}{9a+b} + \text{ecc.}$$

e l' inferiore per la serie

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{4a+b} + \frac{1}{9a+b} - \text{ecc.}$$

Ora essendo nel caso nostro  $m = -\sqrt{-b}$ ,  $p = \sqrt{-b}$ ,  
 $n = q = \sqrt{a}$ , se si faccia  $\sqrt{-\frac{b}{a}} = c$  per semplicità, avremo

$$\frac{1}{2ac} \int \frac{(z^{-c} - z^c) dz}{1 \mp z} = \frac{1}{2ac} \int \frac{z^{-c} dz}{1 \mp z} - \frac{1}{2ac} \int \frac{z^c dz}{1 \mp z} \dots (A)$$

Ma  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \text{ecc.}$

$$\int \frac{z^{-c} dz}{1-z} = \frac{z^{-c+1}}{1-c} + \frac{z^{-c+2}}{2-c} + \frac{z^{-c+3}}{3-c} + \text{ecc.}$$

Dunque nel caso di  $z=1$  dopo l' integrazione

$$\frac{1}{2ac} \int \frac{z^{-c} dz}{1-z} = \left( \frac{1}{1-c} + \frac{1}{2-c} + \frac{1}{3-c} + \text{ecc.} \right) \frac{1}{2ac}$$

e però anche

$$\frac{1}{2ac} \int \frac{z^c dz}{1-z} = \left( \frac{1}{1+c} + \frac{1}{2+c} + \frac{1}{3+c} + \text{ecc.} \right) \frac{1}{2ac}; \text{ quindi}$$

$$\text{l' integrale (A)} = \frac{1}{2ac} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-c} + \frac{1}{2-c} + \frac{1}{3-c} + \text{ecc.} \\ - \frac{1}{1+c} - \frac{1}{2+c} - \frac{1}{3+c} - \text{ecc.} \end{array} \right\}$$

E poichè l' aggregato di queste due serie è lo stesso che

$$\frac{1}{2ac} \left( \frac{1}{c} - \frac{\pi}{\text{tang. } c\pi} \right) \text{ (Com. nuovi dell' Accad. di Pietrobr. Vol.}$$



XIX. pag. 30 ) posto  $n = 1$  nell' espressione Euleriana farà

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}} \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} - \frac{\pi}{\text{tang. } \pi\sqrt{-b:a}} \right) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{4a+b}$$

$$+ \frac{1}{9a+b} + \text{ecc.}$$

Se dunque sia  $b$  quantità positiva, essendo  $a$  negativa, farà

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\pi}{\text{tang. } \pi\sqrt{b:a}} \right) = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-4a} + \frac{1}{b-9a} + \text{ecc.}$$

il qual valore farà pure quello della serie

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{4a-b} + \frac{1}{9a-b} + \text{ecc.}, \text{ cioè essendo } b \text{ negativa,}$$

e  $a$  positiva. E se fosse  $b$  positiva, e  $a$  negativa, sì che il valore della serie fosse espresso per funzione d' arco immaginario, potremo sempre avere la medesima serie espressa per esponenziali reali come segue

$$- \frac{1}{2b} - \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{K^{-\pi b} + K^{\pi b}}{K^{-\pi b} - K^{\pi b}} \text{ posto } b = \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ e } K \text{ il numero}$$

che ha per logaritmo iperbolico l' unità.

Che se fosse  $c$  quantità razionale intera o rotta, si potrà sempre avere il valore dell' espressione (A) nel caso di  $z = 1$  particolarmente o algebrico, o trascendente con facilità. Sia

$$\text{per esempio } a = 4, b = -9, \text{ farà } c = \sqrt{-\frac{b}{a}} = \frac{3}{2}, \text{ e però}$$

$$\text{la formula diverrà } \frac{1}{12} \int \frac{(1-z^3)dz}{1-z} = \frac{11}{6.12} \text{ nel caso di } z = 1$$

$$\text{dopo l' integrazione, e } \frac{1}{12} \int \frac{(1-z^3)dz}{1+z} = \frac{1}{6} l. 2 - \frac{5}{6.12}; \text{ sì}$$

che farà

$$\frac{11}{6.12} = \frac{1}{-5} + \frac{1}{4+9} + \frac{1}{4+9-9} + \frac{1}{4+16-9} + \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{6} l. 2 - \frac{5}{6.12} = \frac{1}{-5} - \frac{1}{4+9} + \frac{1}{4+9-9} - \frac{1}{4+16-9} + \text{ecc.}$$

Similmente fommeremo la serie

$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{4a+b} + \frac{1}{9a+b} - \frac{1}{16a+b} + \text{ecc.}$  per cui il nostro metodo ci dà la formula (B)  $\frac{1}{2ac} \int \frac{(z^{-c} - z^c) dz}{1+z}$  da integrarsi da  $z=0$  fino a  $z=1$ . Operando come qui innanzi troveremo

$$(B) = \frac{1}{2ac} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-c} - \frac{1}{2-c} + \frac{1}{3-c} - \text{ecc.} \\ - \frac{1}{1+c} + \frac{1}{2+c} - \frac{1}{3+c} + \text{ecc.} \end{array} \right\}$$

$= \left( \frac{\pi}{\text{fen. } c\pi} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{2ac}$  (Com. nuovi di St. Pietrob. ivi) posto  $n=1$ , fu cui potremo instituire le medesime operazioni del caso precedente.

Ma senza ricorrere alla convenienza del nostro integrale sviluppato con le serie di *Eulero* citate qui sopra, possiamo direttamente dimostrare il valore di lui. Imperciocchè è certo pe' principj del Calcolo Integrale (Com. nuovi di St. Pietrob. Vol. XIX. pag. 32.) che

$$(M) \dots \int \frac{(z^{c-1} + z^{-c}) dz}{1+z} = \frac{\pi}{\text{fen. } c\pi}$$

$$(N) \dots \int \frac{(z^{c-1} - z^{-c}) dz}{1-z} = \frac{\pi}{\text{tang. } c\pi}$$

Si sottragga pertanto dall' integrale (M) l' integrale nostro (A) per le serie alternative, e si avrà

$$\int \frac{(z^{c-1} + z^{-c}) dz}{1+z} - \int \frac{(z^{-c} - z^c) dz}{1+z} = \int \frac{(z^{c-1} + z^c) dz}{1+z}$$

$$= \int z^{c-1} dz = \frac{z^c}{c} = \frac{1}{c} \text{ posto } z=1. \text{ Dunque } \frac{\pi}{\text{fen. } c\pi}$$

$$- \frac{1}{c} = \int \frac{(z^{-c} - z^c) dz}{1+z}. \text{ Steffamente fommando l' integrale (N)}$$

col nostro per le serie positive, avremo

$$\int \frac{(z^{c-1} - z^{-c})dz}{1-z} + \int \frac{(z^{-c} - z^c)dz}{1-z} = \int \frac{(z^{c-1} - z^c)dz}{1-z}$$

$$= \int z^{c-1} dz = \frac{z^c}{c} = \frac{1}{c} \text{ posto } z=1; \text{ e per\`o } \frac{1}{c} = \frac{\pi}{\text{tang. } c\pi}$$

$$= \int \frac{(z^{-c} - z^c)dz}{1-z}, \text{ come abbiamo per l' uno e per l' altro}$$

stabilito precedentemente.

§. XVI.

E passando alle terze potenze affette, sia la serie (C)

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{8a+b} + \frac{1}{27a+b} - \frac{1}{64a+b} + \text{ecc.} \dots \frac{1}{ax^3+b} \dots (C)$$

Se facciamo  $\frac{b}{a} = f^3$ , il termine generale diventa  $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^3 + f^3}$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(x+f)(x + \frac{1}{2}(f+f\sqrt{-3}))(x + \frac{1}{2}(f-f\sqrt{-3}))}$$

Dunque scorgesi immediatamente, che la somma della serie (C) si riduce a integrare da  $z=0$  fino a  $z=1$  la formula del Probl. XI. pag. 293 del I. Vol. della *Società Italiana*, allorchè sieno i tre fattori al denominatore della forma qui proposta. Il che non involgendo, che un puro affare di calcolo secondo i valori di  $a$ , e  $b$ , non mi vi trattengo di più.

Quindi possiamo agevolmente conchiudere, che qualunque sia il grado  $n$  della potenza affetta, come nella serie generale

$$\frac{1}{a+b} \pm \frac{1}{a2^n+b} + \frac{1}{a3^n+b} \pm \text{ecc.} \dots \frac{1}{ax^n+b}$$

l' arcano di questa serie sta unicamente nel risolvere in fattori semplici il denominatore, che può sempre farsi, e ricorrere al metodo nostro generale di sommare le serie algebrache reciproche nel luogo citato qui innanzi.

In questa guisa, ottenuto il valore della serie, avremo quello pure dell' espressione singolare

$$\int \frac{dz}{z} \left( \frac{(-l.z)^{n-1}}{1.2...(n-1)} \mp \frac{(-l.z)^{2n-1}}{1.2...(2n-1)} + \frac{(-l.z)^{3n-1}}{1.2...(3n-1)} \mp \text{ecc.} \right)$$

da  $z=0$  fino a  $z=1$  trovata al §. XIII.

§. XVII.

E dando all' argomento tutta l'estensione, di cui è suscettibile, si vede, che le serie frazionali aventi al denominatore numeri figurati accresciuti o scemati d' altro numero figurato recate dall' illustre *Bernoulli*, non sono che casi particolarissimi del metodo, che abbiamo qui indicato. Imperciocchè sia per esempio

$$\frac{1}{8+10} \pm \frac{1}{69+66} + \frac{1}{224+196} \pm \frac{1}{515+430} + \text{ecc.}$$

In questa serie non sono altrimenti i numeri del denominatore potenze affette, ma sì bene numeri di una serie algebrica del terz' ordine affetta da un' altra dello stesso ordine. Di fatti i numeri 8, 69, 224, 515 ecc. appartengono alla serie, che ha per termine generale  $7x^3 - 3x + 5x^2 - 1$ , e il termine generale de' numeri 10, 66, 196 ecc. è  $5x^3 + 7x^2 - 2$ . Il metodo pertanto si riduce a sommare i due termini, con che si avrà il termine

(A)....  $12x^3 + 12x^2 - 3x - 3$ ; e risoluto questo ne' fattori  $2x - 1$ ,  $2x + 1$ ,  $3x + 3$ , non si tratta che di sommare

la serie  $\frac{1}{(-1+3x)(1+2x)(3+3x)}$ , che potrà sempre far-

si col metodo nostro o algebricamente, o per funzioni d' archi circolari, o per logaritmi. Di che avendo dato qui sopra esempi bastevoli non occorre parlarne più diffusamente.

---

ESPOSIZIONE ANATOMICA  
DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO  
DEGLI UCCELLI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqui, e Chirurgo Maggiore del Real Prefidio di Torino.

CONTINUAZIONE

*Del primo Trattato \* sulle ossa del Cranio degli Uccelli in generale, e particolarmente delle Oche, e delle Anitre.*

PARTE SECONDA.

*Pareti interne della cavità del Cranio.*

CAPITOLO PRIMO.

*Divisione generale.*

**I**L celebratissimo *Alberto Allero* nella sua per ogni titolo grande opera sulla fabbrica, e l'uso delle parti del corpo umano ha giustamente notato, che la cavità del cranio degli uccelli è capace di modo, che il cerebro si trova in proporzione non solamente uguale a quella, che tiene per entro al cranio dell' uomo, nei grandi uccelli, ma eziandio maggiore nei più piccioli. Avea pure indicato questa cavità essere insignemente alta, e rotonda.

Non contenti noi di queste notizie, insufficienti per ajutar-

G g iij

---

\* Mem. della Soc. Italiana Tomo I. pag. 747

ci a dar un' esatta, e chiara spofizione dell'encefalo, divideremo la cavità del cranio degli uccelli

1. In *volta*, o parte superiore concava; in *pavimento*, o parte inferiore difuguale; in *pareti* anteriore, posteriore, e laterali, tutte fuddivifibili in destra, e finiftra.

2. Noteremo inoltre, che tale cavità, confiderata come dicefi all' ingroffo, è molto angufta al davanti, fi allarga per ogni dimenfione verfo la metà alzandofene la *volta*, e depri-mendofene il *pavimento* mentre che fe ne fcoftano le *pareti*, che dove il pavimento fi rialza per terminarli al *gran foro occipitale*, quefte *pareti* fe ne accoftano per reftignerla; che ivi però il diametro verticale fe ne mantiene affai lungo perchè la *volta* fembra che fe ne elevi.

3. Vi fi diftinguono molte *foffe* circonferitte da varie *emi-nenze*, e vi fi offervano molti *fori*, delle quali cofe tutte verremo qui recando l' opportuna defcrizione.

## C A P I T O L O II.

### *Foffe della cavità del cranio degli uccelli.*

Vediamo diciotto foffe in quefta cavità, dodeci principali e fei minori. Le principali fono

Due *Olfattorie*,  
 Due *Maggiori*,  
 Due *Superiori di mezzo*,  
 La *Loggia del cervelletto*,  
 Due *Foffe laterali di mezzo*,  
 Due *Foffe dei Talami*, e  
 Del *Catino*

Le Foffe minori fono

L' *Ottica*,                      La *Pituitaria*,  
 Due *Sfondate*,                Due *ovalì*.

## ARTICOLO I.

*Fosse principali .*

1. Incominceremo a descrivere le *fosse olfattorie* così dette perchè contengono , e danno uscita dal cranio ai *nervi olfattorj* . Situate nella estremità anteriore quasi acuta della cavità del cranio degli uccelli , queste fosse sono strette , coniche , aperte anteriormente come un imbuto a due cannelle ; appoggiate sui lati superiori del pariete osseo delle orbite , leggermente divise in alto , e nella parte loro posteriore più ampla , mediante un picciolo risalto osseo perpendicolare , cui è aderente la Dura-madre proprio dove se ne biforca in avanti il *Seno longitudinale* . Questo risalto conserva puranco negli uccelli il nome di *spina frontale* interna .

2. Non divide le due fosse olfattorie per tutta l'estensione loro , poichè la parte anteriore della *volta* comune , per uno spazio maggiore di tre linee , non ha nelle oche , e nelle anitre verun risalto .

3. Oltre al passaggio , che danno ai *N. olfattorj* contengono le estremità anteriori pur coniche ( alla foggia della parte più acuta de' lobi dell' aglio ) degli emisferi del cervello , e lasciano aperto il varco al sangue , che scorre per la biforcazione accennata del *Seno longitudinale della D. M.* mediante due brevi canaletti , cui ( ad imitazione del Santorini \* ) do il nome di *Emissarj* perchè si scarica per essi \*\* del sangue onde i seni suoi sono ripieni , e di *emissarj nasali* per il sito dove metton foce .

4. Le fosse olfattorie finiscono verso il naso in due canali distinti , separati mediante un tramezzo perpendicolare , che unisce la *volta* al *pavimento* : indietro , e in basso poi terminano al margine anteriore della *Fossa ottica* .

5. Le *Fosse maggiori* , che meritano tal nome per la loro

\* Jo. Dom. Santorini Observatorium Anatomicarum cap. III.

\*\* Vedremo a suo luogo la *D. M.* degli uccelli , e più palesemente quel-

la delle oche avere cinque para di *Emissarj* , cioè gli *Emissarj Nasali* , i *Pituitari* , i *Laterali esterni* , i *Laterali posteriori* , e gli *occipitali* .

ampiezza , e capacità , sono scolpite nella faccia interna della volta , nella anteriore delle pareti , e del pavimento , anteriormente , e lateralmente alle due *fosse superiori di mezzo* , dalle quali le separa un rifalto osseo , curvo , ed obliquo .

6. Le *Fosse superiori di mezzo* si vedono nel centro della volta del cranio , separate soltanto la destra dalla sinistra mediante la *spina longitudinale* , che stendesi per il tratto di 14 linee dal centro della volta delle fosse olfattorie ( 1 ) al margine superiore dell' *Arco* , ond'è circonscritta al davanti la *Loggia del cervelletto* .

7. La spina longitudinale , che pur ora mentovammo , è solcata per dar luogo al *seno longitudinale* della *D. M.* ; e questo *solco* , di mediocre ampiezza in avanti , si restringe alquanto nel centro della porzione frontale \* per allargarsi di nuovo a misura , che si accosta all' *Arco* , ( 6 ) dove ha circa una linea d' ampiezza ; e qui sbocca nel *seno Long.* un grosso tronco venoso , che passa per un *foro* già stato descritto \*\* , e che ha le sue radici nelle sostanze molli , che vedono il cranio .

8. Immediatamente dietro a quel foro il solco si biforca , e le due porzioni risultanti da tale biforcazione si circonferiscono in basso simmetricamente , per quel che spetta al corso ; ma la porzion destra per l' ordinario si trova più larga . Ricevono i *Seni laterali della D. M.* , continuazioni , o sia biforcamenti del *seno longitudinale* ( 1 ) .

9. Nè tutta la parte anteriore della spina longitudinale interna è solcata ( 1 , 2 ) , perciocchè la porzion della medesima , che pur esiste nella volta della porzion posteriore delle fosse olfattorie ( 1 , 2 ) , non è nemmeno accompagnata dal seno longitudinale ; che anzi prima che la spina ivi si cancelli , la colonna del sangue la quale qui si trova nel seno , dividendosi questo , prende una direzione obliqua verso le produzioni della *D. M.* onde i *N. olfattorj* sono inguainati come in due cannelle ( 1 ) , e viene con esse divergendo per i *fori olfattorj* guidata fuori del cranio nelle orbite .

10. La

\* Parte I. Cap. II. §. 4.

\*\* Parte I. cap. II. §§. 2 , 3 .



10. La settima fossa nominata *Loggia del cervelletto* perchè i lati dell' arco (6), e quelli del *gran foro occipitale* ne formano i pilastri, e ne sostengono molto elegantemente la profonda volta, è situata nella sommità posteriore della cavità del cranio, separata dalle fosse superiori di mezzo (6) mediante l' arco suddetto, munito d' un bell' orlo angolare quasi tagliente, simile ad una mezza luna con le corna rivolte al basso.

11. Lo sfondo della Loggia è considerabile in tutti gli uccelli, e meglio che in nessun altro nelle oche vi si veggono scolpiti due *solchi* irregolarmente serpeggianti, destinati a dar ricetto al sangue, che riempie due *seni Subalterni* \* comunicanti con il principio dei *seni Laterali* (8) della *Dura-madre*.

12. Tutta la Loggia del cervelletto delle oche è capace della punta del mignolo, essendo pur tale ordinariamente la grossezza di questa importante porzione del cervello nelle medesime.

13. La ottava, e la nona si dicono *fosse Laterali di mezzo* per il luogo, che occupano in questi cranj, essendo scolpite ai fianchi del pavimento assai più in basso, che non sono le olfattorie, dalle quali vengono separate mediante un *risalto* obbliquo traversale, che si curva allo insù contro le pareti del cranio. La loro profondità è maggiore al davanti, e sulla faccia interna, corrispondente delle apofisi orbitarie posteriori\*\*, sono volte più allo in fuori e contengono il lembo esterno della faccia inferiore degli emisferi del cervello.

14. Nomino *fosse dei Talami* quelle due, che occupano i lati del pavimento del cranio, divise dalle laterali di mezzo (13) per una *cresta ossosa semilunare* assai tagliente quasi orizzontale: dal centro del pavimento del cranio queste due creste si portano in dietro verso il margine anteriore delle piccole *fosse auditorie*.

15. La profondità delle fosse de' talami viene accresciuta

Hh

\* Nel Trattato delle Meningi dove si favella della D. M. vedremo questi *Seni Subalterni* sboccare in due ricettacoli venosi posti ai fianchi dell' ar-

ticolazione dell' apofisi occipitale con la prima vertebra.

\*\* Loc. citato Artic. II. §. 6.

da due pieghe falcate della D. M. , le quali attaccandosi alla menzionata cresta , ne fregiano tutto il tagliante seguendo la concavità . Contengono gran parte dei *Talami de' N. Ottici* .

16. L' ultima fossa delle maggiori situata nella parte posteriore del pavimento , avendo nelle oche , e nelle anitre la figura d' un *catino* quasi ovale , ne riceve anche il nome . E' assai più estesa in dietro che le precedenti , e contiene la *midolla allungata* , la quale sul margine posterior di questa fossa dolcemente si eleva per giugnere al *gran foro occipitale* , dove questo margine ha nelle oche una breve *cresta* molto elevata . Negli uccelli di rapina e fra gli altri nel Nibbio , nel Falchetto , nello Sparviere , e nella Crivella tal *cresta* si stende per tutta la lunghezza del catino dividendone la parte destra dalla sinistra .

## A R T I C O L O II.

### *Delle Fosse Minori.*

1. La prima a scoprirsi nel cranio degli uccelli è l'*Ottica* situata immediatamente dietro l' angolo , che s' incontra sul margine posteriore del pavimento delle fosse olfattorie \* verso il centro ; angolo che in molte specie d' uccelli ivi fa un notabilissimo risalto traversale , tanto per lo suo inoltramento alio indietro , quanto per la profondità , e l' ampiezza dello sfondo , che viene dall' accennato risalto limitato in avanti , e in parte nascosto \*\* : posteriormente confina con il margine anteriore della fossa *Pituitaria* .

2. La fossa ottica è unica nella cavità del cranio , ma tosto degenera in due ampi fori perchè incontra il lembo superior posteriore del tramezzo delle orbite \*\*\* , il quale la divide perpendicolarmente in due mezze lune uguali una destra , e l' altra sinistra ; ed avendo lo stesso tramezzo la porzione di quel margine , che divide la fossa ottica , lunata , cioè dà

\* Artic. preced. §. 4.

\*\* Quella cola è più ch' altrove apparente nei Papagalli.

\*\*\* Parte I. cap. II. art. II. §. 9.

alla fossa medesima profondità maggiore, e maggiore ampiezza ai due fori obliqui detti *fori ottici*, perchè danno passaggio al grosso tronco dei N. ottici.

3. Alquanto più indietro, ed anche nel mezzo del pavimento vediamo la *fossa Pituitaria*, l'entrata della quale è quasi romboidea. E' separata dall'ottica mediante un risalto osseo trasversale molto sottile, e fragile.

4. E' pure doppia verso le orbite, donde permette, che s'introducano nel cranio due notabili tronchi arteriosi \* per due fori assai larghi, che sboccano nel di lei tondo.

5. E' molto estesa in basso; molto pure obliquamente indietro sotto il pavimento sul margine del tramezzo delle orbite, le lamine del quale sembra che ivi si discostino per dar ricetto alla porzion principale più bassa e nascosta della *glandula pituitaria*.

6. Sui fianchi di questa fossa troviamo pure le bocche di quelli due canaletti nei quali s'infinuano, e trascorrono i *nerve motori comuni degli occhi*: la loro apertura esteriore vedesi nelle orbite una linea circa più addietro, e verso le tempie, della uscita dei N. ottici.

7. Nei lati della fossa Pituitaria mettono foce i due *condotti delle Carotidi* cioè quei due canaletti ossei, per la bocca inferiore dei quali, aperta ai fianchi della tuberosità basilare \*\*, si cacciano, e portandosi verso la base del cervello i due grossi tronchi di tali arterie passano dietro alla glandula pituitaria per giugnere a diramarsi nella suddetta viscera.

8. Questi due condotti, più larghi alla base del cranio fuori del medesimo, si restringono a misura che circonscendendosi ne percorrono obliquamente la spugnosa flessa del pavimento, sicchè prendono la figura di due corna convergenti in alto e allo innanzi, cioè con le punte ridotte in una sola nella fossa pituitaria, mentre che le curvità più grandi ne sono in fuori, e le basi, come abbiamo detto, indietro e in basso.

9. La terza e la quarta delle fosse minori sono simmetriche  
Hh ij

\* Questi sono differenti dal tronco principale delle carotidi, che accenneremo tra breve.

\*\* Loc. citat. §. 12. artic. IV. §. 4.

che, ed io le nomino *sfondate* perchè in vece di fondo si aprono alla base del cranio con un' ampia bocca onde escono i grossi tronchi de' *N. mascellari superiori ed inferiori*.

10. Le fosse sfondate occupano i lati del pavimento al di dietro della pituitaria (5) tra le fosse dei talami \* (3, 4 ecc.) il catino \*\*, e le *fosse auditive*, che quanto prima descriveremo. Danno ricetto ai tronchi de' *N. suddetti*, i quali affatto le riempiono mediante il grosso *ganglio*, che questi nervi fanno qui dopo essersene allontanato il *N. oftalmico*. Danno pure uscita ad una radice considerabile delle *vene jugulari*.

11. Non è raro trovare il margine posteriore delle fosse sfondate assai profondamente incavato per dare ricetto al ganglio mentovato, incavature, che si potrebbero considerare come due fosse subalterne e ottenere il nome di *fossette dei Gangli*.

12. Negli encefali freschi, ancora tappezzati della *D. M.*, le fosse sfondate sono in gran parte coperte d'una piega poco meno che perpendicolare fatta dalla stessa meninge, e così esattamente riempite da quei nervi, e dal ganglio, che riesce difficile conoscerne a dovere l'estensione e la capacità salvo nelle ossa secche, e ben ripulite sì al di fuori, che al di dentro.

13. Le *fosse ovali* sono dette così dalla loro figura, e si trovano alquanto più addietro delle sfondate, e più alto sulle pareti laterali della parte posteriore della cavità del cranio: hanno molta profondità; l'orlo ne è molto rilevato, e convesso, e n'è quasi verticale il diametro maggiore.

14. Si distinguono agevolmente da tutte le altre per la figura, e per la solidità del risalto degli orli, fatto da uno dei *canali Semicircolari* destinati alla perfezione dell'udito, in tutti gli uccelli (e particolarmente nei più piccioli, e nei notturni) elegantissimi.

15. Le fa distinguere altresì la profondità loro, occupata da i nervi *acustici* avvolti in una grossa *appendice* dei lati del cervelletto, molle, e cinericcia all'esterno, che parte dai

\* Artic. anteced. §. 14. 15.

\*\* Ivi §. 16.

lati della base del cervelletto medesimo ; la quale appendice è contenuta in una borsa della D. M. tappezzante con esattezza amendue gli antri, tinta di colore piombino per il molto sangue venoso , che scorre ed empie varj seni osservabili tra le lamine di questa meninge.

16. Sboccano questi seni nelle fosse sfondate mediante un largo solco superficialmente scolpito nello spazio osseo , che queste dagli antri divide , e ch' è sede d' un paro di *emissarj* detti *Laterali esterni* , la direzione dei quali è obliqua al davanti , e in basso .

### CAPITOLO III.

#### *Dei Fori osservabili nella cavità del cranio degli Uccelli.*

Dovendosi ora numerare i fori , che si veggono per entro al cranio degli uccelli , prenderemo sempre a considerare quello delle anitre , e delle oche per esser cosa più facile a' principianti il tener dietro con l' occhio su queste ossa alla nostra descrizione . Terremo pure qui l' ordine , che viene prescritto dalla situazione de' fori stessi cominciando dagli anteriori verso il ceppo del becco , e terminando con quei dell' occipite , procurando di dare ad ognuno d' essi tal nome , che indichi se vaso , o nervo vi passi , e talvolta quale ne sia la capacità , la figura , e la direzione .

Sono avvezzo ad osservarvene i seguenti

- Due *Olfattorj* .
- Due *Arteriali anteriori* .
- Due *Ottici* .
- Due *Motori comuni* .
- Due *Patetici* .
- Due *Venosi della fossa pituitaria* .
- Due *Carotidei* .
- Due *Oftalmici* .
- Due *Motori esterni* .
- Due *Mascellari superiori* .
- Due *Mascellari inferiori* .
- Due *Auditorj* .

## E N C E F A L O

Due *Piccioli Simpatici* .  
 Due *Vaghi*, o *Laceri* .  
 Due *Jugulari* .  
 Due *Palatini* .  
 Due *Ipoglossi*, ed  
 Il *gran foro occipitale* .

## A R T I C O L O I.

*Dei Fori Olfattorj.*

I primi a scoprirsi nella parte anteriore del cranio d' ogni uccello sono i due *fori Olfattorj* separati mediante la parte superiore del tramezzo delle orbite, \* sulle faccie laterali del quale si prolungano in una doccia di linee tre, che finisce nell' ampia fossa nasale occupata in amendue i lati dalla conca superiore delle narici.

Per questo paro di fori unitamente ai *N. Olfattorj* esce dal cranio il primo paro degli emissarj della dura madre. \*\*

## A R T I C O L O II.

*Dei Fori arteriali.*

§. 1. Il secondo paro dà passaggio ad una coppia di ramicelli arteriosi, che va indietro obliquamente divergendo per diramarsi nel centro della faccia inferiore degli emisferi del cervello. Vedesi quasi mezzo pollice discosto dal foro olfattorio.

2. Le aperture interne dei *F. arteriali* son nascose in una profonda, e stretta scanalatura traversale, alquanto curva nel mezzo della sua lunghezza, che ha le estremità molto divergenti: è scolpita sopra una specie di cresta, e si continua in un solco pure obbliquo.

3. Le aperture esteriori sono nelle orbite quattro linee

\* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 9.

\*\* Cap. II. Art. I. §. 3. della Parte seconda.

posteriormente all'orlo diretano dei *F.* olfattorj, e due linee anteriormente agli ottici, nel margine superiore del tramezzo delle orbite. \*

### ARTICOLO III.

#### *Dei Fori ottici.*

Questo paro è separato da quello dei precedenti fori, che vi sta sopra, mediante una forte, e spessa cresta ossosa traversale. Già si conosce la fossa dalla quale i fori ottici procedono, \*\* e si sa che il fondo anteriore ne è diviso dalla parte corrispondente del tramezzo delle orbite, le faccie destra e sinistra del quale tramezzo ne sostengono le oblique aperture esteriori, per le quali sboccan nelle orbite i *N.* ottici.

### ARTICOLO IV.

#### *Fori dei N. motori comuni degli occhi.*

1. Una linea  $\perp$  1 : 2 circa posteriormente, e sui lati della fossa ottica \*\*\* si vedono i bislungli fori, che danno uscita ai *N. motori comuni degli occhi*, dai quali prendono il nome. La distanza del destro dal sinistro è lin. 3. circa, e sono ai fianchi della fossa pituitaria, \*\*\*\* dai margini della quale sono separati per una tenue *laminetta ossosa* alquanto più in alto sulle pareti del cranio, che fanno le spalle della fossa medesima, corrispondentemente all' *istmo* largo più d' una linea che divide la pituitaria dalla ottica.

2. Sono pure separati da tale istmo per una larga e sottile ossosa *Lacra*; e la distanza loro dai fori oftalmici posti più indietro è di tre quarti di linea, tale essendo la larghezza dell' *osso Lisca* che ne divide il margine diretano dall' orlo anteriore dei *fori patetici* loro paralleli, ma più prossimi alla fossa pituitaria.

\* Par. I. Cap. II. art. II. §. 9.

\*\* Vedi Cap. preced. art. II. §. 2.

\*\*\* Ivi.

\*\*\*\* Par. II. Cap. II. Art. II. §. 3.

3. Meritano d'essere notati in questo sito i *Solchi* lunghi più di una linea per li quali scorrono i *N. motori* comuni prima di arrivare all'apertura interna dei *canali* ai tronchi loro destinati, che guidano verso le orbite, dove penetrano per un *foro bislungo* quasi nascosto dalla radice di quelle brevi *spine offese*, che stanno sul fianco esterno dei *fori carotidei* a livello della radice delle apofisi orbitarie posteriori. \*

## A R T I C O L O V.

### *De' Fori Paretici.*

Si trovano proprio nella fossa pituitaria sotto quella ossosa laminetta, che fa l' interno margine degli ora descritti solchi, e canali, alquanto più sulla parte anteriore dei parieti della suddetta fossa, e sul fianco esterno dei *fori carotidei*. Si aprono il varco obliquamente nelle orbite fra la apertura della coppia precedente, e quella dei *fori carotidei* medesimi.

## A R T I C O L O VI.

### *Fori venosi della fossa Pituitaria.*

Alla parte anteriore del fondo della fossa pituitaria si veggono due aperture ovali poco meno larghe d' una linea, per le quali escono del cranio due *emissarij* della *D. M.* simili a due grosse vene: diedi loro perciò il nome di fori venosi della fossa pituitaria.

## A R T I C O L O VII.

### *Fori Carotidei.*

1. Alla parte posteriore della medesima fossa, dove si va restringendo, ed abbassandosi nella sostanza cavernosa della tuberosità

---

\* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 6.



berosità basilare \* vi è la foce dei due ampi canali ossofi circonfleffi, la bocca dei quali è già stata da noi mentovata qui sopra, \*\* ne' fianchi della *colonna ossosa* tra le faccette articolari, e la porzione più bassa della radice delle apofisi mastoidee. Sono i fori carotidei interni, irregolarmente ovali, e larghi poco meno d'una linea. Per questi canali o condotti nei cranj delle oche, delle anitre, delle galline, e della maggior parte degli uccelli scorrono i tronchi delle arterie carotidi, le quali uniformemente a quello, che si osserva nell'encefalo umano, vengono a sboccare nei lati della fossa pituitaria per diramarsi nella sostanza del cervello.

2. Danno pur anco passaggio al paro dei nervi *Intercoftali*, o *grandi Simpativi*.

## ARTICOLO VIII.

### *Fori Oftalmici*

1. Situati sul margine inferiore delle fosse dei *talami*\*\*\*, questi fori vengono così detti perchè vi passa il tronco di quei nervi, che vedremo (assai più manifestamente ancora, che negli uomini) avere negli uccelli origine distinta da quella dei *N. mascellari superiore*, ed inferiore.

2. Nei cranj mondi si scorge il largo e profondo *folco*, sul quale scorre il *N. oftalmico* mentre che, scioltofi dal *ganglio*\*\*\*\* comune ai due mascellari ora accennati, si porta obliquamente addentro per imboccare il proprio foro, che è ritondo, assai largo, e distante quello del lato destro più di lin. 3. dal sinistro, di maniera che forma l'angolo esterno d'un triangolo immaginabile tra questo, la fossa pituitaria, e il foro del *N. motor esterno degli occhi*.

3. L'uscita del *N. oftalmico* nelle orbite si trova fra

*Tomo II.*

*Ii*

\* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 12.

\*\* E alla Par. I. Cap. II. Art. IV., e §. 4.

\*\*\* Par. II. Cap. II. Art. I. §. §. 14., e 15.

\*\*\*\* Cap. antecedente, Art. II. §. §. 10., 11., 12.

quella del patetico, quella del motor comune, e la fascia interna della spina. \*

4. Vi è pure una tenue lamina ossosa, che serve di volta al canale del N. oftalmico, e di fondo al solco del *motor comune degli occhi*.

## A R T I C O L O IX.

### *Fori Motori esterni.*

Questi fanno la nona coppia, e sono lin. 3 + 1 : 4 posteriormente alla fossa pituitaria, lontani due linee il destro dal sinistro, e lin. 1 + 1 : 2 dal margine delle fosse sfondate: \*\* vi passano i *N. motori esterni degli occhi* dopo aver fatto un lungo tragitto a traverso della spessore della base del cranio, al di sotto della fossa pituitaria, in un canale che sbocca nella parte posteriore delle orbite; e qui amendue i nervi si diramano nei muscoli destinati al globo degli occhi, e nelle tuniche dei globi stessi dal canto delle orecchie.

## A R T I C O L O X.

### *Fori mascellari superiori, ed inferiori.*

1. La decima, e l'undecima coppia de' fori sono nelle fosse sfondate; e siccome servono amendue a dar passaggio ad un ramo distinto del N. mascellar superiore, così le comprendiamo in un solo articolo, sebbene il primo più angusto, occupato tutto dal ramo del suddetto, ne ritenga il nome, ed al secondo, perchè dà passaggio al tronco del *N. mascellar inferiore* unitamente ad un'altra branca del mascellar superiore, io dia il nome di mascellar inferiore.

2. Il *foro mascellar superiore* adunque si trova alquanto più innanzi e verso l'asse del pavimento della cavità del cranio. Dà passaggio ad un grosso ramo del N. mascellar superiore,

\* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 16.

\*\* Par. II. Cap. II. Art. II. §. 9., e 10.

delle diramazioni del quale favelleremo a lungo quando descriveremo la parte superiore del becco.

3. Il *mascellar inferiore* poi è assai più grande avendo due linee di diametro. Si trova alquanto più addietro del precedente. Si apre nella parte anterior esterna delle fosse sfondate per dar passaggio al tronco principale del N. mascellar superiore nel medesimo tempo, che ne esce pure il tronco del mascellar inferiore, giacch'è appunto in questo sito il ganglio \*, onde negli uccelli sono insieme confusi questi due tronchi.

4. Quinci esce del pari il terzo paio degli *emissarj\*\** della D. M. detti *emissarj laterali esterni*.

5. La distanza dei fori mascellari inferiori tra di loro è di sette linee.

6. Tra questi poi, e le fosse ovali \*\*\* si vede un *istmo* offeso molto spesso largo tre linee.

## ARTICOLO XI.

### *Fori Auditorj.*

Nelle fosse ovali \*\*\*\* abbiamo indicato insinuarfi una porzion notevole di sostanza dependente dal cervelletto, nella quale dimostreremo a suo luogo essere avviluppato il vero nervo auditorio, cioè quello, che negli uomini suol essere conosciuto sotto il nome di porzion molle del nervo auditorio. Il fondo di questi antri è minutissimamente crivellato per dar passaggio a' rami proporzionati di tal nervo.

I i ij

\* Cap. precedente Art. II. §. 10., 11., e 12.

\*\* Par. II. Cap. II. Art. II. §. 15.

\*\*\* Ivi §. 13.

\*\*\*\* Cap. precedente Art. II. §. 15.

## A R T I C O L O XII.

*Fori piccioli simpatici.*

1. Tra il margine anteriore delle fosse ovali, il posteriore delle sfondate, e l'orlo vicino dei *fori laceri* si vede una fossicella superficiale, anch' essa ovale. In questa si contano diversi forellini (talora cinque per parte, talora sei, talora quattro, altre volte da un canto ve n' ha più che dall'altro incostantemente per quello, che riguarda il lato destro, o sinistro) e per questi forellini penetrano nel labirinto, destinato alla perfezione dell'udito negli uccelli, i fili dei nervi piccioli simpatici.

2. Non meritano nemmeno in questi animali il nome di porzion dura dei *N. auditorj*, ripugnante alla destinazione loro, perciocchè sebbene da questi nervi la membrana bipartita del timpano, gli ossetti, e le apofisi bizzarre loro ne sono provveduti negli uccelli di qualche filuzzo nervoso, come la suddetta membrana, e i muscoli del martello e della staffa nell' uomo e nei quadrupedi; tuttavia i rami principali vanno a diramarsi nelle parti molli esteriori dei lati della testa.

3. Questa distribuzione osservasi anche meglio ne' volatili più grossi, come sono le oche, le anitre, i barbagianni, le grù, gli aghironi, i galli d' india, gli sparvieri, i nibbj, le galline, e può da ognuno vederli anche nei minori purchè vi abbia l'occhio per vedere e la mano per notomizzare avvezzi; che altrimenti la fottigliezza di tali diramazioni per entro ad un complesso di parti in apparenza assai confusa, in sostanza tenere, molli, e minute, può deludere l' acume d' un ornitotomista meno esercitato.

## A R T I C O L O XIII.

*Fori laceri.*

1. Una linea posteriormente alla fossicella superficiale ora descritta, ed una linea pure al di sotto delle fosse ovali, si trova la coppia dei fori equivalenti ai laceri, o stracciati

del cranio umano , destinata eziandio negli uccelli a dar passaggio ai tronchi del par vago.

2. Se potessi uniformarmi all' uso comune antico di numerare i nervi dell' encefalo , questo paro farebbe anche qui l'ottavo; ma siccome debbo conformarmi alla natura , ed esporre con tutta la chiarezza possibile quello ch'io veramente ci vedo , e che da chiunque ha da vederti, così nella quarta parte dell' Encefalotomia umana ho dimostrato i nervi nell' encefalo umano essere quindici para , per quello che riguarda i principali, e tre para d'accessorj; nè mi asterrò a suo tempo di far vedere come in quel degli uccelli se ne discoprono pure quattordici para , dei quali il par vago viene ad essere il decimo, senza gli accessorj a me finora ignoti.

3. La lunghezza di questi fori si accosta alle due linee, e la larghezza a poco meno di una , di modo che il picciolo nervo , che vi passa , non occupandone intieramente l'apertura , per essa sbocca dal cranio un grosso emissario della D. Madre , che si fa strada verso l' estremità diretana interna dei fori laceri, dopo d'aver fatto qualche tragitto sull' orlo posteriore delle fosse ovali.

#### ARTICOLO XIV.

##### *Golfi delle Jugulari.*

Nella spessezza delle ossa , che fanno il contorno dei fori laceri, si vede un incavo simile alla fossa scolpita nella rupe delle ossa temporali umane atta a dar ricetto ad un gozzo venoso non diverso dal golfo delle jugulari; e in questo mettono foce non solamente l' emissario poc' anzi mentovato , ma eziandio una grossa vena, che vi discende dalla cassa del timpano ; danno insieme origine alle vene jugulari : e quantunque nella cavità del cranio i fori laceri abbiano una sola apertura piuttosto spaziosa, alla base del cranio però, cioè esteriormente , al di dietro delle apofisi mastoidee, \* nella

I i iij

---

\* Par. I. Cap. II. Art. I. §. 9.

fossa , che dà maggiore risalto a tali apofisi \* , il foro è sempre doppio, e per il medesimo, come nei cranj umani, il nervo passa per l'apertura anteriore, e per la posteriore sbocca nelle vene jugulari , per il golfo loro , il sangue portato dal suddetto emissario , che tien negli uccelli il luogo dei seni laterali notissimi nell' uomo , e ne' quadrupedi . Questi *emissarj* sono i *lateralj posteriori*.

#### A R T I C O L O X V.

##### *Fori Palatini.*

La coppia de' fori , che sta immediatamente dietro ai vangi , è destinata al passaggio di due tronchi nervosi , che vanno a diramarsi nella membrana del palato . Il destro foro è lontano quasi due linee dal sinistro , e tre dal *gran foro occipitale* , sui margini laterali del catino \*\* , e sono come il paio seguente paralleli all' asse longitudinale del catino medesimo .

#### A R T I C O L O X V I.

##### *Fori Ipoglossi.*

I veri *nervi ipoglossi* , che negli uccelli nascono sempre con due piatte radici per lato dai fianchi anteriori della *midolla allungata* , escono del cranio per una coppia di fori situati nel catino , mezza linea più addietro de' fori palatini . In molti individui però , anche nelle specie diverse , questi fori , ch'io nomino *ipoglossi* , si trovano a due per lato , simmetrici , e paralleli all' asse longitudinale del catino . In amendue i casi i tronchi nervosi , o unite , o divise avendo le piatte radici loro , attraversano la spessezza della base del cranio , alquanto obliquamente inclinando verso l' incavatura mastoidea \*\*\* ,

\* Ivi Art. III. §. 9.

\*\* Cap. precedente Art. I. §. 16.

\*\*\* Par. I. Cap. II. Art. III. §. 9.

ed uscendo dalla parte anteriore della medesima traforano le parti vicine per diramarsi nella sostanza della lingua.

## ARTICOLO XVII.

### *Gran foro Occipitale.*

1. Finalmente vediamo il *gran foro occipitale* situato quasi nel mezzo della poppa, o faccia posteriore del cranio. A lin.  $4 \frac{1}{2} : 1 : 2$  di diametro verticale, e lin.  $4 \frac{1}{2} : 2 : 3$  di diametro traverso. E' molto arcato all' orlo superiore, ed al margine inferiore porta assisa esteriormente la apofise occipitale \*, coperta di liscia cartilagine, cui mediante il capo si articola con la prima vertebra cervicale.

2. Questo foro dà passaggio alla spinal midolla, e a due ampi emissarj, che formano il quinto paio, detti *emissarj occipitali*: contengono molto sangue, che sbocca in due grosse vene, costeggianti nella discesa loro i lati delle vertebre del collo, ingrossate da altri vasi. \*\*

3. A tali vene sono paralleli due mediocri tronchi arteriosi, che ascendono su per il collo verso l'encefalo; s'introducono nella cavità del cranio per il gran foro occipitale, e sono le arterie vertebrali destinate ad irrigare la sostanza del cervello.



\* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 14.

\*\* Vedi l' Art. XIII., e il XIV. precedenti.

---



---

# DELLE OSSERVAZIONI

## S O L S T I Z I A L I .

*Fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina nell' Anno 1782 , e de' loro Risultati paragonandole colle simili Osservazioni del 1756, 1764, e 1775.*

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di  
S. A. R. il Granduca di Toscana.

## I N T R O D U Z I O N E .

**L**E osservazioni solstiziali fatte al vasto Gnomone della Cattedrale Fiorentina col paragone al Marmo solstiziale del 1510 sono state da me lungamente descritte nel mio Volume su questa materia. (a)

Le osservazioni del 1764 sono state da me racchiuse in un Opuscolo inedito, del quale somministrerò tutto ciò che concerne il presente argomento negli Articoli seguenti.

Le altre osservazioni del 1775 sono state stampate a Livorno l'anno 1776. (b)

Era da me atteso con impazienza il corrente anno 1782, nel quale, essendo il nodo ascendente lunare presso il principio dell' Ariete, mi somministrava il termine di un importante paragone con tutte le altre osservazioni dal 1756 fino al presente.

Poichè due sono gli elementi, che io mi son proposto a verificare con questo altissimo, ed immobilissimo Settore, il cui

---

(a) Veggasi il Tomo intitolato: *Del Vecchio, e nuovo Gnomone Fiorentino* ecc. stampato a Firenze l'anno 1757.

(b) Veggasi l' Opuscolo intitolato: *Dissertazione intorno alle osservazioni del 1775 allo Gnomone della Meridiana Fiorentina* ecc. Livorno 1776.



cui raggio supera piedi parigini 277. Il primo intorno al periodo secolare dell'obliquità dell'ecclittica, nel quale la discordia degli Astronomi era tanto grande, quanto era grande l'importanza di questa ricerca, dalla quale, come ciascuna, dipendono alcuni piccolissimi movimenti apparenti delle stelle fisse, della terra, e de' pianeti, i quali hanno tormentati gl'ingegni degli Astronomi moderni. Or questo primo elemento è stato da me verificato talmente ne' due Volumi citati, che parte per l'esattezza delle osservazioni, e parte per il loro consentimento con altre somiglianti osservazioni antiche, e moderne, i più insigni Astronomi a tal nuova mia opinione si sono accostati (c) recedendo dal periodo di 88", di 47", e di 45", e tenendosi all'altro periodo assai più ristretto di 34".42 centesime, da me determinato colle osservazioni del 1756, e 1775.

Stabilito adunque questo primo elemento, restava il secondo non meno importante del primo, ma di una indagine assai più malagevole, e questo è il vero valore della nutazione dell'asse terrestre, la quale va sempre alterando le medie obliquità dell'ecclittica, e non meno le posizioni apparenti di tante migliaja di stelle fisse, i cui piccolissimi moti, tanto in latitudine, che in longitudine, sono stati scoperti dalla moderna Astronomia, ed in particolare dal rinomato Inglese Astronomo il *Bradlejo*. Egli dal 1727 fino al 1747 con grandissimo numero di osservazioni, che non potevano spiegarsi nè coll'annua parallassi, nè coll'aberrazione della luce, ritrovò, che detti fenomeni godevano di una semplice spiegazione, supponendo una nutazione dell'asse terrestre, la quale si manifestava dipendente dal nodo ascendente lunare, il quale quando trovavasi al principio d'Ariete, la nutazione era massima boreale nelle stelle fisse, che erano prossime al coluro de' solstizj. E quando al contrario il detto nodo era passato al principio della Libra,

Kk

---

(c) Tra questi uno è l'accuratissimo, e chiarissimo M. de la Lande il quale nel Tomo IV. della sua Astronomia ha fissato tal periodo secolare di 33" $\frac{1}{2}$ , pochissimo differente dal mio di 34".42 centesime.

la nutazione cambiavasi in australe, ed in tal senso era pur massima.

Il valore di tal nutazione fu giudicato dal medesimo Astronomo di 18", e così è stato seguitato da altri Astronomi. Io dalle osservazioni del 1764, paragonate con quelle del 1756, l'ho dedotto maggiore, e come tale l'espongo nel citato Opuscolo inedito. In esso mi mancavano le nuove osservazioni dell'anno corrente, le quali avendo fatte con particolar diligenza, mi son ritrovato nel grado di esaminare la stessa ricerca della nutazione, non già con una, ma bensì con quattro combinazioni.

La prima delle osservazioni del 1756 paragonate a quelle del 1764.

La seconda di queste colle osservazioni del 1775.

La terza del 1775 con quelle del corrente anno 1782.

E finalmente la quarta del 1756 con quelle dello stesso anno 1782.

In questi anni due volte il nodo ascendente lunare si è ritrovato prossimo al principio d'Ariete, cioè nel 1764, e 1782.

Due volte pure si è incontrato nelle vicinanze della Libra, come nel 1756, e 1775.

Nel primo periodo ci corrono anni 18, e nel secondo anni 19. Il vero periodo del nodo ascendente lunare è di anni 18.63 parti centesime. La frazione, che manca, o eccede ne' due periodi, è tale, che facilmente riducesi co' soliti metodi.

Per la qual cosa, essendo io in grado di provare il valore della nutazione con quattro combinazioni formate in detti due periodi, ho intrapresa questa fatica, essendo impazientissimo di verificare questo secondo elemento della nutazione dell'asse terrestre. Quale sia il risultato, si vedrà in questa breve Memoria, che è l'estratto di una assai lunga, che io differisco ad altro tempo, non potendo per ora renderla pubblica. Ma non ho voluto differire l'edizione del presente ristretto per la sua gravissima importanza nell'Astronomia.

Non posso dissimulare, che fino dal principio dell'opera più ostacoli mi ritardavano, e tacendo degli altri, un grave

ostacolo mi presentava l'elemento del lunar perigeo, che doveva certamente influire nella nutazione desiderata; ma non si sapeva, se il suo influsso fosse sensibile, o no, e di qual valore esso si fosse. Nacque il primo sospetto nello stesso *Bradlejo*, ma io non so, se egli, o altri Astronomi dopo di lui si siano applicati di proposito a calcolarlo. Or se in altre ricerche Astronomiche è necessario un tale articolo, nella presente mia ricerca egli è indispensabile. Trattasi qui d'indagare, se la nutazione sia di  $18''$ , di  $19''$ , ovvero di  $20''$ , parendomi che tali siano i limiti della nutazione. Se adunque l'equazione del lunar perigeo per aumentare la nutazione fosse di uno, o due secondi, esso verrebbe ad alterare tutta questa ricerca. Potrebbe apparire la nutazione di  $20''$ , quando collocato il lunar perigeo diversamente, cioè in maniera tale, che corresse la distanza media lunare, essa nutazione scemasse di  $2''$ , e così fosse di  $18''$ , secondo l'ipotesi di *Bradlejo*. Ed in senso contrario, se la nutazione fosse boreale, ed il lunar perigeo si ritrovasse ne' segni australi, e specialmente verso il principio del Capricorno, la nutazione attuale scemando di  $2''$  apparirebbe di  $18''$ , quando essa fosse di  $20''$ .

A' primi calcoli da me tessuti, come espongo lungamente nella Memoria estesa, ho ritrovato appunto, che l'equazione massima del lunar perigeo, per aumentare, o per diminuire la nutazione, si accostava a  $2''$ . Potendo essi adunque far variare i risultati in una materia così sottile, e così gelosa, mi è convenuto tener dietro alla teoria del lunar perigeo, ed alle sue equazioni. Mi è convenuto formare una Tavola, per l'equazioni dello stesso perigeo. Mi è convenuto ridurre le quattro mie combinazioni non solamente al principio della Libra, o dell'Ariete, ma ancora alla distanza media lunare, affinché la sua azione sia nulla, e così non possa nè aumentare, nè diminuire il vero valore della nutazione.

Stabilito così questo secondo elemento, ho dovuto con esso ricalcolare la Tavola, che ho inserita alla pagina 82 della Dissertazione del 1775, introducendo in essa questo nuovo elemento, cioè dell'equazione per il lunar perigeo. Nella detta nuova Tavola sono calcolate le vere obliquità dell'

ecclittica dal 1775 al 1802 coll' elemento del perigeo lunare. In essa pure la nutazione, che facevasi di  $20''$ , è stata corretta secondo le moderne osservazioni. In essa finalmente è stato messo un accordo nell' epoca dell' obliquità osservata a Parigi, ed a Firenze. In tal epoca vi era una differenza di  $6''$  incirca. Io dunque avendo diminuita la latitudine Fiorentina di  $6''$ , rispetto a quella fissata nel 1756 nel mio Gnomone, ho procurato un accordo tra le due epoche, per andare in avvenire con tutta l' uniformità, e corrispondenza nelle osservazioni Parigine, e Fiorentine.

Non so fu quali osservazioni la latitudine Fiorentina nella *Connoissance des temps* di questi anni si stabilisca di  $43^{\circ}.46'.30''$ , quando essa è certamente maggiore.

Nel libro dello Gnomone sono state descritte tutte le osservazioni da me fatte nel 1755, e 1756 sulla stella polare, ed il loro risultato, che fu della latitudine di  $43^{\circ}.46', 53''$ . Avendone ora detratti  $6''$  per le ragioni, che accennerò, resterà tal latitudine alla Cupola della Cattedrale di  $43^{\circ}, 46', 47''$ .

Formate le due Tavole, cioè delle diverse nutazioni del polo terrestre a diverse posizioni del nodo ascendente lunare, e delle diverse equazioni, ora additive, ed ora sottrattive, che corrispondono alle diverse longitudini del lunar perigeo, ora altro non resterebbe, se non che la formazione delle altre Tavole, per ben rappresentare i piccoli apparenti movimenti delle stelle fisse, che si trovano sensibilmente lontane dal coluro de' solstizj. Ma una tal ricerca è per se stessa assai facile, applicandole gli elementi da me ritrovati, ed è estranea all' oggetto presente, che consiste nel ben rappresentare le oscillazioni delle obliquità dell' ecclittica per la combinazione del suo moto secolare periodico, e del moto oscillatorio originato da' nodi lunari, e dal lunar perigeo.

Se l' esito di queste mie ricerche corrisponderà negli anni futuri alle immediate osservazioni dell' obliquità dell' ecclittica, e delle posizioni delle stelle fisse, vuol rimettersi alla decisione del tempo, e de' più accurati osservatori. Questa è la più sottile ricerca della moderna Astronomia. Onde senza un tempo ben lungo, ed una serie di squisitissime osservazioni, non potremo ottenere certezza maggiore della presente.

## A R T I C O L O I .

*Delle osservazioni Solstiziali fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina quest' anno 1782.*

Incomincerò questa breve Memoria dalle osservazioni solstiziali fatte al grande Gnomone della Cattedrale Fiorentina del corrente anno 1782, tralasciando per brevità tutte le annotazioni, e ricordi del registro originale.

Per ridurre dette osservazioni al momento solstiziale vi va detratta la differenza in declinazione tra'l dì solstiziale, che fu il dì 21 di Giugno, ed il dì di una data osservazione. E come le Tavole solari del Sig. *Abb. la Caille* sono calcolate al meridiano di Parigi, la detta differenza va ridotta al meridiano Fiorentino. Con tali riduzioni riporterò le distanze del centro solare dal vertice, detraendo da esse la differenza in declinazione colla riduzione al meridiano.

La prima osservazione fu fatta il dì 15 Giugno, ma passando per i trafori del fenestrono australe del Cupolino de' raggi di una luce spuria, che alteravano l'immagine solare formata da' raggi centrali, essa restò tanto dubbiosa, che non potè farfene conto. Indi è che io comincerò il presente registro dall'osservazione del dì 17, che secondo l'ordine farebbe la seconda, ma tralasciata la prima, essa occuperà il suo posto.

## O S S E R V A Z I O N E I .

*Del dì 17. Giugno.*

	<i>Gradi Min'. Min". Cent.</i>
Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 37'. 17"
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 5. 24.
<hr/>	
Semidiametro apparente solare indi dedotto . . . . .	0. 15. 56. 50.
<hr/>	
Distanza del centro solare dal zenith . . . . .	20. 21. 20. 50.

Kk ij

Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .	3. 10.
<hr/>	
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	20. 18. 10. 50

## O S S E R V A Z I O N E II.

*Del dì 18. Giugno.*

Distanza dell' orlo solare austra- le dal zenith . . . . .	20°. 35'. 59". 50
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 3. 36
<hr/>	
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	0. 16. 11. 50.
<hr/>	
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	20. 19. 47. 50.
Riduzione al momento solstiziale del meridiano Fiorentino . . . . .	0. 1. 42. 00
<hr/>	
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	20. 18. 5. 50

## O S S E R V A Z I O N E III.

*Del dì 19. Giugno.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 35'. 18". 50
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 2. 36.
<hr/>	
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	16. 21. 25
<hr/>	
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	20. 18. 57. 25.
Riduzione al momento solstiziale del meridiano Fiorentino . . . . .	0. 45.
<hr/>	
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	20. 18. 12. 25

## O S S E R V A Z I O N E IV.

*Del dì 20. Giugno.*

Gradi Min. Min". Cent.

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 34'. 43".
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 1. 54.
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	<u>16. 24. 50</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	20. 18. 18. 50
Riduzione al momento solstiziale del meridiano Fiorentino . . . . .	<u>10.</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 8. 50</u>

## O S S E R V A Z I O N E V.

*Del dì 21. Giugno giorno solstiziale.*

Il solstizio dell' anno corrente è  
accaduto quasi ore 2 prima del mez-  
zogiorno.

Distanza dell' orlo australe dal ze- nith . . . . .	20°. 34'. 32"
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	<u>20. 1. 49</u>
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	16. 21. 50
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	<u>20. 18. 10. 50</u>

La riduzione tanto per la decli-  
nazione, quanto pel meridiano Fio-  
rentino, quanto pure della distanza  
del momento solstiziale dal mezzo-  
giorno è affatto insensibile. Onde si  
tralascia.

## O S S E R V A Z I O N E VI.

*Del dì 22. Giugno.*

	<i>Gradi Min'. Min''. Cent.</i>
Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 34'. 51". 50
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	<u>20. 2. 00. 00</u>
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	<u>16. 25. 75</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	20. 18. 25. 75
Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>16. 00</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 9. 75</u>

## O S S E R V A Z I O N E VII.

*Del dì 24. Giugno.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 35'. 28"
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	<u>20. 2. 44</u>
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	<u>16. 21. 75</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	20. 19. 6. 25
Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>0. 54. 00</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 12. 25</u>



## O S S E R V A Z I O N E VIII.

*Del dì 24. Giugno.*

	<i>Gradi Min'. Min". Cent.</i>
Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 36'. 30".
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 3. 46
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	<u>16. 22</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith . . . . .	<u>20. 20. 8</u>
Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>2. 00</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 8</u>

## O S S E R V A Z I O N E IX.

*Del dì 25. Giugno.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20. 37. 59.
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 5. 14. 50
Semidiametro apparente solare in- di dedotto . . . . .	<u>16. 22. 25</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith. . . . .	20. 21. 36. 75
Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>3. 29</u>
Distanza del centro solare dal ze- nith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 7. 75</u>

## O S S E R V A Z I O N E X.

*Del dì 26. Giugno.*

	<i>Gradi Min'. Min''. Cent.</i>
Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 39' 52 <sup>u</sup> . 50
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 7. 00. 00
Semidiametro apparente solare indi dedotto . . . . .	<u>16. 26. 25</u>
Distanza del centro solare dal zenith	20. 23. 26. 25
Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>5. 20. 40</u>
Distanza del centro solare dal zenith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 5. 45</u>

## O S S E R V A Z I O N E XI.

*Del dì 27. Giugno.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith , . . . . .	20°. 42'. 11 <sup>u</sup> . 50
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 9. 24. 20
Semidiametro apparente solare indi dedotto . . . . .	<u>16. 23. 65</u>
Distanza del centro solare dal zenit	20. 25. 47. 95
Riduzione al momento solstiziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>7. 38. 06</u>
Distanza del centro solare dal zenith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 9. 89</u>

O S S E R V A Z I O N E XII.

*Del dì 28. Giugno.*

	<i>Gradi Min'. Min". Cent.</i>
Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20°. 44'. 48"
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 12. 06
Semidiametro apparente solare indi dedotto . . . . .	<u>16. 21</u>
Distanza del centro solare dal zenith	20. 28. 27
Riduzione al momento solstiziale , ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>10. 19. 68</u>
Distanza del centro solare dal zenith ridotto . . . . .	<u>20. 18. 7. 32</u>

O S S E R V A Z I O N E XIII.

*Del dì 30. Giugno.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20. 51. 34. 25
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 18. 42. 00
Semidiametro solare indi dedotto . . . . .	<u>00. 16. 55. 81</u>
Distanza del centro solare dal zenith	20. 35. 8. 12
Riduzione al momento solstiziale , ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>00. 16. 55. 81</u>
Distanza del centro solare dal zenith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 12. 31</u>

O S S E R V A Z I O N E XIV.

*Del dì 1. Luglio.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20. 55. 24. 00
Ll ij	

	<i>Gradi Min. Min". Cent.</i>
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	20. 22. 38. 00
Semidiametro apparente solare indi de- dotto . . . . .	<u>00. 16. 23. 00</u>
Distanza del centro solare dal zenith	20. 29. 01. 00
Riduzione al momento solfziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>00. 20. 56. 36</u>
Distanza del centro solare dal zenith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 4. 64</u>

## O S S E R V A Z I O N E XV.

*Del dì 2. Luglio.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	20. 59. 46. 00
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	<u>20. 26. 56. 00</u>
Semidiametro apparente solare indi de- dotto . . . . .	<u>00. 16. 25. 00</u>
Distanza del centro solare dal zenith	20. 43. 21. 00
Riduzione al momento solfziale, ed al meridiano Fiorentino . . . . .	<u>00. 25. 16. 00</u>
Distanza del centro solare dal zenith ridotta . . . . .	<u>20. 18. 5. 00</u>

## O S S E R V A Z I O N E XVI.

*Del dì 3. Luglio.*

Distanza dell' orlo solare australe dal zenith . . . . .	21. 4. 32. 50
Distanza dell' orlo boreale . . . . .	<u>20. 31. 42. 50</u>
Semidiametro apparente solare indi de- dotto . . . . .	<u>00. 16. 25. 00</u>
Distanza del centro solare del zenith	20. 48. 7. 50
Riduzione al momento solfziale, ed	

	Gradi Min'. Min". Cent.
al meridiano Fiorentino . . . . .	07. 30. 0. 00
Distanza del centro solare dal zenith ridotta . . . . .	20. 18. 7. 50

*Della media distanza del centro solare dal vertice ridotta al momento solfizioale, ed al meridiano Fiorentino.*

Essendo deferitta, come dubbiosa, la prima osservazione del dì 15. Giugno, a motivo de' raggi efranei solari che turbavano la terminazione degli orli solari, dovremo escluderla, e prevalerci soltanto delle XVI osservazioni suffeguenti dal dì 17. Giugno fino al dì 3. Luglio. Recapitolando adunque i loro risultati farà

	Gradi Min'. Min". Cent.
Per l' osservazione II. distanza dal zenith corretta . . . . .	20. 18. 10. 50
Per la III. . . . .	5. 50
Per la IV. . . . .	12. 25
Per la V. . . . .	8. 50
Per la VI. . . . .	10. 50
Per la VII. . . . .	9. 75
Per la VIII. . . . .	12. 25
Per la IX. . . . .	8. 00
Per la X. . . . .	7. 75
Per la XI. . . . .	5. 45
Per la XII. . . . .	9. 89
Per la XIII. . . . .	7. 32
Per la XIV. . . . .	12. 31
Per la XV. . . . .	4. 64
Per la XVI. . . . .	5. 00
Per la XVII. . . . .	7. 50

Essendo la somma de' secondi 137". 11 cen. dividendola per le XVI osservazioni, farà la distanza media solare dal zenith . . . . .

	20. 18. 8. 55
--	---------------

## ARTICOLO II.

*Riflessioni sulla distanza media già dedotta , e corrispondenza delle osservazioni tra di loro.*

Prima di oltrepassare alle conseguenze , che da queste osservazioni si dedurranno , farà ben fatto di riflettere , che la distanza solare media al zenith ridotta , come è stato fatto , concorda così bene con un buon numero di osservazioni , che il suo divario da esse batte ad  $1''$  , o poco più.

Tali sono le osservazioni V , VII , IX , X , XII , XIII , e XVII. Onde , come ciascuno potrà riscontrare , la media distanza già dedotta differisce da queste VII osservazioni pressochè di  $1''$  , argomento assai certo della precisione di queste osservazioni.

Le più discordanti dalla media , una per difetto , e l'altra per eccesso , sono la XV , e la XIV. La prima ci presenta  $4''$ . 64 cen. Ond' essa è minore della media di . .  $3''$ . 91 cen.

La seconda , che è l'eccessiva , ci dà . . . 12. 31 cen. che differisce da . . . . . 8. 55 cen. di  $3''$ . 36. cen.

Tutte le altre o eccedono , o scarseggiano più di  $1''$  , e meno di  $3''$ . 36 cent. Il che pure ci palesa l'esattezza di queste osservazioni al vastissimo Gnomone della Cattedrale.

Merita però , che alla prima riflessione si aggiunga la seconda , particolarmente per gli Astronomi , che non hanno mai fatte delle osservazioni alle gran meridiane , e perciò ne hanno un' idea molto confusa , per non dire erronea . Questa è che una buona parte di tali differenze hanno un' origine , che non dipende dalla natura delle meridiane , ma bensì dall' indole delle refrazioni , che sono suscettibili di qualche varietà secondo i venti , secondo gli stati dell' atmosfera , che attraversano i raggi solari , e secondo i terrestri vapori , che in su si sollevano passando a traverso de' raggi , che si portano o al corno della meridiana , o ancora a telescopj i più perfetti . Io parlo di quella oscillazione , di quel tremolio , che si osserva negli orli solari dell' immagine , che

passa per una meridiana. Il filo della penombra, benchè assai distinto, vacilla sensibilmente, scintillando, per così dire, come fanno le stelle fisse, ed è cosa assai malagevole nel mezzo di tal tremolio, che i due osservatori o dell' orlo australe, o del boreale possano con ogni precisione collocare i loro fili ad ugual distanza dal centro. Osservando io attentamente tale oscillazione, e paragonandola alle divisioni della meridiana, ho giudicato che passi i 2" per parte. E siccome tal tremolio dipende dalle attuali, e momentanee disposizioni della terrestre atmosfera, così era da sospettare che lo stesso fenomeno accadesse ancora ne' migliori telescopj.

Ho voluto verificare il mio sospetto colla immediata osservazione solare nel suo passaggio al meridiano ne' giorni susseguenti al dì 3 Luglio, in cui furono compite le osservazioni allo Gnomone della Cattedrale.

Ho trascelto un telescopio acromatico dollondiano di braccio  $1\frac{1}{4}$  di foco, che fanno qualche cosa più di piedi 3 Parigini. Ho collocato esattamente il filo orizzontale del suo micrometro, paragonandolo con alcune fabbriche orizzontali. Indi dirigendolo al Sole sul punto del mezzogiorno in tal maniera, che il filo radeva precisamente l' orlo solare boreale, un tal orlo ancor esso vacillava, ora nascondendosi affatto sotto del filo, ed ora traparendo sopra il medesimo. La differenza per quanto può giudicarsi non era minore di 2", particolarmente in giornate calde, e vaporose, che fanno un cambiamento momentaneo, e continuo nell' atmosfera. Per la qualcosa, se qualche Astronomo non versato nelle osservazioni delle gran meridiane volesse avere una riprova della loro esattezza, altro far non dovrebbe, che con un quadrante di sei piedi di raggio fare una quindicina, o ventina di osservazioni prima, e dopo il solstizio estivo, e poi ritestando i suoi calcoli dedurre la distanza media corretta. Benchè io non abbia fatta alcuna serie di tali osservazioni, pure ardisco di sospettare, che detta media distanza si scosterà, o ugualmente, od ancora più dalle altre distanze medie ridotte col presente mio metodo.

In altra riprova potremo dedurre intorno alla corrispondenza di queste mie osservazioni, ritettendo a' semidiametri solari osservati dal dì 19 Giugno fino al dì 3 Luglio. E sta-

to avvertito nel registro delle mie osservazioni , che passava una luce spuria sulla meridiana , la quale alterava il filo delle due penombre . Nell' osservazione I. tale alterazione era troppo sensibile . Era minore nella II , e nella III , ma non si potè giugnere ad escludere ogni raggio estraneo , se non dopo il dì 18. Onde da quel giorno fino all' ultimo la luce dell' immagine era vivissima , e così il diametro della medesima fu maggiore , come suol essere , ma restando costante la chiarezza dell' immagine fino al dì 3 Luglio ; veggiamo in detto tempo qual corrispondenza abbiano i semidiametri solari apparenti. Il registro di tali semidiametri basta per decidere. Sarà dunque semidiametro solare nell'

	<i>min'. min". cen.</i>		<i>min'. min". cen.</i>
Osservazione IV.	16. 21. 25	Nella XI.	16. 26. 25
Nella V.	16. 24. 55	Nella XII.	16. 23. 65
Nella VI.	16. 21. 50	Nella XIII.	16. 21. 00
Nella VII.	16. 25. 75	Nella XIV.	16. 26. 12
Nella VIII.	16. 21. 75	Nella XV.	16. 23. 00
Nella IX.	16. 22. 00	Nella XVI.	16. 25. 00
Nella X.	16. 22. 25	Nella XVII.	16. 25. 00

Ora tra queste XIV osservazioni calcolando il semidiametro medio esso si troverà di 16' 23", 50 centesime, che dalle osservazioni estreme per eccesso , o per difetto non discorda di 3", e che si accorda con tutte le altre con una differenza di 1" in 2".

Avvertasi, che il semidiametro solare calcolato con le Tavole dal dì 19 Giugno al dì 3 Luglio non differisce , che di  $\frac{1}{4}$  di secondo. Onde può considerarsi nel caso nostro , come costante.

Non essendo coteste le osservazioni dell' immagine solare colle correzioni delle penombre , come ho fatto nelle osservazioni del 1755 , e 1756 , non dee far maraviglia , che l' apparente semidiametro della meridiana sia maggiore del giusto. Ma adoperando la debita correzione , o col metodo del Sig. *Manfredi* di sottrarre il semidiametro del foco , o coll' altro mio metodo esposto nel mio Tomo dello Gnomone , esso si accosterà a 15', 47", che è il semidiametro calcolato nelle Tavole.



Ancor qui ripeterò, che facendo fedici, o più osservazioni con un telescopio acromatico, o con un buon quadrante murale, pigliando ne' giorni solstiziali coll' immediata misura il semidiametro solare, forse la misura media discorderà ugualmente dalle misure estreme, che non deducali dalle mie osservazioni meridiane.

La riprova tanto delle medie solari dal vertice, quanto de' semidiametri solari in buon numero di osservazioni starà sempre in mano degli Astronomi, che non hanno la giusta idea delle grandi meridiane. Ed io altro non posso fare, che esortargli alla pazienza necessaria in somiglianti lunghe osservazioni.

Nè fa difficoltà, che o per una luce estranea, o per la caligine dell' atmosfera i semidiametri solari alle meridiane diminuiscono. Poichè la penombra australe, e la boreale si alterano ugualmente. Indi è, che non per questo resta alterata la distanza del centro.

### A R T I C O L O III.

*Equazione generale additiva alla media distanza ridotta del centro solare dal vertice dell' obliquità dell' eclittica nell' anno corrente 1782.*

Afficurata, com'è stato fatto, la distanza media solare dal vertice, ed essendo stata indi dedotta la detta distanza ridotta tanto al momento solstiziale, quanto al meridiano, ora altro non resta, se non che applicare alla medesima l' equazione generale già fissata all' articolo X, pag. 67 della mia prima Dissertazione.

E' composta tal' equazione, come potrà vedersi, di partite additive, e sottrattive, ed il residuo rimane additivo, ed è secondo il citato articolo di 20". 69 centesime, come alla pag. 68. Essendo però inclusa in tali partite quella, che appartiene al nodo ascendente lunare del 1775, che è additiva, ed ivi è stata calcolata di 0'. 55 centesime, essa va esclusa nella presente ricerca, dovendosi introdurre l' equazione competente all' anno corrente, come si farà a suo luogo.

Adunque detraendo all'equazione dalla totale di . . . . .  $20'' . 69 \text{ cent.}$ ,  
 refterà l'equazione per l'anno corrente di  $20 . 14 \text{ cent.}$

Effèndo adunque la diftanza media ridotta di . . . . . :  $20^\circ . 18' . 8'' . 55 \text{ cent.}$   
 avremo la diftanza dal vertice agguagliata per il dì folftiziale di . . . . .  $20^\circ . 18' . 28'' . 69 \text{ cent.}$

Per ottenere l'obliquità attuale dell'ecclittica ne' dì folftiziali del 1782, convien ripigliare la latitudine Fiorentina al punto della Cattedrale, che fu da me dedotta con molte offervazioni della ftella polare l'anno 1756, e 1757. Effa fu di . . . . .  $43^\circ . 46' . 53'' . 00$ ,  
 come potrà vederfi nel Tomo dello Gnomone Fiorentino.

Onde fottaendo la diftanza dalla latitudine, ne dedurremo l'obliquità dell'ecclittica pel dì 21 Giugno 1782 di  $25^\circ . 28' . 24'' . 31 \text{ cent.}$

#### ARTICOLO IV.

*Paragone di tal obliquità con quella offervata da me allo fteffo Gnomone nel 1775.*

Nella mia Differtazione Astronomica pubblicata in Livorno nel 1776 fono regiftrate tutte le offervazioni di quell'anno, ed applicate le debite equazioni è ftata dedotta l'obliquità di quell'anno.

Prima di farne il paragone, convien togliere dall'equazione generale quella, che vi è introdotta per la differenza della nutazione per la polizione diverfa del nodo lunare del 1756, e del 1775, la qual differenza, come è ftato rilevato, è di  $0'' . 55 \text{ centefime}$ .

Indi è, che l'equazione generale riducefi a . . . . .  $20 . 14 \text{ cent.}$

La media delle XIII offervazioni di

S O L S T I Z I A L I .

275

quell' anno fu di . . . . .  $20^{\circ} 18. 22''. 85 \text{ cent.}$

A cui aggiungendo l' equazion generale di . . . . . 20. 14

otterremo la distanza del centro solare dal vertice di . . . . .  $20. 18. 42. 99$

Ma la latitudine Fiorentina è di 43. 46. 53

Onde sottraendo la distanza dalla latitudine, farà . . . . .  $23^{\circ}. 28'. 10''. 01 \text{ cent.}$   
che è l' obbliquità attuale del 1775.

Avvertasi, che tale obbliquità alla pag. 73 di quella Dissertazione è stata dedotta di  $23^{\circ}. 28'. 9''. 46 \text{ cent.}$ , e ciò per l' equazione de' nodi lunari, che ivi è racchiusa, la quale essendo stata tolta, farà l' obbliquità senza tal equazione di . . . . .  $23^{\circ}. 28'. 10''. 01 \text{ cent.}$

Ma l' obbliquità del corrente anno 1782 è di . . . . . 23. 28. 24. 31

Onde vi si scorge la differenza additiva di . . . . .  $00. 00. 14''. 30 \text{ cent.}$

Or questa differenza, quando farà ridotta coll' equazione del nodo ascendente lunare, tanto nel 1775, quanto nel corrente anno 1782, insieme coll' altra riduzione del periodo secolare dell' ecclittica, ci paleserà la nutazione totale dell' asse terrestre.

A R T I C O L O V .

*Paragone di tale obbliquità con quella della Conoscenza de' tempi di Parigi nell' anno corrente.*

A dì 21 Giugno è registrata nella Conoscenza de' tempi, che annualmente si pubblica a Parigi, di  $23^{\circ}. 27' 59''$

Essendo l' obbliquità da me dedotta di 23. 28. 24. 30,  
tra l' una e l' altra vi corre il divario di 0. 0. 25. 30.

Un tal divario nasce dall' opinione seguitata finora da' Compilatori di quella Efemeride, cioè, che il periodo secolare della diminuzione dell' ecclittica sia di  $47''$ . Indi è, che incominciando dall' epoca del 1750, o altra, che essi hanno segui-

tata, le sottrazioni per il periodo secolare sono state maggiori del vero. Qualche differenza vi farà pure nell'epoca. Per tal cagione adunque le obbliquità attuali di quella Efemeride farà sempre minore della vera. Se si è seguitata l'ipotesi del periodo secolare di  $88''$ , questi in anni 32, dal 1750 al 1782 porterebbero la differenza di  $28''$ , che sono più di  $25''$ . 30 centesime. Comunque siasi, certo è che l'obbliquità di quella efemeride è troppo scarsa. Essa è ancora tale rispetto alle osservazioni astronomiche fatte in quest'anno a Parigi dal Sig. de la Lande a tenore delle quali l'obbliquità attuale è di  $23^\circ$ .  $28'$ .  $16''$ , come apparisce da cortese lettera del medesimo Astronomo.

Paragonando tale osservazione alle mie, non altro divario si trova, che di  $8''$ .

## ARTICOLO VI.

*Paragone di tal obbliquità da me osservata con quella del 1756 registrata nel mio Volume dello Gnomone.*

Per le prime osservazioni fatte allo Gnomone Fiorentino dopo la costruzione della presente meridiana, l'obbliquità dell'ecclittica del 1756 dedotta con gran numero di osservazioni fu di . . . . .  $23^\circ$ .  $28'$ .  $15''$ , 58 cent.

Essendo adunque l'obbliquità dell'anno

corrente di . . . . .  $23$ .  $28$ .  $24$ .  $30$

tra l'una e l'altra vi corre la differenza

di . . . . .  $00$ .  $0$ .  $8$ .  $32$  cent.

Conviene avvertire, che nel 1756 il nodo lunare va non lungi dalla Libra, come si calolerà in appresso. In oltre da tal tempo fino al presente anno vi corrono anni 26, a cui secondo il periodo secolare di  $34''$ . 42 centesime competono  $8''$ . 95 centesime. Si vedrà in appresso nel calcolo, che si farà della massima nutazione, che tutto questo combina colle leggi di detta nutazione, e col periodo secolare di  $34''$ . 42 centesime.

## A R T I C O L O VII.

*Paragone della stessa obliquità con quella, che è registrata nella Tavola della mia prima Dissertazione.*

Alla pagina 82 della prima Dissertazione pubblicata nel 1776 sono state calcolate tutte le obliquità dell' ecclittica, incominciando dal 1775 fino al 1801. Consultando in detta Tavola l' anno presente 1782 vi si vede registrata l' actual obliquità dell' ecclittica di . . . . 23°. 28'. 25". 26 cent.

Essendo essa per le osservazioni di 23. 28. 24. 30  
non vi si scorge altro divario che di . 0. 0. 0. 96 cent.

Ora una sì stretta corrispondenza tra l' osservazione e la Tavola fa ben comprendere, che le ipotesi, sulle quali essa è fondata, sono assai vicine alla verità. Queste ipotesi sono, che la nutazion totale sia, non già di 18", ma bensì di 20".

E che il periodo secolare della diminuzione dell' obliquità sia, non già di 47", ma bensì di 34" incirca.

## A R T I C O L O VIII.

*Del vero valore della nutazion totale dell' asse terrestre dedotto da più combinazioni maneggiate colle osservazioni solstiziali del 1756, 1764, 1775, e 1782.*

L' oggetto principale di questa dissertazione è stato quello di verificare con tutte quelle combinazioni, che si potrà, qual sia il vero valore della nutazione dell' asse terrestre, mentre il nodo ascendente lunare passa dal principio della Libra fino al principio d' Ariete con moto retrogrado. Quanto una simil ricerca sia rilevante per la moderna Astronomia, e per correggere, e ridurre con essa tutte le osservazioni delle stelle fisse, e delle declinazioni solari, si comprende da ognuno, senza che io mi metta a provarlo.

Il Sig. *Bradlejo*, come è stato divisato nell' art. I., faceva tal nutazione di 18", e deduceva dalle sue osservazioni, fatte dal 1728 al 1747, che con tale ipotesi felicemente spiegavan-

si alcune varietà, che soffrivano le stelle fisse, che non potevano soggettarli nè alla legge delle aberrazioni, nè a quella della paralassi dell'orbe annuo. Egli però non nega, che qualche divario di 2" in 3" si ravvifa in alcune posizioni delle stelle fisse.

Dopo di lui tutti gli Astronomi hanno seguitata la di lui ipotesi di 18". Se non che il chiarissimo Sig. de la Lande, osservando, che tal ipotesi non corrispondeva a' fenomeni delle maree, secondo i quali le forze solari, e lunari avevano una diversa proporzione di quella, che nasceva da tal ipotesi, propose, che detta nutazione si aumentasse di 1", facendola di 19", invece di 18". Ma egli si ferve di tale ipotesi non appoggiandola ad alcuna osservazione.

Io ho fatto vedere nell' art. I. della Prop. XV, che la nutazione, ancora di 20", corrispondeva benissimo a' fenomeni delle maree, e ad altri fenomeni della precessione degli equinozj.

Inoltre nel 1775 io ho adoperata una tale ipotesi per le osservazioni solstiziali comparative dal 1756 al 1764, secondo le quali sembra indubitato, che la nutazione sia di 20", ed ancora di più.

Ripigliando ora da capo questa sottile, ma importante ricerca, io mi sforzerò di esaminarla in alcune combinazioni; e sono le seguenti

*Combinazioni formate colle osservazioni solstiziali del 1756, 1764, 1775, e 1782, per dedurne la vera nutazione dell' asse terrestre, riducendola al principio di Ariete, o della Libra, e correggendola coll' equazione del lunar perigeo.*

### C O M B I N A Z I O N E I

*Delle osservazioni del 1756 con quelle del 1764.*

Nel 1756 l' obliquità immediatamente osservata e dedotta con gran numero di osservazioni alla Cattedrale su di . . . . . 23°. 28'. 15". 58 cent., come può riscontrarsi nel mio Gnomone Fiorentino.

Non giungeva allora il nodo ascendente lunare al principio della Libra, e per ridurvi la nutazione mancava 1". Onde la nutazione australe sarebbe diminuita di questo 1", che è sottrattivo.

Onde l'obliquità ridotta al principio della Libra farà di . . . . . 23°. 28'. 14". 58 cent.

Il lunar perigeo era ne' segni australi, ne' quali era la nutazione. Onde tendeva ad aumentare tal nutazione di 1". 92 cent. secondo il calcolo. Onde in vece di 10" tal nutazione era di 11". 92. E così all'obliquità dell'eclittica toglieva 1". 92 di più, che non farebbe alla media lunar distanza, e perciò conviene aggiungere tale equazione di 0. 0. 1". 92

Così farà l'obliquità doppiamente ridotta di . . . . . 23°. 28'. 16". 50 cent.

Per le osservazioni del 1764 era l'obliquità di . . . . . 23°. 28'. 32". 17 cent.

come rilevasi da una mia Memoria inedita composta in quell'anno. Ma qui è convenuto ridurla secondo il nuovo metodo.

L'equazione per ridurla al principio d'Ariete è insensibile, giacchè il nodo lunare era così prossimo al o d'Ariete, che mancavano soli 35', che fanno un'equazione insensibile, come ciascuno comprenderà.

L'equazione del perigeo lunare era additiva di . . . . . 0". 82 cent.  
 onde aggiungendole a . . . . . 23. 28. 32. 17  
 ci palesa l'obliquità ridotta di . . . . . 23. 28. 32. 99

Ma essendo trascorsi anni 8 dal 1756 al 1764, intanto per il periodo secolare è accaduta la diminuzione di . . . . . 2". 75  
 che va supplita con aggiungerla.

Onde l'obliquità con tal nuova riduzione farà di . . . . . 23. 28. 35. 74

Da cui detraendo l'obliquità ridotta del 1756 . . . . . 23. 28. 16. 50

resterà la nutazione corretta di . . . o. o. 19. 24

## C O M B I N A Z I O N E II

*Delle osservazioni del 1764 con quelle del 1775.*

L' obbliquità osservata nel 1775 fu di  $23^{\circ}. 28'. 9''.$  46 cent. come potrà rilevarsi dalla mia Dissertazione stampata in Livorno l' anno susseguente 1776.

Nel detto anno era australe la nutazione, e non giungeva a o della Libra, mancandone ancora  $1''.$  35 cent. le quali avrebbero fatto diminuire di più l' obbliquità. Sicchè sottraendo . . . . .

o. o. 1. 35

farà l' obbliquità per la prima riduzione di . . . . .

$23^{\circ}. 28'. 8''.$  11 cent.

L' equazione del perigeo lunare additiva di . . . . .

1. 26

Onde per la seconda riduzione farà

$23^{\circ}. 28'. 9''.$  37 cent.

Dal 1764 al 1775 sono scorsi anni 11, in cui l' obbliquità è diminuita per il periodo secolare di . . . . .

3. 78

Onde aggiungendole farebbe l' obbliquità del 1775 per le tre riduzioni di

$23^{\circ}. 28'. 13''.$  75 cent.

Ma nel 1764 per le due riduzioni era di . . . . .

$23. 28. 32.$  99

Sicchè detraendo dalla medesima . . . . .

23. 28. 13. 15

resterà la nutazione di questa combinazione di . . . . .

o. o. 19'' 84 cent.



## C O M B I N A Z I O N E III

*Delle osservazioni del 1775 con quelle del  
corrente anno 1782.*

Nel 1782 l'obliquità osservata fu di	23°.	28'.	24 <sup>u</sup> .	30 cent.
Per ridurla al principio dell' Ariete				
fi aggiunga . . . . .	o.	o.	o.	24
È per ridurla alla distanza media lu-				
nare fi aggiunga l' equazione . . . . .	o.	o.	1.	25
Sarà l'obliquità colla doppia riduzio-				
ne di . . . . .	23.	28.	25.	80
Dal 1775 al 1782 sono corsi anni 7,				
in cui il moto periodico porta additivi	o.	o.	2.	40
Onde l'obliquità del 1782 colle tre				
riduzioni farà di . . . . .	23.	28.	28.	20
Ma quella del 1775 per le due ridu-				
zioni era di . . . . .	23.	28.	9.	31
E così la nutazione per questa combi-				
nazione farà di . . . . .	o.	o.	18 <sup>u</sup> .	89 cent.

## C O M B I N A Z I O N E IV

*Delle osservazioni del 1756 con quelle del 1782.*

Obliquità del 1782 colle due ridu-				
zioni . . . . .	23°.	28'.	25 <sup>u</sup> .	80 cent.
Obliquità del 1756 colle due ridu-				
zioni . . . . .	23.	28.	16.	50
Loro differenza . . . . .	o.	o.	9 <sup>u</sup> .	30
In anni 26 dal 1756 al 1782 la di-				
minuzione secolare è stata di 8 <sup>u</sup> . 95 cent.				
secondo la solita ragione di 32 <sup>u</sup> . 42 per				
secolo. Onde supplendo . . . . .	o.	o.	8.	95
ne risulterà la media nutazione di	o.	o.	18 <sup>u</sup> .	25 cent.

*Recapitolazione delle nutazioni per le IV Combinazioni.*

Nutazione ridotta per la Combinazione I.	19". 24 cent.
Per la Combinazione II.	19. 84
Per la Combinazione III.	18. 89
Per la Combinazione IV.	18. 25

Somma delle nutazioni . . . . . 76. 22 cent.

Tra le quali la media è di . . . . . 19. 05  $\frac{1}{2}$  cent.

Ora tal media nutazione si accorda colle altre più difcrepanti in meno di 1".

La più discorde per eccello è la II di 19". 84, e la differenza è di 0". 78 centesime.

La più discorde per difetto è la quarta di 18". 25, e la loro differenza è di 0". 80 cent.

L' uniformità di tali risultati, che dipendono da molti elementi, ci fa conoscere la loro precisione.

Sarebbe maggiore la discordanza di una coll' altra, se non s' introducesse l' elemento del lunar perigeo. Onde questo vien comprovato col fatto medesimo.

Forse questo nuovo elemento combinato colla nutazione, che senza la frazione di  $5\frac{1}{2}$  centesime può farsi in avvenire di 19", cioè 1" di più del *Bradlejo*, metterà un accordo maggiore, non solo tra le osservazioni Braldejane, ma ancora tra le altre assaissime di altri Astronomi. Ma per decidere vi vogliono nuove esattissime osservazioni delle stelle fisse fatte con grandi settori di 14, e di 16 piedi. Intanto però io fissero la nutazione di 19", e con essa continuerò gli altri calcoli, che occorreranno.

## ARTICOLO IX.

*Consequenze, che si deducono dal vero valore della nutazione.*

Confrontando così bene tra di loro le quattro Combinazioni dalle quali è stata dedotta la nutazione totale, potremo con sicurezza seguire da ora innanzi la media nutazione già

dedotta di . . . . . 19. 05,  
 giacchè essa non differisce da' limiti delle estreme, e più dif-  
 cordanti, se non che di 0. 80 cent. che è una assai piccola  
 frazione. E per secondare frazioni più semplici, essa potrà fif-  
 farli di . . . . . 19. 00.

Prima di far passaggio alle conseguenze della nutazione, già determinata, piacemi di sciogliere una difficoltà, che farli potrebbe contro il metodo delle riduzioni, che è convenuto fare per ottenere le intere nutazioni. Poichè potrebbe opporsi, che tali riduzioni suppongono la nutazione totale di 20, onde esse suppongono fissato quel valore, che per mezzo di esse va rintracciandosi. Ma sparirà tal obbietto agli occhi di coloro, che rifletteranno intorno al valore di tali riduzioni, il quale è così piccolo, che l' errore, che potrebbe nascere di 1", o nell' ipotesi di 9" secondo il *Bradlejo*, o nella mia di 10", non può mai generare una differenza sensibile.

Sia per primo esempio la Combinazione II, nella quale è stata calcolata la nutazione australe di 8". 65 centesime, e così la sua equazione del nodo di 1". 35 cent. Se invece del seno totale espressò per 10" valesse quello di 9", altro non dee farsi, se non che diminuire detta equazione nella ragione del 10:9, ed allora l' equazione farebbe di 1". 215 millesime, che differisce dalla prima di sole 145 millesime.

Minore farà la differenza nella Combinazione I, in cui l' equazione del nodo per il 1756 è di 1". 00. Onde diminuendo ancor qui nella ragione del 10:9 otterremo 0". 90 cent. con differenza di un decimo di secondo.

E molto minore ancora farà la riduzione del nodo per il 1782 nella Combinazione III, in cui l' equazione è stata di 0. 24 centesime. Onde fatta la riduzione farà di 0". 216 millesime.

Indi è che per tal tenuità delle differenze, che nascono dalle due ipotesi di 10', e di 9", e molto più di 9"  $\frac{1}{2}$ , il presente metodo non può mai dirli difettofo.

Che se, essendo ora più precisamente fissato il vero valore della nutazione, volessero con esso rifarsi i computi delle quattro Combinazioni, sparirebbero così quelle piccole diffè-

renze , che si osservano nel primo calcolo , come si rileverà dalle conseguenze , che ne risultano .

Ed appunto la prima farà , che le nutazioni boreali , ed australi tanto in declinazione , che in latitudine faranno in avvenire ne' medesimi punti del nodo ascendente lunare alquanto maggiori dell' ipotesi Bradlejana , e minori della mia adoperata nella Dissertazione del 1775 . Essendo adunque nella mia Tavola del 1775 adoperata l' ipotesi di 10" , di nutazione boreale , ed australe , converrà ridurre tutte le obblighità vere dal 1775 al 1801 colla nuova , e più precisa ipotesi di 9" . 50 cent. Sicchè lasciando tutte le obblighità medie tali quali sono state in detta Tavola registrate , vi occorre la sola riduzione delle obblighità vere .

Seconda conseguenza . Dovendosi inoltre introdurre la nuova Teoria del perigeo lunare , l' obblighità , ridotta per la prima riduzione , va modificata per mezzo della posizione del lunar perigeo , secondo la legge da me divisata nella Teoria .

Terza conseguenza . Combinando insieme le due riferite riduzioni , ne nasce una Tavola delle obblighità vere corrette dal 1775 al 1802 , ed è la seguente

## N U O V A T A V O L A

*Delle obliquità medie, e vere dell' eclittica dal 1775 fino al 1802, calcolata sull' epoca del corrente anno 1782 sull' ipotesi della nutazione de' 19", sull' elemento del lunar perigeo, e della sua massima equazione di 2", e sulla latitudine Fiorentina di 43°. 46". 47".*

I	II	III	IV	V	VI	VII
Anni dal 21 Giugno	Obliquità medie dell' eclittica.	Equazione additiva, o sottrattiva del nodo lunare.	Longitudine del nodo ascendente lunare	Longitudine del perigeo lunare	Equazione del perigeo lunare	Obliquità vera ridotta dell' eclittica
	Gradi M. M'. cent.	Min". Cent.	Segni Gra. M. M'.	Segni Gra. M. M'.	Secondi Cent.	Gra M. M'. Cent.
1775	23. 28. 11. 91	8. 13 fott.	IV. 27. 41. 00	X. 7. 22. 39	1". 26. add.	23. 28. 2. 52
1776	11. 56	5. 93	IV. 8. 21. 17	XI. 18. 9. 11	0. 11. add.	5. 52
1777	11. 22	3. 08	III. 19. 1. 34	O. 28. 49. 1	0. 46. fott.	8. 60
1778	10. 87	0. 48 add.	II. 21. 41. 51	II. 9. 28. 52	1. 74. add.	13. 09
1779	10. 53	3. 18	II. 10. 22. 8	III. 20. 8. 42	1. 78. add.	15. 49
1780	10. 19	5. 96	I. 21. 2. 25	V. 0. 55. 14	0. 49. add.	16. 64
1781	9. 84	8. 46	I. 1. 42. 42	VI. 11. 35. 4	0. 09. fott.	18. 21
1782	23. 28. 9. 50	9. 27	O. 12. 22. 00	VII. 22. 14. 5	1. 25. fott.	23. 28. 17. 52
1783	9. 15	9. 52	XI. 23. 3. 16	IX. 2. 54. 45	1. 99. fott.	16. 68
1784	8. 81	8. 51	XI. 3. 43. 33	X. 13. 41. 17	1. 07. fott.	16. 25
1785	8. 46	6. 64	X. 14. 23. 50	XI. 24. 21. 7	0. 03. fott.	15. 07
1786	8. 11	4. 01	IX. 25. 14. 7	I. 5. 0. 58	0. 65. add.	23. 28. 12. 77

Anni dal 21 di Giugno	Obliquità media dell' ecclittica	Equazione additiva, o sottrattiva, o di ascendente lunare per il nodo lunare	Longitudine del perigeo lunare	Equazione del perigeo lunare	Obliquità vera ridotta dell' ecclittica	
	Gra. M'. M". Cent.	Secondi Cent.	Segni Gradi M'. M".	Secondi Cent.	Gra. M'. M". Cent.	
1787	7. 77	0. 44 add.	IX. 25. 44. 24	II. 15. 40. 48	0. 99 add.	9. 9. 70
1788	7. 42	2. 25 fott.	VIII. 16. 24. 41	III. 26. 27. 20	1. 64 fott.	6. 81
1789	7. 08	5. 14	VII. 27. 4. 58	V. 7. 7. 10	0. 33 fott.	2. 27
1790	6. 74	7. 50	VII. 7. 45. 15	VI. 17. 4. 1	0. 19 add.	23. 27. 59. 05
1791	6. 39	9. 00	VI. 18. 25. 32	VII. 28. 27. 51	1. 43 add.	55. 96
1792	6. 05	9. 49	V. 29. 5. 49	IX. 9. 13. 23	1. 96 add.	55. 60
1793	5. 71	8. 91	V. 9. 46. 6	X. 19. 53. 13	0. 86 add.	55. 94
1794	5. 37	7. 31	IV. 20. 26. 23	O. 0. 33. 4	0. 00	23. 27. 58. 06
1795	5. 02	4. 99	IV. 1. 6. 40	I. 11. 12. 54	0. 86 fott.	23. 28. 0. 89
1796	4. 68	1. 93	III. 11. 46. 57	II. 21. 59. 26	1. 95 fott.	4. 66
1797	4. 33	0. 27 add.	II. 22. 27. 14	IV. 2. 39. 16	1. 43 add.	5. 93
1798	3. 99	4. 39	II. 3. 7. 31	V. 13. 19. 7	0. 19 add.	23. 28. 8. 57
1799	3. 65	6. 84	I. 13. 47. 48	VI. 23. 58. 57	0. 30 fott.	10. 19
1800	3. 30	8. 64	O. 24. 28. 5	VIII. 4. 38. 47	1. 61 fott.	10. 33
1801	2. 96	9. 45	O. 5. 9. 0	IX. 15. 18. 37	1. 88 fott.	10. 53
1802	2. 62	9. 20	XI. 15. 49. 0	X. 25. 58. 28	0. 65 fott.	23. 28. 11. 17

*Riflessioni sulla nuova Tavola delle obliquità medie, e vere dell' ecclittica.*

La Tavola delle obliquità da me registrate alla pag. 28 della Dissertazione del 1775 va ridotta secondo le nuove osservazioni o risultati del corrente anno 1782.

Per uniformarli all' epoca di Parigi, nella seconda colonna vanno sempre detratti 6" dall' obliquità media, essendo stato filato di scemare la latitudine Fiorentina di 6" ed aumentare la Parigina di 2". Allora tanto in Firenze, che a Parigi l' epoca dell' anno presente porterà

l' obliquità di . . . . . 23°. 28'. 18"

cioè 6" di meno delle mie osservazioni, e 2"

di più delle osservazioni Parigine, secondo la

quale essa è stata di . . . . . 23. 28. 16,

come apparisce da lettera a me scritta dal Sig. de la Lande.

Sicchè incominciando la Tavola , in detto anno l' obliquità media è registrata di 23. 28. 17. 91. centesime ; e fatta la riferita detrazione farà di 23. 28. 11. 91. centesime , e così discorrendo di tutte le obliquità medie fino al 1802 , dove la Tavola finisce .

Nella terza colonna di detta Tavola è registrata l' equazione o additiva , o sottrattiva della nutazione , la quale ho calcolato secondo l' ipotesi ivi adoperata della nutazione semplice di 10". Ma è stato dimostrato nelle recenti osservazioni , che detta nutazione dee stimarsi di  $9''\frac{1}{2}$  , giacchè la nutazione composta viene di 19" con una tenue frazione , che si trascura .

Indi è che ritenendo le stesse equazioni , che solo vanno scemate nella ragione del 100 : 95 ; così otterremo l' equazione corrispondente alla nuova ipotesi di 19" , o che sia additiva , o sottrattiva .

Una nuova colonna merita la nuova Tavola per l' elemento del lunar perigeo , introdotto da me nel calcolo delle nutazioni . La sua massima equazione australe , o boreale si fa da me di 2" , e potrà sempre rettificarsi dagli Astronomi con nuove , e lunghe osservazioni .

Per tal nuova equazione bisogna riflettere primieramente , che quando il lunar perigeo ritrovasi o nel principio dell' Ariete , o in quello della Libra , la sua equazione è nulla , giacchè allora operano le medie distanze lunari , che non aumentano , nè diminuiscono le nutazioni .

In secondo luogo , che quando il detto perigeo trovasi nel principio del Cancro , allora l' equazione è massima boreale , giacchè alla minima distanza lunare dalla terra dee corrispondere la massima sua energia , ed alla massima distanza la minima azione .

Che similmente , quando il perigeo trovasi nel principio del Capricorno , allora la nutazione australe è massima , e la boreale è minima . Indi è , che in tali due casi compete l' equazione di 2" additiva , o sottrattiva . Stando il perigeo al principio del Cancro la nutazione boreale va accresciuta di 2" , e l' australe va scemata di 2" .

Stando essa al principio del Capricorno la nutazione australe va aumentata di 2" , e la boreale va scemata di 2" , secondo che trovasi la nutazione .

In generale quando la nutazione, ed il perigeo si trovano ne' segni della medesima specie, cioè o boreale o australe, amendue, allora l'equazione del perigeo è additiva all'attuale nutazione. Ma quando al contrario la nutazione, ed il perigeo si combinano in segni di specie diversa, cioè essendo la prima ne' segni boreali, il secondo trovasi ne' segni australi, e per converso, allora l'equazione del perigeo è sottrattiva alla nutazione attuale.

Tale addizione, o sottrazione va così osservata, quando trattasi di voler computare la nutazione attuale composta, cioè la nutazione, che l'Astronomo deve osservare. Mutano però i segni di additivi in sottrattivi, e per converso, quando trattasi di dedurre le nutazioni totali dalle nutazioni immediatamente osservate, come è stato praticato nelle mie IV Combinazioni, da cui è stata dedotta la nutazione del polo.

Quando il lunar perigeo fosse lontano da' quattro punti indicati, cioè da' due punti equinoziali, e da' due solstiziali, allora le equazioni sono in ragion duplicata de' complementi de' seni di quegli archi, che o a destra, o a sinistra si trovano lontani da' due punti solstiziali. Così se in un dato tempo il lunar perigeo si trovasse a segni III gradi 20. dell' Ariete, allora esso farebbe discosto gradi 20 dal 0 del Cancro. Il suo complemento farà dunque di gradi 70. Onde facciasi, come il quadrato del seno totale al quadrato del seno di gradi 70, così il 2", che è l'equazione massima, al quarto termine, che farà l'equazione del perigeo lunare,

La stessa equazione farà, se il perigeo se ne scostasse dalla parte opposta, come accaderebbe, quando si trovasse a II segni 10°, , poichè allora si scosterebbe dal Cancro gradi 26, come dianzi, e così dee ricercarsi l'equazione con gradi 70, come prima. Se tal equazione si combina colla nutazione boreale, che è della stessa specie, essa farà additiva; ma incontrandosi colla nutazione australe, divien sottrattiva, come è stato già rilevato.

Tali sono le leggi colle quali è stata calcolata la colonna IV della nuova Tavola, notando in essa solamente il valore dell'equazione del perigeo. La specie di additiva, o sottrattiva dipende dalle due susseguenti colonne, cioè V, e VI: nella V vien registrata la longitudine del nodo ascendente lunare,



nare , che è la medesima della Tavola del 1775 , ed aggiungendovi 90°, deducetfi la nutazione . Nella festa poi si colloca la longitudine del lunar perigeo .

Paragonando insieme le longitudini della colonna V colla giunta di gradi 90 con quella della VI , se esse sono della stessa specie , l' equazione del perigeo si aggiunge all' equazione del nodo , e se sono di specie diversa , si sottrae .

L' ultima colonna , cioè la VII della nuova Tavola , contiene l' obliquità attuale dell' ecclittica totalmente ridotta , tal quale devevi osservare dagli Astronomi nell' anno che corre . Tutti questi precetti si renderanno più chiari negli esempj , che ne addurrò .

E S E M P I O I

Per l' anno 1775.

Essendo questo l' anno primo della Tavola , in esso noteremo l' obliquità media corretta di 23°. 28'. 11". 91 cent. colla sottrazione di 6".

L' equazione sottrattiva del nodo è di 8". 45 cent. che va diminuita nella ragione del 100 : 95 . Onde essa sarà di 8". 13 centesime . L' apogeo lunare nel Gennajo del 1775 era a 3°. 18°. 12'. Onde il suo perigeo era a 9°. 18°. 12'. Il suo moto fino al 21 Giugno è stato secondo le Tavole di 19°. 9'. Onde il lunar perigeo il dì medesimo era a 10°. 7°. 21'. Cioè esso era ne' segni australi ; e trovavasi gradi 37°. 21' distante dal Capricorno . Il complemento era dunque a 54°. 49', il cui seno è di 7949 al raggio di 10000 . Onde se facciasi , come il quadrato del seno totale al quadrato di 7949 , così 2' al quarto termine , questo ci darà l' equazione del perigeo , che sarà di 1". 26 centesime .

La longitudine del nodo in detto anno era di IV. 27. 41 ; a cui aggiungendo 3 segni la nutazione trovasi a VII. 27. 41 . cioè australe . Onde essendo australe pure il perigeo , la sua equazione sarà additiva .

Onde sarà la nutazione australe per il nodo . . . . .	8". 13 cent.
Equazione del perigeo . . . . .	1. 26
Somma la nutazione . . . . .	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black; margin-bottom: 5px;"/> 9. 39

che va detratta dalla media obbliquità di 23. 28. 11. 91.

Onde verrà l'obbliquità attuale osservabile di . . . . . 23°. 28'. 2". 52 cent.  
 Essà era nella Tavola del 1775 di 9". 46 . Ma detratti 6" per la correzione della latitudine, e di più 1". 26 per il perigeo, e ridotta l'equazione diminuendola, come 100:95, ne viene la nuova obbliquità di . . 28. 28. 2. 52 cent.

E S E M P I O II

*Per l' anno corrente 1782.*

Per paragonare le osservazioni dell' anno corrente al calcolo della nuova Tavola, avremo l'obbliquità media di esso di . . . . . 23°. 28'. 15". 50 cent. come alla pag. 82 della citata Dissertazione, e detratti 6", sono . . . . . 9. 50

In essa l'equazione del nodo è di 9". 76 cent. che va scemata nella ragione del 100:95, come è stato rilevato, perciò essa farà di 9". 27 centesime.

Per passare all'equazione del perigeo, la sua longitudine al principio di Gennajo dell' anno corrente era a . . . . . VII. 3°. 5'.  
 Il suo moto fino al 21 Giugno di . . . . . 19. 9'.

Onde la sua longitudine a dì 21 era . . . VII°. 22°. 14'.

Si deve cercare il seno di 52°. 14', dal cui quadrato dipende l'equazione del perigeo, che farà di 1". 25 centesime. Essendo adunque la nutazione boreale, e la longitudine del perigeo australe, la sua equazione va detratta da . . . . . 9. 27

1. 25

Onde l'equazione ridotta farà di . 8. 02,

la quale essendo aggiunta all' obbliquità media . . . . . , 23. 28. 15. 50,

ci palesa l'obbliquità attuale del 1782 di 23. 28. 23. 52

Ma essa è stata da me osservata di . . 23. 28. 24. 31.

Onde la differenza tra'l calcolo e l'of-

servazione farà di . . . . . o. 0". 79 cent.

Colla detrazione solita de' 6", essa deve registrarli nella nuova Tavola di 23. 28. 17. 52, che differisce di 1". 32 dall'obliquità osservata in Parigi.

Quella della mia prima Tavola di 23°. 28'. 17". 52 cent. riesce alquanto eccessiva, perchè in essa manca l'equazione del perigeo, e perchè ancora in essa si suppone la semplice nutazione di 10", e non già di 9"½, come nuovamente è stata dimostrata.

A R T I C O L O X.

*Della maniera di far corrispondere le attuali obliquità dell'eclittica osservate in Firenze colle analoghe osservazioni di Parigi.*

Fino dalle mie prime osservazioni solstiziali del 1756, il Sig. Ab. la *Caille* mi rese avvisato, che tra le sue e le mie osservazioni sull'obliquità dell'eclittica vi era una differenza di 5" in 6", come rilevasi da una sua cortesissima lettera scrittami immediatamente dopo l'edizione del mio *Gnomone*. Avendolo egli letto, e considerato, si compiacque della sua gentile approvazione, come di tutte le osservazioni, e risultati, e soltanto mi accennò, che per far concordare insieme le osservazioni Parigine e Fiorentine bastava detrarre 6" dalla latitudine Fiorentina, fissata in quel volume di . . . . . 43°. 46'. 53"

Se dunque facciasi una tal detrazione, essa resta di . . . . . 43. 46. 47

Ora se da essa si detraggano . . . . . 20°. 18' 28". 69 cent. resterà l'obliquità dell'eclittica dell'anno corrente di . . . . . 23°. 28'. 18",

tralasciando la piccola frazione. Ma è stato già avvertito, che nel solstizio di quest'anno l'obliquità osservata dal Sig. de la *Lande* con ogni maggior diligenza è stata di . . . . . 23°. 28'. 16".

Onde la differenza di 2", che resta, è così tenue, che in avvenire le osservazioni Parigine e Fiorentine potranno dirsi concordi.

Ma per le nuove osservazioni, e riflessi fatti dallo stesso chiarissimo Astronomo nel suo quarto volume dell' Astronomia il periodo secolare della diminuzione dell' obbliquità è stato dedotto di  $33'' \frac{1}{2}$ , che pochissimo differisce dal mio di  $34'' . 42$  centesime. Dall' uniformità adunque tanto del periodo secolare, quanto dell' epoca dell' obbliquità del corrente anno 1782 ne dovrà nascere una perfetta corrispondenza delle future obbliquità tanto medie, che vere, sì nell' Efemeridi Parigine, che nella mia nuova Tavola. E tal corrispondenza sarebbe ancora maggiore, se nelle annuali obbliquità dell' ecclittica delle future Efemeridi Francesi vi si introducessè l' elemento del lunar perigeo, che può cagionare una nuova discrepanza di  $2''$ , o additivi, o sottrattivi.

Ed affinchè questa terza riduzione apparisca ancora nella mia Tavola, in essa oltre la terza colonna delle obbliquità vere ridotte colle prime due riduzioni, vi ho ancora soggiunta la quarta, in cui è introdotta questa terza riduzione. Dalla terza alla quarta colonna non vi è altro divario, che di soli  $6''$ , che sono stati sottratti dalla terza colonna per la corrispondenza delle osservazioni Parigine, e Fiorentine.

## ARTICOLO XI.

### *Tavole delle nutazioni, e degli elementi, che si suppongono*

Essendo stato più precisamente determinato il valore della nutazione colle quattro combinazioni discusse nell' articolo VIII, le nutazioni corrispondenti a' diversi punti del nodo lunare riesciranno alquanto maggiori delle Bradlejane, e minori delle mie, che sono state computate nella Dissertazione I colla figura dell' analemma. Veramente era assai comodo il valore di  $10''$  ivi adoperato in quella costruzione. Poichè in tale ipotesi le nutazioni venivano a corrispondere a' seni de' complementi in diversi quadranti del nodo lunare ascendente; ladove facendo il raggio di  $9''$ , come il Bradlejo, di  $9'' . 50$  centesime, com' è stato da me dedotto, i seni delle Tavole Trigonometriche non possono più rappresentare le nutazioni senza una correzione.

Vero è , che questa è semplicissima . Poichè dato il seno dell' arco , che corrisponde ad una data posizione del nodo , altro non dee farsi , se non che diminuire lo stesso seno nella ragione del  $10 : 9\frac{1}{2}$  cosa assai facile . Adunque con tal riduzione è stata formata la Tavola I , nella quale , come ognuno vede , le nutazioni sono le medesime ne' segni boreali , e negli australi , colla sola differenza , che esse ne' primi sono additive al polo medio , e ne' secondi sono sottrattive . Indi è , che ne' titoli della Tavola si mettono insieme l' Ariete e la Libra , il Toro e lo Scorpione ecc. Poichè la nutazione è la medesima , ma per l' Ariete è additiva , e per la Libra è sottrattiva . E così dicasi degli altri segni , come leggesi ne' medesimi titoli .

## TAVOLA I.

*Della nutazione dell' Asse terrestre secondo le diverse longitudini del nodo ascendente lunare, nell' ipotesi, che la semplice nutazione australe, o boreale sia di  $9''\frac{1}{3}$ .*

Gradi della longitudine del nodo lunare.	Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.	
	O.	VI.	I.	VII.	II.	VIII.	III.	IX.	IV.	X.	V.	XI.
	Bor.	Auß.	Bor.	Auß.	Bor.	Auß.	Auß.	Bor.	Auß.	Bor.	Auß.	Bor.
1°.	9".	498	8".	141	4".	607	0".	161	4".	892	8".	303
2	9.	494	8.	056	4.	455	0.	332	5.	035	8.	388
3	9.	487	7.	961	4.	313	0.	504	5.	168	8.	464
4	9.	471	7.	875	4.	161	0.	665	5.	313	8.	531
5	9.	462	7.	780	4.	000	0.	826	5.	443	8.	637
6	9.	443	7.	965	3.	866	0.	988	5.	591	8.	693
7	9.	434	7.	581	3.	705	1.	159	5.	719	5.	740
8	9.	405	7.	486	3.	553	1.	310	5.	842	5.	806
9	9.	376	7.	381	3.	401	1.	482	5.	975	8.	863
10	9.	348	7.	277	3.	249	1.	643	6.	108	8.	910
11	9.	319	7.	163	3.	087	1.	814	6.	232	8.	977
12	9.	291	7.	058	2.	935	1.	976	6.	355	9.	034
13	9.	253	6.	945	2.	764	2.	137	6.	479	9.	082
14	9.	215	6.	830	2.	612	2.	299	6.	593	9.	129
15	9.	177	6.	717	2.	450	2.	450	6.	717	9.	177
16	9.	129	6.	593	2.	299	2.	612	6.	830	9.	215
17	9.	082	6.	479	2.	137	2.	764	7.	945	9.	253
18	9.	034	6.	355	1.	976	2.	935	7.	058	9.	291
19	8.	977	6.	232	1.	814	3.	087	7.	163	9.	319
20	8.	910	6.	108	1.	643	3.	249	7.	277	9.	348
21	8.	863	5.	975	1.	482	3.	401	7.	381	9.	376
22	8.	806	5.	842	1.	310	3.	553	7.	486	9.	405
23	8.	740	5.	719	1.	159	3.	705	7.	581	9.	434
24	8.	693	5.	591	0.	988	3.	866	7.	965	9.	443
25	8.	637	5.	443	0.	826	4.	009	7.	780	9.	462
26	8.	531	5.	313	0.	665	4.	161	7.	875	9.	471
27	8.	464	5.	168	0.	504	4.	313	7.	961	9.	487
28	8.	388	5.	035	0.	332	4.	455	8.	056	9.	494
29	8.	303	4.	892	0.	161	4.	607	8.	141	9.	498
30	8.	227	4.	750	0.	000	4.	750	8.	227	9.	500

Per intelligenza della presente Tavola convien ridursi a memoria, che data la longitudine del nodo ascendente lunare, per trovare nel cerchietto delle nutazioni, ovvero nell' analemma da me descritto nella Dissertazione del 1775, conviene a detta longitudine aggiungere gradi 90, o siano segni III, ed a tal punto, o punti corrisponde l' arco, ed il seno della nutazione cercata. Così per esempio siano dati nella Tavola segni VI, gradi 10 longitudine del nodo lunare colla giunta de' segni tre, avremo segni IX, gradi 10. Onde la linea della nutazione si troverà gradi 10 dopo il Capricorno, il cui complemento è di gradi 80. Diminuendo il seno di detti gradi nella ragione del 100: 95, rinverràli la nutazione di 9". 34 cent., e tal nutazione è australe, perchè trovasi ne' segni australi. Perciò nella Tavola a segni VI, gradi 10. s' incontra la riferita nutazione col titolo di australe, come esser deve.

L' ipotesi, nella quale procede la presente Tavola, si è che la nutazione composta sia di 19", come rilevati dalle quattro Combinazioni. E così la nutazione semplice farà di 9  $\frac{1}{2}$ ", sicchè il seno totale farà al seno dell' arco dato, come il 100 al 95. E con tal analogia sono state conteggiate tutte le nutazioni della presente Tavola.

Dato che sia il segno, ed il grado, nel quale trovasi il nodo ascendente lunare, altro non dee farsi, che pigliare il segno, o segni nella colonna orizzontale in testa della Tavola, e poi nella prima colonna verticale appuntare il numero de' gradi. Dove le due colonne corrispondenti s' incontreranno insieme, ivi si troverà registrata la nutazione, che si domanda. Così domandisi la nutazione competente a segni V gradi 17. I segni V sono nell' ultima colonna coll' indicazione di *australe*. I gradi 17 s' incontrano nella prima colonna verticale; dove la linea del 17° incontra colla linea de' segni VI, si troverà la nutazione di 9". 25 centesime. E questa farà la nutazione australe competente alla data longitudine del nodo. Questa disposizione di Tavola mi sembra più semplice di altre simili, giacchè non occorre qui aver l' avvertenza di pigliare ora i seni degli archi, ora i seni de' loro complementi. In questa Tavola tutto è racchiuso, senza fare una tal distinzione.

Essendo uguali le nutazioni australi, o boreali ne' punti corrispondenti, esse nutazioni nella Tavola ricorrono due volte, e ciò appunto porta il vantaggio di non dover badare a' complementi, o a' seni diretti.

Non mi son curato di calcolare le nutazioni più minutamente, che a gradi, perchè colle proporzionali tra un grado all' altro si giunge a tutta l' esattezza, che mai in tal materia desiderali.

Che se io nelle frazioni delle nutazioni non solo ho riguardato le parti centesime, ma vi ho ancora aggiunte le millesime, questo è stato appunto per ottenere le parti proporzionali con tutta la precisione. Sono state pur necessarie le parti millesime per distinguere le nutazioni de' primi, e degli ultimi gradi del quadrante, le quali differiscono meno di una centesima, e perciò senza le parti millesime farebbero tornate uguali tra di loro. Il che non può stare.

Questa adunque sarà la Tavola I, per ottenere le nutazioni corrispondenti alle diverse longitudini del nodo ascendente lunare, senza la riduzione già accennata del perigeo lunare, il quale nelle minori distanze lunari aumenta le nutazioni, e nelle maggiori le diminuisce di una maniera, che a me sembra sensibile.

Volendo poi introdurne l' elemento del lunar perigeo, la cui azione non è affatto insensibile, ma fa variare la nutazione almeno di 2" per parte, cioè sì dalla parte boreale, che dall' australe, alla prima Tavola farà bene di aggiungere la seconda, per l' equazione propria del detto perigeo.

La massima equazione, tanto boreale, che australe li suppone di 2", benchè essa possa farli qualche cosa di più. Non dimeno essendo piccola la frazione, ho giudicato di tralasciarla, e ciò tanto più, quantochè le azioni momentanee lunari vanno riportate al centro de' momenti, tanto nel semidiametro superiore dell' equatore, quanto nell' inferiore. Questi due centri sono tra loro lontani un semidiametro, ed  $\frac{1}{7}$  di esso. Il che fa diminuire l' azion lunare rispetto a quella, che fosse riferita a' due punti estremi del diametro dell' equatore. Comunque siasi, io stimo, che l' equazione massima del perigeo possa essere assai prossima a 2", e così la suppongo nella Tavola. In essa ancora le diverse equazioni sono le medesime



medesime per i segni boreali, ed australi del lunar perigeo, e soltanto occorre la differenza de' segni; poichè se la nutazione, ed il perigeo si trovano ne' segni della medesima specie, cioè amendue boreali, o amendue australi, l'equazione farà additiva. Ma trovandosi la nutazione, ed il perigeo ne' segni di diversa specie, cioè uno ne' segni boreali, e l'altro negli australi, ovvero al contrario, allora l'equazione del perigeo farà sottrattiva dalla nutazione o boreale, od australe.

Ancora nella presente Tavola dobbiamo prima determinare il seno del cerchio, che corrisponde alla pressione del perigeo, e poi diminuire tal seno nella ragione del 10:2; così farà

## TAVOLA II.

Dell' equazione delle nutazioni per l' elemento del lunar perigeo, supponendo l' equazione massima di 2 secondi.

Segni O, e VI. Gradi.	Equazione del perigeo Min". Mill.	I. e VII. Equazione Min". Mill.	II. e VIII. Equazione Min". Mill.	III. e IX. Equazione Min". Mill.	IV. e X. Equazione Min". Mill.	V. e XI. Equazione Min". Mill.
0.	0". 000					
1	0. 001	0. 530	I. 530	2. 000	I. 500	0. 499
2	0. 002	0. 561	I. 559	I. 999	I. 469	0. 470
3	0. 005	0. 593	I. 587	I. 997	I. 438	0. 440
4	0. 009	0. 625	I. 615	I. 994	I. 406	0. 412
5	0. 015	0. 657	I. 642	I. 990	I. 374	0. 384
6	0. 021	0. 690	I. 669	I. 984	I. 341	0. 357
7	0. 029	0. 724	I. 695	I. 978	I. 309	0. 330
8	0. 038	0. 757	I. 719	I. 970	I. 275	0. 305
9	0. 048	0. 791	I. 743	I. 961	I. 242	0. 280
10	0. 058	0. 826	I. 765	I. 951	I. 208	0. 256
11	0. 072	0. 860	I. 787	I. 939	I. 173	0. 233
12	0. 090	0. 895	I. 809	I. 927	I. 139	0. 211
13	0. 110	0. 929	I. 828	I. 913	I. 104	0. 190
14	0. 117	0. 964	I. 848	I. 896	I. 070	0. 170
15	0. 134	0. 999	I. 870	I. 883	I. 034	0. 151
16	0. 151	I. 034	I. 883	I. 870	0. 999	0. 134
17	0. 170	I. 070	I. 896	I. 848	0. 964	0. 117
18	0. 190	I. 104	I. 913	I. 828	0. 929	0. 110
19	0. 211	I. 139	I. 927	I. 809	0. 895	0. 090
20	0. 233	I. 173	I. 939	I. 787	0. 860	2. 072
21	0. 256	I. 208	I. 951	I. 765	0. 826	0. 058
22	0. 280	I. 242	I. 961	I. 743	0. 791	0. 048
23	0. 305	I. 275	I. 970	I. 719	0. 757	0. 038
24	0. 330	I. 309	I. 978	I. 695	0. 724	0. 029
25	0. 357	I. 341	I. 984	I. 669	0. 690	0. 021
26	0. 384	I. 374	I. 990	I. 642	0. 657	0. 015
27	0. 412	I. 406	I. 994	I. 615	0. 625	0. 009
28	0. 440	I. 438	I. 997	I. 587	0. 593	0. 005
29	0. 470	I. 469	I. 999	I. 559	0. 561	0. 002
30	0. 499	I. 500	2. 000	I. 530	0. 530	0. 001

La maniera di servirsi di questa Tavola è stata già accennata all' art. IX.

Nondimeno per facilità maggiore , foggiungerò , che all' equazioni di questa Tavola non ho aggiunta la circostanza di australe , o boreale , perchè essa defumesi da' medesimi segni notati in fronte della Tavola , giacchè dal segno O fino a VI , cioè dal principio di Ariete fino al principio della Libra , i segni sono boreali , e perciò boreale pur farà l' equazione del perigeo . Ed al contrario dal segno VI al XII il perigeo si troverà dalla parte australe , e così pur farà l' equazione del medesimo .

Quando poi questa equazione sia additiva , o sottrattiva dalla prima , cioè dalla nutazione del nodo , non può conoscerli dalla Tavola , ma combinando insieme la specie delle due equazioni ; se esse siano amendue della stessa specie , cioè amendue australi , o amendue boreali , allora farà segno , che l' equazione del perigeo farà additiva all' equazione del nodo : e quando al contrario la prima nutazione sia ne' segni diversi dalla seconda , allora farà indizio , che l' equazione del perigeo farà sottrattiva a quella del nodo , cioè alla prima , e principal nutazione .

Quando poi tal nutazione farà corretta coll' equazione o additiva o sottrattiva del perigeo , allora essa così corretta deve o aggiungersi , o sottrarsi dall' obliquità media dell' ecclittica . Bisogna adunque attentamente considerare , che l' equazione del perigeo è fatta per ridurre quella del nodo , ma questa così ridotta deve avere i soliti titoli di additiva , o sottrattiva della media obliquità . Si fa , che è additiva , quando la prima nutazione cade ne' segni boreali , e che è sottrattiva , quando essa trovasi ne' segni australi .

Ancora in questa equazione vi ho computate le parti millesime , non perchè possa giungersi a tanta sottigliezza , ma per poter distinguere le equazioni de' gradi prossimi a segni III , e IX , i quali gradi senza le millesime farebbero di 1. 99 dal primo grado fino al quinto .

Suppongo in questa Tavola la massima equazione di 2" , tanto australe , che boreale . Onde nella lor somma farebbe un divario di 4" dalla massima alla minima distanza lunare . E' stato già avvertito , ma qui convien rammentarlo , che in re-

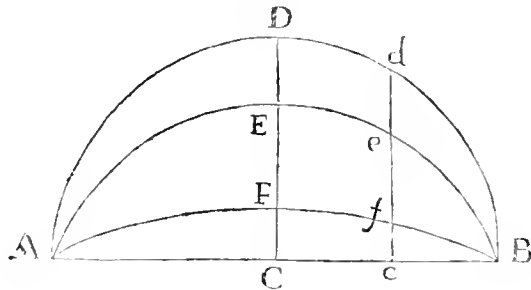
altà il calcolo somministra una frazione di più . Essa però è stata tralasciata per non esser considerabile . Vi farà sempre modo di meglio rettificare tal massima equazione .

Intanto però con essa si spiegano alcune differenze che si osservano nelle stelle fisse, alcune delle quali non si soggettano accuratamente alle leggi della prima nutazione .

Inoltre non lascierò di avvertire, che le equazioni son calcolate col Teorema della ragion duplicata de' seni delle longitudini del perigeo, e non già nella ragion semplice, perchè così è dimostrato in un particolar Teorema .

Se ho scelto piuttosto il perigeo, che l'apogeo, ciò ho fatto per avere sempre più in vista la cagione degl' incrementi della nutazione . Vero è che poteva ancora adoperarli l'apogeo lunare, mutando i titoli delle addizioni, o sottrazioni .

Merita ancora, che si aggiunga per facilità delle due Tavole, che esse potrebbero formarli con una semplicissima costruzione . Poichè sia, nella figura,  $ADB$  un mezzo cerchio, il



qual sia descritto con un raggio di pollici 6 .

Col semidiametro  $CD$ , e colla proporzione, che passa tra  $10$ , e  $9 \frac{1}{2}$  si trovi la quarta proporzionale  $CE$ , e collo stesso semiasse maggiore  $CB$ , e minore  $CE$  descrivasi l'ellissi  $AEEB$  .

Similmente facciasi  $CF =$  a parti 2 del raggio  $CD$  supposto di parti  $10$ , e col semiasse minore  $CF$  descrivasi la seconda ellissi  $AFfB$ , dico, che la prima ellissi farà la scala delle nutazioni, e la seconda farà la scala delle equazioni del perigeo lunare .

Poichè sia per il nodo lunare il punto  $d$  lontano gradi  $90$

dallo stesso nodo . Per la natura dell' ellissi farà  $DC$  :  $FC = dc : fc$  . Onde la  $ec$  farà uguale al valore della nutazione per il nodo lunare .

Per la stessa ragione farà  $DC$  :  $FC = dc : fc$  . Onde farà  $fc$  l' equazione del perigeo . Più esattamente farà  $fc$  quadrato .

Essendo adunque il raggio del mezzo cerchio di pollici 6, le semiordinate  $ec$ ,  $fc$  faranno di tal grandezza, che potranno determinarsi con precisione, non solo i secondi della nutazione, ed equazione del perigeo, ma eziandio le loro parti decime, ed ancora ventunesime, che è bastantissimo per l' uso Astronomico di quelle due semiordinate . Ma volendole conteggiare col calcolo, si otterranno le parti centesime, e le millesime, quando occorresse .

Oltrepasserò ora alla terza Tavola degli elementi, la quale agli Astronomi spesso occorrerà . E' stata già una simil Tavola calcolata nel Coroll. IV. Prop. XV. dell' Art. III, ma allora in essa supponevasi la nutazione totale di  $20''$ , la quale ora con più combinazioni essendo stata ridotta a  $19''$  si modificano diversamente tutti quegli elementi, e perciò conviene riconteggiarli secondo la più certa, e più precisa nutazione . Formato adunque il calcolo farà

## T A V O L A III.

*Degli elementi della nutazione, e della precessione degli equinozj dedotti dalla nutazione totale di  $19''$ .*

	<i>Min.</i>	<i>Secon.</i>	<i>Cent.</i>
I. Che la nutazione australe, o boreale sia di .	9.	50	
II. Che la precessione degli equinozj per le sole forze solari sia di . . . . .	16.	09	
III. Che la precessione relativa alle sole forze lunari sia di . . . . .	34.	24	
IV. Che le forze composte fanno la media precessione degli equinozj di . . . . .	50.	33	
V. Che la minima precessione sia di . . . . .	40.	83	
VI. Che la massima sia . . . . .	59.	83	
VII. Che la proporzione delle forze lunari alle solari sia come . . . . .	34 :	16	

prossimamente, ovvero, come 342 : 160, come certamente la mostrano molti fenomeni delle maree, e come si suppone da più Autori.

Veggasi su tal proporzione la mia Dissertazione latina *De maris astu* stampata in Firenze l'anno 1755.

Detta proporzione in centesime riducesi, come 100 : 46, cioè come 5 : 2  $\frac{2}{5}$ . Ora vi sono degli Autori, che la fanno di  $\frac{2}{3}$ , come è stato avvertito. Non par verisimile l'opinione di quegli Autori, che fanno salir le forze solari a 22". e 28". Poichè o si supponga la nutazione del Bradlejo, o la mia, tali forze non arrivano a 17". M. *Simpson* la fa di 18".

Ma supponendo le forze perturbatrici solari di 22". togliendole dalla media precessione di 50". 33 cent., resterebbono le forze lunari di 28". 33, e perciò farebbono le forze solari ridotte alle parti centesime delle lunari di 78 centesime, cioè le forze solari tornerebbero pressochè  $\frac{2}{3}$  delle lunari. Ora un tal risultato è assolutamente contrario a' fenomeni delle maree osservate nelle Zizigie, e nelle quadrature, secondo i quali non si allontana la forza solare da  $\frac{2}{3}$  della lunare. E così quella, che si calcola dall'ipotesi di 22", è doppia della vera, e perciò detta ipotesi non può in alcun conto sostenersi.

Le sottilissime osservazioni di *Bradlejo* son tali, che la nutazione non può discostarsi da 18", se non che di 1", o al più 2", senza far violenza alle medesime,

Le mie numerose osservazioni solstiziali de' quattro anni citati, cioè 1756, 1764, 1775, e 1782 sono di tal natura, che il loro risultato per le quattro combinazioni calcolate non può discostarsi dal vero, che di 1", ed a mio credere, ancor meno, cioè di  $\frac{1}{2}$  secondo. Ora per far tornare le forze perturbatrici solari di 22", converrebbe ridurre la nutazione a soli 15", che troppo discordano dalla nutazione Bradlejana di 18", e dalla mia di 19". Per la qual cosa si terranno gli elementi della mia Tavola III. come prossimamente veri, mettendosi con essi un accordo tra le osservazioni Bradlejane, tra le mie, tra' fenomeni delle maree, e tra le nutazioni dell'asse terrestre immediatamente osservate.

## A R T I C O L O XII.

*Della teoria della densità de' pianeti in ordine al periodo secolare dell' obliquità dell' ecclittica.*

Con tutte le lunghissime osservazioni fatte sul periodo delle obliquità dell' ecclittica , per le quali essò deducesi molto minore della comune opinione , vi sono nondimeno degli Astronomi , che sempre oppongono il valore di quel periodo , che è fondato sulla teoria delle forze de' pianeti , che son quelle , che facendo retrocedere il nodo tendono a diminuire l' obliquità . E perchè appresso di essi più vale la forza della teoria , che la precisione , il consenso , ed il merito di tante osservazioni , convien finalmente esaminare , se realmente la teoria sia così fondata da attenderne tutta la possibil certezza in confronto ancora di osservazioni certissime . Dipende tal teoria principalmente dalla densità de' pianeti , che è quella che accresce , o scema le forze per far retrocedere il nodo dell' orbita terrestre . Tal densità in que' pianeti , che son circondati da' satelliti , deducesi dalle distanze , e tempi periodici degli stessi satelliti . Così noi la deduciamo nel globo terrestre , in Giove , ed in Saturno , i cui satelliti ci assicurano della loro gravità . Ma non avendo alcun satellite Marte , Venere , e Mercurio , noi non sappiamo , qual sia la lor densità . Si è adunque supposto , che la densità de' pianeti primarij sia in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici , e ciò perchè rilevasi che la densità della Terra è maggiore di quella di Giove , e questa è maggiore della densità di Saturno . Indi è , che si è immaginato l' esposto Teorema . Ma siccome tal Teorema include ancora la proporzione delle densità , merita di essere esaminato , se tal proporzione regna realmente ne' corpi planetarij , e se dalle ipotesi alle vere densità vi sia discrepanza notevole , per assicurarsi del Teorema . Non è difficile un tal esame ; avendo noi tre pianeti , le cui densità ci son note *aliunde* , e senza la esposta teoria essè si deducano dimostrativamente da' loro satelliti . Indi è , che tenendo ferme le tre densità della Terra , di Giove , e di Saturno potremo mettere a prova l' ipotesi , osservando , se le densità dedotte coll' ipotesi sianò almeno prossime alle vere densità , che son quelle calcolate coll' uso de' satelliti .

Di tre pianeti si possono esaminare tre combinazioni. Cioè della Terra con Giove, della Terra con Saturno, e di Saturno con Giove. Le densità di tali pianeti io le suppongo quali sono state dedotte, e calcolate dal Sig. de la Lande colla parallassi solare ritrovata di  $8''$ . 60 coll' ultimo passaggio di Venere nel 1769. E benchè vi siano degli Astronomi, che aumentino un poco più la parallassi solare, fino a  $8''$ . 80, pure un tale aumento non porta alcun sensibile divario nella presente ricerca.

### PRIMA COMBINAZIONE

#### *Della Terra con Giove.*

Moto periodico della Terra, giorni 365, ore 6, cioè 365. 25 centesime, la cui radice quadrata è di parti 19, 11 cent.

Moto periodico di Giove giorni 4332. 50 cent.

Radice quadrata farà prossimamente di 65. 82 cent.

Onde facciasi, come  $65.82 : 19.11 = 1$ , che è la densità della Terra al quarto termine, che farà la densità di Giove per l'ipotesi Euleriana. E tal densità, fatta la divisione, torna di 0. 2903. Or la densità di Giove, che si calcola dipendentemente da' suoi satelliti, si fa comunemente di 0. 2298, come nella *Connoissance des temps*, ed altri volumi. Questa è assai prossima a 0. 23. Indi è, che la vera densità a quella dedotta coll' ipotesi Euleriana sta, come il 23 : 29, che è una differenza non disprezzabile, giacchè essendo essa di parti 5, rispetto alle parti 23, trovasi tra la parte quarta e la quinta.

### SECONDA COMBINAZIONE

#### *Della Terra con Saturno.*

Il moto periodico di Saturno è di giorni 10579. 25, la cui radice quadra è di parti 102. 85. Onde facciasi, come  $102.85 : 19.11 = 1$  al quarto, che farà la densità di Saturno di 0. 1858. Tal densità per mezzo de' suoi satelliti si fa ordinariamente di 0. 1045. Onde la differenza della densità vera di Saturno dalla calcolata per l' ipotesi Euleriana è di



è di 0. 0813. Cioè sta la prima densità alla seconda, come il 18: 10, con discrepanza assai palpabile. Merita di essere avvertito, che tanto nella prima Combinazione, che nella seconda la densità dell' ipotesi torna molto maggiore della vera, e nella seconda Combinazione sopra parti 10 vi sono otto parti di eccesso. Se questo medesimo eccesso succeda nella densità di Venere, essa per ridurla alla vera dovrebbe diminuirsi nella ragione del 18: 10, ed allora tal densità ridotta farebbe assai prossima a quella, che esigerebbe il periodo fecolare dell' ecclittica di 34", e la teoria farebbe d' accordo colle osservazioni.

### TERZA COMBINAZIONE

#### *Di Saturno con Giove.*

Benchè questa terza Combinazione di Saturno con Giove deducasi dalle due prime, con tutto ciò farà bene calcolarla separatamente per palesar sempre più la discrepanza dell' ipotesi dalle vere densità de' pianeti.

Adunque è stata dedotta la radice quadrata del tempo periodico di Saturno, che è di parti 102. 85.

E' stata pur dedotta la radice quadrata del tempo periodico di Giove, che è di parti simili 65. 82. Onde a seconda dell' ipotesi si faccia

Come  $182.85:65.82 =$  così la densità di Giove dedotta da' moti periodici de' suoi satelliti, la quale si fa di parti 2298, al quarto termine, il quale ci si paleserà di parti 1470, ovvero avendo riguardo alla densità della Terra, che si suppone  $= 1$ , farà di 0. 1470. Ma la densità del medesimo pianeta dedotta dal tempo periodico de' suoi satelliti, cioè la sua vera densità è di 0. 1045. Onde deducesi in numeri semplici, che la densità ipotetica alla vera sia come il 14: 10 prossimamente, cioè la densità dell' ipotesi eccede la vera di 4 parti decime della medesima, discrepanza che fa vedere la falsità dell' ipotesi

Se poi al contrario dalla densità vera di Saturno vogliasi coll' uso dell' ipotesi dedurne quella di Giove, allora si farà, come  $65.82:102.85 = 1045$  al quarto termine, che ci si paleserà di parti 1629.

Ma in realtà per il moto de' satelliti di Giove la sua densità è dimostrata di 2298. Onde tra la vera densità di Giove e quella che si calcola coll' ipotesi vi è la differenza di 0. 669 , che paragonata alla vera densità è più , che la parte quarta della medesima, ed ancor questa differenza è considerabile

Indi è, che per queste combinazioni l' ipotesi delle densità in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici è così discrepante dalla verità, cioè dal paragone de' tre pianeti, che avendo satelliti, ci fanno conoscere la vera loro densità, che non solamente non può dirsi prossima alla vera, ma dee dirsi lontanissima, e perciò incapace di essere adoperata per le densità degli altri tre pianeti, che sono privi di satelliti, cioè di Mercurio, di Venere, e di Marte.

Dalla quantità del periodo secolare dell' eclittica, insieme cogli altri elementi del Problema, potremo dedurre la vera densità di Venere, benchè priva di satelliti. Ma prima veggiamo qual sarebbe la sua densità dedotta da quella di Saturno, di Giove, e della Terra.

Se si assume la densità, e tempo periodico di Saturno per rilevarne la densità di Venere, essa viene più piccola, che non si suppone da' moderni Astronomi.

Il moto periodico di Venere è di giorni 226, ore 17 prossimamente, e riducendo le ore alle parti centesime farà giorni 224 . 71 centesima prossimamente. Estrandone la radice, questa tornerà di parti 14. 99, cioè assai prossimamente 15. 00.

La radice del tempo periodico di Saturno è 102. 85, e la sua densità vera di 1045. Onde facciasi

Come  $1500 : 10285 = 1045$  al quarto termine, che farà di parti 7165, cioè . . . . . 0, 7165.  
Ma dagli Astronomi tal densità si fa di. . . . . 1. 2750.

Onde la differenza è . . . . . 0. 5505.  
Indi è, che la densità di Venere dedotta ancora coll' ipotesi, ma applicata alla vera densità di Saturno, vien tanto minore di quella, che gli Astronomi adoperano ne' loro elementi, che non si fa, come possa adoperarsi. Onde deducasi dalla densità di Giove, e facciasi, come

$15. 00 : 65. 82 = 2298$  al quarto, che farà 10085. E questa densità pure è minore di 1. 2750, che si segue dagli Astronomi.

Deducasi finalmente la stessa densità dalla densità della Terra, e perciò dovrà farsi

Come  $15.00 : 19.11 = 1000$  al quarto. E questo sarà di 1274, e confronta benissimo col calcolo de' moderni, che è di 1275. Il divario di 1 parte sarà cagionato dalle frazioni.

Non si vede per altro per qual ragione detti Astronomi invece di assumere per base del loro calcolo la vera densità di Giove, o di Saturno dedotta da' loro satelliti ( come la densità della Terra è stata dedotta dalla Luna ) si siano solamente contentati di argomentarla dalla densità terrestre.

Se l' ipotesi della ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici dee sussistere in tutto il nostro sistema circumsolare, cioè in tutti sei i pianeti primarij, perchè non considerare la densità di Giove, e di Saturno, per dedurne la densità di Venere, e soltanto prevalersi della densità terrestre?

Deducendosi adunque conseguenze sì disparate nella densità di Venere, cioè deducendosi essa coll' elemento della terrestre densità supposta come 1. di parti. . . . . 1. 2740  
deducendosi per la densità di Giove di . . . . . 1. 0085  
deducendosi colla densità di Saturno di . . . . . 0. 7165

per qual ragione di questi tre numeri si presceglie solamente il primo, e gli altri si trascurano?

Potrò io col medesimo diritto, insistendo ancor sull' ipotesi erronea, prevalermi del terzo numero, invece del primo; ed allora supponendo, che colla densità di Venere di parti 1. 2740 si deduca co' soliti Problemi il periodo secolare di 47", potrò abbassar detto periodo nella ragione del 1274: 716. Onde facendo come 1274: 716, così 47" al quarto termine, questo verrà di 26". 41 centesima. Sicchè colla stessa ipotesi, ma con assumere per elemento la vera densità di Saturno, il periodo secolare invece di 47" tornerà 26". 41, cioè meno del mio periodo.

E se si assuma la densità di Giove, e si faccia, come 12740: 1008 = 47" al quarto, esso ci tornerà di 37", cioè poco più del mio periodo, che è prossimo a 35". Ecco adunque, che coll' istessa ipotesi delle densità reciprocamente proporzionali alle radici de' tempi periodici si deduce quel periodo, che si vuole, cioè o di 47", o di 27", o di 37", secondo la diversa scelta dell' elemento del calcolo relativo alla densità de' pianeti forniti di satelliti.

Nella mia Memoria del 1764 io ho calcolato, che la densità di Venere assunta dall'Eulero alla densità del mio nuovo calcolo sta, come il 533 a 208. Onde essendo la detta densità nell'ipotesi, che la terrestre sia  $\equiv 1$ , di parti 1. 2740, facciasi come  $533 : 208 \equiv 1274$  al quarto, questo farà di parti . . . . . 0. 4784

Ora essendomi pervenuto il Tomo IV dell'Astronomia del chiarissimo M. de la Lande, osservo con mio sommo piacere, che egli avendo ridotto il periodo della diminuzion secolare dell'ecclittica a  $33''$  e 3 decime, ed avendo ricalcolato secondo tal elemento la densità di Venere, la ritrova di 0. 4971, con particolare uniformità al mio calcolo del 1764. Ma aggiungasi, che allora era stata da me adoperata la variazione secolare dell'ecclittica di  $29''$ , e con essa è tessuto tutto il calcolo, il quale ora riducendolo colla diminuzione secolare dell'ecclittica di  $34''$ , detta densità farà alquanto aumentata. Ma convien ripigliare tutto questo calcolo cogli elementi di questa Memoria, cioè colla nuova proporzione tra le forze lunari, e solari rispetto alla precessione degli equinozj, colla nutazione trovata di 19. 05 cent., colla parallassi solare di  $8''$ . 80 centesime, ed altri elementi.

Ritessendo adunque tutto questo calcolo risulta assai prossimamente la densità di Venere di 0. 5000, che è la metà della terrestre densità, e che così bene si accorda con 0. 4971, densità altrimente calcolata dal citato Astronomo.

Dobbiamo adunque concludere, che come non vi è nell'universo una legge, colla quale siano regolati i diametri, i volumi, le masse de' pianeti da Mercurio fino a Saturno; così dee dirsi, che neppure vi sia legge alcuna nelle densità, le quali non dipendono da' tempi periodici, o dalle loro radici, ma dipendono dalle diverse materie, colle quali i pianeti sono stati fabbricati. Se le densità dovessero avere un rapporto col calor solare, dovendosi questo desumere dall'intensità della luce, che va ad illuminare, e riscaldare i diversi pianeti, dovrebbero tali densità osservarsi in ragion reciproca duplicata delle distanze, e ciò secondo la legge dell'intensità della luce, che appunto si regola con quella ragione. Ma noi siamo ben lontani ancora da tal legge, non meno che dalla ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici.

Indi è , che non dobbiamo cercare alcun rapporto tra le distanze e le densità, tra' tempi periodici e le stesse densità, ma dobbiamo pensare, che essendo i pianeti stati formati con materie di differente specifica gravità, la loro densità non abbia altra legge, che quella delle materie della prima formazione .

Co' satelliti di Saturno, di Giove, e della Terra sapremo la loro densità . Colle osservazioni del periodo dell' obliquità dell' eclittica dedurremo la densità di Venere . Ma per Marte , e per Mercurio , non pare che vi sia modo di determinarla .

Dal presente esame full' ipotesi comunemente ricevuta dobbiamo argomentare, che essa non ha alcuna forza; che è assolutamente falsa ; e che male alcuni Autori hanno dubitato delle lunghissime osservazioni full' obliquità dell' eclittica , perchè esse non sono uniformi a quella teoria . Non possono mai esserlo, perchè la stessa teoria è discordante da sè medesima, ed è contraria alle più certe densità de' tre pianeti forniti di satelliti .

Mi si dirà, che essendo la densità di Venere quasi la metà della terrestre, ed essendo questa minore di quella di Giove, e di Saturno, non si scorge nel sistema elementario quell' armonia, quella perfetta corrispondenza delle parti, che è tanto propria dell' onnipotente Fabbricator del sistema . Poichè tal densità da Venere alla Terra cresce, e dalla Terra a Giove e Saturno va sempre scemando . Ma chi è mai tra gli uomini, che possa a profondo penetrare le vastissime mire del supremo Architetto della natura ?

Chi fa , che nella fabbrica del nostro sistema circumsoiare il sommo Artefice coll' accrescere la terrestre densità, ed in conseguenza la gravità, non abbia pensato a ritener così più fortemente la nostra Luna nella sua orbita, e diminuire quelle irregolarità , che pur troppo tormentano gl' ingegni degli Astronomi, quantunque esse siano minori, che non farebbono con una minor densità ? Chi fa, che non vi siano altri oggetti degni del supremo Architetto, i quali esiggano tal densità maggiore di tutte le altre ?

Contentiamoci di sapere quali siano le vere densità in que' pianeti , che ce ne danno un sicuro argomento , e di rile-

vare indi le confeguenze , che nafcono a tenor dell' univerfal gravità.

### ARTICOLO XIII.

#### *Risposta agli Autori delle Efemeridi Milanefi fullo Gnomone Fiorentino.*

Gli Autori delle Efemeridi Milanefi dell'anno 1779 nell' articolo dell' obblighità dell' ecclittica ragionano intorno al periodo fecolare della medefima, e dopo aver riferite le opinioni di diverfi Aftronomi, che l' hanno creduto di 88", di 60", di 47", di 45", riportano il mio periodo, dedotto prima dalle offervazioni folftiziali del 1756 allo Gnomone della Cattedrale, e poi riconfermato, e ridotto colle fimili offervazioni del 1775, per le quali torna di 34". 42 centefime. Sul propofito delle mie offervazioni effi afferifcono che *nec comparationum numero, nec instrumenti natura, sic coeteris praestare videntur, ut rem prorsus definire censeantur ecc.*

Alquanto diverfa però è ftata l' idea de' più infigni Aftronomi, che cogli occhi proprj hanno potuto offervare la grandezza, la precisione, l' opportunità locale di quefto vafte Gnomone.

Il Sig. de la *Condamine* fu quello, che lo giudicò di così grande importanza, che ne procurò gli ordini Sovrani per riftorarlo.

Il Sig. *Bernoulli*, che fi trovò a più offervazioni, ne commendò pubblicamente il fuo pregio, chiamandolo un iftrumento fingolare in tal genere.

Il Sig. de la *Lande* ne prefe così alta idea, che ricevendo poi fucceffivamente le mie offervazioni folftiziali, cambiò la fua opinione intorno al periodo fecolare dell' obblighità, riducendolo a 33". 3 decime, come potrà confultarfi nel fuo Tomo IV dell' *Aftronomia*, feigno affai chiaro, che egli le ha giudicate decisive.

Tralafciando i giudizj di altri Aftronomi, che parte colla locale ifpezione, e parte colla confiderazione delle offervazioni da me pubblicate fi fono afficurati della verità, mi farò lecito di avvertire, che le due ragioni riportate dagli Aftronomi Milanefi vanno maturamente efaminate.

Toccano essi il piccol numero delle combinazioni, e la natura di questo istrumento.

Va esaminata la prima eccezione, giacchè le obblighità da me in diversi anni concluse si appoggiano a gran numero di osservazioni.

Quella dedotta nel 1775 è fondata sopra XV osservazioni

Quella del 1756 sopra . . . . . XVI ( a )

Quella del 1764 sopra . . . . . V

Quella del 1775 sopra . . . . . XVI ( b )

Quella del 1782 sopra . . . . . XVI .

Se poi detti Astronomi intendono di ragionare delle combinazioni colle antiche osservazioni, certo è, che l'osservazione fondamentale del 1510 è una sola, ma essa è combinata con più e più moderne osservazioni. Essa è così ben rappresentata dal marmo solstiziale di quell'anno, che non può esservi error sensibile

Essa finalmente è riportata ad un lungo periodo di anni 272, rispetto all'anno corrente, e tal periodo fa svanire qualunque piccolo errore, che potesse concepirsi nella posizione del marmo solstiziale.

Sulla natura dell'istrumento i due Professori cambierebbono d'opinione, se fossero sul luogo, come gli altri Astronomi già citati. Poichè l'altezza dello Gnomone è di piedi Parigi 277.

Con tal altezza si combina una tal precisione dell'immagine solare, che negli appulsi dell'orlo boreale, ed australe non può errarsi di una linea, che in questa vastità di raggio non porta error sensibile.

Contribuisce a tal esatta terminazione la rispettiva piccolezza del foro centrale, e l'oscurità di quel vastissimo tempio. In somma trattandosi di tali istrumenti, bisogna prima vedere, e poi giudicare.

Tralascio le considerazioni delle moderne combinazioni, le quali, benchè ristrette ad anni 26, come lo sono quelle del 1756, paragonate a quelle del 1782, ovvero ad anni 20,

---

(a) Veggasi il mio Volume del vecchio, e nuovo Gnomone Fiorentino, stampato in Firenze nel 1757.

(b) Veggasi la Dissertazione Astronomica del 1776.

come quelle del 1755 a quelle del 1775; contuttociò esse decidono, che il periodo secolare non può mai essere della grandezza finora giudicata dagli Astronomi, ma di un valore molto minore. E se con esse sole non può prescriversi la frazione, si comprende nondimeno, che il periodo è poco più di 30". Che se a tali moderne combinazioni si aggiunga la combinazione fondamentale del 1510 colle moderne osservazioni, si stabilisce ancora con precisione maggiore il periodo di 34", come nella citata Dissertazione.

I calcoli, che si accennano di M. de la *Grange*, dell' *Eulero*, e di altri eccellenti Matematici, non sono mai da preferirsi alle più certe osservazioni, essendo essi fondati sopra ipotesi incerte, qual' è quella della densità de' pianeti, che son privi di satelliti, di cui in conseguenza ignoriamo la densità. Venere è uno di tali pianeti, che moltissimo influisce nella teoria fisica della obliquità. Meglio adunque sarà il rovesciare il Problema, ed invece di calcolare il moto dell' obliquità dalle densità ipotetiche de' pianeti, dedurre piuttosto la densità dalle osservazioni certissime del moto progressivo della stessa obliquità. Allora la densità di Venere tornerà meno della metà di quella, che viene in conseguenza dalle ipotesi Euleriane, come ho fatto vedere in una mia Dissertazione composta nel 1764, che è inedita.

Co' nuovi elementi dedotti dalle combinazioni della presente Memoria un tal calcolo va perfezionato, e ridotto. Sempre però la densità di Venere torna la metà incirca rispetto a quella, che deducesi dall' ipotesi Euleriana delle densità in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici. E questa ipotesi se si esamina col rapporto delle densità de' tre pianeti, le quali ci son note per i satelliti, che essi godono, cioè della Terra, di Giove, e di Saturno, non solamente dee dirsi dubbiosa, ma notabilmente aberrante rispetto alle densità verificate coll' elemento de' satelliti, come è stato provato nell' articolo antecedente.

Ma serve per ora di persuaderci, che quell' ipotesi va meglio esaminata, e corretta, e che in vigore de' risultati teorici della medesima non possono revocarsi in dubbio le tante, e così certe osservazioni del periodo secolare, che è molto minore, che non esigerebbe quell' ipotesi.

OSSERVAZIONE



# OSSERVAZIONE

DELLA CONGIUNZIONE INFERIORE  
DI VENERE COL SOLE

A dì 20 Marzo 1782

CON ALCUNE RIFLESSIONI

Del Sig. Ab. ANGELO DE CESARIS R. Astronomo  
all' Osservatorio di Milano.

**E'** Noto, che le osservazioni delle opposizioni col Sole ne' pianeti superiori, e ne' pianeti inferiori quelle delle loro congiunzioni col Sole medesimo sono particolarmente pregiate dagli Astronomi, come le più opportune ed interessanti, per le utili conseguenze, che se ne traggono. In tali circostanze la longitudine eliocentrica e la geocentrica sono nella stessa direzione esattamente; e quindi dall' immediato confronto di ciò che si avrebbe pel calcolo delle Tavole, e di ciò che si è avuto in fatti per la via dell' osservazione, si ha un facile mezzo per verificare gli elementi, sopra i quali le Tavole stesse sono costrutte.

Tra le congiunzioni poi le inferiori sono da anteporsi alle superiori, perchè nella più grande vicinanza del Pianeta alla Terra, più grandi comparire ci devono le piccole deviazioni del medesimo, venendo esse osservate sotto l' angolo più vantaggioso. Se si consideri il triangolo *SPT* (*fig. 1.*) formato al Sole, al Pianeta ed alla Terra, nel quale l'angolo in *S* corrisponde alla commutazione, o sia alla differenza delle longitudini eliocentriche del Pianeta e della Terra; l'angolo in *T* alla elongazione, o sia alla differenza delle longitudini geocentriche del Pianeta e del Sole; e se ne prenda l' espressione differenziale, si avrà la ragione delle rispettive variazioni, e farà  $ds : dt :: R : \text{sen.}^2 t - \text{sen.} t \times \text{cos.} t \times \text{cot.} s :: TP : SP \times \text{cos.} p$ . Quindi intorno alle massime digressioni fatto retto l'angolo in *S* ed eguale a zero la cotangente *s*, l' espressione si

ridurrà a  $ds : dt :: R : \text{sen.}^2 t :: TP^2 : SP^2 :: TS^2 + SP^2 : SP^2$ ; e nelle congiunzioni svanendo gli angoli  $T$  ed  $S$ , e diventando eguale al raggio il coseno dell'angolo  $P$ , si avrà  $ds : dt :: TP : SP$ , o sia nelle congiunzioni superiori come  $TS + SP : SP$ , e nelle inferiori come  $TS - SP : SP$ .

Nel caso pertanto di Venere, la cui distanza  $SP$  è alla distanza  $ST$  prossimamente come  $0,731 : 1$ , farà presso le massime digressioni  $ds : dt :: 3 : 1$ ; nelle congiunzioni superiori come  $17 : 7$ ; e nelle congiunzioni inferiori come  $7 : 18$ . dal che è manifesto che una deviazione, per esempio, di un minuto primo nella longitudine eliocentrica influisce di soli venti secondi nella geocentrica osservata all'occasione delle massime digressioni: influisce di venticinque nelle congiunzioni superiori, e di cento cinquanta quattro nelle congiunzioni inferiori. Allo stesso modo determinare si possono le ragioni delle variazioni di ciascuno elemento ch'entra nella formazione delle Tavole, ed assegnarne le circostanze più favorevoli all'osservazione.

Ma quanto è facile l'osservare un pianeta in opposizione quando passando esso al meridiano a mezza notte, prima e dopo è comodamente visibile; altrettanto difficili a farsi sono le osservazioni delle congiunzioni, quando il pianeta è immerso e sopraffatto dalla vivissima luce del Sole, col quale trovasi nella stessa direzione, e non presenta, come nelle congiunzioni inferiori, che una piccolissima parte della sua faccia illuminata. Quindi oltre i pochi casi, nei quali la latitudine geocentrica del pianeta essendo minore del semidiametro del Sole, se ne osserva l'interessante passaggio sopra il Sole stesso, trovansi assai rare nella storia dell'Astronomia le osservazioni delle congiunzioni, per le quali è necessario di unire alle più favorevoli circostanze nella posizione del pianeta anche un buono istrumento per l'Astronomo.

Prima di dare qui l'osservazione da me fatta, premetto l'esposizione di alcune piccole ricerche relative alla medesima, e che sembranmi potere essere utili anche in altre circostanze. Queste riguardano principalmente l'inclinazione della fase di Venere, la quantità della luce, ed il massimo effetto prodotto dalla luce della medesima. E primamente avendo io osservato il Pianeta per più giorni, avanti e dopo la con-

giunzione col Sole, ed avendo avuto il piacere di vedere il rivolgimento della fase formata dal tenuissimo segmento lucido, il quale in diversi giorni successivamente si presentava al meridiano sotto diverse inclinazioni, ho cercato di determinare la quantità di tali inclinazioni, determinandone gli angoli col meridiano. Così i tempi degli appullii ai fili del micrometro, ch' erano notati per maggiore esattezza e comodo al contatto della prima porzione lucida, che si presentava, potevano con precisione essere ridotti al centro del Pianeta, al quale tutto dovevasi riferire. A tale oggetto io ho determinato l'angolo formato coll' eclittica dal diametro, che passa per l'estremità del segmento lucido, e mi sono servito de' seguenti principj, de' quali è dimostrata ed anai nota la verità. La fase lucida de' pianeti è uguale alla porzione della loro superficie compresa tra il circolo, che termina l'emisfero visibile dalla Terra, ed il circolo che termina l'emisfero illuminato dal Sole: e la larghezza della fase lucida sta al diametro del Pianeta, come il seno verso dell'angolo esterno formato al Pianeta dalle linee tiratevi dal Sole e dalla Terra sta al doppio raggio. L'intersezione del circolo visibile e del lucido è un diametro comune ad entrambi, il quale passa per le due estremità della fase: e come ogni diametro è sempre perpendicolare all'asse del suo circolo; così il diametro della fase è sempre perpendicolare alle due linee tirate dal Pianeta alla Terra ed al Sole, le quali sono appunto gli assi de' circoli visibile ed illuminato. E' parimente il diametro medesimo sempre perpendicolare al piano, nel quale trovansi gli assi, e il quale passa pe' centri del Pianeta, della Terra, e del Sole: e data l'inclinazione di questo piano al piano dell'eclittica, ne farà egualmente data per complemento l'inclinazione di quel diametro.

Rappresentino (*fig. 2.*) *T* la Terra, *S* il Sole, *P* il Pianeta, fuori del piano dell'eclittica, nel quale sempre sono *T* ed *S*. Abbassata sul detto piano la normale *PP'*, e tirata *P'E* normale a *TS* farà l'angolo *PTP* eguale alla latitudine geocentrica; l'angolo *PTE* uguale alla elongazione del Pianeta; l'angolo *PEP'* eguale alla inclinazione del piano *TPSE* al piano dell'eclittica; e l'angolo *PPE* uguale alla ricercata inclinazione del diametro della fase. Quindi farà  $PP =$

$$TP' \times \text{tang. latit.} ; PE = TP' \times \text{sen. elong.} , \text{ e tang. } PPE = \frac{PE}{PP} \\ = \frac{\text{sen. elong.}}{\text{tang. latit.}}$$

Conosciuta quella inclinazione e combinata coll' angolo di posizione nel Pianeta, si avrà l' inclinazione della fase al meridiano: combinata nuovamente coll' angolo così detto paralattico, si avrà l' inclinazione al corrispondente verticale: e nella circostanza, in cui Venere sia occultata dalla Luna, si combinerà colla direzione dell' orbita apparente della medesima, affinchè la somma de' semidiametri, che usare si suole nel calcolo di simili osservazioni, si sminuisca della quantità, che compete al segmento oscuro di Venere, o ritenuta la somma de' semidiametri, si applichi la dovuta equazione al tempo del contatto osservato dalla parte oscura.

Applicando la formola alla Luna, per la quale essa ha luogo egualmente, si avrà il vantaggio di determinare la configurazione della medesima nelle circostanze di occultazioni di stelle. Inoltre tra le varie conseguenze che risultano da tale applicazione, merita per la pratica astronomica di essere avvertita quella, per cui si dimostra, che come non vi ha novilunio, fuori del nodo, in cui non siavi un piccolissimo segmento lucido corrispondente al mezzo seno verso della latitudine della Luna; così non vi ha plenilunio, in cui parimente non siavi il suo segmento oscuro. Quindi nell' osservare in simili circostanze la Luna farà necessaria la precauzione di scegliere quel lembo, che non ne resta alterato; e nel computarne il diametro, o si dovrà misurare nella direzione parallela all' ecclittica, o si dovrà aumentare della quantità di cui resta sminuito per la fase oscura. Il quale sminuimento sebbene per una parte debba svanire nelle opposizioni, svanendo l' angolo di elongazione; non lascia però di avere luogo per l' altra cagione di essere fuori dell' ecclittica ed alla medesima inclinato il piano dell' orbita lunare. E coeentemente a tale inclinazione può rifletterli ancora al periodico rivolgimento della fase oscura, la quale dal lembo australe della Luna passa successivamente al lembo boreale, giu- sta il periodico movimento in latitudine della Luna medesi-

ma. Dal che è manifesto come alcune parti del disco lunare vicine al lembo australe debbono scoprirsi, mentre altre parti nel lembo opposto debbono nascondersi, avvicinandosi così successivamente il fenomeno, che forma una parte della librazione lunare.

Una seconda ricerca meno necessaria in vero per l' uso e per la riduzione dell' osservazione, ma pure dalla osservazione non aliena, anzi occasionata dalla medesima, può farsi sulla intensità e quantità della luce, che veniva riflessuta dalla tenue fase di Venere al tempo della congiunzione col Sole, e che in generale esser deve riflessuta in ogni altro punto della sua orbita. Quanto all' intensità del lume del Pianeta è ben manifesto, che seguendo essa la ragione inversa della somma de' quadrati delle distanze dal Sole e dalla Terra, doveva essere in questa inferiore congiunzione tanto maggiore di quella che stata farebbe nella congiunzione superiore prossimamente come 42 : 1. La quantità poi del lume medesimo, che corrisponde alla quantità della parte illuminata visibile, essere doveva nel tenue segmento a quella di una piena fase prossimamente come 0,01 : 1.

Una ulteriore osservazione può farsi ancora in questo argomento. La facilità provata nel vedere distintamente il Pianeta, che, come si è detto, appena presentava una centesima parte del suo disco illuminato, mi ha fatto richiamare quanto aveva accennato nel suo Trattato di Ottica il Cel. *Bouguer* relativamente alla maggior luce, ch'egli credeva mandata dai pianeti nelle parti vicine ai lembi, che nelle parti poste intorno al centro, e per lo contrario del più grande splendore del Sole vicino al centro, che presso il lembo. Ed a fine di svolgere alquanto più la cagione di questo curioso ma incerto fenomeno, non farà inutile il riflettere, che sebbene da ogni punto lucido della superficie planetaria si diffondono i raggi all' intorno; non può però essere uguale la copia de' medesimi in ogni direzione: ed essere vi deve una ragione, per cui quanto più i raggi si discostano dalla linea perpendicolare alla superficie d'onde escono, tanto minore sia la forza ed il numero loro. Imperciocchè se ugualmente si spargessero in isfera, il disco del pianeta risplenderebbe tanto più, quanto più le sue parti fossero distanti dal centro, ed il con-

torno dovrebbe essere infinitamente più illuminato del mezzo.

La verità di tale apparente paradosso si rende facilmente manifesta nell'osservare, che se ogni femicircolo  $ADB$  (fig. 3) nel Pianeta visto secondo la direzione  $CDT$  è progettato sulla retta  $ACB$ , le linee  $Cc = Ff = GA$  faranno le proiezioni degli archetti corrispondenti  $Dd, Ee, aA$ : e se da ogni punto spargesi uguale copia di raggi in ogni direzione, la quantità de' raggi medesimi dovrà essere come il numero de' punti, ed il numero de' punti tanto più grande, quanto più grandi faranno gli archi. Ma gli archi  $Dd, Ee, aA$  crescono reciprocamente come i seni degli angoli  $dDM, eEo, AaG$ , i quali dall'angolo retto  $dDM$  formato dalla linea del centro  $CDT$  (dove diventa  $cC = dD$ ) vanno successivamente decrescendo fino a svanire nel lembo. In oltre per la nota proprietà del circolo essendo  $2AC : Aa :: Aa : AG$ , se sia l'arco  $Aa$  infinitamente piccolo rispetto ad  $AC$ , farà pure il medesimo infinitamente grande rispetto ad  $AG = fF = cC = dD$ : d'onde è manifesto, che la quantità di luce riferita in  $cC$  farà infinitamente minore della riferita in  $AG$ .

Quindi segue ancora, che se il Pianeta in ogni parte della sua superficie ci sembra egualmente risplendere, la quantità de' raggi sparsi da ciascun punto sotto diverse inclinazioni farà direttamente come i seni delle inclinazioni medesime, in ragione reciproca dei quali crescono i piccoli archi: così che quanto si sminuisce la luce, sminuendosi i seni delle inclinazioni, altrettanto cresca la medesima, crescendo gli archi. Ma se la luce del Pianeta ci compare maggiore nel contorno del disco che nel centro, o al contrario maggiore nel centro e minore nel lembo, la vivezza della luce medesima seguirà nel primo caso una ragione maggiore, e nel secondo caso una ragione minore di quella dei seni delle inclinazioni.

Le varie sperienze del *Bouguer* ci hanno fatto conoscere la legge che prossimamente osservasi nella riflessione della luce sotto diversi angoli, nei corpi che sembrano i più opportuni a simili ricerche, quali sono l'argento, la carta, il gesso. Nella seguente Tavola sono i risultati delle prove fatte sul gesso, che sembra avere più di analogia alla materia de' pianeti.

<i>Inclinazione de' raggi</i>	90°.	75°.	60°.	45°.	30°.	15°.
<i>Seni delle inclinazioni</i>	1000.	966.	866.	707.	500.	259.
<i>Luce</i>	1000.	762.	640.	529.	352.	194.

Ma convien pure non dissimulare, che passando da questi corpi terrestri ai corpi celesti, la cosa andrebbe a rovescio, se vera fosse l'osservazione del *Bouguer* rispetto alla diversa luce dei lembi che del centro. Altronde credo di poter dire che nè a me, nè agli Astronomi, che ne ho interrogato, è stata generalmente sensibile tale differenza di luce: anzi riguardo al Sole osservato con un buon micrometro obbiettivo del Dollond ho fatto più lucente ora l'una ora l'altra delle due immagini formate dall'istromento, ottenendo tale avvicendamento di luce col più piccolo movimento, che producessè qualche inclinazione rispettiva nelle due mezze lenti: onde fatto il paragone fra il centro di una immagine ed il lembo dell'altra, come fu praticato dal *Bouguer*, si sarebbe trovata prima un'apparenza, poi un'altra contraria.

Ritornando ora all'argomento, d'onde sono partito, ed alla quantità di luce riflessuta dal Pianeta in qualunque punto della sua orbita, il già citato Ch. *Bouguer* dimostra, che la porzione di essa che ci viene da ogni trapezio elementare della superficie del Pianeta si rappresenta in generale per

$$\frac{dt. dy. \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{a^2 - g^2}}{a} + \frac{b. dt. dy. (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}m} (a^2 - t^2)^{\frac{1}{2}m} - \frac{1}{2} (a^2 - g^2)}{a^{2m}}$$

nella quale formola si esprime per *a* il semidiametro del Pianeta, per *t* e per *y* la posizione di un punto *C* nella superficie planetaria, del quale particolarmente si cerca la luce, per *g* il seno della metà dell'elongazione e della commutazione del Pianeta; per *m* l'esponente di una quantità costante *b*, che, combinata coi seni delle inclinazioni dei raggi alla superficie, misuri la quantità de' medesimi corrispondente alle diverse inclinazioni. Nel sopraccitato Trattato di Ottica se ne può vedere la dimostrazione e l'integrazione in diverse ipotesi del valore di *m*. Intanto deve qui avvertirsi, che nella riportata formola non s'involge determinatamente la quanti-

tà di luce, che si disperde nella superficie planetaria, senza essere opportunamente riflessuta, e che perciò è ancora ignota l' assoluta ragione tra la luce che manda il Sole, e quella che ci viene dai pianeti. Ben è vero, che come il medesimo *Bouguer* ha osservato, che il lume lunare in plenilunio è prossimamente una parte trecentomillesima della luce solare; ed il Ch. *Baylli* ha portato la sagacità delle sue ricerche nella luce de' satelliti: così sembra che promuovere si possa la delicatezza dell' osservazione, e raccolta nel foco di un eccellente obbiettivo la luce di ciascun pianeta tentare qualche paragone colla luce della Luna in diverse fasi, o altrimenti esaminarla con qualche fino strumento per determinarne i rapporti finora sconosciuti.

La terza ricerca tra le proposte di sopra riguarda il massimo effetto prodotto dalla luce di Venere, e la determinazione delle circostanze, nelle quali deve aver luogo. E febbene l' *Halley* abbia data la soluzione di tale problema, inserita nelle *Trasazioni filosofiche* e riferita nell' *Astronomia del La Lande*; sembra però che sulle tracce di questi celebri uomini si possa tornare su tale argomento, senza incorrere la taccia di fare una inutile repetizione. Il fatto egualmente osservato dagli Astronomi, che ammirato dal semplice volgo, è, che Venere dentro certo periodo di anni in pieno giorno si può da tutti vedere, come una brillante stella, senza alcuno mezzo di cannocchiale o di altro simile strumento. Un tale fenomeno manifesta abbastanza ch' essere vi deve un *massimo* dipendente dall' intensità insieme e dalla quantità di lume, che viene a noi riflessuto dal Pianeta: ed un tale massimo si determinerà, differenziata ed uguagliata a zero la formula, che esprima i detti elementi.

Lasciata però quella del *Bouguer*, che solo rappresenta la quantità della luce, ed è soverchiamente complicata al bisogno, è bene manifesto altronde che potendosi considerare rispettivamente costanti le distanze dal Sole di Venere e della Terra, l' intensità della luce di Venere deve dipendere dalla distanza della medesima dalla Terra; ed a questa distanza stessa avendo una conosciuta ragione anche la quantità della fase, alla quale corrisponde la quantità della luce, l' effetto massimo prodotto dalle due cagioni combinate insieme potrà essere determinato,



nato, determinando la corrispondente distanza: col quale elemento si conoscerà anche l'angolo di elongazione, nel quale il fenomeno deve accadere.

Già si è detto che l'area planetaria, e la quantità della fase lucida sono tra loro come il raggio alla metà del seno verso dell'angolo esterno formato al Pianeta dalle direzioni del Sole e della Terra. Se pertanto nel triangolo  $SPT$  (fig. 1) già sopra considerato sia  $ST = m$ ,  $SP = n$ ,  $TP = x$ ,  $r$  il raggio,  $p$  l'angolo  $SPT$ , farà per le note formole trigonometriche

$$\frac{r^2}{nx} \times \frac{n+m-x}{2} \times \frac{m+x-n}{2} = \text{sen.}^2 \frac{1}{2} p = \frac{r - \text{cos. } p}{2}$$

$= \frac{1}{2}$  sen. vers.  $p$ . Tal espressione ridotta all'angolo esterno

$SPQ$  colla dovuta mutazione di segni diverrà la stessa, che la data dall'*Halley*, e rappresenterà la grandezza della fase, e la quantità del lume, del quale parimente si esprimerà l'intensità, dividendo la formola per  $x^2$  (\*), e farà

$$\frac{n^2 + 2nx + x^2 - m^2}{4nx^3}. \text{ Questa differenziata e giusta il canone}$$

de' massimi, e de' minimi fatta eguale a zero, darà

$$\left( 3m^2 - 3n^2 \times x^{-4} - 4nx^{-3} - x^{-2} \right) \frac{dx}{4n} = 0, \text{ e moltiplicando per}$$

$$\frac{4nx^4}{dx}, \text{ farà } 3m^2 - 3n^2 - 4nx - x^2 = 0; \text{ d'onde } x = \sqrt{3m^2 + n^2}$$

$$- 2n = a; \text{ e cos. elong. } = \frac{m^2 - n^2 + a^2}{2am}.$$

È perciò evidente che corrispondendo  $x$  ad un *massimo* qualunque sia il valore di  $m$  e di  $n$ , e verificandoli in fatti tan-

Sf

(\*) Ad esprimere con più giusta precisione l'intensità della luce, si dovrebbe dividere la formola per  $n^2 + x^2$ . In tal caso il valore di  $x$ , dopo la differenziazione, si avrebbe per una equazione di quarto grado. Siccome però nella serie dell'operazioni

si sono supposte costanti le quantità  $m$  ed  $n$ , la intensità del lume di Venere rispettivamente alla Terra è bastantemente e più semplicemente espressa pel solo  $\frac{1}{x^2}$ .

to il valore di  $x$ , quanto la corrispondente elongazione due volte in ciascuna rivoluzione di Venere; altrettante volte dovrebbe vedersi il fenomeno, se il medesimo potesse rappresentarsi per qualunque di cotesti massimi. Ma l'osservazione essendo contraria, converrà cercare o il massimo fra i minimi, o almeno uno fra i medesimi, che sia de' favorevoli, e soprattutto che corrisponda all'attuale osservazione. Il massimo fra i massimi si avrà allora quando il valore di  $x$  sia il minimo. Imperciocchè la quantità e l'intensità del lume è come

$$\frac{(n+x)^2 - m^2}{4nx^3}, \text{ ed il coseno della elongazione come } \frac{m^2 - n^2 + x^2}{2mx}$$

Ora ciascuno di questi elementi cresce tanto più favorevolmente all'uopo, quanto più decresce l' $x$ . Il valore poi di  $x$  farà tanto più piccolo, quanto più piccolo farà  $m$ , e più grande farà  $n$ : ciò che è manifesto dalla sola ispezione della formola

$$x = \sqrt{3m^2 + n^2 - 2n}.$$

Dalla medesima formola, e dalla ragione tra  $m$  ed  $n$  che in qualunque circostanza si possa verificare risulta ancora che nei valori di  $x$  influisce più  $m$ , che  $n$ ; quindi nel formare la serie delli  $x$  si combinerà prima  $m$  minimo, poi  $m$  medio, ed in fine  $m$  massimo con  $n$  massimo, medio, minimo: e si avranno nove valori dal più vantaggioso decrescenti fino al meno favorevole. Nella combinazione, per esempio, che Venere e la Terra siano nelle loro distanze medie, e sia  $m=1$ , farà  $x=0,43036$ , e l'elongazione  $39^\circ. 43'. 30''$ . Nella combinazione meno favorevole che sia Venere nella minima sua distanza e la Terra nella distanza sua massima, farà  $x=0,46552$ , e l'elongazione  $39^\circ. 5', 35''$ . E nella combinazione più vantaggiosa che sia Venere nella distanza sua massima, e la Terra nella distanza sua minima, farà  $x=0,39532$ , e l'elongazione  $40^\circ. 21'. 36''$ .

Questa ultima combinazione, che corrisponde al massimo fra i massimi, non può avere luogo ne' secoli vicini a noi per l'attuale posizione dell'afelio di Venere, e del perihelio della Terra. Trovasi quello a dieci segni e nove gradi di longitudine eliocentrica, e questo a tre segni e nove gradi; quindi l'elongazione di Venere afelia vista dalla Terra perihelia deve essere solamente intorno a tredici gradi, e la rif-

pettiva distanza  $x = n \cdot \frac{\text{sen. commut.}}{\text{sen. elong.}}$  è prossimamente quattro

volte maggiore di quella, che viene indicata dalla formola del massimo. La bella apparenza di Venere, che nel 1776, come si legge nelle *Tranfazioni Filosofiche*, fu ammirata dal popolo di Londra, quasi un prodigio, si osservò nel Luglio, quando la Terra e Venere erano presso il loro aselio, e perciò in una combinazione delle meno vantaggiose. Questo fatto ci dimostra abbastanza, che nella maggiore o minore facilità di vedere più luminoso il fenomeno, deve particolarmente influire lo stato della nostra atmosfera, non solamente per ciò che riguarda le sensibili nuvole o nebbie, ma per una più occulta causa, per cui si lasci un più facile o difficile passaggio ai raggi di luce. La cosa si conferma ancora dal riflettere che il fenomeno ne ritorna regolarmente dopo otto anni, quando pure Venere dentro tale periodo ritorna sensibilmente alla stessa combinazione di posizione: nè il medesimo trovasi osservato sul finire o sul cominciare dell'anno quando per una parte hanno luogo le combinazioni più favorevoli, ma per l'altra parte trovasi l'atmosfera in uno stato di minore facilità alla trasmissione della luce: come si può provare paragonando la luce del Sole al mezzodì di un giorno serenissimo del Dicembre, con quella che il Sole medesimo manda essendo a 21 gradi di altezza sopra l'orizzonte in un giorno serenissimo del Giugno.

Vengo ora in fine ad esporre l'osservazione. Essa è stata fatta ad un quadrante murale di sei piedi di raggio collocato nel meridiano. Le differenze d'ascensione retta tra Venere e la Stella  $\beta$  del Cane minore, colla quale è stata paragonata, sono generalmente dedotte da tre appulsi ai fili del micrometro: le differenze di declinazione sono corrette per l'effetto della piccola differenza di rifrazione, e per la parallasse di Venere. La posizione vera della Stella presa dal catalogo del *La Caille* e ridotta in apparente colle consuete equazioni dell'aberrazione e della nutazione, era all'epoca dell'osservazioni in ascensione retta  $108.^{\circ} 50'. 8''$ ; in declinazione boreale  $8.^{\circ} 43'. 2''$ . Le posizioni apparenti di Venere dedotte dall'osservazione e ridotte in vere colle debite equazioni dell'aberrazione e della nutazione, sono paragonate colle corrispondenti posizioni calcolate sulle Tavole de *La Lande*.

1782 Marzo	Tempo medio dell'osservazio- ne	Differenza d'Ascension retta tra Venere e $\beta$ del Cane Minore	Ascensione retta di Ve- nere	Differenza di declinazione tra Venere e $\beta$	Declinazio- ne di Venere
11	0 <sup>b</sup> . 51'. 26", 7	7 <sup>b</sup> . 5'. 39", 4 = 106°. 42'. 9"	2°. 7'. 59"	+ 1. 18. 58	10°. 2'. 0
14	0. 33. 52, 0	7. 11. 26, 5 = 108. 9. 21	0. 40. 47	+ 0. 51. 37	9. 34. 39
18	0. 9. 34, 8	7. 20. 1, 5 = 110. 18. 18	358. 31. 50	- 0. 3. 45	8. 39. 17
19	0. 3. 25, 8	7. 22. 14, 2 = 110. 51. 32	357. 58. 36	- 0. 20. 43	8. 22. 19
19	23. 57. 18, 4	7. 24. 26, 2 = 111. 24. 35	357. 25. 33	- 0. 38. 33	8. 4. 29
20	23. 51. 11, 5	7. 26. 37, 4 = 111. 57. 26	356. 52. 42	- 0. 57. 16	7. 45. 40

	Tempo medio	Longitudine di Venere offer- vata	Longitudine calcolata dalle Tavole	Differenza	Latitudine di Venere of- servata	Latitudine calcolata dal- le Tavole	Diffe- renza
11	0 <sup>b</sup> . 51'. 26", 7	0 <sup>s</sup> . 5°. 58'. 36"	0 <sup>s</sup> . 6°. 2'. 25"	+ 3'. 49"	8°. 20'. 59" B	8°. 19'. 40" B	- 1'.
14	0. 33. 52, 0	0. 4. 27. 57	0. 4. 31. 58	+ 4. 1	8. 30. 35	8. 29. 14	- 1. 21
18	0. 9. 34, 8	0. 2. 7. 34	0. 2. 11. 43	+ 4. 9	8. 31. 6	8. 29. 45	- 1. 21
19	0. 3. 25, 8	0. 1. 30. 22	0. 1. 34. 36	+ 4. 14	8. 28. 48	8. 27. 31	- 1. 17
19	23. 57. 18, 4	0. 0. 52. 42	0. 0. 57. 3	+ 4. 21	8. 25. 38	8. 24. 22	- 1. 16
20	23. 51. 11, 5	0. 0. 15. 3	0. 0. 19. 28	+ 4. 25	8. 21. 35	8. 20. 21	- 1. 14

# SOPRA LA FORZA

## CENTRIFUGA.

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella R. Università di Pavia.

1. **R** Idurre alla massima semplicità la dimostrazione delle varie affezioni della Forza Centrifuga , aggiugnervi alcune non inutili osservazioni , estenderne l' applicazione a qualche punto importante della Meccanica, e finalmente ricavarne la dimostrazione de' Teoremi Meccanici da me esposti nel primo Volume di queste Memorie della *Società Italiana*, è l' unico oggetto di questo breve Opuscolo. In esso io suppongo nota la dottrina generale delle forze acceleratrici, e parto dal notissimo principio, che la misura della forza centrifuga, ovvero anche della centripeta ( giacchè l' una è sempre uguale all' altra ) è il doppio della lineetta, la quale congiunge l' estremo dell' archetto infinitesimo descritto dal corpo in un istante coll' estremo di quella porzione della tangente di detto arco, cui il corpo descriverebbe in quello stesso istante colla velocità quivi acquistata, e senza l' azione di alcuna forza, la qual doppia lineetta divisa che sia pel quadrato dell' indicato istante esprime la vera quantità e misura della forza centrale, così centrifuga, come centripeta.

2. Immaginemoci pertanto un corpo ( la di cui massa fingeremo sempre concentrata in un ful punto ) attaccato ad un filo ; e questo fermato per una estremità ad un piano orizzontale, e disteso in retta linea dall' uno all' altro estremo lungo il detto piano. Si prescinda dall' attrito e da qualunque altro impedimento, e si dia al corpo un colpo in direzione perpendicolare al filo: il corpo incomincerà a descrivere un cerchio avente per semidiametro la lunghezza del filo, e quindi farà forza di stirare e stendere il filo, cioè e-

ferciterà una forza centrifuga impiegata in questo caso a produrre la tensione del medesimo. Si chiami  $f$  la forza centrifuga, o la tensione del filo,  $ddz$  la lineetta, che congiunge gli estremi dell' archetto e della tangente del cerchio ( la qual lineetta si fa essere infinitesima di second' ordine ),  $r$  il raggio del cerchio,  $dt$  l' istante o tempicciuolo infinitesimo,  $ds$  l' archetto,  $v$  la velocità del corpo per l' archetto  $ds$ ,  $h$  l' altezza dovuta alla velocità  $v$ . Ciò posto farà

### TEOREMA I.

3.  $f = \frac{v^2}{r} = \frac{2h}{r}$ , vale a dire la forza centrifuga nel cerchio in quel punto della circonferenza, dove il corpo si trova, è uguale al quadrato della velocità del corpo in quel punto, diviso pel semidiametro, ovvero uguale al doppio dell' altezza dovuta a tale velocità, e diviso pel raggio.

### DIMOSTRAZIONE.

E' evidente, che la lineetta  $ddz$  diventa nel cerchio uguale al seno verso dell' archetto  $ds$ , e conseguentemente  $ddz = \frac{ds^2}{2r}$ .

Ma  $f = \frac{2ddz}{dt^2}$ ; dunque  $f = \frac{ds^2}{r dt^2}$ ; e siccome  $v = \frac{ds}{dt}$ , si ha

$f = \frac{v^2}{r}$ . Perchè poi dalle leggi del moto equabilmente accelerato, posta la gravità terrestre acceleratrice  $= 1$ , si ricava  $v^2 = 2h$ , si ottiene pur anco  $f = \frac{2h}{r}$ . Il che era ecc.

4. COROLL. Poichè nel corpo, che si rivolge in un cerchio, la forza centrifuga ha dovunque una direzione perpendicolare all' arco, ella non tende in conseguenza nè ad accrescere, nè a sminuire la velocità del corpo per l' arco, la quale farà dunque la stessa in tutti i punti della circonferenza, come pure la stessa la forza centrifuga. Dunque il moto è uniforme, e la forza centrifuga è costante.

## TEOREMA II

5. *L' arco circolare descritto dal corpo in un dato tempo è medio proporzionale fra il diametro del cerchio e lo spazio, che sarebbe da esso trascorso in quel tempo, se posto in libertà venisse sollecitato per tutto quel tempo dalla data forza centrifuga.*

## DIMOSTRAZIONE.

Si è già dimostrato essere  $2r:ds::ds:ddz$ , e chiamato  $t$  il tempo proposto sta parimenti  $1:t::t:t^2$ ; onde moltiplicate le due analogie nasce  $2r:tds::tds:t^2ddz$ . Ma  $tds$  è l' arco descritto dal corpo con moto uniforme nel tempo  $t$ , perchè  $ds$  è l' archetto scorso in un istante: e  $t^2ddz$  è lo spazio scorso dal corpo libero nel medesimo tempo con moto uniformemente accelerato per l' azione costante della forza centrifuga, poichè  $ddz$  è lo spazietto descritto in un istante in virtù di tal forza. Dunque ecc. Il che era ecc.

6. COROLL. La velocità, colla quale il corpo si rivolge nel cerchio, è quella stessa che acquista scorrendo liberamente la metà del semidiametro per l' azione costante della forza centrifuga. Imperciocchè per le leggi del moto equabilmente accelerato, lo spazio da descriverli dal corpo per acquistare una tale velocità è la metà dell' arco percorso equabilmente nello stesso tempo. Ma pel Teorema antecedente quest' arco è medio proporzionale fra il diametro e il detto spazio. Dunque quattro volte il quadrato di esso spazio è uguale al prodotto di tale spazio nel diametro; e quindi si ha lo stesso spazio uguale alla metà del semidiametro

## TEOREMA III.

7. *Le forze centrifughe di varj corpi mossi circolarmente come nel §. 2 sono come i quadrati delle loro velocità direttamente, e come i semidiametri inversamente.*

## D I M O S T R A Z I O N E .

Nominando colle lettere majufcole le quantità dianzi indicate colle minuscole, fi ha non meno  $f = \frac{v^2}{r}$ , che  $F = \frac{V^2}{R}$

onde  $f:F :: \frac{v^2}{r} : \frac{V^2}{R}$ . Il che era ecc.

8. COROLL. I. Se i raggi fono come i quadrati delle velocità, le forze centrifughe fono eguali, e *viceversa*.

9. COROLL. II. Se le velocità fono come le potestà  $n.$ <sup>efime</sup> de' raggi, le forze centrifughe fono come le potestà  $\frac{2n-1.$ <sup>efime</sup> de' raggi medefimi, e *viceversa*; e quindi allorchè le velocità fono in proporzione de' raggi; anche le forze centrifughe ftanno in tal proporzione, e *viceversa*.

## T E O R E M A IV.

10. *Le forze centrifughe de' corpi, che fi muovono in un cerchio, fono come i raggi direttamente, ed inverfamente come i quadrati de' tempi periodici, cioè de' tempi delle intere rivoluzioni*

## D I M O S T R A Z I O N E .

Nominando  $T, t$  i tempi periodici,  $C, c$  le circonferenze, è manifefto per la legge del moto equabile, che  $V = \frac{C}{T}$ ,

$v = \frac{c}{t}$ ; e però  $F:f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: \frac{C^2}{T^2 R} : \frac{c^2}{t^2 r} :: \frac{R^2}{T^2 R} : \frac{r^2}{t^2 r} :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ :

Il che era ecc.

11. COROLL. I. Le forze centrifughe fono come le velocità direttamente, e i tempi periodici inverfamente, perchè effendo  $V:v :: \frac{C}{T} : \frac{c}{t} :: \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ , ne viene  $F:f :: \frac{V}{T} : \frac{v}{t}$ .

12. COROLL. II. Se i quadrati de' tempi periodici fono come i raggi, le forze centrifughe fono eguali, e *viceversa*: così pure



pure se le velocità sono come i tempi periodici, le forze centrifughe sono eguali, e *viceversa*.

13. COROLL. III. Se i tempi periodici sono come le potestà  $n$ .<sup>esima</sup> de' raggi, le forze centrifughe sono inverfamente come le potestà  $2n - 1$ .<sup>esima</sup> de' medesimi raggi, e *viceversa*, e le velocità sono inverfamente come le potestà  $n - 1$ .<sup>esima</sup> de' raggi, e *viceversa*.

14. COROLL. IV. Se i tempi periodici sono in ragione sesquuplicata de' raggi ( che è il caso delle rivoluzioni de' pianeti ), le forze centrifughe, e però ancora le centripete sono in ragione inverfa duplicata de' raggi, e *viceversa*, e le velocità in ragione inverfa sudduplicata de' raggi, e *viceversa*.

### TEOREMA V.

15. *Se la velocità del moto circolare è dovuta all' altezza uguale alla metà del semidiametro, cioè è uguale a quella che acquista un corpo libero cadendo per l' azione della gravità terrestre dall' altezza d' un mezzo semidiametro, allora la forza centrifuga uguaglia la gravità terrestre, e viceversa.*

### DIMOSTRAZIONE.

In questa ipotesi diviene  $b = \frac{1}{2} r$ ; e conseguentemente

$f = \frac{2b}{r} = \frac{r}{r} = 1$ , che è appunto la gravità terrestre. Il che era ecc.

### S C O L I O.

16. Fino a qui non si è avuto riguardo alla massa del corpo, e perciò si è considerata la sola forza centrifuga *acceleratrice*, la quale si cangia in *motrice* con moltiplicarla per la massa. Dunque moltiplicando per le rispettive masse i termini delle precedenti ugualtà, e analogie si verrà ad ottenere i valori assoluti, e relativi delle forze centrifughe motrici. Così per esemp. nel caso di questo V. Teorema la forza

centrifuga motrice uguaglia il peso del corpo, perchè posta la sua massa  $= m$ , ed essendo  $f = 1$ , nasce  $mf = 1 \times m$ , che è appunto il peso del corpo; ond' è, che il filo sarà teso e stirato nè più, nè meno che se il corpo attaccatovi pendesse verticalmente, ed agisse contro il filo con tutto il suo peso.

### PROBLEMA I.

17. Se il corpo attaccato al filo riceve un tal colpo, che il suo tempo periodico  $t$  sia noto, e risulti nel filo una tensione uguale a quella che produce il peso del corpo immobile e verticalmente pendente; si domanda qual sia la lunghezza del filo, o il raggio  $r$  del cerchio.

### SOLUZIONE.

Supposto  $1:\pi$  il rapporto del diametro alla circonferenza, farà  $2r\pi$  la circonferenza del cerchio descritto, e per la legge del moto uniforme si ha  $t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{2b}}$ . Ora (§. 15.)  $r = 2b$ ; dunque  $t = \frac{2r\pi}{\sqrt{r}} = 2\pi\sqrt{r}$ ; e quindi  $r = \frac{t^2}{4\pi^2}$ . Il che era ecc.

### S C O L I O.

18. Si noti qui bene, che siccome l' espressione  $\frac{t^2}{4\pi^2}$  dee rappresentare una quantità lineare, e  $4\pi^2$  è un numero astratto, non può  $t^2$  esprimere che una linea, cui diremo  $l$ . Per determinare poi questa si rifletta, che nominando  $\theta$  il tempo, ed  $a$  l' altezza, da cui casca un grave in quel tempo, nasce  $\theta^2 = 2a$  nella presente ipotesi della gravità acceleratrice  $= 1$ . Laonde se  $t$  farà dato in secondi, starà il numero de' secondi in  $\theta^2$  al numero de' secondi in  $t^2$  come la linea  $2a$  alla linea  $l$ , cioè si avrà  $l = \frac{2t^2 a}{\theta^2}$ ; e perchè fatto  $\theta = 1$  si tro-

va  $a = 15, 1 \text{ pi.}$ , si ha quindi  $l = t^2 \times 30, 2 \text{ pi.}$ , e conseguentemente  $r = \frac{t^2}{4\pi^2} \times 30, 2 \text{ pi.}$ , essendo  $t$  dato in secondi.

19. COROLL. Se il tempo, che mette una palla inerte ma non pesante a descrivere la circonferenza d'un cerchio, è due volte tanto quanto il tempo d'un'oscillazione minima d'un pendolo, la di cui lunghezza è uguale al femidiametro  $r$  del predetto cerchio, e porta all'estremità una picciola massa pesante; la forza centrifuga *assoluta* o motrice della palla inerte è uguale al peso d'una massa grave di egual quantità di materia con detta palla. Imperciocchè si fa dalla dottrina de' pendoli, che il tempo d'un'oscillazione minima sta al tempo della caduta libera per la doppia altezza del pendolo, cioè pel diametro del cerchio descritto dalla palla inerte, come sta la semicirconferenza al diametro, ovvero come  $\pi : 2$ ; onde essendo il tempo di tal caduta  $= \sqrt{4r} = 2\sqrt{r}$ , ne viene che il tempo dell'oscillazione farà  $= \pi\sqrt{r}$ . Ma il tempo periodico della palla inerte è  $= \frac{2r\pi}{\sqrt{2b}}$ ; dunque dovendo esser questo doppio di quello, nascerà  $\frac{2r\pi}{\sqrt{2b}} = 2\pi\sqrt{r}$ , e quindi  $r = 2b$ , cioè finalmente  $f = \frac{2b}{r} = 1$ , che è quanto dire la forza centrifuga acceleratrice uguale alla gravità terrestre; dal che deriva la forza centrifuga *assoluta* o motrice uguale al peso della palla considerata non solo come inerte, ma anche come grave.

## PROBLEMA II. (fig. 1)

20. Sia una curva RA, la quale rotandosi intorno all'asse verticale AC generi una sferoide, di cui tutte le sezioni orizzontali sono tanti cerchi aventi le ordinate HM della curva genitrice per raggi. Si collochi in qualunque interno luogo M della sferoide cava un grave, e gli si dia un colpo, per cui incominci a descrivere il cerchio corrispondente del raggio HM. Si domanda quanta esser debba la velocità impressa dal colpo, perchè il corpo non sia costretto dalla gravità a calare al basso, ma seguiti a muoversi nel cerchio incominciato.

T t ij

## S O L U Z I O N E .

Sia l'ascissa  $AH = x$ , l'ordinata  $HM = y$ , e l'altezza dovuta alla ricercata velocità  $= b$ . Condotta la normale  $CM$  alla curva, la verticale  $MN$ , e l'orizzontale  $MF$  in direzione del raggio  $HM$ , si ponga mente, che la gravità spinge il corpo secondo  $MN$  con uno sforzo  $= 1$ , e la forza centrifuga risultante dal moto circolare lo folleccita secondo  $MF$  con una spinta  $= \frac{2b}{y}$ ; e però sia  $FM:MN::\frac{2b}{y}:1$ . Se pertanto il corpo ha da persistere in  $M$ , e così pure in ciascun punto della circonferenza, che ha  $HM$  per raggio, senza calare, nè ascendere, la risultante  $MO$  delle due forze  $MF$ ,  $MN$  dovrà essere perpendicolare all'elemento della curva in  $M$ , sicchè resti interamente elisa. Laonde  $MO$  è un prolungamento della normale  $CM$ , e i triangoli simili  $OMF$ ,  $MHC$  danno l'analogia  $MN:MF::CH:HM$ , cioè  $1:\frac{2b}{y}::\frac{ydy}{dx}:y$ ; ond'è  $b = \frac{ydx}{2dy}$ , cioè uguale alla metà della sottangente della curva genitrice. Data dunque la curva, la sua equazione differenziale farà conoscere l'altezza dovuta alla velocità ricercata. Il che era ecc.

21. COROLL. I. Se la sferoide è un cono colla punta in basso, cioè se la linea genitrice  $AM$  è retta, sicchè  $y = nx$ , si ottiene  $b = \frac{1}{2}x$ .

22. COROLL. II. Se è una paraboloidoide, ne viene  $y = x$ , doppia della precedente

## P R O B L E M A III.

23. *Nell'ipotesi precedente che il grave seguiti a muoversi dopo l'urto nel cerchio incominciato, si domanda l'equazione della curva genitrice quando la velocità impressa al corpo sia una funzione delle coordinate.*

## S O L U Z I O N E .

Essendo in tal supposto  $b$  una funzione di  $x, y$ , ed insieme  $\frac{ydx}{2dy}$ , co' metodi conosciuti del calcolo Integrale si ritrova un' equazione fra  $y$  ed  $x$ . Il che ecc.

24. COROLL. I. Supposta la velocità proporzionale all'ordinata, e però  $b = \frac{y^2}{a}$ , nasce  $adx = 2ydy$ , ed integrando in ipotesi che svaniscano insieme  $y$  ed  $x$ , si ottiene  $y^2 = ax$ , cioè la parabola conica.

25. COROLL. II. Supposto  $b = \frac{y^n}{a^{n-1}}$ , proviene  $2y^{n-1}dy = a^{n-1}dx$ , ed integrando  $\frac{2}{n}y^n = a^{n-1}x$  in ipotesi, che si annullino insieme  $y$  ed  $x$ , ed  $n$  sia un numero positivo.

26. COROLL. III. Se si suppone  $b = \frac{x^2}{a^{n-1}}$ , ne risulta  $\frac{2dy}{y} = \frac{a^{n-1}dx}{x^n}$ , e coll' integrazione proviene

$$2 \log. y = \frac{-a^{n-1}}{(n-1)x^{n-1}} + \text{cost.}$$

## P R O B L E M A IV.

27. *Determinare la sferoide, nella quale collocato un grave in qualunque punto M della sua cavità, e colpito colla conveniente velocità, che lo obblighi a descrivere il cerchio orizzontale senza discendere, compia il suo giro sempre nello stesso tempo.*

## S O L U Z I O N E .

Essendo  $b$  l' altezza dovuta alla velocità, colla quale il grave percorre la circonferenza del raggio  $HM$ , ossia  $y$  senza essere costretto a discendere per la sua gravità, e  $2\pi y$  la

circonferenza, proviene il tempo periodico costante

$t = \frac{2\pi y}{\sqrt{2b}}$ ; e in conseguenza  $y^2 = \frac{t^2}{2\pi^2} b$ . Il perchè la curva genitrice della sferoide è la parabola conica colle ordinate  $y$ , le ascisse  $b$ , e il parametro  $\frac{t^2}{2\pi^2}$ , e perciò la sferoide cercata è una paraboloidoide. Il che ecc.

28. COROLL. Col discorso del §. 18. si trova il parametro di questa parabola  $= \frac{t^2}{2\pi^2} \times 30, 2 \text{ pi.}$ , prendendo il tempo  $t$  espresso in secondi.

### P R O B L E M A V. (fig. II.)

29. *Un filo AC fermato in A sostiene nell' altro estremo C un grave (la di cui massa dee concepirsi concentrata in un punto): guidata la retta verticale AB, e portato il filo nella situazione obliqua AC, si dà al grave una percossa in direzione perpendicolare al piano BAC, sicchè il grave incomincia a descrivere un cerchio normale ad AB, ed il filo AC un cono retto coll' asse AB. Si cerca quanta debba essere la velocità comunicata al corpo, affinchè continui a descrivere questo cerchio, ed il filo a scorrere l' intero cono*

### S O L U Z I O N E.

Poichè  $CB$  normale a  $BA$  è raggio del cerchio percorso, se si nomina  $h$  l' altezza dovuta alla ricercata velocità, la forza centrifuga del corpo in direzione di  $CE$  sarà  $= \frac{2h}{r}$ , posto  $r = BC$ , e la gravità terrestre, che lo sollecita secondo la verticale  $CI$ , è  $= 1$ . Presse pertanto le linee  $CE$ ,  $CI$  proporzionali a queste forze, la loro azione non dee punto cambiare l'angolo  $BAC$ , se il filo ha da descrivere un cono. Perchè la risultante  $CF$  di esse forze dee trovarsi nella stessa direzione del filo per poter esserne interamente distrutta. Ma la similitudine de' triangoli  $ABC$ ,  $CFE$  dà l' analogia

$CE:EF::CB:BA$ , cioè fatta  $AB=a$ , risulta  $\frac{2b}{r}:1::r:a$ ; dal

che si raccoglie  $b=\frac{r^2}{2a}$ . Il che ecc.

30. COROLL. I. Il tempo periodico impiegato dal grave a descrivere il cerchio, e del filo a trascorrere il cono è

$=\frac{2r\pi}{\sqrt{2b}}$ , ed essendosi trovato  $b=\frac{r^2}{2a}$ , appare un tal tempo  $=2\pi\sqrt{a}$ ; il che mostra, che i cono di egual altezza sono tutti descritti nel medesimo tempo; e che ad altezze disuguali i quadrati de' tempi periodici sono come queste altezze.

31. COROLL. II. Se la forza centrifuga di questo movimento è uguale alla gravità, il filo fa un angolo semiretto colla verticale, e *viceversa*: imperciocchè supposto  $\frac{2b}{r}=1$ ,

nasce  $r=a$ , e supposto  $r=a$ , nasce  $\frac{2b}{r}=1$ .

32. COROLL. III. Chiamato  $\phi$  l'angolo  $CAB$ , ed  $l$  la lunghezza  $AC$  del filo, si ritrova  $a=l\cos.\phi$ , e perciò  $t=2\pi\sqrt{a}=2\pi\sqrt{l\cos.\phi}$ , cioè ne' cono, che hanno lo stesso angolo alla punta, i quadrati de' tempi periodici sono come le lunghezze de' fili, e generalmente come le lunghezze de' fili e i coseni degli angoli in punta, ovvero come le lunghezze de' fili, e i seni delle loro obliquità all'orizzonte.

33. COROLL. IV. Questo tempo periodico pel cono sta al tempo della libera caduta d'un grave dalla doppia altezza del cono come la circonferenza del cerchio al diametro; perchè il tempo di tal caduta per la dottrina del moto equabilmente accelerato si fa essere  $=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$ , e il tempo periodico si è trovato  $=2\pi\sqrt{a}$ .

34. COROLL. V. Se il cono è acutissimo per modo che sia a un dipresso  $a=l$ , e  $\phi=0$ , il tempo, in cui viene descritto, diventando  $2\pi\sqrt{l}$ , uguaglia il tempo, in cui resta descritto un cerchio, il di cui raggio sia la lunghezza del filo, e dove la forza centrifuga ( §. 17. ) sia uguale alla gravità.

35. COROLL. VI. Se il tempo periodico del filo per un cono

uguaglia il tempo della libera caduta d' un grave da un' altezza uguale alla lunghezza del filo , il seno dell' obliquità del filo all' orizzonte sta al seno tutto come il quadrato inscritto in un cerchio sta al quadrato della circonferenza , e *vice-versa* . Imperciocchè quel tempo periodico  $= 2\pi\sqrt{l \cos.\phi}$ , e quello della caduta  $= \sqrt{2l}$  ; onde dovendo essere  $\sqrt{2l} = 2\pi\sqrt{l \cos.\phi}$  , cioè  $1 = 2\pi^2 \cos.\phi$  , nasce la proporzione  $\cos.\phi : 1 :: \frac{1}{2} : \pi^2$  , ossia la proposta .

### PROBLEMA VI. ( fig. I. )

36. *Muovasi un corpo non libero nella linea RMA da R verso A , e venga continuamente sollecitato da una forza in direzione parallela all' asse CA . Si domanda la pressione , che il corpo esercita in ciascun luogo M della curva*

### SOLUZIONE .

Si supponga , che il corpo abbia descritto l' arco  $RM$  , e si chiami  $p$  la forza , che lo sollecita secondo  $MP$  parallela all' asse . Risolta questa nella *forza tangenziale* secondo la tangente  $MQ$  , e nella *forza normale* secondo la perpendicolare  $MO$  alla curva , nasce la forza tangenziale  $= \frac{MQ}{MP} p$  , e la

*normale*  $= \frac{MO}{MP} p$  ; e se si fa  $AH = x$  ,  $HM = y$  ,  $AM = s$  , è

facile il conoscere , che  $\frac{MQ}{MP} = \frac{-dx}{-ds} = \frac{dx}{ds}$  ; ed  $\frac{MO}{MP} = \frac{-dy}{-ds}$   $= \frac{dy}{ds}$  : laonde la forza tangenziale  $= \frac{pdx}{ds}$  , e la forza nor-

male  $= \frac{pdy}{ds}$  . La prima di queste non ha alcuna parte nel pre-

mere il corpo contro la curva , la seconda all' opposto è tutta impiegata in produrre questo effetto . Vi ha inoltre una forza risultante dal moto curvilineo , la quale è parimente tutta rivolta a premere il corpo perpendicolarmente contro la curva ; perchè essendo l' archetto  $Mm$  della curva lo stesso che



che quello del suo circolo osculatore in  $M$ , farà anche una tal forza del corpo nel punto  $M$  della curva la stessa che la centrifuga nel circolo osculatore percorso colla velocità in  $M$  acquistata, e però agirà in direzione di  $MO$ , o del raggio osculatore perpendicolare ad  $Mm$ . Il perchè chiamata  $b$  l'altezza dovuta alla velocità in  $M$ ,  $r$  il raggio osculatore, si ottiene questa forza, ovvero la pressione contro  $Mm = \frac{2b}{r}$ .

Dunque la pressione totale del corpo contro un luogo indeterminato  $M$  della curva è  $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2b}{r} = \frac{pdy}{ds}$

$+ \frac{2b}{ds^3 : dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$  per essere, come si fa, il raggio  $r$  dell'evoluta  $= \frac{ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ . Se dunque la forza sollecitante  $p$ , e l'al-

tezza  $b$  dovuta alla velocità in  $M$  sono quantità note, o anche date per le coordinate  $x, y$ , l'equazione della curva somministrerà il vero valore della pressione, che si cerca. Il che ecc.

37. COROLL. I. Per ritrovare la velocità del corpo in qualunque punto  $M$  della curva basta moltiplicare la forza tangenziale  $\frac{pdx}{ds}$  per l'archetto  $-ds$ , ed ottiensì, come è noto,

$db = -pdx$ ,  $b = -\int pdx + \text{cost.}$ , e supposto, che il corpo parta da  $R$  colla velocità dovuta ad un'altezza nota  $a$ , e preso l'integrale  $\int pdx$  per modo che svanisca allorchè  $x = AB = b$ , proviene  $b = a - \int pdx$ .

38. COROLL. II. Si ritrova il tempo  $t$  impiegato a scorrere l'arco indefinito  $RM$  colla nota formola  $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2b}}$

$= \frac{-ds}{\sqrt{2(a - \int p dx)}}$ , la quale dà  $t = \int \frac{-ds}{\sqrt{(2a - 2 \int p dx)}}$ , prendendo quest' integrale in modo che si annulli allorchè  $s = AMR$ , ovvero  $x = a$ .

39. COROLL. III. Se un corpo viene lanciato da  $B$  in direzione di  $BA$  con una velocità dovuta alla predetta altezza  $a$ , ed agisce in esso la stessa forza follecitante  $p$  comunque variabile in direzione parimente di  $BA$ , e si chiama  $b'$  l' altezza dovuta alla velocità in  $H$ , nasce anche in questo caso

$$db' = -p dx, \text{ ed } b' = a - \int p dx = b. \text{ In conseguenza acqui-}$$

sta egli la stessa velocità così discendendo per l' altezza rettilinea  $BH$ , come per la via comunque curvilinea  $RM$ ; e lo stesso accade quand' anche il corpo incominci a muoversi dalla quiete, cioè senza velocità impressa.

40. COROLL. IV. Se il corpo con una data velocità dovuta all' altezza  $a$  incomincia a muoversi da  $A$  verso  $M$  sulla linea obbligata  $AM$ , ed intanto agisce in esso continuamente la forza  $p$  in direzione parallela all' asse dal basso all' alto, siccome in questo caso la forza tangenziale tende a diminuire la velocità del corpo, si ritrova  $p dx = -db$ , ed  $b$

$$= a - \int p dx, \text{ prendendo però l' integrale } \int p dx \text{ in modo}$$

che si annulli con  $x$ . Perchè poi trovasi questa stessa formula anche pel corpo lanciato da  $A$  lungo l' asse  $AC$  colla stessa velocità, ed animato dalla stessa forza  $p$  in direzione opposta al suo moto; quindi ne viene, che o il corpo ascenda per la via rettilinea  $AM$ , o per la curvilinea di qualunque forma  $AM$ , ad eguali elevazioni in  $H$ , ed  $M$  si trova aver

perdute uguali velocità; cosicchè nell' integrale  $\int p dx$  se si

prende  $x$  di tal grandezza  $AB$ , che il detto integrale diventi  $= a$ , si estingue tutta la velocità del corpo sia che s' innalzi direttamente per  $AB$ , sia che ascenda ad uguale elevazione per l' arco comunque formato  $AR$ . Giunto poi in  $B$  oppure in  $R$  discende dalla quiete per  $BA$ , ovvero per  $RMA$  per l' azione continua della forza  $p$  follecitante dall' alto al basso, ed acquista in  $A$  nell' un caso e nell' altro la medesima velocità.

## PROBLEMA VII. (fig. III.)

41. Dall' estremità  $G$  d' un filo fermato in  $C$  pende un grave, e sollevandosi il filo disteso nella situazione orizzontale  $CA$  si abbandona a se stesso sicchè il corpo incominci a descrivere l' arco  $AE$  del cerchio verticale  $AGBF$ . Si fa la ricerca quanto sia premuto dal grave qualunque punto  $E$  della circonferenza del cerchio, ovvero quanto sia teso il filo in qualunque situazione.

## S O L U Z I O N E.

Nominate al solito  $x, y$  le coordinate  $GQ, QE$ , ed  $r$  il semidiametro, si ha pel cerchio l' equazione  $y^2 = 2rx - x^2$ ,  $ydy = (r - x)dx$ ,  $y^2dy^2 = (r - x)^2 dx^2$ ,  $\frac{(2rx - x^2) dy^2}{(r - x)^2} = dx^2$ ,  $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{r^2 dy^2}{(r - x)^2}$ ,  $ds = \frac{r dy}{r - x}$ . Ora, quando il grave è disceso per  $AE$ , ha acquistato in  $E$  una velocità dovuta all' altezza  $CQ = r - x$  (§. 39.). Dunque fatte queste sostituzioni nella formola della pressione  $\frac{pdy}{ds} + \frac{2b}{r}$ , e posto  $p = 1$ , perchè la forza sollecitante in quest' ipotesi è la gravità, si ottiene la cercata pressione in  $E = \frac{r - x}{r} + \frac{2r - 2x}{r} = \frac{3r - 3x}{r}$ , cioè uguale a tre volte l' altezza  $CQ$  dell' arco descritto. Il che era ecc.

42. COROLL. I. Nel punto infimo  $G$ , dove  $x = 0$ , la pressione uguaglia tre volte la gravità; e moltiplicando per la massa del corpo, risulta la pressione *motrice* (che è la pressione propriamente detta), e quindi la tensione del filo tre volte maggiore del peso del corpo.

43. COROLL. II. Rimosso il filo dalla direzione verticale, e portato nella situazione obliqua  $CI$ , e qui abbandonato, la pressione in qualunque punto  $E$  proviene

$$= \frac{r-x}{r} + \frac{2a-2x}{r} = \frac{r+2a-3x}{r}, \text{ chiamando } a \text{ l'altezza}$$

$GN$  del corpo sopra il punto infimo, ed avuto riguardo alla velocità acquistata dal corpo in  $E$ , la quale è dovuta all'altezza  $NQ = a-x$  della discesa (§. 39.). La pressione poi nel punto infimo  $G$  nasce  $= \frac{r+2a}{r}$ .

44. COROLL. III. Se l'arco  $GI$  è di  $60^\circ$ , la pressione in  $G$ , ovvero la tensione del filo fa due volte il peso del corpo, giacchè in questo caso  $a = \frac{1}{2}r$ , onde  $\frac{r+2a}{r} = 2$

### PROBLEMA VIII.

45. *Se un grave pendente da un filo fermato in  $C$  viene obbligato a percorrere il cerchio verticale  $AGBF$ ; si domanda quanto sia teso il filo da questo corpo allorchè passa pel punto infimo  $G$ .*

### S O L U Z I O N E.

Se il corpo trovandosi in  $A$ , quando il filo è tenuto nella situazione orizzontale  $CA$ , casca dalla quiete e descrive il quadrante  $AG$ , acquista in  $G$  la velocità dovuta all'altezza del semidiametro  $CG$  (§. 39.), velocità che interamente si estingue con portarsi che fa il corpo ad uguale altezza in  $B$  per l'altro quadrante  $GB$ . E' dunque mestieri al corpo in quiete nel punto  $A$  dare un tal urto in direzione della tangente, che lo obblighi a salire da  $G$  fino al punto supremo  $F$ , e a tender quivi il filo con una forza per lo meno eguale al suo peso: dico *per lo meno*, poichè una forza maggiore del peso del corpo non produrrebbe qui alcun inconveniente se non forse quello di allungare il filo, al che rimedia l'ipotesi del filo *inestensibile*, ma una forza minore del peso non impedirebbe il corpo di cascare per  $FC$  senza poter continuare a percorrere tutto il cerchio. Laonde chiamata  $b$  l'altezza dovuta alla velocità del corpo nel più alto punto  $F$ , debb'

effere la tensione del filo, o la forza centrifuga  $\frac{2b}{r}$  per lo me-

no = 1, e quindi  $b = \frac{1}{2}r$ . Ma il corpo nel salire per la semicirconferenza  $GBF$  perde ( §. 40. ) tanta velocità quanta è quella che è dovuta all' altezza  $GF = 2r$ : dunque ritenendo in  $F$  ancora la velocità dovuta per lo meno all' altezza  $\frac{1}{2}r$ , dee avere in  $G$  la velocità per lo meno dovuta all' altezza  $\frac{5}{2}r$ . Conseguentemente la forza centrifuga del corpo in

$G$  farà per lo meno  $= \frac{5r}{r} = 5$ , cioè cinque volte la gravità, o a meglio dire denominata  $m$  la massa del corpo, la forza centrifuga riuscirà  $= \frac{5rm}{r} = 5m$ , vale a dire a cinque volte

il suo peso. E siccome nel punto infimo  $G$  il filo vien teso non solo dalla forza centrifuga, ma ancora da tutto il peso del corpo pendente, proviene perciò la tensione in  $G$  almeno sei volte maggiore del peso del corpo. Il che ecc.

46. COROLL. I. Per trovare ( in quest' ipotesi che la tensione del filo in  $G$  sia sei volte il peso del corpo ) la tensione di esso in qualunque punto  $E$  de' due quadranti inferiori

$AEG$ ,  $GEB$ , si ricorre alla formola  $\frac{pdy}{ds} + \frac{2b}{r}$ , e si osserva, che in questo caso la velocità impressa al corpo in  $A$  colla percossa è dovuta all' altezza  $\frac{3}{2}r$ , e conseguentemente in  $E$

è dovuta all' altezza  $\frac{3}{2}r + CQ = \frac{5}{2}r - x$ ; dal che si raccoglie  $b = \frac{5}{2}r - x$ ; e già si è trovato  $\frac{pdy}{ds} = \frac{r-x}{r}$ . Perlo-

chè la tensione del filo in  $E$   $\frac{pdy}{ds} + \frac{2b}{r} = \frac{r-x}{r} + \frac{5r-2x}{r}$   
 $= \frac{6r-3x}{r}$ .

47 COROLL. II. Per determinare poi la tensione del filo in qualsivoglia punto de' due quadranti superiori  $AVF$ ,  $FHB$  convien fare attenzione, che in questo caso la gravità in vece di cospirare colla forza centrifuga ad accrescere la tensione, vi si oppone anzi e ne sminuisce l'azione; onde per questa parte il termine  $\frac{pdy}{ds}$  dovrebbe sottrarsi dall'altro  $\frac{2b}{r}$ : ma

siccome in questo stesso caso la frazione  $\frac{dy}{ds}$  è necessariamente negativa, perchè quando il corpo ascende per l'uno o l'altro de' due quadranti cresce la  $s$  e scema la  $y$ , e quando discende cresce la  $y$  e scema la  $s$ ; quindi nasce che il termine  $\frac{pdy}{ds}$  rimane additivo, come lo era nel primo caso. Sicchè anche pe' due quadranti superiori risulta la tensione del filo  $= \frac{6r - 3x}{r}$ , intendendo per  $x$  un'ascissa maggiore del semidiametro, come è  $GL$  per riguardo al punto  $H$ , e  $GO$  per rispetto al punto  $V$ .

### PROBLEMA IX.

48. Tenuto il filo nella situazione orizzontale  $CA$  si cerca nel raggio verticale  $CG$  un tal punto  $Q$ , che piantandovi un chiodo e lasciando cadere il corpo liberamente questo descriva intorno a  $Q$  un intero cerchio colla parte  $GQ=QN$  del filo, attortigliandosi (senza però accorciarsi) intorno a  $Q$ .

### S O L U Z I O N E .

Giunto il corpo in  $G$  acquista la velocità dovuta all'altezza  $r$ , alzandosi poi fino in  $N$  perde tanta velocità quanta è dovuta all'altezza  $GN$ , cioè  $2x$ , facendo  $GQ=x$ . Dunque ritiene in  $N$  una velocità dovuta all'altezza  $r - 2x$ , ed ha quivi una forza centrifuga  $= \frac{2r - 4x}{x}$ . Ora questa forza dee per lo meno essere uguale alla gravità, se il corpo ha da sof-

tenerfi in  $N$ , e proseguire il suo moto circolare. Perciò si ricava  $\frac{2r - 4x}{x} = 1$ , e di qui  $x = \frac{2}{5}r$ . Il che ecc.

PROBLEMA X. (fig. I.)

49. Determinare la curva  $RA$  situata in un piano verticale, la quale da un grave, che discende per essa e che ha ricevuta una velocità primitivamente impressa, sia premuta ugualmente in tutti i suoi punti.

S O L U Z I O N E.

Posta  $n$  la massa del corpo si è dianzi trovato, che la pressione contro qualunque punto indefinito  $M$  è  $= \frac{ndy}{ds}$

$+ \frac{2nb dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$ ; e siccome si suppone costante, e però equi-

valente al peso d'una data massa  $m$ , si ha quindi  $\frac{m}{n} = \frac{dy}{ds}$

$+ \frac{2b dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$ . Ora essendo  $a$  l'altezza dovuta alla velocità impressa al corpo in  $R$ , e  $BH$ , cioè  $BA - AH$ , ossia  $b - x$  l'altezza dovuta alla velocità acquistata nella discesa per  $RM$ , proviene  $b = a + b - x$ , e conseguentemente

$\frac{m}{n} = \frac{dy}{ds} + \frac{2(a + b - x) dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$ . Per facilitare l'integrazione di questa equazione, supporremo costante la  $ds$ , che dà

$dds = d\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$ , cioè  $ddx = \frac{-dyddy}{dx}$ . E poichè

$$dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx^2 \left( \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2} \right) = dx ddy - dy ddx, \text{ fatta la}$$

soffituzione del valore di  $ddx$ , apparisce  $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2) ddy}{dx} = \frac{ds^2 ddy}{dx}; \text{ onde la nostra equazione diven-}$$

$$\text{ta } \frac{m}{n} = \frac{dy}{ds} + \frac{2(a+b-x) ddy}{ds dx}, \text{ cioè } \frac{m}{n} ds dx = dy dx +$$

$2(a+b-x) ddy$ . Divido questa equazione per  $2(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\text{ed ottengo } \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} (a+b-x)^{-\frac{1}{2}} ds dx = \frac{1}{2} (a+b-x)^{-\frac{1}{2}} dy dx$$

$+ (a+b-x)^{\frac{1}{2}} ddy$ , il di cui integrale si trova subito ef-

$$\text{fere } \frac{m}{n} (a+b-x)^{\frac{1}{2}} ds = (a+b-x)^{\frac{1}{2}} dy + C ds. \text{ La co-}$$

stante  $C$  si determina con supporre, che l'angolo formato

dalla tangente della curva colla verticale nel punto  $R$  della

partenza del corpo sia noto, ed  $=\phi$ : allora essendo  $\frac{dy}{ds}$

$$= \frac{\frac{m}{n} (a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}{(a+b-x)^{\frac{1}{2}}}, \text{ e } \frac{dy}{ds} \text{ rappresentando il seno d'un tal}$$

angolo per un punto indefinito della curva, risulta pel pun-

tto dato  $R$ , dove  $x=b$ , sen.  $\phi = \frac{m}{n} - \frac{C}{\sqrt{a}}$ , e conseguente-

mente  $C = \left(\frac{m}{n} - \text{sen. } \phi\right) \sqrt{a}$ . Riguardo ora  $C$  come una

quantità determinata, e dall'equazione integrata ricavo

$$ds = \frac{(a+b-x)^{\frac{1}{2}} dy}{\frac{m}{n} (a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}, \text{ cioè}$$

$$ds^2 =$$



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{(a+b-x) dy^2}{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}; \text{ e quindi}$$

$$dy^2 = \frac{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2 dx^2}{a+b-x - \left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}, \text{ e per ultimo}$$

$$dy = \frac{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right) dx}{\sqrt{a+b-x - \left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}}. \text{ Per integrare quest'$$

equazione prendo  $u = (a+b-x)^{\frac{1}{2}}$ ,  $u^2 = a+b-x$ ,

$$-2udu = dx, \text{ ed ottengo } dy = \frac{-2\left(\frac{m}{n}u - C\right)udu}{\sqrt{\left(u^2 - \frac{m^2}{n^2}u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}},$$

$$\text{e posto } 1 - \frac{m^2}{n^2} = K^2, \text{ ne traggio } dy = \frac{2\left(C - \frac{m}{n}u\right)udu}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}}.$$

Piglio inoltre  $\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)} = Ku + z$ , e però

$$\frac{2m}{n}Cu - C^2 = 2Kzu + z^2, \text{ ovvero } u = \frac{C^2 + z^2}{\frac{2m}{n}C - 2Kz},$$

$$du = \frac{2zdz\left(\frac{2m}{n}C - 2Kz\right) + 2Kdz\left(C^2 + z^2\right)}{\left(\frac{2m}{n}C - 2Kz\right)^2}$$

$$= \frac{(KC^2 + \frac{2m}{n} Cz - Kz^2) dz}{2 \left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^2}, \quad Ku + z = \frac{KC^2 + Kz^2}{\frac{2m}{n} C - 2Kz} + z$$

$$= \frac{KC^2 + \frac{2m}{n} Cz - Kz^2}{\frac{2m}{n} C - 2Kz} = \sqrt{(K^2u^2 + \frac{2m}{n} Cu - C^2)},$$

$$\frac{du}{\sqrt{(K^2u^2 + \frac{2m}{n} Cu - C^2)}} = \frac{dz}{\frac{m}{n} C - Kz}. \quad \text{Resta a trovare}$$

$2 \left(C - \frac{m}{n} u\right) u$  dato pure per  $z$ , e già si vede essere

$$C - \frac{m}{n} u = C - \frac{\frac{m}{n} C^2 - \frac{m}{n} z^2}{2 \left(\frac{m}{n} C - Kz\right)} = \frac{\frac{m}{n} C^2 - 2CKz - \frac{m}{n} z^2}{2 \left(\frac{m}{n} C - Kz\right)}, \quad \text{e quindi}$$

$$2 \left(C - \frac{m}{n} u\right) u = \frac{(C^2 + z^2) \left(\frac{m}{n} C^2 - 2CKz - \frac{m}{n} z^2\right)}{2 \left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^2}, \quad \text{e final-}$$

mente  $\frac{2 \left(C - \frac{m}{n} u\right) u du}{\sqrt{(K^2u^2 + \frac{2m}{n} Cu - C^2)}}$

$$= \frac{(C^2 + z^2) \left(\frac{m}{n} C^2 - 2CKz - \frac{m}{n} z^2\right) dz}{2 \left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n} C^4 - 2C^3 Kz - 2CKz^3 - \frac{m}{n} z^4\right) dz}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^3} . \text{ Si faccia}$$

$\frac{m}{n} C - Kz = t, z = \frac{\frac{m}{n} C - t}{K}, dz = -\frac{dt}{K}$ . Laonde la precedente espressione si trasforma in

$$= \frac{-\left(\frac{m}{n} C^4 - 2C^3\left(\frac{m}{n} C - t\right) - \frac{2C}{K^2}\left(\frac{m}{n} C - t\right)^3 - \frac{1}{K^4}\left(\frac{m}{n} C - t\right)^4\right) \frac{dt}{K}}{2t^3} =$$

$$\left(\frac{m}{n} C^4 - 2C^3 t + \frac{2m^3 C^4}{n^3 K^2} - \frac{6m^2 C^3 t}{n^2 K^2} + \frac{6m C^2 t^2}{n K^2} - \frac{2C t^3}{K^2}\right. \\ \left.+ \frac{1}{K^4}\left(\frac{m^4}{n^4} C^4 - \frac{4m^3}{n^3} C^3 t + \frac{6m^2}{n^2} C^2 t^2 - \frac{4m}{n} C t^3 + t^4\right)\right) \frac{dt}{2K t^3},$$

la quale è integrabile parte algebricamente, parte per la quadratura dell' iperbola. Dunque ecc. Il che ecc.

50. COROLL. I. Se si vuole, che la pressione costante sia uguale al peso stesso del corpo, cioè  $n = m$  si ha

$$dy = \frac{(2Cu - 2u^2) du}{\sqrt{(2Cu - C^2)}} . \text{ Perciò posto } \sqrt{(2Cu - C^2)} = p, \text{ cioè}$$

$$2Cu - C^2 = p^2, Cdu = p dp, u = \frac{p^2 + C^2}{2C}, 2Cu - 2u^2 = p^2$$

$$+ C^2 - \frac{(p^2 + C^2)^2}{2C^2} = \frac{C^4 - p^4}{2C^2}, \frac{(2Cu - 2u^2) du}{\sqrt{(2Cu - C^2)}} = \frac{(C^4 - p^4) dp}{2C^3} .$$

Laonde l' integrale farà  $y = \frac{1}{2} Cp - \frac{p^5}{10 C^3} + \text{const.}$

$$= \frac{1}{2} C \sqrt{(2Cu - C^2)} - \frac{(2Cu - C^2)^2 \sqrt{(2Cu - C^2)}}{10 C^3} + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2} C \sqrt{(2Cu - C^2)} - \frac{(2u - C)^2 \sqrt{(2Cu - C^2)}}{10 C} + \text{const.}$$

$$= \frac{(2C^2 + 2Cu - 2u^2) \sqrt{(2Cu - C^2)} + \text{cost.}}{5C} = (2C^2 + 2C(a+b-x))^{\frac{x}{2}}$$

—  $2a - 2b + 2x$ )  $\sqrt{(2C(a+b-x))^{\frac{x}{2}} - C^2}$  + cost. Sicchè annullandoli insieme  $y$  ed  $x$ , proviene cost. =  $(2a + 2b - 2C^2 - 2C(a+b)^{\frac{x}{2}}) \sqrt{(2C(a+b)^{\frac{x}{2}} - C^2)}$ . Dunque finalmente  $y = (2a + 2b - 2C^2 - 2C(a+b)^{\frac{x}{2}}) \sqrt{(2C(a+b)^{\frac{x}{2}} - C^2)} + (2C^2 + 2C(a+b-x))^{\frac{x}{2}} - 2a - 2b + 2x \sqrt{(2C(a+b-x))^{\frac{x}{2}} - C^2}$ .

51. COROLL. II. Qualora vogliasi, che la pressione non sia costante, ma variabile secondo una data legge, la quantità  $\frac{m}{n}$  farebbe variabile, e farebbe nota la legge della sua variazione. Se per esempio si suppone, che la pressione sia in ogni punto proporzionale alla velocità del corpo,  $\frac{m}{n}$  diviene proporzionale a  $\sqrt{(a+b-x)}$ ; onde presa una quantità nota  $\lambda$  nasce  $\frac{m}{n} = \lambda(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$ . Perlochè

$$dy = \frac{(\lambda(a+b-x) - C) dx}{\sqrt{(a+b-x) - (\lambda(a+b-x) - C)^2}}; \text{ e posto } a+b-x =$$

$x = u$ , si trova  $dy = \frac{(C - \lambda u) du}{\sqrt{(u^2 - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2)}}$ . Per integrare questa equazione bisogna renderla razionale, ed a quest'effetto cerco prima i divisori della quantità radicale, supponendo  $u - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2 = 0$ , cioè  $u^2 - \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2} u + \frac{C^2}{\lambda^2} = 0$ ,

donde si trae  $u = \frac{2C\lambda + 1 \pm \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}$ . Laonde si ha  $(u - \frac{2C\lambda - 1 - \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda})(u - \frac{2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}) = u^2 - \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2} u + \frac{C^2}{\lambda^2}$ ; e moltiplicando per  $\lambda^2$ , e mutando i segni apparisce  $-\lambda^2 u^2 + 2C\lambda u + u - C^2 =$

$$\left(-\lambda u + \frac{2C\lambda + 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right) \left(\lambda u - \frac{2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right).$$

Prendo per brevità  $\frac{2C\lambda + 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda} = f$ , e parimente  $\frac{-2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda} = g$ ; ciò fatto la nostra equazione

$$\text{da integrarsi si cangia in } dy = \frac{(C - \lambda u) du}{\sqrt{(u - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2)}}$$

$$= \frac{(C - \lambda u) du}{\sqrt{(f - \lambda u) \times (g + \lambda u)}}. \text{ Assumo ora } \sqrt{(f - \lambda u) \times (g + \lambda u)}$$

$$= (f - \lambda u) z; \text{ ond' è } g + \lambda u = (f - \lambda u) z^2, \lambda u + \lambda u z^2$$

$$= fz^2 - g, u = \frac{fz^2 - g}{\lambda + \lambda z^2}, du = \frac{2f(\lambda + \lambda z^2)z dz - 2\lambda(fz^2 - g)z dz}{(\lambda + \lambda z^2)^2}$$

$$= \frac{2\lambda(f + g)z dz}{(\lambda + \lambda z^2)^2}. \text{ Parimente si trova } (f - \lambda u)z$$

$$= \left(f + \frac{\lambda g - \lambda fz^2}{\lambda + \lambda z^2}\right)z = \frac{(f + g)z}{1 + z^2}, C - \lambda u = C + \frac{g - fz^2}{1 + z^2}$$

$$= \frac{C + g + (C - f)z^2}{1 + z^2}, (C - \lambda u) du$$

$$= \frac{2(C + g)(f + g)z dz + 2(C - f)(f + g)z^3 dz}{\lambda(1 + z^2)^3}. \text{ Dunque}$$

$$dy = \frac{2(C + g) dz + 2(C - f)z^2 dz}{\lambda(1 + z^2)^2} = \frac{2(C + g)}{\lambda} \times \frac{dz}{(1 + z^2)^2}$$

$$+ \frac{2(C - f)}{\lambda} \times \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)^2}. \text{ Riduco prima ad integrazione il}$$

primo termine di questo secondo membro ricorrendo al noto Teorema del Calcolo Integrale, che  $\int \frac{dt}{(a + bt^2)^n}$

$$= \frac{t}{(2n - 2)a(a + bt^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{(2n - 2)a} \int \frac{dt}{(a + bt^2)^{n-1}}; \text{ onde}$$

fatto il confronto con  $\int \frac{dz}{(1 + z^2)^2}$ , si trova questo

$$= \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2} \text{arc. tang. } z .$$

Parimente paragonando l' altro termine  $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2}$  col no-

$$\text{to canone del Calcolo Integrale } \int \frac{t^p dt}{(a+bt^m)^q} =$$

$$\frac{-t^{p-m+1}}{m(q-1)b(a+bt^m)^{q-1}} + \frac{(p-m+1)}{(q-1)mb} \int \frac{t^{p-m} dt}{(a+bt^m)^{q-1}} \text{ otten-}$$

$$\text{go } \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} = \frac{-z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$- \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2} \text{arc. tang. } z . \text{ Dunque risulta } y = \frac{(C+g)z}{\lambda(1+z^2)}$$

$$+ \frac{C+g}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \frac{(f-C)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{C-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \text{cost.}$$

$$= \frac{(g+f)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \text{cost.}$$

$$= \frac{(g+f) \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}}}{\lambda \left(1 + \frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sqrt{(g+\lambda u) \times (f-\lambda u)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sqrt{(a+b-x - (\lambda \times \overline{a+b-x} - C))^2}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sqrt{(a+b-x - (\lambda \times \overline{a+b-x} - C))^2}$$

$$- \frac{1}{\lambda} \sqrt{(a+b - (\lambda \times \overline{a+b} - C))^2}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}}$$

$$= \frac{2C + g - f}{\lambda} \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g + \lambda \times a + b}{f - \lambda \times a + b}}.$$

52. COROLL. III. Se si vuole, che la legge della variazione della pressione sia di essere in ragione inverfa della velocità del corpo, allora  $\frac{m}{n}$  si cangia in  $\frac{\lambda}{\sqrt{(a+b-x)}}$ , e conseguentemente si ha  $dy = \frac{(\lambda - C) dx}{\sqrt{(a+b-x - (\lambda - C)^2)}}$ , ed integrando  $y = 2(C - \lambda)\sqrt{a+b-x - (\lambda - C)^2} - 2(C - \lambda)\sqrt{a+b - (\lambda - C)^2}$ .

### P R O B L E M A XI (fig. IV)

53. *Se per la convessità della curva AMB scavata in foglia di canale, ed avente il suo asse in situazione verticale, discende un grave partendo da qualunque punto della curva, si domanda quel punto, dove il corpo abbandona la curva, e si distacca dal canale.*

### S O L U Z I O N E .

La gravità =  $\mathbf{I}$ , che tiene il corpo attaccato alla curva, agisce con uno sforzo =  $\frac{dy}{ds}$  ( §. 36 ) chiamando  $y$  la  $NM$ ,  $x$  la  $AN$ , e l' arco  $AM$ , e con questo sforzo il corpo preme il canale. Ma ad un tale sforzo direttamente si oppone quello della forza centrifuga, che spinge il corpo lungi dalla curva in direzione ad essa perpendicolare, e che li è trovato =  $\frac{2b}{r}$ , preso  $r$  pel raggio del circolo osculatore della curva in quel punto, dove il corpo si trova, ed  $b$  per l' altezza dovuta alla velocità del corpo in quel punto. Quando adunque farà  $\frac{dy}{ds} = \frac{2b}{r}$ , ovvero  $\frac{dy}{ds} - \frac{2b}{r} = 0$ , allora il grave abbandonerà la curva, e si distaccherà dal canale descrivendo, come è manifesto, una parabola conica in virtù dell' impeto acquistato nel punto del distacco, e delle sollecitazioni co-

stanti della gravità. Pertanto l' equazione della curva applicata alla formola  $\frac{dy}{ds} - \frac{2b}{r} = 0$  farà conoscere l' ascissa , o l' ordinata corrispondente al punto del distacco , che si cerca. Il che ecc.

54. COROLL. I. Se  $AMB$  è un arco di cerchio col raggio  $r$ , e parte il corpo dalla quiete dal punto più alto  $A$ , già si fa essere  $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$ ,  $2b = 2x$ ; conseguentemente  $\frac{r-x}{r} - \frac{2x}{r} = 0$ ,  $x = \frac{1}{3}r$ . Il che mostra, che il punto del distacco corrisponde ad un' ascissa che è la terza parte del raggio, e però è l' estremità dell' arco di  $48^\circ. 12'$  all' incirca.

55. COROLL. II. Se il corpo si muove dalla quiete dal punto  $M$ , e sia  $AN = a$ ,  $AG = x$ ,  $GF = y$ , diventa  $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$ ,  $2b = 2NG = 2x - 2a$ ; onde  $\frac{r-x}{r} + \frac{2a-2x}{r} = 0$ , e quindi  $x = \frac{r+2a}{3}$ , o piuttosto  $x-a = NG = \frac{r-a}{3} = \frac{1}{3}NC$  essendo  $C$  il centro. Dal che si vede, che il punto del distacco è l' estremo dell' arco che ha per altezza la terza parte del coseno dell' arco  $AM$ , dal cui termine comincia il moto.

56. COROLL. III. Di qui apparisce la bella proprietà meccanica del cerchio verticalmente eretto, che se per la sua convessità scavata in canale nella semicirconferenza superiore al diametro orizzontale discende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, questo si distacca dal canale dopo aver descritto un arco, la di cui altezza è sempre il terzo dell' altezza di detto arco continuato fino al diametro orizzontale.

57. COROLL. IV. Nella parabola conica col parametro  $= 2p$  dalla sua equazione  $y^2 = 2px$  si inferisce  $ydy = pdx$ ,  
 $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{p^2}$ ,  $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2 + y^2) dy^2}{p^2}$ ,

$ds =$



$$ds = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy}{p}; \text{ ond' è } \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 2px)}}.$$

Si fa inoltre, che il raggio osculatore di tutte le sezioni coniche è uguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro, cioè  $= \frac{N^3}{p^2}$ ; e siccome nella parabola

$$N = \sqrt{(y^2 + p^2)} = \sqrt{(p^2 + 2px)}, \text{ e però il raggio osculatore } = \frac{p + 2x}{p} \sqrt{(p^2 + 2px)};$$

quindi viene, che supposto il grave partito dal vertice della parabola l' espressione  $\frac{2b}{r}$  si cangia

$$\text{in } \frac{2px}{(p + 2x)\sqrt{(p^2 + 2px)}}, \text{ e questa uguagliata a } \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 2px)}}$$

somministra l' uguaglià  $\frac{2x}{p + 2x} = 1$ , cioè  $p = 0$ , che è visibilmente assurdo. Dunque il grave discende per la convessità del canale parabolico senza mai distaccarsene, allorquando la discesa incomincia dal vertice. Altro assurdo parimente s' incontra quand' anche il grave incominci a discendere da un punto qualunque inferiore; e però dovunque incominci il suo moto, il corpo non abbandona mai il canale.

58. COROLL. V. Nell' ellisse conica coll' asse  $= 2a$ , col parametro  $= 2p$  si ha l' equazione  $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ ; ond' è

$$ydy = \frac{(pa - px) dx}{a}, \quad dx^2 = \frac{a^2 y^2 dy^2}{(pa - px)^2} = \frac{(2a^2 px - pax^2) dy^2}{(pa - px)^2},$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - pax^2) dy^2}{(pa - px)^2},$$

$$ds = \frac{dy \sqrt{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - pax^2)}}{pa - px}; \text{ conseguente-$$

$$\text{mente } \frac{dy}{ds} = \frac{pa - px}{\sqrt{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - pax^2)}}. \text{ Siccome}$$

$$\text{poi la normale } N = \frac{y ds}{dx} = \frac{(pa - px) ds}{ady}, \text{ se ne raccoglie il}$$

Yy

raggio osculatore  $r = \frac{N^3}{p^2} = \frac{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3 p^2}$ .

Dunque se il corpo incomincia a muoversi dal vertice dell'ellisse, sicchè sia  $b = x$ , nascerà

$$\frac{2b}{r} = \frac{2a^3 p^2 x}{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ la qual espres-}$$

sione uguagliata al valore di  $\frac{dy}{ds}$  somministra l'equazione  $2a^3 x = (a - x)(pa^2 - 2apx + 2a^2 x + px^2 - ax^2)$ , che si riduce alla cubica di questa forma  $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2 p}{a-p} x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$ .

La radice di quest' equazione reperibile co' noti metodi rappresenta l' altezza dell' arco ellittico, descritto il quale, il corpo abbandona il canale. La stessa equazione cubica si ritrova anche quando l' asse verticale dell' ellisse è il minore, e il corpo parte dal vertice di quest' asse, col solo divario, che in questo caso,  $a$  indica il semiasse minore,  $p$  il semiparametro di quest' asse,  $x$  l' ascissa del medesimo.

59. COROLL. VI. Per l' iperbola conica con un procedere affatto simile al precedente s' incontra l' equazione cubica

$$x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2 px}{p+a} + \frac{pa^3}{p+a} = 0, \text{ la di cui radice } x \text{ farà l' a-}$$

scissa dell' arco iperbolico, descritto il quale il corpo, che incomincia a discendere dal vertice, si distacca dalla convessità del canale iperbolico. Ma qui un tal distacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola; avvegna- chè essendo positivi tutti i termini della predetta equazione il valor reale di  $x$  non può essere che negativo; il che, nell' ipotesi in cui siamo, è un assurdo. Dunque il grave, che discende per la convessità d' un canale iperbolico, resta sempre unito al canale anche protratto in infinito senza scostarsene mai. Non è mestieri di far vedere, essendo troppo facile, che ciò accade anche quando il corpo comincia a discendere da qualunque punto più basso del vertice.

60. COROLL. VII. Sia la cicloide  $CAD$  (fig. V.) la di cui

equazione è  $dy = dx \sqrt{\frac{2r-x}{x}}$ , preso  $r$  pel semidiametro del cerchio generatore  $AOBS$ . Qui si ha  $ds^2 = dy^2 + dx^2 =$

$$dx^2 + \frac{dx^2(2r-x)}{x} = \frac{2r dx^2}{x}, ds = dx \sqrt{\frac{2r}{x}}, \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}.$$

Si fa di più, che il raggio dell' evoluta della cicloide per qualunque punto indefinito  $M$  è il doppio della corda corrispondente  $BO$  del cerchio generatore, cioè

$$r = 2 \sqrt{(2r \times 2r - x)}. \text{ Quindi, essendo } b = x, \text{ e però}$$

$$\frac{2b}{r} = \frac{x}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}}, \text{ risulta pel nostro intento}$$

$$\frac{x}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}, \text{ e per fine } x = r. \text{ Dunque il}$$

grave, che parte dalla quiete dal vertice della cicloide giù per la sua convessità scanalata, se ne distacca dopo essere arrivato al punto, che resta sotto il vertice un semidiametro del cerchio generatore. Se il grave incomincia a discendere da un punto  $F$  sotto il vertice, posta  $AE = a$ , il valore di  $\frac{2b}{r}$

$$\text{si cangia in } \frac{x-a}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}}, \text{ e dall' equazione } \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$$

$$= \frac{x-a}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}} \text{ si raccoglie } 2r-x = x-a, \text{ cioè } EN$$

$$= NB, EN = \frac{1}{2} EB. \text{ Dunque, da qualsivoglia punto del}$$

canale cicloidale incominci il moto, il grave si distacca sempre dopo aver percorso un arco, la cui altezza è la metà di quella dello stesso arco continuato fino alla base orizzontale della cicloide.

61. COROLL. VIII. Suppongasi, che la figura del canale sia quella d' una parabola qualunque di genere superiore rappresentata dall' equazione  $y^m = x$ , essendo  $m$  un numero intero  $> 2$ . In quest' ipotesi si ha  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 + m^2 y^{2m-2} dy = dy^2 (1 + m^2 x^{(2m-2):m})$ ; e però

Y y ij

$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})}}$ . Ora è facile il vedere, che per le parabole superiori il raggio dell' evoluta, ovvero

$r = \frac{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}{m(m-1) x^{(m-2):m}}$ . Sicchè posta l' altezza dovuta alla velocità, cioè  $h = x$  nell' ipotesi, che il grave parta dal vertice, risulta  $\frac{2h}{r} = \frac{2m(m-1) x^{(2m-2):m}}{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}$ . Laonde dovendo es-

sere nel caso del distacco  $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ , farà  $1 + m^2 x^{(2m-2):m} =$

$2m(m-1) x^{(2m-2):m}$ ; e perciò  $x^{(2m-2):m} = \frac{1}{m(m-2)}$ , e

finalmente  $x = \left( \frac{1}{m(m-2)} \right)^{m:(2m-2)}$ . Dunque ne' canali parabolici di grado superiore al secondo il grave, che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico si distacca allorquando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea  $\left( \frac{1}{m(m-2)} \right)^{m:(2m-2)}$ ; la quale

altezza nella parabola di terzo grado è  $= \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$ , in quella di

quarto grado è  $= \frac{1}{4}$ , in quella di quinto è  $= \frac{1}{\sqrt[7]{759375}}$ , e

così discorrendo. Che se il grave, in vece di spiccarsi dalla sommità del canale, partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale, che passa per la sommità, sia  $= a$ , allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere questa equazione  $x^{(2m-2):m}$

$-\frac{2(m-1)a}{m-2} x^{(m-2):m} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$ , la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza  $a$  resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

62. COROLL. IX. Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione  $y^m = x^n$  ancora più generale della precedente, facilmente si trova

$$ds = \frac{dy}{n} \sqrt{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{n}{\sqrt{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}}$$

il raggio d'oscuro  $r = \frac{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}{mn(m-n)x^{(m-2n):m}}$ . Supposto pertanto, che il grave incominci a rotolare dalla sommità, sicchè sia  $b = x$ , si ha  $\frac{2b}{r} = \frac{2mn(m-n)x^{(2m-2n):m}}{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}$ ; e conse-

guentemente dovendo essere pel caso del distacco  $\frac{2b}{r} = \frac{dy}{ds}$ , risulta  $n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m} = 2mn(m-n)x^{(2m-2n):m}$ , e quindi per fine  $x = \left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{m:(2m-2n)}$ , che è l'altezza di

quell'arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorso discendendo, si distacca dal canale. Qualora poi il grave incominci il suo moto da un altro punto più basso del vertice, e sia  $a$  la depressione verticale di questo luogo, si ritrova il punto del distacco mediante la risoluzione dell'equazione

$$x^{(2m-2n):m} - \frac{2(m-n)a}{m-2n} x^{(m-2n):m} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0,$$

dalla di cui radice sottraendo la quantità  $a$  si ottiene l'altezza dell'arco, al termine del quale giunto che sia il corpo, questo abbandona il canale.

63. COROLL. X. Sia  $OBS$  (*fig.* VI.) la logaritmica situata in un piano verticale, col suo asintoto  $MN$  al di sopra di essa ed orizzontale. Si supponga la sottangente costante  $= 1$ , e la  $FB$  normale all'asintoto ed uguale alla sottangente si produca indefinitamente in  $P$ , e si prendano le ordinate ortogonali  $BI = x$ ,  $IS = y$ . La natura di questa curva somministra l'equazione trascendente  $1 + x = e^y$ , essendo  $e$  il numero, il di cui logaritmo iperbolico o naturale è l'unità. Da questa equazione si ricava subito  $dx = e^y dy$ ,

$$dx^2 = (1+x)^2 dy^2, \quad ds^2 = (1+(1+x)^2) dy^2,$$

$$ds = dy \sqrt{(1+(1+x)^2)}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+(1+x)^2)}}.$$

Essendo poi  $dy = \frac{dx}{1+x}$ , e supposto  $dx$  costante, avendosi

$-dxddy = \frac{dx^3}{(1+x)^2}$ , se nella formola  $\frac{ds^3}{-dxddy}$  del raggio osculatore  $r$  si sostituiscono questi valori, si ritrova

$$r = \frac{dy^3(1+x)^2 \left(1 + (1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dx^3} = \frac{\left(1 + (1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+x}.$$

Sicchè nel supposto, che il grave incominci a rotolare giù per la convessità della curva dal punto  $B$  fino al punto indefinito  $S$ , onde si abbia  $b = BI = x$ , si ottiene  $\frac{2b}{r} = \frac{2x(1+x)}{\left(1 + (1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ,

che pareggiato con  $\frac{dy}{ds}$  offre per risultato  $x = \sqrt{2}$ . Dunque

il corpo che incomincia la sua discesa dal punto  $B$ , che chiameremo vertice, abbandona la curva dopo aver percorso un arco, la di cui altezza è la diagonale del quadrato descritto sopra la sottangente. Qualora poi il corpo parta da un punto inferiore a  $B$ , e la distanza d' un tal punto dalla retta orizzontale menata per  $B$  sia  $= a$ , apparisce  $b = x - a$ , e si presenta l' equazione  $(2x - 2a)(1 + x) = 1 + (1+x)^2$ , cioè  $x^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$ , la quale somministra  $x - a = \sqrt{(a^2 + 2a + 2)} = \sqrt{(1 + (a + 1)^2)}$ . Di qui è evidente, che dovunque incominci sotto il vertice la discesa del grave lungo la convessità della logaritmica, esso si scosta dalla curva dopo aver percorso un arco, che ha per altezza l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la somma di questa sottangente e della distanza del principio di detto arco dalla orizzontale menata pel vertice.

64. COROLL. XI. Se vuoi (fig. VII.) che il corpo partendo dal vertice  $A$  discenda lungo la convessità scanalata della cissoide  $ACO$  riferita all' asse  $AM$  parallelo all' asintoto verticale  $FN$ , chiamate al solito  $x, y$  le coordinate  $AB, BC$ , ed  $a$  il semidiametro  $AP$  del cerchio generatore, è manifesto, che si ha l' equazione  $x = \frac{y^2}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$ , e però

$$dx = \frac{2ydy\sqrt{(2ay - y^2)} - \frac{ay^2dy + y^3dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}}{2ay - y^2} = \frac{(3a - y)y^2dy}{(2ay - y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(3a-y)^2 y^4 dy^2}{(2ay-y^2)^3} + dy^2 = \frac{(8a^2 y^3 - 3a^2 y^4) dy^2}{(2ay-y^2)^3}$$

$$= \frac{a^2 y^3 (8a-3y) dy^2}{(2ay-y^2)^3}, ds = \frac{ay^{\frac{3}{2}} (8a-3y)^{\frac{1}{2}} dy}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds^3 = \frac{a^3 y^{\frac{3}{2}} (8a-3y)^{\frac{1}{2}} dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Parimenti essendo}$$

$$dy = \frac{(2ay-y^2)^{\frac{1}{2}} dx}{(3ay^2-y^3)}, \text{ si avrà}$$

$$ddy = \left\{ dx dy ( (3a-3y)(3ay^2-y^3) \sqrt{(2ay-y^2)} \right.$$

$$\left. - (6ay-3y^2)(2ay-y^2) \sqrt{(2ay-y^2)} \right\} : (3ay^2-y^3)^2$$

$$= \left\{ dx dy (3a-3y)(3a-y) \right.$$

$$\left. - (6a-3y)(2a-y) \sqrt{(2ay-y^2)} \right\} : (3a-y)^2 y^2$$

$$= - \frac{3 dx dy a^2 \sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2 y^2}. \text{ Laonde}$$

$$- dx ddy = \frac{3 dx^2 dy a^2 \sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2 y^2}, \text{ e sostituendo il valore di}$$

$$dx^2, \text{ nasce } - dx ddy = \frac{3 a^2 y^2 dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{5}{2}}}. \text{ Pertanto il raggio oscu-}$$

$$\text{latore } r = \frac{ds^3}{- dx ddy} = \frac{ay^{3/2} (8a-3y)^{3/2}}{3 (2ay-y^2)^2}; \text{ e poichè il valore di}$$

$\frac{dy}{ds}$  dee nella nostra ipotesi uguagliare quello di  $\frac{2x}{r}$ , fatte le opportune sostituzioni in quest' espressione si ritrova

$$\frac{(2ay-y^2)^{3/2}}{ay^{3/2} (8a-3y)^{3/2}} = \frac{6 (2ay-y^2)^{3/2}}{ay^{3/2} (8a-3y)^{3/2}}, \text{ e quindi } \frac{6y}{8a-3y} = 1,$$

cioè in fine  $y = \frac{8}{9}a$ . Dunque il corpo che partendo dal vertice discende per la convessità della cissoide, se ne distacca dopo aver trascorso un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore. Qualora poi il corpo parte da un punto inferiore al vertice  $A$ , e distante dall'orizzontale  $AF$  d'una data quantità  $b$ , se ne inferisce  $\frac{2x - 2b}{r}$

$$= \frac{dy}{ds}, \text{ e fatte le debite sostituzioni, si ha } \frac{6(2ay - y^2)^{3/2}}{ay^{3/2}(8a - 3y)^{3/2}}$$

$$= \frac{6b(2ay - y^2)^2}{ay^{3/2}(8a - 3y)^{3/2}} = \frac{(2ay - y^2)^{3/2}}{ay^{3/2}(8a - 3y)^{3/2}}, \text{ cioè } \frac{6y}{8a - 3y}$$

$$= \frac{6b\sqrt{(2ay - y^2)}}{y(8a - 3y)} = 1, \text{ ovvero } 6y^2 - 6b\sqrt{(2ay - y^2)}$$

$$= 8ay - 3y^2, \text{ dalla quale per ultimo si ricava la seguente equazione di terzo grado } y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \left(\frac{64a^2 + 36b^2}{81}\right)y$$

$$- \frac{8ab^2}{9} = 0. \text{ La radice di tale equazione dà il valore dell'}$$

ordinata appartenente a quell'arco di cissoide, dal quale se si sottrae l'arco compreso fra il vertice e il principio del moto si ha l'arco ricercato, al di cui termine giunto che sia il corpo, abbandona la cissoide.

65. COROLL. XII. Per tutte le ellissi, ed iperbole superiori si ha l'equazione generalissima  $y^{m+n} = fx^m(a \mp x)^n$ , dove  $a$  rappresenta l'asse trasverso,  $f$  una grandezza costante. Questa equazione si riduce all'altra  $y = gx^{m:(m+n)}(a \mp x)^{n:(m+n)}$  mettendo  $g$  in luogo di  $f^{1:(m+n)}$ . Quindi si avrà

$$dy = \frac{m}{m+n} gx^{-n:(m+n)} dx (a \mp x)^{n:(m+n)}$$

$$\mp \frac{n}{m+n} gx^{m:(m+n)} dx (a \mp x)^{-m:(m+n)} = \frac{mg(a \mp x)^{n:(m+n)}}{(m+n)x^{n:(m+n)}} dx$$

$$\mp \frac{ngx^{m:(m+n)} dx}{(m+n)(a \mp x)^{m:(m+n)}} = \frac{mg(a \mp x) dx \mp ngx dx}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

$mgadx$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{mgadx \mp (m+n)gx dx}{(m+n)x^n : (m+n) (a \mp x)^m : (m+n)^2} \\
 dy^2 &= \frac{(m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2) dx^2}{(m+n)^2x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{2m} : (m+n)} , \quad \sqrt{dy^2 + dx^2} \\
 &= dx \sqrt{\left( 1 + \frac{m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2}{(m+n)^2x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{2m} : (m+n)} \right)} \\
 &= \frac{dx \sqrt{((m+n)^2x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{2m} : (m+n)) + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2}}{(m+n)x^n : (m+n) (a \mp x)^m : (m+n)} \\
 &= ds . \text{ Prendo ora il differenziale di } dy , \text{ ed ottengo} \\
 ddy &= \left\{ \mp (m+n)^2gx^n : (m+n) (a \mp x)^m : (m+n) dx^2 \right. \\
 &\quad - (mga \mp (m+n)gx) (nx^{-m} : (m+n) (a \mp x)^m : (m+n) \\
 &\quad \mp mx^{n-(m+n)} (a \mp x)^{-n} : (m+n)) dx^2 \left. \right\} : ((m+n)^2x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{2m} : (m+n)) \\
 &= \left\{ \mp (m+n)^2gx (a \mp x) - (mga \mp (m+n)gx) (n(a \mp x) \mp mx) \right\} dx^2 : \\
 &\quad (m+n)^2x^{2n+m} : (m+n) (a \mp x)^{2m+n} : (m+n) \\
 &= \left\{ (\mp m^2 \mp 2mn \mp n^2) (a \mp x) gx \right. \\
 &\quad \left. + (\pm mgx \pm ngx - mga) (na \mp nx \mp mx) \right\} dx^2 : \\
 &\quad (m+n)^2x^{2n+n} : (m+n) (a \mp x)^{2m+n} : (m+n) \\
 &= \frac{-mnga^2 dx^2}{(m+n)^2x^{2n+m} : (m+n) (a \mp x)^{2m+n} : (m+n)} . \text{ Sarà dunque , fatte} \\
 &\text{le opportune sostituzioni , il raggio } r \text{ dell' evoluta , ossia} \\
 ds^3 &= \frac{(m+n)^2x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{2m} : (m+n) + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2}{mn(m+n)ga^2x^{n-m} : (m+n) (a \mp x)^{m-n} : (m+n)} . \\
 &\text{Laonde supposto , che il corpo incominci a discendere lungo} \\
 &\text{la convessità della curva dalla sommità , sicchè sia } b = x , \\
 \text{l'equazione } \frac{dy}{ds} &= \frac{2b}{r} \text{ dopo le debite sostituzioni si convertirà in}
 \end{aligned}$$

$$mga \mp (m+n)gx$$

$$\sqrt{\frac{((m+n)^2 x^{2n} : (m+n)) (a \mp x)^{2m : (m+n)} + m^2 g^2 a^2 \mp 2m(m+n)ag^2 x + (m+n)^2 g^2 x^2}{2mn(m+n)ga^2 x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{(m-n) : (m+n)}}}$$

$$= \frac{((m+n)^2 x^{2n} : (m+n)) (a \mp x)^{2m : (m+n)} + m^2 g^2 a^2 \mp 2m(m+n)ag^2 x + (m+n)^2 g^2 x^2}{3:2^2}$$

donde si trae  $2mn(m+n)a^2 x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{(m-n) : (m+n)}$

$$= (ma \mp (m+n)x) ((m+n)^2 x^{2n} : (m+n) (a \mp x)^{2m : (m+n)})$$

+  $m^2 g^2 a^2 \mp 2m(m+n)ag^2 x + (m+n)^2 g^2 x^2$  . La radice di quest' ultima equazione darà l' altezza dell' arco ellittico , o iperbolico, percorso il quale, il corpo partito dalla sommità abbandona le convessità della curva , e prosiegue poi liberamente il suo moto in una parabola conica secondo la nota legge de' projecti.

66. COROLL. XIII. Sia l' iperbola equilatera *FOM* (fig. VIII.) fra gli asintoti ortogonali *AC* , *AB* , de' quali *AC* sia verticale , *AB* orizzontale ; e guidata pel vertice *O* la verticale *ON* parallela all' asintoto *AC* , si pigliano in essa le ascisse *OH* *x* , e le ordinate normali *HE* *y* , e si ponga il lato della potenza dell' iperbola *OS* , ovvero *SA* = 1 . Per la nota proprietà dell' iperbola si ha l' equazione  $(1+x)(1-y) = 1$  ;

$$\text{e però } 1-y = \frac{1}{1+x}, \quad dy = \frac{dx}{(1+x)^2}, \quad dy^2 + dx^2 = ds^2 =$$

$$\frac{dx^2(1+(1+x)^4)}{(1+x)^4}, \quad ds = \frac{dx}{(1+x)^2} \sqrt{1+(1+x)^4},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^4}}. \text{ Inoltre } ddy = \frac{-2dx^2}{(1+x)^3},$$

$$-dxddy = \frac{2dx^3}{(1+x)^3}, \quad r = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(1+(1+x)^4)^{3:2}}{2(1+x)^3}. \text{ Dun-$$

que supposta  $b = x$  , farà  $\frac{2b}{r} = \frac{4x(1+x)^3}{(1+(1+x)^4)^{3:2}}$  . Laonde do-

vendo essere  $\frac{dy}{ds} = \frac{2b}{r}$  nasce  $\frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^4}} = \frac{4x(1+x)^3}{(1+(1+x)^4)^{3:2}}$  ,

cioè  $1+(1+x)^4 = 4x(1+x)^3$  , donde si trae l' equazione di quarto grado  $x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3} = 0$  . La radice pertan-

to di questa equazione darà ciò che si cerca, vale a dire l'altezza dell'arco iperbolico, dopo del quale il grave partito dalla sommità giù per la convessità dell'iperbola si porta fuori di essa, e prosiegue a muoverli ormai liberamente. Ogni qualvolta il grave in vece di spiccarsi dal vertice incomincia a discendere da un punto più basso distante per l'intervallo  $a$  dalla orizzontale che passa pel vertice, si presenta quell'altra equazione biquadratica da risolversi

$$x^4 + \frac{(8-4a)}{3}x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \frac{2-4a}{3} = 0, \text{ la di cui}$$

radice dà l'altezza di quell'arco iperbolico, dal quale togliendosi il primo arco di altezza  $a$ , il residuo è appunto quello, al di cui termine giunto che sia il corpo si disimpegna dalla curva e prosiegue il suo cammino con moto libero.

67. COROLL. XIV. Avendo ritrovata nel Coroll. IV la parabola conica dotata della proprietà singolare, che il grave non si distacca mai dalla medesima nel discendere per la sua convessità da qualunque punto incominci il suo moto qualora ella sia situata coll'asse verticale; nasce ora la curiosità di sapere cosa sia per accadere al grave scorrente per la detta convessità ogni qualvolta la situazione della parabola giacente in un piano verticale sia coll'asse orizzontale. Tirisi adunque nella parabola  $ANM$  (fig. IX) coll'asse orizzontale  $MO$  dal punto dato  $A$ , da cui il grave incomincia a discendere, la verticale  $AB$ , a cui si riferiscono le coordinate ortogonali  $AF$ ,  $FN$ , cioè  $x$ ,  $y$ . Si dimostra facilmente, che chiamato  $p$  il parametro della parabola,  $b$  la data  $BM$ , e  $\lambda$  la  $BA = \sqrt{bp}$  si ha l'equazione  $py = 2\lambda x - x^2$ . Quindi

$$dy = \frac{2\lambda dx - 2x dx}{p}, \quad dy^2 + dx^2 = ds^2 = \left( \frac{4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2}{p^2} \right) dx^2,$$

$$ds = \frac{dx}{p} \sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}}. \text{ Parimente } ddy = -\frac{2dx^2}{p};$$

$$-dxddy = \frac{2dx^3}{p}. \text{ Dunque } r = \frac{ds^3}{-dxddy}$$

$= \frac{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$ . Fatta pertanto l'ipotesi, che il grave parta dal punto  $A$ , onde si abbia  $b = x$ , l'uguaglianza delle due espressioni  $\frac{dy}{ds} = \frac{2b}{r}$  offre l'equazione

$$\frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}} = \frac{4p^2 x}{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ov-}$$

vero  $(2\lambda - 2x)(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2) = 4p^2 x$ , che si riduce alla cubica  $x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$

la di cui radice dà l'altezza dell'arco parabolico ricercato, ficchè il corpo discendendo pel convesso della curva se ne allontana allorchè giugne al termine di tal arco. Qualunque volta il grave parte da un punto più basso di  $A$ , e distante per l'intervallo  $a$  dalla retta orizzontale guidata per  $A$  si trova l'equazione  $x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3$

$$- \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0,$$

$$+ \frac{1}{2}p^2 a$$

e la radice di questa dà l'altezza dell'arco, dal quale sottratto l'arco di altezza  $a$  il residuo è appunto il ricercato.

Se nell'ipotesi della gravità costante si vuole collocato il corpo sulla convessità della parabola in un punto infinitamente distante dal vertice, per modo che la verticale  $\lambda$  condotta da quel punto all'asse orizzontale acquisti un valore infinito, allora si fa manifesto, che nell'equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0, \text{ il valore della ra-}$$

dice  $x$  non può essere che infinito, altrimenti verrebbe l'assurdo, che  $-\lambda^3 = 0$ , ovvero  $\lambda = 0$ , cioè l'infinito farebbe uguale a zero. Essendo poi infinito il valore così di  $\lambda$  come

di  $x$ , svaniscono al confronto degli altri i due termini  $\frac{3}{4}p^2x$

—  $\frac{1}{4}\lambda p^2$ , e resta  $x^3 - 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x - \lambda^3 = 0$ , che è visibilmente

te  $(x - \lambda)^3 = 0$ , e quindi  $x = \lambda$ . Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dal vertice nella parabola verticalmente collocata ma coll' asse orizzontale, e discende per la convessità, descrive tutto l' arco infinito sino al menzionato vertice senza mai distaccarsi.

### PROBLEMA XII. (fig. X.)

§. 68. Ritrovare la linea CMN situata in un piano verticale, e riferita all' asse verticale AB, sulla quale collocato un grave in parte opposta all' asse, questo discenda per essa senza premerla per essere la pressione nata dalla gravità uguale dovunque alla forza centrifuga.

### S O L U Z I O N E.

L' ipotesi somministra l' equazione differenziale della curva  $\frac{dy}{ds} = \frac{2b}{r}$ . Posto pertanto, che il grave incominci a discendere dal punto M più basso della sommità A dell' asse per l' intervallo  $AO = a$ , per modo che essendo  $AR = x$  diventi

$b = OR = x - a$ , si otterrà  $\frac{dy}{ds} = \frac{2x - 2a}{r}$ ; e perchè il raggio  $r$  dell' evoluta si fa essere

$= \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ , nasce quindi

di  $dy = \frac{-2(x - a) dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2}$ . Prendo ora l' elemento  $ds$ .

cioè  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  per costante, ed ho  $\frac{dx ddx + dy ddy}{ds} = 0$ ,

ovvero  $-dxddx = dyddy$ , e di qui  $-dyddx = \frac{dy^2 ddy}{dx}$ . Ma

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}; \text{ dunque sostituendo per } -dyddx$$

il valore ritrovato, si deduce  $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(dx^2 + dy^2) ddy}{dx^2}$ ,

ovvero  $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ds^2 ddy}{dx}$ , cioè  $\frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2} = \frac{ddy}{dx}$ ; e questo valore sostituito nell'espressione di  $dy$ , nasce

$$dy = \frac{-2(x-a) ddy}{dx}, \text{ che separate le variabili diventa } \frac{ddy}{dy}$$

$= -\frac{dx}{2(x-a)}$ . Ora si vede chiaro, che l'integrale di questa

equazione è  $\log. dy = -\frac{1}{2} \log. (x-a) + \log. cds$ , essendosi presa per costante  $ds$ . Laonde passando da' logaritmi a' numeri si troverà

$$dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}, \text{ e quadrando } dy^2 = \frac{c^2 (dx^2 + dy^2)}{x-a}; \text{ onde}$$

$$(x-a)dy^2 - c^2 dy^2 = c^2 dx^2, \text{ e finalmente } dy = \frac{cdx}{\sqrt{(x-a-c^2)}}$$

ed integrando  $y = 2c \sqrt{(x-a-c^2)} + \text{cost.}$  Suppongasì, che alla sommità  $A$ , quando  $x = 0$ , sia  $y = AC = b$ , e nascerà  $\text{cost.} = b - 2c \sqrt{(-a-c^2)}$ . Perciò  $y = b - 2c \sqrt{(-a-c^2)} + 2c \sqrt{(x-a-c^2)}$ . A ritrovare poi la prima costante  $c$

ricorro all'equazione differenziale  $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$ , dalla qua-

le si ricava  $c = \frac{dy}{ds} \sqrt{(x-a)}$ ; e siccome  $\frac{dy}{ds}$  esprime il seno

dell'angolo, cui la linea ricercata forma in qualsivoglia punto colla retta verticale, se un tal seno pel punto  $M$  quando  $x = a$  si chiama  $\phi$ , è manifesto provenire  $c = \phi \times 0 = 0$ ; e conseguentemente l'equazione alla linea cercata è  $y = b$ , che è quanto dire, che una tal linea è la retta verticale  $CS$ . Che

se il seno  $\phi$  del predetto angolo si facesse corrispondere non alla posizione  $x=a$ , ma bensì ad  $x=0$ , allora nascerebbe  $c = \phi \sqrt{-a}$ , e però  $y = b + 2\phi \sqrt{-a} \left( \sqrt{(x-a + \phi^2 a)} - \sqrt{(\phi^2 a - a)} \right) = b + 2\phi \left( \sqrt{(a^2 - a^2 \phi^2 - ax)} - \sqrt{(a^2 - \phi^2 a^2)} \right) = b + 2\phi \sqrt{(a^2(1 - \phi^2) - ax)} - 2\phi \sqrt{(a^2(1 - \phi^2))}$ ; dalla quale equazione si scorge, che dovendo essere  $x > a$ , oppure  $= a$ , il valore di  $y$  diventa immaginario, e il Problema impossibile fintantochè  $\phi$  persiste ad essere qualche cosa, siccome è altronde manifesto; ma diventando  $\phi = 0$ , l'equazione alla linea cercata si cangia in  $y = b$ , cioè a dire la detta linea è una retta verticale, come dianzi. Il che ecc.

§. 69. Aggiungo per ultimo il Problema delle forze centrali secondo la Teoria Newtoniana trattato qui in una maniera particolare, dove qualche ripiego tenuto per giungere all'integrazione delle espressioni relative ai tempi potrebbe per avventura non essere inutile in qualche altra occasione. Dalla soluzione del Problema ho ricavato speditamente in tanti Teoremi tutte le proprietà più singolari ed eleganti del moto prodotto in virtù d'una forza acceleratrice variabile in ragione duplicata inversa delle distanze dal centro della forza. Tutto ciò è qui ridotto sotto un sol punto di vista, e immediatamente inferito dalla sola soluzione del Problema fondamentale.

## PROBLEMA.

*Un mobile gettato da principio con una certa velocità di proiezione viene obbligato a camminare per una via curvilinea QMT (fig. XI.) da una forza acceleratrice, la quale lo spinge di continuo verso un punto fisso P con una intensità reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del corpo dal detto punto: si cerca la curva descritta QMT.*

## SOLUZIONE.

Si guidi pel dato punto P una retta PS nel piano della traiettoria, e sia M il luogo del mobile dopo un certo tempo  $t$ , e da M si conduca a PS come asse l'ordinata perpendicolare MN, e l'infinitamente prossima  $mn$ , sopra cui si ab-

bassi il perpendicolo  $Mr$ . Chiamato al solito  $x, y$  rispettivamente le coordinate ortogonali  $PN, MN$ ,  $v$  il raggio vettore  $PM$ ,  $\phi$  l'angolo  $MPS$ , convien riflettere, che il corpo, il quale si muove per la curva  $QM$  e descrive nell'istante  $dt$  l'archetto infinitesimo  $Mm$ , può considerarsi come animato da due moti, uno parallelo all'ascissa  $PN$ , l'altro all'ordinata  $NM$ , percorrendo col primo di questi due moti nello stesso istante  $dt$  la  $Mr$  ovvero  $dx$ , col secondo la  $vm$ , o  $dy$ , cioè i lati del rettangolo, di cui  $Mm$  è la diagonale, la velocità del primo moto farà dunque  $= \frac{dx}{dt}$ , la velocità del secondo  $= \frac{dy}{dt}$ . Ora risolvendo la forza centrale, che spinge il corpo secondo  $MP$ , in due  $X, Y$ , quella parallela alle ascisse, questa alle ordinate, è manifesto, che dalla forza  $X$  viene ritardata la velocità  $\frac{dx}{dt}$ , e dalla  $Y$  viene diminuita la velocità  $\frac{dy}{dt}$ , e tali diminuzioni istantanee di velocità (preso  $dt$  per costante) sono  $-\frac{ddx}{dt}$ , e  $-\frac{ddy}{dt}$ . Perlochè il noto principio Dinamico, che la forza acceleratrice o ritardatrice moltiplicata per l'istante è uguale alla variazione istantanea della velocità, somministra le due equazioni  $-\frac{ddx}{dt^2} = X$ ,  $-\frac{ddy}{dt^2} = Y$ . Suppongasi in oltre, che la forza centrale in una data distanza  $r$  dal punto  $P$  sia  $= R$ , sicchè risulti  $\frac{Rr^2}{v^2}$  per la forza in  $M$ . Quindi è evidente, essere  $X = \frac{Rr^2 \cos. \phi}{v^2}$   $= -\frac{ddx}{dt^2}$ ,  $Y = \frac{Rr^2 \text{sen. } \phi}{v^2} = -\frac{ddy}{dt^2}$ . Se pertanto si mena l'altro raggio vettore  $Pm$ , e coll'intervallo  $PM$  si descrive l'archetto circolare  $Mg$ , riesce  $mg = dv$ ,  $Mg = v d\phi$ ,  $Mm^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 d\phi^2$ ,  $v^2 = x^2 + y^2$ ; e quest'ultima equazione



zione due volte differenziata diventa  $vddv + dv^2 = xddx + yddy + dx^2 + dy^2 = xddx + yddy + dv^2 + v^2d\varphi^2$ , cioè  $xddx + yddy = vddv - v^2d\varphi^2$ , ovvero  $\frac{xddx}{dt^2} + \frac{yddy}{dt^2} = \frac{vddv - v^2d\varphi^2}{dt^2}$

Ma  $\frac{xddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 x \cos. \phi}{v^2} = \frac{-Rr^2 \cos. \phi^3}{v}$  (poichè  $\frac{x}{v} = \cos. \phi$ );

ed  $\frac{yddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2 y \text{ sen. } \phi}{v^2} = \frac{-Rr \text{ sen. } \phi^3}{v}$  (giacchè  $\frac{y}{v} = \text{sen. } \phi$ ).

ficchè  $\frac{xddx + yddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v} = \frac{vddv - v^2d\varphi^2}{dt^2}$ , ovvero

$\frac{vddv - v^2d\varphi^2}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v}$  (A). Siccome poi si ha  $\frac{y}{x} = \text{tang. } \phi$ ,

e differenziando  $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\phi}{\cos. \phi^2}$ , cioè  $x dy - y dx$

$= \frac{x^2 d\phi}{\cos. \phi^2}$ , ed è  $\frac{x}{\cos. \phi} = v$ , perciò si ha  $x dy - y dx = v^2 d\phi$ , ov-

vero  $v d\phi = \frac{x dy}{v} - \frac{y dx}{v} = dy \cos. \phi - dx \text{ sen. } \phi$ , e questa equazio-

ne differenziata si cangia in  $ddy \cos. \phi - ddx \text{ sen. } \phi -$

$d\phi (dy \text{ sen. } \phi + dx \cos. \phi) = vdd\phi + dv d\phi$ , ossia  $ddy \cos. \phi$

$- ddx \text{ sen. } \phi = vdd\phi + dv d\phi + d\phi (dy \text{ sen. } \phi + dx \cos. \phi)$ , e se

in questa si sostituisce il valore ricavato dal differenziare l'equazione  $v^2 = x^2 + y^2$ , vale a dire  $v dv = x dx + y dy$  oppu-

re  $dv = \frac{x dx}{v} + \frac{y dy}{v} = dx \cos. \phi + dy \text{ sen. } \phi$ , ne deriva

$ddy \cos. \phi - ddx \text{ sen. } \phi = vdd\phi + 2dv d\phi$ . Ora essendosi già

trovate le due equazioni  $ddy = \frac{-Rr^2 dt^2 \text{ sen. } \phi}{v^2}$ ,

$ddx = \frac{-Rr^2 dt^2 \cos. \phi}{v^2}$ , se si moltiplica la prima per  $\cos. \phi$  la

seconda per  $\text{sen. } \phi$  sottraendola dalla prima, si ottiene

$ddy \cos. \phi - ddx \text{ sen. } \phi = 0$ ; e quindi  $vdd\phi + 2dv d\phi = 0$ , e questa

moltiplicata per  $v$ , ed integrata diventa  $v^2 d\phi = c^2 dt$ , essendo

$c^2$  una costante arbitraria. Preso poi di qui il valore

Λ α α

$dt^2 = \frac{v^4 d\phi^2}{c^4}$ , e surrogato nell' equazione ( A ) nasce  
 $ddv - v d\phi^2 = \frac{-Rr^2 v^2 d\phi^2}{c^4} = \frac{-v^2 d\phi^2}{b}$ , posto  $b = \frac{c^4}{Rr^2}$ . Dun-  
 que  $(bv - v^2) d\phi^2 = bddv$ , oppure  $d\phi^2 = \frac{bddv}{v(b-v)}$ . Per in-  
 tegrale di quest' ultima equazione si prenda  $\frac{bddv}{v(b-v)} = Td\phi$ ,  
 essendo T una funzione variabile da definirsi; e il differenzia-  
 le farà  $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = Tdd\phi + dTd\phi$ . Sic-  
 come pertanto si è trovato  $vdd\phi + 2dv d\phi = 0$ , cioè  
 $dd\phi = \frac{-2dv d\phi}{v}$ , se si sostituisce questo valore nell' equazio-  
 ne precedente, essa diviene  $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2}$   
 $= \frac{-2Tdvd\phi}{v} + dTd\phi$ , ed in questa sostituendo il valore af-  
 funto di  $Td\phi = \frac{bddv}{v(b-v)}$ , si ottiene  $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2}$   
 $= \frac{-2bdv^2}{v^2(b-v)} + dTd\phi$ , ovvero  $\frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2}$   
 $= \frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = dTd\phi$ . Ma si è trovato  $\frac{bddv}{v(b-v)}$   
 $= d\phi^2$ , e  $\frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = T^2 d\phi^2$ . Dunque  $d\phi^2 + T^2 d\phi^2 = dTd\phi$ ,  
 e quindi  $d\phi = \frac{dT}{1+T^2}$ ; e questa equazione integrata dà  
 arc. tang.  $T = \phi + \beta$ , preso per  $\beta$  un angolo costante da deter-  
 minarsi. Da quest' integrale si deduce subito  $T = \text{tang.} (\beta + \phi)$   
 e  $Td\phi = d\phi \text{ tang.} (\beta + \phi) = \frac{bdv}{v(b-v)} = \frac{dv}{v} + \frac{dv}{b-v}$ , e nuo-  
 vamente integrando nasce finalmente  $-\log. \cos. (\beta + \phi)$   
 $= \log. v - \log. (b-v) + \log. e$ , ovvero  $\log. e + \log.$

$\cos. (\beta + \phi) = \log. (b - v) - \log. v$ . Dunque per ultimo passando dai logaritmi ai numeri, risulta  $e \cos. (\beta + \phi)$

$$= \frac{b - v}{v}, \text{ e conseguentemente } v = \frac{b}{1 + e \cos. (\beta + \phi)}. \text{ Ora}$$

questa equazione al raggio vettore della traiettoria ricercata appartiene notoriamente ad una Sezione Conica di cui il punto  $P$  è il fuoco,  $b$  il semiparametro dell' asse principale,  $e$  l' eccentricità ossia la distanza tra il centro e il fuoco divisa pel semiasse principale, ed è rispettivamente una parabola, un' ellisse, o un' iperbola secondo i tre casi, 1°. di  $e = 1$ , 2°. di  $e < 1$ , 3°. di  $e > 1$ . Il che era ecc.

70. Rimane ora a determinare il preciso valore delle costanti arbitrarie  $c^2$ ,  $\beta$ ,  $e$  introdotte nelle integrazioni. A tal effetto, si chiami  $u$  la velocità del mobile nel punto  $M$ , e  $ds$

l' archetto  $Mm$ , sicchè sia  $u = \frac{ds}{dt}$ ; e si supponga, che il corpo da principio sia stato lanciato dal punto dato  $\mathcal{Q}$  posto ad

una distanza nota  $f$  dal centro  $P$  della forza con una velocità iniziale o di proiezione  $= b$ , e che quivi l' angolo fatto dal raggio vettore  $f$  colla direzione della proiezione, o colla tangente della curva sia  $= \alpha$ . Con ciò è manifesto, che nel

punto iniziale  $\mathcal{Q}$  si ha  $\frac{fd\phi}{ds} = \text{sen. } \alpha$ ,  $ds = \frac{fd\phi}{\text{sen. } \alpha}$ ; ed inol-

tre  $u = \frac{ds}{dt} = \frac{fd\phi}{dt \text{ sen. } \alpha} = b$ , onde  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{b \text{ sen. } \alpha}{f}$ . Ma si è tro-

vato  $c^2 = \frac{v^2 d\phi}{dt}$ ; dunque sostituendo i valori di  $v^2 = f^2$ , e di

$\frac{d\phi}{dt} = \frac{b \text{ sen. } \alpha}{f}$  si ottiene la ricercata costante  $c^2 = fb \text{ sen. } \alpha$ .

71. Per ritrovare l' altra costante  $\beta$ , osservo, che l' equa-

zione differenziale  $Td\phi = \frac{bdv}{v(b-v)}$  dà  $T = \frac{bdv}{v(b-v)d\phi}$ , dove

$\frac{vd\phi}{dv}$  esprime la tangente dell' angolo fatto dal raggio vettore coll' elemento della curva, ovvero colla sua tangente, sicchè

nel punto iniziale  $\mathcal{Q}$  diviene  $\frac{v d\phi}{dv} = \text{tang. } \alpha$ ,  $v = f$ , e conseguentemente

$$T = \frac{b}{(b-f) \text{ tang. } \alpha}. \text{ Laonde arc. tang. } T$$

$$= \text{arc. tang. } \left( \frac{b}{(b-f) \text{ tang. } \alpha} = \beta + \phi. \text{ Se pertanto nel detto punto } \mathcal{Q} \text{ l'angolo } \phi \text{ diventa uguale ad un angolo noto } \Delta,$$

ne deriva il valore ricercato di  $\beta = \text{arc. tang. } \left( \frac{b}{(b-f) \text{ tang. } \alpha} \right)$

$$- \Delta = \text{arc. tang. } \left( \frac{b}{(b-f) \text{ tang. } \alpha} - \text{tang. } \Delta \right) : \left( 1 + \frac{b \text{ tang. } \Delta}{(b-f) \text{ tang. } \alpha} \right)$$

$$= \text{arc. tang. } \left( \frac{b - (b-f) \text{ tang. } \alpha \text{ tang. } \Delta}{(b-f) \text{ tang. } \alpha + b \text{ tang. } \Delta} \right)$$

72. Per ciò che riguarda l'eccentricità  $e$ , essendosi trovata l'equazione della traiettoria  $v = \frac{1}{1 + e \cos. (\beta + \phi)}$  que-

sta somministra  $e = \frac{b - v}{v \cos. (\beta + \phi)}$ ; e però, diventando nel

punto iniziale  $\mathcal{Q}$  della curva  $v = f$ ,  $\phi = \Delta$ , nasce

$e = (b - f) : (f \cos. (\beta + \Delta))$ . Siccome poi si è trovato  $\beta + \Delta$

$$= \text{arc. tang. } \left( \frac{b}{(b-f) \text{ tang. } \alpha} \right)$$

$$= \text{arc. sec. } \left( \frac{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2 \text{ tang. } \alpha^2)}}{(b-f) \text{ tang. } \alpha} \right)$$

$$= \text{arc. cos. } \left( \frac{(b-f) \text{ tang. } \alpha}{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2 \text{ tang. } \alpha^2)}} \right); \text{ e quindi cos. } (\beta + \Delta)$$

$$= \frac{(b-f) \text{ tang. } \alpha}{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2 \text{ tang. } \alpha^2)}} : \text{ risulta finalmente}$$

$$e = \frac{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2 \text{ tang. } \alpha^2)}}{f \text{ tang. } \alpha}.$$

73. Per indagare presentemente i varj accidenti del moto per la traiettoria già ritrovata, incomincio ad osservare, che la precedente equazione  $v^2 d\phi = c^2 dt$  si riduce all'altra

$\frac{1}{2} \frac{v^2 d\phi}{dt} = \frac{1}{2} c^2$ , nella quale essendo  $\frac{1}{2} v^2 d\phi$  uguale all'ajuola  $MPm$  della curva, si vede tosto il rapporto costante dell'elemento dell'area all'istante, in cui è descritto, e ciò succedendo in tutti gl'istanti d'un dato tempo qualunque, ne discende immediatamente il seguente

## TEOREMA I.

*Le aree comprese da due raggi vettori e dall'arco della traiettoria sono proporzionali al tempo, cui il mobile consuma a percorrer quell'arco.*

74. Guidata la tangente  $MO$ , e ad essa la normale  $PO = p$ , è cosa evidente, che l'ajuola  $PMm$  ha per valore tanto  $\frac{1}{2} v^2 d\phi = \frac{1}{2} c^2 dt$ , quanto  $\frac{1}{2} p ds$ ; e però si ha  $c^2 dt = p ds$ . Ma  $u = \frac{ds}{dt}$ , ovvero  $u dt = ds$ . Dunque  $c^2 dt = p u dt$ , ossia  $u = \frac{c^2}{p}$ , e quindi il

## TEOREMA II.

*La velocità del mobile in qualunque punto della traiettoria è in ragione inversa della normale condotta dal fuoco alla tangente della curva in quel punto.*

75. L'equazione  $v^2 d\phi = c^2 dt$  dà  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c^2}{v^2}$ . Ora  $\frac{d\phi}{dt}$  esprime la velocità angolare del mobile; ne viene adunque il

## TEOREMA III.

*La velocità angolare del corpo nella traiettoria seguita la ragione inversa del quadrato della sua distanza dal centro della forza, ovvero del fuoco.*

76. Per determinare poi la misura precisa della velocità  $u$  del corpo in qualunque punto della curva, si consideri, che

essendo  $u^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ , si ha per la differenziazione

$$\begin{aligned}
 udu &= \frac{dxddx + dyddy}{dt^2}, \text{ e poichè si è trovato } \frac{ddx}{dt^2} \\
 &= \frac{-Rr^2 \cos. \phi}{v^2}, \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \text{sen. } \phi}{v^2}, \text{ se si moltiplica la pri-} \\
 &\text{ma di queste equazioni per } dx, \text{ la seconda per } dy, \text{ ne deri-} \\
 &\text{va } \frac{dxddx + dyddy}{dt^2} = udu = \frac{-Rr^2 (dx \cos. \phi + dy \text{sen. } \phi)}{v^2} \\
 &= \frac{-Rr^2 d\mathcal{V}}{v^2}. \text{ Laonde integrando si ottiene } u^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{cost.}
 \end{aligned}$$

La costante di quest' integrale si ritrova con avvertire, che quando diviene  $v = f$ , la velocità  $u$  si cangia nella velocità iniziale o di proiezione  $b$ , il che dà cost.  $= b^2 - \frac{2Rr^2}{f}$ : e

quindi  $u^2 = b^2 - 2Rr^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right)$ . Ed ecco il

#### TEOREMA IV.

*La misura assoluta della velocità del mobile in qualunque punto della traiettoria è uguale all' espressione*

$$\sqrt{\left( b^2 - 2Rr^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right) \right)}.$$

76. Ritrovata l' espressione della velocità in qualsivoglia punto della curva, è facile ora il passaggio a determinare que' punti, ne' quali la velocità del mobile è la *massima*, o la *minima* di tutte le altre. Basta uguagliare a zero il differenziale della detta espressione, e da ciò deriva

$$d \cdot \sqrt{\left( b^2 - 2Rr^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right) \right)} = \frac{-Rr^2 d\mathcal{V}}{v^2 \sqrt{\left( b^2 - 2Rr^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right) \right)}} = 0, \text{ va-}$$

le a dire  $-\frac{d\mathcal{V}}{v^2} = d \cdot \frac{1}{v} = 0$ . Ma già si è veduto essere

$$v = \frac{b}{1 + e \cos. (\beta + \phi)}$$
 . Per conseguenza farà  $d \cdot \frac{1}{v}$   

$$= d \cdot \left( \frac{1 + e \cos. (\beta + \phi)}{b} \right) = -e d \phi \text{ sen. } (\beta + \phi) = 0$$
 . Dal che si deduce tanto  $\beta + \phi = 0$ , quanto  $\beta + \phi = 180^\circ$ . Di qui

## T E O R E M A V.

*La massima e la minima velocità del mobile nella traiettoria da esso percorsa corrispondono alle due estremità dell' asse principale, ossia alle due apsidì ima, e somma.*

77. Se un altro corpo sollecitato verso il punto fisso  $P$  da quella stessa forza, che accompagna il mobile nella traiettoria, casca in linea retta verso  $P$ , e giunto ad una distanza da  $P$ , la qual sia uguale al raggio vettore  $v$ , acquista ivi una velocità  $= u'$ , è manifesto che farà  $du' = \frac{Rr^2 dt}{v^2}$ , ed essendo  $u' dt = -dv$ , cioè  $dt = \frac{-dv}{u'}$ , nascerà  $u' du' = \frac{-Rr^2 dv}{v^2}$ , il di cui integrale è  $u'^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{cost.}$  Perciò supposto, che ad una distanza nota  $f$  dal centro della forza la velocità  $u'$  diventa uguale ad una velocità data  $b'$ , si deduce  $\text{cost.} = b'^2 - \frac{2Rr^2}{f}$ , e conseguentemente  $u'^2 = b'^2 - 2Rr^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right)$ , ed  
 $u' = \sqrt{b'^2 - 2Rr^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right)}$ . Da ciò apparisce  $u' = u$  allorchè  $b' = b$ , vale a dire il

## T E O R E M A VI.

*Il mobile ha in ogni punto della sua traiettoria quella velocità che avrebbe un altro corpo il quale si trovasse alla stessa distanza dal centro della forza, verso cui discendesse in linea retta, supponendo semplicemente, che esso abbia avuto una volta*

la medesima velocità del primo ad uguale distanza dal centro.

78. Fingasi ora, che il mobile dal punto della traiettoria, in cui si trova, caschi lungo il raggio vettore verso il centro della forza, e venga sollecitato dalla stessa forza centripeta, la quale però rimanga costante per tutta la caduta: in questo supposto si scorge chiaramente che chiamato  $z$  lo spazio descritto dal corpo nella caduta lungo il raggio vettore  $v$  verso il centro,  $u''$  la velocità da esso acquistata alla fine di tale spazio, si ricava l'equazione  $u''du'' = \frac{Rr^2 dz}{v^2}$ , e me-

diante l'integrazione  $\frac{2Rr^2 z}{v^2} = u''^2$  senza costante da aggiunger-

si, giacchè si annullano insieme  $z$ , ed  $u''$ . Se pertanto si suppone che la velocità  $u''$  acquistata dal mobile nella caduta sia uguale alla velocità  $u$  del medesimo nella traiettoria, siccome  $u = \frac{c^2}{p}$ , farà parimente  $u''^2 = \frac{c^4}{p^2} = \frac{2Rr^2 z}{v^2}$ , ed essendo  $c^4 = Rr^2 b$ ,

ne viene  $\frac{2z}{v^2} = \frac{b}{p^2}$ , ovvero  $z = \frac{\frac{1}{2} b v^2}{p^2}$ . Di qui

### TEOREMA VII.

*Casando verso il centro della forza da qualunque punto della traiettoria il mobile sollecitato dalla forza centrale corrispondente al detto punto, la quale però rimanga costante per tutta la caduta, acquista la velocità, che esso aveva in quel punto della curva, dopo esser caduto per uno spazio, che è quarto proporzionale al quadrato della normale condotta dal centro della forza sulla tangente della traiettoria nel mentovato punto, al quadrato del raggio vettore, ed alla quarta parte del parametro dell'asse principale.*

79. Cada ora lo stesso corpo verso il centro della forza lungo il raggio vettore, e si supponga, che la forza non rimanga più costante come nel Teor. prec.; ma varii durante la caduta in ragione inverfa del quadrato della distanza dal centro. In questa ipotesi essendo  $\frac{Rr^2}{v^2}$  la forza centripeta nel

principio



principio della caduta, farà essa, scorsò lo spazio  $z$ , ovvero alla distanza  $v - z$  dal centro, espressa da  $\frac{Rr^2}{(v - z)^2}$ . Laonde nominando  $u'''$  la velocità acquistata nel cadere per lo spazio  $z$ , si ottiene  $\frac{Rr^2 dz}{(v - z)^2} = u''' du'''$ , il di cui integrale è  $\frac{2Rr^2}{v - z} = u'''^2 + \text{const.}$  E poichè  $u'''$  e  $z$  svaniscono insieme, proviene  $\text{const.} = \frac{2Rr^2}{v}$ ; e conseguentemente  $u'''^2 = 2Rr^2 \left( \frac{1}{v - z} - \frac{1}{v} \right)$   
 $= \frac{2Rr^2 z}{v(v - z)}$ . Perlocchè supponendo  $u''' = u = \frac{c^2}{p}$ , cioè  
 $u'''^2 = \frac{c^4}{p^2} = \frac{Rr^2 b}{p^2}$ , ne deriva  $\frac{2z}{(v - z)v} = \frac{b}{p^2}$ ; e quindi  
 $z = \frac{bv^2}{2p^2 + bv} = \frac{bv}{\frac{2p^2}{v} + b}$ . Dunque il

## T E O R E M A VIII.

*Un corpo, che da qualunque punto della sua trajetoria cade lungo il raggio vettore verso il centro della forza, e viene sollecitato durante la sua caduta dalla stessa forza variante in ragione duplicata inversa della distanza dal centro, acquista la stessa velocità, che compete al detto punto della trajetoria dopo aver trascorso uno spazio, il quale si ha, se dopo aver presa una terza proporzionale al raggio vettore, e alla normale si piglia una quarta proporzionale al doppio di quella congiunto col semiparametro, allo stesso semiparametro ed al raggio vettore.*

So. Per ciò che spetta al tempo impiegato dal mobile a correre per un arco qualunque  $\mathcal{Q}M$  della trajetoria, basta ricorrere alla formola  $dt = \frac{v^2 d\varphi}{c^2} = \frac{v^2 d\varphi}{bf \text{sen. } \alpha} = \frac{2PMm}{bf \text{sen. } \alpha}$ , dalla quale mediante l'integrazione si ricava  $t = \frac{2\mathcal{Q}PM}{bf \text{sen. } \alpha}$  senza costante perchè si annullano insieme  $t$ , e  $P\mathcal{Q}M$ .

81. Se si vuole l'espressione del tempo indipendentemente dall'aja  $\mathcal{QPM}$ , si sostituiscia nell'equazione  $dt = \frac{v^2 d\phi}{c^2}$  il valore

dianzi trovato di  $v^2$ , e si avrà  $dt = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{d\phi}{(1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi))^2}$ ;

onde integrando nascerà  $t = \frac{b^2}{c^2} \int \frac{d\phi}{(1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi))^2}$ .

Per ritrovare il valore di questa espressione integrale io affumo questa equazione

$$\int \frac{d\phi}{(1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi))^2} = \frac{M \operatorname{fen}(\beta + \phi)}{1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)}$$

+  $N \int \frac{d\phi}{1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)}$ , dalla quale mediante la differenziazione ritraggo

$$\frac{Md\phi \operatorname{cof}(\beta + \phi)(1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)) + Med\phi \operatorname{fen}(\beta + \phi)^2}{1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)}$$

+  $\frac{Nd\phi}{1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)}$  = (riducendo allo stesso denominatore)

$$\frac{Md\phi \operatorname{cof}(\beta + \phi) + Nd\phi + Ned\phi \operatorname{cof}(\beta + \phi) + Med\phi}{(1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi))^2} .$$

Laonde farà

$$\begin{aligned} Md\phi \operatorname{cof}(\beta + \phi) + Md\phi \\ + Ncd\phi \operatorname{cof}(\beta + \phi) + Nd\phi = 0 . \\ - d\phi \end{aligned}$$

Di qui si raccoglie  $M = -Ne$ ,  $N - Ne^2 = 1$ ,  $N = \frac{1}{1 - e^2}$ ,

$M = \frac{-e}{1 - e^2}$ . Con ciò diventa

$$t = - \frac{b^2 e \operatorname{fen}(\beta + \phi)}{c^2(1 - e^2)(1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi))}$$

+  $\frac{b^2}{c^2(1 - e^2)} \int \frac{d\phi}{1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)}$ . Ridotta per tal modo l'integrazione

a non dipendere se non dalla formola  $\int \frac{d\phi}{1 + e \operatorname{cof}(\beta + \phi)}$ ,

per conseguire il valore di questa pongo  $\cos. (\beta + \phi)$

$$= \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \text{ e però sen. } (\beta + \phi) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad d\phi \cos. (\beta + \phi)$$

$$= \frac{2dx(1 - xx)}{(1 + xx)^2}, \quad d\phi = \frac{2dx}{1 + xx}. \text{ Sicchè si avrà } 1 + e \cos.$$

$$(\beta + \phi) = \frac{1 + e + (1 - e)xx}{1 + xx}; \text{ e quindi}$$

$$\int \frac{d\phi}{1 + e \cos. (\beta + \phi)} = \int \frac{2dx}{1 + e + (1 - e)xx}. \text{ Ora}$$

quest' ultima espressione  $\int \frac{2dx}{1 + e + (1 - e)xx}$  soggiace alle nostre regole d' integrazione delle frazioni razionali, e tre sono i casi che possono occorrere.

C A S O I.

$$e < 1$$

82. In questo caso diventa  $\int \frac{2dx}{1 + e + (1 - e)xx}$

$$= \frac{2}{1 + e} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)xx} = \frac{2}{1 + e} \sqrt{\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)} \times$$

$$\int \frac{dx \sqrt{\left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)}}{1 + \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)xx} = \frac{2}{\sqrt{(1 - e^2)}} \cdot \text{arc. tang.} \left( \frac{x \sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{(1 + e)}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1 - e^2)}} \cdot \text{arc. tang.} \left( \frac{(1 - e)x}{\sqrt{(1 - e^2)}} \right). \text{ Ma si trova}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. (\beta + \phi)}{1 + \cos. (\beta + \phi)}\right)} = \text{tang.} \frac{1}{2} (\beta + \phi) = \frac{\text{sen. } (\beta + \phi)}{1 + \cos. (\beta + \phi)},$$

$$\text{ed inoltre } 2 \cdot \text{arc. tang.} \left( \frac{(1 - e)x}{\sqrt{(1 - e^2)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{arc. tang.} \left( \frac{2(1-e)x \sqrt{(1-e^2)}}{1 - \frac{1-e^2}{(1-e)^2 xx}} \right) \\
&= \text{arc. tang.} \left( \frac{2(1-e)x \sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2 - (1-e)^2 xx} \right) = \text{arc. tang.} \frac{2x \sqrt{(1-e^2)}}{1+e - (1-e)xx} \\
&= \text{arc. tang.} \left( \frac{2 \text{ fen.} (\beta + \phi) \sqrt{(1-e^2)}}{(1+e)(1+\text{cof.}(\beta+\phi)) - (1-e)(1-\text{cof.}(\beta+\phi))} \right) \\
&= \text{arc. tang.} \left( \frac{\text{fen.}(\beta+\phi) \sqrt{(1-e^2)}}{e + \text{cof.}(\beta+\phi)} \right). \text{ Dunque si avrà} \\
&\frac{b^2}{c^2(1-e^2)} \int \frac{d\phi}{1+e \text{cof.}(\beta+\phi)} = \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \times \\
&\text{arc. tang.} \left( \frac{\text{fen.}(\beta+\phi) \sqrt{(1-e^2)}}{e + \text{cof.}(\beta+\phi)} \right) \text{ e per conseguenza} \\
&t = - \frac{b^2 e \text{ fen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)(1+e \text{cof.}(\beta+\phi))} + \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \times \\
&\text{arc. tang.} \left( \frac{\text{fen.}(\beta+\phi) \sqrt{(1-e^2)}}{e + \text{cof.}(\beta+\phi)} \right) + \text{cof.} \text{ Sicchè supposto, che} \\
&\text{nel punto } \mathcal{Q}, \text{ da cui si vuol cominciare a contare il tem-} \\
&\text{po, sia } \phi = g, \text{ si avrà per fine } t = \frac{b^2 e \text{ fen.}(\beta+g)}{c^2(1-e^2)(1+e \text{cof.}(\beta+g))} \\
&- \frac{b^2 e \text{ fen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)(1+e \text{cof.}(\beta+\phi))} - \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \times \\
&\text{arc. tang.} \left( \frac{\text{fen.}(\beta+g) \sqrt{(1-e^2)}}{e + \text{cof.}(\beta+g)} \right) \\
&+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \cdot \text{arc. tang.} \left( \frac{\text{fen.}(\beta+\phi) \sqrt{(1-e^2)}}{e + \text{cof.}(\beta+\phi)} \right)
\end{aligned}$$

C A S O II.

$$e > 1$$

83. In questo secondo caso si scrive  $\frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2dx}{1+e-(e-1)xx} = \frac{2dx:(1+e)}{1-\frac{(e-1)xx}{e+1}}$$

$$= \frac{2dx:(1+e)}{(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}})(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}})} = \frac{dx:(1+e)}{1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$$

+  $\frac{dx:(1+e)}{1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$ . Dunque integrando si avrà

$$\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \log. (1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}})$$

$$- \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \log. (1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \log. \left( \frac{\sqrt{(e+1)+x\sqrt{(e-1)}}}{\sqrt{(e+1)-x\sqrt{(e-1)}}} \right), \text{ e sostituito per } x$$

il suo valore  $\sqrt{\frac{1-\text{cof.}(\beta+\phi)}{1+\text{cof.}(\beta+\phi)}}$ , nasce  $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} =$

$$\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \cdot \log. \frac{\sqrt{(e+1)}\sqrt{(1+\text{cof.}(\beta+\phi))} + \sqrt{(e-1)}\sqrt{(1-\text{cof.}(\beta+\phi))}}{\sqrt{(e+1)}\sqrt{(1+\text{cof.}(\beta+\phi))} - \sqrt{(e-1)}\sqrt{(1-\text{cof.}(\beta+\phi))}}$$

(moltiplicando sopra e sotto pel numeratore)

$$\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \log. \frac{e + \text{cof.}(\beta+\phi) + \text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{e^2-1}}{1 + e \text{cof.}(\beta+\phi)}$$

Perlochè nasce  $t = -\frac{b^2 e \text{sen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)(1+e \text{cof.}(\beta+\phi))}$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \log. \frac{e + \text{cof.}(\beta+\phi) + \text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{e^2-1}}{1 + e \text{cof.}(\beta+\phi)} + \text{coft.}$$

Si come poi svanisce  $t$  allorchè  $\phi = g$ , perciò ne deriva

$$\text{coft.} = \frac{b^2 e \text{sen.}(\beta+g)}{c^2(1-e^2)(1+e \text{cof.}(\beta+g))}$$

$$- \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \log. \frac{e + \text{cof.}(\beta+g) + \text{sen.}(\beta+g)\sqrt{e^2-1}}{1 + e \text{cof.}(\beta+g)}$$

Dunque surrogato questo valore nell'espressione di  $t$ , nasce

$$\begin{aligned} \text{finalmente } t = & \frac{b^2 e}{c^2(1-e^2)} \left( \frac{\text{fen. } (\beta + g)}{1 + e \text{ cof. } (\beta + g)} - \frac{\text{fen. } (\beta + \phi)}{1 + e \text{ cof. } (\beta + \phi)} \right) \\ & + \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \log. \frac{e + \text{cof. } (\beta + \phi) + \text{fen. } (\beta + \phi) \sqrt{(e^2 - 1)}}{1 + e \text{ cof. } (\beta + \phi)} \\ & - \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3/2}} \log. \frac{e + \text{cof. } (\beta + g) + \text{fen. } (\beta + g) \sqrt{(e^2 - 1)}}{1 + e \text{ cof. } (\beta + g)} \end{aligned}$$

## C A S O III.

$$e = 1$$

§4. Quest'ultimo caso non può trattarsi col metodo precedente, come apparisce dal valore infinito che acquistano i coefficienti indeterminati  $M$ ,  $N$ . Siccome però

$$1 + \text{cof. } (\beta + \phi) = 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi), \text{ così farà}$$

$$t = \frac{b^2}{c^2} \int \frac{d\phi}{4 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^4}. \text{ Facendo pertanto } \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \phi = \omega,$$

$$\text{e perciò } d\phi = 2d\omega, \text{ nasce } t = \frac{b^2}{2c^2} \int \frac{d\omega}{\text{cof. } \omega^4}.$$

Ma per le note regole d'integrazione de' monomj trigonometrici si ha

$$\int \frac{d\omega}{\text{cof. } \omega^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{fen. } \omega}{\text{cof. } \omega^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{fen. } \omega}{\text{cof. } \omega} = \frac{\text{fen. } \omega (1 + 2 \text{ cof. } \omega^2)}{3 \text{ cof. } \omega^3}.$$

Dunque sostituendo ne verrà

$$t = \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{fen. } \frac{1}{2} (\beta + \phi) (1 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^2)}{\text{cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^3} + \text{cof.}$$

La costante si determina, come dianzi, con osservare che  $t$  diventa zero allorchè  $\phi$  si cangia in  $g$ ; il che dà cof.

$$= \frac{-b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{fen. } \frac{1}{2} (\beta + g) (1 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + g)^2)}{\text{cof. } \frac{1}{2} (\beta + g)^3}.$$

Perlochè risulta

$$t = \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{fen. } \frac{1}{2} (\beta + \phi) (1 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^2)}{\text{cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^3}$$

$$= \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{fen. } \frac{1}{2}(\beta + g)(1 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2}(\beta + g)^2)}{\text{cof. } \frac{1}{2}(\beta + g)^2}$$

85. Si può altrimenti ritrovare il valore di  $t$  in questo caso con far uso della già praticata sostituzione di

$$\text{cof.}(\beta + \phi) = \frac{1 - x^2}{1 + xx^2}; \text{ poichè si avrà } d\phi = \frac{2dx}{1 + xx^2}, \text{ ed}$$

$$1 + \text{cof.}(\beta + \phi) = \frac{2}{1 + xx^2}, \text{ e perciò } \frac{d\phi}{(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2}$$

$$= \frac{1}{2} dx (1 + xx^2). \text{ Laonde } \int \frac{d\phi}{(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2} = \frac{1}{2} x$$

$$+ \frac{1}{6} x^3 = \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)}{2(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))} + \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)^3}{6(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))} + \text{coft.}$$

$$= \frac{\text{fen.}(\phi + \beta)}{2(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))} + \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)(1 - \text{cof.}(\beta + \phi)^2)}{6(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^3} + \text{coft.}$$

$$= \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)}{2(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))} + \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)(1 - \text{cof.}(\beta + \phi))}{6(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2} + \text{coft.}$$

$$= \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)(2 + \text{cof.}(\beta + \phi))}{3(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2} + \text{coft.} \text{ Da ciò si ricava}$$

$$t = \frac{b^2}{c^2} \int \frac{d\phi}{(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2}$$

$$= \frac{b^2}{3c^2} \cdot \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)(2 + \text{cof.}(\beta + \phi))}{(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2} + \text{coft.}; \text{ ed essendo}$$

$$\text{coft.} = - \frac{b^2}{3c^2} \cdot \frac{\text{fen.}(\beta + g)(2 + \text{cof.}(\beta + g))}{(1 + \text{cof.}(\beta + g))^2}, \text{ se ne deduce si-}$$

$$\text{nalmente } t = \frac{b^2}{3c^2} \cdot \frac{\text{fen.}(\beta + \phi)(2 + \text{cof.}(\beta + \phi))}{(1 + \text{cof.}(\beta + \phi))^2}$$

$$- \frac{b^2}{3c^2} \cdot \frac{\text{fen.}(\beta + g)(2 + \text{cof.}(\beta + g))}{(1 + \text{cof.}(\beta + g))^2}, \text{ la qual espressione, per}$$

$$\text{effere } 1 + \text{cof.}(\beta + \phi) = 2 \text{ cof.} \frac{1}{2}(\beta + \phi)^2, \text{ e fen.}(\beta + \phi)$$

$$= 2 \text{ fen. } \frac{1}{2} (\beta + \phi) \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi), \text{ equivale manifestamente alla}$$

precedente

$$\frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{fen. } \frac{1}{2} (\beta + \phi) (1 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^2)}{\text{cof. } \frac{1}{2} (\beta + \phi)^2}$$

$$= \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{fen. } \frac{1}{2} (\beta + g) (1 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} (\beta + g)^2)}{\text{cof. } \frac{1}{2} (\beta + g)^2}.$$

## S C O L I O.

*Da aggiungersi dopo il §. 53 della Memoria precedente.*

Ne' seguenti Corollarj vengono dimostrati i Teoremi da me proposti nel I. Volume degli Atti della nostra Società sopra la *discesa de' Corpi per la convessità delle Curve*. Il celebre Sig. Abb. *Frifé* nel secondo tomo delle sue Opere stampate in Milano esponendo alcuni di questi miei Teoremi fa avvertire pag. 115. una discrepanza notevole fra le formole, che egli ottiene col suo metodo di dimostrare, ed i miei risultati. Ma una tal discrepanza deriva dal principio da esso quivi adottato, che la misura assoluta della forza centrifuga sia una lineetta terza proporzionale al diametro del cerchio osculatore, e all' archetto della curva descritto in un dato istante; laddove all' opposto egli è incontrastabile, che per conseguire la vera misura della forza centrifuga convien sempre pigliare una terza proporzionale, non al diametro del cerchio osculatore, ma al femidiametro, e poi all' archetto della curva, che è quanto dire una lineetta doppia di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Frifé* viene proposta. In fatti o vuolsi concepire la curva come poligona infinitilatera, e però l' azione della forza centrifuga non rigorosamente continua, ma interrotta da un istante all' altro; o si vuole immaginare la curva come rigorosa, e quindi continua l' azione della forza centrifuga senza alcuna interruzione neppure istantanea. Nel primo supposto la misura della forza centrifuga è l' impulso istantaneo, che fa percorrere al corpo la lineetta compresa fra l' estremità del latercolo prolungato della curva e l' estremità del latercolo contiguo, e questa lineetta nel presente supposto è visibilmente terza proporzionale al femidiametro



metro del cerchio osculatore , e all' archetto . Nella seconda ipotesi della curva rigorosa , e dell' azione continua della forza centrifuga , la quale in conseguenza non opera per impulsi istantanei, ma con matematica continuità, la lineetta compresa fra le estremità della tangente della curva e dell' archetto è bensì terza proporzionale al diametro del cerchio osculatore , e all' archetto ; ma tal lineetta non può più prenderli per misura totale della forza centrifuga . Imperciocchè essa viene descritta in virtù della forza centrifuga , e della sua azione continua e invariata pel dato istante con moto equabilmente accelerato , e perciò non essa linea semplicemente , ma il doppio di lei dee rappresentare l' effetto intero della forza centrifuga in quell' istante , cioè la velocità generata dalla forza nella durata dell' istante . Conseguentemente anche nel secondo supposto la misura totale e assoluta della forza centrifuga è indubitatamente il doppio di quella , che dal Ch. Sig. Abb. *Frisi* viene assegnata .

Dopo ciò sarebbe inutile , che io qui annoverassi a questo illustre Geometra i molti e grandi assurdi , che derivano dal suo principio , essendo persuaso , che una passeggera riflessione sull' argomento controverso basterà per fargli comprendere gl' inconvenienti del suo assunto .



---



---

# SOPRA LE SERIE

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella R. Università di Pavia.

## ARTICOLO I.

*Dell' uso del Calcolo Integrale delle equazioni lineari per sommare alcune serie trascendenti.*

**I** Moderni Analisti si sono a gara esercitati nel perfezionare ed estendere la teoria delle equazioni differenziali lineari, proponendo varj metodi più o meno semplici e generali per assegnare i loro integrali completi; ed è già noto, che uno de' metodi più ingegnosi per conseguir quest' intento è quello di assumere un *integrale particolare*, e di ricavarne poscia mediante gli artifizj e ripieghi, che l' Analisti somministra, la vera forma dell' *integrale completo*. Supponendo io noti pertanto i fondamenti di questo ramo di Calcolo Integrale mi restringo nel I. Articolo di questa Memoria a mostrar l' uso, che quindi può trarsi per rinvenire la somma di alcune serie trascendenti, alcune delle quali assoggettate agl' ingegnosi metodi di *Leon. Eulero*, e del Sig. Cav. *Lorgna* enigerrebbero per sommarli una lunga e tortuosa complicazione di calcolo, ed ancor dopo questo presenterebbero risultati assai composti, e bisognosi di nuove riduzioni e di nuovi artifizj per vestire una forma semplice ed elegante: laddove all' opposto mercè l' applicazione della predetta teoria si giugne speditamente e direttamente alla somma delle serie proposte, e questa sempre si presenta senza l' ajuto di nuovi ripieghi analitici sotto il più semplice aspetto, cui la natura della quistione permetta.

P R O B L E M A I .

Sommare la serie  $1 + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8}{1.2.3...8} + \frac{x^{12}}{1.2.3...12}$   
 $+ \frac{x^{16}}{1.2.3.4...16} + \text{ecc.} = S$

S O L U Z I O N E .

Si prenda il differenziale, considerando  $x$  come variabile, e  $dx$  costante, e farà  $\frac{x^3 dx}{1.2.3} + \frac{x^7 dx}{1.2.3...7} + \frac{x^{11} dx}{1.2.3...11}$

$+ \frac{x^{15} dx}{1.2.3...15} + \text{ecc.} = dS$ . Di nuovo piglisi il secondo diffe-

renziale, che farà  $\frac{x^2 dx^2}{1.2} + \frac{x^6 dx^2}{1.2.3...6} + \frac{x^{10} dx^2}{1.2.3...10}$

$+ \frac{x^{14} dx^2}{1.2.3...14} + \text{ecc.} = ddS$ . Si pigli ancora il differenziale ter-

zo  $\frac{x dx^3}{1} + \frac{x^5 dx^3}{1.2.3.4.5} + \frac{x^9 dx^3}{1.2.3...9} + \frac{x^{13} dx^3}{1.2.3...13} + \text{ecc.} = d^3S$ . Fi-

nalmente si prenda anche il quarto  $dx^4 + \frac{x^4 dx^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8 dx^4}{1.2.3...8}$

$+ \frac{x^{12} dx^4}{1.2.3...12} + \text{ecc.} = dx^4 \left( 1 + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8}{1.2.3...8} \right.$

$\left. + \frac{x^{12}}{1.2.3...12} + \text{ecc.} \right) = S dx^4 = d^4S$ . Ma questa equazione dif-

ferenziale di quart' ordine, contenendo in ciascun termine la variabile  $S$ , e i suoi differenziali alla sola prima dimensione, è un' equazione *lineare*, e però un suo integrale *particolare* farà  $S = e^{mx}$ , essendo  $m$  una costante indeterminata, ed  $e$  il numero, che ha per logaritmo naturale l' unità. Per trovare le quattro costanti arbitrarie, che devono entrare nell' integrale *completo*, si differenzj l' equazione  $S = e^{mx}$ , e sia  $dS = mdx e^{mx}$ , e novamente  $ddS = m^2 dx^2 e^{mx}$ ,  $d^3S = m^3 dx^3 e^{mx}$ ,

$d^4 S = m^4 dx^4 e^{mx} = S dx^4 = e^{mx} dx^4$ . Dunque  $m^4 = 1$ ; la qual equazione ha per radici,  $m = 1, m' = -1, m'' = \sqrt{-1}, m''' = -\sqrt{-1}$ . Laonde l'integrale completo farà  $S = Ae^{mx} + B_3 e^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x}$ , essendo  $A, B, C, D$ , le quattro costanti da determinarsi nella maniera seguente. Essendo  $S = Ae^x + Be^{-x} + Ce^x \sqrt{-1} + De^{-x} \sqrt{-1} = Ae^x + Be^{-x} + C(\text{cof. } x + \text{fen. } x \sqrt{-1}) + D(\text{cof. } x - \text{fen. } x \sqrt{-1}) = Ae^x + Be^{-x} + (C + D) \text{cof. } x + (C - D) \text{fen. } x \sqrt{-1}$ ; ed anche dovendo essere per la natura della proposta serie  $S = 1$ , quand'  $x = 0$ , ne viene.

$$1.^\circ A + B + (C + D) = 1.$$

Inoltre, essendo  $x = 0$ , dev' essere  $dS = 0$ , e quindi  $dx Ae^x - dx Be^{-x} - (C + D) dx \text{fen. } x + (C - D) dx \text{cof. } x \sqrt{-1}$ ; e dividendo per  $dx$ , e fatto  $x = 0$ , si ha

$$2.^\circ A - B + (C - D) \sqrt{-1} = 0$$

Parimenti, quando  $x = 0$ , dev' essere  $ddS = 0$ ; dunque differenziando il valore ora ritrovato di  $dS$ , e poscia dividendo per  $dx^2$ , e fatto  $x = 0$ , si ha

$$3.^\circ A + B - (C + D) = 0$$

Così anche, dovendo essere  $d^3 S = 0$ , differenziando il valore di  $ddS$ , e diviso poi per  $dx^3$ , e fatto  $x = 0$ , si ottiene

$$4.^\circ A - B - (C - D) \sqrt{-1} = 0$$

Da queste quattro equazioni

$$1.^\circ A + B + (C + D) = 1$$

$$2.^\circ A - B + (C - D) \sqrt{-1} = 0$$

$$3.^\circ A + B - (C + D) = 0$$

4.^\circ  $A - B - (C - D) \sqrt{-1} = 0$ ; si ha subito sommando la 2.^\circ e la 4.^\circ,  $2A - 2B = 0$ , e quindi  $A = B$ ; e sommando la 1.^\circ e la 3.^\circ si ottiene  $2A + 2B = 1$ ; onde

$A = B = \frac{1}{4}$ . Dalla 2.^\circ poi si ha  $C = D$ , che sostituito nella

$$3.^\circ \text{ dà } C = D = \frac{1}{4}. \text{ Dunque finalmente } S = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} (\text{cof. } x + \text{fen. } x \sqrt{-1}) + \frac{1}{4} (\text{cof. } x - \text{fen. } x \sqrt{-1}) = \frac{e^{2x} + 1}{4e^x} + \frac{1}{2} \text{cof. } x. \text{ Il che era ecc.}$$

## PROBLEMA II.

$$\text{Sommare la serie } 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \\ + \frac{x^8}{1.2.3\dots 8} + \frac{x^{10}}{1.2.3\dots 10} + \text{ecc.} = S.$$

## SOLUZIONE.

Presi i differenziali si ottiene  $dS = \frac{x dx}{1} + \frac{x^3 dx}{1.2.3} + \frac{x^5 dx}{1.2.3.4.5}$   
 $+ \frac{x^7 dx}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9 dx}{1.2.3\dots 9} + \text{ecc.}$ ;  $ddS = dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{1.2}$   
 $+ \frac{x^4 dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ecc.} = dx^2 \left( 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \right.$   
 $\left. + \frac{x^6}{1.2.3\dots 6} + \text{ecc.} \right) = S dx^2$ . Sicchè farà come dianzi l' integrale *particolare* dell' equazione *lineare* di second' ordine  $ddS = S dx^2$  espresso da  $S = Ae^{mx}$ ; onde  $dS = Amdxe^{mx}$ ,  $ddS = Am^2 dx^2 e^{mx} = Ae^{mx} dx^2$ ; e quindi  $m^2 = 1$ , ed  $m = 1$ ,  $m' = -1$ . Laonde  $S = Ae^x + Be^{-x}$  è l' integrale *completo* di detta equazione. Ma quando  $x = 0$ , diventa  $S = A + B = 1$ ,  $\frac{dS}{dx} = 0 = A - B$ ; perciò  $A = B = \frac{1}{2}$ ; e però  $S = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ . Il che era ecc.

## PROBLEMA III.

$$\text{Sommare la serie } S = \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^7}{2.3\dots 7} + \frac{z^{11}}{2.3\dots 11} + \frac{z^{15}}{2.3\dots 15} \\ + \frac{z^{19}}{2.3\dots 19} + \text{ecc.}$$

## SOLUZIONE.

Pigliasi il differenziale quattro volte, e farà  $\frac{z^3 dz^4}{2 \cdot 3} + \frac{z^7 dz^4}{2 \cdot 3 \dots 7}$   
 $+ \frac{z^{11} dz^4}{2 \cdot 3 \dots 11} + \frac{z^{15} dz^4}{2 \cdot 3 \dots 15} + \text{ecc.} = d^4 S = S dz^4$ . Quindi preso  
 $S = Aem^z$  per integrale particolare dell'equazione lineare  
 $d^4 S = S dz^4$ , si ottiene, differenziando,  $dS = Amdze^{mz}$ ,  
 $ddS = Am^2 dz^2 e^{mz}$ ,  $d^3 S = Am^3 dz^3 e^{mz}$ ,  $d^4 S = Am^4 dz^4 e^{mz}$   
 $= S dz^4 = Adz^4 e^{mz}$ . Perlochè dividendo per  $Adz^4 e^{mz}$ , si ha  
 $m^4 = 1$ , che dà quattro radici  $m = 1$ ,  $m' = -1$ ,  $m'' = \sqrt{-1}$ ,  
 $m''' = -\sqrt{-1}$ . Avremo pertanto l'integrale completo della  
 predetta equazione espresso da  $Ae^z + Be^{-z} + Ce^z \sqrt{-1}$   
 $+ De^{-z} \sqrt{-1} = S$ . Ora, siccome allorchè  $z = 0$ , nasce  
 $S = 0$ ,  $dS = 0$ ,  $ddS = 0$ ,  $\frac{d^3 S}{dz^3} = 1$ , quindi risultano le se-

guenti equazioni

$$1.^a A + B + C + D = 0$$

$$2.^a A - B + C\sqrt{-1} - D\sqrt{-1} = 0$$

$$3.^a A + B - C - D = 0$$

$$4.^a A - B - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = 1$$

Da queste si ricavano i valori delle costanti arbitrarie; imperciocchè  $1.^a + 3.^a = 2A + 2B = 0$ ;  $2.^a + 4.^a = 2A - 2B = 1$ , cioè  $A = -B = \frac{1}{4}$ . Parimenti  $1.^a - 3.^a = 2C + 2D = 0$ ;  
 $2.^a - 4.^a = 2C\sqrt{-1} - 2D\sqrt{-1} = -1$ , vale a dire  
 $C = -D = -\frac{1}{4\sqrt{-1}}$ . Sostituiti questi valori nell'integrale, ne deriva  $S = \frac{e^z}{4} - \frac{e^{-z}}{4} - \frac{e^z \sqrt{-1}}{4\sqrt{-1}} + \frac{e^{-z} \sqrt{-1}}{4\sqrt{-1}}$   
 $= \frac{e^z - e^{-z}}{4} - \frac{1}{2} \text{ sen. } z$ . Il che era ecc.

S C O L I O

Si arriva a questa serie nello sciogliere il bel Problema Meccanico, in cui si cerca di determinare gli accidenti del moto di un grave, che discende per un piano inclinato in tanto che il piano si aggira intorno alla linea orizzontale, che ne forma la sommità.

P R O B L E M A I V .

$$\text{Sommare la serie } 1 + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^{10}}{1.2.3\dots 10} + \frac{x^{15}}{1.2.3\dots 10} + \frac{x^{20}}{1.2.3\dots 20} + \text{ecc.} = S.$$

S O L U Z I O N E .

Mediante la differenziazione nascono le equazioni  $dS = \frac{x^4 dx}{1.2.3.4}$   
 $+ \frac{x^9 dx}{1.2.3\dots 9} + \frac{x^{14} dx}{1.2.3\dots 14} + \frac{x^{19} dx}{1.2.3\dots 19} + \text{ecc.}; ddS = \frac{x^3 dx^2}{1.2.3}$   
 $+ \frac{x^8 dx^2}{1.2.3\dots 8} + \frac{x^{13} dx^2}{1.2\dots 13} + \frac{x^{18} dx^2}{1.2.3\dots 18} + \text{ecc.}; d^3S = \frac{x^2 dx^3}{1.2}$   
 $+ \frac{x^7 dx^3}{1.2\dots 7} + \frac{x^{12} dx^3}{1.2\dots 12} + \frac{x^{17} dx^3}{1.2\dots 17} + \text{ecc.}; d^4S = \frac{xdx^4}{1} + \frac{x^6 dx^4}{1.2\dots 6}$   
 $+ \frac{x^{11} dx^4}{1.2\dots 11} + \frac{x^{16} dx^4}{1.2\dots 16} + \text{ecc.}; d^5S = dx^5 + \frac{x^5 dx^5}{1.2\dots 5} + \frac{x^{10} dx^5}{1.2\dots 10}$   
 $+ \frac{x^{15} dx^5}{1.2\dots 15} + \text{ecc.} = dx^5 \left( 1 + \frac{x^5}{1.2\dots 5} + \frac{x^{10}}{1.2\dots 10} + \frac{x^{15}}{1.2\dots 15} + \text{ecc.} \right) = S dx^5$ . L'integrale particolare è al folio  $S = zic^{mx}$ , dal che si cava, come sopra  $d^5S = Am^5 dx^5 e^{mx} = S dx^5 = Ae^{mx} dx^5$ ; onde  $m^5 = 1$ . Ora l'equazione  $m^5 - 1 = 0$

ha per fattori  $m-1=0$ ,  $m^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}m + 1=0$ ,

$$m^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}m + 1=0, \text{ che danno } m=1, m' = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$+ V\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right), m'' = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - V\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right),$$

$$m''' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + V\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right), m'''' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$-V\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)$ . Dunque, posto  $\frac{-5+\sqrt{5}}{8} = -n$ , l'integrale completo della equazione lineare  $d^5 S = S dx^5$  farà  $Ae^{mx}$

$$+ Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x} + Ee^{m''''x} = Ae^x + Be^{(1-\sqrt{5})x:4} + \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} \\ + Ce^{(1-\sqrt{5})x:4} - \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} + De^{(-1-\sqrt{5})x:4} + \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} \\ + Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4} - \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} = Ae^x + Be^{(1-\sqrt{5})x:4}$$

$$(\text{cof. } x\sqrt{n} + \text{fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}) + Ce^{(1-\sqrt{5})x:4}$$

$$(\text{cof. } x\sqrt{n} - \text{fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}) + De^{(-1-\sqrt{5})x:4}$$

$$(\text{cof. } x\sqrt{n} + \text{fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}) + Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4}$$

$$(\text{cof. } x\sqrt{n} - \text{fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}) = Ae^x + (B+C)e^{(1-\sqrt{5})x:4} \times$$

$$\text{cof. } x\sqrt{n} + (B-C)e^{(1-\sqrt{5})x:4} \text{ fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}$$

$$+ (D+E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4} \text{ cof. } x\sqrt{n}$$

$$+ (D-E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4} \text{ fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}, \text{ cioè posto}$$

$$B+C=F, B-C=G, D+E=H, D-E=I, \text{ nasce}$$

$$S = Ae^x + Fe^{(1-\sqrt{5})x:4} \text{ cof. } x\sqrt{n} + Ge^{(1-\sqrt{5})x:4}$$

$$\text{fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1} + He^{(-1-\sqrt{5})x:4} \text{ cof. } x\sqrt{n} + Ie^{(-1-\sqrt{5})x:4}$$

$$\text{fen. } x\sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}. \text{ Si offervi ora, che fatto } x=0, \text{ diventa}$$

$$S=1, \frac{dS}{dx} = \frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{d^3 S}{dx^3} = \frac{d^4 S}{dx^4} = 0, \text{ donde si traggono cin-$$

que



que equazioni per determinare le costanti arbitrarie  $A, F, G, H, I$ . In fatti in tal ipotesi di  $x=0$ , l'equazione  $S=1$  dà

$$1^{\circ}. A + F + H = 1. \text{ Così } dS = 0 \text{ dà}$$

$$2^{\circ}. A + \frac{1 - \sqrt{5}}{4} F + G \sqrt{n} \sqrt{-1} - H \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + I \cdot \sqrt{n} \sqrt{-1} = 0.$$

$$\text{Parimenti } ddS = 0 \text{ dà } 3^{\circ}. A - \frac{1}{4} F + G \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{n} \sqrt{-1}$$

$$- H \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} - I \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{n} \sqrt{-1} = 0. \text{ Ma siccome per}$$

ottenere le altre due equazioni, che restano, cioè la 4.<sup>a</sup>, e la 5.<sup>a</sup>, il calcolo riesce affai lungo e tedioso, parmi più espediente procedere così: Le cinque radici dell'equazione

$$m^5 - 1 = 0 \text{ sono } 1, a + b \sqrt{-1}, a - b \sqrt{-1}, f + g \sqrt{-1}, f - g \sqrt{-1}, \text{ onde l'integrale completo è } Ae^{ax} + Be^{ax} + b^x \sqrt{-1}$$

$$+ Ce^{ax - bx \sqrt{-1}} + De^{fx + gx \sqrt{-1}} + Ee^{fx + gx \sqrt{-1}}. \text{ Laonde}$$

supposto  $x=0$ , si avranno le seguenti equazioni

$$1^{\circ}. A + B + C + D + E = 1,$$

$$2^{\circ}. A + (a + b \sqrt{-1})B + (a - b \sqrt{-1})C + (f + g \sqrt{-1})D + (f - g \sqrt{-1})E = 0,$$

$$3^{\circ}. A + (a + b \sqrt{-1})^2 B + (a - b \sqrt{-1})^2 C + (f + g \sqrt{-1})^2 D + (f - g \sqrt{-1})^2 E = 0,$$

$$4^{\circ}. A + (a + b \sqrt{-1})^3 B + (a - b \sqrt{-1})^3 C + (f + g \sqrt{-1})^3 D + (f - g \sqrt{-1})^3 E = 0,$$

$$5^{\circ}. A + (a + b \sqrt{-1})^4 B + (a - b \sqrt{-1})^4 C + (f + g \sqrt{-1})^4 D + (f - g \sqrt{-1})^4 E = 0,$$

dalle quali si otterranno i valori delle cinque costanti arbitrarie. Il che ecc

P R O B L E M A V.

$$\text{Sommare la serie } \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3....6} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10}$$

$$+ \frac{x^{14}}{1.2.3....14} + \text{ecc.} = S$$

## S O L U Z I O N E .

$$\begin{aligned} \text{Si trova } dS &= \frac{x dx}{1} + \frac{x^2 dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^3 dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 9} + \frac{x^4 dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 13} + \text{ecc.}; \\ ddS &= dx^2 + \frac{x^4 dx^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^8 dx^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 8} + \frac{x^{12} dx^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 12} + \text{ecc.}; \\ d^3S &= \frac{x^3 dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^7 dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7} + \frac{x^{11} dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 11} + \text{ecc.}; \\ d^4S &= \frac{x^2 dx^4}{1 \cdot 2} + \frac{x^6 dx^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 6} + \frac{x^{10} dx^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

$$= dx^4 \left( \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 6} + \frac{x^{10}}{1 \cdot 2 \dots 10} + \text{ecc.} \right) = S dx^4 . \text{ Ora per}$$

l' indole dell' equazione differenziale lineare di quart' ordine  $d^4S = S dx^4$ , si trova, che un suo integrale particolare è  $S = Ae^{mx}$ ; onde  $dS = Amdxe^{mx}$ ,  $ddS = Am^2 dx^2 e^{mx}$ ,  $d^3S = Am^3 dx^3 e^{mx}$ ,  $d^4S = Am^4 dx^4 e^{mx} = S dx^4 = Ae^{mx} dx^4$ ; e perciò  $m^4 - 1 = 0$ , ovvero  $(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $m' = -1$ ,  $m'' = \sqrt{-1}$ ,  $m''' = -\sqrt{-1}$ . Sicchè l' integrale completo dell' equazione  $d^4S = S dx^4$  è  $Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x} = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{\sqrt{-1}x} + De^{-\sqrt{-1}x}$ . Per determinare ora le costanti arbitrarie  $A, B, C, D$  si offervi, che quando  $x = 0$ , diventa  $S = 0$ ,  $\frac{dS}{dx} = 0$ ,  $\frac{ddS}{dx^2} = 1$ ,  $\frac{d^3S}{dx^3} = 0$ . Dunque si avranno le equazioni seguenti

$$1.^{\circ} A + B + C + D = 0$$

$$2.^{\circ} A - B + C\sqrt{-1} - D\sqrt{-1} = 0$$

$$3.^{\circ} A + B - C - D = 1$$

4.^{\circ}  $A - B - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = 0$ . Sommando la 2.^{\circ} e la 4.^{\circ} si ha  $2A - 2B = 0$ , cioè  $A = B$ ; e sommando la prima e la 3.^{\circ} nasce  $2A + 2B = 1$ , ovvero  $A = B = \frac{1}{4}$ .

Posto questo valore nella 1.<sup>a</sup> si ha  $C + D = -\frac{1}{2}$ ; ma dall'

ultima si ottiene  $C = D$ ; dunque  $C = D = -\frac{1}{4}$ . Laonde

$$S = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{4} e^x \sqrt{-1} - \frac{1}{4} e^{-x} \sqrt{-1} = \frac{e^{2x} + 1}{4e^x}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{cof. } x + \text{fen. } x \cdot \sqrt{-1}) - \frac{1}{4} (\text{cof. } x - \text{fen. } x \cdot \sqrt{-1})$$

$$= \frac{e^{2x} + 1}{4e^x} - \frac{1}{2} \text{cof. } x. \text{ Il che era ecc.}$$

P R O B L E M A VI.

Sommare la serie  $1 + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^9}{1.2.3...9}$   
 $+ \frac{x^{12}}{1.2.3...12} + \text{ecc.} = S.$

S O L U Z I O N E .

Si trova  $dS = \frac{x^2 dx}{1.2} + \frac{x^5 dx}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8 dx}{1.2.3...8} + \frac{x^{11} dx}{1.2.3...11} + \text{ecc.};$   
 $ddS = \frac{x dx^2}{1} + \frac{x^4 dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^7 dx^2}{1.2.3...7} + \frac{x^{10} dx^2}{1.2.3...10} + \text{ecc.};$   
 $d^3S = dx^3 + \frac{x^3 dx^3}{1.2.3} + \frac{x^6 dx^3}{1.2.3...6} + \frac{x^9 dx^3}{1.2.3...9} + \text{ecc.} =$   
 $dx^3 (1 + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{1.2.3...6} + \frac{x^9}{1.2.3...9} + \text{ecc.}) = S dx^3. \text{ Per}$   
 ciò pigliando  $S = Ae^{mx}$  per integrale particolare dell' equa-  
 zione lineare  $d^3S = S dx^3$ , si ha  $dS = Am dx e^{mx}$ ,  
 $ddS = Am^2 dx^2 e^{mx}$ ,  $d^3S = Am^3 dx^3 e^{mx} = S dx^3 = Ae^{mx} dx^3$ ; ond' è  
 $m^3 = 1$ , ed  $m = 1$ ,  $m' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ ,  $m'' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ .

Laonde l' integrale completo farà  $S = Ae^x$   
 $+ Be^{(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2})x} + C e^{(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2})x} + D e^{(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2})x} = Ae^x$

D d d ij

$$\begin{aligned}
 & + B e^{(-x)^2} \left( \operatorname{cof.} \frac{x\sqrt{3}}{2} + \operatorname{fen.} \frac{x\sqrt{3}}{2} \sqrt{-1} \right) + C e^{(-x)^2} \\
 & \left( \operatorname{cof.} \frac{x\sqrt{3}}{2} - \operatorname{fen.} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1} \right) = A e^x + (B + C) e^{(-x)^2} \times \\
 & \operatorname{cof.} \frac{x\sqrt{3}}{2} + (B - C) e^{(-x)^2} \operatorname{fen.} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1} . \text{ Ora, quando} \\
 & x = 0 \text{ diventa } S = 1, dS = 0, ddS = 0, \text{ cioè} \\
 & 1.^\circ A + (B + C) = 1 \\
 & 2.^\circ A - \frac{(B + C)}{2} + \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 0 \\
 & 3.^\circ A - \frac{(B + C)}{2} - \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 0 . \text{ Sottraggo} \\
 & \text{la } 3.^\circ \text{ dalla } 2.^\circ, \text{ ed ho } (B - C) = 0 . \text{ Dalla } 2.^\circ \text{ poi ottengo} \\
 & A = \left( \frac{B + C}{2} \right); \text{ e dalla } 1.^\circ A = 1 - (B + C), \text{ ond'è} \\
 & \frac{(B + C)}{2} = 1 - (B + C), \text{ cioè } (B + C) = \frac{2}{3}, A = \frac{1}{3} . \text{ Dunque} \\
 & S = \frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{(-x)^2} \operatorname{cof.} \frac{x\sqrt{3}}{2} . \text{ Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

## P R O B L E M A VII.

$$\begin{aligned}
 & \text{Sommare la serie } x + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7} + \frac{x^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10} \\
 & + \text{ecc.} = S .
 \end{aligned}$$

## S O L U Z I O N E .

$$\begin{aligned}
 & \text{Presi i differenziali si ha } dS = dx + \frac{x^3 dx}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^6 dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 6} \\
 & + \frac{x^9 dx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 9} + \text{ecc.}; ddS = \frac{x^2 dx^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^5 dx^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^8 dx^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 8} \\
 & + \text{ecc.}; d^3S = \frac{x dx^3}{1} + \frac{x^4 dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^7 dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

$$= dx^3 \left( x + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^7}{1.2.3...7} + \text{ecc.} \right) = S dx^3 .$$

Avutasi ora l'equazione differenziale lineare  $d^3S = S dx^3$ , pongasi  $S = Ae^{mx}$ , onde  $dS = Am dx e^{mx}$ ,  $ddS = Am^2 dx^2 e^{mx}$ ,  $d^3S = Am^3 dx^3 e^{mx}$ , il qual valore sostituito nell'equazione  $d^3S = S dx^3$  dà  $Am^3 dx^3 e^{mx} = S dx^3 = Ae^{mx} dx^3$ , e quindi  $m^3 = 1$ , cioè  $m = 1$   $m'' = \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$ ,

$$m = \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} .$$

Laonde l'integrale completo dell'equazione  $d^3S = S dx^3$  farà  $S = Ae^{mx} + Be^{m''x} + Ce^{m'''x} = Ae^x + (B + C) e^{(-\frac{1}{2})x} \cos. \frac{x\sqrt{3}}{2} + (B - C) e^{(-\frac{1}{2})x} \text{sen.} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1} .$

Ora si rifletta, che quando  $x = 0$ ,  $S = 0$ ;  $\frac{dS}{dx} = 1$ ;  $ddS = 0$ ; onde

- 1.<sup>a</sup>  $A + (B + C) = 0 .$
- 2.<sup>a</sup>  $A - \frac{(B + C)}{2} + \frac{(B - C) \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1 .$
- 3.<sup>a</sup>  $A - \frac{(B + C)}{2} - \frac{(B - C) \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 0 .$

Da questa terza equazione si ottiene  $\frac{(B - C) \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = A - \frac{(B + C)}{2}$ , il qual valore sostituito nella seconda dà  $2A - (B + C) = 1$ , ed in questa surrogando il valore  $A = -\frac{(B + C)}{2}$  cavato dalla prima, si ottiene  $(B + C) = -\frac{1}{3}$ ,  $A = \frac{1}{3}$ ,  $(B - C) \sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Laonde  $S = \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} e^{(-\frac{1}{2})x} \cos. \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{(-\frac{1}{2})x} \text{sen.} \frac{x\sqrt{3}}{2}$ . Il che era ecc.

## P R O B L E M A V I I I .

Sommare la serie  $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8}{1.2.3\dots 8}$   
 $+ \frac{x^{11}}{1.2.3\dots 11} + \text{ecc.} = S.$

## S O L U Z I O N E

Pigliati i differenziali nascono le equazioni

$$dS = x dx + \frac{x^4 dx}{1.2.3.4} + \frac{x^7 dx}{1.2.3\dots 7} + \frac{x^{10} dx}{1.2.3\dots 10} + \text{ecc.};$$

$$ddS = dx^2 + \frac{x^3 dx^2}{1.2.3} + \frac{x^6 dx^2}{1.2.3\dots 6} + \frac{x^9 dx^2}{1.2.3\dots 9} + \text{ecc.};$$

$$d^3S = \frac{x^2 dx^3}{1.2} + \frac{x^5 dx^3}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8 dx^3}{1.2.3\dots 8} + \text{ecc.}$$

$$= dx^3 \left( \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8}{1.2.3\dots 8} + \text{ecc.} \right) = S dx^3. \text{ Trattifi}$$

ora l'equazione differenziale lineare  $d^3S = S dx^3$  come dianzi ponendo  $S = Ae^{mx}$ ; sicchè risulterà l'integrale completo

$$S = Ae^x + (B + C)e^{(-x)^2} \text{ cof. } \frac{x\sqrt{3}}{2} + (B - C)e^{(-x)^2} \times$$

sen.  $\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}$ . Se pertanto si considera, che quando

$x = 0$ , diventa  $S = 0$ ,  $dS = 0$ ,  $\frac{ddS}{dx^2} = 1$ , nascono le tre seguenti equazioni.

$$1^a. A + (B + C) = 0;$$

$$2^a. A - \frac{(B + C)}{2} + \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 0$$

$$3^a. A - \frac{(B + C)}{2} - \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1. \text{ Dalla } 2^a.$$

si ottiene  $A - \frac{(B + C)}{2} = -\frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$ , che furro-

gato nella 3<sup>a</sup>. dà  $2A - (B + C) = 1$ , ed in questa sostituendo il valore della prima  $A = -(B + C)$ , si trova per fine

$$(B + C) = -\frac{1}{3}, A = \frac{1}{3}, (B - C)\sqrt{-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Dunque}$$

$$S = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{(-x):2} \cos. \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{(-x):2} \sin. \frac{x\sqrt{3}}{2}. \text{ Il che era ecc.}$$

P R O B L E M A IX.

Trovare la somma generale di tutte le serie della forma

$$\frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\dots(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\dots(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3\dots(r+3n)} + \text{ecc.} = S, \text{ supponendo } r, n \text{ numeri interi affermativi.}$$

S O L U Z I O N E.

Caso I<sup>o</sup>.  $n > r$ .

Preso il differenziale  $n^{\text{esimo}}$  di detta serie, si vede facilmente, che nascerà  $d^n S = \frac{x^r dx^n}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{r+n} dx^n}{1.2.3\dots(r+n)}$

$$+ \frac{x^{r+2n} dx^n}{1.2.3\dots(r+2n)} + \text{ecc.} = dx^n \left( \frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\dots(r+n)} \right)$$

$$+ \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\dots(r+2n)} + \text{ecc.}) = S dx^n. \text{ Se ora per la nota teoria}$$

delle equazioni differenziali *lineari*, si assume  $S = Ae^{mx}$  per integrale particolare dell' equazione lineare  $d^n S = S dx^n$ , è chiaro che si avrà  $d^n S = Am^n e^{mx} dx^n = S dx^n = Aem^x dx^n$ , d' onde si trae  $m^n = 1$ . Preso pertanto le  $n$  radici dell' equazione  $m^n = 1$  le quali (essendo  $n$  pari) sono  $1, -1, a + b\sqrt{-1}, a - b\sqrt{-1}, f + g\sqrt{-1}, f - g\sqrt{-1}, \text{ecc.}$  si otterrà l' integrale completo dell' equazione  $d^n S = S dx^n$ , il quale farà di questa forma  $Ae^x + Be^{-x} + Ce^{ax + bx\sqrt{-1}} + De^{ax - bx\sqrt{-1}} + Ee^{fx + gx\sqrt{-1}} + Fe^{fx - gx\sqrt{-1}} + \text{ecc.} = Ae^x + Be^{-x}$

$\dagger (C \dagger D)e^{ax}$  cof.  $bx \dagger (C - D)e^{ax}$  fen.  $bx \sqrt{-1} \dagger (E \dagger F)e^{fx}$   
 cof.  $g \cdot x \dagger (E - F)\sqrt{-1}$  fen.  $gx \dagger$  ecc. Per determinare  
 poi le costanti arbitrarie  $A, B, C, D$ , ecc. convien risolvere  
 le  $n$  seguenti equazioni

$$1^a. A \dagger B \dagger C \dagger D \dagger E \dagger F \dagger \text{ecc.} = 0,$$

$$2^a. A - B + (a + b\sqrt{-1})C \dagger (a - b\sqrt{-1})D + (f + g\sqrt{-1})E \\ \dagger (f - g\sqrt{-1})F \dagger \text{ecc.} = 0,$$

$$3^a. A \dagger B + (a + b\sqrt{-1})^2 C \dagger (a - b\sqrt{-1})^2 D + (f + g\sqrt{-1})^2 E \\ \dagger (f - g\sqrt{-1})^2 F \dagger \text{ecc.} = 0,$$

$$4^a. A - B + (a + b\sqrt{-1})^3 C \dagger (a - b\sqrt{-1})^3 D + (f + g\sqrt{-1})^3 E \\ \dagger (f - g\sqrt{-1})^3 F \dagger \text{ecc.} = 0,$$

ecc.

⋮  
⋮  
⋮

$$(r + 1)^a. A \pm B + (a + b\sqrt{-1})^r C \dagger (a - b\sqrt{-1})^r D \dagger (f + g\sqrt{-1})^r E \\ \dagger (f - g\sqrt{-1})^r F \dagger \text{ecc.} = 1$$

⋮  
⋮  
⋮

$$n^a. A - B \dagger (a + b\sqrt{-1})^{n-1} C \dagger (a - b\sqrt{-1})^{n-1} D \\ \dagger (f + g\sqrt{-1})^{n-1} E \dagger (f - g\sqrt{-1})^{n-1} F \dagger \text{ecc.} = 0.$$

Queste derivano dall'essere, quando  $x = 0$ , ancora  $S = 0$ ,

$$dS = 0, ddS = 0, \text{ecc.} \dots \frac{d^r S}{dx^r} = 1, \dots, d^{n-1} S = 0, \text{ ed il doppio}$$

segno nella  $(r + 1)^a$  posto al  $B$  serve pel doppio caso in cui  
 può trovarsi  $r$  di pari o dispari, cioè essendo  $r$  pari vale il  
 segno  $+$  e vale il segno  $-$  quando  $r$  è dispari. Se in luogo d'ef-  
 fere  $n$  pari, come abbiamo supposto, fosse dispari, allora man-  
 cherà una delle due radici reali, cioè  $-1$ ; e perciò farà  
 $B = 0$ , e tutto il resto farà come sopra, con avvertire però  
 che  $a, b, f, g$ , ecc. non faranno più quelli di prima.



Caso II°.  $n = r$ .

Si aggiunga alla serie  $S$  l'unità, e si faccia  $S' = S + 1$

$$= 1 + \frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\dots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3\dots 3r} + \text{ecc.}$$

Di qui si deduce  $d^r S' = dx^r + \frac{x^r dx^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\dots 2r} + \text{ecc.}$

$$= dx^r \left( 1 + \frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\dots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3\dots 3r} + \text{ecc.} \right) = S' dx^r.$$

Sicchè prendendo  $Ae^{mx}$  per integrale particolare dell' equazione  $d^r S' = S' dx^r$ , ed essendo  $d^r S' = Am^r e^{mx} dx^r = S' dx^r = Ae^{mx} dx^r$ , e quindi  $m^r = 1$ , si trovino le  $r$  radici di quest' ultima equazione, che faranno, nel supposto di  $r$  pari,  $1, -1, \alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha - \beta\sqrt{-1}, \gamma + \delta\sqrt{-1}, \gamma - \delta\sqrt{-1}$ , ecc. Laonde l' integrale completo dell' equazione differenziale sarà  $Ae^x + Be^{-x} + Ce^{x + \beta\sqrt{-1}} + De^{x - \beta\sqrt{-1}} + Ee^{\gamma x + \delta\sqrt{-1}} + Fe^{\gamma x - \delta\sqrt{-1}} + \text{ecc.} = Ae^x + Be^{-x} + (C + D)e^{x \text{ cof. } \beta x} + (C - D)\sqrt{-1} e^{x \text{ fen. } \beta x} + (E + F)e^{\gamma x \text{ cof. } \delta x} + (E - F)\sqrt{-1} e^{\gamma x \text{ fen. } \delta x} + \text{ecc.}$  Siccome per supposto  $x = 0$ , si ha  $S' = 1, d^r S' = 0, ddS = 0, \dots d^{r-1} S = 0$ , quindi si avranno per la determinazione delle  $n$  costanti  $A, B, C, D, E, F$ , ecc. le seguenti  $n$  equazioni

1°.  $A + B + C + D + E + F + \text{ecc.} = 1$

2°.  $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})E + (\gamma - \delta\sqrt{-1})F + \text{ecc.} = 0$

3°.  $A + B + (x + \beta\sqrt{-1})^2 C + (x - \beta\sqrt{-1})^2 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^2 E + (\gamma - \delta\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.} = 0$

4°.  $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^3 C + (x - \beta\sqrt{-1})^3 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^3 E + (\gamma - \delta\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.} = 0$

ecc.

⋮

$n^\circ$ .  $A - B + (x + \beta\sqrt{-1})^{n-1} C + (x - \beta\sqrt{-1})^{n-1} D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^{n-1} E + (\gamma - \delta\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0.$

E e e

Dunque la somma ricercata  $S = S' - 1 = Ae^x + Be^{-x} - 1$   
 $+ (C + D)e^{2x}$  cof.  $\beta x + (C - D)e^{2x} \sqrt{-1}$  fen.  $\beta x$   
 $+ (E + F)e^{rx}$  cof.  $\delta x + (E - F) \sqrt{-1} \cdot e^{rx}$  fen.  $\delta x +$  ecc. An-  
 che qui si avverta, che nel caso di  $n$  dispari farà  $B = 0$

Caso III.  $n < r$ .

Alla proposta serie  $S = \frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\dots(r+n)}$   
 $+ \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\dots(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3\dots(r+3n)} +$  ecc. si aggiungano tanti  
 termini iniziali  $\frac{x^{r-n}}{1.2.3\dots(r-n)} + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\dots(r-2n)}$   
 $+ \frac{x^{r-3n}}{1.2.3\dots(r-3n)} + \dots + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\dots(r-\lambda n)}$  fino a che  
 l'esponente  $r - \lambda n$  di  $x$  diventa  $< n$ , oppure  $= n$ , e si faccia  
 $S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\dots(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\dots(r-(\lambda-1)n)}$   
 $+ \dots + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\dots(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3\dots(r-n)} = \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\dots(r-\lambda n)}$   
 $+ \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\dots(r-(\lambda-1)n)} + \dots + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\dots(r-2n)}$   
 $+ \frac{x^{r-n}}{1.2.3\dots(r-n)} + \frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\dots(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\dots(r+2n)}$   
 $+ \frac{x^{r+3n}}{1.2.3\dots(r+3n)} + \frac{x^{r+4n}}{1.2.3\dots(r+4n)} +$  ecc.  $= S'$ . Se ora si  
 prende della serie  $S'$  il differenziale  $n^{\text{esimo}}$ , si scorge facilmen-  
 te, per essere  $r - \lambda n < n$ , che risulta  $d^n S' = \frac{x^{r-\lambda n} dx^n}{1.2.3\dots(r-\lambda n)}$   
 $+ \frac{x^{r-(\lambda-1)n} dx^n}{1.2.3\dots(r-(\lambda-1)n)} + \frac{x^{r-(\lambda-2)n} dx^n}{1.2.3\dots(r-(\lambda-2)n)} + \dots$   
 $+ \frac{x^{r-2n} dx^n}{1.2.3\dots(r-2n)} + \frac{x^{r-n} dx^n}{1.2.3\dots(r-n)} + \frac{x^r dx^n}{1.2.3\dots r}$   
 $+ \frac{x^{r+2n} dx^n}{1.2.3\dots(r+2n)} + \frac{x^{r+3n} dx^n}{1.2.3\dots(r+3n)} +$  ecc.

$$= dx^n \left( \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\dots(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\dots(r-(\lambda-1)n)} + \dots \right) + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\dots(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3\dots(r-n)} \left( + \frac{x^r}{1.2.3\dots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\dots(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\dots(r+2n)} + \text{ecc.} \right) = S dx^n.$$

Considerata pertanto l'equazione lineare differenziale di ordine  $n$ ,  $d^n S' = S dx^n$ , è noto dalla teoria di tali equazioni, che un suo integrale particolare farà della forma  $S' = A e^{m x}$ ; d'onde si raccoglie  $d^n S' = A m^n e^{m x} dx^n = S dx^n = A e^{m x} dx^n$ , e quindi  $m^n = 1$ . Trovate le  $n$  radici dell'equazione  $m^n = 1$ , le quali, supposto  $n$  pari, faranno  $1, -1, \mu + i\sqrt{-1}, \mu - i\sqrt{-1}, \phi + \omega\sqrt{-1}, \phi - \omega\sqrt{-1}$ , ecc. si avrà l'integrale completo dell'equazione  $d^n S' = S dx^n$  espresso da

$$A e^{m x} + B e^{-x} + C e^{\mu x + i x \sqrt{-1}} + D e^{\mu x - i x \sqrt{-1}} + E e^{\phi x + \omega x \sqrt{-1}} + F e^{\phi x - \omega x \sqrt{-1}} + \text{ecc.} = \frac{A e^{2x} + B}{e^x} + (C + D) e^{\mu x} \text{ cof. } \omega x + (C - D) \sqrt{-1} e^{\mu x} \text{ fen. } \omega x + (E + F) e^{\phi x} \text{ cof. } \omega x + (E - F) \sqrt{-1} e^{\phi x} \text{ fen. } \omega x + \text{ecc.}$$

Ora siccome si ha  $S' = 0, dS' = 0, ddS' = 0, \text{ecc.} \dots \frac{d^{(r-\lambda n)} S}{dx^{(r-\lambda n)}} = 1, \dots, d^{n-1} S = 0$

nel caso di  $x = 0$ ; quindi per determinare le costanti  $A, B, C, D, E, F$ , ecc. si presentano da risolvere le  $n$  seguenti equazioni.

- 1.°  $A + B + C + D + E + F + \text{ecc.} \dots = 0$
- 2.°  $A - B + (\mu + i\sqrt{-1})C + (\mu - i\sqrt{-1})D + (\phi + \omega\sqrt{-1})E + (\phi - \omega\sqrt{-1})F + \text{ecc.} \dots = 0$
- 3.°  $A + B + (\mu + i\sqrt{-1})^2 C + (\mu - i\sqrt{-1})^2 D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^2 E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.} \dots = 0$
- 4.°  $A - B + (\mu + i\sqrt{-1})^3 C + (\mu - i\sqrt{-1})^3 D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^3 E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.} \dots = 0$
- ⋮
- ⋮
- ⋮

E e e ij

S O P R A L E S E R I E .

$$\begin{aligned} & \overset{404}{(r-\lambda n + 1)^2} \cdot A \pm B + (\mu + v\sqrt{-1})^{r-\lambda n} C + (\mu - v\sqrt{-1})^{r-\lambda n} D \\ & + (\phi + \omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} F + \text{ecc.} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n.^\circ \quad & A - B + (\mu + v\sqrt{-1})^{n-1} C + (\mu - v\sqrt{-1})^{n-1} D \\ & + (\phi + \omega\sqrt{-1})^{n-1} E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0 . \end{aligned}$$

Il doppio segno premesso al  $B$  nella  $((r-\lambda n + 1)^2)$  serve come nel I.º caso, cioè vale il  $+$  quando  $(r-\lambda n)$  è pari ed il  $-$  quando  $(r-\lambda n)$  è dispari. Qui pure è da avvertirsi, che se  $n$  farà dispari, diverrà  $B=0$  a motivo della mancanza della radice  $-1$  nell'equazione  $m^n = 1$ . Dunque

$$\begin{aligned} S & + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\dots(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\dots(r-(\lambda-1)n)} + \dots \\ & + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\dots(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3\dots(r-n)} = S' = \frac{Ae^{2n} + B}{e^n} \\ & + (C + D) e^{\mu x} \text{ cof. } vx + (C - D) e^{\mu x} \sqrt{-1} \text{ fen. } vx \\ & + (E + F) e^{\omega x} \text{ cof. } \omega x + (E - F) \sqrt{-1} e^{\omega x} \text{ fen. } \omega x + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Conseguentemente la somma ricercata  $S = \frac{Ae^{2n} + B}{e^n}$

$$\begin{aligned} & \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\dots(r-\lambda n)} - \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\dots(r-(\lambda-1)n)} - \text{ecc.} \dots \\ & - \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\dots(r-2n)} - \frac{x^{r-n}}{1.2.3\dots(r-n)} + (C + D) e^{\mu x} \text{ cof. } vx \\ & + (C - D) \sqrt{-1} e^{\mu x} \text{ fen. } vx + (E + F) e^{\omega x} \text{ cof. } \omega x \\ & + (E - F) \sqrt{-1} e^{\omega x} \text{ fen. } \omega x + \text{ecc.} \text{ Il che era ecc.} \end{aligned}$$

## A R T I C O L O II.

*Della somma di alcune Serie di Simpson, ed altre .*

Il celebre *Tommaso Simpson* ne' suoi *Effiys on several curious and useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks* facendo uso del *Metodo* così detto *degl' Incrementi* ritrova la somma di quelle serie numeriche, i di cui termini hanno per numeratore l'unità, e per denominatore un prodot-

to d' un' egual moltitudine di numeri naturali consecutivi , il primo de' quali in ciascun termine è sempre il secondo del termine precedente . Ma un metodo più generale , per conseguire siffatte somme anche nel caso che i numeratori dei termini delle serie sieno le potestà d' un qualche numero dotate d' un esponente eguale all' ultimo fattore del denominatore di ciascun termine , e che il primo fattore del denominatore di qualunque termine sia sempre non il secondo , ma il terzo , o il quarto , o il quinto ecc. fattore del denominatore del termine prossimo precedente , un tal metodo , dissi , ci viene somministrato dalla comune Teoria degl' *Integrali replicati* , la quale come troppo ovvia e familiare agli Analisti non ha qui bisogno di essere posta in maggior luce , bastando solo di mostrarne l' applicazione e l' uso ne' seguenti Problemi .

P R O B L E M A I .

Sommare la serie  $S = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$   
 $+ \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{(n+3)(n+4)} + \text{ecc. in inf.}$

S O L U Z I O N E .

Differenziata due volte l' equazione nell' ipotesi di  $dx$  costante , nasce  $ddS = dx^2 (x^{n-1} + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \text{ecc.}) = dx^2 \times \frac{x^{n-1}}{1-x}$  . Perlochè  $\frac{ddS}{dx} = \frac{x^{n-1}dx}{1-x}$  ,

ed integrando nella detta ipotesi ,  $\frac{dS}{dx} = \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + A$  , ovvero

$dS = dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Adx$  , e nuovamente integrando ,

si ottiene  $S = \int dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Ax + B = x \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x}$

$- \int \frac{x^n dx}{1-x} + Ax + B$  . Il che era ecc.

## C O R O L L A R I O .

Suppongasi  $n = 1$ , e si avrà  $S = -x \log. (1-x) + x + \log. (1-x) + Ax + B$ ; e siccome dee svanire  $S$  allorchè  $x = 0$ , nascerà  $B = 0$ . Inoltre essendo  $\frac{dS}{dx} = -\log. (1-x) + A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{ecc.}$ ; e però annullandosi  $\frac{dS}{dx}$  insieme con  $x$ , si otterrà  $A = 0$ . Laonde la serie  $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \text{ecc.}$  *in inf.*  $= x - x \log. (1-x) + \log. (1-x) = x + \log. \frac{1-x}{(1-x)^x}$ . Se  $x = 1$ , nasce  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \text{ecc.} = 1$ .

## S C O L I O

Si avverta qui attentamente, che nell' ipotesi di  $n = 1$  il valore della serie  $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \text{ecc.}$  cioè  $x + \log. \frac{1-x}{(1-x)^x}$  contiene un logaritmo d' un numero negativo tutte le volte che  $x$  è un intero pari, ovvero una frazione spuria, avente un pari per numeratore e un dispari per denominatore. Si avverta però altresì che la serie è divergente allorchè  $x > 1$ .

## P R O B L E M A II.

Sommare la serie  $S = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^6}{4.5.6} + \text{ecc.}$   
in inf.

## S O L U Z I O N E .

Si differenzj l'equazione, e si otterrà

$$dS = dx \left( \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \text{ecc.} \right);$$

si torni a differenziare, e nascerà  $ddS = dx^2 \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{ecc.} \right)$ . Si differenzj la terza volta, e risulterà  $d^3S = dx^3 (1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}) = dx^3 \times \frac{1}{1-x}$ ; e quindi  $\frac{d^3S}{dx^3} = \frac{dx}{1-x}$ . L'integrale

di questa equazione somministra  $\frac{d^2S}{dx^2} = -\log.(1-x)$  senza costante,

perchè, posto  $x=0$ , sparisce l'uno e l'altro membro della equazione. Moltiplicando poi questa per  $dx$ , sicchè venga

$\frac{d^2S}{dx^2} = -dx \log.(1-x)$ , ed integrando di nuovo, si ottiene

$$\frac{dS}{dx} = -x \log.(1-x) + \int -\frac{x dx}{1-x} = -x \log.(1-x) + \int \left( dx - \frac{dx}{1-x} \right) = -x \log.(1-x) + x + \log.(1-x),$$

senza costante per la ragione precedente. Sicchè moltiplicando per  $dx$  nascerà  $dS = x dx + dx \log.(1-x) - x dx \log.(1-x)$ ,

e preso nuovamente l'integrale, si trova  $S = \frac{1}{2} x^2$

$$+ x \log.(1-x) - x - \log.(1-x) - \frac{1}{2} x^2 \log.(1-x)$$

$$+ \int -\frac{\frac{1}{2} x^2 dx}{1-x} = \frac{1}{2} x^2 + x \log.(1-x) - x - \log.(1-x)$$

$$- \frac{1}{2} x^2 \log.(1-x) + \int \left( \frac{1}{2} x dx + \frac{1}{2} dx - \frac{\frac{1}{2} dx}{1-x} \right) = \frac{3}{4} x^2$$

$$- \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \log.(1-x) + x \log.(1-x) - \frac{1}{2} x^2 \log.(1-x),$$

senza costante per la detta ragione. Il che era ecc.

## C O R O L L A R I O .

Supposto  $x=1$ , si ha la somma della serie  $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4}$   
 $+ \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.2}$ .

## P R O B L E M A III.

Sommare la serie  $S = \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{3.4.5.6}$   
 $+ \frac{x^7}{4.5.6.7} + \text{ecc.}$

## S O L U Z I O N E .

Il primo differenziale dà  $dS = dx \left( \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} \right.$   
 $\left. + \frac{x^6}{4.5.6} + \text{ecc.} \right)$ , cioè  $dx$  moltiplicato nella serie del Pro-  
 lema precedente; sicchè  $dS = dx \left( \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \log. (1-x) \right.$   
 $\left. + x \log. (1-x) - \frac{1}{2} x^2 \log. (1-x) \right)$ , ed integrando provie-  
 ne  $S = \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \log. (1-x) + \int -\frac{\frac{1}{2} x dx}{1-x} + \frac{1}{2} x^2 \times$   
 $\log. (1-x) + \int \frac{\frac{1}{2} x^2 dx}{1-x} - \frac{1}{2.3} x^3 \log. (1-x) + \int -\frac{\frac{1}{6} x^3 dx}{1-x}$   
 $= \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \log. (1-x) + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \log. (1-x)$   
 $+ \frac{1}{2} x^2 \log. (1-x) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \log. (1-x)$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2.3} x^3 \log. (1-x) + \frac{1}{2.3.3} x^3 + \frac{1}{2.2.3} x^2 + \frac{1}{2.3} x + \frac{1}{2.3} \\
 \log. (1-x) & = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3.3} \right) x^3 - \frac{5}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} \log. (1-x) \\
 & - \frac{1}{2} x \log. (1-x) + \frac{1}{2} x^2 \log. (1-x) - \frac{1}{6} x^3 \log. (1-x). \text{ Il} \\
 & \text{che ecc.}
 \end{aligned}$$

C O R O L L A R I O .

$$\begin{aligned}
 \text{Posta } x=1, \text{ si ha } S & = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} \\
 & + \frac{1}{4.5.6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3.3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3.3 + 2 - 5.3 + 6}{2.2.3.3} \\
 & = \frac{9 + 2 + 6 - 15}{2.2.3.3} = \frac{1}{1.2.3.3}.
 \end{aligned}$$

P R O B L E M A I V .

$$\begin{aligned}
 \text{Sommare la serie } S & = \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{3.4.5.6.7} \\
 & + \frac{x^8}{4.5.6.7.8} + \text{ecc. in inf.}
 \end{aligned}$$

S O L U Z I O N E .

Il differenziale dell' equazione somministra

$$dS = dx \left( \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{3.4.5.6} + \frac{x^7}{4.5.6.7} + \text{ecc.} \right), \text{ che}$$

pel Probl. prec. è =  $dx \left( \frac{11}{36} x^3 - \frac{5}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} \log. (1-x) \right.$

$$\left. - \frac{1}{2} x \log. (1-x) + \frac{1}{2} x^2 \log. (1-x) - \frac{1}{6} x^3 \log. (1-x) \right).$$

Dunque integrando farà  $S = \frac{11}{36.4} x^4 - \frac{5}{12.3} x^3 + \frac{1}{6.2} x^2$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} x \log. (1-x) + \int \frac{\frac{1}{6} x dx}{1-x} - \frac{1}{4} x^2 \log. (1-x) - \int \frac{\frac{1}{4} x^2 dx}{1-x} \\
& + \frac{1}{6} x^3 \log. (1-x) + \int \frac{\frac{1}{6} x^3 dx}{1-x} - \frac{1}{24} x^4 \log. (1-x) \\
& - \int \frac{\frac{1}{24} x^4 dx}{1-x} = \frac{11}{4 \cdot 36} x^4 - \frac{5}{3 \cdot 12} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 6} x^2 + \frac{1}{6} x \log. (1-x) \\
& - \frac{1}{4} x^2 \log. (1-x) + \frac{1}{6} x^3 \log. (1-x) - \frac{1}{24} x^4 \log. (1-x) \\
& + \int \left( -\frac{1}{6} dx + \frac{\frac{1}{6} dx}{1-x} \right) + \int \left( \frac{1}{4} x dx + \frac{1}{4} dx - \frac{\frac{1}{4} dx}{1-x} \right) \\
& + \int \left( -\frac{1}{6} x^2 dx - \frac{1}{6} x dx - \frac{1}{6} dx + \frac{\frac{1}{6} dx}{1-x} \right) \\
& + \int \left( \frac{1}{24} x^3 dx + \frac{1}{24} x^2 dx + \frac{1}{24} x dx + \frac{1}{24} dx - \frac{\frac{1}{24} dx}{1-x} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
+ \frac{1}{2.6} \\
+ \frac{1}{2.4} \\
- \frac{1}{2.6} \\
+ \frac{1}{2.24}
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{r} + \\ + \\ - \\ + \end{array}} \right\} x^2$$

$$\begin{array}{r}
- \frac{1}{6} \\
+ \frac{1}{4} \\
- \frac{1}{6} \\
+ \frac{1}{24}
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{r} - \\ + \\ - \\ + \end{array}} \right\} x$$

$$\begin{array}{r}
- \frac{1}{6} \\
+ \frac{1}{4} \\
+ \frac{1}{24} \\
- \frac{1}{6}
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{r} - \\ + \\ + \\ - \end{array}} \right\} \log. (1-x)$$

$$+ \left( \frac{1}{6} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 \right) \log. (1-x) = \frac{25}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} x^4$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{13}{2.6.6} x^3 + \frac{7}{2.4.6} x^2 - \frac{1}{4.6} x + \left( -\frac{1}{2.4} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{4} x^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2.4} x^4 \right) \log. (1-x). \text{ Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

C O R O L L A R I O.

Pigliando  $x=1$  ne viene la somma  $\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6}$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{25}{2.4.6.6} - \frac{13}{2.6.6} + \frac{7}{2.4.6} \\
 & - \frac{1}{4.6} = \frac{1}{1.2.3.4.4}.
 \end{aligned}$$

P R O B L E M A V.

Sommare la serie  $S = \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}$

$$+ \frac{x^8}{3.4.5.6.7.8} + \text{ecc.}$$

S O L U Z I O N E.

Dal differenziale dell' equazione se ne ha quest' altra

$$dS = dx \left( \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{3.4.5.6.7} + \text{ecc.} \right), \text{ cioè pel}$$

Probl. prec.  $dS = dx \left( \frac{25}{2.4.6.6} x^4 - \frac{13}{2.6.6} x^3 + \frac{7}{2.4.6} x^2 \right.$

$$\left. - \frac{1}{4.6} x \right) + dx \left( -\frac{1}{2.4} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2.4} x^4 \right) \log. (1-x).$$

Dunque integrando si ha  $S = \frac{5}{2.4.6.6} x^5 - \frac{13}{2.4.6.6} x^4$

$$+ \frac{7}{2.3.4.6} x^3 - \frac{1}{2.4.6} x^2 + \left( \frac{-x}{2.4} + \frac{1}{2.6} x^2 - \frac{1}{3.4} x^3 + \frac{1}{4.6} x^4 \right)$$

$$- \frac{1}{5 \cdot 24} x^5 \log. (1-x) \\ + \int dx \left( \frac{-\frac{1}{24}x + \frac{1}{2 \cdot 6}x^2 - \frac{1}{3 \cdot 4}x^3 + \frac{1}{4 \cdot 6}x^4 - \frac{1}{5 \cdot 24}x^5}{1-x} \right). \text{ E poi}$$

chè l' integrale di quest' ultimo termine è  $= \frac{1}{24} x$

$$+ \frac{1}{24} \log. (1-x) - \frac{1}{4 \cdot 6} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 6} x - \frac{1}{2 \cdot 6} \log. (1-x) \\ + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 4} x + \frac{1}{3 \cdot 4} \log. (1-x) - \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 6} x^4 \\ - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^2 - \frac{1}{4 \cdot 6} x - \frac{1}{4 \cdot 6} \log. (1-x) + \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 24} x^5 \\ + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 24} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 24} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 24} x^2 + \frac{1}{5 \cdot 24} x + \frac{1}{5 \cdot 24} \log. (1-x), \\ \text{fe questo si aggiugne agli altri, risulta}$$

$$S = \left. \begin{array}{l} \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \\ + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6} \end{array} \right\} x^5 \\ - \left. \begin{array}{l} \frac{13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \\ - \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 6} \end{array} \right\} x^4 \\ + \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \end{array} \right\} x^3 \\ - \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4 \cdot 6} \\ - \frac{1}{2 \cdot 6} \end{array} \right\} x^2 \\ + \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \end{array} \right\} x \\ - \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \end{array} \right\} \log. (1-x)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{-x}{4.6} + \frac{1}{2.6} x^2 - \frac{1}{3.4} x^3 + \frac{1}{4.6} x^4 - \frac{1}{4.5.6} \right) \log. (1-x) \\
 & = \frac{137}{2.4.5.5.6.6} x^5 - \frac{77}{3.4.4.5.6} x^4 + \frac{141}{2.3.3.4.5.6} x^3 - \frac{9}{2.4.5.6} x^2 \\
 & + \frac{1}{4.5.6} x + \left( -\frac{1}{4.6} x + \frac{1}{2.6} x^2 - \frac{1}{3.4} x^3 + \frac{1}{4.6} x^4 \right) \log. (1-x).
 \end{aligned}$$

Il che era ecc.

COROLLARIO.

Affumendo, come dianzi,  $x=1$ , nasce la fomma della serie

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.} \\
 & = \frac{137}{2.4.5.5.6.6} - \frac{77}{3.4.4.5.6} + \frac{141}{2.3.3.4.5.6} - \frac{9}{2.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6} \\
 & = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}.
 \end{aligned}$$

Ecco pertanto il seguente

*Prospetto delle Serie di Simpson.*

<i>Serie</i>	<i>Somme</i>
$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{ecc.}$	$= \frac{1}{1.1}$
$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \text{ecc.}$	$= \frac{1}{1.2.2}$
$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \text{ecc.}$	$= \frac{1}{1.2.3.3}$
$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \text{ecc.}$	$= \frac{1}{1.2.3.4.4}$
$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \text{ecc.}$	$= \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$
$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.}$	$= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} \dots = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.}$$

Dal che si vede, che la somma di ciascuna di queste serie non è altro che il primo termine, dove in luogo dell'ultimo fattore del denominatore si ripete il penultimo.

E' cosa per altro affai rimarchevole, e che a primo aspetto sembra impossibile, che queste serie Simpsoniane possano sommarli con una semplice sottrazione aritmetica della serie proposta da se medesima mutilata del suo primo termine. Un tal modo di operare può vederli ne' Teoremi seguenti.

### Teoremi sulle serie di Simpson.

$$\text{Dalla serie } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{ecc.} = S$$

$$\text{togli } S - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \text{ecc.}, \text{ ed avrai}$$

### T E O R E M A I.

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \text{ecc.} = 1$$

$$\text{Dalla serie } S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \text{ecc.} = 1$$

$$\text{togli } S - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2},$$

ed avrai dividendo per 2,

### T E O R E M A II.

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{7.8.9} = \frac{1}{1.2.2}$$

$$\text{Dalla serie } S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.2}$$

$$\text{togli } S - \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2.2.3},$$

ed hai dividendo per 3

## T E O R E M A III.

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3}$$

$$\text{Dalla serie } S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3}$$

$$\text{togli } S - \frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3.4},$$

ed hai dividendo per 4

## T E O R E M A IV.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$$

$$\text{Dalla serie } S = \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} \\ + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$$

$$\text{togli } S - \frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} \\ + \frac{1}{5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4.5},$$

ed hai dividendo per 5

## T E O R E M A V.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$$

$$\text{Dalla ferie } S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} \\ + \frac{1}{4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$$

$$\text{togli } S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9} \\ + \frac{1}{5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5.6},$$

ed hai dividendo per 6

## T E O R E M A VI.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} \\ + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$$

$$\text{Dalla ferie } S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} \\ + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$$

$$\text{togli } S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} \\ + \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6.7},$$

ed hai dividendo per 7

## T E O R E M A VII.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.}, \\ = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7}; \\ \text{ecc. ecc. ecc.}$$

PROBLEMA



## P R O B L E M A VI.

Sommare la serie  $S = \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{3.4.5} + \frac{x^6}{5.6.7} + \frac{x^8}{7.8.9} + \text{ecc.}$

## S O L U Z I O N E .

Il primo differenziale dell' equazione fomministra

$$dS = dx \left( \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \frac{x^8}{7.8} + \text{ecc.} \right); \text{ il secondo dà}$$

$$ddS = dx^2 \left( \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ecc.} \right); \text{ il terzo presenta}$$

$$d^3S = dx^3 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{ecc.}) = \frac{dx^3}{1 - x^2}. \text{ Ond' è}$$

$$\frac{d^3S}{dx^2} = \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{\frac{1}{2} dx}{1 + x} + \frac{\frac{1}{2} dx}{1 - x}. \text{ Quindi integrando nasce}$$

$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{1}{2} \log. (1 + x) - \frac{1}{2} \log. (1 - x)$ , senza costante perchè svanisce con  $x$  l' uno e l' altro membro dell' equazione. Mol-

tiplico ora per  $dx$ , ed ho  $\frac{ddS}{dx} = \frac{1}{2} dx \log. (1 + x)$

$-\frac{1}{2} dx \log. (1 - x)$ , il di cui integrale è  $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} x \log. (1 + x)$

$-\int \frac{\frac{1}{2} x dx}{1 + x} - \frac{1}{2} x \log. (1 - x) - \int \frac{\frac{1}{2} x dx}{1 - x} = \frac{1}{2} x \log. (1 + x)$

$-\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \log. (1 + x) - \frac{1}{2} x \log. (1 - x) + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \log. (1 - x)$

$= \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \right) \log. (1 + x) - \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \right) \log. (1 - x)$ , senza

costante come dianzi. Moltiplico di nuovo per  $dx$ , ed ot-

tengo  $S = \left( \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} x dx \right) \log. (1 + x) + \left( \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} x dx \right)$

$\log. (1 - x)$ ; e quindi integrando ritrovo  $S = \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x^2 \right) \times$

$$\begin{aligned}
& \log. (1+x) + \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1-x) - \int \frac{\frac{1}{2}x dx + \frac{1}{4}x^2 dx}{1+x} \\
& + \int \frac{\frac{1}{2}x dx - \frac{1}{4}x^2 dx}{1-x} = \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1+x) \\
& + \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1-x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \log. (1+x) - \frac{1}{8}x^2 \\
& + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \log. (1+x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \log. (1-x) + \frac{1}{8}x^2 \\
& + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \log. (1-x) = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1+x) \\
& - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1-x) - \frac{1}{2}x. \text{ Il che era ecc.}
\end{aligned}$$

## C O R O L L A R I O .

Pongasi  $x = 1$ , e farà la somma della serie  $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5}$   
 $+ \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{9.10.11} + \text{ecc.} = \log. 2 - \frac{1}{2}$ .

## P R O B L E M A VII.

Sommare la serie  $S = \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{3.4.5.6} + \frac{x^8}{5.6.7.8}$   
 $+ \frac{x^{10}}{7.8.9.10} + \text{ecc.}$

## S O L U Z I O N E .

Il differenziale dell'equazione somministra quest' altra  
 $dS = dx \left( \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^9}{7.8.9} + \text{ecc.} \right)$ , cioè pel  
*Probl. prec.*  $dS = dx \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1+x)$   
 $- dx \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \right) \log. (1-x) - \frac{1}{2}x dx$ . Perlochè inte-

$$\begin{aligned}
 \text{grando nasce } S &= \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \right) \log. (1+x) \\
 &- \int \frac{\frac{1}{4}x dx + \frac{1}{4}x^2 dx + \frac{1}{12}x^3 dx}{1+x} - \left( \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \right) \times \\
 \log. (1-x) &- \int \frac{\frac{1}{4}x dx - \frac{1}{4}x^2 dx + \frac{1}{12}x^3 dx}{1-x} - \frac{1}{4}x^2 \\
 &= \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \right) \log. (1+x) - \left( \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \right) \\
 \log. (1-x) &- \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \log. (1+x) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \\
 &- \frac{1}{4} \log. (1+x) - \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} \log. (1+x) \\
 &+ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \log. (1-x) - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \log. (1-x) \\
 &+ \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} \log. (1-x) - \frac{1}{4}x^2 \\
 &= \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \right) \log. (1+x) + \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{4}x \right. \\
 &\left. + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \right) \log. (1-x) - \frac{5}{12}x^2. \text{ Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

C O R O L L A R I O .

Da ciò apparisce che la somma della serie  $\frac{1}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{5.6.7.8} + \frac{1}{7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{2}{3} \log. 2 - \frac{5}{12}.$$

I precedenti Problemi sono più che bastanti per dare un'adequata idea della maniera, che dee tenerli per determinare la somma delle serie analoghe alle premesse, qualunque sia nel denominatore d'un dato termine quel fattore, che prendeli per primo nel termine susseguente.

## ARTICOLO III.

*Delle serie infinite delle potenze intere de' numeri naturali co' segni alternanti.*

E' proprietà caratteristica di tutte le serie infinite *divergenti*, i di cui termini vanno vie maggiormente aumentandosi di valore quanto più si scostano dal primo, di non ammettere *somma* propriamente detta, non potendo assegnarsi veruna quantità, a cui la serie divergente proposta sia precisamente eguale, o a cui il valor della serie tanto più si avvicini, e ciò oltre ogni data differenza, quanto più termini si prendono della serie. Ma in quella vece si ricorre in questi casi alla *somma impropria* della serie, vale a dire a quella quantità o funzione, qualunque ella sia, la quale, comunque ineguale al valore della data serie, genera però e produce col suo svolgimento mediante i consueti artifizj analitici la serie medesima. Ad una tal classe di serie si riferiscono quelle, che vengono formate dalle potenze intere de' numeri naturali, prese co' segni alternativi, e generalmente rappresentate da

$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + 7^n - 8^n + 9^n - \text{ecc. in inf.}$ ,  
essendo  $n$  un numero intero affermativo qualunque. L' *Eulero* nel suo *Calcolo Differenziale* con un metodo ingegnoso, ma oltremodo lungo e laborioso, determina la quantità o *frazione generatrice* di siffatte serie, e giugne a conseguire le formole seguenti:

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = \frac{1}{4} \\ \text{II.} \quad 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = 0 \\ \text{III.} \quad 1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = -\frac{2}{16} \\ \text{IV.} \quad 1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = 0 \\ \text{V.} \quad 1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = \frac{16}{64} \\ \text{VI.} \quad 1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = 0 \end{array}$$

$$\text{VII. } 1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = -\frac{272}{256}$$

$$\text{VIII. } 1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = 0$$

$$\text{IX. } 1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{ecc.} \dots\dots\dots = \frac{7936}{1024}$$

ecc. ecc. ecc.

Ma questo gran Geometra dopo aver ritrovata l' espressione generale della *summa* d' un numero qualunque  $x$  di termini della serie proposta , ed aver osservato , che del doppio segno  $\pm$  , di cui trovasi affetta la detta espressione , dee valere il primo ne' casi di  $x$  dispari , il secondo in quelli di  $x$  pari , volendo poi farne l' applicazione al caso di  $x$  infinito discorre così : *Quod si ergo* (Inst. Calc. Diff. p. 500) *x fuerit numerus infinitus , quoniam is est neque par neque impar , hec consideratio cessare debet . ac proinde in summa termini ambigui sunt rejiciendi : unde sequitur , hujusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adjiciendam* . Non pare che un tale ragionamento sia per contentare la corrente de' Geometri , e a più d' uno certamente sembrerà sospetto e precipitoso . Ecco pertanto due differenti semplicissime dimostrazioni delle formole predette .

### *Dimostrazione I. delle Formole Euleriane .*

Essendo  $1 - x + x^2 - x^3 + \text{ecc.} = \frac{1}{1+x}$  , si ha differenziando , e dividendo per  $dx$  ,  $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \text{ecc.} = -\frac{1}{(1+x)^2}$  , e moltiplicando per  $-x$  ,

$$1.^{\circ} \quad x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \text{ecc.} = \frac{x}{(1+x)^2} . (A)$$

Si differenzj parimenti quest' ultima equazione , e si divida per  $x$  ; e nascerà  $1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \text{ecc.}$

$$= \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3} ; \text{ e moltiplicando per } x ,$$

$$2.^{\circ} x - 2^2x^2 + 3^2x^3 - 4^2x^4 + 5^2x^5 - 6^2x^6 + \text{ecc.} = \frac{(1-x)x}{(1+x)^3}. (B).$$

Si prenda nuovamente il differenziale di quest' ultima equazione, e dividendo per  $dx$  si ha  $1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - 6^2x^5 + \text{ecc.} = \frac{1-2x}{(1+x)^3} - \frac{3x(1-x)}{(1+x)^4} = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}$ ; onde moltiplicando per  $x$ , nasce

$$3.^{\circ} x - 2^3x^2 + 3^3x^3 - 4^3x^4 + \text{ecc.} = \frac{x(1-4x+xx)}{(1+x)^4}. (C)$$

Differenzio ora questa equazione, e divido per  $dx$ , ed ot-

$$\begin{aligned} \text{tengo } 1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \text{ecc.} &= \frac{1-4x+xx-4x+2xx}{(1+x)^4} \\ &= \frac{4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5} = \frac{(1-8x+3xx)(1+x)-4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5} \\ &= \frac{1-11x+11x^2-x^3}{(1+x)^5}; \text{ e moltiplicando per } x, \end{aligned}$$

$$4.^{\circ} x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + 5^4x^5 - 6^4x^6 + \text{ecc.} = \frac{x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^5}. (D)$$

Prendo all' istesso modo il differenziale di quest' ultima equazione, e divido per  $dx$ , dal che ricavo

$$\begin{aligned} 1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \text{ecc.} &= \frac{1-11x+11x^2-x^3-11x+22x^2-3x^3}{(1+x)^5} \\ &= \frac{5x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^6} \\ &= \frac{(1-22x+33x^2-4x^3)(1+x)-5x+55x^2+55x^3+5x^4}{(1+x)^6} \\ &= \frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{(1+x)^6}. \text{ Quindi moltiplicando per } x, \end{aligned}$$

si trae

$$\begin{aligned} 5.^{\circ} x - 2^5x^2 + 3^5x^3 - 4^5x^4 + 5^5x^5 - 6^5x^6 + \text{ecc.} \\ &= \frac{x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^6}. (E) \end{aligned}$$

Profiegua a differenziare l'equazione ora ottenuta, e divido per  $dx$ ,  $1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + 5^6x^4 - \text{ecc.}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4 - 26x + 132x^2 - 78x^3 + 4x^4}{(1+x)^6} \\
 &= \frac{6x(1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4)}{(1+x)^7} \\
 &= \frac{(1-52x+198x^2-104x^3+5x^4)(1+x)-6x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^7} \\
 &= \frac{1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7} .
 \end{aligned}$$

Laonde moltiplicando per  $x$ , si trova

6.°  $x - 2^6x^2 + 3^6x^3 - 4^6x^4 + \text{ecc.}$

$$= \frac{x(1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5)}{(1+x)^7} \quad (F)$$

Così proseguendo sempre si arriva a ritrovare quante altre si vogliono equazioni analoghe alle precedenti. Se pertanto nelle equazioni ritrovate (A), (B), (C), (D), (E), (F), ecc. si sostituisce l'unità in vece di  $x$ , esse si trasformano nelle seguenti

- I.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = \frac{1}{4}$
- II.  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$
- III.  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = -\frac{2}{16}$
- IV.  $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$
- V.  $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = \frac{16}{64}$
- VI.  $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$
- VII.  $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = -\frac{272}{256}$
- VIII.  $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$
- IX.  $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Passo ora a dimostrar questo stesso in una maniera forse più soddisfacente col mezzo delle serie infinite de' seni e coseni degli angoli crescenti in progressione aritmetica, e a tal oggetto premetto i due Lemmi seguenti,

## L E M M A I.

Essendo  $x$  un arco qualunque di cerchio descritto col raggio 1,  $\text{si}$  ha  $\text{cos. } x + \text{cos. } 2x + \text{cos. } 3x + \text{cos. } 4x + \text{ecc. in inf.} = -\frac{1}{2}$

## D I M O S T R A Z I O N E .

Pongasi  $S = \text{cos. } x + \text{cos. } 2x + \text{cos. } 3x + \text{cos. } 4x + \text{ecc.}$ , e si moltiplichi per  $\text{cos. } x$ , sicchè risulti  $S \text{ cos. } x = \text{cos. } x^2 + \text{cos. } x \text{ cos. } 2x + \text{cos. } x \text{ cos. } 3x + \text{cos. } x \text{ cos. } 4x + \text{ecc.}$ . Ma si fa dalla Trigonometria, che il prodotto de' coseni di due angoli è uguale alla metà del coseno della somma di detti angoli più la metà del coseno della lor differenza. Dunque risolvendo ciascun prodotto della predetta equazione ne' suoi

$$\begin{aligned} \text{due termini equivalenti, nasce } S \text{ cos. } x &= \frac{1}{2} (\text{cos. } 2x + 1) \\ &+ \frac{1}{2} (\text{cos. } 3x + \text{cos. } x) + \frac{1}{2} (\text{cos. } 4x + \text{cos. } 2x) + \text{ecc.} = \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \text{cos. } x + \text{cos. } 2x + \text{cos. } 3x + \text{cos. } 4x + \text{ecc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos. } x + S. \end{aligned}$$

$$\text{Perlochè farà } S(1 - \text{cos. } x) = \frac{1}{2} \text{cos. } x - \frac{1}{2}, \text{ cioè } S = -\frac{1}{2}.$$

Il che era ecc.

## L E M M A II.

La serie infinita  $S = \text{sen. } x + \text{sen. } 2x + \text{sen. } 3x + \text{sen. } 4x + \text{sen. } 5x + \text{ecc. in inf.}$  è uguale all' espressione  $\frac{\text{sen. } x}{2(1 - \text{cos. } x)}$ .

## D I M O S T R A Z I O N E .

Si moltiplichi per  $\text{cos. } x$  la serie proposta, e si avrà  $S \text{ cos. } x = \text{sen. } x \text{ cos. } x + \text{sen. } 2x \text{ cos. } x + \text{sen. } 3x \text{ cos. } x + \text{sen. } 4x \text{ cos. } x + \text{sen. } 5x \text{ cos. } x + \text{ecc.}$ . Ora dati due angoli  $\varphi, \theta$ ,



$\phi, \theta$ , per la teoria delle funzioni angolari si fa, essere  
 $\text{fen. } \phi \text{ cof. } \theta = \frac{1}{2} \text{fen. } (\phi + \theta) + \frac{1}{2} \text{fen. } (\phi - \theta)$ ; quindi spezzando

ciascun termine della predetta equazione in due, risulterà  
 $S \text{ cof. } x = \frac{1}{2} (\text{fen. } 2x + 0) + \frac{1}{2} (\text{fen. } 3x + \frac{1}{2} \text{fen. } x) + \frac{1}{2} (\text{fen. } 4x$

$+ \text{fen. } 2x) + \frac{1}{2} (\text{fen. } 5x + \text{fen. } 3x) + \text{ecc.} = \frac{1}{2} \text{fen. } x + \text{fen. } 2x$

$+ \text{fen. } 3x + \text{fen. } 4x + \text{fen. } 5x + \text{ecc.} = S - \frac{1}{2} \text{fen. } x$ . Laonde

trasponendo farà  $S - S \text{ cof. } x = \frac{1}{2} \text{fen. } x$ , e conseguentemente

$$S = \frac{\text{fen. } x}{2(1 - \text{cof. } x)}$$

Il che era ecc.

Ciò premesso, si dimostrano speditamente i sopraccennati Teoremi nel modo che segue.

*Dimostrazione II. delle formole Euleriane.*

N.º I.

Si differenzj la serie del Lemma II., e si divida per  $-dx$ ; da ciò risulta  $- \text{cof. } x - 2 \text{ cof. } 2x - 3 \text{ cof. } 3x - 4 \text{ cof. } 4x$

$$- 5 \text{ cof. } 5x - 6 \text{ cof. } 6x - \text{ecc. in inf} = \frac{1}{2(1 - \text{cof. } x)}$$

$$= \frac{1}{4 \text{ fen. } \frac{1}{2} x^2} (M)$$

Sicchè prendendo per  $x$  la semicirconferenza, farà  $\text{cof. } x = -1, \text{ cof. } 2x = 1, \text{ cof. } 3x = -1, \text{ cof. } 4x = 1, \text{ cof. } 5x = -1, \text{ ecc.}$ ; e conseguentemente la serie ritrovata si converte nella  $I.$ ª

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \dots \dots = \frac{1}{4}$$

## N.º II.

Si differenzj due volte la serie del Lemma I., e si divida il risultato per  $dx^2$ ; e si ricaverà  $-\text{cof. } x - 2^2 \text{ cof. } 2x - 3^2 \text{ cof. } 3x - 4^2 \text{ cof. } 4x - 5^2 \text{ cof. } 5x - 6^2 \text{ cof. } 6x - \text{ecc.} = 0$  (N). Dunque prendendo per l'arco  $x$  la femicirconfenza ne deriva l'equazione II.ª

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$$

## N.º III.

Si prenda dell' equazione (M) n.º I. il secondo differenziale, e questo si divida per  $-dx^2$ . Ciò fatto nascerà l'equazione

$$-\text{cof. } x - 2^3 \text{ cof. } 2x - 3^3 \text{ cof. } 3x - 4^3 \text{ cof. } 4x - 5^3 \text{ cof. } 5x \dots \dots \dots - \text{ecc.} = \frac{-1 - 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} x^2}{8 \text{ fen. } \frac{1}{2} x^4} (O);$$

la quale nel supposto di  $x$  eguale alla femicirconfenza si cangia nel Teorema III.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = -\frac{1}{8}$$

## N.º IV.

Allo stesso modo, si pigli la seconda differenza dell' equazione (N) n.º II; e si divida per  $-dx^2$ ; il che fomministra l'equazione  $-\text{cof. } x - 2^4 \text{ cof. } 2x - 3^4 \text{ cof. } 3x - 4^4 \text{ cof. } 4x - 5^4 \text{ cof. } 5x - 6^4 \text{ cof. } 6x - \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$  (P), e questa, nella supposizione di  $x = 180^\circ$ , diventa la formola IV.

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$$

## N.º V.

Differenziata due volte l' equazione (O) del n.º III. e divisa per  $-dx^2$ , si giugne al risultato

$$-\text{cof. } x - 2^5 \text{ cof. } 2x - 3^5 \text{ cof. } 3x - 4^5 \text{ cof. } 4x - 5^5 \text{ cof. } 5x$$

$$-6^s \text{ cof. } 6x - \text{ecc.} \dots \dots = \frac{2 \text{ fen. } \frac{1}{2} x^2 + 13 \text{ cof. } \frac{1}{2} x^2 + 2 \text{ cof. } \frac{1}{2} x^4}{S \text{ fen. } \frac{1}{2} x^5}$$

(2); e se in questa si assume al solito  $x$  uguale alla semiperiferia, ci si presenta la formola V.

$$1^s - 2^s + 3^s - 4^s + 5^s - 6^s + \text{ecc.} \dots \dots \dots = \frac{1}{4}$$

N.º VI

Prendendo la differenza seconda dell' equazione ( P ) del n. IV., e dividendola per  $-dx^2$ , se ne ricava l' equazione  $-\text{cof. } x - 2^6 \text{ cof. } 2x - 3^6 \text{ cof. } 3x - 4^6 \text{ cof. } 4x - 5^6 \text{ cof. } 5x - 6^6 \text{ cof. } 6x - \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0 (R)$ . Questa poi mediante la sostituzione della semicirconferenza in luogo di  $x$  si trasforma nella formola VI.

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.} \dots \dots \dots = 0$$

Con tal procedere restano prontamente dimostrati tutti i Teoremi Euleriani intorno alle serie delle potenze affermative intere de' numeri naturali co' segni alterni, potendo generalmente stabilirsi, che le serie delle potenze pari hanno per *quantità generatrice* lo zero, e le serie delle potenze dispari hanno per grandezza *generatrice* un numero dato.

Non mi tratterò qui a far vedere, come con questo stesso metodo altri Teoremi analogi agli Euleriani possono dimostrarsi intorno alle serie delle potenze de' numeri dispari co' segni alterni  $1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{ecc.}$ , nelle quali all' opposto di quelle de' numeri naturali generalmente si troverà *che le impari sono generate dal zero, le pari da un numero determinato.*

A R T I C O L O I V .

*Della Somma delle Serie de' seni e coseni degli angoli procedenti in progressione aritmetica, e delle loro potestà intere qualunque.*

Le elegantissime serie de' seni e coseni degli angoli crescenti in progressione aritmetica, come pure delle potestà intere

omologhe di que' seni e coseni sono state con molto studio esaminate ed illustrate da' celebri Geometri *Eulero*, *Dan. Bernoulli*, *La Grange*, *D' Alembert*, *Bossut*, *Lexell*, *Lorgna*, ed altri parecchi; e fra i differenti metodi messi in opera per determinarne la loro somma, ricavati in buona parte dalla teoria delle serie ricorrenti, si distingue sopra tutti per la facilità e speditezza quello del Sig. Ab. *Bossut* pubblicato nelle *Memorie dell' Accad. delle Scienze di Parigi*, per l' anno 1769, il quale può a giusto titolo chiamarsi un capo d' opera di semplicità e d' eleganza. Ma questo illustre Geometra non considera la progressione aritmetica degli angoli sotto la forma più generale, nè tampoco (ciò che più importa) applica il suo pregevolissimo metodo al caso più universale delle potenze de' seni e coseni affette d' un esponente arbitrario, lasciando desiderare la parte più interessante di questa ricerca, cioè l' espolizione generale della somma pel caso mentovato: così pure ne' *Supplementi dell' Enciclopedia*, dove questa materia viene ingegnosamente trattata in un distinto articolo, dopo essersi assegnata la somma per le due o tre prime potestà, si tralascia il punto più prezioso e difficile, ossia il canone per tutte le potestà affermative ed intere. Non è mancato per verità chi si è studiato di supplire a questa mancanza, ma oltrechè il metodo a tal uopo tenuto si appoggia a principj rimoti, e poco familiari, i quali esigono una lunga espolizione per esser ridotti alla comune portata, la forma stessa della generale espressione della somma richiesta non si è presentata sotto un aspetto abbastanza luminoso e comodo per non aver nulla a desiderare di più (a). In vista di ciò non sembrerà affatto inutile un ulterior tentativo: e il Lettore intelligente giudicherà, se io sia riuscito a porre tutta questa materia sotto un punto di veduta più esteso e più generale che finora non si è fatto, e se la novità de' due ultimi Problemi, e de' quattro Teoremi, che terminano quest' Articolo, in un soggetto da tanti altri maneggiato e discusso possa meritare qualche indulgenza.

---

(a) Si veggia il I. Vol. della *Soc. Italiana* dalla pag. 361 alla pag. 365, Problema dal Sig. Cav. *Lorgna* ove è stato per la prima volta risoluto in tutta la sua generalità questo

PROBLEMA I.

Sommare la serie fen.  $p + \text{fen. } (p + q) + \text{fen. } (p + 2q) + \text{fen. } (p + 3q) \dots + \text{fen. } (p + nq) = S$

S O L U Z I O N E.

$$\begin{aligned}
 \text{E' noto, essere } S &= \frac{e^p V^{-1} - e^{-p} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \\
 + \frac{e^{(p+q)} V^{-1} - e^{-(p+q)} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(p+2q)} V^{-1} - e^{-(p+2q)} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \\
 + \frac{e^{(p+3q)} V^{-1} - e^{-(p+3q)} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \dots \\
 + \frac{e^{(p+nq)} V^{-1} - e^{-(p+nq)} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} &= \frac{e^p V^{-1}}{2\sqrt{-1}} (1 + e^q V^{-1} \\
 + e^{2q} V^{-1} + e^{3q} V^{-1} \dots + e^{nq} V^{-1}) \\
 - \frac{e^{-p} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} (1 + e^{-q} V^{-1} + e^{-2q} V^{-1} + e^{-3q} V^{-1} \dots + e^{-nq} V^{-1}).
 \end{aligned}$$

Ora siccome le quantità rinchiuse tra le parentesi sono evidentemente due progressioni geometriche, delle quali conseguentemente si ha la somma con moltiplicare il secondo termine per l'ultimo, sottrarre il quadrato del primo termine, e dividere il residuo pel secondo termine meno il primo;

$$\begin{aligned}
 \text{perciò farà } S &= \frac{e^p V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{(n+1)q} V^{-1} - 1}{e^q V^{-1} - 1} \right) \\
 - \frac{e^{-p} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{-(n+1)q} V^{-1} - 1}{e^{-q} V^{-1} - 1} \right); \text{ e riducendo allo stesso} \\
 \text{denominatore nasce } S &= \frac{e^p V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{nq} V^{-1} - e^{(n+1)q} V^{-1} - e^{-q} V^{-1} + 1}{2 - e^q V^{-1} - e^{-q} V^{-1}} \right) \\
 - \frac{e^{-p} V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{-nq} V^{-1} - e^{-(n+1)q} V^{-1} - e^q V^{-1} + 1}{2 - e^q V^{-1} - e^{-q} V^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{e^{(p+nq)}V^{-1} - e^{-(p+nq)}V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{(p+(n+1)q)}V^{-1} - e^{-(p+(n+1)q)}V^{-1}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(q-p)}V^{-1} - e^{-(q-p)}V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^pV^{-1} - e^{-p}V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right) : (2 - e^qV^{-1} - e^{-q}V^{-1}) \\
 &= \frac{\text{fen.}(p+nq) - \text{fen.}(p+(n+1)q) + \text{fen.}(q-p) + \text{fen.}p}{2 - 2 \text{cof.}q} \text{ Ricor-}
 \end{aligned}$$

rendo pertanto ai noti Teoremi degli angoli

- I.  $\text{fen.} a + \text{fen.} b = 2 \text{fen.} \frac{1}{2}(a+b) \text{cof.} \frac{1}{2}(a-b)$
- II.  $\text{fen.} a - \text{fen.} b = 2 \text{cof.} \frac{1}{2}(a+b) \text{fen.} \frac{1}{2}(a-b)$
- III.  $\text{cof.} a + \text{cof.} b = 2 \text{cof.} \frac{1}{2}(a+b) \text{cof.} \frac{1}{2}(a-b)$
- IV.  $\text{cof.} b - \text{cof.} a = 2 \text{fen.} \frac{1}{2}(a+b) \text{fen.} \frac{1}{2}(a-b)$
- V.  $1 - \text{cof.} a = 2 \text{fen.} \frac{1}{2}a^2$ , si otterrà facilmente:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{-2 \text{cof.}(p+(n+\frac{1}{2})q) \text{fen.} \frac{1}{2}q + 2 \text{fen.} \frac{1}{2}q \text{cof.}(p-\frac{1}{2}q)}{+ \text{fen.} \frac{1}{2}q^2} \\
 &= \frac{\text{cof.}(p-\frac{1}{2}q) - \text{cof.}(p+(n+\frac{1}{2})q)}{2 \text{fen.} \frac{1}{2}q} \\
 &= \frac{\text{fen.}(p+\frac{1}{2}nq) \text{fen.} \frac{1}{2}(1+n)q}{\text{fen.} \frac{1}{2}q} \text{ . Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

P R O B L E M A II.

*Sommare la serie*  $\text{cof.} p + \text{cof.}(p+q) + \text{cof.}(p+2q) + \text{cof.}(p+3q) \dots + \text{cof.}(p+nq) = S$ .

S O L U Z I O N E .

La dottrina degli angoli fomministra  $S = \frac{1}{2} e^p V^{-1}$

$$+ \frac{1}{2} e^{-p} V^{-1} + \frac{1}{2} e^{(p+q)} V^{-1} + \frac{1}{2} e^{-(p+q)} V^{-1}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{(p+2q)} V^{-1} + \frac{1}{2} e^{-(p+2q)} V^{-1} + \frac{1}{2} e^{(p+3q)} V^{-1}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-(p+3q)} V^{-1} \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{1}{2} e^{(p+nq)} V^{-1} + \frac{1}{2} e^{-(p+nq)} V^{-1} = \frac{1}{2} e^p V^{-1} (1 + e^q V^{-1}$$

$$+ e^{2q} V^{-1} + e^{3q} V^{-1} \dots\dots\dots + e^{nq} V^{-1}) + \frac{1}{2} e^{-p} V^{-1}$$

$$(1 + e^{-q} V^{-1} + e^{-2q} V^{-1} + e^{-3q} V^{-1} \dots\dots\dots + e^{-nq} V^{-1})$$

$$= \frac{1}{2} e^p V^{-1} \left( \frac{e^{(n+1)q} V^{-1} - 1}{e^q V^{-1} - 1} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-p} V^{-1} \left( \frac{e^{-(n+1)q} V^{-1} - 1}{e^{-q} V^{-1} - 1} \right) .$$

Fatta pertanto la riduzione allo stesso denominatore si ottiene speditamente

$$S = \frac{1}{2} e^p V^{-1} \left( \frac{e^{nq} V^{-1} - e^{(n+1)q} V^{-1} - e^{-q} V^{-1} + 1}{2 - e^q V^{-1} - e^{-q} V^{-1}} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-p} V^{-1} \left( \frac{e^{-nq} V^{-1} - e^{-(n+1)q} V^{-1} - e^q V^{-1} + 1}{2 - e^q V^{-1} - e^{-q} V^{-1}} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} e^{(p+nq)} V^{-1} + \frac{1}{2} e^{-(p+nq)} V^{-1} - \frac{1}{2} e^{(p+(n+1)q)} V^{-1} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{-(p+(n+1)q)} V^{-1} - \frac{1}{2} e^{(p-q)} V^{-1} - \frac{1}{2} e^{-(p-q)} V^{-1} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} e^p V^{-1} + \frac{1}{2} e^{-p} V^{-1} : (2 - e^q V^{-1} - e^{-q} V^{-1})$$

$$= \frac{\text{cof. } (p+nq) - \text{cof. } (p+(n+1)q) - \text{cof. } (p-q) + \text{cof. } p}{2 - 2 \text{ cof. } q}$$

$$= \frac{\text{fen. } (p + (n + \frac{1}{2})q) \text{ fen. } \frac{1}{2}q - \text{fen. } (p - \frac{1}{2}q) \text{ fen. } \frac{1}{2}q}{2 \text{ fen. } \frac{1}{2}q^2}$$

$$= \frac{\text{fen. } (p + (n + \frac{1}{2})q) - \text{fen. } (p - \frac{1}{2}q)}{2 \text{ fen. } \frac{1}{2}q}$$

$$= \frac{\text{cof. } (p + \frac{1}{2}nq) \text{ fen. } \frac{1}{2}(1+n)q}{\text{fen. } \frac{1}{2}q} . \text{ Il che era ecc.}$$

COROLL. La somma della serie  $\text{fen. } p + \text{fen. } (p + q) + \text{fen. } (p + 2q) \dots + \text{fen. } (p + nq)$  sta alla somma della serie  $\text{cof. } p + \text{cof. } (p + q) + \text{cof. } (p + 2q) \dots + \text{cof. } (p + nq)$ , come sta  $\text{fen. } (p + \frac{1}{2}nq)$  a  $\text{cof. } (p + \frac{1}{2}nq)$ , cioè come

$\text{tang. } (p + \frac{1}{2}nq)$  all'unità. Da ciò apparisce, che la somma de' seni degli angoli crescenti in proporzione aritmetica, e continuati per quanti termini si vuole, può esser uguale in infiniti casi alla somma de' coseni corrispondenti, cioè tutte le volte che  $p + \frac{1}{2}nq = 45^\circ$ , il che può verificarsi in infinite maniere. Anzi quelle due somme faranno parimenti uguali, allorchè, essendo  $\pi$  la semicirconferenza del cerchio col raggio 1, l'arco  $p + \frac{1}{2}nq$  avrà uno de' seguenti valori

$$\frac{\pi}{4}, + \frac{5\pi}{4}, + \frac{9\pi}{4}, + \frac{13\pi}{4}, \text{ ecc. in inf.}$$

$$- \frac{3\pi}{4}, - \frac{7\pi}{4}, - \frac{11\pi}{4}, - \frac{15\pi}{4}, \text{ ecc. in inf.}$$

P R O B L E M A   I I I .

*Sommare la serie*  $S = \text{fen. } p^2 + \text{fen. } (p + q)^2 + \text{fen. } (p + 2q)^2 + \text{fen. } (p + 3q)^2 \dots + \text{fen. } (p + nq)^2$ .

SOLUZIONE.



SOLUZIONE.

Pongasi  $e^p \sqrt{-1} = a$ ,  $e^q \sqrt{-1} = b$ ; i Teoremi noti degli angoli danno fen.  $p^2 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2}{-4} + \frac{a^{-2}}{-4} + \frac{1}{2}$

$$\text{fen. } (p + q)^2 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{fen. } (p + 2q)^2 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{fen. } (p + 3q)^2 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{-4} + \frac{1}{2}$$

.....

$$\text{fen. } (p + nq)^2 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Dunque } S = -\frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \dots + b^{2n}) - \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \dots + b^{-2n}) + \frac{1+n}{2}$$

$$\text{cioè } S = -\frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}\right) - \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1}\right) + \frac{1+n}{2}$$

Perlochè ridotti li due termini binomiali allo stesso denominatore, si avrà

$$S = \frac{1+n}{2} - \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}}\right)$$

$$- \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}}\right)$$

$$= \frac{1+n}{2} + \frac{\frac{1}{2} \text{ cof. } 2(p+(n+1)q) + \frac{1}{2} \text{ cof. } 2(p-q) - \frac{1}{2} \text{ cof. } 2(p+nq) - \frac{1}{2} \text{ cof. } 2p}{2 - 2 \text{ cof. } 2q}$$

Il che era ecc.

PROBLEMA IV.

Somma la serie  $S = \text{cof. } p^2 + \text{cof. } (p + q)^2 + \text{cof. } (p + 2q)^2 + \text{cof. } (p + 3q)^2 \dots + \text{cof. } (p + nq)^2$ .

S O L U Z I O N E

Ritenute le precedenti sostituzioni, si fa essere

$$\begin{aligned} \text{cof. } p^2 &= \left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^{-2}}{4} + \frac{1}{2} \\ \text{cof. } (p+q)^2 &= \left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{4} + \frac{1}{2} \\ \text{cof. } (p+2q)^2 &= \left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{4} + \frac{1}{2} \\ \text{cof. } (p+3q)^2 &= \left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{4} + \frac{1}{2} \\ &\dots\dots\dots \\ \text{cof. } (p+nq)^2 &= \left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{4} + \frac{1}{2} . \text{Laon-} \\ \text{de scrivendo ordinatamente i termini si otterrà } S &= \frac{n+1}{2} \\ &+ \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \dots\dots\dots + b^{2n}) \\ &+ \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \dots\dots\dots + b^{-2n}) \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2+2n}-1}{b^2-1}\right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2-2n}-1}{b^{-2}-1}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{4} a^2 (b^{2n}-b^{2+2n}-b^{-2}+1) + \frac{1}{4} a^{-2} (b^{-2n}-b^{-2-2n}-b^2+1)}{2-b^2-b^{-2}} \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \text{cof. } 2(p+nq) + \frac{1}{2} \text{cof. } 2p - \frac{1}{2} \text{cof. } 2(p+(n+1)q) - \frac{1}{2} \text{cof. } 2(p-q)}{2-2 \text{cof. } 2q} . \end{aligned}$$

Il che era ecc.

COROLL. Se la somma trovata si aggiugne a quella del Problema III. si ha il risultato = n + 1, come appunto esfer dee, poichè il quadrato di ciascun seno aggiunto al quadrato del coseno corrispondente forma il quadrato del raggio, cioè P unità.

P R O B L E M A V .

*Sommare la serie*  $S = \text{fen. } p^3 + \text{fen. } (p+q)^3 + \text{fen. } (p+2q)^3 + \text{fen. } (p+3q)^3 \dots \dots \dots + \text{fen. } (p+nq)^3 .$

S O L U Z I O N E .

$$\text{fen. } p^3 = \left( \frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right)^3 = \frac{a^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3a}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{fen. } (p+q)^3 = \left( \frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right)^3 = \frac{a^3b^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{fen. } (p+2q)^3 = \left( \frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}} \right)^3 = \frac{a^3b^6}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^2}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-2}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-6}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{fen. } (p+3q)^3 = \left( \frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}} \right)^3 = \frac{a^3b^9}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^3}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-9}}{-8\sqrt{-1}}$$

.....

$$\text{fen. } (p+nq)^3 = \left( \frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}} \right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^n}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3n}}{-8\sqrt{-1}} .$$

Quindi risulta  $S = -\frac{a^3}{8\sqrt{-1}} (1 + b^3 + b^6 + b^9 \dots \dots + b^{3n})$   
 $+ \frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}} (1 + b^{-3} + b^{-6} + b^{-9} \dots \dots + b^{-3n})$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3a}{8\sqrt{-1}} (1 + b + b^2 + b^3 \dots \dots \dots + b^n) \\
 & - \frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}} (1 + b^{-1} + b^{-2} + b^{-3} \dots \dots \dots + b^{-n}) = \\
 & - \frac{a^3}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{3+3n} - 1}{b^3 - 1} \right) + \frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{-3-3n} - 1}{b^{-3} - 1} \right) \\
 & + \frac{3a}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} \right) - \frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{-n-1} - 1}{b^{-1} - 1} \right). \text{ Riducendo} \\
 & \text{ora allo stesso denominatore li due primi termini, e cos\`i} \\
 & \text{pure i due altri separatamente, ricaveremo } S = \\
 & - \frac{a^3}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{3n} - b^{3n+3} - b^{-3} + 1}{2 - b^3 - b^{-3}} \right) + \frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{-3n} - b^{-3n-3} - b^3 + 1}{2 - b^3 - b^{-3}} \right) \\
 & + \frac{3a}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^n - b^{n+1} - b^{-1} + 1}{2 - b - b^{-1}} \right) - \frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}} \left( \frac{b^{-n} - b^{-n-1} - b + 1}{2 - b - b^{-1}} \right) \\
 & = \frac{\frac{1}{4} \text{ fen. } 3(p + (n + 1)q) + \frac{1}{4} \text{ fen. } 3(p - a^{-1} - 1) \text{ fen. } 3(p \cdot nq) - \frac{1}{4} \text{ fen. } 3p}{2 - 2 \text{ cof. } 3q} \\
 & + \frac{\frac{1}{4} \text{ fen. } (p + nq) + \frac{1}{4} \text{ fen. } p - \frac{1}{4} \text{ fen. } (p + (n + 1)q) - \frac{1}{4} \text{ fen. } (p - q)}{2 - 2 \text{ cof. } q} .
 \end{aligned}$$

Il che era ecc.

P R O B L E M A VI.

*Sommare la serie*  $S = \text{cof. } p^3 + \text{cof. } (p + q)^3 + \text{cof. } (p + 2q)^3 + \text{cof. } (p + 3q)^3 \dots \dots \dots + \text{cof. } (p + nq)^3$ .

S O L U Z I O N E .

$$\begin{aligned}
 \text{cof. } p^3 &= \left( \frac{a + a^{-1}}{2} \right)^3 = \frac{a^3}{8} + \frac{3a}{8} + \frac{3a^{-1}}{8} + \frac{a^{-3}}{8} \\
 \text{cof. } (p + q)^3 &= \left( \frac{ab + a^{-1}b^{-1}}{2} \right)^3 = \frac{a^3b^3}{8} + \frac{3ab}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-1}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-3}}{8} \\
 \text{cof. } (p + 2q)^3 &= \left( \frac{ab^2 + a^{-1}b^{-2}}{2} \right)^3 = \frac{a^3b^6}{8} + \frac{3ab^2}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-2}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-6}}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{cof. } (p + 3q)^3 = \left( \frac{ab^3 + a^{-1}b^{-3}}{2} \right)^3 = \frac{a^3b^9}{8} + \frac{3ab^3}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-9}}{8}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{cof. } (p + nq)^3 = \left( \frac{ab^n + a^{-1}b^{-n}}{2} \right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{8} + \frac{3ab^n}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-3n}}{8}$$

$$\text{Sarà perciò } S = \frac{1}{8} a^3 (1 + b^3 + b^6 + b^9 \dots \dots \dots + b^{3n})$$

$$+ \frac{1}{8} a^{-3} (1 + b^{-3} + b^{-6} + b^{-9} \dots \dots \dots + b^{-3n})$$

$$+ \frac{3a}{8} (1 + b + b^2 + b^3 \dots \dots \dots + b^n)$$

$$+ \frac{3a^{-1}}{8} (1 + b^{-1} + b^{-2} + b^{-3} \dots \dots \dots + b^{-n})$$

$$= \frac{1}{8} a^3 \left( \frac{b^{3n+3} - 1}{b^3 - 1} + \frac{1}{8} a^{-3} \left( \frac{b^{-3n-3} - 1}{b^{-3} - 1} \right) \right)$$

$$+ \frac{3a}{8} \left( \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} \right) + \frac{3a^{-1}}{8} \left( \frac{b^{-n-1} - 1}{b^{-1} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{8} a^3 \left( \frac{b^{3n} - b^{3n+3} - b^{-3} + 1}{2 - b^3 - b^{-3}} \right) + \frac{1}{8} a^{-3} \left( \frac{b^{-3n} - b^{-3n-3} - b^3 + 1}{2 - b^3 - b^{-3}} \right)$$

$$+ \frac{3a}{8} \left( \frac{b^n - b^{n+1} - b^{-1} + 1}{2 - b - b^{-1}} \right) + \frac{3a^{-1}}{8} \left( \frac{b^{-n} - b^{-n-1} - b + 1}{2 - b - b^{-1}} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \text{cof. } 3(p + nq) + \frac{1}{8} \text{cof. } 3p - \frac{1}{8} \text{cof. } 3(p + (n+1)q) - \frac{1}{8} \text{cof. } 3(p - q)}{2 - 2 \text{cof. } 3q}$$

$$+ \frac{\frac{1}{4} \text{cof. } (p + nq) + \frac{1}{4} \text{cof. } p - \frac{1}{4} \text{cof. } (p + (n+1)q) - \frac{1}{4} \text{cof. } (p - q)}{2 - 2 \text{cof. } q}$$

Il che era ecc.

P R O B L E M A VII.

*Sommare la serie*  $S = \text{fen. } p^4 + \text{fen. } (p + q)^4 + \text{fen. } (p + 2q)^4 + \text{fen. } (p + 3q)^4 \dots \dots \dots + \text{fen. } (p + nq)^4$ .

S O L U Z I O N E .

$$\text{fen. } p^4 = \left( \frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{4a^2}{16} - \frac{4a^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{fen. } (p + q)^4 = \left( \frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right)^4 = \frac{a^4b^4}{16} - \frac{4a^2b^2}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{fen. } (p + nq)^4 = \left( \frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}} \right)^4 = \frac{a^4b^{4n}}{16} - \frac{4a^2b^{2n}}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4n}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{fen. } (p + 3q)^4 = \left( \frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}} \right)^4 = \frac{a^4b^{12}}{16} - \frac{4a^2b^6}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-6}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-12}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\dots \dots \dots \text{fen. } (p + nq)^4 = \left( \frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}} \right)^4 = \frac{a^4b^{4n}}{16} - \frac{4a^2b^{2n}}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4n}}{16} + \frac{6}{16}$$

Sarà dunque  $S = \frac{1}{16} a^4 (1 + b^4 + b^8 + b^{12} \dots \dots \dots + b^{4n})$   
 $+ \frac{1}{16} a^{-4} (1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \dots \dots \dots + b^{-4n})$   
 $- \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \dots \dots \dots + b^{2n})$   
 $- \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \dots \dots \dots + b^{-2n})$   
 $+ \frac{6(n+1)}{16} = \frac{1}{16} a^4 \left( \frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left( \frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1} \right)$   
 $- \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1} \right) - \frac{1}{4} a^{-2} \left( \frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1} \right) + \frac{6(n+1)}{16}$   
 $= \frac{1}{16} a^4 \left( \frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right)$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{16} a^{-4} \left( \frac{b^{-4n} - b^{-4n-4} - b^4 + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right) - \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) \\
 & - \frac{1}{4} a^{-2} \left( \frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) + \frac{3(n+1)}{8} \\
 & = \frac{\frac{1}{4} \text{cof. } 4(p+nq) + \frac{1}{4} \text{cof. } 4p - \frac{1}{4} \text{cof. } 4(p+(n-1)q) - \frac{1}{4} \text{cof. } 4(p-q)}{2 - 2 \text{cof. } 4q} \\
 & + \frac{\frac{1}{2} \text{cof. } 2(p+(n+1)q) + \frac{1}{2} \text{cof. } 2(p-q) - \frac{1}{2} \text{cof. } 2(p+nq) - \frac{1}{2} \text{cof. } 2p}{2 - 2 \text{cof. } 2q} \\
 & + \frac{3(n+1)}{8}. \text{ Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

P R O B L E M A VIII.

*Sommare la serie*  $S = \text{cof. } p^4 + \text{cof. } (p+q)^4 + \text{cof. } (p+2q)^4 + \text{cof. } (p+3q)^4 + \dots + \text{cof. } (p+nq)^4$

S O L U Z I O N E.

Procedendo sempre come dianzi, si ha

$$\begin{aligned}
 \text{cof. } p^4 &= \left( \frac{a+a^{-1}}{2} \right)^4 = \frac{a^4}{16} + \frac{4a^2}{16} + \frac{4a^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}}{16} + \frac{6}{16} \\
 \text{cof. } (p+q)^4 &= \left( \frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2} \right)^4 = \frac{a^4b^4}{16} + \frac{4a^2b^2}{16} + \frac{4a^{-2}b^{-2}}{16} \\
 &+ \frac{a^{-4}b^{-4}}{16} + \frac{6}{16} \\
 \text{cof. } (p+2q)^4 &= \left( \frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2} \right)^4 = \frac{a^4b^8}{16} + \frac{4a^2b^4}{16} + \frac{4a^{-2}b^{-4}}{16} \\
 &+ \frac{a^{-4}b^{-8}}{16} + \frac{6}{16} \\
 \text{cof. } (p+3q)^4 &= \left( \frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2} \right)^4 = \frac{a^4b^{12}}{16} + \frac{4a^2b^6}{16} + \frac{4a^{-2}b^{-6}}{16} \\
 &+ \frac{a^{-4}b^{-12}}{16} + \frac{6}{16} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \text{cof. } (p+nq)^4 &= \left( \frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2} \right)^4 = \frac{a^4b^{4n}}{16} + \frac{4a^2b^{2n}}{16} + \frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16} \\
 &+ \frac{a^{-4}b^{-4n}}{16} + \frac{6}{16}.
 \end{aligned}$$

Perchè raccolti i termini a dovere, se ne ricava

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{6}{16} a^4 (1 + b^4 + b^8 + b^{12} \dots \dots \dots + b^{4n}) \\
 &+ \frac{1}{16} a^{-4} (1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \dots \dots \dots + b^{-4n}) \\
 &+ \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \dots \dots \dots + b^{2n}) \\
 &+ \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \dots \dots \dots + b^{-2n}) \\
 &+ \frac{3(n+1)}{8} = \frac{1}{16} a^4 \left( \frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left( \frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1} \right) \\
 &+ \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left( \frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1} \right) + \frac{3(n+1)}{8}.
 \end{aligned}$$

Dunque riducendo al comune denominatore i due primi termini, non meno che i due suffeguenti, risulterà

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{16} a^4 \left( \frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left( \frac{b^{-4n} - b^{-4n-4} - b^4 + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right) \\
 &+ \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left( \frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) \\
 &+ \frac{3(n+1)}{8} \\
 &= \frac{\frac{1}{8} \operatorname{cof.} 4(p+nq) + \frac{1}{8} \operatorname{cof.} 4p - \frac{1}{8} \operatorname{cof.} 4(p+(n+1)q) - \frac{1}{8} \operatorname{cof.} 4(p-q)}{2 - 2 \operatorname{cof.} 4q} \\
 &+ \frac{\frac{1}{2} \operatorname{cof.} 2(p+nq) + \frac{1}{2} \operatorname{cof.} 2p - \frac{1}{2} \operatorname{cof.} 2(p+(n+1)q) - \frac{1}{2} \operatorname{cof.} 2(p-q)}{2 - 2 \operatorname{cof.} 2q} \\
 &+ \frac{3(n+1)}{8}. \text{ Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

### P R O B L E M A IX.

*Sommare la serie*  $S = \operatorname{fen.} p^m + \operatorname{fen.} (p+q)^m + \operatorname{fen.} (p+2q)^m + \operatorname{fen.} (p+3q)^m \dots \dots \dots + \operatorname{fen.} (p+rq)^m$ ; *posto l'esponente m eguale ad un numero qualunque intero affermativo.*

SOLUZIONE.



Caſo I. di  $m$  diſpari.

E' noto dalla Trigonometria Analitica, e dalla teoria delle funzioni circolari, eſſere

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} \text{ fen. } p^m &= \pm \frac{\text{fen. } mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m \text{ fen. } (m-2)p}{2^{m-1}} \pm \frac{m.m-1. \text{ fen. } (m-4)p}{2^{m-1}. 1.2} \\
 &\mp \frac{m.m-1.m-2. \text{ fen. } (m-6)p}{2^{m-1}. 1.2.3} \dots + \frac{m.m-1.m-2.m-3\dots \text{ fen. } p}{2^{m-1}. 1.2.3\dots} \\
 &= \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left( \frac{a^m - a^{-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \mp \frac{m}{2^{m-1}} \left( \frac{a^{m-2} - a^{2-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 &\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}. 1.2} \left( \frac{a^{m-4} - a^{4-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}. 1.2.3} \left( \frac{a^{m-6} - a^{6-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \dots \\
 &+ \frac{m.m-1.m-2\dots}{2^{m-1}. 1.2.3\dots} \left( \frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right); \text{ in queſta formola, come}
 \end{aligned}$$

nelle ſuſſeguenti, vagliono i ſegni ſuperiori nell' ipotefi di  $m = 4\lambda + 1$ , e gl' inferiori nel ſuppoſto di  $m = 4\lambda - 1$ , eſſendo  $\lambda$  un numero intero qualunque.

$$\begin{aligned}
 2.^{\circ} \text{ fen. } (p + q)^m &= \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left( \frac{a^m b^m - a^{-m} b^{-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 &\mp \frac{m}{2^{m-1}} \left( \frac{a^{m-2} b^{m-2} - a^{2-m} b^{2-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 &\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}. 1.2} \left( \frac{a^{m-4} b^{m-4} - a^{4-m} b^{4-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 &\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}. 1.2.3} \left( \frac{a^{m-6} b^{m-6} - a^{6-m} b^{6-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \dots \\
 &+ \frac{m.m-1.m-2\dots}{2^{m-1}. 1.2.3\dots} \left( \frac{ab - a^{-1} b^{-1}}{2\sqrt{-1}} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.^{\circ} \text{ fen. } (p + 2q)^m &= \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left( \frac{a^m b^{2m} - a^{-m} b^{-2m}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 &\mp \frac{m}{2^{m-1}} \left( \frac{a^{m-2} b^{2(m-2)} - a^{2-m} b^{2(2-m)}}{2\sqrt{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2} \left( \frac{a^{m-4}b^{2(m-4)} - a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 & \mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3} \left( \frac{a^{m-6}b^{2(m-6)} - a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2\sqrt{-1}} \right) \dots\dots\dots \\
 & + \frac{m.m-1.m-2\dots\dots}{2^{m-1}.1.2.3\dots\dots} \left( \frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 4.^{\circ} \text{ fen. } (p + iq)^m = & \pm \frac{1}{2^{m-1}} \left( \frac{a^m b^m - a^{-m} b^{-m}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 & \mp \frac{m}{2^{m-1}} \left( \frac{a^{m-2} b^{r(m-2)} - a^{2-m} b^{r(2-m)}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 & \pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2} \left( \frac{a^{m-4} b^{r(m-4)} - a^{4-m} b^{r(4-m)}}{2\sqrt{-1}} \right) \\
 & \mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3} \left( \frac{a^{m-6} b^{r(m-6)} - a^{6-m} b^{r(6-m)}}{2\sqrt{-1}} \right) \dots\dots\dots \\
 & + \frac{m.m-1.m-2\dots\dots}{2^{m-1}.1.2.3\dots\dots} \left( \frac{ab^r - a^{-1}b^{-r}}{2\sqrt{-1}} \right). \text{ Dunque raccogliendo i termini corrispondenti si ha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = & \pm \frac{a^m}{2^m \sqrt{-1}} (1 + b^m + b^{2m} + b^{3m} \dots\dots\dots + b^{rm}) \\
 & \mp \frac{a^{-m}}{2^m \sqrt{-1}} (1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m} \dots\dots\dots + b^{-rm}) \\
 & \mp \frac{ma^{m-2}}{2^m \sqrt{-1}} (1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)} \dots\dots\dots + b^{r(m-2)}) \\
 & \pm \frac{m.a^{2-m}}{2^m \sqrt{-1}} (1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)} \dots\dots\dots + b^{r(2-m)}) \\
 & \pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m \sqrt{-1}.1.2} (1 + b^{m-4} + b^{2(m-4)} + b^{3(m-4)} \dots\dots\dots + b^{r(m-4)}) \\
 & \mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^r \sqrt{-1}.1.2} (1 + b^{4-m} + b^{2(4-m)} + b^{3(4-m)} \dots + b^{r(4-m)}) \\
 & \mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^r \sqrt{-1}.1.2.3} (1 \div b^{m-6} \div b^{2(m-6)} \div b^{3(m-6)} \dots\dots \div b^{r(m-6)}) \\
 & \pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m \sqrt{-1}.1.2.3} (1 \div b^{6-m} \div b^{2(6-m)} \div b^{3(6-m)} \dots\dots \div b^{r(6-m)}) \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2 \dots a}{2^m \sqrt{1.1.2.3 \dots}} (1 + b + b^2 + b^3 \dots + b^r)$$

$$- \frac{m.m-1.m-2 \dots a^{-1}}{2^m \sqrt{1.1.2.3 \dots}} (1 + b^{-1} + b^{-2} + b^{-3} \dots + b^{-r}).$$

Dunque  $S = \pm \frac{a^m}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{m(r+1)} - 1}{b^m - 1} \right)$

$$\mp \frac{a^{-m}}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{-m(r+1)} - 1}{b^{-m} - 1} \right) \mp \frac{m.a^{m-2}}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{(m-2)(r+1)} - 1}{b^{m-2} - 1} \right)$$

$$\pm \frac{m.a^{2-m}}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{-(m-2)(r+1)} - 1}{b^{2-m} - 1} \right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m \sqrt{1.1.2}} \left( \frac{b^{(r+1)(m-4)} - 1}{b^{m-4} - 1} \right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m \sqrt{1.1.2}} \left( \frac{b^{(4-m)(r+1)} - 1}{b^{4-m} - 1} \right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m \sqrt{1.1.2.3}} \left( \frac{b^{(r+1)(m-6)} - 1}{b^{m-6} - 1} \right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m \sqrt{1.1.2.3}} \left( \frac{b^{(6-m)(r+1)} - 1}{b^{6-m} - 1} \right) \dots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2 \dots a}{2^m \sqrt{1.1.2.3 \dots}} \left( \frac{b^{r+1} - 1}{b - 1} \right)$$

$$- \frac{m.m-1.m-2 \dots a^{-1}}{2^m \sqrt{1.1.2.3 \dots}} \left( \frac{b^{-r-1} - 1}{b^{-1} - 1} \right).$$

Riducendo ora ciascuna coppia di termini separatamente al comune denominatore li configuifce

$$S = \pm \frac{a^m}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{rm} - b^{r(m+m)} - b^{-m} + 1}{2 - b^m - b^{-m}} \right)$$

$$\mp \frac{a^{-m}}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{-rm} - b^{-r(m+m)} - b^m + 1}{2 - b^m - b^{-m}} \right)$$

$$\mp \frac{m.a^{m-2}}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{r(m-2)} - b^{(r+1)(m-2)} - b^{2-m} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}} \right)$$

$$\pm \frac{m.a^{2-m}}{2^m \sqrt{1}} \left( \frac{b^{-r(m-2)} - b^{-(r+1)(m-2)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}} \right)$$

S O P R A L E S E R I E .

$$\begin{aligned}
 & \pm \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{m-4}}{2^m \sqrt{-1 \cdot 1 \cdot 2}} \left( \frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^4 - b^{4-m}} \right) \\
 & \mp \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{4-m}}{2^m \sqrt{-1 \cdot 1 \cdot 2}} \left( \frac{b^{-r(m-4)} - b^{-(r+1)(m-4)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^4 - b^{4-m}} \right) \\
 & \mp \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{m-6}}{2^m \sqrt{-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}} \left( \frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^6 - b^{6-m}} \right) \\
 & \pm \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{6-m}}{2^m \sqrt{-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}} \left( \frac{b^{-r(m-6)} - b^{-(r+1)(m-6)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^6 - b^{6-m}} \right) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots \dots \dots a}{2^m \sqrt{-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots}} \left( \frac{b^r - b^{r+1} - b^{-1} + 1}{2 - b - b^{-1}} \right) \\
 & - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots \dots \dots a^{-1}}{2^m \sqrt{-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots}} \left( \frac{b^{-r} - b^{-r-1} - b + 1}{2 - b - b^{-1}} \right) \\
 & = \pm \frac{1}{2^m} \left( \frac{\text{fen. } m p + r q - \text{fen. } m(p + (r+1)q) - \text{fen. } m(p-q) + \text{fen. } mp}{1 - \text{cof. } m q} \right) \\
 & \mp \frac{m}{2^m} \left( \frac{\text{fen. } (m-2)(p+r q) - \text{fen. } (m-2)p + (r+1)q - \text{fen. } (m-2)(p-q) + \text{fen. } (m-2)p}{1 - \text{cof. } (m-2)q} \right) \\
 & \pm \frac{m \cdot m - 1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{\text{fen. } (m-4)(p+r q) - \text{fen. } (m-4)p + (r+1)q - \text{fen. } (m-4)(p-q) + \text{fen. } (m-4)p}{1 - \text{cof. } (m-4)q} \right) \\
 & \mp \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{\text{fen. } (m-6)(p+r q) - \text{fen. } (m-6)p + (r+1)q - \text{fen. } (m-6)(p-q) + \text{fen. } (m-6)p}{1 - \text{cof. } (m-6)q} \right) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots \dots \dots}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots} \left( \frac{\text{fen. } (p+r q) - \text{fen. } (p + (r+1)q) - \text{fen. } (p-q) + \text{fen. } p}{1 - \text{cof. } q} \right);
 \end{aligned}$$

qui vale la regola data da principio in ordine ai segni . Il che era ecc.

*Caso II. di m pari .*

La dottrina delle Funzioni circolari ci dà l'equazioni seguenti

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} \text{ fen. } p^m &= \pm \frac{\text{cof. } mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m \text{ cof. } (m-2)p}{2^{m-1}} \\
 & \pm \frac{m \cdot m - 1 \cdot \text{cof. } (m-4)p}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2} \mp \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \text{ cof. } (m-6)p}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m.m-1.m-2 \dots}{2^{m-1}.1.2.3 \dots} \right) \text{cof. } (m-m)p = \pm \left( \frac{a^m + a^{-m}}{2^m} \right) \\
 & \mp m \left( \frac{a^{m-2} + a^{2-m}}{2^m} \right) \pm m.m-1 \left( \frac{a^{m-4} + a^{4-m}}{2^m.1.2} \right) \\
 & \mp m.m-1.m-2 \left( \frac{a^{m-6} + a^{6-m}}{2^m.1.2.3} \right) \dots \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m.m-1.m-2 \dots}{2^{m-1}.1.2.3 \dots} \right); \text{ in questa formola, come nelle}
 \end{aligned}$$

suffeguenti, si adoprano i segni superiori quando  $m=4\lambda$ , e gl' inferiori allorchè  $m=4\lambda-2$ , preso per  $\lambda$  qualsivoglia numero intero affermativo.

$$\begin{aligned}
 2.^\circ \text{ fen. } (p+q)^m &= \pm \frac{\text{cof. } m(p+q)}{2^{m-1}} \mp \frac{m \text{ cof. } (m-2)(p+q)}{2^{m-1}} \\
 & \pm \frac{m.m-1. \text{cof. } (m-4)(p+q)}{2^{m-1}.1.2} + \frac{m.m-1.m-2. \text{cof. } (m-6)(p+q)}{2^{m-1}.1.2.3} \\
 & \dots \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m.m-1.m-2 \dots}{2^{m-1}.1.2.3 \dots} \right) = \pm \left( \frac{a^m b^m + a^{-m} b^{-m}}{2^m} \right) \\
 & \mp m \left( \frac{a^{m-2} b^{m-2} + a^{2-m} b^{2-m}}{2^m} \right) \\
 & \pm \frac{m.m-1}{1.2} \left( \frac{a^{m-4} b^{m-4} + a^{4-m} b^{4-m}}{2^m} \right) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} \left( \frac{a^{m-6} b^{m-6} + a^{6-m} b^{6-m}}{2^m} \right) \dots \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m.m-1.m-2.m-3 \dots}{2^{m-1}.1.2.3.4 \dots} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.^\circ \text{ fen. } (p+2q)^m &= \pm \left( \frac{a^m b^{2m} + a^{-m} b^{-2m}}{2^m} \right) \\
 & \mp m \left( \frac{a^{m-2} b^{2(m-2)} + a^{2-m} b^{2(2-m)}}{2^m} \right) \\
 & \pm \frac{m.m-1}{1.2} \left( \frac{a^{m-4} b^{2(4-m)} + a^{4-m} b^{2(4-m)}}{2^m} \right) \\
 & \mp \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} \left( \frac{a^{m-6} b^{2(m-6)} + a^{6-m} b^{2(6-m)}}{2^m} \right) \dots
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots \dots \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots} \right).$$

$$4.^\circ \text{ fen. } (p + 3q)^m = \pm \left( \frac{a^m b^{3m} + a^{-m} b^{-3m}}{2^m} \right) \\
+ m \left( \frac{a^{m-2} b^{3(m-2)} + a^{2-m} b^{3(2-m)}}{2^m} \right) \\
+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \left( \frac{a^{m-4} b^{3(m-4)} + a^{4-m} b^{3(4-m)}}{2} \right) \\
+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{a^{m-6} b^{3(m-6)} + a^{6-m} b^{3(6-m)}}{2^m} \right) \dots \dots \dots \\
+ \frac{1}{2} \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \dots \dots \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots} \right).$$

$$5.^\circ \text{ fen. } (p + r q)^m = \pm \left( \frac{a^m b^{r m} + a^{-m} b^{-r m}}{2^m} \right) \\
+ m \left( \frac{a^{m-2} b^{r(m-2)} + a^{2-m} b^{r(2-m)}}{2^m} \right) \\
+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \left( \frac{a^{m-4} b^{r(m-4)} + a^{4-m} b^{r(4-m)}}{2^m} \right) \\
+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{a^{m-6} b^{r(m-6)} + a^{6-m} b^{r(6-m)}}{2^m} \right) \dots \dots \dots \\
+ \frac{1}{2} \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots \dots \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots} \right).$$

Dunque distribuendo, come conviene, i termini delle precedenti equazioni, si giugne alla somma

$$S = \pm \frac{a^m}{2^m} (1 + b^m + b^{2m} + b^{3m} \dots \dots \dots + b^{rm}) \\
+ \frac{a^{-m}}{2^m} (1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m} \dots \dots \dots + b^{-rm}) \\
+ \frac{m a^{m-2}}{2^m} (1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)} \dots \dots + b^{r(m-2)}) \\
+ \frac{m a^{2-m}}{2^m} (1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)} \dots \dots + b^{r(2-m)})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{n-4}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (1 + b^{n-4} + b^{2(m-4)} + b^{3(m-4)} + \dots + b^{r(m-4)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{4-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (1 + b^{4-m} + b^{2(4-m)} + b^{3(4-m)} + \dots + b^{r(4-m)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{m-6}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (1 + b^{m-6} + b^{2(m-6)} + b^{3(m-6)} + \dots + b^{r(m-6)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{6-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (1 + b^{6-m} + b^{2(6-m)} + b^{3(6-m)} + \dots + b^{r(6-m)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{1+r}{2} \right) \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} \right) = \\
 & + \frac{a^n}{2^m} \left( \frac{b^{n(r+1)} - 1}{b^n - 1} \right) + \frac{a^{-m}}{2^m} \left( \frac{b^{-m(r+1)} - 1}{b^{-m} - 1} \right) \\
 & + \frac{m a^{n-2}}{2^m} \left( \frac{b^{(r+1)(n-2)} - 1}{b^{n-2} - 1} \right) + \frac{m a^{2-m}}{2^m} \left( \frac{b^{(r+1)(2-m)} - 1}{b^{2-m} - 1} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{m-4}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{b^{(r+1)(m-4)} - 1}{b^{m-4} - 1} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{4-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{b^{(r+1)(4-m)} - 1}{b^{4-m} - 1} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{m-6}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{b^{(r+1)(m-6)} - 1}{b^{m-6} - 1} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{6-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{b^{(r+1)(6-m)} - 1}{b^{6-m} - 1} \right)
 \end{aligned}$$

.....  
 $+ \left( \frac{1+r}{2} \right) \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 1 \cdot m - 3 \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots} \right)$ . Perlocchè riducendo questi termini di due in due allo stesso denominatore, li trova risultarne

$$\begin{aligned}
 S = & + \frac{a^n}{2^m} \left( \frac{b^{r \cdot n} - b^{-(r+1)} - b^{-m} + 1}{2 - b^m - b^{-n} + 1} \right) \\
 & + \frac{a^{-m}}{2^n} \left( \frac{b^{-r \cdot n} - b^{-(r+1)} - b^n + 1}{2 - b - b^{-n}} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 2}{2^m} \left( \frac{b^{(r+1)(n-2)} - b^{(r+1)(m-2)} - b^{2-m} + 1}{2 - b^{n-2} - b^{2-m}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m a^{2-m}}{2^m} \left( \frac{b^{-r(m-2)} - b^{(r+1)(2-m)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}} + 1 \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{m-4}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{4-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{b^{-r(m-4)} - b^{(r+1)(4-m)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{m-6}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{6-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{b^{-r(m-6)} - b^{(r+1)(6-m)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}} \right) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \left( \frac{1+r}{2} \right) \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots} \right) = \\
 & + \frac{1}{2^m} \left( \frac{\text{cof. } m(p+rq) - \text{cof. } m(p+(r+1)q) - \text{cof. } m(p-q) + \text{cof. } mp}{1 - \text{cof. } mq} \right) \\
 & + \frac{m}{2^m} \left( \frac{\text{cof. } (m-2)(p+rq) - \text{cof. } (m-2)(p+(r+1)q) - \text{cof. } (m-2)(p-q) + \text{cof. } (m-2)p}{1 - \text{cof. } (m-2)q} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{\text{cof. } (m-4)(p+rq) - \text{cof. } (m-4)(p+(r+1)q) - \text{cof. } (m-4)(p-q) + \text{cof. } (m-4)p}{1 - \text{cof. } (m-4)q} \right) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{\text{cof. } (m-6)(p+rq) - \text{cof. } (m-6)(p+(r+1)q) - \text{cof. } (m-6)(p-q) + \text{cof. } (m-6)p}{1 - \text{cof. } (m-6)q} \right) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \left( \frac{1+r}{2} \right) \left( \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \dots}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots} \right). \text{ Il che era ecc.}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA X.

Sommare la serie  $S = \text{cof. } p^m + \text{cof. } (p+q)^m + \text{cof. } (p+2q)^m + \text{cof. } (p+3q)^m \dots \dots + \text{cof. } (p+rq)^m$ .

SOLUZIONE.



*Caso I. di m dispari*

Dall' Analisi Trigonometrica ci viene somministrato,

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} \text{ cof. } p^m &= \frac{\text{cof. } mp}{2^{m-1}} + \frac{m \text{ cof. } (m-2)p}{2^{m-1}} + \frac{m \cdot m-1 \cdot \text{cof. } (m-4)p}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2} \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \text{cof. } (m-6)p}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \dots\dots\dots \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \dots \text{cof. } p}{2^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} \\
 &= \frac{a^m + a^{-m}}{2^m} + m \left( \frac{a^{m-2} + a^{2-m}}{2^m} \right) + \frac{m \cdot m-1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (a^{m-4} + a^{4-m}) \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (a^{m-6} + a^{6-m}) \dots\dots\dots \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} (a + a^{-1}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.^{\circ} \text{ cof. } (p + q)^m &= \frac{a^m b^m + a^{-m} b^{-m}}{2} \\
 &+ \frac{m}{2^m} (a^{m-2} b^{m-2} + a^{2-m} b^{2-m}) \\
 &+ \frac{m \cdot m-1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (a^{m-4} b^{m-4} + a^{4-m} b^{4-m}) \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (a^{m-6} b^{m-6} + a^{6-m} b^{6-m}) \dots\dots\dots \\
 &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \dots}{2^m \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots} (ab + a^{-1} b^{-1}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.^{\circ} \text{ cof. } (p + 2q)^m &= \frac{a^m b^{2m} + a^{-m} b^{-2m}}{2^m} \\
 &+ \frac{m}{2^m} (a^{m-2} b^{2(m-2)} + a^{2-m} b^{2(2-m)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m \cdot m - 1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (a^{m-4} b^{2(m-4)} + a^4 - m b^{2(4-m)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (a^{m-6} b^{2(m-6)} + a^6 - m b^{2(6-m)}) \dots \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} (a b^2 + a^{-1} b^{-2})
 \end{aligned}$$

$$4^\circ \text{ cof. } (p + 3q)^m = \frac{a^m b^{3m} + a^{-m} b^{-3m}}{2^m}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m}{2^m} (a^{m-2} b^{3(m-2)} + a^{2-m} b^{3(2-m)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (a^{m-4} b^{3(m-4)} + a^4 - m b^{3(4-m)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (a^{m-6} b^{3(m-6)} + a^6 - m b^{3(6-m)}) \dots \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} (a b^3 + a^{-1} b^{-3}).
 \end{aligned}$$

$$5^\circ \text{ cof. } (p + r q)^m = \frac{a^m b^{r m} + a^{-m} b^{-r m}}{2^m}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m}{2^m} (a^{m-2} b^{r(m-2)} + a^{2-r} b^{r(2-m)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} (a^{m-4} b^{r(m-4)} + a^4 - m b^{r(4-m)}) \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} (a^{m-6} b^{r(m-6)} + a^6 - m b^{r(6-m)}) \dots \\
 & + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \dots}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots} (a b^r + a^{-1} b^{-r}). \text{ Sicchè ordi-}
 \end{aligned}$$

nando per serie distinte i termini corrispondenti, nasce

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{a^m}{2^m} (1 + b^m + b^{2m} + b^{3m} \dots + b^{r m}) \\
 & + \frac{a^{-m}}{2^m} (1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m} \dots + b^{-r m}) \\
 & + \frac{m a^{m-2}}{2^m} (1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)} \dots + b^{r(m-2)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{ma^{2-m}}{2^m} (1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)} \dots + b^{r(2-m)}) \\
 & + \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2} (1 + b^{m-4} + b^{2(m-4)} + b^{3(m-4)} \dots + b^{r(m-4)}) \\
 & + \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2.1.2} (1 + b^{4-m} + b^{2(4-m)} + b^{3(4-m)} \dots + b^{r(4-m)}) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3} (1 + b^{m-6} + b^{2(m-6)} + b^{3(m-6)} \dots + b^{r(m-6)}) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3} (1 + b^{6-m} + b^{2(6-m)} + b^{3(6-m)} \dots + b^{r(6-m)}) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.\dots.a}{2^m.1.2.3.\dots} (1 + b + b^2 + b^3 \dots + b^r) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.\dots.a^{-1}}{2^m.1.2.3.\dots} (1 + b^{-1} + b^{-2} + b^{-3} \dots + b^{-r}) \\
 & = \frac{a^m}{2^m} \left( \frac{b^{(r+1)m} - 1}{b^m - 1} \right) + \frac{a^{-m}}{2^m} \left( \frac{b^{-(r+1)m} - 1}{b^{-m} - 1} \right) \\
 & + \frac{ma^{m-2}}{2^m} \left( \frac{b^{(r+1)(m-2)} - 1}{b^{m-2} - 1} \right) + \frac{ma^{2-m}}{2^m} \left( \frac{b^{(r+1)(2-m)} - 1}{b^{2-m} - 1} \right) \\
 & + \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2} \left( \frac{b^{(r+1)(m-4)} - 1}{b^{m-4} - 1} \right) \\
 & + \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2} \left( \frac{b^{(r+1)(4-m)} - 1}{b^{4-m} - 1} \right) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3} \left( \frac{b^{(r+1)(m-6)} - 1}{b^{m-6} - 1} \right) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3} \left( \frac{b^{(r+1)(6-m)} - 1}{b^{6-m} - 1} \right) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.\dots.a}{2^m.1.2.3.\dots} \left( \frac{b^{(r+1)} - 1}{b - 1} \right) \\
 & + \frac{m.m-1.m-2.\dots.a^{-1}}{2^m.1.2.3.\dots} \left( \frac{b^{-r-1} - 1}{b^{-1} - 1} \right).
 \end{aligned}$$

Se ora ciascuna coppia di tali termini viene portata sotto un comune denominatore, ne risulta

$$\begin{aligned}
S = & \frac{a^m}{2^m} \left( \frac{b^{rm} - b^{(r+1)m} - b^{-m} + 1}{2 - b^m - b^{-m}} \right) \\
& + \frac{a^{-m}}{2^m} \left( \frac{b^{-r} - b^{-(r+1)} - b^m + 1}{2 - b^m - b^{-m}} \right) \\
& + \frac{m a^{m-2}}{2^m} \left( \frac{b^{r(m-2)} - b^{(r+1)(m-2)} - b^{2-m} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}} \right) \\
& + \frac{m a^{2-m}}{2^m} \left( \frac{b^{-r(m-2)} - b^{(r+1)(2-m)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}} \right) \\
& + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{m-4}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}} \right) \\
& + \frac{m \cdot m - 1 \cdot a^{4-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{b^{-r(m-4)} - b^{(r+1)(4-m)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}} \right) \\
& + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{m-6}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}} \right) \\
& + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot a^{6-m}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{b^{r(6-m)} - b^{(r+1)(6-m)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}} \right) \\
& + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots a}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} \left( \frac{b^r - b^{r+1} - b^{-1} + 1}{2 - b - b^{-1}} \right) \\
& + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots a^{-1}}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} \left( \frac{b^{-r} - b^{-r-1} - b + 1}{2 - b - b^{-1}} \right). \text{ Sic-}
\end{aligned}$$

chè fatte le debite sostituzioni, ne viene finalmente

$$S = \frac{1}{2^m} \left( \frac{\text{cof. } m(p+rq) - \text{cof. } m(p+(r+1)q) - \text{cof. } m(p-q) + \text{cof. } mp}{1 - \text{cof. } mq} \right)$$

$$+ \frac{m}{2^m} \left( \frac{\text{cof. } (m-2)(p+rq) - \text{cof. } (m-2)(p+(r+1)q) - \text{cof. } (m-2)(p-q) + \text{cof. } (m-2)p}{1 - \text{cof. } (m-2)q} \right)$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{2^m \cdot 1 \cdot 2} \left( \frac{\text{cof. } (m-4)(p+rq) - \text{cof. } (m-4)(p+(r+1)q) - \text{cof. } (m-4)(p-q) + \text{cof. } (m-4)p}{1 - \text{cof. } (m-4)q} \right)$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{\text{cof. } (m-6)(p+rq) - \text{cof. } (m-6)(p+(r+1)q) - \text{cof. } (m-6)(p-q) + \text{cof. } (m-6)p}{1 - \text{cof. } (m-6)q} \right)$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} \left( \frac{\text{cof. } (p+rq) - \text{cof. } (p+(r+1)q) - \text{cof. } (p-q) + \text{cof. } p}{1 - \text{cof. } q} \right)$$

Il che era ecc.

*Caso II. di m pari.*

In questa supposizione dell' esponente  $m$  pari il valore di  $\cos. p^n$  non differisce dal precedente se non nell' ultimo termine, il quale trovasi libero da  $\cos. p$ , e veste questa forma  $\frac{m.m-1.m-2 \dots \frac{1}{2} m+1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2} m}$ , e questo termine rimane inalterabile nell' espressione del valore della potenza  $m$  di qualunque altro coseno. E' dunque bastantemente chiaro, che il calcolo da farsi in questo caso non è punto diverso dal già fatto nel caso di  $m$  dispari, avendo soltanto riguardo, che nel precedente valore della somma  $S$  in vece dell' ultimo termine si dee prendere  $r+1$  volte la frazione

$\frac{m.m-1.m-2 \dots \frac{1}{2} m+1}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2} m}$ , il che dà la stessa somma già trovata  $S$  mutilata dell' ultimo termine, ed accresciuta di  $\frac{m.m-1.m-2 \dots \frac{1}{2} m+1 \cdot r+1}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{1}{2} m}$ . Il che era ecc.

P R O B L E M A X I.

*Preso  $\phi$  per l' arco di cerchio descritto col raggio = 1, ed  $m, n$  due numeri qualunque o positivi o negativi; cercasi la somma  $S = m \text{ sen. } m\phi + (m+1) \text{ sen. } (m+1)\phi + (m+2n) \text{ sen. } (m+2n)\phi + (m+3n) \text{ sen. } (m+3n)\phi \dots + (m+rn) \text{ sen. } (m+rn)\phi$ , essendo  $r$  qualunque intero affirmativo.*

S O L U Z I O N E .

Dal Probl. II. si ha  $\cos. m\phi + \cos. (m+n)\phi + \cos. (m+2n)\phi + \cos. (m+3n)\phi + \dots + \cos. (m+rn)\phi = \frac{\cos. (m+\frac{1}{2}rn)\phi \text{ sen. } \frac{1}{2}(r+1)n\phi}{\text{sen. } \frac{1}{2}n\phi}$ . Quindi prendendo i differenziali nasce  $-m d\phi \text{ sen. } m\phi - (m+n) d\phi \text{ sen. } (m+n)\phi - (m+2n) d\phi \text{ sen. } (m+2n)\phi - (m+3n) d\phi \text{ sen. } (m+3n)\phi \dots - (m+rn) d\phi \text{ sen. } (m+rn)\phi =$

$$\begin{aligned}
& - \left( (m + \frac{1}{2}rn) d\phi \operatorname{sen.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi \right. \\
& - \frac{1}{2}(r+1)nd\phi \operatorname{cos.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \operatorname{cos.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi \\
& \left. + \frac{1}{2}nd\phi \operatorname{cos.} \frac{1}{2}n\phi \operatorname{cos.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \right) : \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi^2, \\
& \text{e dividendo per } -d\phi, \text{ ne proviene } m \operatorname{sen.} m\phi \\
& + (m+n) \operatorname{sen.} (m+n)\phi + (m+2n) \operatorname{sen.} (m+2n)\phi \\
& + (m+3n) \operatorname{sen.} (m+3n)\phi \dots + (m+rn) \operatorname{sen.} (m+rn)\phi = \\
& \left( (m + \frac{1}{2}rn) \operatorname{sen.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi \right. \\
& - \frac{1}{2}(r+1)n \operatorname{cos.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \operatorname{cos.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi \\
& \left. + \frac{1}{2}n \operatorname{cos.} \frac{1}{2}n\phi \operatorname{cos.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \right) : \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi^2.
\end{aligned}$$

Il che era ecc.

## P R O B L E M A XII.

*Sommare la serie*  $S = m \operatorname{cos.} m\phi + (m+n) \operatorname{cos.} (m+n)\phi$   
 $+ (m+2n) \operatorname{cos.} (m+2n)\phi + (m+3n) \operatorname{cos.} (m+3n)\phi \dots$   
 $+ (m+rn) \operatorname{cos.} (m+rn)\phi.$

## S O L U Z I O N E

Il Probl. I. somministra l'equazione  $\operatorname{sen.} m\phi + \operatorname{sen.} (m+n)\phi$   
 $+ \operatorname{sen.} (m+2n)\phi + \operatorname{sen.} (m+3n)\phi \dots + \operatorname{sen.} (m+rn)\phi =$   
 $\frac{\operatorname{sen.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi}{\operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi}$ , la quale differenziata, e  
 divisa per  $d\phi$ , diventa  $m \operatorname{cos.} m\phi + (m+n) \operatorname{cos.} (m+n)\phi$   
 $+ (m+2n) \operatorname{cos.} (m+2n)\phi + (m+3n) \operatorname{cos.} (m+3n)\phi \dots$   
 $+ (m+rn) \operatorname{cos.} (m+rn)\phi =$   
 $\left( (m + \frac{1}{2}rn) \operatorname{cos.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi \right.$   
 $\left. + \frac{1}{2}(r+1)n \operatorname{cos.} \frac{1}{2}(r+1)n\phi \operatorname{sen.} (m + \frac{1}{2}rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2}n\phi \right.$

$$\sim \frac{1}{2} n \operatorname{cof.} \frac{1}{2} n \phi \operatorname{sen.} (m + \frac{1}{2} rn) \phi \operatorname{sen.} \frac{1}{2} (r + 1) n \phi) : \operatorname{sen.} \frac{1}{2} n \phi^2 .$$

Il che era ecc.

C O R O L L A R I O .

Applicando il metodo da me esposto in questi due ultimi Problemi alle serie quivi sommate, cioè differenziando le medesime, egli è manifesto, che si otterrà la somma così de' seni come de' coseni degli angoli aritmeticamente crescenti, anche quando ciascuno di essi verrà moltiplicato pel quadrato del numero moltiplice dell'angolo. E così sempre operando, si giungerà sempre a determinare la somma di siffatte serie quand' anche ciascun seno e coseno venga moltiplicato per qualsivoglia potestà intera del numero moltiplice dell'angolo rispettivo. E perciò saranno sempre sommabili le due serie

$$\text{I}^\circ. m^\lambda \operatorname{sen.} m\phi + (m + n)^\lambda \operatorname{sen.} (m + n)\phi + (m + 2n)^\lambda \operatorname{sen.} (m + 2n)\phi + (m + 3n)^\lambda \operatorname{sen.} (m + 3n)\phi + \dots + (m + rn)^\lambda \operatorname{sen.} (m + rn)\phi$$

$$\text{II}^\circ. m^\lambda \operatorname{cof.} m\phi + (m + n)^\lambda \operatorname{cof.} (m + n)\phi + (m + 2n)^\lambda \operatorname{cof.} (m + 2n)\phi + (m + 3n)^\lambda \operatorname{cof.} (m + 3n)\phi + \dots + (m + rn)^\lambda \operatorname{cof.} (m + rn)\phi, \text{ preso per } \lambda \text{ qualunque numero intero affermativo. In fatti chiamata } S' \text{ la prima di queste due serie, } S'' \text{ la seconda, se si prende } P \text{ per indicare la somma già trovata di } \operatorname{sen.} m\phi + \operatorname{sen.} (m + n)\phi + \operatorname{sen.} (m + 2n)\phi + \dots + \operatorname{sen.} (m + rn)\phi, \text{ e } Q \text{ per denotare la somma nota di } \operatorname{cof.} m\phi + \operatorname{cof.} (m + n)\phi + \operatorname{cof.} (m + 2n)\phi + \dots + \operatorname{cof.} (m + rn)\phi, \text{ si otterranno i seguenti Teoremi.}$$

*Caso I. di  $\lambda$  pari*

TEOREMA I.

TEOREMA II.

$$S' = \pm \frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda} .$$

$$S'' = \pm \frac{d^\lambda Q}{d\phi^\lambda} .$$

In questi due Teoremi i segni superiori vagliono per tutti i numeri pari divisibili per 4, gl' inferiori per li non divisibili.

*Caso II. di  $\lambda$  dispari*

TEOREMA III°.

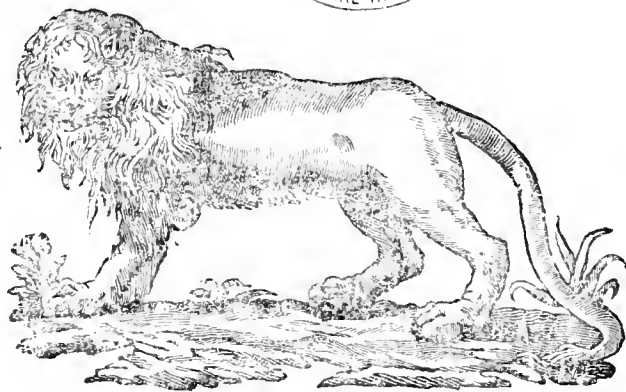
TEOREMA IV°.

$$S' = \pm \frac{d^\lambda Q}{d\phi^\lambda}.$$

$$S'' = \pm \frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda}.$$

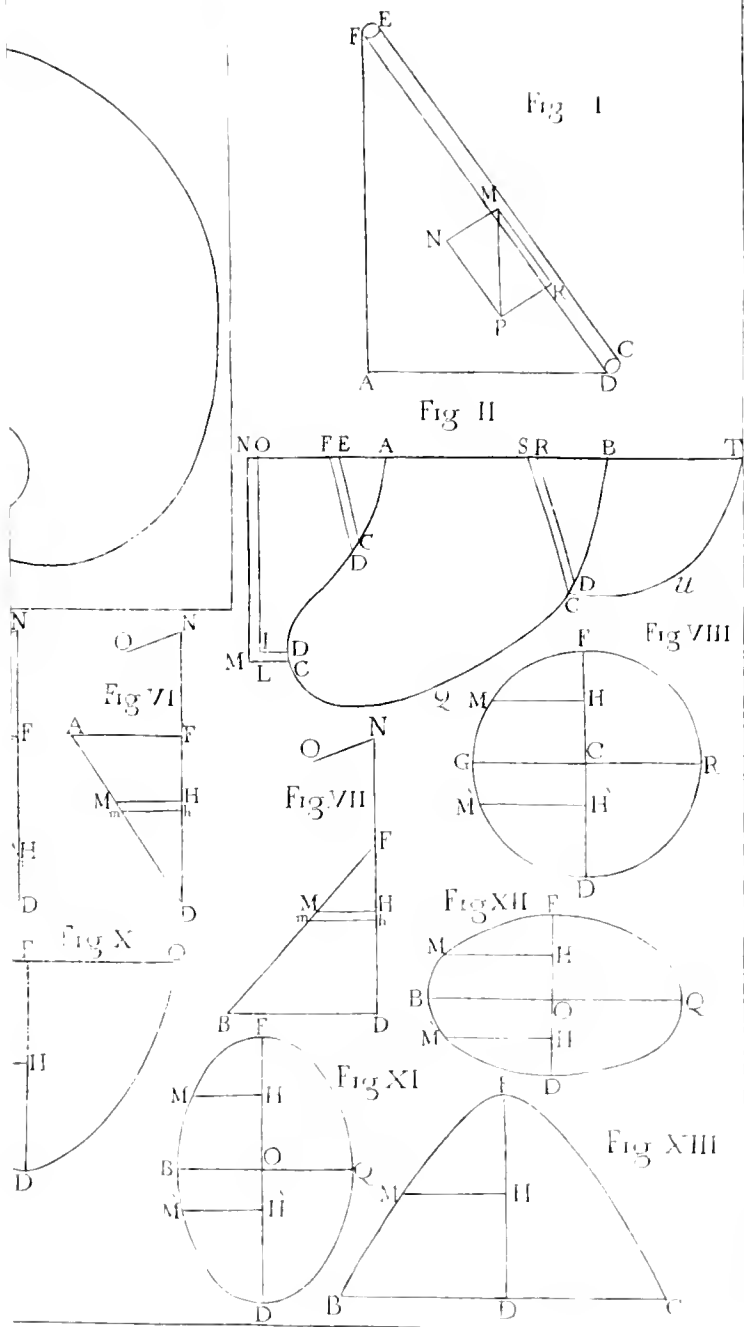
Pel Teorema 3° vale il segno superiore quando il numero  $\lambda$  è della forma  $4n - 1$ , essendo  $n$  qualunque intero a cominciare dall'unità; vale poi il segno inferiore allorchè  $\lambda$  ha la forma  $4n + 1$ , essendo  $n$  qualunque intero, ed anche zero.

Nel Teorema 4° si adopra il segno superiore tutte le volte che  $\lambda$  è  $= 4n + 1$ , essendo  $n$  un intero qualunque, ed anche zero; e si usa il segno inferiore qualora  $\lambda$  è  $= 4n - 1$ , preso per  $n$  qualunque intero, escluso il zero.



NUOVA





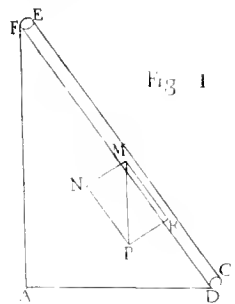
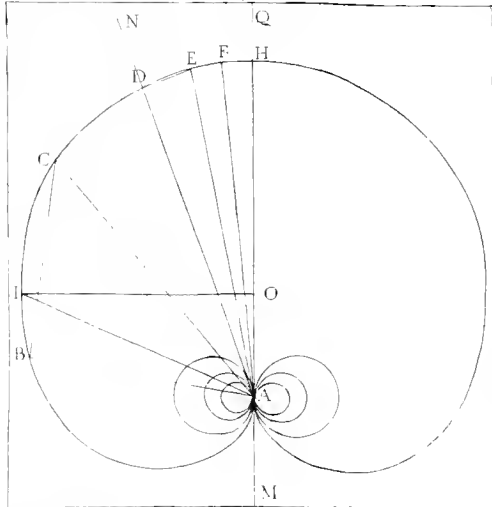


Fig. I

Fig. II

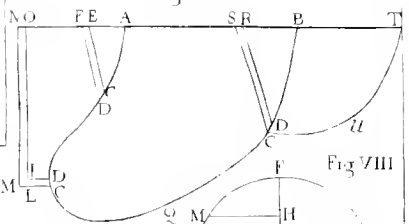


Fig. VIII

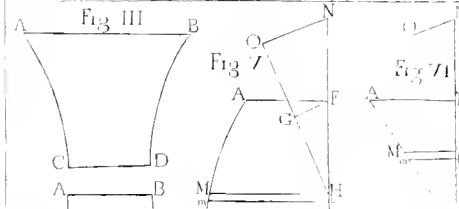


Fig. III

Fig. V

Fig. VI

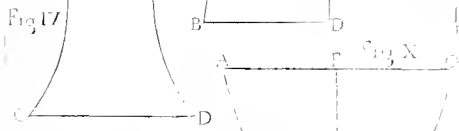


Fig. VII

Fig. VII

Fig. X

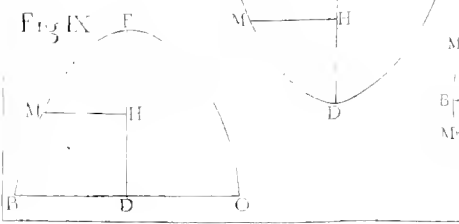


Fig. IX

Fig. XI

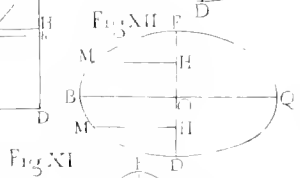
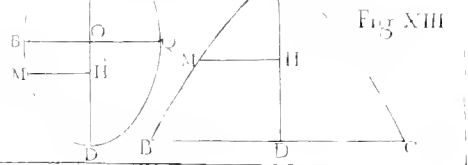


Fig. XII

Fig. XI

Fig. XIII



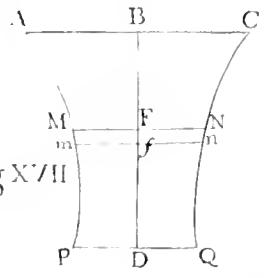
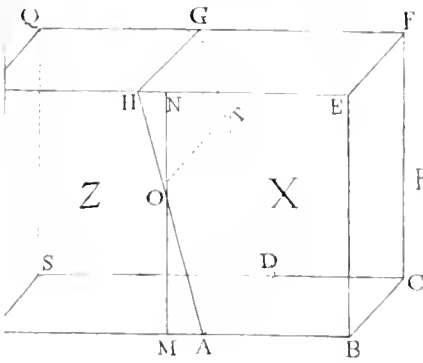


Fig. XVII

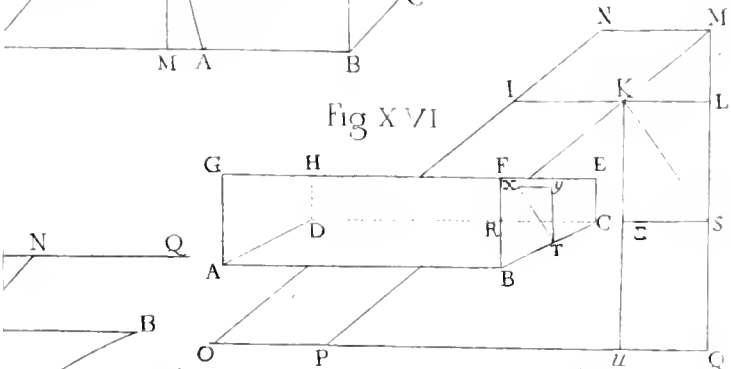


Fig. XVI

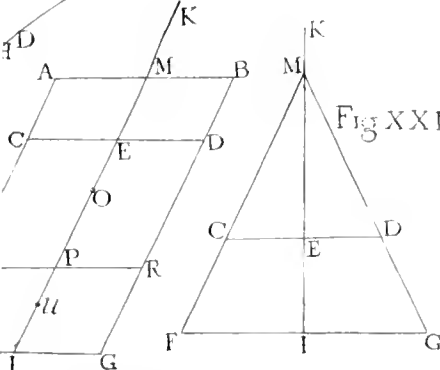


Fig. XXI

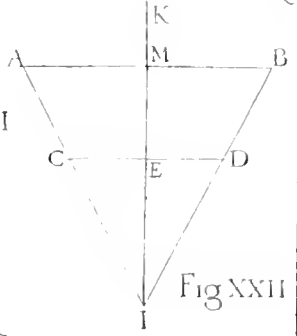


Fig. XXII

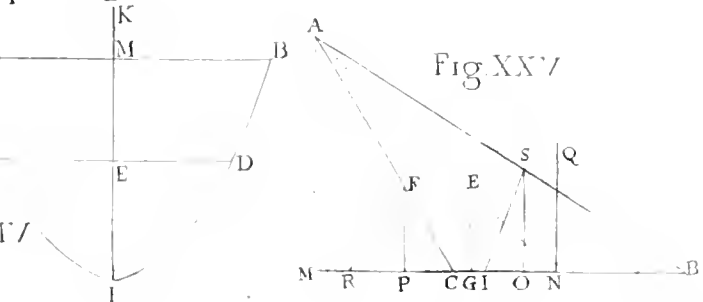


Fig. XXV

I /

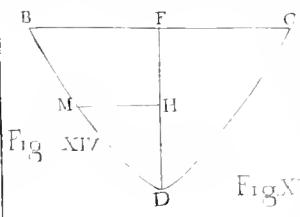


Fig. XIV

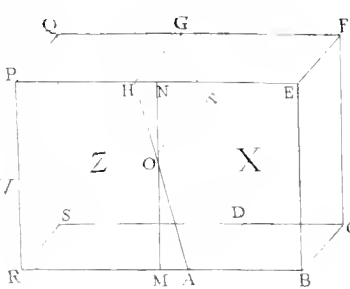


Fig. XV

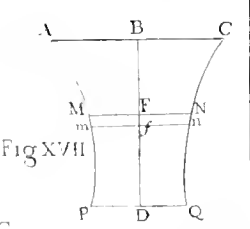


Fig. XVII

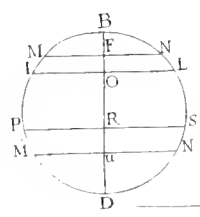


Fig. XVIII

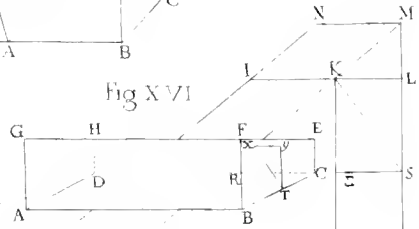


Fig. XVI

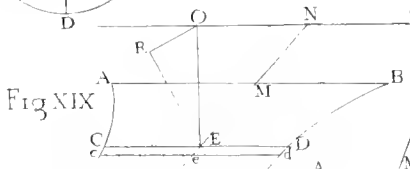


Fig. XIX



Fig. XX

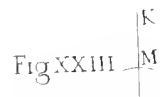


Fig. XXIII

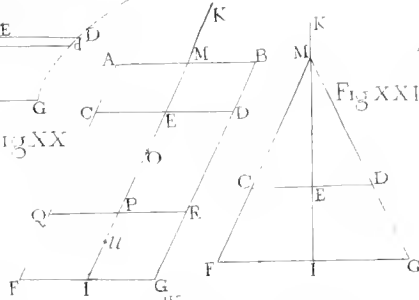


Fig. XXI

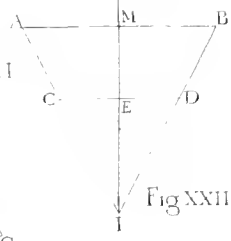


Fig. XXII

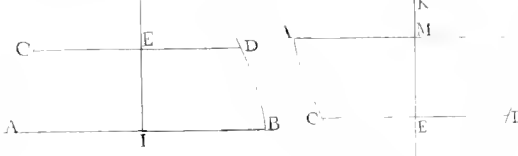


Fig. XXIV

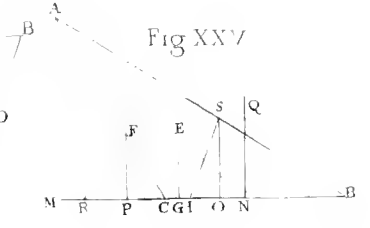


Fig. XXV

